ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2005. Вип.64. С.167–180

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2005. Vol.64. P.167–180

УДК 517.95

СЛАБКО НЕЛІНІЙНА ПАРАБОЛІЧНА ВАРІАЦІЙНА НЕРІВНІСТЬ У НЕОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ

Маріанна ОЛІСКЕВИЧ

Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Одержано певні умови існування та єдиності розв'язку параболічної варіаційної нерівності в необмеженій за просторовими змінними області зі слабкою нелінійністю, яка задовольняє умову Ліпшиця.

Ключові слова: параболічна варіаційна нерівність.

Параболічні варіаційні нерівності виникають при моделюванні фізичних і механічних процесів [1]. Дослідженню таких нерівностей в обмежених областях присвячено багато праць. Зазначимо лише монографію [2], в якій знаходимо формулювання параболічних варіаційних нерівностей і методи їхнього дослідження. Лише у кількох працях вивчено деякі параболічні варіаційні нерівності в необмежених областях за просторовими змінними. Зокрема у праці [3] розглянуто варіаційну нерівність для випадку лінійного параболічного оператора, а в [4] вивчено варіаційну нерівність для слабко нелінійного параболічного оператора з монотонною степеневою нелінійністю.

У цій праці одержано певні умови існування та єдиності розв'язку варіаційної нерівності в необмеженій області за просторовими змінними зі слабко нелінійним параболічним оператором у випадку ліпшицевої нелінійності.

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – необмежена область, $\partial\Omega \in C^1$; $\Omega^R = \Omega \cap B_R$, $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ – регулярна область [5, с.45]; $\Gamma_1^R = \partial\Omega \cap B_R$, $\Gamma_2^R = \partial\Omega^R \setminus \Gamma_1^R$; $Q_\tau = \Omega \times (0,\tau)$, $\tau \in [0,T]$; $\Omega_\tau = Q_T \cap \{t = \tau\}$; $\Omega_\tau^R = \Omega_\tau \cap B_R$; $Q_\tau^R = \Omega^R \times (0,\tau)$; $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$.

Введемо простори

$$H^1_{loc}(\overline{\Omega}) = \{u \in H^1(\Omega^R) \quad \forall R \geq 1\},$$

$$L^2_{loc}(\overline{\Omega}) = \{u \in L^2(\Omega^R) \quad \forall R \geq 1\},$$

$$L^{\infty}_{loc}(\overline{\Omega}) = \{u \in L^{\infty}(\Omega^R) \quad \forall R \geq 1\}.$$

Розглянемо в області Q_T задачу

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u = f(x,t,u)\,, \tag{1}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0\,, \quad u \geq 0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \geq 0 \quad \text{на } S_T\,, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x)\,, \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

де $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_{x_i}\cos(x_j,\nu)$, ν – зовнішня нормаль до S_T.

Позначимо

$$\mathcal{K} = \{v \,:\, v \in L^2((0,T); H^1_{loc}(\overline{\Omega}))\,,\, v \geq 0 \text{ майже всюди на } S_T\}.$$

Тоді задача (1) - (3) еквівалентна варіаційній нерівності

$$\int\limits_{Q_\tau} \Bigg[u_t(v-u)\psi(x) + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_{x_i}((v-u)\psi(x))_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)u_{x_i}(v-u)\psi(x) -$$

$$-\frac{1}{2}\alpha(u-v)^2\psi(x) + c(x,t)u(v-u)\psi(x) - f(x,t,u)(v-u)\psi(x)\Bigg]\, e^{-\alpha t}\,dxdt \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} (u-v)^2\psi(x)\,e^{-\alpha\tau}\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} (u_0-v)^2\psi(x)dx, \tag{4}$$

$\tau \in (0,T]$, $\psi \in C^1_0(\mathbb{R}^n)$, $\psi(x) \geq 0$ в $\mathbb{R}^n$, $\alpha \geq \alpha_0$, $\alpha_0 \in \mathbb{R}$.

Припускатимемо виконання умов:

(A): $a_{ij} \in C(\overline{Q}_T) \cap L^{\infty}(\overline{Q}_T), a_{ijt} \in L^{\infty}((0,T), L^{\infty}_{loc}(\overline{\Omega})), \quad i,j = 1,...,n;$

$$a_{ij}(x,t) = a_{ji}(x,t) \quad \forall (x,t) \in Q_T;$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq a_0|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad \forall (x,t) \in Q_T, \quad a_0 > 0;$$

(B): $b_i \in L^{\infty}(Q_T), \quad i = 1,...,n;$

(C): $c \in L^{\infty}((0,T); L^{\infty}_{loc}(\overline{\Omega})), \quad c(x,t) \geq c_0$ майже всюди Q_T, $\quad c_0 \in \mathbb{R}$;

(F): функція $f(\cdot,\cdot,\xi)$ вимірна в Q_T для всіх $\xi \in \mathbb{R}$; функція $f(x,t,\cdot)$ неперервна на $\mathbb{R}$ майже для всіх $(x,t) \in Q_T$; $f(x,t,0) = 0$ майже всюди в Q_T;

$$|f(x,t,\xi_1) - f(x,t,\xi_2)| \leq L|\xi_1 - \xi_2|$$

майже для всіх $(x,t) \in Q_T$ і всіх $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$, $L > 0$ – стала.

