ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2005.Вип.64.С.201-217

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2005.Vol.64.P.201-217

УДК 517.95

РОЗВ'ЯЗКИ СЛАБКО НЕЛІНІЙНОЇ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОЇ НЕРІВНОСТІ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ

Наталія ПРОЦАХ
Інститут прикладних проблем математики і механіки
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул.Наукова, 3б 79060 Львів, Україна

Розглянуто таку ультрапараболічну варіаційну нерівність високого порядку за групою просторових змінних, яка містить слабку нелінійність, в обмеженій та необмеженій за часовою змінною областях

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[u_t(v-u) - \lambda(x,y,t)u_y(v-u) + \sum_{|\alpha|=|\gamma|m} a_{\alpha\gamma}(x,y,t)D^{\alpha}u(D^{\gamma}v - D^{\gamma}u) +$$

$$+g(x,y,t,u)(v-u) - f(x,y,t)(v-u)\Big]\,dx\,dy\,dt \geqslant 0,$$

для довільних $t_1 < t_2 \leqslant T$.

Досліджено умови існування та єдиності розв'язку цієї нерівності, не припускаючи зростання вихідних даних, доведено деякі властивості розв'язку.

Ключові слова: ультрапараболічна варіаційна нерівність, задача Фур'є.

Задачі для ультрапараболічних рівнянь актуальні сьогодні. Це пов'язано з широким спектром явищ, які можна ними описати. Деякі їх застосування див., наприклад, [1-4].

Починаючи з минулого століття, для ультрапараболічних лінійних рівнянь другого порядку досліджено задачу Коші та властивості її розв'язку [5-7], мішані задачі в областях (переважно обмежених) різноманітної форми [8, 9].

В останні роки з'явилися праці, присвячені задачам для нелінійних ультрапараболічних рівнянь [4], [10-16]. В них досліджено існування та єдиність розв'язку мішаних задач у просторах Соболєва [12-16], властивості узагальнених розв'язків таких рівнянь [4, 10, 11]. Ультрапараболічні рівняння високого порядку введено і досліджено в працях [17-21]. У цих працях побудовано фундаментальний розв'язок [18-21], доведено стабілізацію розв'язку задачі Коші в класі узагальнених функцій нескінченного порядку типу ультрарозподілів Жевре [17].

Певним узагальненням задач для ультрапараболічних рівнянь є ультрапараболічні нерівності. Варіаційні сильно нелінійні ультрапараболічні нерівності в обмежених областях досліджено в [13, 22], необмежених за t – в [23].

У цій праці розглянуто ультрапараболічні варіаційні нерівності високого порядку за групою просторових змінних, які містять слабкі нелінійності степеневого вигляду, в обмеженій та необмеженій за часовою змінною областях. Введено поняття сильного та слабкого розв'язку нерівності, подібно як у [24] для гіперболічних операторів, доведено умови існування та єдиності розв'язку цієї нерівності, не припускаючи зростання вихідних даних на нескінченності. Досліджено поведінку розв'язку при $t \to -\infty$ для класу ультрапараболічних нерівностей.

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область з межею Γ; $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\Gamma_1 \neq \emptyset$, $\Gamma \in C^m$, $D = \Omega \times (0, y_0)$, $Q_T = D \times (-\infty, T)$, $y_0 < +\infty$, $T < +\infty$; $Q_{t_1,t_2} = D \times (t_1, t_2)$; $D_\tau = Q_T \bigcap \{t = \tau\}$, $\Pi_T = (0, y_0) \times (-\infty, T)$, $S = \Gamma \times (0, y_0) \times (-\infty, T)$, $S_i = \Gamma_i \times (0, y_0) \times (-\infty, T)$, $i = 1, 2$, $\Pi_{t_1,t_2} = (0, y_0) \times (t_1, t_2)$, ν – зовнішня нормаль до поверхні S, число $p > 2$, $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, $p' = p/(p-1)$.

