ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2005. Вип.64. С.181–189

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2005. Vol.64. P.181–189

УДК 517.95

ВИЗНАЧЕННЯ МОЛОДШОГО КОЕФІЦІЄНТА У ПАРАБОЛІЧНОМУ РІВНЯННІ

Неля ПАБИРІВСЬКА, Ольга ВАРЕНИК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

За допомогою теореми Шаудера одержано умови існування розв'язку оберненої задачі визначення коефіцієнта при молодшій похідній невідомої функції. Шуканий коефіцієнт має вигляд квадратичної за просторовою змінною функції з трьома невідомими параметрами, які залежать від часу. Окремо визначено умови єдиності розв'язку сформульованої задачі.

Ключові слова: обернена задача, молодший коефіцієнт, теорема Шаудера, параболічне рівняння.

Питанню однозначного визначення залежного від часу коефіцієнта при похідній невідомої функції у параболічному рівнянні присвячена праця [1]. У [2] вивчали обернену задачу одночасного визначення коефіцієнта температуропровідності та молодшого коефіцієнта при похідній невідомої функції, які залежали також від часової змінної. Мета нашої праці – дослідити обернену задачу визначення молодшого коефіцієнта, який має вигляд квадратичної функції за просторовою змінною з трьома невідомими параметрами, що залежать від часу.

Формулювання задачі. В області $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ розглянемо параболічне рівняння

$$u_t(x,t) = a(t)u_{xx}(x,t) + (\alpha(t)x^2 + \beta(t)x + \gamma(t))u_x(x,t) + f(x,t) \tag{1}$$

з невідомими коефіцієнтами $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u(0,t) = \mu_1(t), \qquad u(l,t) = \mu_2(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

та додатковими умовами

$$\int\limits_0^l u(x,t)dx = \nu_1(t), \quad \int\limits_0^l xu(x,t)dx = \nu_2(t), \quad \int\limits_0^l x^2u(x,t)dx = \nu_3(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \quad (4)$$

Розв'язком задачі (1)-(4) називається набір функцій $(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t), u(x,t))$ з класу $C[0,T] \times C[0,T] \times C[0,T] \times (C^{2,1}(Q_T) \bigcap C(\overline{Q}_T))$, які задовольняють рівняння (1) та умови $(2)-(4)$.

Існування розв'язку. Припускаючи, що вихідні дані мають необхідну гладкість, зведемо задачу (1)-(4) до системи операторних рівнянь стосовно невідомих функцій $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$. Для цього домножимо рівняння (1) на $x^k, k = 0,1,2$, проінтегруємо від 0 до l за змінною x

$$\begin{aligned} \nu_1'(t) &= a(t)(u_x(l,t) - u_x(0,t)) + \alpha(t)(l^2\mu_2(t) - 2\nu_2(t)) + \beta(t)(l\mu_2(t) - \nu_1(t)) + \\ &+ \gamma(t)(\mu_2(t) - \mu_1(t)) + \int\limits_0^l f(x,t)dx, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \nu_2'(t) &= a(t)(lu_x(l,t) - \mu_2(t) + \mu_1(t)) + \alpha(t)(l^3\mu_2(t) - 3\nu_3(t)) + \beta(t)(l^2\mu_2(t) - \\ &- 2\nu_2(t)) + \gamma(t)(l\mu_2(t) - \nu_1(t)) + \int\limits_0^l xf(x,t)dx, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \nu_3'(t) &= a(t)(l^2u_x(l,t) - 2l\mu_2(t) + 2\nu_1(t)) + \alpha(t)(l^4\mu_2(t) - 4\int\limits_0^l x^3u(x,t)dx) + \\ &+ \beta(t)(l^3\mu_2(t) - 3\nu_3(t)) + \gamma(t)(l^2\mu_2(t) - 2\nu_2(t)) + \int\limits_0^l x^2f(x,t)dx, \end{aligned} \quad (7)$$

де $u(x,t)$ - розв'язок прямої задачі (1)-(3).