Означення 1. *Функцію $u \in C([0,T]; L^2_{loc}(\overline{\Omega})) \cap L^2((0,T); H^1_{loc}(\overline{\Omega})) \cap \mathcal{K}$, яка задовольняє (4) для всіх $\tau \in (0,T]$, для всіх $\psi \in C^1_0(\mathbb{R}^n)$, $\psi(x) \geq 0$ в $\mathbb{R}^n$, для всіх $\alpha \geq \alpha_0$ і для всіх функцій $v \in L^2((0,T); H^1_{loc}(\overline{\Omega}))$ таких, що $v \in \mathcal{K}$ і $v_t \in L^2((0,T); L^2_{loc}(\overline{\Omega}))$, називатимемо розв'язком нерівності (4).*

Позначимо

$$b_0 = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} \sum_{i=1}^{n} b_i^2(x,t)\,, \quad a_1 = \max_{i,j=1,\ldots,n} \sup_{Q_T} a_{ij}^2(x,t)\,.$$

Лема 1. *[2] Нехай $w \in C([0,T]; L^2_{loc}(\overline{\Omega})) \cap L^2((0,T); H^1_{loc}(\overline{\Omega})) \cap \mathcal{K}$ і $u_0 \geq 0$ майже всюди на $\partial\Omega$, $u_0 \in H^1_{loc}(\overline{\Omega})$. Тоді розв'язок задачі*

$$\eta w_{\eta t} + w_\eta = w\,, \quad \eta > 0, \quad \eta \in [0,T]\,, \tag{5}$$

$$w_\eta(x,0) = u_0(x) \tag{6}$$

слабко збігається до w у просторі $L^2((0,T); H^1_{loc}(\overline{\Omega}))$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(F)**, $\alpha_0 = 2L + b_0/a_0 - 2c_0$. *Тоді нерівність (4) не може мати більше одного розв'язку в класі функцій u таких, що*

$$\int\limits_{Q_T^R} |u|^2\, dxdt \leq e^{a|R|^2}\,, \quad \forall R \geq 1, a > 0.$$

Доведення. Припустимо існування двох розв'язків u_1 і u_2 нерівності (4). Тоді

$$\int\limits_{Q_{T_0}} \Bigg[v_t(v-u_k)\psi(x) + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) u_{kx_i}((v-u_k)\psi(x))_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t) u_{kx_i}((v-u_k)\psi(x) -$$

$$- \frac{1}{2}\alpha(v-u_k)^2\psi(x) + c(x,t)u_k(v-u_k)\psi(x) - f(x,t,u_k)(v-u_k)\psi(x) \Bigg] e^{-\alpha t}\, dxdt \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_{T_0}} (u_k - v)^2 \psi(x)\, e^{-\alpha T}\, dx - \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0} (u_0 - v)^2 \psi(x) dx, \tag{7}$$

$k = 1, 2$, $T_0 \in (0,T]$.

Приймемо в (5) $w = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$, а в (7) $v = w_\eta$, де w_η є розв'язком задачі (5), (6). Додавши (7) для $k=1$ і $k=2$, матимемо

$$\int\limits_{Q_{T_0}} \Bigg[2w_{\eta t}(w_\eta - w)\psi(x) + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) \left(u_{1x_i}(w_{\eta x_j} - u_{1x_j}) + u_{2x_i}(w_{\eta x_j} - u_{2x_j})\right) \psi(x) +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) \left(u_{1x_i}(w_\eta - u_1) + u_{2x_i}(w_\eta - u_2)\right) \psi_{x_j}(x) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\,(u_{1x_i}(w_\eta - u_1) + u_{2x_i}(w_\eta - u_2))\,\psi(x) -$$

$$-\frac{1}{2}\alpha((u_1-w_\eta)^2+(u_2-w_\eta)^2)\psi(x)+c(x,t)(u_1(w_\eta-u_1)+u_2(w_\eta-u_2))\psi(x)-$$

$$-\,(f(x,t,u_1)(w_\eta-u_1)+f(x,t,u_2)(w_\eta-u_2))\psi(x)]\;e^{-\alpha t}\,dxdt \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{T_0}} ((u_1-w_\eta)^2+(u_2-w_\eta)^2)\,\psi(x)\,e^{-\alpha T_0}\,dx, \tag{8}$$

оскільки з (4) випливає, що

$$u_k|_{t=0} = u_0\,, \quad k=1,2.$$

З (5) маємо $w_\eta - w = -\eta w_{\eta t}$. Отже,

$$2\int\limits_{Q_{T_0}} w_{\eta t}(w_\eta - w)\psi(x)e^{-\alpha t}dxdt = -\frac{2}{\eta}\int\limits_{Q_{T_0}} (w_\eta-w)^2\psi(x)e^{-\alpha t}dxdt \leq 0.$$