Введемо простори $W_0(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, $W_1(\Omega) = \{v : v \in L^p(\Omega) \cap W^{m,2}(\Omega),\ v|_{\Gamma_1} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial \nu}\big|_{\Gamma_1} = 0,\ \frac{\partial^2 v}{\partial \nu^2}\big|_{\Gamma_1} = 0,\ \dots, \frac{\partial^{m-1} v}{\partial \nu^{m-1}}\big|_{\Gamma_1} = 0\}$ з нормою $\|v; W_1(\Omega)\| = \|v; L^p(\Omega)\| + \sum\limits_{|\alpha|=|\gamma|=m} \|D^\alpha v; L^2(\Omega)\|$. Нехай $W(\Omega)$ – замкнений підпростір простору $W_1(\Omega)$ такий, що $W_0(\Omega) \subset W(\Omega)$, простір $U(\Omega)$ є підпростором $H^m(\Omega)$ таким, що вкладення $W(\Omega) \subset U(\Omega)$ є щільним і неперервним, K є випуклою і замкненою підмножиною в $W(\Omega)$ і $U(\Omega)$, яка містить нульовий елемент; $V_0(Q_{t_1,t_2}) = \{v : v \in L^p(Q_{t_1,t_2}),\ D^\alpha u \in L^2(Q_{t_1,t_2}),\ |\alpha| \leqslant m,\ v|_{S_1} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial \nu}\big|_{S_1} = 0,\ \frac{\partial^2 v}{\partial \nu^2}\big|_{S_1} = 0,\ \dots, \frac{\partial^{m-1} v}{\partial \nu^{m-1}}\big|_{S_1} = 0\}$, $V_1(Q_{t_1,t_2}) = \{v : v_t, v_y \in L^2(Q_{t_1,t_2});\ D^\alpha u \in L^2(Q_{t_1,t_2}),\ |\alpha| \leqslant m,\ v \in L^p(Q_{t_1,t_2}),\ v|_{y=y_0} = 0,\ v|_{S_1} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial \nu}\big|_{S_1} = 0,\ \frac{\partial^2 v}{\partial \nu^2}\big|_{S_1} = 0,\ \dots, \frac{\partial^{m-1} v}{\partial \nu^{m-1}}\big|_{S_1} = 0\}$ з нормою $\|v; V_0(Q_{t_1,t_2})\| = \|v; L^p(Q_{t_1,t_2})\| + \sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha v; L^2(Q_{t_1,t_2})\|$, $\|v; V_1(Q_{t_1,t_2})\| = \|v; L^p(Q_{t_1,t_2})\| + \sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha v; L^2(Q_{t_1,t_2})\| + \|v_y; L^2(Q_{t_1,t_2})\| + \|v_t; L^2(Q_{t_1,t_2})\|$ відповідно; $V_{i,\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T) = \{v : v \in V_i(Q_{t_1,t_2})\ \forall t_1 < t_2 \leqslant T\}$, $i = 0, 1$.

В області Q_T розглянемо варіаційну нерівність

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[u_t(v-u) - \lambda(x,y,t) u_y (v-u) + \sum_{|\alpha|=|\gamma|\leqslant m} a_{\alpha\gamma}(x,y,t) D^\alpha u (D^\gamma v - D^\gamma u) +$$
$$+ g(x,y,t,u)(v-u) - f(x,y,t)(v-u) \Big]\, dx\, dy\, dt \geqslant 0, \tag{1}$$

де $v \in V_{0,\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T)$, $v \in K$ для майже всіх $(y,t) \in \Pi_T$ та довільних $t_1 < t_2 \leqslant T$.

Припустимо, що для коефіцієнтів нерівності (1) виконуються такі умови:

(A) : $a_{\alpha\gamma} \in C(\overline{Q}_T)$, $D^\alpha a_{\alpha\gamma} \in C(Q_T)$, $|\alpha| = |\gamma| \leqslant m$;

$$\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=|\gamma|\leqslant m} a_{\alpha\gamma}(x,y,t) D^\gamma v D^\alpha v\, dx \geqslant a_0 \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha v|^2\, dx,$$

$\forall v \in W_1(\Omega)$, $(y,t) \in \Pi_T$, a_0 – додатна стала;

(G) : $g(x,y,t,\xi)$ вимірна за змінними (x,y,t) в області Q_T для всіх $\xi \in \mathbb{R}^1$, неперервна за ξ майже для всіх $(x,y,t) \in Q_T$;

$(g(x,y,t,\xi) - g(x,y,t,\eta))(\xi - \eta) \geqslant g_0|\xi - \eta|^p$; $|g(x,y,t,\xi)| \leqslant g^0|\xi|^{p-1}$

для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$ і всіх ξ, $\eta \in \mathbb{R}^1$; g_0, g^0 – додатні сталі,

$g_\xi \in C(Q_T)$;

(L) : $\{\lambda, \lambda_y\} \subset C(\overline{Q}_T)$, $\lambda(x,y,t) \geqslant 0$, $\lambda(x,y_0,t) \neq 0$ $\forall (x,y,t) \in \overline{Q}_T$.