За допомогою функції Ґріна першої крайової задачі $G_1(x,t,\xi,\tau)$ для рівняння $u_t(x,t) = a(t)u_{xx}(x,t)$ отримуємо таке інтегро-диференціальне рівняння для визначення розв'язку $u(x,t)$:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int\limits_0^l \varphi(\xi)G_1(x,t,\xi,0)d\xi + \int\limits_0^t a(\tau)\mu_1(\tau)G_{1\xi}(x,t,0,\tau)d\tau - \\ &- \int\limits_0^t a(\tau)\mu_2(\tau)G_{1\xi}(x,t,l,\tau)d\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^l f(\xi,\tau)G_1(x,t,\xi,\tau)d\xi d\tau + \\ &+ \int\limits_0^t\int\limits_0^l (\alpha(\tau)\xi^2 + \beta(\tau)\xi + \gamma(\tau))u_\xi(\xi,\tau)G_1(x,t,\xi,\tau)d\xi d\tau, \end{aligned} \quad (8)$$

де

$$G_k(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nl)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))} \right) + \right.$$

$$\left. +(-1)^k \exp\left(-\frac{(x+\xi+2nl)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))} \right) \right), \qquad \theta(t) = \int_0^t a(\tau)d\tau, \ k=1,2. \tag{9}$$

Диференціюючи (8) за змінною x, матимемо

$$\begin{aligned} u_x(x,t) &= \int_0^l \varphi'(\xi) G_2(x,t,\xi,0)d\xi - \int_0^t \mu_1'(\tau) G_2(x,t,0,\tau)d\tau + \\ &+ \int_0^t \mu_2'(\tau) G_2(x,t,0,\tau)d\tau + \int_0^t \int_0^l f_\xi(\xi,\tau) G_2(x,t,\xi,\tau)d\xi d\tau + \\ &+ \int_0^t \int_0^l (\alpha(\tau)\xi^2 + \beta(\tau)\xi + \gamma(\tau)) u_\xi(\xi,\tau) G_{1x}(x,t,\xi,\tau)d\xi d\tau, \end{aligned} \tag{10}$$

де $G_2(x,t,\xi,\tau)$ визначається з (9) при $k=2$.

Застосовуючи до функції $u(x,t)$ як розв'язку першої крайової задачі принцип максимуму і припускаючи, що
(A) $\quad \varphi(x) > 0, \quad x \in [0,l], \mu_1(t) > 0, \mu_2(t) > 0, \quad t \in [0,T], f(x,t) \geqslant 0, \quad (x,t) \in \overline{Q}_T,$
матимемо

$$C_0 \leqslant u(x,t) \leqslant C_1, \qquad (x,t) \in \overline{Q}_T, \tag{11}$$

де C_0, C_1 – додатні константи, що визначаються вихідними даними.

При виконанні умов **(B)**

$$R_1(t) \equiv \mu_2(t)(12l^2\nu_2^2(t) + 6l^3\mu_1(t)\nu_3(t) + 9\nu_3^2(t) + l^4\nu_1^2(t) - 6l^2\nu_1(t)\nu_3(t) - 12l\nu_2(t)\nu_3(t)) -$$

$$-\mu_2(t)(4l^3\nu_1(t)\nu_2(t) + 2l^4\mu_1(t)\nu_2(t)) + 12\nu_1(t)\nu_2(t)\nu_3(t) - 8\nu_2^3(t) - 9\mu_1(t)\nu_3^2(t) > 0,$$

$$R_2(t) \equiv 4\nu_1^2(t) - 8l\mu_2(t)\nu_1(t) + 8\mu_2(t)\nu_2(t) + 4l^2\mu_2(t)\mu_1(t) + 8\mu_1(t)\nu_2(t) > 0,$$

визначник

$$\Delta = R_1(t) + R_2(t) \int_0^l x^3 u(x,t)dx, \quad t \in [0,T], \tag{12}$$

системи рівнянь (5)-(7) буде відмінний від нуля. Позначаючи $v(x,t) \equiv u_x(x,t)$ та використовуючи метод Крамера, цю систему можна записати у вигляді

$$\alpha(t) = \frac{A_1(t) + A_2(t)v(0,t) + A_3(t)v(l,t)}{R_1(t) + R_2(t)\int\limits_0^l x^3 u(x,t)dx}, \tag{13}$$

$$\beta(t) = \frac{B_1(t) + B_2(t)v(0,t) + B_3(t)v(l,t)}{R_1(t) + R_2(t)\int\limits_0^l x^3 u(x,t)dx}, \tag{14}$$

$$\gamma(t) = \frac{D_1(t) + D_2(t)v(0,t) + D_3(t)v(l,t)}{R_1(t) + R_2(t)\int\limits_0^l x^3 u(x,t)dx}, \qquad t \in [0,T], \tag{15}$$

