ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 2005. Вип.64. С.190–200 Ser.Mech-Math.2005. Vol.64. P.190–200

УДК 513.88

УМОВИ МАКСИМАЛЬНОЇ ДИСИПАТИВНОСТІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ЗАМКНЕНИХ ОПЕРАТОРІВ У ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ

Ганна ПІПА, Олег СТОРОЖ

Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Досліджено один клас замкнених лінійних операторів у гільбертовому просторі. Кожен оператор із цього класу трактується як збурення деякого власного розширення заданого додатно визначеного оператора, причому це збурення змінює не тільки закон дії незбуреного оператора, а й область його визначення. З'ясовано критерії максимальної дисипативності досліджуваних операторів.

Ключові слова: оператор, дисипативність, крайова пара, ортопроектор.

У цій статті під H розуміємо фіксований комплексний гільбертів простір зі скалярним добутком $(.|.)$, а під $D(T)$, $R(T)$, $kerT$ – відповідно область визначення, область значень і многовид нулів оператора T. Нагадаємо, що лінійний оператор $T : H \to H$ називається дисипативним (акумулятивним), якщо для будь-якого $y \in D(T)$ $Im(Ty|y) \geq 0(\leq 0)$ і максимально дисипативним (акумулятивним) якщо, крім того, він не має в H нетривіальних дисипативних (акумулятивних) розширень.

Відомо (див., наприклад, [1, с. 345]), що оператор $T \in \mathcal{C}(H)$ (тут і далі $\mathcal{C}(H)$ – сукупність замкнених лінійних щільно визначених операторів у просторі H) є максимально дисипативним тоді і тільки тоді, коли T породжує стискуючу півгрупу класу C_0. Тому природно виникає задача про встановлення критеріїв максимальної дисипативності того чи іншого оператора, якій присвячено багато праць. Наприклад, у [2 – 6] йдеться про опис максимально дисипативних розширень симетричного, зокрема, диференціального оператора.

З іншого боку, об'єктом дослідження багатьох математиків були диференціальні та диференціально-граничні оператори з різними крайовими умовами та їхні абстрактні теоретико-функціональні моделі (див. [7, 8] та цитовану там літературу). Одну з таких моделей запропонував у працях В.Е. Лянце [9, 10], ідеї яких набули подальшого розвитку в [11, 12]. У цій статті, яка є продовженням праці авторів [12], йдеться про встановлення, в термінах абстрактних крайових умов, критеріїв максимальної дисипативності (зокрема, самоспряженості) операторів, описаних у згаданій праці. Зазначимо, що для деяких часткових випадків відповідні результати наведено в [13, 14].

1. Позначення та формулювання задачі. Далі скрізь (крім зазначених вище) використовуємо такі позначення: $\mathcal{B}(X,Y)$ – сукупність лінійних неперервних операторів $A : X \to Y$ таких, що $D(A) = X$, $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X,X)$; $A|E$ – звуження відображення A на множину E; $\mathbf{1}_X$ – тотожне перетворення простору X; $D[T]$, (де $T \in \in \mathcal{C}(H)$ – многовид $D(T)$, трактований як гільбертів простір зі скалярним добутком $(y|z)_T = (y|z) + (Ty|Tz)$. Якщо $A_i : X \to Y_i$, $(i = \quad = 1,...,n)$ – лінійні оператори, то запис $A = A_1 \oplus ... \oplus A_n$ означає, що $Ax = (A_1x,...,A_nx)$.

Роль вихідного об'єкта відіграє додатно визначений оператор $L_0 \in \quad \in \mathcal{C}(H)$. Через L_F позначимо розширення за Фрідріхсом оператора L_0, а через H_e та $(.|.)_e$ – його енергетичний простір та енергетичний скалярний добуток (деталі – див. [15, с. 97-118]). Для позначення оператора, спряженого з оператором A, використовуємо здебільшого символ A^*, якщо $W \in \mathcal{B}(D[L],G)$ (тут і далі $L \overset{\text{def}}{=} L_0^*$), а $\Psi \in \mathcal{B}(H_e,G)$, де G – (допоміжний) гільбертів простір, то спряжені оператори W' та $\Psi^\bullet$ визначаємо так:

$$\forall y \in D(L),\ \forall g \in G \quad (Wy|g)_G = (y|W'g)_L,$$
$$\forall u \in H_e,\ \forall g \in G \quad (\Psi u|g)_G = (u|\Psi^\bullet g)_e.$$