Крім того,

$$\int\limits_{\Omega_{T_0}} \left[(u_1-w_\eta)^2+(u_2-w_\eta)^2\right]\,\psi(x)\,e^{-\alpha T_0}dx \geq 0.$$

Тому з (8) одержуємо

$$\int\limits_{Q_{T_0}} \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\,(u_{1x_i}(w_{\eta x_j} - u_{1x_j} + u_{2x_i}((w_{\eta x_j} - u_{2x_j}))\,\psi(x) + \right.$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\,(u_{1x_i}(w_\eta-u_1)+u_{2x_i}(w_\eta-u_2))\,\psi_{x_j}(x)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\,(u_{1x_i}(w_\eta-u_1)+u_{2x_i}((w_\eta-u_2))\,\psi(x)+$$

$$+c(x,t)\,(u_1(w_\eta-u_1)+u_2(w_\eta-u_2))\,\psi(x)-$$

$$-\,(f(x,t,u_1)(w_\eta-u_1)+f(x,t,u_2)(w_\eta-u_2))\,\psi(x)]\;e^{-\alpha t}\,dxdt \geq$$

$$\geq \frac{\alpha}{2}\int\limits_{Q_{T_0}} \left[(u_1-w_\eta)^2+(u_2-w_\eta)^2\right]\,\psi(x)\,e^{-\alpha t}\,dxdt. \tag{9}$$

Згідно з лемою $w_\eta \to w$ слабко в $L^2((0,T);H^1_{loc}(\overline{\Omega}))$. Тому

$$\lim_{\eta\to+0}\inf\int\limits_{Q_{T_0}} \left[(u_1-w_\eta)^2+(u_2-w_\eta)^2\right]\,\psi(x)\,e^{-\alpha t}\,dxdt \geq \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{T_0}} u^2\,\psi(x)\,e^{-\alpha t}\,dxdt,$$

де $u = u_1 - u_2$.

Отже, з (9) одержуємо

$$\int\limits_{Q_{T_0}} \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\, u_{x_i} u_{x_j}\, \psi(x) + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\, u_{x_i} u\, \psi_{x_j}(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t) u_{x_i} u \psi(x) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\alpha u^2\, \psi(x) + c(x,t) u^2 \psi(x) - (f(x,t,u_1) - f(x,t,u_2)) u \psi(x) \right] e^{-\alpha t}\, dxdt \le 0. \quad (10)$$

Нехай $0 \le \psi(x) \le 1$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\psi(x) \equiv 1$, $|x| \le R_1$, $\psi(x) \equiv 0$, $|x| \ge R_2$, $1 \le R_1 < R_2$, $|\mathrm{grad}\, \psi(x)|^2 \le \dfrac{\psi_0 \psi(x)}{(R_2 - R_1)^2}$, $\psi_0 = \mathrm{const}$.

Згідно з умовою **(A)**

$$J_1 \equiv \int\limits_{Q_{T_0}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) u_{x_i} u_{x_j}\, \psi(x)\, e^{-\alpha t}\, dxdt \ge a_0 \int\limits_{Q_{T_0}} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^2\, \psi(x)\, e^{-\alpha t}\, dxdt,$$

$$J_2 \equiv \int\limits_{Q_{T_0}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\, u_{x_i} u\, \psi_{x_j}\, e^{-\alpha t}\, dxdt \le$$

$$\le \frac{1}{2} \int\limits_{Q_{T_0}} \sum_{i,j=1}^{n} \left[\delta_0 a_{ij}^2(x,t) u_{x_i}^2 \psi(x) + \frac{1}{\delta_0} u^2 \frac{\psi_{x_j}^2}{\psi(x)} \right] e^{-\alpha t}\, dxdt \le$$

$$\le \frac{a_1 \delta_0 n}{2} \int\limits_{Q_{T_0}} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^2 \psi(x) e^{-\alpha t} dxdt + \frac{n \psi_0}{2\delta_0 (R_2 - R_1)^2} \int\limits_{Q_{T_0}^{R_2}} u^2\, e^{-\alpha t}\, dxdt, \quad \delta_0 > 0.$$

На підставі умови **(B)**

$$J_3 \equiv \int\limits_{Q_{T_0}} \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\, u_{x_i} u\, \psi_{x_j}\, e^{-\alpha t}\, dxdt \le$$

$$\le \frac{b_0 \delta_1}{2} \int\limits_{Q_{T_0}} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^2\, \psi(x)\, e^{-\alpha t}\, dxdt + \frac{1}{2\delta_1} \int\limits_{Q_{T_0}} u^2\, \psi(x)\, e^{-\alpha t}\, dxdt.$$

Згідно з умовою **(C)**

$$J_4 \equiv \int\limits_{Q_{T_0}} c(x,t)\, u^2\, \psi(x)\, e^{-\alpha t}\, dxdt \ge c_0 \int\limits_{Q_{T_0}} u^2\, \psi(x)\, e^{-\alpha t}\, dxdt.$$

На підставі умови **(F)**

$$J_5 \equiv \int\limits_{Q_{T_0}} (f(x,t,u_1) - f(x,t,u_2)) u\, \psi(x)\, e^{-\alpha t}\, dxdt \le L \int\limits_{Q_{T_0}} u^2\, \psi(x)\, e^{-\alpha t}\, dxdt\,.$$