де $A_i(t)$, $B_i(t)$, $D_i(t), i = 1,2,3$, визначаються вихідними даними. Перепишемо рівняння (10) у вигляді

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \int\limits_0^l \varphi'(\xi)G_2(x,t,\xi,0)d\xi - \int\limits_0^t \mu_1'(\tau)G_2(x,t,0,\tau)d\tau + \\ &+ \int\limits_0^t \mu_2'(\tau)G_2(x,t,0,\tau)d\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^l f_\xi(\xi,\tau)G_2(x,t,\xi,\tau)d\xi d\tau + \\ &+ \int\limits_0^t\int\limits_0^l (\alpha(\tau)\xi^2 + \beta(\tau)\xi + \gamma(\tau))v(\xi,\tau)G_{1x}(x,t,\xi,\tau)d\xi d\tau. \end{aligned} \tag{16}$$

Ми звели обернену задачу (1)-(4) до системи операторних рівнянь (8), (13)-(16). Для дослідження цієї системи застосуємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Спочатку встановимо апріорні оцінки розв'язків цієї системи.

Позначимо

$$V(t) = \max_{x\in[0,l]} |v(x,t)|. \tag{17}$$

Тоді з рівнянь (13)-(15) отримуємо

$$|\alpha(t)| \leqslant C_2 + C_3 V(t), \tag{18}$$

$$|\beta(t)| \leqslant C_4 + C_5 V(t), \tag{19}$$

$$|\gamma(t)| \leqslant C_6 + C_7 V(t). \tag{20}$$

Використовуючи оцінки функції Ґріна та оцінки (18)-(20) з рівняння (16), приходимо до такої нерівності:

$$V(t) \leqslant C_8 + C_9 \int\limits_0^t \frac{V(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + C_{10}\int\limits_0^t \frac{V^2(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}$$

або

$$V(t) \leqslant C_8 + C_{11} \int\limits_0^t \frac{(V(\tau) + \frac{1}{2})^2 d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \tag{21}$$

Позначаючи

$$V(t) + \frac{1}{2} \equiv W(t),$$

одержимо нерівність

$$W(t) \leqslant C_{12} + C_{11} \int\limits_0^t \frac{W^2(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \tag{22}$$

Піднесемо нерівність (22) до квадрата, замінимо t на σ, домножимо ліву і праву частини на $\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}$, проінтегруємо від 0 до t

$$\int\limits_0^t \frac{W^2(\sigma) d\sigma}{\sqrt{t-\sigma}} \leqslant 2C_{12}^2 \int\limits_0^t \frac{d\sigma}{\sqrt{t-\sigma}} + 2C_{11}^2 \int\limits_0^t \left(\int\limits_0^\sigma \frac{W^2(\tau) d\tau}{\sqrt{\sigma-\tau}} \right)^2 \frac{d\sigma}{\sqrt{t-\sigma}}.$$

Використовуючи нерівність Коші-Буняковського, матимемо

$$\int\limits_0^t \frac{W^2(\sigma) d\sigma}{\sqrt{t-\sigma}} \leqslant C_{13} + C_{14} \int\limits_0^t \frac{d\sigma}{\sqrt{t-\sigma}} \int\limits_0^\sigma \frac{W^4(\tau) d\tau}{\sqrt{\sigma-\tau}}.$$

Змінивши в останньому доданку порядок інтегрування, отримаємо

$$\int\limits_t^\tau \frac{d\sigma}{\sqrt{t-\sigma}\sqrt{\sigma-\tau}} = \pi.$$

Тоді

$$\int\limits_0^t \frac{W^2(\sigma) d\sigma}{\sqrt{t-\sigma}} \leqslant C_{13} + C_{15} \int_0^t W^4(\tau) d\tau.$$

Використовуючи останню нерівність, (22) зведемо до вигляду

$$W(t) < C_{16} + C_{17} \int\limits_0^t W^4(\tau) d\tau. \tag{23}$$

Позначимо

$$U(t) = C_{16} + C_{17} \int\limits_0^t W^4(\tau) d\tau,$$

тоді
$$U'(t) = C_{17}W^4(t),$$
$$U'(t) \leqslant C_{17}U^4(t).$$

Цю нерівність розділимо на $U^4(t)$, замінимо t на σ, проінтегруємо за σ від 0 до t. Враховуючи, що $U(0) = C_{16}$, отримаємо

$$\int_0^t \frac{U'(\sigma)d\sigma}{U^4(\sigma)} \leqslant C_{17}\int_0^t d\sigma.$$