Через $\mathcal{P}$ позначаємо проектор $H_e \dotplus kerL \to H_e$ паралельно до $kerL$, а під $(\mathcal{H},\Gamma_1,\Gamma_2)$ розуміємо фіксований простір граничних значень (ПГЗ) оператора L_0 (означення див.[4] або [6, с. 158]). Крім того, вважаємо заданим оператор $\Psi \in \mathcal{B}(H_e,\mathcal{H})$, який задовольняє такі умови:

$$R(\Psi^\bullet) \cap D(L_F) = \{0\}, (\text{а отже } R(\Psi^\bullet) \cap D(L)) = \{0\}), \tag{1}$$

$$R(\Psi) = R(\Psi|D(L_0)) \overset{\text{def}}{=} G \text{ замкнена в } \mathcal{H}, \tag{2}$$

$$kerL \dotplus R(\Psi^\bullet) \text{ замкнена в } H \tag{3}$$

Для будь-якого $W \in \mathcal{B}(D[L],\mathcal{H})$ через $W^{(\Psi)}$ позначаємо його продовження за лінійністю на $D(L) \dotplus R(\Psi^\bullet) \overset{\text{def}}{=} D_{\max}$, яке анулюється на $R(\Psi^\bullet)$. Якщо $x \in D(L), g \in G$, то оператор $\Gamma_3 : D_{\max} \to G$ визначаємо, враховуючи умову

$$\Gamma_3 y = g \Leftrightarrow y + \Psi^\bullet g \in D(L),$$

а оператори $L_{\min}, L_{\max}$ – за допомогою співвідношень

$$L_{\min} = L_0|ker\Psi; \quad D(L_{\max}) = D_{\max}, \quad L_{\max}(x + \Psi^\bullet h) = Lx.$$

З (1)-(3) випливає, що $L_{\min}, L_{\max} \in \mathcal{C}(H)$ і $L^*_{\min} = L_{\max}$, див. [12].

Нехай $\Phi \in \mathcal{B}(H, \mathcal{H})$, $\mathcal{U}_i \in \mathcal{B}(D[L], \mathcal{H})$ $(i = 1, 2)$ такі, що $(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H},\ \mathcal{U})$, де $\mathcal{U} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$ – крайова пара для (L, L_0) (означення – див. [11, с. 136]), $\chi \stackrel{\text{def}}{=} \Psi\mathcal{P} + \Phi$, $\chi^\bullet \stackrel{\text{def}}{=} \Psi^\bullet + \Phi^\bullet (= \Psi^\bullet + L_F^{-1}\Phi^*)$. Визначимо оператор T за допомогою співвідношень

$$D(T) = \{y \in D_{\max} : y + \chi^\bullet \mathcal{U}_2^{(\Psi)} y \in D(L),\ \mathcal{U}_1^{(\Psi)} y = \chi y\} \equiv$$
$$\equiv \{y \in D_{\max} : \Gamma_3 y = P_\Psi \mathcal{U}_2^{(\Psi)} y,\ \mathcal{U}_1^{(\Psi)} y = \chi y\}, \tag{4}$$

$$\forall y \in D(T) \quad Ty = L(y + \chi^\bullet \mathcal{U}_2^{(\Psi)} y) = L_{\max} y + \Phi^* \mathcal{U}_2^{(\Psi)} y. \tag{5}$$

Відомо [11, с. 159], що існують єдині $\widetilde{\mathcal{U}}_1, \widetilde{\mathcal{U}}_2 \in \mathcal{B}(D[L], \mathcal{H})$ такі, що $(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H},\ \widetilde{\mathcal{U}})$, де $\widetilde{\mathcal{U}} = \widetilde{\mathcal{U}}_1 \oplus \widetilde{\mathcal{U}}_2$ – крайова пара для (L, L_0) і для будь-яких $y, z \in D(L)$

$$(Ly|z) - (y|Lz) = (\mathcal{U}_1 y|\widetilde{\mathcal{U}}_2 z)_{\mathcal{H}} - (\mathcal{U}_2 y|\widetilde{\mathcal{U}}_1 z)_{\mathcal{H}}. \tag{6}$$

Нижче скрізь припускаємо, що

$$R[(\mathcal{U}_1^{(\Psi)} - \chi) \oplus (P_\Psi \mathcal{U}_2^{(\Psi)} - \Gamma_3)] = \mathcal{H} \oplus G, \tag{7}$$

$$R[(\widetilde{\mathcal{U}}_1^{(\Psi)} - \chi) \oplus (P_\Psi \widetilde{\mathcal{U}}_2^{(\Psi)} - \Gamma_3)] = \mathcal{H} \oplus G. \tag{8}$$

З (7)-(8) випливає (див. [12]), що $T \in \mathcal{C}(H)$,

$$D(T^*) = \{z \in D_{\max} : z + \chi^\bullet \widetilde{\mathcal{U}}_2^{(\Psi)} z \in D(L),\ \widetilde{\mathcal{U}}_1^{(\Psi)} z = \chi z\} \equiv$$
$$\equiv \{z \in D_{\max} : \Gamma_3 z = P_\Psi \widetilde{\mathcal{U}}_2^{(\Psi)} z,\ \widetilde{\mathcal{U}}_1^{(\Psi)} z = \chi z\}, \tag{9}$$

$$\forall z \in D(T^*) \quad T^* z = L(z + \chi^\bullet \widetilde{\mathcal{U}}_2^{(\Psi)} z) = L_{\max} z + \Phi^* \widetilde{\mathcal{U}}_2^{(\Psi)} z. \tag{10}$$

Конкретизуючи висловлене, зазначимо, що мета нашої праці – встановлення умов необхідних і достатніх для максимальної дисипативності (зокрема, самоспряженості) оператора (4)-(5). Оскільки (див. [2, 16]) оператор $T \in \mathcal{C}(H)$ є максимально дисипативним тоді і тільки тоді, коли $-T^*$ – максимально дисипативний оператор, то розглянемо спочатку питання про умови дисипативності оператора $-T^*$ (тобто про умови акумулятивності оператора T^*).