Означення 1. *Функцію $u \in V_{1,\mathrm{loc}}(Q_T) \cap C((-\infty;T] : L^2(D))$, $u \in K$ для майже всіх $(y,t) \in \Pi_T$, яка задовольняє нерівність (1) для всіх $t_1, t_2 \in (-\infty;T]$, $t_1 < t_2$ і всіх функцій $V_{0,\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T)$ таких, що $v \in K$ для майже всіх $(y,t) \in \Pi_T$, назвемо сильним розв'язком нерівності (1).*

Означення 2. *Функцію u таку, що $u \in K$ для майже всіх $(y,t) \in \Pi_T$, назвемо слабким розв'язком нерівності (1), якщо вона є границею функцій $\{u^k\}_{k=1}^\infty$ в просторі $V_{0,\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T) \cap C((-\infty;T]; L^2(D))$ таких, що для всіх $k \in \mathbb{N}$, u^k є сильним розв'язком варіаційної нерівності*

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Bigg[u_t(v-u) - \lambda(x,y,t)u_y(v-u) + \sum_{|\alpha|=|\gamma|\leqslant m} a_{\alpha\gamma}(x,y,t)D^\alpha u(D^\gamma v - D^\gamma u) +$$
$$+ g(x,y,t,u)(v-u) - f^k(x,y,t)(v-u)\Bigg]\,dx\,dy\,dt \geqslant 0, \tag{2}$$

де послідовність $\{f^k\}_{k=1}^\infty$ є збіжною до функції f в просторі $L^{p'}_{\mathrm{loc}}((-\infty,T]; L^{p'}(D))$.

Означення 3. *Функцію u, яка належить до простору $V_1(Q_{t_0,T})$ і $u \in K$ для майже всіх $(y,t) \in \Pi_{t_0,T}$ та задовольняє варіаційну нерівність (2) при $k = t_0$ для всіх $t_0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T$ і $v \in V_0(Q_{t_0,T})$, $v \in K$ для майже всіх $(y,t) \in \Pi_{t_0,T}$, та початкову умову $u(x,y,t_0) = u_0(x,y)$, де $t_0 \in (-\infty;T]$, назвемо розв'язком нерівності (1) в області $Q_{t_0,T}$.*

Теорема 1. *Якщо виконуються умови* **(A)** – **(L)** *в області $Q_{t_0,T}$, $f^{t_0} \in L^{p'}((t_0,T); L^{p'}(D))$, $2 < p < \frac{2n}{n-m}$, якщо $n > m$ і $p > 2$, якщо $n \leqslant m$, $u_0 \in L^2(0,y_0; W_1(\Omega))$, $u_{0y} \in L^2(D)$, $\{a_{\alpha\gamma t}, a_{\alpha\gamma y}\} \in L^\infty(\overline{Q}_{t_0,T})$; існують сталі g^1, $\tilde{g}^1$ такі, що $g_\xi(x,y,t,\xi) \geqslant 0$; $|g_y(x,y,t,\xi)| \leqslant \tilde{g}^1|\xi|^{p-1}$; $|g_t(x,y,t,\xi)| \leqslant g^1|\xi|^{p-1}$; $\{f^{t_0}_y, f^{t_0}_t\} \subset L^2(\overline{Q}_{t_0,T})$, $f^{t_0}(x,y_0,t) = 0$.*

Тоді існує розв'язок нерівності (1) в області $Q_{t_0,T}$,

Доведення. Нехай t_0 – довільне фіксоване число з проміжку $(-\infty;T]$, β – оператор штрафу, пов'язаний з K : $\beta(\omega) = J(\omega - P_K(\omega))$, де J – оператор двоїстості між $U^*(\Omega)$ і $U(\Omega)$, а P_K – оператор проектування на K. Оператор β – монотонний, обмежений, семінеперервний [13, с. 384], $K = \{u : u \in U(\Omega), \beta(u) = 0\}$.

