ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2005. Вип.64. С.149–166

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2005. Vol.64. P.149–166

УДК 517.95

ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ І ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ В АНІЗОТРОПНИХ ПРОСТОРАХ

Іван МЕДВІДЬ

Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Доведено існування та єдиність розв'язків нелінійних параболічної й еліптичної задач без умов на нескінченності. Зокрема, вихідні дані можуть необмежено зростати на нескінченності, а також, розв'язок кожної з цих задач є єдиним без вимог до його поведінки на нескінченності.

Ключові слова: нелінійні еліптичні та параболічні рівняння, анізотропний простір.

Класичний результат Тихонова [1] стверджує, що задача Коші для рівняння теплопровідності однозначно розв'язна для неперервної початкової функції $u_0(x)$, яка задовольняє умову зростання

$$|u_0(x)| \leqslant C\exp(a|x|^2) \text{ при } |x| \to +\infty,$$

де C і a деякі додатні сталі. Аналогічні класи для загальних лінійних параболічних систем були побудовані в [2], для напівлінійних параболічних рівнянь другого порядку в [3], а для квазілінійних параболічних рівнянь високого порядку в [4 – 7], причому в останніх одержано залежність класів коректності мішаних задач у необмежених областях від їхньої геометрії. Пізніше з'ясувалося, що для деяких слабко нелінійних і нелінійних параболічних рівнянь однозначна розв'язність задачі Коші не залежить від поведінки розв'язків при $|x| \to +\infty$ [8 – 20]. Зокрема, такий ефект отрримано для рівняння вигляду

$$u_t - \Delta^m(|u|^{p-2}u) + c|u|^{q-2}u = 0$$

при $m \geqslant 1, c \geqslant 1$ і певних співвідношеннях між p і q.

Такі властивості також має рівняння

$$u_t - \operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) = 0$$

при $1 < r(n) < p < 2$ [13], де n розмірність простору змінних x.

Мета нашої праці – вивчити задачі для нелінійних параболічного та еліптичного рівнянь у необмежених областях в анізотропних просторах Соболєва.

В області $Q_T = \Omega \times (0,T)$ розглянемо мішану задачу для параболічного рівняння

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} (a_i(x,t)|u_{x_i}|^{p_i-2}u_{x_i})_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u = f(x,t), \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \Omega \ , \tag{2}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{3}$$

і відповідно в області Ω задачу Діріхле

$$-\sum_{i=1}^{n} (a_i(x)|u_{x_i}|^{p_i-2}u_{x_i})_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u = f(x), \tag{4}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \ , \tag{5}$$

де $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, Ω_1 – необмежена, $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^k$, Ω_2 – обмежена, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{n-k}$; $\partial\big(\Omega \cap \{(x_1,\ldots,x_k) : x_1^2 + \ldots + x_k^2 \leqslant i^2\}\big)$ – регулярна в сенсі Кальдерона, $i \in \mathbb{N}$; $1 < p_i < 2$, $i = \overline{1,k}$; $p_i > 2$, $i = \overline{k+1,n}$; $p_1 \leqslant \ldots \leqslant p_k < p_{k+1} \leqslant \ldots \leqslant p_n$.

1. Позначення. Розглянемо систему областей $\{\widetilde{\Omega}_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^k : \widetilde{\Omega}_i = \{(x_1,\ldots,x_k) : x_1^2 + \ldots + x_k^2 \leqslant i^2\} \cap \Omega_1$; $Q_\tau^i = \widetilde{\Omega}_i \times \Omega_2 \times (0,\tau)$, $i \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \tau \leqslant T$.

Дамо означення основних функціональних просторів, які використовуємо в цій праці. Всі функціональні простори – дійсні. Нехай $G \subset \mathbb{R}^n$,
$W_{x_i}^{1,p_i}(G) = \{v \mid v \in L_{p_i}(G), v_{x_i} \in L_{p_i}(G)\}$ – банахів простір з нормою $\|v\|_{L_{p_i}(G)} + \|v_{x_i}\|_{L_{p_i}(G)}$,
$W_{0,x_i}^{1,p_i}(G)$ – замикання $D(G)$ в $W_{x_i}^{1,p_i}(G)$ з нормою $\|v_{x_i}\|_{L_{p_i}(G)}$,
$W_{x_i}^{-1,p_i}(G) = (W_{0,x_i}^{1,p_i}(G))^*$, $W_0^{1,p_1,\ldots,p_n}(G) = \bigcap_{i=1}^{n} W_{0,x_i}^{1,p_i}(G)$,
$W^{1,p_1,\ldots,p_n}(G) = \bigcap_{i=1}^{n} W_{x_i}^{1,p_i}(G)$, $W_{x_i,c}^{1,p_i}(G) = \{v \mid v \in W_{x_i}^{1,p_i}(G), \operatorname{supp} v\text{– компакт}\}$.
Нехай $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ – довільна послідовність областей з компактним замиканням $\overline{\omega}_k$ така, що $\overline{\omega}_k \subset \omega_{k+1} \subset G \ \forall\ k \in \mathbb{N}$ і $\bigcup_{k=1}^{\infty} \omega_k = G$;
$W_{0,loc}^{1,p_1,\ldots,p_n}(G) = \{v \mid v \in W^{1,p_1,\ldots,p_n}(\omega_k), v|_{\partial\omega_k \cap \partial G} = 0 \ \forall\ k \in \mathbb{N}\}$.

Розглянемо зрізаючу функцію

$$\psi_R(x_1,\ldots,x_k) = \begin{cases} \frac{R^2-(x_1^2+\ldots+x_k^2)}{R}, & x_1^2 + \ldots + x_k^2 \leqslant R^2, \\ 0, & x_1^2 + \ldots + x_k^2 \geqslant R^2, \end{cases}$$

$\zeta_R(x_1,\ldots,x_k) = \psi_R^\alpha(x_1,\ldots,x_k)$, $\alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R}$.

Зауважимо, що правильні такі оцінки:

$\frac{R^2-(x_1^2+\ldots+x_k^2)}{R} \geqslant R - \sqrt{x_1^2+\ldots+x_k^2} \geqslant R - R_0$ в $\widetilde{\Omega}_{R_0} \times \Omega_2$;

$\frac{R^2-(x_1^2+\ldots+x_k^2)}{R} \leqslant R$ в $\widetilde{\Omega}_R \times \Omega_2$, де R, R_0 – деякі додатні числа.

Для компактності записів введемо позначення $V(G) \overset{def}{=} W_0^{1,p_1,\ldots,p_n}(G)$, $W(G\times(0,T)) \overset{def}{=} \bigcap\limits_{i=1}^{n} L_{p_i}\big((0,T);W_{0,x_i}^{1,p_i}(G)\big)$. Нехай операція $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – позначає скалярний добуток між просторами $V^\star(G)$ та $V(G)$, а $(\cdot,\cdot)$ – скалярний добуток між $W^\star(G\times(0,T))$ та $W(G\times(0,T))$.

2. Параболічна задача. Визначимо оператор A:
$A(\varphi) \overset{def}{=} -\sum\limits_{i=1}^{n}\big(a_i(x,t)|\varphi_{x_i}|^{p_i-2}\varphi_{x_i}\big)_{x_i}$ і лінійний оператор $L: L(\varphi) = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i(x,t)\varphi_{x_i} +$ $+\ c(x,t)\varphi$. Неважко показати, що A відображає $V(G)$ в $V^\star(G)$, де G – довільна обмежена область в $\mathbb{R}^n$ і, якщо $u \in W(G\times(0,T))$, то $A(u) \in W^\star(G\times(0,T))$ і, якщо $p_1' \leqslant p_n$, то і $L(u) \in W^\star(G\times(0,T))$. Також, визначимо оператор $\mathcal{A}$:
$\big(\mathcal{A}(u),v\big) = \int\limits_0^T \langle A(u),v\rangle\,dt \quad \forall\ u,v \in W(G\times(0,T))$. Легко перевірити, що $\mathcal{A}$ – монотонний і радіально неперервний.

Доведемо існування розв'язку задачі (1) – (3) в обмеженій області Q_T^k, $k \in \mathbb{N}$. Отже, розглянемо (1), (2) в Q_T^k, $k \in \mathbb{N}$ з крайовою умовою $u|_{\partial(\widetilde{\Omega}_k\times\Omega_2)} = 0$.