2. Умови акумулятивності оператора T^*. Приймемо

$$J \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & i\mathbf{1}_{\mathcal{H}} \\ -i\mathbf{1}_{\mathcal{H}} & 0 \end{pmatrix}$$

і позначимо через P ортопроектор $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \to \mathcal{H} \oplus \overline{R(\chi)}$.

Тут і далі P_B – ортопроектор на $\overline{R(B)}$, зокрема P_Ψ – ортопроектор $\mathcal{H} \to G$.

Лема 1.
$$\overline{R(J\widetilde{\mathcal{U}}^{(\Psi)}|D(T^*))} = \mathcal{H} \oplus \overline{R(\chi)}. \tag{11}$$

Доведення. З (9) випливає, що

$$R(J\widetilde{\mathcal{U}}^{(\Psi)}|D(T^*)) = \\ = \{(i\widetilde{\mathcal{U}}_2^{(\Psi)}z, -i\chi z) : z \in D_{\max}, \ \widetilde{\mathcal{U}}_1^{(\Psi)}z = \chi z, \ P_\Psi \widetilde{\mathcal{U}}_2^{(\Psi)}z = \Gamma_3 z\}. \tag{12}$$

Нехай елемент $(h_1, h_2) \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ є ортогональним до множини (12) і

$$\forall z \in D_{\max} \quad f(z) \stackrel{\text{def}}{=} (\widetilde{\mathcal{U}}_2^{(\Psi)}z|h_1)_{\mathcal{H}} - (\chi z|h_2)_{\mathcal{H}}.$$

Зрозуміло, що
$$ker[(\widetilde{\mathcal{U}}_1^{(\Psi)} - \chi) \oplus (P_\Psi \widetilde{\mathcal{U}}_2^{(\Psi)} - \Gamma_3)] \subset ker f.$$

Використовуючи лему про трійку ([11, с. 23], [17, с. 262]) та теорему Рісса про загальний вигляд лінійного неперервного функціонала в гільбертовому просторі, доходимо такого висновку:

$$\exists g_1 \in G, \ \ \exists g_2 \in \mathcal{H} : \forall z \in D_{\max} \\ (\widetilde{\mathcal{U}}_2^{(\Psi)}z|h_1)_{\mathcal{H}} - (\chi z|h_2)_{\mathcal{H}} = (P_\Psi \widetilde{\mathcal{U}}_2^{(\Psi)}z - \Gamma_3 z|g_1)_{\mathcal{H}} + (\widetilde{\mathcal{U}}_1^{(\Psi)}z - \chi z|g_2)_{\mathcal{H}}. \tag{13}$$

Зокрема, для будь-якого $z \in D(L_{\min})$, а отже, для будь-якого $z \in D_{\max}$

$$(\Phi z|h_2)_{\mathcal{H}} = (\Phi z|g_2)_{\mathcal{H}}. \tag{14}$$

З (13)-(14) випливає, що
$$h_2 - g_2 \in R(\chi)^{\perp}, \tag{15}$$
$$\forall z \in D_{\max} \quad (\widetilde{\mathcal{U}}_2^{(\Psi)}z|h_1)_{\mathcal{H}} = (P_\Psi \widetilde{\mathcal{U}}_2^{(\Psi)}z|g_1)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_3 z|g_1)_{\mathcal{H}} + (\widetilde{\mathcal{U}}_1^{(\Psi)}z|g_2)_{\mathcal{H}}. \tag{16}$$

Враховуючи (15)-(16), неважко довести, що

$$g_1 = h_1 = g_2 = 0, \quad h_2 \in R(\chi)^{\perp}.$$

Отож, $R(J\widetilde{\mathcal{U}}^{(\Psi)}|D(T^*))^{\perp} \subset \{0\} \oplus R(\chi)^{\perp}$, а отже,

$$\mathcal{H} \oplus \overline{R(\chi)} \subset \overline{R(J\widetilde{\mathcal{U}}^{(\Psi)}|D(T^*))}.$$

Обернене включення є очевидним.