Нехай $\{\varphi^k(x) : k \geqslant 1\}$ – база простору $W(\Omega)$,

$$\varphi^{k,s}(x,y) = \varphi^k(x)\cos\frac{(2s-1)\pi}{2y_0}y,\ u^{\varepsilon,t_0,j}(x,y,t) = \sum_{k,s=1}^{j} c^j_{ks}(t)\varphi^{k,s}(x,y),\ j = 1,2,.., \tag{3}$$

де $c^j_{ks}(t)$ є розв'язком задачі

$$\int\limits_{D_\tau}\Big[u_t^{\varepsilon,t_0,j}\varphi^{k,s}-\lambda(x,y,t)u_y^{\varepsilon,t_0,j}\varphi^{k,s}+\sum_{|\alpha|=|\gamma|\leqslant m}a_{\alpha\gamma}(x,y,t)D^\alpha u^{\varepsilon,t_0,j}D^\gamma\varphi^{k,s}+$$

$$+g(x,y,t,u^{\varepsilon,j,t_0})\varphi^{k,s}-f^{t_0}(x,y,t)\varphi^{k,s}\Big]\,dx\,dy+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^{y_0}\langle\beta(u^{\varepsilon,t_0,j}),\varphi^{k,s}\rangle\,dy=0; \qquad (4)$$

$$c^j_{ks}(t_0)=u^j_{0,k,s}, \qquad k,s=\overline{1,j},\ \tau\in[t_0,\tau], \qquad (5)$$

$$u_0^j(x,y)=\sum_{k,s=1}^{j}u^j_{0,k,s}\varphi^{k,s}(x,y),\quad \lim_{j\to\infty}\|u_0-u_0^j\|_{W_1(D)}=0,$$

де $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярний добуток між $U(\Omega)$ і $U^*(\Omega)$.

За теоремою Каратеодорі [25, с. 54] існує абсолютно неперервний розв'язок задачі (4)–(5) на $[t_0,\tau_0]$, $\tau_0\in(t_0,T]$. З оцінок, отриманих нижче, випливатиме, що цей розв'язок можна продовжити на весь проміжок $[t_0,T]$.

Домножимо (4) на $c^j_{ks}(t)$, підсумуємо за s і k, проінтегруємо за t по проміжку $[t_0,\tau]$, $\tau\leqslant T$. Матимемо

$$\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\Big[u_t^{\varepsilon,t_0,j}u^{\varepsilon,t_0,j}-\lambda(x,y,t)u_y^{\varepsilon,t_0,j}u^{\varepsilon,t_0,j}+\sum_{|\alpha|=|\gamma|\leqslant m}a_{\alpha\gamma}(x,y,t)D^\alpha u^{\varepsilon,t_0,j}D^\gamma u^{\varepsilon,t_0,j}+$$

$$+g(x,y,t,u^{\varepsilon,t_0,j})u^{\varepsilon,t_0,j}-f^{t_0}(x,y,t)u^{\varepsilon,t_0,j}\Big]\,dx\,dy\,dt+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Pi_\tau}\langle\beta(u^{\varepsilon,t_0,j}),u^{\varepsilon,t_0,j}\rangle\,dy\,dt=0.$$

Після перетворень доданків цієї рівності та застосування леми Гронуолла, отримуємо нерівність

$$\int\limits_{D_\tau}(u^{\varepsilon,t_0,j})^2\,dx\,dy+\int\limits_{t_0}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\lambda(x,0,t)(u^{\varepsilon,t_0,j})^2\,dx\,dt+\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\sum_{|\alpha|=m}(D^\alpha u^{\varepsilon,t_0,j})^2\,dx\,dy\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}|u^{\varepsilon,t_0,j}|^p\,dx\,dy\,dt+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Pi_{t_0,\tau}}\langle\beta(u^{\varepsilon,t_0,j}),u^{\varepsilon,t_0,j}\rangle\,dy\,dt\leqslant$$

$$\leqslant M_1\Bigg(\int\limits_{Q_{t_0,T}}|f^{t_0}|^{p'}\,dx\,dy\,dt+\int\limits_{D_{t_0}}|u_0|^2\,dx\,dy\Bigg), \qquad (6)$$

в якій стала M_1 не залежить від j.