Теорема 1. *Нехай виконуються такі умови:*

1. $f \in \sum\limits_{i=1}^{n} L_{p_i'}\big((0,T);W_{x_i}^{-1,p_i'}(\widetilde{\Omega}_k\times\Omega_2)\big)$, $u_0 \in L^2(\widetilde{\Omega}_k\times\Omega_2)$,
$a_i, b_i \in L^\infty(Q_T^k), i=\overline{1,n},\ c \in L^{p_n/(p_n-2)}(Q_T^k)$;

2. $\exists\, a_0 > 0 : a_i(x,t) \geqslant a_0,\ i=\overline{1,n},\ \exists\, M : c(x,t) - \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial b_i(x,t)}{\partial x_i} \geqslant M$ *м.с. в* Q_T^k;

3. $p_1p_n \geqslant p_1 + p_n$.

Тоді існує функція $u \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} L_{p_i}((0,T);W_{0,x_i}^{1,p_i}(\widetilde{\Omega}_k\times\Omega_2))$, $u \in C([0,T];L^2(\widetilde{\Omega}_k\times\Omega_2))$, *яка задовольняє* (1) *і* $u|_{t=0} = u_0(x)$, $x \in \widetilde{\Omega}_k\times\Omega_2$.

Доведення. Розглянемо замкнену систему функцій $\{\varphi_l(x)\}_{l=1}^{\infty}$ у просторі $V(\widetilde{\Omega}_k\times\Omega_2)$. Розв'язок задачі в Q_T^k шукатимемо як границю послідовності

$$u_m(x,t) = \sum_{l=1}^{m} c_l^m(t)\varphi_l(x),\ m=1,2,\ldots$$

де u_m – гальоркінський розв'язок (1), тобто,

$$\langle (u_m)_t,\varphi_l\rangle + \langle A(u_m),\varphi_l\rangle + \langle L(u_m),\varphi_l\rangle = \langle f,\varphi_l\rangle, l=\overline{1,m}, \tag{6}$$

$u_m(0) = u_{0m}$, $u_{0m} \to u_0$ в $L^2(\widetilde{\Omega}_k \times \Omega_2)$. На підставі теореми Каратеодорі [21, с. 54] існує абсолютно неперервний розв'язок цієї задачі, визначений на проміжку $[0, t_0]$. З оцінок, одержаних нижче, випливатиме, що $t_0 = T$.

З (6), враховуючи умови теореми, випливають оцінки

$$\langle A(u_m), u_m \rangle \geqslant a_0 \sum_{i=1}^{n} \|(u_m)_{x_i}\|^{p_i}_{L_{p_i}(\widetilde{\Omega}_k \times \Omega_2)},$$

$$\frac{1}{2}\, \|u_m(\tau)\|^2_{L_2(\widetilde{\Omega}_k \times \Omega_2)} + a_0 \int_0^\tau \Big[\sum_{i=1}^{n} \|(u_m)_{x_i}\|^{p_i}_{L_{p_i}(\widetilde{\Omega}_k \times \Omega_2)} \Big]\, dt +$$

$$+ \int_{Q^k_\tau} \Big(c(x,t) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial b_i(x,t)}{\partial x_i} \Big) \big(u_m\big)^2\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\tau \|f(t)\|_{V^*(\widetilde{\Omega}_k \times \Omega_2)} \cdot \|u_m(t)\|_{V(\widetilde{\Omega}_k \times \Omega_2)}\, dt + \frac{1}{2} \|u_{0m}\|^2_{L_2(\widetilde{\Omega}_k \times \Omega_2)},$$

$\tau \in [0, T]$. Звідки одержуємо, що послідовність $\{u_m\}$ – обмежена в $C\big([0,T]; L^2(\widetilde{\Omega}_k \times \Omega_2)\big) \bigcap W(\widetilde{\Omega}_k \times \Omega_2 \times (0,T))$. Легко показати, що $\{A(u_m)\}$ – обмежена в $W^*(\widetilde{\Omega}_k \times \Omega_2 \times (0,T))$. Оскільки в банаховому просторі з будь-якої обмеженої послідовності можна виділити слабко або $\star$ – слабко збіжну підпослідовність, то існує така підпослідовність $\{u_{m_j}\}$ послідовності $\{u_m\}$ і деякий елемент u, що

$u_{m_j} \to u$ в $L^\infty\big(0,T; L_2(\widetilde{\Omega}_k \times \Omega_2)\big)$ $\star$ – слабко;
$u_{m_j} \to u$ в $W(\widetilde{\Omega}_k \times \Omega_2 \times (0,T))$ слабко;
$u_{m_j}(T) \to \xi$ в $L_2(\widetilde{\Omega}_k \times \Omega_2)$ слабко;
$A(u_{m_j}) \to \chi$ в $W^*(\widetilde{\Omega}_k \times \Omega_2 \times (0,T))$ слабко.

Продовжимо $u_m(t)$, $A(u_m(t))$, $L(u_m(t))$, $f(t)$ на $\mathbb{R}$ нулем поза $[0,T]$; відповідні продовження позначимо через $\widetilde{u}_m(t)$, $A(\widetilde{u}_m(t))$, $L(\widetilde{u}_m(t))$, $\widetilde{f}(t)$. З (6) випливає, що

$$\langle \widetilde{u}_m'(t), \varphi_l \rangle + \langle A(\widetilde{u}_m(t)), \varphi_l \rangle + \langle L(\widetilde{u}_m(t)), \varphi_l \rangle =$$

$$= \langle \widetilde{f}(t), \varphi_l \rangle + (u_{0m}, \varphi_l)_{L_2(\widetilde{\Omega}_k \times \Omega_2)} \cdot \delta(t-0) - (u_m(T), \varphi_l)_{L_2(\widetilde{\Omega}_k \times \Omega_2)} \cdot \delta(t-T).$$

Перейдемо тут до границі при $m = m_j$ і фіксованому l

$$\langle \widetilde{u}\,', \varphi_l \rangle + \langle \widetilde{\chi}, \varphi_l \rangle + \langle L(\widetilde{u}), \varphi_l \rangle = \langle \widetilde{f}, \varphi_l \rangle + (u_0, \varphi_l)\delta(t-0) - (\xi, \varphi_l)\delta(t-T) \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$

Звідси, оскільки, $\{\varphi_l\}_{l=1}^\infty$ – замкнена в $V(\widetilde{\Omega}_k \times \Omega_2)$

$$\widetilde{u}\,' + \widetilde{\chi} + L(\widetilde{u}) = \widetilde{f} + u_0\delta(t-0) - \xi\delta(t-T). \tag{7}$$

Звужуючи (7) на $(0,T)$, отримаємо

$$u' + \chi + L(u) = f. \tag{8}$$

Отже, $u' \in W^*(\widetilde{\Omega}_k \times \Omega_2 \times (0,T))$, $u(0)$ і $u(T)$ мають сенс і, порівнюючи з (7), одержимо $u(0) = u_0$ і $u(T) = \xi$.