Звідси

$$U(t) \leqslant \frac{C_{16}}{\sqrt[3]{1 - 3C_{17}C_{16}^3 t}}, \qquad t \in [0, t_0], \tag{24}$$

за умови, що
$$1 - 3C_{17}C_{16}^3 t_0 > 0, \qquad t_0 \in [0, T].$$

Тоді
$$W(t) \leqslant C_{18}, \quad t \in [0, t_0].$$

Повертаючись до невідомої функції $V(t)$, маємо

$$|V(t)| \leqslant C_{19} < \infty, \qquad t \in [0, t_0]$$

або

$$\max_{x\in[0,l]} |v(x,t)| \leqslant C_{19} < \infty, \qquad t \in [0, t_0]. \tag{25}$$

Опираючись на (25), з нерівностей (18)-(20) матимемо

$$|\alpha(t)| \leqslant C_{20}, \quad |\beta(t)| \leqslant C_{21}, \quad |\gamma(t)| \leqslant C_{22}. \tag{26}$$

Отже, оцінки розв'язків системи (12), (16)-(19) встановлено.

Запишемо систему операторних рівнянь (12), (16)-(19) у вигляді:

$$\omega = P\omega,$$

де $\omega = (\alpha, \beta, \gamma, u, v)$. Внаслідок оцінок (11), (25)-(26) оператор P переводить обмежену та опуклу множину

$$N \equiv \{(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t), u(x,t), v(x,t) \in C[0,T] \times C[0,T] \times C[0,T] \times (C(\overline{Q}_T) \times C(\overline{Q}_T)) :$$
$$|\alpha(t)| \leqslant C_{20}, |\beta(t)| \leqslant C_{21}, |\gamma(t)| \leqslant C_{22}, C_0 \leqslant u(x,t) \leqslant C_1, |v(x,t)| \leqslant C_{19}\}$$

в себе.

Перевірка того, що оператор P є цілком неперервним, проводиться аналогічно до [3]. Тоді опираючись на теорему Шаудера, отримуємо існування неперервного розв'язку системи (8), (13)-(16). Із умов теореми випливає також, що $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t) \in C[0,t_0]$, $u(x,t) \in C^{2,1}(Q_{t_0}) \bigcap C(\overline{Q_{t_0}})$.

Отже, правильна теорема.

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються умови:*

1) $\mu_i(t) \in C^1[0,T], i = 1,2; \nu_i(t) \in C^1[0,T], i = 1,2,3; \varphi(x) \in C^1[0,l], f(x,t) \in C^{1,0}(\overline{Q_T})$;

2) $A), B), a(t) > 0$;

3) $\mu_1(0) = \varphi(0), \mu_2(0) = \varphi(l), \int\limits_0^l \varphi(x)dx = \nu_1(0), \int\limits_0^l x\varphi(x)dx = \nu_2(0), \int\limits_0^l x^2\varphi(x)dx = \nu_3(0)$. *Тоді існує розв'язок задачі (1)-(4) при* $x \in [0,l], t \in [0,t_0]$, *де число* $t_0, 0 \leqslant t_0 \leqslant T$, *визначається вихідними даними.*

Єдиність розв'язку. Теорема 2. *Якщо виконуються умови* **A**, **B**, *то задача(1)-(4) може мати не більше одного розв'язку .*

Доведення. Припустимо, що задача (1)-(4) має два розв'язки ($\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $\gamma_i(t)$, $u_i(x,t)$,) $i = 1,2$. Позначимо

$$\begin{aligned} v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t), \quad A(t) = \alpha_1(t) - \alpha_2(t), \\ H(t) = \beta_1(t) - \beta_2(t), \quad L(t) = \gamma_1(t) - \gamma_2(t). \end{aligned} \tag{27}$$