Враховуючи оцінки інтегралів $J_1 - J_5$, з (10) одержуємо нерівність

$$\int\limits_{Q_{T_0}} \left[\left(a_0 - \frac{a_1\delta_0 n}{2} - \frac{b_0\delta_1}{2} \right) \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^2 + \left(\frac{\alpha}{2} + c_0 - \frac{1}{2\delta_1} - L \right) u^2 \right] \psi(x)\, e^{-\alpha t}\, dxdt \leq$$

$$\leq \frac{n\psi_0}{2\delta_0(R_2 - R_1)^2} \int\limits_{Q_{T_0}^{R_2}} u^2\, e^{-\alpha t}\, dxdt\,. \tag{11}$$

Виберемо $\delta_1 = \dfrac{a_0}{b_0}$, $\delta_0 = \dfrac{a_0}{a_1 n}$, $\alpha = \gamma + \alpha_0$. Тоді з (11) маємо нерівність

$$\gamma \int\limits_{Q_{T_0}^{R_1}} u^2\, e^{-\gamma t}\, dxdt \leq \frac{c_1}{(R_2 - R_1)^2} \int\limits_{Q_{T_0}^{R_2}} u^2\, e^{-\gamma t}\, dxdt\,,$$

де $c_1 = \dfrac{n^2\, \psi_0\, a_1\, e^{\alpha_0 T}}{a_0}$. Тоді на підставі леми 1.3 [6]

$$\int\limits_{Q_{T_0}^{R^1}} u^2\, dxdt \leq e^{(-k + 2\gamma T_0)} \int\limits_{Q_{T_0}^{R^2}} u^2\, dxdt\,,$$

де сталі k і γ зв'язані співвідношеннями

$$\frac{c_1 k^2}{\gamma(R_2 - R_1)^2} \leq e^{-1}\,, \qquad \frac{R_2 - R_1}{k} \leq 1\,, \qquad k \in N\,.$$

Звідси аналогічно як при доведенні теореми 1.2 [6] одержуємо, що $u_1 = u_2$ майже всюди в Q_T. Теорему 1 доведено.

Нехай $R > 1$ – довільне фіксоване число. Введемо простір

$$H^1_{0,2}(\Omega^R) = \{u\,:\, u \in H^1(\Omega^R), u|_{\Gamma_2^R} = 0\}.$$

Визначимо оператор

$$\mathcal{B}_R\,:\, H^1_{0,2}(\Omega^R) \to (H^1_{0,2}(\Omega^R))^*$$

формулою

$$\langle \mathcal{B}_R(u), v \rangle = -\int\limits_{\Gamma_1^R} u^-\, v\, d\Gamma$$

для $u, v \in H^1_{0,2}(\Omega^R)$, де

$$u^-(x) = \begin{cases} 0, & u(x) \geq 0, \\ -u(x), & u(x) < 0. \end{cases}$$

Очевидно, що оператор $\mathcal{B}_R$ семінеперервний і обмежений. Крім того,

$$\langle \mathcal{B}_R(u) - \mathcal{B}_R(v), (u-v)\psi \rangle \geq 0 \quad \forall \psi \in C^1(\mathbb{R}^n)\,,\ \psi(x) \geq 0 \text{ в } \mathbb{R}^n,$$

$\forall u, v \in H^1_{0,2}(\Omega^R)$, оператор $\mathcal{B}_R$ монотонний і

$$\int_0^\tau \langle \mathcal{B}_R(u), u_t \rangle \, dt \geq 0$$

для всіх $\tau \in (0,T]$, для всіх u таких, що $u, u_t \in L^2((0,T); H^1_{0,2}(\Omega^R))$, $u(x,0) \geq 0$ майже всюди на $\partial\Omega^R$.

Позначимо через $\mathcal{K}_R$ звуження множини $\mathcal{K}$ на Q_T^R. Тоді

$$\mathcal{K}_R = \{u : \ u \in L^2((0,T); H^1_{loc}(\overline{\Omega})),\ \mathcal{B}_R(u) = 0 \text{ майже для всіх } t \in (0,T)\}.$$

Означення 2. *Функцію $u \in C([0,T]; L^2(\Omega^R)) \cap L^2((0,T); H^1_{0,2}(\Omega^R)) \cap \mathcal{K}_R$, яка задовольняє (4) для всіх $\tau \in (0,T]$, для всіх $\psi \in C^1_0(\mathbb{R}^n)$, $\psi(x) \geq 0$ в $\mathbb{R}^n$, для всіх $\alpha \geq \alpha_0$ і для всіх функцій $v \in L^2((0,T); H^1_{0,2}(\Omega^R))$ таких, що $v \in \mathcal{K}_R$ і $v_t \in L^2((0,T); L^2(\Omega^R))$, називатимемо розв'язком нерівності (4) в області Q_T^R.*