Для завершення доведення залишається показати, що $\chi = A(u)$. З монотонності оператора $\mathcal{A}$ випливає, що

$$\chi_{m_j} \stackrel{def}{=} \int_0^T \left\langle A(u_{m_j}(t)) - A(v(t)), (u_{m_j}(t) - v(t))\, e^{-\beta t} \right\rangle dt \geqslant 0 \quad \forall\, v \in V_T, \tag{9}$$

де $\beta > 0$. Згідно з (6)

$$\int_0^T \left\langle A(u_{m_j}), u_{m_j} \right\rangle e^{-\beta t}\, dt = \int_0^T \left\langle f, u_{m_j}\, e^{-\beta t} \right\rangle dt + \frac{1}{2} \int_{\widetilde{\Omega}_k \times \Omega_2} \left(u_{0m_j}\right)^2(x)\, dx -$$

$$- \frac{1}{2} \int_{\widetilde{\Omega}_k \times \Omega_2} \left(u_{m_j}\right)^2(x,T)\, e^{-\beta T}\, dx - \int_{Q_\tau^k} \beta \left(u_{m_j}\right)^2 e^{-\beta t}\, dx\, dt - \int_0^T \left\langle L(u_{m_j}), u_{m_j}\, e^{-\beta t} \right\rangle dt$$

Підставимо це значення в (9), оскільки

$$\lim_{m_j \to \infty} \inf_{l \geqslant m_j} \|u_{m_j}(T)\|^2_{L^2(\widetilde{\Omega}_k \times \Omega_2)} \geqslant \|u(T)\|^2_{L^2(\widetilde{\Omega}_k \times \Omega_2)},$$

то матимемо

$$\lim_{m_j \to \infty} \sup_{l \geqslant m_j} \chi_{m_j} \leqslant \int_0^T \left\langle f, u\, e^{-\beta t} \right\rangle dt + \frac{1}{2} \int_{\widetilde{\Omega}_k \times \Omega_2} u_0^2(x)\, dx - \frac{1}{2} \int_{\widetilde{\Omega}_k \times \Omega_2} u^2(x,T)\, e^{-\beta T}\, dx -$$

$$- \varlimsup_{m_j \to \infty} \left(\int_{Q_\tau^k} \beta \left(u_{m_j}\right)^2 e^{-\beta t}\, dx\, dt + \int_0^T \left\langle L(u_{m_j}), u_{m_j}\, e^{-\beta t} \right\rangle dt \right) -$$

$$- \int_0^T \left\langle \chi, v\, e^{-\beta t} \right\rangle dt - \int_0^T \left\langle A(v), (u - v)\, e^{-\beta t} \right\rangle dt.$$

З (8) випливає, що

$$\int_0^T \left\langle \chi - A(v), (u - v)\, e^{-\beta t} \right\rangle dt + \varlimsup_{m_j \to \infty} \left(\int_{Q_\tau^k} \beta\, u^2 e^{-\beta t}\, dx\, dt + \int_0^T \left\langle L(u), u\, e^{-\beta t} \right\rangle dt - \right.$$

$$\left. - \int_{Q_\tau^k} \beta \left(u_{m_j}\right)^2 e^{-\beta t}\, dx\, dt - \int_0^T \left\langle L(u_{m_j}), u_{m_j}\, e^{-\beta t} \right\rangle dt \right) \geqslant 0.$$

Неважко показати, що другий доданок у лівій частині цієї нерівності недодатний, вибравши β достатньо великим. Тобто,

$$\int_0^T \langle \chi - A(v), (u-v)\,\mathrm{e}^{-\beta t}\rangle\, dt \geqslant 0.$$

Використаємо радіальну неперервність оператора $\mathcal{A}$ для доведення рівності $\chi = A(u)$. Приймемо, $v = (u - \lambda w)$, $\lambda \in [0,1]$, де w – довільний елемент із $W(\widetilde{\Omega}_k \times \Omega_2 \times (0,T))$ і спрямовуючи $\lambda \to 0$, одержимо

$$\int_0^T \langle \chi - A(u), w\,\mathrm{e}^{-\beta t}\rangle\, dt \geqslant 0 \quad \forall\, w \in W(\widetilde{\Omega}_k \times \Omega_2 \times (0,T)).$$

Тобто, $\chi = A(u)$ і

$$u' + A(u) + L(u) = f \quad \text{в} \quad W^\star(\widetilde{\Omega}_k \times \Omega_2 \times (0,T))$$

$$u(0) = u_0.$$

Оскільки $u \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} L_{p_i}\big((0,T); W^{1,p_i}_{0,x_i}(\widetilde{\Omega}_k \times \Omega_2)\big)$, а $u' \in \sum\limits_{i=1}^{n} L_{p'_i}\big((0,T); W^{-1,p'_i}_{x_i}(\widetilde{\Omega}_k \times \Omega_2)\big)$ і, крім того, $W_0^{1,p_1,\dots,p_n}(\widetilde{\Omega}_k \times \Omega_2) \subset L^2(\widetilde{\Omega}_k \times \Omega_2) \subset \sum\limits_{i=1}^{n} W^{-1,p'_i}(\widetilde{\Omega}_k \times \Omega_2)$, то можна зробити висновок, що $u \in C\big([0,T]; L^2(\widetilde{\Omega}_k \times \Omega_2)\big)$. Отже, теорему 1 доведено.

Зауваження 1. Умова $p_1p_n \geqslant p_1 + p_n\,(p'_1 \leqslant p_n)$ забезпечує вкладення $\bigcap\limits_{i=1}^{n} L_{p_i}\big((0,T); W^{1,p_i}_{0,x_i}(G)\big) \subset L_{p'_1}(G \times (0,T))$, де G довільна обмежена область в $\mathbb{R}^n$, що дає нам обмеженість оператора $L : V(G) \to V^\star(G)$.

Зауваження 2. Якщо $b_i = 0, i = \overline{1,k}$ м.с. в Q_T, то умову 3 в теоремі 1 можна не накладати.

Зауваження 3. Згідно з теоремою 1.17 [22, с. 177] для розв'язку u задачі (1) – (3) в Q_T^k правильна формула інтегрування частинами

$$\int_0^\tau \langle u_t, u\rangle\, dt = \frac{1}{2}\,\| u(\tau) \|^2_{L^2(\widetilde{\Omega}_k \times \Omega_2)} - \frac{1}{2}\,\| u(0) \|^2_{L^2(\widetilde{\Omega}_k \times \Omega_2)}, \quad \tau \in [0,T].$$

Теорема 2. *Нехай виконуються такі умови:*

1. $f \in \sum\limits_{i=1}^{n} L_{p'_i}\big((0,T); W^{-1,p'_i}_{x_i,\,loc}(\overline{\Omega})\big)$, $u_0 \in L^2_{loc}(\overline{\Omega})$,
   $a_i \in L^\infty(Q_T), i = \overline{1,n}$, $b_i \in L^\infty_{loc}(\overline{Q}_T), i = \overline{1,n}$, $c \in L^{p_n/(p_n-2)}_{loc}(\overline{Q}_T)$;
2. $\exists\, a_0 > 0 : a_i(x,t) \geqslant a_0$, $i = \overline{1,n}$, $\sum\limits_{i=1}^{k} b_i(x,t)x_i \geqslant 0$,
   $\exists\, M : c(x,t) - \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial b_i(x,t)}{\partial x_i} \geqslant M$ *м.с. в* Q_T;
3. $p_1p_n \geqslant p_1 + p_n$, $p_1 > 2n/(n+2)$.

Тоді існує єдина функція $u \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} L_{p_i}((0,T); W^{1,p_i}_{0,x_i,loc}(\overline{\Omega}))$, $u \in C([0,T]; L^2_{loc}(\overline{\Omega}))$, *яка задовольняє* (1), (2).

Доведення. Нехай u^k – розв'язок задачі в $\widetilde{\Omega}_k \times \Omega_2 \times (0,T)$, $k \in \mathbb{N}$. Продовжимо u^k нулем на $\Omega \times (0,T)$. Тоді

$$u^k_t + A(u^k) + L(u^k) = f_k \quad \text{в} \quad \sum_{i=1}^{n} L_{p'_i}\big((0,T); W^{-1,p'_i}_{x_i,loc}(\overline{\Omega})\big)$$

де $f_k(x,t) \stackrel{def}{=} \begin{cases} f(x,t), & (x,t) \in Q^k_T, \\ 0 \ , & (x,t) \in Q_T \setminus Q^k_T. \end{cases}$

Тобто,

$$\langle u^k_t, v\rangle \ + \ \langle A(u^k), v\rangle \ + \ \langle L(u^k), v\rangle \ - \ \langle f_k, v\rangle \ = \ 0, \qquad t \in (0,T) \tag{10}$$

$\forall\, v \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} L_{p_i}\big((0,T); W^{1,p_i}_{0,x_i,c}(\overline{\Omega})\big)$.

