ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2005. Вип.64. С.134–148 *Ser.Mech-Math.2005. Vol.64. P.134–148*

УДК 517.956

РОЗВ'ЯЗОК НЕЛІНІЙНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ВОЛЬТЕРРИ З ОСОБЛИВОСТЯМИ НА МЕЖІ ОБЛАСТІ

Галина ЛОПУШАНСЬКА, Оксана ЧМИР

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Встановлено достатні умови розв'язності та однозначної розв'язності нелінійного інтегрального рівняння Вольтерра з полярним ядром у класі функцій з особливостями на межі області.

Ключові слова: нелінійне інтегральне рівняння; нормований ваговий функціональний простір, неперервний оператор, компактна множина, ядро оператора.

Досліджуючи розв'язність інтегрального рівняння, часто використовують теорему про нерухому точку (див., наприклад, [1] – [3]). Цим методом ми вивчаємо нелінійне інтегральне рівняння Вольтерра з полярним ядром у певному ваговому L_1- просторі та у класах функцій із заданою поведінкою на межі області. Одержані результати застосовують до розв'язності крайових задач для півлінійних параболічних рівнянь з заданими на межі області узагальненими функціями, наприклад, до крайової задачі

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \Delta u(x,t) = F_0(x,t,u(x,t)), \qquad (x,t) \in Q_0,$$

$$u\,|_{Q_1} = F_1(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{Q}_1, \tag{A}$$

$$u\,|_{t=0} = F_2(x), \qquad x \in \overline{\Omega_0},$$

де функція F_0 визначена і неперервна в $Q_0 \times (-\infty, +\infty)(Q_0 = \Omega_0 \times (0,T]$ – циліндрична область, $Q_1 = \partial\Omega_0 \times (0,T])$, F_1, F_2 – узагальнені функції. Використовуючи функцію Гріна $G(x,t;y,\tau)$, розв'язність цієї узагальненої крайової задачі можна звести до розв'язності у певному ваговому L_1-просторі інтегрального рівняння

$$u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\Omega_0} G(x,t;y,\tau)F_0(y,\tau,u(y,\tau))\,dy + (\frac{\partial}{\partial\nu_y}G(x,t;y,\tau),F_1(y,\tau))+$$

$$+(G(x,t;y,0),F_2(y)),\ (x,t)\in Q_0,$$

де (φ,F)– значення узагальненої функції F на основній функції φ.

1. Нехай Ω_0 – область в $\mathbb{R}^n$, $n\in\mathbb{N}$, обмежена замкненою поверхнею S класу C^∞, $Q_0=\Omega_0\times(0,T]$, $0<T<+\infty$.

Для зручності далі використовуватимемо позначення $P=(x,t)$, $M=(y,\tau)$, а також такі позначення [4, с.7], [5, с. 175]:
$|PM| = (|x-y|^2+|t-\tau|)^{\frac{1}{2}}$, де $|x-y|$ – евклідова відстань в $\mathbb{R}^n$,
$E_c(z,t)=exp\{-cz^2t^{-1}\}$, $\widetilde{\Phi}_c^k(z,t)=z^kE_c(z,t)$, $k\in\mathbb{R}$, $z>0$, $t>0$, $c>0$,
$\overline{\eta}=(\eta_1,...,\eta_n,\eta_0)=(\eta,\eta_0)$, $\eta_i\in\mathbb{Z}_+$, $i=\overline{0,n}$, $|\eta|_n=\eta_1+...+\eta_n$, $|\overline{\eta}|'=|\eta|_n+2\eta_0$,
$D^{\overline{\eta}}_{x,t}=\frac{\partial^{|\overline{\eta}|'}}{\partial x_1^{\eta_1}\cdot\ldots\cdot\partial x_n^{\eta_n}\cdot\partial t^{\eta_0}}$.

Нехай $\varrho_1>0$ – таке задане число, що паралельна до S поверхня S_{ϱ_1} є класу $\mathbb{C}^\infty$. Можна вважати, що $\varrho_1\leqslant 1$. Нехай $\widetilde{\varrho}(t)$ – визначена на $[0,T]$, нескінченно диференційовна невід'ємна функція, яка має порядок t при $t\to 0$. Існування такої функції встановлено (див., наприклад [6, с. 74]). Можна вважати $0\leqslant\widetilde{\varrho}(t)\leqslant 1$, $t\in[0,T]$. Нехай $\widehat{h}(t)\in\mathbb{C}^\infty([0,T])$, $0\leqslant\widehat{h}(t)\leqslant 1$, $t\in[0,T]$, $\widehat{h}(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant\frac{\varrho_1}{2},\\ 1, & t\geqslant\varrho_1,\end{cases}$ така функція $\widehat{h}$ існує (див., наприклад [7, с. 89]); $\varrho(t)=\widetilde{\varrho}(t)(1-\widehat{h}(t))+\widehat{h}(t)=\begin{cases}\widetilde{\varrho}(t), & t\leqslant\frac{\varrho_1}{2},\\ 1, & t\geqslant\varrho_1.\end{cases}$
Функція $\varrho(t)$ має властивості функції $\widetilde{\varrho}(t)$ і , крім того, додатна при $t>0$, $\varrho(t)\leqslant 1$, $t\in(0,T]$.

Аналогічно, через $\varrho(x)$ $(x\in\overline{\Omega_0})$ позначаємо нескінченно диференційовну невід'ємну функцію, додатну всередині Ω_0, яка має порядок відстані $d(x)$ від точки x до S біля S та $0\leqslant\varrho(x)\leqslant 1$, $x\in\overline{\Omega_0}$ наприклад,
$\varrho(x)=\begin{cases}\widetilde{\varrho}(d(x)), & d(x)\leqslant\frac{\varrho_1}{2},\\ 1, & d(x)\geqslant\varrho_1.\end{cases}$

Нехай $\varrho(x,t)=\begin{cases}\widetilde{\varrho}(x,t)=\min[\widetilde{\varrho}(d(x)),\sqrt{\widetilde{\varrho}(t)}], & d(x)<\varrho_1,\ \text{або}\ t<\varrho_1,\\ 1, & d(x)\geqslant\varrho_1,\ t\geqslant\varrho_1,\end{cases}$
$0\leqslant\varrho(x,t)\leqslant 1$, $(x,t)\in\overline{Q}_0$, тобто
$\varrho(x,t)=\begin{cases}\widetilde{\varrho}(d(x)) & \text{при}\ d(x)\to 0,\\ \sqrt{\widetilde{\varrho}(t)} & \text{при}\ t\to 0,\\ 1, & \text{всередині області}\ Q_0,\ \text{а саме при}\ d(x)\geqslant\varrho_1\ \text{та}\ t\geqslant\varrho_1.\end{cases}$

Нехай $Q_0=Q_0^1\cup Q_0^2\cup Q_0^3$, де
$Q_0^1=\{(x,t)\in Q_0:\ \varrho(x,t)=\widetilde{\varrho}(d(x))\ \text{та}\ d(x)\leqslant\frac{\varrho_1}{2}\}$,
$Q_0^2=\{(x,t)\in Q_0:\ \varrho(x,t)=\sqrt{\widetilde{\varrho}(t)}\ \text{та}\ \tau<t\leqslant\frac{\varrho_1}{2}\}$,
$Q_0^3=Q_0\setminus\{\overline{Q_0^1\cup Q_0^2}\}$.

Зауважимо, що

$$\begin{aligned}
&E_c\{\varrho(x,t),t\} = \exp\{-c(\min[\widetilde{\varrho}(d(x)),\ \sqrt{\widetilde{\varrho}(t)}\,])^2t^{-1}\} = \\
&= \exp\{-c[\widetilde{\varrho}(d(x))]^2t^{-1}\} = E_c\{\widetilde{\varrho}(d(x)),t\} \text{ в області } Q_0^1, \\
&E_c\{\varrho(x,t),t\} = \exp\{-c\widetilde{\varrho}(t)t^{-1}\} = E_c\{\widetilde{\varrho}(t),t\} \text{ в області } Q_0^2, \\
&E_c\{\varrho(x,t),t\} = E_c\{1,t\} \text{ в області } Q_0^3.
\end{aligned}$$

Введемо ваговий функціональний простір
$\mathcal{M}_k(Q_0)=\{\mathrm{v} : ||\mathrm{v}||_k = \int\limits_{Q_0} \varrho^k(x,t)E_c\{\varrho(x,t),t\}|\mathrm{v}(x,t)|\,dxdt < +\infty\}$, $k \in \mathbb{R}$.
$\mathcal{M}_{k,C}(Q_0) = \{\mathrm{v} \in \mathcal{M}_k(Q_0) : ||\mathrm{v}||_k \leqslant C\}$ – куля радіуса C в просторі $\mathcal{M}_k(Q_0)$.