Лема 2. *Для будь-якого* $z \in D(T^*)$

$$2Im(T^*z|z) = -(P[i\mathcal{U}L\mathcal{U}' + J]Ph|h)_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}, \tag{17}$$

де
$$h = J\widetilde{\mathcal{U}}^{(\Psi)}z. \tag{18}$$

Доведення. Враховуючи (10) і результати, викладені в [12], отримуємо

$$\forall z \in D_{\max} \quad 2iIm(T^*z|z) = (T^*z|z) - (z|T^*z) =$$

$$= (\mathcal{U}_1^{(\Psi)} z|\widetilde{\mathcal{U}}_2^{(\Psi)} z)_{\mathcal{H}} - (\mathcal{U}_2^{(\Psi)} z|\widetilde{\mathcal{U}}_1^{(\Psi)} z)_{\mathcal{H}} + (\Gamma_3 z|\Psi\mathcal{P}z)_{\mathcal{H}} - (\Psi\mathcal{P}z|\Gamma_3 z)_{\mathcal{H}} +$$

$$+ (\widetilde{\mathcal{U}}_2^{(\Psi)} z|\Phi z)_{\mathcal{H}} - (\Phi z|\widetilde{\mathcal{U}}_2^{(\Psi)} z)_{\mathcal{H}}.$$

Враховуючи (18) і рівність

$$\mathcal{U}^{(\Psi)} = -i\mathcal{U}L\mathcal{U}' J\widetilde{\mathcal{U}}^{(\Psi)}, \tag{19}$$

яка випливає безпосередньо з доведеної в [11, с. 195] рівності $\mathcal{U} = -i\mathcal{U}L\mathcal{U}'J\widetilde{\mathcal{U}}$ бачимо, що

$$(\mathcal{U}_1^{(\Psi)} z|\widetilde{\mathcal{U}}_2^{(\Psi)} z)_{\mathcal{H}} - (\mathcal{U}_2^{(\Psi)} z|\widetilde{\mathcal{U}}_1^{(\Psi)} z)_{\mathcal{H}} = (\mathcal{U}L\mathcal{U}'h|h)_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}.$$

Зрештою, враховуючи (9) і той факт, що $J = J^* = J^{-1}$, переконуємось у правильності таких співвідношень:

$$(\Gamma_3 z|\Psi\mathcal{P}z)_{\mathcal{H}} + (\widetilde{\mathcal{U}}_2^{(\Psi)} z|\Phi z)_{\mathcal{H}} = (\widetilde{\mathcal{U}}_2^{(\Psi)} z|\widetilde{\mathcal{U}}_1^{(\Psi)} z)_{\mathcal{H}},$$

$$(\Psi\mathcal{P}z|\Gamma_3 z)_{\mathcal{H}} + (\Phi z|\widetilde{\mathcal{U}}_2^{(\Psi)} z)_{\mathcal{H}} = (\widetilde{\mathcal{U}}_1^{(\Psi)} z|\widetilde{\mathcal{U}}_2^{(\Psi)} z)_{\mathcal{H}},$$

а отже,

$$[(\Gamma_3 z|\Psi\mathcal{P}z)_{\mathcal{H}} + (\widetilde{\mathcal{U}}_2^{(\Psi)} z|\Phi z)_{\mathcal{H}}] - [(\Psi\mathcal{P}z|\Gamma_3 z)_{\mathcal{H}} + (\Phi z|\widetilde{\mathcal{U}}_2^{(\Psi)} z)_{\mathcal{H}}] = -i(Jh|h)_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}.$$

Для завершення доведення рівності (17) достатньо врахувати, що $h = Ph$.

Наслідок 1. *Оператор $-T^*$ – дисипативний тоді і тільки тоді, коли*

$$P[i\mathcal{U}L\mathcal{U}' + J]P \geq 0. \tag{20}$$

Це випливає безпосередньо з лем 1 та 2.

Приймемо $M_1 \overset{\text{def}}{=} L|ker\widetilde{\mathcal{U}}_1$. Легко бачити, що $M_1 = L_1^*$.

Наслідок 2. *Якщо $-T^*$ дисипативний, то й $-M_1$ дисипативний. Зокрема, якщо T – максимально дисипативний оператор, то L_1 – максимально дисипативний оператор.*

Доведення. Нехай P_1 – ортопроектор $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \to \mathcal{H} \oplus \{0\}$. Помноживши (20) зліва і справа на P_1, отримуємо $i\mathcal{U}_1 L\mathcal{U}_1' \geq 0$.

Застосовуючи наслідок 1 при $\chi = 0$, бачимо, що ця нерівність еквівалентна дисипативності оператора $-M_1$.

Аналогічно доводимо, що з дисипативності оператора $T = -(-T^*)^*$ випливає дисипативність оператора $L_1 = -(-M_1^*)^*$. Якщо T – максимально дисипативний оператор, то L_1 – максимально дисипативний оператор (деталі – див. [2, 6, 16]).

Лема 3. *Нехай оператор T визначено згідно з (4)-(5), причому*
а) справджується умова (20);
б) L_1 – максимально дисипативний оператор;
в) $dim R(\chi) < \infty$.
Тоді T – максимально дисипативний оператор.