Доведемо, що послідовність $\{u^k\}$ фундаментальна в просторі $\bigcap\limits_{i=k+1}^{n} L_{p_i}\big((0,T);$ $W^{1,p_i}_{0,x_i,loc}(\overline{\Omega})\big)$. Нехай $R > 1$ деяке фіксоване число. Запишемо (10)для фіксованих k і m і за пробну функцію візьмемо

$$v \ = \ (u^k - u^m)\,\zeta_R\, \mathrm{e}^{-\beta t}, \ \ \beta > 0.$$

Віднімемо від першої рівності другу і проінтегруємо за $t \in [0,\tau]$, $\tau \in [0,T]$

$$\int\limits_0^\tau \big\langle (u^k - u^m)_t, (u^k - u^m)\zeta_R\, \mathrm{e}^{-\beta t}\big\rangle\, dt \ +$$

$$+ \int\limits_{Q^R_\tau} \Big[\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\big(|u^k_{x_i}|^{p_i-2}u^k_{xi} \ - \ |u^m_{x_i}|^{p_i-2}u^m_{x_i}\big)(u^k_{x_i} - u^m_{x_i})\,\zeta_R\, \mathrm{e}^{-\beta t} \ +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} a_i(x,t)\big(|u^k_{x_i}|^{p_i-2}u^k_{xi} \ - \ |u^m_{x_i}|^{p_i-2}u^m_{x_i}\big)(u^k - u^m)\,\zeta_{Rx_i}\, \mathrm{e}^{-\beta t} \ +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)(u^k - u^m)_{x_i}(u^k - u^m)\,\zeta_R\, \mathrm{e}^{-\beta t} \ + \ c(x,t)\big(u^k - u^m\big)^2\, \zeta_R\, \mathrm{e}^{-\beta t}\Big]\, dx\, dt \ =$$

$$= \int\limits_0^\tau \big\langle f_k - f_m, (u^k - u^m)\,\zeta_R\, \mathrm{e}^{-\beta t}\big\rangle\, dt. \tag{11}$$

Вибираємо $k, m : k \geqslant R, m \geqslant R$. Тоді права частина рівності (11) дорівнює нулю в Q^R_τ. Використовуючи нерівності

$$(t - s)(|\, t\, |^{p-2}\, t - |\, s\, |^{p-2}\, s) \leqslant 2^{2-p}\, |\, t - s\, |^p, \ p \leqslant 2; \ t, s \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

$$(t - s)(|\, t\, |^{p-2}\, t - |\, s\, |^{p-2}\, s) \geqslant 2^{2-p}\, |\, t - s\, |^p, \ p \geqslant 2; \ t, s \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

і зауваження 3, одержимо

$$\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\beta T}\int\limits_{\widetilde{\Omega}_R\times\Omega_2}\big(u^k-u^m\big)^2(x,\tau)\,\zeta_R\,dx \;+\; a_0\,\mathrm{e}^{-\beta T}\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{Q_\tau^R}\big|\,|u^k_{x_i}|^{p_i-2}u^k_{x_i} \;-\; |u^m_{x_i}|^{p_i-2}u^m_{x_i}\big|\times$$

$$\times|u^k_{x_i}-u^m_{x_i}|\,\zeta_R\,dx\,dt \;+a_0\,\mathrm{e}^{-\beta T}\sum_{i=k+1}^{n}2^{2-p_i}\int\limits_{Q_\tau^R}\big|u^k_{x_i}-u^m_{x_i}\big|^{p_i}\,\zeta_R\,dx\,dt\;+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau^R}(u^k-u^m)^2\left[\Big(\beta+c(x,t)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial b_i(x,t)}{\partial x_i}\Big)\zeta_R+\alpha/R\sum_{i=1}^{k}b_i(x,t)x_i\,\psi_R{}^{\alpha-1}\right]\mathrm{e}^{-\beta t}\,dx\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{Q_\tau^R}\Big[\,\sum_{i=1}^{k}a_i(x,t)\big(|u^k_{x_i}|^{p_i-2}u^k_{xi} \;-\; |u^m_{x_i}|^{p_i-2}u^m_{x_i}\big)\,\zeta_R^{1/p_i'}\times(u^k-u^m)\,\zeta_R^{1/2}\times$$

$$\times\,\zeta_{R x_i}\zeta_R^{-1/p_i'-1/2}\,\mathrm{e}^{-\beta t}\Big]\,dx\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{k}\;\delta/2^{2-p_i}\int\limits_{Q_\tau^R}\big|\,|u^k_{x_i}|^{p_i-2}u^k_{x_i} \;-\; |u^m_{x_i}|^{p_i-2}u^m_{x_i}\big|^{p_i'}\,\zeta_R\,dx\,dt\;+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau^R}\big(u^k-u^m\big)^2\,\zeta_R\,dx\,dt\;+\;c_1(\delta)\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{Q_\tau^R}\Big(\zeta_R^{-1/p_i'-1/2}\big|\zeta_{R x_i}\big|\Big)^{r_i}\,dx\,dt\;,$$

де $1/p_i'+1/2+1/r_i=1$, $1/p_i+1/p_i'=1$, $i=\overline{1,k}$; δ, c_1 – деякі додатні сталі, які не залежать від R.

Використовуючи нерівність (12), отримаємо

$$\big|\,|u^k_{x_i}|^{p_i-2}u^k_{x_i} \;-\; |u^m_{x_i}|^{p_i-2}u^m_{x_i}\big|^{p_i'-1}\leqslant 2^{2-p_i}\big|u^k_{x_i}-u^m_{x_i}\big|^{(p_i'-1)(p_i-1)}=$$

$$=2^{2-p_i}\big|u^k_{x_i}-u^m_{x_i}\big|,\quad i=\overline{1,k}.$$

Оцінимо інтеграл

$$\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{Q_\tau^R}\Big(\zeta_R^{-1/p_i'-1/2}\big|\zeta_{R x_i}\big|\Big)^{r_i}\,dx\,dt\leqslant\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{Q_\tau^R}\Big(\psi_R{}^{\alpha(-1/p_i'-1/2)+\alpha-1}\,\alpha\big|-2x_i/R\big|\Big)^{r_i}\,dx\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{Q_\tau^R}\Big(R^{\,\alpha(1-1/p_i'-1/2)-1}\,2\alpha\Big)^{r_i}dx\,dt\leqslant c_2\sum_{i=1}^{k}R^{\,\alpha-r_i+n}\;=\;c_2\sum_{i=1}^{k}R^{\,d_i},$$

де $d_i=\alpha-r_i+n$, за умови $\alpha>r_i$, $i=\overline{1,k}$, $c_2>0$ не залежить від R.

У результаті отримаємо таку оцінку:

$$\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\beta T}\int\limits_{\widetilde{\Omega}_R\times\Omega_2}\left(u^k-u^m\right)^2(x,\tau)\,\zeta_R\,dx \;+\; a_0\,\mathrm{e}^{-\beta T}\sum_{i=k+1}^{n}2^{2-p_i}\int\limits_{Q_\tau^R}\left|u_{x_i}^k-u_{x_i}^m\right|^{p_i}\zeta_R\,dx\,dt\;+$$

$$+\;(a_0\,\mathrm{e}^{-\beta T}-\delta)\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{Q_\tau^R}\left|\,|u_{x_i}^k|^{p_i-2}u_{x_i}^k\;-\;|u_{x_i}^m|^{p_i-2}u_{x_i}^m\right|\,|u_{x_i}^k-u_{x_i}^m|\,\zeta_R\,dx\,dt\;+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau^R}(u^k-u^m)^2\left[\left(\beta+c(x,t)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial b_i(x,t)}{\partial x_i}\right)\zeta_R\;+\;\alpha/R\sum_{i=1}^{k}b_i(x,t)x_i\,\psi_R^{\alpha-1}\right]\mathrm{e}^{-\beta t}dxdt\leqslant$$

$$\leqslant c_3\sum_{i=1}^{k}R^{\,d_i}+\int\limits_{Q_\tau^R}\left(u^k-u^m\right)^2\zeta_R\,dx\,dt, \qquad (14)$$

$c_3>0$. З (14), згідно з лемою Гроноулла – Беллмана, випливає

$$\int\limits_{\widetilde{\Omega}_R\times\Omega_2}\left(u^k-u^m\right)^2(x,\tau)\,\zeta_R\,dx\;\leqslant\;c_4\sum_{i=1}^{k}R^{\,d_i},\quad c_4>0.$$