Нехай

$$(H\mathrm{v})(x,t) = \varkappa \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Omega_0} \mathcal{K}(x,t;y,\tau)F_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))\,dy,\ (x,t) \in Q_0,$$

$$H_1\mathrm{v} = H\mathrm{v} + h_0,$$

де $\mathcal{K}(x,t;y,\tau)$ $((x,t;y,\tau) \in Q_0 \times \overline{Q}_0)$ – ядро оператора H, яке має такі властивості:
1) $\mathcal{K}(x,t;y,\tau) = 0$ при $t < \tau$;
2) $\mathcal{K}(x,t;y,\tau)$ при $(x,t) \neq (y,\tau)$ має похідні до порядку $s+n+2$, для яких в околі діагоналі $(x,t) = (y,\tau)$ правильні оцінки:
$|D^{\overline{\alpha}}_{y,\tau}\mathcal{K}(x,t;y,\tau)| \leqslant C_{\overline{\alpha}}E_c\{|MP|,|t-\tau|\}\,|MP|^{s-|\overline{\alpha}|'}$, де $|\overline{\alpha}|' < s+n+2$,
$-n-2 < s < 0$, $C_{\overline{\alpha}}$ – додатні сталі;
функція $F_0(x,t,\mathrm{v})$ визначена в $Q_0 \times (-\infty,+\infty)$, функція h_0 визначена в Q_0, $\varkappa \in \mathbb{R}$.

Прикладом ядра $\mathcal{K}(x,t;y,\tau)$ є функція Гріна параболічної крайової задачі. Згадана вище функція Гріна $G(x,t;y,\tau)$ першої крайової задачі для рівняння теплопровідності має властивості ядра $\mathcal{K}(x,t;y,\tau)$ при $s=-n$, $n \geqslant 1$.

Аналогічно до результату з [8] доводимо таку властивість ядра $\mathcal{K}(x,t;y,\tau)$.

Лема 1. *При $k > -1$, $-n-2 < s < 0$ та $|\overline{\alpha}|' < s+n+2$ правильні оцінки*

$$|D^{\overline{\alpha}}_{y,\tau} \int\limits_{Q_0} \widetilde{\Phi}^k_c(\varrho(x,t),t)\mathcal{K}(x,t;y,\tau)\,dxdt| \leqslant$$

$$\leqslant C'_{\overline{\alpha}}(k) \begin{cases} E_c\{\widetilde{\varrho}(d(y)),\tau\}([\widetilde{\varrho}(d(y))]^{k+1+s-|\overline{\alpha}|'}+1) & \textit{при } d(y) \to 0, \\ E_c\{\widetilde{\varrho}(\tau),\tau\}([\widetilde{\varrho}(\tau)]^{\frac{k+2+s-|\overline{\alpha}|'}{2}}+1) & \textit{при } \tau \to 0, \\ E_c\{1,\tau\} & \textit{всередині області } Q_0, \end{cases}$$

де $C'_{\overline{\alpha}}(k)$ – додатні сталі, що залежать від k.

Розглянемо інтегральне рівняння

$$\mathrm{v} = H_1\mathrm{v}. \tag{1}$$

Теорема 1. *Нехай* $k > -1$, $-n-2 < s < 0$, $h_0 \in \mathcal{M}_k(Q_0)$, $|\varkappa| < +\infty$, *функція* $F_0(x,t,\mathrm{v})$ *визначена в* $Q_0 \times (-\infty, +\infty)$, *задовольняє умови*

$$\int\limits_{Q_0} E_c\{\varrho(y,\tau),\tau\}(\sqrt{\widetilde{\varrho}(\tau)}[\varrho(y,\tau)]^{k+s+1}+1)|F_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))|\,dyd\tau \leqslant \varphi(||\mathrm{v}||_k),$$

$$\mathrm{v} \in \mathcal{M}_{k,C}(Q_0), \tag{2}$$

$$\int\limits_{Q_0} E_c\{\varrho(y,\tau),\tau\}(\sqrt{\widetilde{\varrho}(\tau)}[\varrho(y,\tau)]^{k+s+1}+1)|F_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau)) - F_0(y,\tau,\mathrm{w}(y,\tau))|\,dyd\tau \leqslant$$

$$\leqslant \psi(||\mathrm{v}-\mathrm{w}||_k),\ \mathrm{v},\mathrm{w} \in \mathcal{M}_{k,C}(Q_0), \tag{3}$$

де функції $\varphi(z)$ *та* $\psi(z)$ *визначені на* $[0,+\infty)$, *неперервні, додатні на* $(0,+\infty)$, $\varphi(z)$ *– монотонно зростаюча та опукла функція,* $\psi(z)$ *– монотонно неспадна функція і* $\psi(0)=0$. *Тоді існує розв'язок інтегрального рівняння (1) в* $\mathcal{M}_k(Q_0)$.

Зауваження 1. Позаяк функція φ – опукла, монотонно зростаюча, додатна на $(0,+\infty)$, то для неї виконується таке: для довільних додатних сталих C_1, C_2 існує така стала $C_0 > 0$, що

$$C_1 + C_2\varphi(C) < C \text{ при } C > C_0.$$

Прикладом такої функції є $\varphi(z) = K_1 z^{\mu}$, $K_1 = const > 0$, $\mu \in (0,1)$.

Доведення теореми 1. Доведення теореми 1 проводимо за допомогою теореми Шаудера [9, с. 235].

Спершу доведемо, що H_1 відображає $\mathcal{M}_{k,C}(Q_0)$ на свою частину.

При $\mathrm{v} \in \mathcal{M}_k(Q_0)$ маємо

$$||H_1\mathrm{v}||_k \leqslant ||(H\mathrm{v})||_k + ||h_0||_k = \int\limits_{Q_0} \widetilde{\Phi}_c^k(\varrho(x,t),t)|\kappa \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Omega_0} \mathcal{K}(x,t;y,\tau)\times$$

$$\times F_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))\,dy|\,dxdt + ||h_0||_k.$$

Розглянемо

$$\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_0} |F_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))|\Big(\int\limits_\tau^T dt \int\limits_{\Omega_0} \widetilde{\Phi}_c^k(\varrho(x,t),t)|\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\,dx\Big)\,dyd\tau. \tag{4}$$

Зі скінченності виразу (4) та теореми Фубіні [7, с. 24] матимемо скінченність $||H\mathrm{v}||_k$. З леми 1 одержуємо

$$\int\limits_\tau^T dt \int\limits_{\Omega_0} \widetilde{\Phi}_c^k(\varrho(x,t),t)|\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\,dx \leqslant C_0'(k)E_c\{\widetilde{\varrho}(d(y)),\tau\}([\widetilde{\varrho}(d(y))]^{k+1+s}+1),$$

$$(y,\tau) \in Q_0^1, \tag{5}$$

$$\int\limits_{\tau}^{T} dt \int\limits_{\Omega_0} \widetilde{\Phi}_c^k(\varrho(x,t),t)|\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\,dx \leqslant C_0'(k)E_c\{\widetilde{\varrho}(\tau),\tau\}([\widetilde{\varrho}(\tau)]^{\frac{k+2+s}{2}}+1),\ (y,\tau)\in Q_0^2 \tag{6}$$

та

$$\int\limits_{\tau}^{T} dt \int\limits_{\Omega_0} \widetilde{\Phi}_c^k(\varrho(x,t),t)|\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\,dx \leqslant C_0'(k)E_c\{1,\tau\},\ (y,\tau)\in Q_0^3, \tag{7}$$

де $C_0'(k)$ – стала з леми 1. при $\overline{\alpha}=(0,...,0)$.