Доведення. Оператори T^* та M_1 мають спільне скінченновимірне звуження $\hat{?}L$, яке визначається за допомогою співвідношень

$$D(\hat{?}L) = \{z \in D(M_1) : \ \chi z = 0, P_\chi \widetilde{\mathcal{U}}_2^{(\Psi)} z = 0\}, \quad \hat{?}L \subset L.$$

Легко бачити, що

$$dim[D(T^*)/D(\hat{?}L)] = 2 dim R(\chi),$$
$$dim[D(M_1)/D(\hat{?}L)] = 2 dim R(\chi).$$

Беручи до уваги дві останні рівності, бачимо, що

$$æ(T^*, M_1) = 0, \tag{21}$$

де $æ(T^*, M_1)$ – відносний індекс пари (T^*, M_1) (означення – див. [9, 10]).

З максимальної дисипативності оператора L_1 (а отже, й оператора $-M_1$) випливає, що $R(-M_1 + i\mathbf{1}_H) = H$, з дисипативності операторів $-M_1$ та $-T^*$ – що $ker(-M_1 + i\mathbf{1}_H) = ker(-T^* + i\mathbf{1}_H) = \{0\}$.

Враховуючи (21) і застосовуючи теорему В.Е.Лянце про індекс [9, 10] та результати праць [2, 26] (див. також [6]), бачимо, що $-T^*$, а отже й T, є максимально дисипативним оператором.

Лема 4. *Нехай оператор T визначено згідно з (4)-(5), причому $dim R(\chi) < \infty$ (а отже $dim R(\Psi) < \infty, dim R(\Phi) < \infty$) і справджується умова (1). Тоді*
а) справджуються умови (2), (3);
б)

$$R((\mathcal{U}_1 - \chi) \oplus \mathcal{U}_2) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}; \tag{22}$$

$$R((\widetilde{\mathcal{U}}_1 - \chi) \oplus \widetilde{\mathcal{U}}_2) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}. \tag{23}$$

Доведення. а) Оскільки $D(L_0)$ щільна в H_e, то $\overline{R(\Psi|D(L_0))} = \overline{R(\Psi)}$, тому (2) випливає з замкненості скінченновимірного простору, а (3) є наслідком з теореми про суму замкненого та скінченновимірного підпросторів.

б) У правильності рівностей (22)-(23) неважко переконатися, модифікуючи міркування, проведені при доведенні леми 4.8.7 монографії [11].

Наслідок 3. *Припустимо, що справджуються умови леми 4. Тоді:*
а) $L_{\min}, L_{\max} \in \mathcal{C}(H)$ і $L_{\min}^* = L_{\max}$;
б) $(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus R(\Psi) \oplus R(\Psi),\ \ \mathcal{U}_1^{(\Psi)} \oplus \mathcal{U}_2^{(\Psi)} \oplus \Gamma_3 \oplus \Gamma_4)$ та
$(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus R(\Psi) \oplus R(\Psi),\ \ \widetilde{\mathcal{U}}_1^{(\Psi)} \oplus \widetilde{\mathcal{U}}_2^{(\Psi)} \oplus \Gamma_3 \oplus \Gamma_4)$
є крайовими парами для $(L_{\max}, L_{\min})$ і

$$\begin{aligned} &\forall y, z \in D(L_{\max}) \quad (L_{\max} y|z) - (y|L_{\max} z) = \\ &= (\mathcal{U}_1^{(\Psi)} y|\widetilde{\mathcal{U}}_2^{(\Psi)} z)_{\mathcal{H}} - (\mathcal{U}_2^{(\Psi)} y|\widetilde{\mathcal{U}}_1^{(\Psi)} z)_{\mathcal{H}} + (\Gamma_3 y|\Gamma_4 z)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_4 y|\Gamma_3 z)_{\mathcal{H}}; \end{aligned} \tag{24}$$

в) $T \in \mathcal{C}(H)$, а оператор T^* має вигляд (9)-(10).

Це випливає з результатів праці [12]. Крім того, треба врахувати, що з (22) випливає (7), а з (23) – (8).

3. Оператори T_n. Нехай $\{e_\alpha\}$ – ортонормована база в $\overline{R(\chi)}$, а $y_0 \in D(T)$. Відомо [18, с. 943], що існують не більш ніж зліченні підсистеми $\{e_{\alpha_k}\}$, $\{e_{\beta_k}\}$, $\{e_{\gamma_k}\}$ системи $\{e_\alpha\}$ такі, що

$$\Gamma_3 y_0 = \sum_{k=1}^{\infty} (\Gamma_3 y_0 | e_{\alpha_k})_{\mathcal{H}} e_{\alpha_k}, \quad \Psi\mathcal{P}y_0 = \sum_{k=1}^{\infty} (\Psi\mathcal{P}y_0 | e_{\beta_k}) e_{\beta_k},$$

$$\Phi y = \sum_{k=1}^{\infty} (\Phi y_0 | e_{\gamma_k})_{\mathcal{H}} e_{\gamma_k}.$$

Введемо такі позначення: $\mathcal{H}_0 = \overline{sp}\{e_{\alpha_k}, e_{\beta_k}, e_{\gamma_k} : k \in \mathbf{N}\}$, $\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_0 \cap R(\Psi)$, $\hat{?}\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \ominus \widetilde{\mathcal{H}}$.