Оскільки $d_i-\alpha<0$, $i=\overline{1,k}$, то звідси одержимо, що для будь-якої обмеженої області $G\subset\Omega$ послідовність $\{u^k\}$ фундаментальна в $C\big([0,T];\,L^2(G)\big)$; аналогічно з (14) – $\{u_{x_i}^k\}$ фундаментальна в $L_{p_i}\big((0,T);\,L^{p_i}(G)\big)$, $i=\overline{k+1,n}$, $u^k\,|_{\partial\Omega\cap\partial G}=0$. Тоді, оскільки R довільне, $\{u^k\}$ фундаментальна в $C\big([0,T];\,L^2_{loc}(\overline{\Omega})\big)$, $\{u^k\}$ фундаментальна в $L_{p_i}\big((0,T);\,W^{1,p_i}_{0,x_i,loc}(\overline{\Omega})\big)$, $i=\overline{k+1,n}$. Отже, $u^k\to u$, відповідно, у просторах $C\big([0,T];\,L^2_{loc}(\overline{\Omega})\big)$ і $L_{p_i}\big((0,T);\,W^{1,p_i}_{0,x_i,loc}(\overline{\Omega})\big)$, $i=\overline{k+1,n}$.

Покажемо тепер, що послідовність $\{u^k\}$ обмежена $\bigcap\limits_{i=1}^{n}L_{p_i}\big((0,T);\,W^{1,p_i}_{x_i}(\widetilde{\Omega}_R\times\Omega_2)\big)$, $R>1$. Візьмемо в (10) за пробну функцію $v=u^k\,\zeta_R\,\mathrm{e}^{-\beta t}$. З (10) випливає

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\widetilde{\Omega}_R\times\Omega_2}\left(u^k\right)^2(x,\tau)\,\zeta_R\,dx\;+\;a_0\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q_\tau^R}\left|u_{x_i}^k\right|^{p_i}\zeta_R\,dx\,dt\;+$$

$$+\;\int\limits_{Q_\tau^R}(u^k)^2\left[\left(\beta+c(x,t)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial b_i(x,t)}{\partial x_i}\right)\zeta_R\;+\;\alpha/R\sum_{i=1}^{k}b_i(x,t)x_i\,\psi_R{}^{\alpha-1}\right]\mathrm{e}^{-\beta t}\,dx\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^{\tau}\|f_k\|_{V^*(\widetilde{\Omega}_R\times\Omega_2)}\|u^k\,\zeta_R\|_{V(\widetilde{\Omega}_R\times\Omega_2)}\,dt\;+$$

$$+ c_4 \sum_{i=1}^{k} \int_{Q_\tau^R} |u^k_{x_i}|^{p_i-1} \zeta_R^{1/p_i'} |u^k| \zeta_R^{1/2} |\zeta_{R x_i}| \zeta_R^{-1/p_i'-1/2} \, dx\, dt + c_5(R) \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_1 \sum_{i=1}^{n} \int_{Q_\tau^R} |u^k_{x_i}|^{p_i} \zeta_R \, dx\, dt + c_6 \int_{Q_\tau^R} |u^k|^2 \zeta_R \, dx\, dt + c_7(\varepsilon_1, R),$$

де $\varepsilon_1, c_4, \ldots, c_7$ – деякі додатні сталі.

Звідси, на підставі леми Гронуола – Белмана, одержуємо, що

$\{u^k\}$ обмежена в $C\big([0,T]; L^2(\widetilde{\Omega}_R \times \Omega_2)\big)$,

$\{u^k_{x_i}\}$ обмежена в $L_{p_i}\big((0,T); L^{p_i}(\widetilde{\Omega}_R \times \Omega_2)\big)$, $i = \overline{1,n}$.

Отож, для будь-якої обмеженої області $\widetilde{\Omega}_R \times \Omega_2$ послідовність $\{u^k\}$ обмежена в $\bigcap_{i=1}^{n} L_{p_i}\big((0,T); W^{1,p_i}_{x_i}(\widetilde{\Omega}_R \times \Omega_2)\big)$. Тому існує підпослідовність послідовності $\{u^k\}$ (збережемо за нею те саме позначення) така, що

$u^k \to u$ слабко в $\bigcap_{i=1}^{n} L_{p_i}\big((0,T); W^{1,p_i}_{x_i}(\widetilde{\Omega}_R \times \Omega_2)\big)$,

$|u^k_{x_i}|^{p_i-2} u^k_{x_i} \to \chi_i$ слабко в $L_{p_i'}\big((0,T); L^{p_i'}(\widetilde{\Omega}_R \times \Omega_2)\big)$, $i = \overline{1,n}$.

Оскільки $u^k \to u$ в $C\big([0,T]; L^2_{loc}(\overline{\Omega})\big)$, то $u^k(0) \to u(0)$ в $L^2_{loc}(\overline{\Omega})$, тобто $u(0) = u_0$; також, $u^k(T) \to u(T)$ в $L^2_{loc}(\overline{\Omega})$.

Перейшовши до границі за вибраною підпослідовністю, отримаємо

$$\langle u_t, v\rangle + \int_{\widetilde{\Omega}_R \times \Omega_2} \Big[\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t) \chi_i v_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t) u_{x_i} v + c(x,t) uv \Big] dx -$$

$$- \langle f, v\rangle = 0, \quad t \in (0,T), \tag{15}$$

де $v \in \bigcap_{i=1}^{n} L_{p_i}\big((0,T); W^{1,p_i}_{0,x_i}(\widetilde{\Omega}_R \times \Omega_2)\big)$

Для доведення існування розв'язку залишається показати, що в цій рівності

$$\chi_i = |u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i}, \; i = \overline{1,n}.$$

Розглянемо

$$\int_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t) \big(|u^k_{x_i}|^{p_i-2} u^k_{x_i} - |w_{x_i}|^{p_i-2} w_{x_i} \big) (u^k_{x_i} - w_{x_i}) \zeta_R \, dx\, dt \geqslant 0, \quad \tau \in [0,T]$$

$\forall\, w \in \bigcap_{i=1}^{n} L_{p_i}\big((0,T); W^{1,p_i}_{0,x_i,loc}(\overline{\Omega})\big)$

З (10) для $v = u^k \zeta_R$ випливає

$$\int_0^\tau \langle f_k, u^k \zeta_R\rangle \, dt - \int_{Q_\tau^R} \Big[\sum_{i=1}^{n} b_i(x,t) u^k_{x_i} u^k \zeta_R + c(x,t) (u^k)^2 \zeta_R \Big] dx\, dt -$$

$$- \int\limits_{\widetilde{\Omega}_R \times \Omega_2} (u^k)^2(x,\tau)\, \zeta_R\, dx + \int\limits_{\widetilde{\Omega}_R \times \Omega_2} (u_{0k})^2\, \zeta_R\, dx - \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^{k} a_i(x,t)|u^k_{x_i}|^{p_i-2} u^k_{x_i} u^k\, \zeta_{R x_i}\, dx\, dt -$$

$$- \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)|u^k_{x_i}|^{p_i-2} u^k_{x_i} w_{x_i}\, \zeta_R\, dx\, dt - \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)|w_{x_i}|^{p_i-2} w_{x_i} (u^k - w)_{x_i} \zeta_R dx dt \geqslant 0.$$

Врахувавши попередні зауваження щодо збіжності послідовності $\{u^k\}$, перейдемо у цій нерівності до границі, при $m \to \infty$ і, використавши (15), отримаємо

$$\int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\big(\chi_i \;-\; |w_{x_i}|^{p_i-2} w_{x_i}\big)(u-w)_{x_i}\, \zeta_R\, dx\, dt \geqslant 0.$$

Візьмемо у цій нерівності $w = u - \lambda z,\ z \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} L_{p_i}\big((0,T);\, W^{1,p_i}_{0,x_i}(\widetilde{\Omega}_R \times \Omega_2)\big),\ \lambda > 0$ і перейдемо до границі при $\lambda \to 0$ (неперервність цього інтеграла за λ доводиться аналогічно як радіальна неперервність оператора $\mathcal{A}$).