Врахувавши (5), (6), (7), інтеграл (4) оцінюємо інтегралом

$$C_0'(k)\int\limits_{Q_0^1} E_c\{\widetilde{\varrho}(d(y)),\tau\}([\widetilde{\varrho}(d(y))]^{k+1+s}+1)|F_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))|\,dyd\tau + C_0'(k)\int\limits_{Q_0^2} E_c\{\widetilde{\varrho}(\tau),\tau\}\times$$

$$\times([\widetilde{\varrho}(\tau)]^{\frac{k+2+s}{2}}+1)|F_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))|\,dyd\tau + C_0'(k)\int\limits_{Q_0^3} E_c\{1,\tau\}|F_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))|\,dyd\tau \leqslant$$

$$\leqslant C_0'(k)\int\limits_{Q_0} E_c\{\varrho(y,\tau),\tau\}(\sqrt{\widetilde{\varrho}(\tau)}[\varrho(y,\tau)]^{k+s+1}+1)|F_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))|\,dyd\tau.$$

Оскільки $h_0\in\mathcal{M}_k(Q_0)$, то існує додатна стала $C'=||h_0||_k$. Тоді за умови (2) матимемо

$$||H_1\mathrm{v}||_k \leqslant |\varkappa|C_0'(k)\varphi(||\mathrm{v}||_k)+C', \tag{8}$$

так що $||H_1\mathrm{v}||_k<+\infty$ при $\mathrm{v}\in\mathcal{M}_k(Q_0)$. За властивостями функції φ для $\mathrm{v}\in\mathcal{M}_{k,C}(Q_0)$ із (8) одержуємо $||H_1\mathrm{v}||_k\leqslant|\varkappa|C_0'(k)\varphi(C)+C'$, а тоді згідно з зауваженням 1 існує стала $C_0>0$ така, що $||H_1\mathrm{v}||_k<C$ для всіх $C>C_0$. Отож, випуклу замкнену обмежену підмножину $\mathcal{M}_{k,C}(Q_0)$ простору $\mathcal{M}_k(Q_0)$ оператор H_1 відображає в себе.

Доведемо, що H_1 є неперервним оператором на $\mathcal{M}_{k,C}(Q_0)$.

Для $\mathrm{v},\mathrm{w}\in\mathcal{M}_{k,C}(Q_0)$ маємо

$$||H_1\mathrm{v}-H_1\mathrm{w}||_k \leqslant |\varkappa|\int\limits_{Q_0}\widetilde{\Phi}_c^k(\varrho(x,t),t)\Big(\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\Omega_0}|\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\times$$

$$\times|F_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))-F_0(y,\tau,\mathrm{w}(y,\tau))|\,dy\Big)\,dxdt. \tag{9}$$

Розглянемо

$$\int\limits_{Q_0}|F_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))-F_0(y,\tau,\mathrm{w}(y,\tau))|\Big(\int\limits_{\tau}^{T} dt\int\limits_{\Omega_0}\widetilde{\Phi}_c^k(\varrho(x,t),t)|\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\,dx\Big)\,dyd\tau.$$

Використовуючи (5), (6), (7), одержуємо оцінку цього інтеграла

$$C_0'(k)\int\limits_{Q_0^1} E_c\{\widetilde{\varrho}(d(y)),\tau\}([\widetilde{\varrho}(d(y))]^{k+1+s}+1)|F_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))-F_0(y,\tau,\mathrm{w}(y,\tau))|\,dyd\tau+$$

$$+C_0'(k)\int\limits_{Q_0^2} E_c\{\widetilde{\varrho}(\tau),\tau\}([\widetilde{\varrho}(\tau)]^{\frac{k+2+s}{2}}+1)|F_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))-F_0(y,\tau,\mathrm{w}(y,\tau))|\,dyd\tau+$$

$$+C_0'(k)\int\limits_{Q_0^3} E_c\{1,\tau\}|F_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))-F_0(y,\tau,\mathrm{w}(y,\tau))|\,dyd\tau\leqslant C_0'(k)\int\limits_{Q_0} E_c\{\varrho(y,\tau),\tau\}\times$$

$$\times(\sqrt{\widetilde{\varrho}(\tau)}[\varrho(y,\tau)]^{k+s+1}+1)|F_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))-F_0(y,\tau,\mathrm{w}(y,\tau))|\,dyd\tau.$$

Звідси та з (3), (9) і теореми Фубіні випливає, що $||H_1\mathrm{v}-H_1\mathrm{w}||_k\leqslant|\varkappa|C_0'(k)\psi(||\mathrm{v}-\mathrm{w}||_k)$, $\mathrm{v},\mathrm{w}\in\mathcal{M}_{k,C}(Q_0)$. За властивістю функції ψ одержуємо, що оператор H_1 є неперервним на $\mathcal{M}_{k,C}(Q_0)$.

Покажемо, що множина $\{H_1\mathrm{v}:\mathrm{v}\in\mathcal{M}_{k,C}(Q_0)\}$ – відносно компактна в $\mathcal{M}_k(Q_0)$. Оскільки $\widetilde{\Phi}_c^k(\varrho(x,t),t)\mathrm{v}(x,t)\in\mathbf{L}_1(Q_0)$ при $\mathrm{v}\in\mathcal{M}_k(Q_0)$, то за теоремою Рісса [10, с. 242] для цього необхідно і достатньо, щоб виконувались умови:
a) існує така стала $C_3>0$, що $||H_1\mathrm{v}||_k\leqslant C_3$ для довільної $\mathrm{v}\in\mathcal{M}_{k,C}(Q_0)$;
b) для довільного $\varepsilon>0$ існує таке $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, що для $(z,s)\in Q_0$, $|z|\le\delta$, $|s|\le\delta$ та довільної $\mathrm{v}\in\mathcal{M}_{k,C}(Q_0)$

$$\int\limits_{Q_0}|\widetilde{?}\Phi_c^k(\varrho(x+z,t+s),t+s)(H_1\mathrm{v})(x+z,t+s)-\widetilde{?}\Phi_c^k(\varrho(x,t),t)(H_1\mathrm{v})(x,t)|\,dxdt\leqslant\varepsilon.$$

Твердження *a* доведено вище.

Позаяк $\widetilde{\Phi}_c^k(\varrho(x,t),t)\mathrm{v}(x,t)\in\mathbf{L}_1(Q_0)$ при $\mathrm{v}\in\mathcal{M}_k(Q_0)$, то за теоремою про неперервність в цілому функцій з $\mathbf{L}_p(Q_0)$, $1\leqslant p<+\infty$ [11, с. 21] одержуємо виконання умови *b*. Теорема 1 доведена.

Наслідок 1. *Замінимо умову (2) умовою скінченості лівої частини (2) при всіх* $\mathrm{v}\in\mathcal{M}_k(Q_0)$ *і нехай (3) виконується для довільних* $\mathrm{v},\mathrm{w}\in\mathcal{M}_k(Q_0)$ *з функцією* $\psi(z)=K_2z$, *де* K_2 *– додатна стала. Тоді існує така стала* $\varkappa_0>0$ ($\varkappa_0=\frac{1}{K_2C_0'(k)}$), *що при* $|\varkappa|<\varkappa_0$ *інтегральне рівняння (1) однозначно розв'язне в* $\mathcal{M}_k(Q_0)$. *У цьому випадку оператор* H_1 *– стиснений.*

Зауваження 2. Функція $F_0(x,t,\mathrm{v})=|\mathrm{v}|^{1+\beta}$ при $-1<\beta<\min\{\frac{1-n}{k+1};-\frac{k}{k+1}\}$, $k>n-2$ задовольняє умови (2) та (3) із функціями $\varphi(z)=K_1z^{1+\beta}$, $\psi(z)=K_2z^{1+\beta}$ та $s=-n$, де K_1, K_2 – додатні сталі.

Розглянемо у просторі $\mathcal{M}_k(Q_0)$ інтегральне рівняння

$$\mathrm{v}(x,t)=\varkappa\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\Omega_0}\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\mathrm{v}(y,\tau)|^{1+\beta}\,dy+h_0(x,t).\tag{10}$$

З теореми 1 та зауваження 2 випливає наслідок.

Наслідок 2. *Нехай* $k > n-2$, $s = -n$, $-1 < \beta < \min\{\frac{1-n}{k+1}; -\frac{k}{k+1}\}$, $h_0 \in \mathcal{M}_k(Q_0)$. *Тоді для довільного* $\varkappa \in \mathbb{R}$ *існує розв'язок інтегрального рівняння (10) у просторі* $\mathcal{M}_k(Q_0)$.