Для функцій $(v(x,t), A(t), H(t), L(t))$ отримуємо таку задачу:

$$v_t = a(t)v_{xx} + (\alpha_1(t)x^2 + \beta_1(t)x + \gamma_1(t))v_x + (A(t)x^2 + H(t)x + L(t))u_{2x}, \tag{28}$$

$$v(x,0) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{29}$$

$$v(0,t) = 0, v(l,t) = 0, \qquad 0 \leqslant t < T, \tag{30}$$

$$\int\limits_0^l v(x,t)dx = 0, \int\limits_0^l xv(x,t)dx = 0, \int\limits_0^l x^2 v(x,t)dx = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{31}$$

Цю задачу зводимо до системи рівнянь

$$\begin{aligned} A(t)(l^2\mu_2(t) - 2\nu_2(t)) + H(t)(l\mu_2(t) - \nu_1(t)) + \\ +L(t)(\mu_2(t) - \mu_1(t)) = -a(t)(v_x(l,t) - v_x(0,t)), \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} A(t)(l^3\mu_2(t) - 3\nu_3(t)) + H(t)(l^2\mu_2(t) - 2\nu_2(t)) + \\ +L(t)(l\mu_2(t) - \nu_1(t)) = -a(t)lv_x(x,t), \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} A(t)(l^4\mu_2(t) - 4\int\limits_0^l x^3 u_2 dx) + H(t)(l^3\mu_2(t) - 3\nu_3(t) + \\ +L(t)(l^2\mu_2(t) - 2\nu_2(t)) = -a(t)l^2 v_x(l,t) + 4\alpha_1(t)\int\limits_0^l x^3 v(x,t)dx, \end{aligned} \tag{34}$$

де $v(x,t)$ має вигляд

$$v(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^l (A(\tau)\xi^2 + H(\tau)\xi + L(\tau))u_{2\xi}(\xi,\tau)G_1(x,t,\xi,\tau)d\xi d\tau, \tag{35}$$

$G_1(x,t,\xi,\tau)$ – функція Ґріна першої крайової задачі для рівняння

$$v_t(x,t) = a(t)v_{xx}(x,t) + (\alpha_1(t)x^2 + \beta_1(t)x + \gamma_1(t))v_x(x,t).$$

При виконанні умов **A, B** визначник системи рівнянь (32) - (34) відмінний від нуля, і ця система зводиться до системи однорідних інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_0^t (Y_{11}(t,\tau)A(\tau) + Y_{12}(t,\tau)H(\tau) + Y_{13}(t,\tau)L(\tau))d\tau, \\ H(t) &= \int_0^t (Y_{21}(t,\tau)A(\tau) + Y_{22}(t,\tau)H(\tau) + Y_{23}(t,\tau)L(\tau))d\tau, \\ L(t) &= \int_0^t (Y_{31}(t,\tau)A(\tau) + Y_{32}(t,\tau)H(\tau) + Y_{33}(t,\tau)L(\tau))d\tau \end{aligned} \tag{36}$$

з ядрами $Y_{ij}(t,\tau)$, $i,j = \overline{1,3}$, що мають інтегровні особливості. На підставі теорії інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду роз'язок $(A(t), H(t), L(t))$ системи (36) тривіальний. Тому $v(x,t) \equiv 0$.

Теорема доведена.

---

1. *Cannon J. R., Perez-Esteva S.* Determination of the coefficient of u_x in a linear parabolic equation // Inverse Problems. – 1994. – Vol. 10. – P.521-531.

2. *Пабирівська Н. В.* Теплові моменти в оберненій задачі для параболічного рівняння // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 2000. – Вип. 56. – С. 142-149.

3. *Иванчов Н. И.* Об определении зависящего от времени старшего коэффициента в параболическом уравнении // Сибирский мат. журн.– 1998.– Т.39. – № 3. – С. 539-550.

DETERMINATION OF A MINOR COEFFICIENT OF A PARABOLIC EQUATION

Nelya Pabyrivska, Olga Varenyk

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine

The application of Schauder fixed-point theorem permitted to establish existence conditions of the solution for inverse problem for parabolic equation of consisting in identification a coefficient at the first derivative of unknown function. This coefficient has the form of quadratic function on a space variable with three unknown parameters depending on the time variable. Independently of a question of existence we establish the uniqueness conditions for solution of this problem.

Key words: inverse problem, minor coefficient, Schauder fixed-point theorem, parabolic equation.

Стаття надійшла до редколегії 21.06.2005

Прийнята до друку 19.10.2005