Одержимо

$$\int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\big(\chi_i \;-\; |u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i}\big) z_{x_i}\, \zeta_R\, dx\, dt \geqslant 0,$$

звідки

$$\int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\big(\chi_i \;-\; |u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i}\big) y_{x_i}\, \zeta_R\, dx\, dt \;=0,$$

$y \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} L_{p_i}\big((0,T);\, W^{1,p_i}_{0,x_i}(\widetilde{\Omega}_R \times \Omega_2)\big)$. Звідси згідно з (15) випливає

$$\langle u_t, v\rangle \;+\; \langle A(u), v\rangle \;+\; \langle L(u), v\rangle \;-\; \langle f, v\rangle \;=\; 0, \qquad t \in (0,T) \tag{16}$$

$\forall\, v \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} L_{p_i}\big((0,T); W^{1,p_i}_{0,x_i,c}(\overline{\Omega})\big)$, тобто u – розв'язок задачі (1) – (3).

Нехай u_1, u_2 – два різні розв'язки задачі (1) – (3). Запишемо тотожність (16) для u_1 і u_2, проведемо аналогічні операції як в доведенні фундаментальності.

Отримаємо

$$\int\limits_{\widetilde{\Omega}_{R/2} \times \Omega_2} \big(u_1 - u_2\big)^2(x,\tau)\, dx \;\leqslant\; c_8 \sum_{i=1}^{k} R^{\,d_i - \alpha}, \quad \tau \in [0,T],$$

де c_8 – деяка додатна константа, що не залежить від R. Перейдемо в цій нерівності до границі при $R \to \infty$. Одержимо, що $u_1 = u_2$ м.с. в Ω $\forall\, \tau \in [0,T]$. Теорему доведено.

3. Еліптична задача. Визначимо оператор A
$A(\varphi) \overset{def}{=} -\sum\limits_{i=1}^{n}\left(a_i(x)|\varphi_{x_i}|^{p_i-2}\varphi_{x_i}\right)_{x_i} + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i(x)\varphi_{x_i} + c(x)\varphi$. Неважко показати, що A відображає $V(G)$ в $V^\star(G)$, де G – довільна обмежена область в $\mathbb{R}^n$, якщо $p_1' \leqslant p_n$ або $p_1 \geqslant 2n/(n+1)$. Легко перевірити, що A – монотонний, радіально неперервний і коерцитивний оператор.

Теорема 3. *Нехай виконуються такі умови:*

1. $f \in \sum\limits_{i=1}^{n} W^{-1,p_i'}_{x_i,loc}(\overline{\Omega}),\ a_i \in L^\infty(\Omega), i=\overline{1,n},\ b_i \in L^\infty_{loc}(\overline{\Omega}), i=\overline{1,n},$
   $c \in L^{p_n/(p_n-2)}_{loc}(\overline{\Omega})$;
2. $\exists\, a_0 > 0 : a_i(x) \geqslant a_0,\ i=\overline{1,n},\ \sum\limits_{i=1}^{k} b_i(x)x_i \geqslant 0,$
   $\exists\, M_1 > 0 : c(x) - \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial b_i(x)}{\partial x_i} \geqslant M_1$ *м.с. в* Ω;
   $p_1p_n \geqslant p_1 + p_n$ *і* $p_1 > 2n/(n+2)$, *або* $p_1 \geqslant 2n/(n+1)$.

Тоді існує едина функція $u \in W^{1,p_1,\dots,p_n}_{0,loc}(\overline{\Omega})$, *яка задовольняє* (4) *і* (5).

Доведення. Доведемо спочатку існування розв'язку рівняння (4) з крайовою умовою $u|_{\partial(\widetilde{\Omega}_k\times\Omega_2)} = 0,\ k \in \mathbb{N}$. Рівняння (4) подамо у вигляді $A(u) = f$.

Згідно з умовами теореми оператор A радіально неперервний, монотонний і коерцитивний. Тому на підставі теореми 2.1 [22, с. 95] існує розв'язок рівняння

$$A(u^k) = f_k \quad \text{в} \quad V^\star(\widetilde{\Omega}_k \times \Omega_2),$$

де $f_k(x) \overset{def}{=} \begin{cases} f(x), & x \in \widetilde{\Omega}_k \times \Omega_2, \\ 0\ , & x \in \Omega \setminus (\widetilde{\Omega}_k \times \Omega_2). \end{cases}$

Нехай u^k – розв'язок задачі в $\widetilde{\Omega}_k \times \Omega_2,\ k \in \mathbb{N}$. Продовжимо u^k нулем на Ω. Тоді

$$A(u^k) = f_k \quad \text{в} \quad V^\star_{loc}(\overline{\Omega}).$$

Тобто,

$$\langle A(u^k), v\rangle - \langle f_k, v\rangle = 0 \tag{17}$$

$\forall\ v \in W^{1,p_1,\dots,p_n}_{0,c}(\overline{\Omega})$.

Доведемо, що послідовність $\{u^k\}$ – фундаментальна в $\bigcap\limits_{i=k+1}^{n} W^{1,p_i}_{0,x_i,loc}(\overline{\Omega})$. Нехай $R > 1$ довільне фіксоване число. Запишемо (17) для фіксованих k і m і за пробну функцію візьмемо

$$v = (u^k - u^m)\,\zeta_R.$$

Віднімемо від першої рівності другу

$$\int\limits_{\widetilde{\Omega}_R\times\Omega_2}\Big[\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\big(|u^k_{x_i}|^{p_i-2}u^k_{x_i} - |u^m_{x_i}|^{p_i-2}u^m_{x_i}\big)(u^k_{x_i} - u^m_{x_i})\,\zeta_R +$$

$$+\sum_{i=1}^{k} a_i(x)\big(|u^k_{x_i}|^{p_i-2}u^k_{x_i} - |u^m_{x_i}|^{p_i-2}u^m_{x_i}\big)(u^k - u^m)\,\zeta_{R x_i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} b_i(x)(u^k - u^m)_{x_i}(u^k - u^m)\,\zeta_R \;+\; c(x)\big(u^k - u^m\big)^2 \zeta_R\Big]\, dx \;=$$

$$= \;\langle f_k - f_m, (u^k - u^m)\,\zeta_R\rangle. \qquad (18)$$

Вибираємо $k, m : k \geqslant R, m \geqslant R$. Тоді права частина рівності (18) дорівнює нулю в $\widetilde{\Omega}_R \times \Omega_2$. Використовуючи нерівності (12), (13) отримаємо

$$a_0 \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{\widetilde{\Omega}_R \times \Omega_2} \big|\,|u^k_{x_i}|^{p_i-2}u^k_{x_i} \;-\; |u^m_{x_i}|^{p_i-2}u^m_{x_i}\big|\,|u^k_{x_i} - u^m_{x_i}|\,\zeta_R\, dx \;+$$

$$+\, a_0 \sum_{i=k+1}^{n} 2^{2-p_i} \int\limits_{\widetilde{\Omega}_R \times \Omega_2} |u^k_{x_i} - u^m_{x_i}|^{p_i}\,\zeta_R\, dx \;+$$

$$+ \int\limits_{\widetilde{\Omega}_R \times \Omega_2} (u^k - u^m)^2 \Big[\Big(c(x) \;-\; \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial b_i(x)}{\partial x_i}\Big)\zeta_R \;+\; \alpha/R\sum_{i=1}^{k} b_i(x)x_i\,\psi_R^{\;\alpha-1}\Big]\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\widetilde{\Omega}_R \times \Omega_2}\Big[\sum_{i=1}^{k} a_i(x)\big(|u^k_{x_i}|^{p_i-2}u^k_{xi} - |u^m_{x_i}|^{p_i-2}u^m_{x_i}\big)\zeta_R^{1/p_i'} \times (u^k - u^m)\zeta_R^{1/2} \times \zeta_{R x_i}\zeta_R^{-1/p_i'-1/2}\Big]\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k}\; \delta/2^{2-p_i} \int\limits_{\widetilde{\Omega}_R \times \Omega_2} \big|\,|u^k_{x_i}|^{p_i-2}u^k_{x_i} \;-\; |u^m_{x_i}|^{p_i-2}u^m_{x_i}\big|^{p_i'}\,\zeta_R\, dx \;+$$

$$+\, \varepsilon \int\limits_{\widetilde{\Omega}_R \times \Omega_2} \big(u^k - u^m\big)^2 \zeta_R\, dx \;+\; c_1(\varepsilon,\delta)\sum_{i=1}^{k}\; \int\limits_{\widetilde{\Omega}_R \times \Omega_2} \Big(\zeta_R^{-1/p_i'-1/2}\big|\zeta_{R x_i}\big|\Big)^{r_i} dx\;,$$

де $1/p_i' + 1/2 + 1/r_i = 1,\; 1/p_i + 1/p_i' = 1,\; i = \overline{1,k};\; \varepsilon, \delta,\; c_1$ – деякі додатні сталі, які не залежать від R.