У [12] встановлено розв'язність першої крайової задачі (A) у просторі $\mathcal{M}_k(Q_0)$ при $k > \max\{q_1, q_2 - 1\} + n$, $F_0(x,t,\mathrm{v}) = |\mathrm{v}|^{1+\beta}$, де $-1 < \beta < 0$, $s(F_1) \leqslant q_1$, $s(F_2) \leqslant q_2$ ($s(F)$ – порядок сингулярності узагальненої функції F). Задача зводиться до інтегрального рівняння (10) при $h_0 = (\frac{\partial}{\partial\nu_y} G(x,t;y,\tau), F_1(y,\tau)) +$
$+ (G(x,t;y,0), F_2(y))$.

2. Введемо функціональні простори

$$\mathcal{M}_{\alpha_1,\alpha_2}(Q_0, \partial Q_0) = \left\{\mathrm{v} : \mathrm{v}(y,\tau) = \left\{ \begin{array}{l} O([\widetilde{\varrho}(d(y))]^{\alpha_1} E_c\{\widetilde{\varrho}(d(y)),\tau\}),\ d(y) \to 0, \\ O([\widetilde{\varrho}(\tau)]^{\frac{\alpha_2}{2}} E_c\{\widetilde{\varrho}(\tau),\tau\}),\ \tau \to 0, \\ O(E_c\{1,\tau\}) \text{ всередині області } Q_0 \end{array} \right. \right\},$$

$c > 0$, $k \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$,
$\mathcal{M}_{k,\alpha_1,\alpha_2}(Q_0) = \mathcal{M}_{\alpha_1,\alpha_2}(Q_0, \partial Q_0) \cap \mathcal{M}_k(Q_0)$.

Оскільки при $\mathrm{v} \in \mathcal{M}_{\alpha_1,\alpha_2}(Q_0, \partial Q_0)$, $k + \alpha_1 > -1$ та $\frac{k}{2} + \frac{\alpha_2}{2} > -1$ існують такі додатні сталі $\widehat{C}_1$, $\widehat{C}_2$, $\widehat{C}_3$, що
$$||\mathrm{v}||_k = \int_{Q_0} \widetilde{\Phi}_c^k(\varrho(y,\tau),\tau)|\mathrm{v}(y,\tau)|\, dyd\tau \leqslant \widehat{C}_1 \int_{Q_0^1} [\widetilde{\varrho}(d(y))]^{k+\alpha_1} E_{2c}\{\widetilde{\varrho}(d(y)),\tau\}\, dyd\tau +$$
$$+ \widehat{C}_2 \int_{Q_0^2} [\widetilde{\varrho}(\tau)]^{\frac{k+\alpha_2}{2}} E_{2c}\{\widetilde{\varrho}(\tau),\tau\}\, dyd\tau + \widehat{C}_3 \int_{Q_0^3} E_{2c}\{1,\tau\}\, dyd\tau = I_1\widehat{C}_1 + I_2\widehat{C}_2 + I_3\widehat{C}_3 <$$
$< +\infty$, то $\mathcal{M}_{k,\alpha_1,\alpha_2}(Q_0) \neq \emptyset$ при $\alpha_i > -k - i$, $i = 1,2$.

Нехай $\mathcal{M}_{\alpha_1,\alpha_2}^{\widetilde{C}_1,\widetilde{C}_2,\widetilde{C}_3}(Q_0, \partial Q_0) = \{\mathrm{v} \in \mathcal{M}_{\alpha_1,\alpha_2}(Q_0, \partial Q_0) :$
$$\left\{ \begin{array}{l} \max\limits_{(y,\tau)\in\overline{Q}_0^1} [\widetilde{\varrho}(d(y))]^{-\alpha_1} E_{-c}\{\widetilde{\varrho}(d(y)),\tau\} \cdot |\mathrm{v}(y,\tau)| \leqslant \widetilde{C}_1, \\ \max\limits_{(y,\tau)\in\overline{Q}_0^2} [\widetilde{\varrho}(\tau)]^{-\frac{\alpha_2}{2}} E_{-c}\{\widetilde{\varrho}(\tau),\tau\} \cdot |\mathrm{v}(y,\tau)| \leqslant \widetilde{C}_2, \\ \max\limits_{(y,\tau)\in\overline{Q}_0^3} E_{-c}\{1,\tau\} \cdot |\mathrm{v}(y,\tau)| \leqslant \widetilde{C}_3, \end{array} \right. ,$$
$\mathcal{M}_{k,\alpha_1,\alpha_2}^{\widetilde{C}_1,\widetilde{C}_2,\widetilde{C}_3}(Q_0) = \mathcal{M}_{\alpha_1,\alpha_2}^{\widetilde{C}_1,\widetilde{C}_2,\widetilde{C}_3}(Q_0, \partial Q_0) \cap \mathcal{M}_k(Q_0)$.
$\mathcal{M}_{k,\alpha_1,\alpha_2,C}(Q_0) = \{\mathrm{v} \in \mathcal{M}_{k,\alpha_1,\alpha_2}(Q_0) : \exists \widetilde{C}_1 > 0,\ \widetilde{C}_2 > 0,\ \widetilde{C}_3 > 0$, за яких
$\mathrm{v} \in \mathcal{M}_{k,\alpha_1,\alpha_2}^{\widetilde{C}_1,\widetilde{C}_2,\widetilde{C}_3}(Q_0)$ і $||\mathrm{v}||_k \leqslant C\}$.

Якщо $\mathrm{v} \in \mathcal{M}_{k,\alpha_1,\alpha_2}^{\widetilde{C}_1,\widetilde{C}_2,\widetilde{C}_3}(Q_0)$, то $||\mathrm{v}||_k \leqslant C$ при $C \geqslant I_1\widetilde{C}_1 + I_2\widetilde{C}_2 + I_3\widetilde{C}_3$, тому також $\mathrm{v} \in \mathcal{M}_{k,\alpha_1,\alpha_2,C}(Q_0)$.

Нехай $h_0 \in \mathcal{M}_{l_1,l_2}(Q_0, \partial Q_0)$, де $l_1 \in \mathbb{R}$, $l_2 \in \mathbb{R}$. Із зробленого зауваження випливає, що $h_0 \in \mathcal{M}_k(Q_0)$ при $l_i > -k - i$, $i = \overline{1,2}$, $h_0 \in \mathcal{M}_{k,\alpha_1,\alpha_2}(Q_0)$ при $l_i \geqslant \alpha_i > -k - i$, $i = \overline{1,2}$.

Розглянемо інтегральне рівняння (10) при $\beta > 0$, $\varkappa \in \mathbb{R}$ та $h_0 \in \mathcal{M}_{k,\alpha_1,\alpha_2}(Q_0)$.

Лема 2. *Нехай* $\beta > 0$, $k > -1$, $-n-2 < s < 0$,
$\alpha_1 > \max\{-\frac{s+k+2}{1+\beta}; -\frac{1}{1+\beta}; -k-1\}$,
$\alpha_2 > \max\{-\frac{s+k+4}{1+\beta}; -\frac{2}{1+\beta}; -k-2\}$, $\widetilde{C}_1$, $\widetilde{C}_2$, $\widetilde{C}_3$ *– додатні сталі.*

Функція $F_0(x,t,\mathrm{v}) = |\mathrm{v}|^{1+\beta}$ *задовольняє умови (2) та (3) для довільних* $\mathrm{v} \in \mathcal{M}_{k,\alpha_1,\alpha_2}^{\widetilde{C}_1,\widetilde{C}_2,\widetilde{C}_3}(Q_0)$ *із функціями* $\varphi(z) = K_1 z^\mu$, $\psi(z) = K_2 z^\mu$, *де* $\mu \in (0,1)$, K_1, K_2 – *додатні сталі.*