Позначимо через A_0, $\mathcal{B}$ оператори, які визначені рівностями

$$\langle A_0u^{\varepsilon,t_0,j},v\rangle_{V_0}=\int\limits_{Q_{t_0,T}}g(x,y,t,u^{\varepsilon,t_0,j})v\,dx\,dy\,dt,\quad \forall u^{\varepsilon,t_0,j},v\in V_0(Q_{t_0,T}).$$

$$\langle \mathcal{B}(u), v\rangle_{V_0} = \int\limits_{\Pi_{t_0,T}} \langle \beta(u), v\rangle \, dy\, dt, \quad \forall u, v \in V_0(Q_{t_0,T}).$$

Оператор $\mathcal{A} = A_0 + \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{B}$, який діє з $V_0(Q_{t_0,T}) \to V_0^*(Q_{t_0,T})$ є монотонним, семінеперервним і $\|\mathcal{A}(u^{\varepsilon,t_0,j}); V_0^*(Q^m_{t_0,T})\|$ обмежений сталою, яка не залежить від j, але залежить від ε.

Зауважимо, що $\left(\cos \frac{(2s-1)\pi}{2y_0} y\right)_{yy} = -\omega_s \cos \frac{(2s-1)\pi}{2y_0} y$, де $\omega_s = \left(\frac{(2s-1)\pi}{2y_0}\right)^2$. Домножимо (4) на $c^j_{ks}(t)\omega_s$, підсумуємо за s і k , проінтегруємо за t від t_0 до τ та замінимо значення $\sum\limits_{s,k=1}^{j} c^j_{ks}(t)\omega_s \varphi^{k,s}(x,y)$ з попереднього виразу на $-u^{\varepsilon,t_0,j}_{yy}$. Після таких перетворень отримаємо рівність

$$-\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \Big[u^{\varepsilon,t_0,j}_t u^{\varepsilon,t_0,j}_{yy} - \lambda(x,y,t) u^{\varepsilon,t_0,j}_y u^{\varepsilon,t_0,j}_{yy} + \sum_{|\alpha|=|\gamma|\leqslant m} a_{\alpha\gamma}(x,y,t) D^\alpha u^{\varepsilon,t_0,j} D^\gamma u^{\varepsilon,t_0,j}_{yy} +$$

$$+ g(x,y,t,u^{j,t_0}) u^{\varepsilon,t_0,j}_{yy}\Big]\, dx\, dy\, dt - \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{\Pi_{t_0,\tau}} \langle \beta(u^{\varepsilon,t_0,j}), u^{\varepsilon,t_0,j}_{yy}\rangle \, dy\, dt =$$

$$= -\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} f^{t_0}(x,y,t) u^{\varepsilon,t_0,j}_{yy}\, dx\, dy\, dt.$$

Оцінивши кожний з доданків одержаної рівності та врахувавши семінеперервність оператора β і те, що $\beta(0) = 0$, одержимо оцінку

$$\int\limits_{D_\tau} (u^{\varepsilon,t_0,j}_y)^2\, dx\, dy + \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{|\alpha|=m} (D^\alpha u^{\varepsilon,t_0,j}_y)^2\, dx\, dy\, dt \leqslant$$

$$\leqslant M_2 \int\limits_{Q_{t_0,T}} \left(|f^{t_0}|^{p'} + |f^{t_0}_y|^2\right) dx\, dy\, dt + M_3 + \int\limits_{D_{t_0}} (u_{0y})^2\, dx\, dy\, dt, \ \tau \in [t_0, T], \qquad (7)$$

в якій сталі M_2, M_3 не залежать від j, а стала $p < \frac{2n}{n-m}$.

Із (4) при $t = t_0$ випливає оцінка

$$\int\limits_{D_{t_0}} (u^{\varepsilon,t_0,j}_t)^2\, dx\, dy \leqslant M_4 \int\limits_{D_{t_0}} \Big[(\lambda(x,y,t_0) u_{0y})^2 +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=|\gamma|\leqslant m} (D^\alpha(a_{\alpha\gamma}(x,y,t) D^\gamma u_0))^2 + (g(x,y,t,u_0))^2 + |f^{t_0}(x,y,t_0)|^2\Big]\, dx\, dy \leqslant M_5, \quad (8)$$

в якій сталі M_4 та M_5 не залежать від j та ε.