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(F)** *і, крім того, $u_0 \in H^1_{0,2}(\Omega^R)$, $u_0(x) > 0$ майже для всіх $x \in \Gamma_1^R$, $\alpha_0 = a_0 + 2L - 2c_0 + \dfrac{b_0}{a_0}$. Тоді існує розв'язок u нерівності (4) в області Q_T^R і $u_t \in L^2(Q_T^R)$.*

Доведення. Нехай $\{\varphi^k(x)\}$ – база простору $H^1_{0,2}(\Omega^R)$,

$$u^N(x,t) = \sum_{k=1}^N C_k^N(t)\varphi^k(x)\,, \quad N = 1, 2, \dots,$$

де C_k^N розв'язок задачі Коші

$$\int\limits_{\Omega_R} \left[u_t^N \varphi_k + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) u^N_{x_i} \varphi^k_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x,t) u^N_{x_i} \varphi^k + c(x,t) u^N \varphi^k - f(x,t,u^N)\,\varphi^k \right] dx +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon} \langle \mathcal{B}_R(u^N), \varphi^k \rangle = 0, \tag{12}$$

$$C_k^N(0) = u^N_{0,k}\,, \quad k = 1, \dots, N,\ \varepsilon > 0, \tag{13}$$

$$u_0^N(x) = \sum_{k=1}^N u^N_{0,k} \varphi^k(x), \qquad \lim_{N\to\infty} ||u_0^N - u_0||_{H^1_{0,2}(\Omega^R)} = 0.$$

На підставі умов теореми задача (12), (13) має абсолютно неперервний розв'язок визначений на $[0,T]$.

З (12) одержуємо рівність

$$\int\limits_{Q_\tau^R}\Big[u_t^N u^N+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)u_{x_i}^N u_{x_j}^N+\sum_{i=1}^n b_i(x,t)u_{x_i}^N u^N+c(x,t)(u^N)^2-$$

$$-f(x,t,u^N)u^N\Big]\,e^{-\alpha t}\,dxdt+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau\langle\mathcal{B}_R(u^N),u^N\rangle\,e^{-\alpha t}\,dt=0\,. \tag{14}$$

Використовуючи умови теореми, цілком аналогічно як при доведенні теореми 1 з (14) матимемо нерівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau^R}|u^N|^2\,e^{-\alpha\tau}\,dx+\int\limits_{Q_\tau^R}\Big[\Big(c_0-\frac{1}{2\delta_2}-L+\frac{\alpha}{2}\Big)\,|u^N|^2+$$

$$+\Big(a_0-\frac{b_0}{2}\delta_2\Big)\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^N|^2\Big]\,e^{-\alpha t}\,dxdt+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau\langle\mathcal{B}_R(u^N),u^N\rangle e^{-\alpha t}\,dt\le\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0^R}|u_0^N|^2\,dx\,,\quad\delta_2>0,\ \tau\in[0,T]. \tag{15}$$

Вибравши в (15) $\delta_2=\dfrac{a_0}{b_0}$, $\alpha=\alpha_0$, одержимо оцінки (для достатньо великих N)

$$\int\limits_{\Omega_\tau^R}|u^N|^2\,dx\le C_2\,,\qquad\tau\in[0,T], \tag{16}$$

$$\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^N|^2\,dxdt\le C_2\,, \tag{17}$$

$$\int_0^\tau\langle\mathcal{B}_R(u^N),u^N\rangle dt\le C_2\varepsilon\,, \tag{18}$$

де стала C_2 залежить від a_0, α_0, T і норми функції u_0. Аналогічно з (12) маємо рівність

$$\int\limits_{Q_\tau^R}\Big[u_t^N u_t^N+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)u_{x_i}^N u_{x_jt}^N+\sum_{i=1}^n b_i(x,t)u_{x_i}^N u_t^N+c(x,t)u^N u_t^N-$$

$$-\,f(x,t,u^N)u_t^N\Big]\,dxdt+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau\langle\mathcal{B}_R(u^N),u_t^N\rangle dt=0\,. \tag{19}$$

Існує таке число N_0, що $u_0^N(x)\ge0$ для всіх $N\ge N_0$ і майже всіх $x\in\Gamma_1^R$. Отже,

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau\langle\mathcal{B}_R(u^N),u_t^N\rangle dt\ge0.$$

Крім того, згідно з умовою **(A)**

$$J_6 \equiv \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\, u_{x_i}^N u_{x_j t}^N \, dxdt = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau^R} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,\tau) u_{x_i}^N u_{x_j}^N dx -$$

$$-\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0^R} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,0) u_{0,x_i}^N u_{0,x_j}^N dx - \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i,j=1}^n a_{ijt}(x,t) u_{x_i}^N u_{x_j}^N dxdt \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\, a_0 \int\limits_{\Omega_\tau^R} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^2 dx - \frac{1}{2}\, a^0 \int\limits_{\Omega_0^R} \sum_{i=1}^n |u_{0,x_i}^N|^2 \, dx - \frac{1}{2}\, a^1 \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^2 \, dxdt \,,$$

де сталі a^0 і a^1 визначаються з умов

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,0)\, \xi_i \xi_j \leq a^0\, |\xi|^2 \,,$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ijt}(x,t)\, \xi_i \xi_j \leq a^1\, |\xi|^2 \,, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \,.$$