Нехай $\{\widetilde{e}_k\}$ та $\{\hat{?}e_k\}$ – (не більш ніж зліченні) ортонормовані бази в $\widetilde{\mathcal{H}}$ та $\hat{?}\mathcal{H}$ відповідно. Позначимо через P_n ортопроектор $\mathcal{H} \to sp\{\widetilde{e}_1, \hat{?}e_1, ..., \widetilde{e}_n, \hat{?}e_n\}$ і приймемо

$$\Psi_n = P_n \Psi, \quad \Phi_n = P_n \Phi, \quad \chi_n = P_n \chi.$$

Визначимо оператори $L^{(n)}_{\min}$, $L^{(n)}_{\max}$ так:

$$L^{(n)}_{\min} = L_0 | ker \Psi_n, \quad D(L^{(n)}_{\max}) = D(L) \dot{+} R(\Psi^\bullet_n) \equiv D_n,$$

$$\forall x \in D(L), \ \forall h \in R(\Psi_n) \ \ L_{\max}(x + \Psi^\bullet_n h) = Lx.$$

Зі сказаного вище і з наслідку 3 випливає, що

$$L^{(n)}_{\min}, L^{(n)}_{\max} \in \mathcal{C}(H), \quad (L^{(n)}_{\min})^* = L^{(n)}_{max}.$$

Нехай $\forall x \in D(L), \ \forall h \in R(\Psi_n)$

$$\mathcal{U}^{(n)}_i (x + \Psi^\bullet_n h) = \mathcal{U}_i x, \ \ \widetilde{\mathcal{U}}^{(n)}_i (x + \Psi^\bullet_n h) = \widetilde{\mathcal{U}}_i x \ \ (i = 1, 2),$$

$$\Gamma^{(n)}_3 (x + \Psi^\bullet_n h) = -h, \quad \Gamma^{(n)}_4 = \Psi_n \mathcal{P} | D_n.$$

Визначимо оператори T_n ($n \in \mathbf{N}$) за допомогою співвідношень типу (4)-(5), у яких $\Phi, \Psi, \chi, \mathcal{U}^{(\Psi)}_i$ замінено на $\Phi_n, \Psi_n, \chi_n, \mathcal{U}^{(n)}_i$. З наслідку 3 випливає, що $T_n \in \mathcal{C}(H)$, а T^*_n визначається за допомогою співвідношень типу (9)-(10), у яких $\Phi, \Psi, \chi, \mathcal{U}^{(\Psi)}_i$ замінено на $\Phi_n, \Psi_n, \chi_n, \mathcal{U}^{(n)}_i$.

Приймемо $Q_{\Psi_n} = \mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P_{\Psi_n}$ і розглянемо систему

$$\begin{cases} \mathcal{U}^{(n)}_1 y_n = \chi_n y_0, \quad P_{\Psi_n} \mathcal{U}^{(n)}_2 y_n = P_{\Psi_n} \Gamma_3 y_0, \\ Q_{\Psi_n} \mathcal{U}^{(n)}_2 y_n = Q_{\Psi_n} \mathcal{U}^{(\Psi)}_2 y_0, \quad \Gamma^{(n)}_3 y_n = P_{\Psi_n} \Gamma_3 y_0, \\ \Gamma^{(n)}_4 y_n = \Psi_n \mathcal{P} y_0, \quad \Phi_n y_n = \Phi_n y_0. \end{cases} \tag{25}$$

Міркуючи так, як при доведенні леми 4.8.7 з монографії [11], бачимо, що система (25) має розв'язок $y_n \in D_n \subset D_{\max}$. Крім того, як легко бачити, перше рівняння цієї системи можна замінити рівнянням $\mathcal{U}_1^{(n)} y_n = \quad = \chi_n y_n$, тому $y_n \in D(T_n)$.

Лема 5. *а)* $\forall h \in \mathcal{H}_0 \quad \lim\limits_{n\to\infty} P_n h = h$;
б) $\forall h \in \widetilde{\mathcal{H}} \quad P_{\Psi_n} h = P_n h$, *а отже* $\lim\limits_{n\to\infty} P_{\Psi_n} h = h$.