Продиференціюємо (4) за t, домножимо на $c^j_{kst}(t)$, підсумуємо за s і k, проінтегруємо за t від t_0 до τ. Одержимо

$$\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \Big[u^{\varepsilon,t_0,j}_{tt}\, u^{\varepsilon,t_0,j}_t - \left(\lambda_t(x,y,t)\, u^{\varepsilon,t_0,j}_y + \lambda(x,y,t)\, u^{\varepsilon,t_0,j}_{yt}\right)\, u^{\varepsilon,t_0,j}_t +$$

$$+\sum_{|\alpha|=|\gamma|\leqslant m}\Big(a_{\alpha\gamma}(x,y,t)D^\alpha u_t^{\varepsilon,t_0,j}+a_{\alpha\gamma t}(x,y,t)\ D^\alpha u^{\varepsilon,t_0,j}\Big)D^\gamma u_t^{\varepsilon,t_0,j}+$$

$$+g_t(x,y,t,u^{\varepsilon,t_0,j})u_t^{\varepsilon,t_0,j}\Big]\,dx\,dy\,dt+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Pi_\tau}\langle\big(\beta(u^{\varepsilon,t_0,j})\big)_t,u_t^{\varepsilon,t_0,j}\rangle\,dy\,dt=$$

$$=\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}f_t^{t_0}(x,y,t)u_t^{\varepsilon,t_0,j}\,dx\,dy\,dt.$$

Звідси, врахувавши оцінки (6), (7), (8), подібно як із попередніх рівностей, отримуємо оцінку

$$\int\limits_{D_\tau}(\ u_t^{\varepsilon,t_0,j})^2\,dx\,dy+\int\limits_{t_0}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\lambda(x,0,t)(u_t^{\varepsilon,t_0,j})^2\,dx\,dt+\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\Big[\sum_{|\alpha|=m}(D^\alpha u_t^{\varepsilon,t_0,j})^2\,dx\,dy\,dt\leqslant$$

$$\leqslant M_6\Big[\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\Big[|f_t^{t_0}|^2+|f_y^{t_0}|^2+|f|^{p'}\Big]\,dx\,dy\,dt+\int\limits_{D_{t_0}}|f^{t_0}(x,y,t_0)|^2\,dx\,dy\Big].\qquad(9)$$

де стала M_6 не залежить від j.

Із оцінок (6), (7), (9) випливають такі збіжності деякої підпослідовності послідовності $\{u^{\varepsilon,t_0,j}:j\geqslant 1\}$ (за якою зберігатимемо те саме позначення)

$D^\alpha u^{\varepsilon,t_0,j}\to D^\alpha u^{\varepsilon,t_0}$ слабко в $L^2(Q_{t_0,T})$, $|\alpha|\leqslant m$; $u^{\varepsilon,t_0,j}\to u^{\varepsilon,t_0}$ слабко в $L^p(Q_{t_0,T})$;
$u_y^{\varepsilon,t_0,j}\to u_y^{\varepsilon,t_0}$ $*$- слабко в $L^\infty(Q_{t_0,T})$;
$u_t^{\varepsilon,t_0,j}\to u_t^{\varepsilon,t_0}$ слабко в $L^2(Q_{t_0,T})$. (10)

З умови (G) та збіжностей (10) знайдемо, що

$$\int\limits_{Q_{t_0,T}}|g(x,y,t,u^{\varepsilon,t_0,j})|^p\,dx\,dy\,dt\leqslant M_7\int\limits_{Q_{t_0,T}}|u^{\varepsilon,t_0,j}|^p\,dx\,dy\,dt\leqslant M_8\int\limits_{Q_{t_0,T}}|f^{t_0}|^{p'}\,dx\,dy\,dt,$$

де стала M_8 не залежить від j. Звідси випливатиме, що $g(x,y,t,u^{\varepsilon,t_0,j})\in L^{p'}(Q)$. Послідовність $u_t^{\varepsilon,t_0,j}\to u_t^{\varepsilon,t_0}$ слабко в $L^2(Q_{t_0,T})$, отже, $u^{\varepsilon,t_0,j}\to u^{\varepsilon,t_0}$ майже всюди в$L^2((t_0,T);L^2(D))$. Тоді за лемою 1.3 [26, с. 25]

$$\mathcal{A}(u^{\varepsilon,t_0,j})\to\mathcal{A}(u^{\varepsilon,t_0})\text{ слабко в }L^{p'}(Q_{t_0,T}).\qquad(11)$$