На підставі умови **(B)**

$$J_7 \equiv \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^n b_i(x,t)\, u_{x_i}^N u_t^N \, dxdt \leq \int\limits_{Q_\tau^R} \left[3b_0 \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^2 + \frac{1}{6} |u_t^N|^2 \right] dxdt \,.$$

Згідно з умовою **(C)**

$$J_8 \equiv \int\limits_{Q_\tau^R} c(x,t)\, u^N u_t^N \, dxdt \leq \int\limits_{Q_\tau^R} \left[\frac{1}{6} |u_t^N|^2 + 3c^0 |u^N|^2 \right] dxdt \,,$$

де $c^0 = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{Q_T^R} |c(x,t)|^2$. На підставі умови **(F)**

$$J_9 \equiv \int\limits_{Q_\tau^R} f(x,t,u^N) u_t^N \, dxdt \leq L \int\limits_{Q_\tau^R} |u^N| |u_t^N| \, dxdt \leq \int\limits_{Q_\tau^R} \left[\frac{1}{6} |u_t^N|^2 + 3L^2 |u^N|^2 \right] dxdt.$$

Враховуючи оцінки інтегралів $J_6 - J_9$, з (19) отримуємо нерівність

$$a_0 \int\limits_{\Omega_\tau^R} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^2 \, dx + \int\limits_{Q_\tau^R} |u_t^N|^2 \, dxdt \leq \tag{20}$$

$$\leq a^0 \int\limits_{\Omega_0^R} \sum_{i=1}^n |u_{0,x_i}^N|^2 \, dx + \int\limits_{Q_\tau^R} \left[(a^1 + 6b_0) \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^2 + 6(c^0 + L^2) |u^N|^2 \right] dxdt \,, \quad \tau \in [0,T] \,.$$

Тоді на підставі (16), (17) з (20) матимемо оцінки

$$\int\limits_{\Omega_\tau^R} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}^N|^2 dx \le C_3 , \qquad \tau \in [0,T] , \tag{21}$$

$$\int\limits_{Q_T^R} |u_t^N|^2 \, dxdt \le C_3 , \tag{22}$$

причому стала C_3 не залежить від N і ε.

Згідно з оцінками (16), (17), (21), (22), існує підпослідовність $\{u^{N_k}\}$ послідовності $\{u^N\}$ така, що

$$\begin{array}{lll} u^{N_k} \to u^\varepsilon & * - \text{ слабко в} & L^\infty((0,T); H^1_{0,2}(\Omega^R)) , \\ u^{N_k} \to u^\varepsilon & \text{слабко в} & L^2((0,T); H^1_{0,2}(\Omega^R)) , \\ u_t^{N_k} \to u_t^\varepsilon & \text{слабко в} & L^2(Q_T^R) , \end{array}$$

при $k \to \infty$.

Крім того, оскільки оператор $\mathcal{B}_R$ обмежений, то можемо вважати що

$$\mathcal{B}_R(u^{N_k}) \to z^\varepsilon \qquad \text{слабко в } L^2((0,T); H^1_{0,2}(\Omega^R))^* .$$

З компактності вкладення $H^1(Q_T^R)$ в $L^2(Q_T^R)$ і теореми 5.1 [2, с. 70] випливає, що $u^{N_k} \to u^\varepsilon$ сильно в $L^2(Q_T^R)$. Тому

$$f(\cdot,\cdot,u^{N_k}) \to f(\cdot,\cdot,u^\varepsilon) \qquad \text{слабко в } L^2(Q_T^R) .$$

Використовуючи монотонність оператора $\mathcal{B}_R$ аналогічно як в [2, с. 171] доводимо, що $z^\varepsilon = \mathcal{B}_R(u^\varepsilon)$. Крім того, $u^\varepsilon(x,0) = u_0(x)$. Для функцій u^ε правильні оцінки (16) - (18), (21), (22).

Тому існує така послідовність $\{\varepsilon_k\}$, $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$, що

$$\begin{array}{rll} u^{\varepsilon_k} \to u & \text{слабко в} & L^2((0,T); H^1_{0,2}(\Omega^R)) , \\ u_t^{\varepsilon_k} \to u_t & \text{слабко в} & L^2(Q_T^R) , \\ u^{\varepsilon_k} \to u & \text{сильно в} & L^2(Q_T^R) , \\ f(\cdot,\cdot,u^{\varepsilon_k}) \to f(\cdot,\cdot,u) & \text{слабко в} & L^2(Q_T^R) \end{array}$$

при $k \to \infty$.

Знову використовуючи монотонність оператора $\mathcal{B}_R$, доводимо, що

$$\mathcal{B}_R(u) = 0$$

майже для всіх $t \in (0,T)$, тобто $u \in \mathcal{K}_R$.

Зазначимо, що за теоремою 1.17 [5] $u \in C([0,T]; L^2(\Omega^R))$.