Доведення. Це випливає з того, що

$$\forall h \in \mathcal{H}_0 \quad h = \sum_{k=1}^{\infty} [(h|\widetilde{e}_k)_{\mathcal{H}} \widetilde{e}_k + (h|\hat{?}e_k)\hat{?}e_k],$$

$$\forall h \in \mathcal{H}_0 \quad P_n h = \sum_{k=1}^{n} [(h|\widetilde{e}_k)_{\mathcal{H}} \widetilde{e}_k + (h|\hat{?}e_k)\hat{?}e_k],$$

$$\forall h \in \widetilde{\mathcal{H}} \quad h = \sum_{k=1}^{\infty} (h|\widetilde{e}_k)\widetilde{e}_k.$$

Лема 6. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{U}_1^{(n)} y_n = \mathcal{U}_1^{(\Psi)} y_0$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{U}_2^{(n)} y_n = \mathcal{U}_2^{(\Psi)} y_0$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \Gamma_3^{(n)} y_n = \Gamma_3 y_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \Gamma_4^{(n)} y_n = \Gamma_4 y_0$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \Phi_n y_n = \Phi y_0$.

Доведення. Правильність цієї леми випливає з (25) і леми 5 (див. також [14], початок доведення теореми 1).

Наслідок 3. $\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{\mathcal{U}}_i^{(n)} y_n = \widetilde{\mathcal{U}}_i^{(\Psi)} y_0$, *i=1,2.*

Доведення. Приймемо $\widetilde{\mathcal{U}}^{(n)} = \widetilde{\mathcal{U}}_1^{(n)} \oplus \widetilde{\mathcal{U}}_2^{(n)}$.

Оскільки $B \stackrel{\text{def}}{=} (-i\mathcal{U}L\mathcal{U}'J)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$, то з (19) випливає, що $\widetilde{\mathcal{U}}^{(n)} y_n = B\mathcal{U}^{(n)} y_n$. Переходячи в цій рівності до границі при $n \to \infty$ і враховуючи лему 6, переконуємось, що $\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{\mathcal{U}}^{(n)} y_n = B\mathcal{U}^{(\Psi)} y_0$. Для завершення доведення достатньо ще раз застосувати (19).

4. Основний результат.

Теорема 1. *Для того щоб оператор (4)-(5) був максимально дисипативним, необхідно і достатньо, щоб справджувалася умова (20) і щоб L_1 був максимально дисипативним оператором.*

Доведення. Припустимо, що L_1 – максимально дисипативний оператор і справджується нерівність (20). Помноживши цю нерівність зліва і справа на $\mathbf{1}_{\mathcal{H}} \oplus P_n$, отримуємо

$$(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} \oplus P_n)[i\mathcal{U}L\mathcal{U}' + J](\mathbf{1}_{\mathcal{H}} \oplus P_n) \geq 0.$$

Звідси і з леми 3 випливає, що T_n – (максимально) дисипативний оператор, тому (див. (6), (24))

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad 2Im(T_n y_n|y_n) = -i[(T_n y_n|y_n) - (y_n|T_n y_n)] =$$

$$= -i\{[(L_{\max}^{(n)} y_n|y_n)_{\mathcal{H}} - (y_n|L_{\max}^{(n)} y_n)_{\mathcal{H}}] + [(\mathcal{U}_2^{(n)} y_n|\Phi_n y_n)_{\mathcal{H}} -$$

$$-(\Phi_n y_n|\mathcal{U}_2^{(n)} y_n)_{\mathcal{H}}]\} = -i\{(\mathcal{U}_1^{(n)} y_n|\widetilde{\mathcal{U}}_2^{(n)} y_n)_{\mathcal{H}} - (\mathcal{U}_2^{(n)} y_n|\widetilde{\mathcal{U}}_1^{(n)} y_n)_{\mathcal{H}} +$$

$$+(\Gamma_3^{(n)} y_n|\Gamma_4^{(n)} y_n)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_4^{(n)} y_n|\Gamma_3^{(n)} y_n)_{\mathcal{H}} + (\mathcal{U}_2^{(n)} y_n|\Phi_n y_n)_{\mathcal{H}} -$$

$$-(\Phi_n y_n|\mathcal{U}_2^{(n)} y_n)_{\mathcal{H}}\} \geq 0.$$

Переходячи в цій нерівності до границі при $n \to \infty$ і враховуючи (24), лему 6 та наслідок 4, бачимо, що

$$-i\{(\mathcal{U}_1^{(\Psi)} y_0|\widetilde{\mathcal{U}}_2^{(\Psi)} y_0)_{\mathcal{H}} - (\mathcal{U}_2^{(\Psi)} y_0|\widetilde{\mathcal{U}}_1^{(\Psi)} y_0)_{\mathcal{H}} + (\Gamma_3 y_0|\Gamma_4 y_0)_{\mathcal{H}} -$$

$$-(\Gamma_4 y_0|\Gamma_3 y_0)_{\mathcal{H}} + (\mathcal{U}_2^{(\Psi)} y_0|\Phi y_0)_{\mathcal{H}} - (\Phi y_0|\mathcal{U}_2^{(\Psi)} y_0)_{\mathcal{H}}\} = 2Im(Ty_o|y_0) \geq 0.$$

Оскільки y_0 – довільний елемент з $D(T)$, то T є дисипативним, а отже (з огляду на наслідок 1) – максимально дисипативним оператором. Цим достатність доведено. Необхідність випливає з наслідків 1, 2 (деталі – див. [2, 6, 16]).