Доведення. Оцінимо при $\mathrm{v} \in \mathcal{M}_{k,\alpha_1,\alpha_2}^{\widetilde{C}_1,\widetilde{C}_2,\widetilde{C}_3}(Q_0)$ ліву частину (2), вводячи параметр $\mu \in (0,1)$. Матимемо

$$\int\limits_{Q_0} E_c\{\varrho(y,\tau),\tau\}(\sqrt{\widetilde{\varrho}(\tau)}[\varrho(y,\tau)]^{k+s+1}+1)|\mathrm{v}(y,\tau)|^{\mu+(1+\beta-\mu)}\,dyd\tau =$$

$$= \int\limits_{Q_0^1} E_c\{\widetilde{\varrho}(d(y)),\tau\}([\widetilde{\varrho}(d(y))]^{k+s+1}+1)|\mathrm{v}(y,\tau)|^{\mu+(1+\beta-\mu)}\,dyd\tau + \int\limits_{Q_0^2} E_c\{\widetilde{\varrho}(\tau),\tau\}\times$$

$$\times([\widetilde{\varrho}(\tau)]^{\frac{k+s+2}{2}}+1)|\mathrm{v}(y,\tau)|^{\mu+(1+\beta-\mu)}\,dyd\tau + 2\int\limits_{Q_0^3} E_c\{1,\tau\}|\mathrm{v}(y,\tau)|^{\mu+(1+\beta-\mu)}\,dyd\tau \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{C}_1^{1+\beta-\mu}\int\limits_{Q_0^1} E_c\{\widetilde{\varrho}(d(y)),\tau\}[\widetilde{\varrho}(d(y))]^{\alpha_1(1+\beta-\mu)}([\widetilde{\varrho}(d(y))]^{k+s+1}+1)\times$$

$$\times E_{c(1+\beta-\mu)}\{\widetilde{\varrho}(d(y)),\tau\}|\mathrm{v}(y,\tau)|^{\mu}\,dyd\tau + \widetilde{C}_2^{1+\beta-\mu}\int\limits_{Q_0^2} E_c\{\widetilde{\varrho}(\tau),\tau\}([\widetilde{\varrho}(\tau)]^{\frac{k+s+2}{2}}+1)\times$$

$$\times[\widetilde{\varrho}(\tau)]^{\frac{\alpha_2(1+\beta-\mu)}{2}}E_{c(1+\beta-\mu)}\{\widetilde{\varrho}(\tau),\tau\}|\mathrm{v}(y,\tau)|^{\mu}\,dyd\tau + 2\widetilde{C}_3^{1+\beta-\mu}\int\limits_{Q_0^3} E_c\{1,\tau\}\times$$

$$\times E_{c(1+\beta-\mu)}\{1,\tau\}|\mathrm{v}(y,\tau)|^{\mu}\,dyd\tau.$$

Використовуючи нерівність Гельдера і те, що $1+\beta-\mu>0$, оцінюємо зверху останній інтеграл таким:

$$\widetilde{C}_1^{1+\beta-\mu}\int\limits_{Q_0^1}\Big(E_c\{\varrho(y,\tau),\tau\}\varrho^k(y,\tau)|\mathrm{v}(y,\tau)|\Big)^{\mu}E_{c(1-\mu)}\{\varrho(y,\tau),\tau\}[\widetilde{\varrho}(d(y))]^{-k\mu}\times$$

$$\times([\widetilde{\varrho}(d(y))]^{k+s+1+\alpha_1(1+\beta-\mu)}+[\widetilde{\varrho}(d(y))]^{\alpha_1(1+\beta-\mu)})\,dyd\tau + \widetilde{C}_2^{1+\beta-\mu}\int\limits_{Q_0^2}\Big(E_c\{\varrho(y,\tau),\tau\}\times$$

$$\times\varrho^k(y,\tau)|\mathrm{v}(y,\tau)|\Big)^{\mu}E_{c(1-\mu)}\{\varrho(y,\tau),\tau\}[\widetilde{\varrho}(\tau)]^{-\frac{k\mu}{2}}([\widetilde{\varrho}(\tau)]^{\frac{k+s+2+\alpha_2(1+\beta-\mu)}{2}}+$$

$$+[\widetilde{\varrho}(\tau)]^{\frac{\alpha_2(1+\beta-\mu)}{2}})\,dyd\tau + 2\widetilde{C}_3^{1+\beta-\mu}\int\limits_{Q_0^3}\Big(E_c\{\varrho(y,\tau),\tau\}\varrho^k(y,\tau)|\mathrm{v}(y,\tau)|\Big)^{\mu}\times$$

$$\times E_{c(1-\mu)}\{\varrho(y,\tau),\tau\}\, dyd\tau \leqslant a(\mu)||\mathrm{v}||_k^{\mu}\Big[\widetilde{C}_1^{1+\beta-\mu}\Big(\int\limits_{Q_0^1} E_c\{\varrho(y,\tau),\tau\}\times$$

$$\times \sup_{(y,\tau)\in\overline{Q}_0}\{[\widetilde{\varrho}(d(y))]^{\frac{-k\mu+k+s+1+\alpha_1(1+\beta-\mu)}{1-\mu}};[\widetilde{\varrho}(d(y))]^{\frac{-k\mu+\alpha_1(1+\beta-\mu)}{1-\mu}}\}\, dyd\tau\Big)^{1-\mu}+\widetilde{C}_2^{1+\beta-\mu}\times$$

$$\times\Big(\int\limits_{Q_0^2}E_c\{\varrho(y,\tau),\tau\}\sup_{(y,\tau)\in\overline{Q}_0}\{[\widetilde{\varrho}(\tau)]^{\frac{-k\mu+k+s+2+\alpha_2(1+\beta-\mu)}{2(1-\mu)}};[\widetilde{\varrho}(\tau)]^{\frac{-k\mu+\alpha_2(1+\beta-\mu)}{2(1-\mu)}}\}\, dyd\tau\Big)^{1-\mu}\Big]+$$

$$+2||\mathrm{v}||_k^{\mu}\widetilde{C}_3^{1+\beta-\mu}\Big(\int\limits_{Q_0^3}E_c\{\varrho(y,\tau),\tau\}\, dyd\tau\Big)^{1-\mu}=$$

$$=(a(\mu)[(\widetilde{C}_1^{1+\beta-\mu}\mathcal{I}_1^{1-\mu}+\widetilde{C}_2^{1+\beta-\mu}\mathcal{I}_2^{1-\mu}]+2\widetilde{C}_3^{1+\beta-\mu}\mathcal{I}_3^{1-\mu})||\mathrm{v}||_k^{\mu}=K_1(\beta,\,\mu,\,k)||\mathrm{v}||_k^{\mu},$$

де $a(\mu)$ – стала, що залежить від μ,
а інтеграл $\mathcal{I}_1$ збігається при $\begin{cases}\frac{-k\mu+k+s+1+\alpha_1(1+\beta-\mu)}{1-\mu}>-1,\\ \frac{-k\mu+\alpha_1(1+\beta-\mu)}{1-\mu}>-1,\end{cases}$ тобто
$\alpha_1>\max\{\frac{\mu(k+1)-k-s-2}{1+\beta-\mu};\frac{\mu(k+1)-1}{1+\beta-\mu}\}$, $k>-1$, інтеграл $\mathcal{I}_2$ збігається при
$\begin{cases}\frac{-k\mu+k+s+2+\alpha_2(1+\beta-\mu)}{2(1-\mu)}>-1,\\ \frac{-k\mu+\alpha_2(1+\beta-\mu)}{2(1-\mu)}>-1,\end{cases}$ тобто $\alpha_2>\max\{\frac{\mu(k+2)-k-s-4}{1+\beta-\mu};\frac{\mu(k+2)-2}{1+\beta-\mu}\}$,
$k>-1$, $\mathcal{I}_3$ – власний інтеграл.

Отже, якщо

$$\alpha_1>\max\{\frac{\mu(k+1)-s-k-2}{1+\beta-\mu};\frac{\mu(k+1)-1}{1+\beta-\mu}\},$$

$$\alpha_2>\max\{\frac{\mu(k+2)-k-s-4}{1+\beta-\mu};\frac{\mu(k+2)-2}{1+\beta-\mu}\},\ k>-1, \qquad (11)$$

то умова (2) виконується при $\varphi(z)=K_1(\beta,\,\mu,\,k)z^{\mu}$, $\mu\in(0,1)$.

Із нерівності $a^{\lambda}-b^{\lambda}\leqslant R(\lambda)(a-b)(a+b)^{\lambda-1}$, де a, b, λ, $R(\lambda)$ – додатні сталі [11, с. 133] при $a=|\mathrm{v}(y,\tau)|^{\mu}$, $b=|\mathrm{w}(y,\tau)|^{\mu}$, $\lambda=\frac{1+\beta}{\mu}>1$ одержуємо
$||\mathrm{v}(y,\tau)|^{\mu\frac{1+\beta}{\mu}}-|\mathrm{w}(y,\tau)|^{\mu\frac{1+\beta}{\mu}}|\leqslant R_1(\beta,\mu)||\mathrm{v}(y,\tau)|^{\mu}-|\mathrm{w}(y,\tau)|^{\mu}|\cdot||\mathrm{v}(y,\tau)|^{\mu}+$
$+|\mathrm{w}(y,\tau)|^{\mu}|^{\frac{1+\beta}{\mu}-1}$, де $R_1(\beta,\mu)=R(\frac{1+\beta}{\mu})$.