Оскільки $u^{\varepsilon,t_0,j}\to u^{\varepsilon,t_0}$, $u_y^{\varepsilon,t_0,j}\to u_y^{\varepsilon,t_0}$ слабко в $L^\infty((t_0,T);L^2(D))$, то $u^{\varepsilon,t_0,j}\to u^{\varepsilon,t_0}$ слабко в $W^{1,2}((0,y_0);L^2((t_0;T)\times\Omega)))$, $u^{\varepsilon,t_0}\in C([t_0,T];L^2(D))$. Тоді $\lim\limits_{j\to\infty}\int\limits_{Q_{t_0,T}}u_y^{\varepsilon,t_0,j}v\,dx\,dy\,dt=\int\limits_{Q_{t_0,T}}u_y^{\varepsilon,t_0}v\,dx\,dy\,dt$. З одержаних збіжностей та (5) знаходимо, що $u^{\varepsilon,t_0}(x,y_0,t)=0$ майже для всіх $(x,t)\in\Omega\times(t_0,T)$, вираз $u^{\varepsilon,t_0}(x,y,t_0)$ має зміст і $u^{\varepsilon,t_0}(x,y,t_0)=u_0(x,y)$.

Із (4) випливає, що

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[u_t^{\varepsilon,t_0} v + \lambda(x,y,t) u_y^{\varepsilon,t_0} v + \sum_{|\alpha|=|\gamma|\leqslant m} a_{\alpha\gamma}(x,y,t) D^\alpha u^{\varepsilon,t_0} D^\gamma v +$$

$$+ g(x,y,t,u^{\varepsilon,t_0}) v\Big]\, dx\,dy\,dt + \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{\Pi_{t_1,t_2}} \langle \beta(u^{\varepsilon,t_0}), v\rangle\, dy\,dt = \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} f^{t_0}(x,y,t) v\, dx\,dy\,dt. \tag{12}$$

для довільних $v \in V_0(Q_{t_0,T})$, $v \in K$ для майже всіх $(y,t) \in \Pi_{t_0,T}$.

Для u^{ε,t_0} маємо оцінки

$$\|u^{\varepsilon,t_0}; V_0(Q_{t_0,T})\| \leqslant M_9,\ \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{\Pi_{t_0,T}} \langle \beta(u^{\varepsilon,t_0}), u^{\varepsilon,t_0}\rangle\, dy\,dt \leqslant M_{10},\ \|A_0(u^{\varepsilon,t_0}); V_0^*(Q_{t_0,T})\| \leqslant M_{11}.$$

Отже, існує така підпослідовність u^{k,t_0} $(k = \frac{1}{\varepsilon_k})$:

$$u^{k,t_0} \to u^{t_0} \text{ слабко в } V_0(Q_{t_0,T}), \quad \mathcal{B}(u^{k,t_0}) \to 0 \text{ слабко в } V_0^*(Q_{t_0,T}).$$

З (6) випливатиме, що

$$\int\limits_{D_\tau} (u^{\varepsilon,t_0})^2\, dx\,dy + \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \lambda(x,0,t)(u^{\varepsilon,t_0})^2\, dx\,dt + \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} |u^{\varepsilon,m}|^p\, dx\,dy\,dt +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{\Pi_{t_0,\tau}} \langle \beta(u^{\varepsilon,t_0}), u^{\varepsilon,t_0}\rangle\, dy\,dt \leqslant M_{12} \Big[\int\limits_{Q_{t_0,T}} |f^{t_0}|^2\, dx\,dy\,dt + \int\limits_{D_{t_0}} (u_0)^2\, dx\,dy\Big].$$

Тобто, $\int\limits_{\Pi_{t_0,\tau}} \langle \beta(u^{\varepsilon,t_0}), u^{\varepsilon,t_0}\rangle\, dy\,dt \leqslant M_{12}\varepsilon$. Провівши всі перетворення такі самі, як для функції $u^{\varepsilon,t_0,j}$, одержимо збіжності (7), в яких замість $u^{\varepsilon,t_0,j}$ є u^{ε,t_0}, а замість u^{ε,t_0} є u^{t_0}. Також маємо $u^{\varepsilon,t_0}(x,y,t_0) = u_0(x,y)$. Отже, $u(x,y,0) = u_0(x,y)$.