Зауваження 1. Аналогічно доводимо, що оператор (4)-(5) є максимально акумулятивним (самоспряженим) тоді і тільки тоді, коли

$$P[i\mathcal{U}L\mathcal{U}' + J]P \leq 0,$$

а L_1 – максимально акумулятивний оператор (відповідно, тоді і тільки тоді, коли

$$P[i\mathcal{U}L\mathcal{U}' + J]P = 0,$$

а $L_1 = L_1^*$.

Наслідок 4. *Нехай* $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ *– ПГЗ оператора* L_0, $A_{ij} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *такі, що* $A \stackrel{\text{def}}{=} (A_{ij})_{i,j=1}^2$ *оборотний в* $\mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$, *а* $\mathcal{U}_i = A_{i1}\Gamma_1 + A_{i2}\Gamma_2$ $(i = 1, 2)$. *Оператор (4)-(5) максимально дисипативний (відповідно, максимально акумулятивний, самоспряжений) тоді і тільки тоді, коли*

$$P[AJA^* - J]P \leq 0 \ (\textit{відповідно} \ \geq 0; = 0)$$

і

$$ker(A_{11} - iA_{12}) = \{0\}$$

$$(\textit{відповідно } ker(A_{11} + iA_{12}) = \{0\}; ker(A_{11} \pm iA_{12}) = \{0\}).$$

Для доведення достатньо застосувати встановлену в [11, с. 161] рівність $\Gamma L\Gamma' = iJ$, з якої випливає, що $i\mathcal{U}L\mathcal{U}' = -AJA^*$, а також критерій максимальної дисипативності оператора L_1 (див. [4, 5, 6]).

1. *Иосида К.* Функциональный анализ. – М., 1967.
2. *Штраус А.В.* О расширениях и характеристической функции симметрического оператора // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1968. – Т. 32. – N 1. – С. 186-207.
3. *Горбачук М.Л., Кочубей А.Н., Рыбак М.А.* Диссипативные расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций // Докл. АН СССР. – 1972. – Т. 205. – N 5. – С. 1029-1032.
4. *Кочубей А.Н.* О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений // Мат. заметки. – 1975. – Т. 17. – N 1. – С. 41-48.
5. *Брук В.М.* Об одном классе краевых задач со спектральным параметром в граничном условии // Мат. сборник – 1976. – Т. 100. – N 2. – С. 210-216.
6. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – К., 1984.
7. *Krall A.M.* The development of general differential and differential-boundary systems // Rocky J. Math. – 1975. – Vol.5. – P. 493-542.
8. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л., Кочубей А.Н.* Теория расширений симметрических операторов и граничные задачи для дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 1989. – Т. 41. – N 10. – С. 1299-1313.
9. *Лянце В.Э.* О некоторых соотношениях между замкнутыми операторами // Докл. АН СССР. – 1972. – Т. 204. – N 3. – С. 542-545.
10. *Лянце В.Э.* О замкнутых операторах в гильбертовом пространстве. // Теория функций, функ. анализ и их прилож. – 1972. – Вып. 16. – С. 165-186.
11. *Лянце В.Э., Сторож О.Г.* Методы теории неограниченых операторов. – К., 1983.
12. *Піпа Г.М., Сторож О.Г.* Про один клас збурень власних розширень додатно визначеного оператора // Доп. НАН України. – 2004. – N 8. – С. 29-33.
13. *Mylyo O.Ya., Storozh O.G.* Selfadjoint and maximal dissipativeness conditions for a class of finite-dimensional perturbations of a positively definite operator // Математ. студії. – 1997. – Т. 7. – N 1. – С. 97-102.
14. *Сторож О.Г., Шувар О.Б.* Умови максимальної дисипативності майже обмежених збурень гладких звужень операторів, спряжених з симетричним // Укр. мат. журн. – 2004. – Т. 55. – N 7. – С. 966-976.

15. *Михлин С.Г.* Курс математической физики. – М., 1968.

16. *Филлипс Р.С.* Диссипативные операторы и гиперболические системы дифференциальных уравнений в частных производных // Математика (переводы). – 1962. – Т. 6. – N 4. – С. 11-70.

17. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М., 1976.

18. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Спектральная теория. – М., 1966.

MAXIMAL DISSIPATIVENESS CONDITIONS FOR A CLASS OF CLOSED OPERATORS IN HILBERT SPACE

Hanna Pipa, Oleh Storozh

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

A class of closed linear operators in a Hilbert space is investigated. Each operator from this class is interpreted as a perturbation of some proper extension of a given positively definite operator. This perturbation changes as the action of unperturbated operator, as its domain. The criteria of maximal dissipativeness for investigated operators are established.

Key words: operator, dissipativeness, boundary pair, ortogonal projection.

Стаття надійшла до редколегії 08.04.2005

Прийнята до друку 19.10.2005