Оцінюємо при v, w $\in\mathcal{M}_{k,\alpha_1,\alpha_2}^{\widetilde{C}_1,\widetilde{C}_2,\widetilde{C}_3}(Q_0)$ ліву частину (3):

$$\int\limits_{Q_0}E_c\{\varrho(y,\tau),\tau\}(\sqrt{\widetilde{\varrho}(\tau)}[\varrho(y,\tau)]^{k+s+1}+1)\cdot||\mathrm{v}(y,\tau)|^{1+\beta}-|\mathrm{w}(y,\tau)|^{1+\beta}|\, dyd\tau=$$

$$=\int\limits_{Q_0^1}E_c\{\widetilde{\varrho}(d(y)),\tau\}([\widetilde{\varrho}(d(y))]^{k+s+1}+1)||\mathrm{v}(y,\tau)|^{1+\beta}-|\mathrm{w}(y,\tau)|^{1+\beta}|\, dyd\tau+\int\limits_{Q_0^2}E_c\{\widetilde{\varrho}(\tau),\tau\}\times$$

$$\times([\widetilde{\varrho}(\tau)]^{\frac{k+s+2}{2}}+1)\cdot||\mathrm{v}(y,\tau)|^{1+\beta}-|\mathrm{w}(y,\tau)|^{1+\beta}|\,dyd\tau+2\int\limits_{Q_0^3}E_c\{1,\tau\}||\mathrm{v}(y,\tau)|^{1+\beta}-$$

$$-|\mathrm{w}(y,\tau)|^{1+\beta}|\,dyd\tau\leqslant\widetilde{C}_1(\beta,\mu)\int\limits_{Q_0^1}E_c\{\widetilde{\varrho}(d(y)),\tau\}([\widetilde{\varrho}(d(y))]^{k+s+1}+1)[\widetilde{\varrho}(d(y))]^{\alpha_1(1+\beta-\mu)}\times$$

$$\times E_{c(1+\beta-\mu)}\{\widetilde{\varrho}(d(y)),\tau\}|\mathrm{v}(y,\tau)-\mathrm{w}(y,\tau)|^{\mu}\,dyd\tau+\widetilde{C}_2(\beta,\mu)\int\limits_{Q_0^2}E_c\{\widetilde{\varrho}(\tau),\tau\}\times$$

$$\times([\widetilde{\varrho}(\tau)]^{\frac{k+s+2}{2}}+1)[\widetilde{\varrho}(\tau)]^{\frac{\alpha_2(1+\beta-\mu)}{2}}E_{c(1+\beta-\mu)}\{\widetilde{\varrho}(\tau),\tau\}|\mathrm{v}(y,\tau)-\mathrm{w}(y,\tau)|^{\mu}\,dyd\tau+$$

$$+2\widetilde{C}_3(\beta,\mu)\int\limits_{Q_0^3}E_c\{1,\tau\}E_{c(1+\beta-\mu)}\{1,\tau\}|\mathrm{v}(y,\tau)-\mathrm{w}(y,\tau)|^{\mu}\,dyd\tau,$$

де $\widetilde{C}_i(\beta,\mu)=a_1(\mu)R_1(\beta,\mu)\cdot\widetilde{C}_i^{1+\beta-\mu}$, $i=\overline{1,3}$, $a_1(\mu)=const>0$. Використовуючи нерівність Гельдера, оцінюємо одержаний вираз таким:

$$a(\mu)||\mathrm{v}-\mathrm{w}||_k^{\mu}\Big[\widetilde{C}_1(\beta,\mu)\Big(\int\limits_{Q_0^1}E_c\{\varrho(y,\tau),\tau\}\times$$

$$\times\sup_{(y,\tau)\in\overline{Q}_0}\{[\widetilde{\varrho}(d(y))]^{\frac{-k\mu+\alpha_1(1+\beta-\mu)+k+s+1}{1-\mu}};[\widetilde{\varrho}(d(y))]^{\frac{-k\mu+\alpha_1(1+\beta-\mu)}{1-\mu}}\}\,dyd\tau\Big)^{1-\mu}+\widetilde{C}_2(\beta,\mu)\times$$

$$\times\Big(\int\limits_{Q_0^2}E_c\{\varrho(y,\tau),\tau\}\sup_{(y,\tau)\in\overline{Q}_0}\{[\widetilde{\varrho}(\tau)]^{\frac{-k\mu+\alpha_2(1+\beta-\mu)+k+s+2}{2(1-\mu)}};[\widetilde{\varrho}(\tau)]^{\frac{-k\mu+\alpha_2(1+\beta-\mu)}{2(1-\mu)}}\}\,dyd\tau\Big)^{1-\mu}\Big]+$$

$$+2||\mathrm{v}-\mathrm{w}||_k^{\mu}\widetilde{C}_3(\beta,\mu)\Big(\int\limits_{Q_0^3}E_c\{\varrho(y,\tau),\tau\}\,dyd\tau\Big)^{1-\mu}=(a(\mu)[\widetilde{C}_1(\beta,\mu)\mathcal{I}_1^{1-\mu}+\widetilde{C}_2(\beta,\mu)\mathcal{I}_2^{1-\mu}]+$$

$$+2\widetilde{C}_3(\beta,\mu)\mathcal{I}_3^{1-\mu})||\mathrm{v}-\mathrm{w}||_k^{\mu}=K_2(\beta,\,\mu,\,k)||\mathrm{v}-\mathrm{w}||_k^{\mu},$$

де інтеграли $\mathcal{I}_1$ та $\mathcal{I}_2$, збігаються при α_1 та α_2, що задовольняють (11).

Умови (11) рівнозначні тому, що $\begin{cases}\mu<\frac{(1+\beta)\alpha_1+s+k+2}{1+k+\alpha_1},\\ \mu<\frac{(1+\beta)\alpha_1+1}{1+k+\alpha_1},\\ \mu<\frac{(1+\beta)\alpha_2+s+k+4}{2+k+\alpha_2},\\ \mu<\frac{(1+\beta)\alpha_2+2}{2+k+\alpha_2},\end{cases}$

оскільки $1+\beta-\mu>0$, $\alpha_i>-k-i$, $i=\overline{1,2}$. За довільністю параметра $\mu\in(0,1)$ та враховуючи, що $\alpha_i>-k-i$, $i=\overline{1,2}$, при $k>-1$, $\alpha_1>\max\{-\frac{s+k+2}{1+\beta};-\frac{1}{1+\beta};\,-k-1\}$, $\alpha_2>\max\{-\frac{s+k+4}{1+\beta};-\frac{2}{1+\beta};-k-2\}$ одержуємо виконання (11), а отже, функція $F_0(x,t,\mathrm{v})=|\mathrm{v}|^{1+\beta}$ задовольняє (2) та (3) в класі $\mathcal{M}_{k,\,\alpha_1,\,\alpha_2}^{\widetilde{C}_1,\widetilde{C}_2,\widetilde{C}_3}(Q_0)$. Лема 2 доведена.