Оцінимо праву частину цієї нерівності аналогічно як у теоремі 2. У результаті отримаємо таку оцінку:

$$(a_0 - \delta)\sum_{i=1}^{k} \int\limits_{\widetilde{\Omega}_R \times \Omega_2} \big|\,|u^k_{x_i}|^{p_i-2}u^k_{x_i} \;-\; |u^m_{x_i}|^{p_i-2}u^m_{x_i}\big|\,|u^k_{x_i} - u^m_{x_i}|\,\zeta_R\, dx \;+$$

$$+\, a_0 \sum_{i=k+1}^{n} 2^{2-p_i} \int\limits_{\widetilde{\Omega}_R \times \Omega_2} |u^k_{x_i} - u^m_{x_i}|^{p_i}\,\zeta_R\, dx \;+$$

$$+ \int\limits_{\widetilde{\Omega}_R \times \Omega_2} (u^k - u^m)^2 \Big[\Big(c(x) \;-\; \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial b_i(x)}{\partial x_i} \;-\; \varepsilon\Big)\zeta_R \;+\; \alpha/R\sum_{i=1}^{k} b_i(x)x_i\,\psi_R^{\;\alpha-1}\Big]\, dx \leqslant$$

$$\leqslant c_2 \sum_{i=1}^{k} R^{d_i}, \qquad (19)$$

$c_2 > 0$ не залежить від R. З (19), вибираючи $\varepsilon < M_1/2$, одержуємо

$$\int\limits_{\widetilde{\Omega}_R \times \Omega_2} (u^k - u^m)^2 \zeta_R \, dx \leqslant c_3 \sum_{i=1}^{k} R^{d_i}, \quad c_3 > 0.$$

Звідси і з умови 3 теореми випливає, що для будь-якої обмеженої області $G \subset \Omega$ $\{u^k\}$ фундаментальна в $L^2(G)$; аналогічно з (19) – $\{u^k_{x_i}\}$ фундаментальна в $L^{p_i}(G)$, $i = \overline{k+1, n}$, $u^k|_{\partial\Omega \cap \partial G} = 0$. Оскільки R довільне, то $\{u^k\}$ фундаментальна в $L^2_{loc}(\overline{\Omega})$, $\{u^k\}$ фундаментальна в $W^{1, p_i}_{0, x_i, loc}(\overline{\Omega})$, $i = \overline{k+1, n}$. Отже, $u^k \to u$ в $W^{1, p_i}_{0, x_i, loc}(\overline{\Omega})$, $i = \overline{k+1, n}$.

Покажемо тепер, що послідовність $\{u^k\}$ обмежена в $W^{1, p_1, \dots, p_n}(\widetilde{\Omega}_R \times \Omega_2)$, $R > 1$. Візьмемо в (17) за пробну функцію $v = u^k \zeta_R$. З (17) випливає

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\widetilde{\Omega}_R \times \Omega_2} |u^k_{x_i}|^{p_i} \zeta_R \, dx +$$

$$+ \int\limits_{\widetilde{\Omega}_R \times \Omega_2} (u^k)^2 \left[\Big(c(x) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial b_i(x)}{\partial x_i} \Big) \zeta_R + \alpha/R \sum_{i=1}^{k} b_i(x) x_i \, \psi_R{}^{\alpha-1} \right] dx \leqslant$$

$$\leqslant \| f_k \|_{V^*(\widetilde{\Omega}_R \times \Omega_2)} \| u^k \zeta_R \|_{V(\widetilde{\Omega}_R \times \Omega_2)} +$$

$$+ c_4 \int\limits_{\widetilde{\Omega}_R \times \Omega_2} \left[\sum_{i=1}^{k} |u^k_{x_i}|^{p_i - 1} \zeta_R^{1/p_i'} \times |u^k| \zeta_R^{1/2} \times \left| \zeta_{R x_i} \right| \zeta_R^{-1/p_i' - 1/2} \right] dx + c_5(R) \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_1 \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{\widetilde{\Omega}_R \times \Omega_2} |u^k_{x_i}|^{p_i} \zeta_R \, dx + \varepsilon_2 \int\limits_{\widetilde{\Omega}_R \times \Omega_2} |u^k|^2 \zeta_R \, dx + c_6(R, \varepsilon_1, \varepsilon_2).$$

де $\varepsilon_1, \varepsilon_2, c_4, c_5, c_6$ – деякі додатні сталі.

Звідси випливає, що $\{u^k\}$ обмежена в $L^2(\widetilde{\Omega}_R \times \Omega_2)$, $\{u^k_{x_i}\}$ обмежена в $L^{p_i}(\widetilde{\Omega}_R \times \Omega_2)$, $i = \overline{1, n}$. Отже, для будь-якої обмеженої області $\widetilde{\Omega}_R \times \Omega_2$ послідовність $\{u^k\}$ обмежена в $W^{1, p_1, \dots, p_n}(\widetilde{\Omega}_R \times \Omega_2)$. Тому існує підпослідовність послідовності $\{u^k\}$ (збережемо за нею те саме позначення) така, що

$u^k \to u$ слабко в $W^{1, p_1, \dots, p_n}(\widetilde{\Omega}_R \times \Omega_2)$,

$|u^k_{x_i}|^{p_i - 2} u^k_{x_i} \to \chi_i$ слабко в $L^{p_i'}(\widetilde{\Omega}_R \times \Omega_2)$.

Перейшовши до границі за вибраною підпослідовністю, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega}\Big[\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\chi_i v_{x_i} + \sum_{i=1}^{n}b_i(x)u_{x_i}v + c(x)uv\Big]\,dx - \langle f,v\rangle = 0, \tag{20}$$

де $v\in V(\widetilde{\Omega}_R\times\Omega_2)$.

Для доведення існування розв'язку залишається показати, що в цій рівності

$$\chi_i = |u_{x_i}|^{p_i-2}u_{x_i},\ i=\overline{1,n}.$$

Розглянемо

$$\int\limits_{\widetilde{\Omega}_R\times\Omega_2}\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\big(|u^k_{x_i}|^{p_i-2}u^k_{x_i} - |w_{x_i}|^{p_i-2}w_{x_i}\big)(u^k_{x_i}-w_{x_i})\,\zeta_R\,dx \geqslant 0$$

$\forall\ w\in W^{1,p_1,\dots,p_n}_{0,loc}(\overline{\Omega})$.

З (17) для $v=u^k\zeta_R$ випливає

$$\langle f_k,u^k\zeta_R\rangle - \int\limits_{\widetilde{\Omega}_R\times\Omega_2}\Big[\sum_{i=1}^{n}b_i(x)u^k_{x_i}u^k\zeta_R + c(x)(u^k)^2\zeta_R\Big]\,dx -$$

$$-\int\limits_{\widetilde{\Omega}_R\times\Omega_2}\sum_{i=1}^{k}a_i(x)|u^k_{x_i}|^{p_i-2}u^k_{x_i}u^k\zeta_{Rx_i}\,dx - \int\limits_{\widetilde{\Omega}_R\times\Omega_2}\sum_{i=1}^{n}a_i(x)|u^k_{x_i}|^{p_i-2}u^k_{x_i}w_{x_i}\zeta_R\,dx -$$

$$-\int\limits_{\widetilde{\Omega}_R\times\Omega_2}\sum_{i=1}^{n}a_i(x)|w_{x_i}|^{p_i-2}w_{x_i}(u^k-w)_{x_i}\,\zeta_R\,dx \geqslant 0.$$

Врахувавши попередні зауваження щодо збіжності послідовності $\{u^k\}$, перейдемо у цій нерівності до границі, при $m\to\infty$ і, використавши (20), отримаємо

$$\int\limits_{\widetilde{\Omega}_R\times\Omega_2}\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\big(\chi_i - |w_{x_i}|^{p_i-2}w_{x_i}\big)(u-w)_{x_i}\,\zeta_R\,dx \geqslant 0.$$

Візьмемо у цій нерівності $w=u-\lambda z$, $z\in V(\widetilde{\Omega}_R\times\Omega_2)$, $\lambda>0$: і перейдемо до границі при $\lambda\to 0$ (неперервність цього інтеграла за λ доводиться аналогічно як радіальна неперервність оператора A).