Для кожної функції u^{ε_k} правильна рівність

$$\int\limits_{Q_\tau^R} \left[u_t^{\varepsilon_k} v + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) u_{x_i}^{\varepsilon_k} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t) u_{x_i}^{\varepsilon_k} v + c(x,t) u^{\varepsilon_k} v - f(x,t,u^{\varepsilon_k}) v \right] dxdt +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \langle \mathcal{B}_R(u^{\varepsilon_k}), v\rangle dt = 0\,. \tag{23}$$

для довільної $v \in L^2((0,T); H^1_{0,2}(\Omega^R))$ і довільних $\tau \in (0,T]$.

Зокрема, рівність (23) правильна і для $v = u^{\varepsilon_k}$. Якщо, крім того, $v_t \in L^2(Q_T^R)$ і $v \in \mathcal{K}_R$, то з (29) легко одержати рівність

$$\int\limits_{Q_\tau^R}\Bigg[v_t(v-u^{\varepsilon_k})\psi(x) + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)u^{\varepsilon_k}_{x_i}((v-u^{\varepsilon_k})\psi(x))_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x,t)u^{\varepsilon_k}_{x_i}(v-u^{\varepsilon_k})\psi(x) -$$

$$-\frac{\alpha}{2}(v-u^{\varepsilon_k})^2\psi(x) + c(x,t)u^{\varepsilon_k}(v-u^{\varepsilon_k})\psi(x) - f(x,t,u^{\varepsilon_k})(v-u^{\varepsilon_k})\psi(x)\Bigg]\, e^{-\alpha t}\,dxdt +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \langle \mathcal{B}_R(u^{\varepsilon_k}) - \mathcal{B}_R(v), (v-u^{\varepsilon_k})\psi(x)\rangle e^{-\alpha t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau^R}(u^{\varepsilon_k}-v)^2\,\psi(x)\,e^{-\alpha\tau}\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0^R}(u_0-v)^2\,\psi(x)\,dx \tag{24}$$

для довільної $\psi \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $\psi(x) \geq 0$ в $\mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Врахувавши монотонність оператора $\mathcal{B}_R$ і вибравши в (24) $v = u$, $\psi(x) \equiv 1$, одержуємо, що

$$\begin{array}{lll} u^{\varepsilon_k} \to u & \text{сильно в} & C([0,T]; L^2(\Omega^R))\,, \\ u^{\varepsilon_k} \to u & \text{сильно в} & L^2((0,T); H^1_{0,2}(\Omega^R)) \end{array}$$

при $k \to \infty$ і $\alpha \geq \alpha_0$.

Тоді з (24) отримуємо твердження теореми 2.

Говоритимемо, що функція $\varphi : [0,+\infty) \to \mathbb{R}_+$ задовольняє умову **(FI)**, якщо

$$\varphi \in C^1([0,+\infty))\,, \qquad \varphi(\xi) > 0, \qquad \varphi'(\xi) < 0\,, \quad \forall \xi \in [0,+\infty)\,;$$

$$\exists \varphi_0 > 0 : \left|\frac{\varphi_{x_i}(|x|)}{\varphi(|x|)}\right| \leq \varphi_0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n\,,\ i = 1,...,n\,.$$

Введемо простори

$$L^2_\varphi(\Omega) = \{u\,:\, u\sqrt{\varphi} \in L^2(\Omega)\}\,,$$

$$H^1_\varphi(\Omega) = \{u\,:\, u\sqrt{\varphi},\ u_{x_i}\sqrt{\varphi} \in L^2(\Omega),\ i = 1,...,n\}\,.$$

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(F)**, **(FI)** *і, крім того,* $u_0 \in H^1_\varphi(\Omega)$,

$$\alpha_0 = a_0 + 2L - 2c_0 + \frac{b_0}{a_0} + \frac{n^2\,\varphi_0^2\,a_1}{a_0}\,.$$

Тоді існує розв'язок нерівності (4), причому $u \in L^2((0,T); H^1_\varphi(\Omega))$.

Доведення. Нехай $R = k+1$, $k \in \mathbb{N}$, $u_{0,k}^k(x) = u_0^k(x)\phi(x)$, $\phi(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $0 \le \phi(x) \le 1$, $\phi(x) = 1$ для $|x| \le k$, $\phi(x) = 0$ для $|x| \ge k+1$, $u_0^k \in H_\varphi^1(\Omega)$, $u_0^k > 0$ майже для всіх $x \in \partial\Omega$, $\{u_0^k\}$ збігається сильно в $H_\varphi^1(\Omega)$ до функції u_0 при $k \to \infty$.

На підставі теореми 2 існує розв'язок u^k варіаційної нерівності

$$\int\limits_{Q_\tau^{k+1}} \Bigg[v_t(v-u^k)\psi(x) + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)u_{x_i}^k((v-u^k)\psi(x))_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x,t)u_{x_i}^k((v-u^k)\psi(x) -$$

$$- \frac{\alpha}{2}(v-u^k)^2\psi(x) + c(x,t)u^k(v-u^k)\psi(x) - f(x,t,u^k)(v-u^k)\psi(x)\Bigg] e^{-\alpha t}\,dxdt \ge$$

$$\ge \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau^{k+1}} (u^k - v)^2\,\psi(x)\,e^{-\alpha\tau}\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau^{k+1}} (u_{0,k}^k - v)^2\,\psi(x)\,dx \qquad (25)$$

причому $u_t^k \in L^2(Q_T^{k+1})$.