Лема 3. *Нехай* $k > -1$, $-n-2 < s < 0$, $\beta > 0$, $h_0 \in \mathcal{M}_{k,\alpha_1,\alpha_2}(Q_0)$, *де* α_1, α_2 *задовольняють умови*

$$A)\ \begin{cases} -\frac{s+1}{\beta} \leqslant \alpha_1 \leqslant 0, \\ \alpha_1 > \max\{-\frac{s+k+2}{1+\beta};\ -\frac{1}{1+\beta};\ -k-1\}, \end{cases}$$

$$B)\ \begin{cases} -\frac{s+2}{\beta} \leqslant \alpha_2 \leqslant 0, \\ \alpha_2 > \max\{-\frac{s+k+4}{1+\beta};\ -\frac{2}{1+\beta};\ -k-2\}. \end{cases}$$

Тоді існують такі додатні сталі $\varkappa_0 = \varkappa_0(C_0', h_0, \beta)$, $\widetilde{C}_1$, $\widetilde{C}_2$, $\widetilde{C}_3$, *що для довільних* $\varkappa \in \mathbb{R}$, $|\varkappa| \leqslant \varkappa_0$ *оператор* H_1 *відображає* $\mathcal{M}^{\widetilde{C}_1,\widetilde{C}_2,\widetilde{C}_3}_{k,\alpha_1,\alpha_2}(Q_0)$ *в себе.*

Зауваження 3. При $s > -1$ умова A леми 3 рівнозначна
у випадку $\beta \in (0, \frac{1+s}{-s})$ одній з таких умов:
$k \in (-1, -\frac{\beta}{1+\beta}]$, $\alpha_1 \in (-k-1, 0]$,
$k \in [-\frac{\beta}{1+\beta}, +\infty)$, $\alpha_1 \in (-\frac{1}{1+\beta}, 0]$;
у випадку $\beta \in [\frac{1+s}{-s}, +\infty)$ одній з таких умов:
$k \in (-1, -1+\frac{1+s}{\beta}]$, $\alpha_1 \in (-k-1, 0]$,
$k \in [-1+\frac{1+s}{\beta}, +\infty)$, $\alpha_1 \in [-\frac{1+s}{\beta}, 0]$;
а умова B леми 3 рівнозначна
у випадку $\beta \in (0,1)$ одній з таких умов:
$k \in (-1, -2+\frac{2}{1+\beta}]$, $\alpha_2 \in (-k-2, 0]$,
$k \in [-2+\frac{2}{1+\beta}, +\infty)$, $\alpha_2 \in (-\frac{2}{1+\beta}, 0]$;
у випадку $\beta \in [1, \frac{2+s}{-s}]$ умові
$k \in (-1, +\infty)$, $\alpha_2 \in (-\frac{2}{1+\beta}, 0]$;
у випадку $\beta \in [\frac{s+2}{-s}, +\infty)$ умові
$k \in (-1, +\infty)$, $\alpha_2 \in [-\frac{2+s}{\beta}, 0]$;

Зокрема, у випадку $s = -1$ умови леми 3 рівнозначні
у випадку $\beta \in (0,1)$ одній з таких умов:
$k \in (-1, -2+\frac{2}{1+\beta}]$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 \in (-k-2, 0]$,
$k \in [-2+\frac{2}{1+\beta}, +\infty)$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 \in (-\frac{2}{1+\beta}, 0]$;
у випадку $\beta \in [1, +\infty)$ умові
$k \in (-1, +\infty)$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 \in [-\frac{1}{\beta}, 0]$.

Доведення леми 3. При $\mathrm{v} \in \mathcal{M}^{\widetilde{C}_1,\widetilde{C}_2,\widetilde{C}_3}_{\alpha_1,\alpha_2}(Q_0, \partial Q_0)$, де $\widetilde{C}_1$, $\widetilde{C}_2$, $\widetilde{C}_3$ – довільні додатні сталі, розглянемо

$$|(H\mathrm{v})(x,t)| \leqslant |\varkappa| \int_0^t d\tau \int_{\Omega_0} |\mathcal{K}(x,t;y,\tau)| |\mathrm{v}(y,\tau)|^{\beta+1}\, dy.$$

Використовуючи лему 1, при $\alpha_i(1+\beta) > -i$, $i = \overline{1,2}$ матимемо

$$|(H\mathrm{v})(x,t)| \leqslant |\varkappa| C_0'(k) \widetilde{C}_1^{1+\beta} E_c\{\widetilde{\varrho}(d(x)), t\}([\widetilde{\varrho}(d(x))]^{\alpha_1(1+\beta)+1+s} + 1),\ (x,t) \in Q_0^1;$$

$$|(H\mathrm{v})(x,t)| \leqslant |\varkappa| C_0^{'}(k)\widetilde{C}_2^{1+\beta} E_c\{\widetilde{\varrho}(t),t\}([\widetilde{\varrho}(t)]^{\frac{\alpha_2(1+\beta)+s+2}{2}}+1),\ (x,t)\in Q_0^2;$$

$$|(H\mathrm{v})(x,t)| \leqslant |\varkappa| C_0^{'}(k)\widetilde{C}_3^{1+\beta} E_c\{1,t\},\ (x,t)\in Q_0^3,$$

де $C_0^{'}(k)$ – стала з леми 1 при $\overline{\alpha}=(0,...,0)$.

Оскільки $h_0 \in \mathcal{M}_{\alpha_1,\alpha_2}(Q_0,\ \partial Q_0)$, то існують такі додатні сталі $\widehat{C}_i$, $i=\overline{1,3}$, що

$$|(H_1\mathrm{v})(x,t)| \leqslant E_c\{\widetilde{\varrho}(d(x)),t\}[\widetilde{\varrho}(d(x))]^{\alpha_1}\Big(|\varkappa| C_0^{'}(k)\widetilde{C}_1^{1+\beta}([\widetilde{\varrho}(d(x))]^{\alpha_1\beta+1+s}+$$

$$+[\widetilde{\varrho}(d(x))]^{-\alpha_1})+\widehat{C}_1\Big),\ (x,t)\in Q_0^1;$$

$$|(H_1\mathrm{v})(x,t)| \leqslant E_c\{\widetilde{\varrho}(t),t\}[\widetilde{\varrho}(t)]^{\frac{\alpha_2}{2}}(|\varkappa| C_0^{'}(k)\widetilde{C}_2^{1+\beta}([\widetilde{\varrho}(t)]^{\frac{\alpha_2\beta+s+2}{2}}+[\widetilde{\varrho}(t)]^{-\frac{\alpha_2}{2}})+$$

$$+\widehat{C}_2),\ (x,t)\in Q_0^2;$$

$$|(H_1\mathrm{v})(x,t)| \leqslant |\varkappa| C_0^{'}(k)\widetilde{C}_3^{1+\beta} E_c\{1,t\}+\widehat{C}_3,\ (x,t)\in Q_0^3.$$

Звідси випливає, що за умов

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_1(1+\beta)>-1,\\ \alpha_1\beta+1+s\geqslant 0,\\ -\alpha_1\geqslant 0, \end{array}\right. \text{ i} \left\{\begin{array}{l} \alpha_2(1+\beta)>-2,\\ \alpha_2\beta+s+2\geqslant 0,\\ -\alpha_2\geqslant 0 \end{array}\right. \tag{12}$$

при $\mathrm{v}\in\mathcal{M}_{\alpha_1,\alpha_2}^{\widetilde{C}_1,\widetilde{C}_2,\widetilde{C}_3}(Q_0,\partial Q_0)$ матимемо

$$|(H_1\mathrm{v})(x,t)| \leqslant \left\{\begin{array}{ll} \widetilde{C}_1^{'}(\beta)E_c\{\widetilde{\varrho}(d(x)),t\}[\widetilde{\varrho}(d(x))]^{\alpha_1}, & (x,t)\in Q_0^1,\\ \widetilde{C}_2^{'}(\beta)E_c\{\widetilde{\varrho}(t),t\}[\widetilde{\varrho}(t)]^{\frac{\alpha_2}{2}}, & (x,t)\in Q_0^2,\\ \widetilde{C}_3^{'}(\beta)E_c\{1,t\}, & (x,t)\in Q_0^3. \end{array}\right. \tag{13}$$

де $\widetilde{C}_i^{'}(\beta)=|\varkappa| C_0^{'}(k)\widetilde{C}_i^{1+\beta}+\widehat{C}_i$, $i=\overline{1,3}$.

Розглянемо нерівності

$$\mathcal{B}_0\widetilde{C}_i^{1+\beta}+\widehat{C}_i\leqslant\widetilde{C}_i,\ \text{де } \mathcal{B}_0=|\varkappa| C_0^{'}(k),\ i=\overline{1,3}. \tag{14}$$

Згідно з [13, с. 320] при $a>0$, $b>0$, $\alpha>1$ та умові $\min\limits_{0\leqslant s<+\infty}(bs^\alpha-s)\leqslant -a$ існує $r>0$, яке задовольняє нерівність $a+br^\alpha\leqslant r$.

Розглянемо функцію $\mathcal{F}(s)=\mathcal{B}_0 s^q-s$, де $q=1+\beta$ і знайдемо $\min\limits_{0\leqslant s<+\infty}\mathcal{F}(s)$.

Маємо $\mathcal{F}^{'}(s)=\mathcal{B}_0 q s^{q-1}-1$; $\mathcal{F}^{'}(s)=0\Leftrightarrow s_0=(\mathcal{B}_0 q)^{-\frac{1}{q-1}}$; s_0 – точка локального мінімуму функції $\mathcal{F}(s)$.