Одержимо

$$\int\limits_{\widetilde{\Omega}_R\times\Omega_2}\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\big(\chi_i - |u_{x_i}|^{p_i-2}u_{x_i}\big)z_{x_i}\,\zeta_R\,dx \geqslant 0,$$

звідки

$$\int\limits_{\widetilde{\Omega}_R\times\Omega_2} \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\big(\chi_i - |u_{x_i}|^{p_i-2}u_{x_i}\big)y_{x_i}\,\zeta_R\,dx = 0.$$

$y \in V(\widetilde{\Omega}_R \times \Omega_2)$. Звідси згідно з (20) випливає

$$\langle A(u), v\rangle - \langle f, v\rangle = 0 \tag{21}$$

$\forall\ v \in W^{1,p_1,\dots,p_n}_{0,c}(\overline{\Omega})$, тобто u – розв'язок задачі (4) – (5).

Нехай u_1, u_2 – два різні розв'язки задачі (4), (5). Запишемо тотожність (21) для u_1 і u_2 і проведемо аналогічні операції як при доведенні фундаментальності. Отримаємо

$$\int\limits_{\widetilde{\Omega}_{R/2}\times\Omega_2} (u_1-u_2)^2\,dx \leqslant c_7 \sum_{i=1}^{k} R^{d_i-\alpha},$$

де $c_7 > 0$ – деяка додатна константа, що не залежить від R. Перейдемо в цій нерівності до границі при $R \to \infty$. Одержимо, що $u_1 = u_2$ м.с. в Ω. Теорему доведено.

Зауваження 4. Умова $p_1p_n \geqslant p_1 + p_n\,(p_1' \leqslant p_n)$ забезпечує вкладення $W^{1,p_1,\dots,p_n}(G) \subset L_{p_1'}(G)$, де G обмежена область в $\mathbb{R}^n$, що дає нам обмеженість оператора $A : V(G) \to V^*(G)$. Цей самий результат можна отримати при використанні теореми вкладення $W^{1,p_1}_0(G) \subset L_{p_1'}(G)$, в якій потрібно, щоб виконувалась умова $p_1 \geqslant 2n/(n+1)$.

Зауваження 5. Якщо $b_i = 0, i = \overline{1,k}$ м.с. в Ω, то умову 3 в теоремі 3 можна замінити на $p_1 > 2n/(n+2)$.

---

1. *Тихонов А. Н.* Теоремы единственности для уравнения теплопроводности // Математический сборник. – 1935. – Т. 42. – №2. С. 199-216.

2. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Метод введения параметра для исследования эволюционных уравнений // Успехи матем. наук. – 1978. – Т. 33. – Вып. 5. – С. 7-72.

3. *Herrero M. A., Velázquez J. J. L.* On the dynamics of a semilinear heat equation with strong absorption // Comm. Part. Differ. Equat. – 1989. – Vol. 14. – №12. – P. 1653-1715.

4. *Шишков А. Е.* Поведение обобщенных решений смешанных задач для квазилинейных параболических уравнений высокого порядка в неограниченных областях // Украин. матем. журн. – 1987. – Т. 39. – №5. – С. 624-631.

5. *Акулов В. Ф., Шишков А. Е.* Об асимптотических свойствах решений смешанных задач для квазилинейных параболических уравнений в неограниченных областях // Матем. сб. – 1991. – Т. 182. – №8. – С. 1200-1210.

6. *Акулов В. Ф., Шишков А. Е.* О единственности решений смешаных задач и задачи Коши для параболических уравнений высокого порядка с неограниченными коэффициентами // Украин. матем. журн. – 1992. – Т. 44. – №2. – С. 149 - 155.

7. *Шишков А. Е.* Разрешимость граничных задач для квазилинейных эллиптических и параболических уравнений в неограниченных областях в классах функций, растущих на бесконечности // Украин. матем. журн. – 1995. – Т. 47. – №2. – С. 277 - 289.

8. *Калашников А. С.* О влиянии поглощения на распространение тепла в среде с теплопроводностью, зависящей от температуры // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1976. – Т. 16. – №3. – С. 599 - 606.

9. *Brezis H.* Semilinear equations in $\mathbb{R}^n$ without conditions at infinity // Appl. Math. Optim. – 1984. – Vol. 12. – №3. – P. 271 - 282.

10. *Herrero M. A., Pierre M.* The Cauchy problem for $u_t - \Delta u^m = 0$, when $0 < m < 1$ // Trans Amer. Math. Soc. – 1985. Vol. 291. – №1. – P. 145 - 158.

11. *Pierre M.* Nonlinear fast diffusion with measures as data // In "Nonlinear parabolic equations: qualitative properties of solutions", ed. by L. Boccardo and A. Tesei. Pitman Research Notes in Mathematics. – 1987. – Vol. 149. – P. 179 - 188.

12. *Bernis Francisco.* Elliptic and parabolic semilinear problems without conditions at infinity // Arch. Rational Mech. Anal. – 1989. – Vol. 106. – №3. – P. 217 - 241.

13. *Di Benedetto, Herrero M. A.* Non-negative solutions of the evolution p-Laplacian equation. Initial traces and Cauchy problem when $1 < p < 2$ // Arch. Rational Mech. Anal. – 1990. – Vol. 111. – №3. – P. 225 - 290.

14. *McLeod B., Pelitier L. A., Vazquez J. L.* Solutions of nonlinear Ode appearing in the theory of diffusion with absorption // Differential Integral Equations. – 1991. – Vol. 4. – №1. – P. 1 - 14.

15. *Бокало Н. М.* Об однозначной решимости краевых задач для полулинейных параболических уравнений в неограниченных областях без условий на бесконечности // Сибирск. матем. журн. – 1993. – Т. 34. – №4. – С. 620 - 627.

16. *Vazquez J. L., Walias M.* Existence and uniqueness of solutions of diffusion-absorption equations with general data // Differential Integral Equations. – 1994. – Vol. 7. – №1. – P. 15 - 36.

17. *Бокало Н. М.* Краевые задачи для полулинейных параболических уравнений в неограниченных областях без условий на бесконечности // Сибирск. матем. журн. – 1996. – Т. 37. – №5. – С. 977 - 985.

18. *Гладков А. Л.* Об уравнении фильтрации-абсорбции с переменным коэффициентом // Дифференциальные уравнения. – 2001. – Т. 37. – №1. – С. 42 - 47.

19. *Gladkov A., Guedda M.* Diffusion-absorption equation without growth restrictions on the data at infinity // J. Math. Anal. Appl. – 2002. – Vol. 274. – №1. – P. 16 - 37.

20. *Marchi Claudio, Tesei Alberto.* Higher-order parabolic equations without conditions at infinity // J. Math. Anal. Appl. – 2002. – Vol. 269. – №1. – P. 352 - 368.

21. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М., 1958.

22. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М., 1978.

23. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., 1972.

PROBLEMS FOR NONLINEAR ELLIPTIC AND PARABOLIC EQUATIONS IN ANIZOTROPICAL SPACES

Ivan Medvid

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

It is proved existence and uniqueness of solutions to some nonlinear elliptic and parabolic problems without conditions at infinity. In particular, the growth of the data at infinity need not be limited and the solution each of problems is unique without prescription of its behavior at infinity.

Key words: nonlinear elliptic and parabolic equations, anizotropical space.

Стаття надійшла до редколегії 29.01.2005

Прийнята до друку 19.10.2005