Продовжимо функції u^k нулем на область $Q_T \setminus Q_T^{k+1}$ і збережемо за ними ті самі позначення. Запишемо нерівність (25) також для функцій u^m, $m > k$, додамо ці нерівності і приймемо $\psi(x) = \varphi(|x|)$, $v = \dfrac{1}{2}(u^k + u^m)$. Одержимо нерівність

$$\int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^n \Bigg[a_{ij}(x,t)u_{x_i}^{k,m}(u^{k,m}\,\varphi(|x|))_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x,t)u_{x_i}^{k,m}u^{k,m}\,\varphi(|x|) +$$

$$+ \left(\frac{\alpha}{2} + c(x,t)\right)|u^{k,m}|^2\,\varphi(|x|) - (f(x,t,u^k) - f(x,t,u^m))u^{k,m}\,\varphi(|x|)\Bigg] e^{-\alpha t}\,dxdt +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |u^{k,m}|^2\,\varphi(|x|)\,e^{-\alpha t}\,dx \le \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} |u_0^k - u_0^m|^2\,\varphi(|x|)\,dx, \qquad (26)$$

де $u^{k,m} = u^k - u^m$.

Враховуючи умову **(FI)**, аналогічно як при доведенні теореми 1 з (26) одержуємо оцінку

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |u^{k,m}|^2\,\varphi(|x|)\,e^{-\alpha\tau}\,dx + \int\limits_{Q_T} \Bigg[\left(a_0 - \frac{a_1\delta_0 n}{2} - \frac{b_0\delta_1}{2}\right) \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^{k,m}|^2 +$$

$$+ \left(\frac{\alpha}{2} + c_0 - \frac{1}{2\delta_1} - \frac{n\varphi_0^2}{2\delta_0} - L\right)|u^{k,m}|^2\Bigg]\,\varphi(|x|)\,e^{-\alpha t}\,dxdt \le$$

$$\le \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} |u_0^k - u_0^m|^2\,\varphi(|x|)\,dx, \quad \tau \in [0,T]. \qquad (27)$$

Виберемо в (27) $\delta_1 = \dfrac{a_0}{2b_0}$, $\delta_0 = \dfrac{a_0}{2a_1 n}$, $\alpha = \alpha_0$. Нехай $\varepsilon > 0$ – довільне фіксоване число.

Оскільки

$$\int\limits_{\Omega_0} |u_0^k - u_0^m|^2 \, \varphi(|x|) \, dx \le 2 \int\limits_{\Omega_0} (|u_0^k - u_0|^2 + |u_0^m - u_0|^2) \, \varphi(|x|) \, dx$$

і $\{u_0^k\}$, $\{u_0^m\}$ збігаються до u_0 у просторі $L^2_\varphi(\Omega)$, то $\exists k_0 \in \mathbb{N}$, що $\forall k, m \ge k_0$

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0} |u_0^k - u_0^m|^2 \, \varphi(|x|) \, dx < \frac{2e^{\alpha_0 T}}{a_0} \varepsilon \, .$$

Отже, для $\forall\, k, m \ge k_0$ з (27) матимемо

$$\int\limits_{\Omega_\tau} |u^{k,m}|^2 \, \varphi(|x|) \, dx + \int\limits_{Q_T} \left(|u^{k,m}|^2 + \sum_{i=1}^{n} |u^{k,m}_{x_i}|^2 \right) \varphi(|x|) \, dxdt < \varepsilon \, , \qquad (28)$$

тобто послідовність $\{u^k\}$ фундаментальна у просторах $C([0,T]; L^2_\varphi(\Omega))$, $L^2((0,T); H^1_\varphi(\Omega))$.

Нехай u – границя цієї послідовності. Тоді перейшовши в (25) до границі при $k \to \infty$, одержимо твердження теореми.

1. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. – М., 1980.

2. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., 1972.

3. *Fridman Avner.* Regularity theorems for variational inequalities in unbounded domains and applications to stopping time problems// Arch. Rational Mech. Anal. – 1973. – Vol. 52. – P. 134-160.

4. *Urbańska K.* Parabolic variational inequality in unbounded domains// Математичні студії. – 2003. – Т. 19. – N 2. – С. 165-180.

5. *Гаевский X., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. - М., 1978.

6. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Метод введения параметра для исследования эволюционных уравнений// Успехи матем. наук. – 1978. – Т. 33. – Вып. 5. – С. 7-72.

WEAK NONLINEAR PARABOLIC VARIATIONAL INEQUALITY IN UNBOUNDED DOMAIN

Marianna Oliskevych

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

In the article there is obtained some conditions of the existence and uniqueness of a solution for a parabolic variational inequality in an unbounded domain with respect to the spaces variables. The parabolic operator of the inequality has a nonlinearity which satisfies the Lipshits' condition.

Key words: parabolic variational inequality.

Стаття надійшла до редколегії 05.11.2004

Прийнята до друку 19.10.2005