Тоді $\mathcal{F}(s_0)=\mathcal{B}_0(\mathcal{B}_0 q)^{-\frac{q}{q-1}}-(\mathcal{B}_0 q)^{-\frac{1}{q-1}}=-\frac{1}{(\mathcal{B}_0 q)^{\frac{1}{q-1}}}\cdot\frac{q-1}{q}$;

(14) $\Leftrightarrow \min\limits_{0\leqslant s<+\infty}\mathcal{F}(s)\leqslant -\widehat{C}_i\Leftrightarrow -\frac{1}{(\mathcal{B}_0 q)^{\frac{1}{q-1}}}\cdot\frac{q-1}{q}\leqslant -\widehat{C}_i\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |\varkappa|\leqslant\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}C_0^{'}(k)\widehat{C}_i^\beta}$.

Тому за умов (12) та при $|\varkappa| \leqslant \varkappa_0 = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant 3} \frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}C_0'(k)\widetilde{C}_i^\beta}$ із (13) одержуємо існування таких додатних сталих $\widetilde{C}_1$, $\widetilde{C}_2$, $\widetilde{C}_3$, що оператор H_1 відображає $\mathcal{M}_{\alpha_1,\alpha_2}^{\widetilde{C}_1,\widetilde{C}_2,\widetilde{C}_3}(Q_0,\partial Q_0)$ в себе.

З умов леми 3 випливають умови леми 2. Використовуючи лему 2 та доведення теореми 1 для довільних $\mathrm{v} \in \mathcal{M}_k(Q_0)$, матимемо $||H_1\mathrm{v}||_k \leqslant |\varkappa|C_0'(k)K_1(\beta,\mu,k) \times \times ||\mathrm{v}||_k^\mu + ||h_0||_k < +\infty$, де $\mu \in (0,1)$. Лема 3 доведена.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови леми 3.*
Тоді існує така стала $\varkappa_0 = \varkappa_0(C_0'(k),\ h_0,\ \beta)$, що для довільного $\varkappa \in \mathbb{R}$, $|\varkappa| \leqslant \varkappa_0$ інтегральне рівняння (10) має розв'язок у просторі $\mathcal{M}_{k,\alpha_1,\alpha_2}(Q_0)$.

Доведення теореми 2. Використаємо теорему Шаудера. За лемою 3 існують такі додатні сталі $\varkappa_0, \widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2, \widetilde{C}_3$, що при $|\varkappa| \leqslant \varkappa_0$ оператор H_1 відображає $\mathcal{M}_{k,\alpha_1,\alpha_2}^{\widetilde{C}_1,\widetilde{C}_2,\widetilde{C}_3}(Q_0)$ в себе.

При $C \geqslant I_1\widetilde{C}_1 + I_2\widetilde{C}_2 + I_3\widetilde{C}_3$ маємо $||H_1\mathrm{v}||_k \leqslant |\varkappa|C_0'(k)K_1(\beta,\mu,k)||\mathrm{v}||_k^\mu + + ||h_0||_k \leqslant |\varkappa|C_0'(k)K_1(\beta,\mu,k)C^\mu + C_1$ для довільних $\mathrm{v} \in \mathcal{M}_{k,\alpha_1,\alpha_2,C}(Q_0)$ та $\mu \in (0,1)$. Згідно з зауваженням 1 існує така стала $C_0 > 0$ (C_0 залежить від $\varkappa_0$, $C_0'(k)$, $K_1(\beta,\mu,k)$, $C' = ||h_0||_k$), що $|\varkappa|C_0'(k)K_1(\beta,\mu,k)C^\mu + C' < C$ для всіх $C > C_0$ та $|\varkappa| \leqslant \varkappa_0$, тобто $||H_1\mathrm{v}||_k \leqslant C$ для довільних $\mathrm{v} \in \mathcal{M}_{k,\alpha_1,\alpha_2,C}(Q_0)$ при $C > C_0$. Отже, існує така стала $C > 0$, що H_1 діє із $\mathcal{M}_{k,\alpha_1,\alpha_2,C}(Q_0)$ в себе.

Використовуючи лему 2 та доведення теореми 1, одержуємо, що H_1 – цілком неперервний оператор на $\mathcal{M}_{k,C}(Q_0)$. Звідси одержуємо розв'язність рівняння (10) в $\mathcal{M}_{k,\alpha_1,\alpha_2}(Q_0)$. Теорема 2 доведена.

Наслідок 3. *Нехай $s(F_2) = 0$ (F_2 – міра [7, с.29]), $F_0(x,t,u) = |u|^{1+\beta}$, де $\beta \in (0,1]$, $k > 1$. Тоді існує така стала $\varkappa_0 = \varkappa_0(C_0'(k),\beta)$, що для довільного $\varkappa \in \mathbb{R}$, $|\varkappa| \leqslant \varkappa_0$ крайова задача*

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + \varkappa \cdot |u(x,t)|^{1+\beta}, \qquad (x,t) \in Q_0 = (0,l) \times (0,T],$$

$$u\,|_{x=0} = 0,\ u\,|_{x=l} = 0, \qquad t \in (0,T],$$

$$u\,|_{t=0} = F_2(x), \qquad x \in (0,l)$$

має розв'язок у просторі $\mathcal{M}_{k,0,\alpha_2}(Q_0)$, де $-\frac{2}{1+\beta} < \alpha_2 \leqslant -1$.

Справді, розв'язність цієї задачі зводиться до розв'язності інтегрального рівняння (10) при $h_0 = (G(x,t;y,0),F_2(y))$. При $\alpha_2 \leqslant -1$, $k > 1$ з леми 1 з [14] випливає, що $h_0 \in \mathcal{M}_{k,0,\alpha_2}(Q_0)$. З теореми 2 та зауваження 3 одержуємо існування розв'язку заданої задачі у просторі $\mathcal{M}_{k,0,\alpha_2}(Q_0)$.

---

1. *Dhage B. C., Ntouyas S. K.* Existence results for nonlinear functional integral equations via a fixed point theorem of Krasnoselkii-Schaefer type// Nonlinear Stud. – 2002. – Vol. 9. – № 3 – P.307-317.

2. *Candito Pasquale.* Implicit integral equations with descontinuous nonlinearities // J. Integr. Equat. and Appl. – 2002. – Vol. 14. – № 1 – P.1-10.

3. *Xu Long-feng, Tang Guang-ying.* A class of quasi-linear equations of parabolic type// J. Anhui Univ. Technol. Natur. Sci. – 2003. – Vol. 20. – № 1 – P.82-83,86.

4. *Ивасишен С. Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач. – К., 1990.

5. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – М., 1964.

6. *Лионс Ж.-Л., Мадженс Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения – М., 1971.

7. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – М., 1988.

8. *Лопушанська Г. П., Чмир О. Ю.* Про деякі властивості спряжених операторів Гріна параболічної крайової задачі// Науковий вісник Чернівецького університету – 2004. – Вип.191-192. Математика – С.82-88.

9. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М., 1968.

10. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. – М., 1965.

11. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М., 1988.

12. *Лопушанська Г. П., Чмир О. Ю.* Про розв'язність першої крайової задачі для рівняння $u_t = \Delta u + |u|^{1+\beta}$ у класі узагальнених функцій// Математичні методи та фізико-механічні поля – 2004. – Т.47. – № 4. – С.125-130.

13. *Крейн В. С.* Функциональный анализ. – М., 1972.

14. *Лопушанська Г. П., Чмир О. Ю.* Узагальнені крайові значення розв'язків рівняння $u_t = \Delta u + F_0(x, t, u)$ //Математичні студії – 2004. – Т.22. – № 1. – С.45-56.

THE SOLUTION OF VOLTERRA NONLINEAR INTEGRAL EQUATION WITH SINGULARITIES ONTO BOUNDARY OF DOMAIN

Halyna Lopyshanska, Oksana Chmyr

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

The sufficient conditions of the solvability and the uniqueness solvability of the Volterra nonlinear integral equation with the polar kernel in the class of the functions with singularities onto boundary of the domain have been established.

Key words: nonlinear integral equation, normalized weight functional space, continuous operator, compact set, kernel of an operator.

Стаття надійшла до редколегії 06.07.2004

Прийнята до друку 19.10.2005