Крім того, з (7) випливає, що $\langle \mathcal{B}(u^{k,t_0}), u^{k,t_0}\rangle_{V_0} = \int\limits_{\Pi_T} \langle \beta(u^{k,t_0}), u^{k,t_0}\rangle\, dy\,dt \to 0$.

Оскільки $\mathcal{B}$ – монотонний і семінеперервний, то $\mathcal{B}(u^{t_0}) = 0$ випливає $u^{t_0} \in K$ майже для всіх $(y,t) \in \Pi_T$.

Тому $\langle \beta(u^{t_0}), \varphi\rangle_{V_0} = 0$ майже для всіх $(y,t) \in \Pi_T$ і $\forall \varphi \in W(\Omega)$. Отже, $\beta(u^{t_0}) = 0$ і $u^{t_0} \in K$ майже для всіх $(y,t) \in \Pi_T$.

Доведемо, що u^{t_0} – розв'язок варіаційної нерівності (1) в області $Q_{t_0,T}$. Виберемо $v \in K$, $v \in V_0(Q_{t_0,T})$. Тоді $\beta(v) = \beta(u^{t_0}) = 0$. У (12) замість v підставимо $v - u^{\varepsilon,t_0}$ та врахуємо, що

$$\frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{\Pi_{t_1,t_2}} \langle (\beta(u^{\varepsilon,t_0}) - \beta(v))(v - u^{\varepsilon,t_0})\rangle\, dy\,dt \leqslant 0.$$

Матимемо

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[u_t^{\varepsilon,t_0}(v - u^{\varepsilon,t_0}) - \lambda(x,y,t) u_y^{\varepsilon,t_0}(v - u^{\varepsilon,t_0}) + \sum_{|\alpha|=|\gamma|\leqslant m} a_{\alpha\gamma}(x,y,t) D^\alpha u^{\varepsilon,t_0}(D^\gamma v -$$

$$- D^\gamma u^{\varepsilon,t_0}) + g(x,y,t,u^{\varepsilon,t_0})(v - u^{\varepsilon,t_0}) - f^{t_0}(x,y,t)(v - u^{\varepsilon,t_0})\Big] \, dx\, dy\, dt \geqslant 0,$$

$$\forall v \in V_0(Q_T), v \in K. \tag{13}$$

Нехай в (13) $v = u^{t_0}$

$$\int\limits_{Q_{t_0,T}} \Big[u_t^{\varepsilon,t_0}(u^{t_0} - u^{\varepsilon,t_0}) - \lambda(x,y,t)u_y^{\varepsilon,t_0}(u^{t_0} - u^{\varepsilon,t_0}) + \sum_{|\alpha|=|\gamma|\leqslant m} a_{\alpha\gamma}(x,y,t)D^\alpha u^{t_0}(D^\gamma u^{t_0} -$$

$$- D^\gamma u^{\varepsilon,t_0}) + g(x,y,t,u^{t_0})(u^{t_0} - u^{\varepsilon,t_0}) - f^{t_0}(x,y,t)(u^{t_0} - u^{\varepsilon,t_0})\Big] \, dx\, dy\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{Q_{t_0,T}} \Big[\sum_{|\alpha|=|\gamma|\leqslant m} a_{\alpha\gamma}(x,y,t)(D^\alpha u^{t_0} - D^\alpha u^{\varepsilon,t_0})(D^\gamma u^{t_0} - D^\gamma u^{\varepsilon,t_0}) + (g(x,y,t,u^{t_0}) -$$

$$- g(x,y,t,u^{\varepsilon,t_0}))(u^{t_0} - u^{\varepsilon,t_0})\Big] \, dx\, dy\, dt \geqslant \int\limits_{Q_{t_0,T}} \Big[a_0 \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u^{t_0} - D^\alpha u^{\varepsilon,t_0}|^2 +$$

$$+ g_0 |u^{t_0} - u^{\varepsilon,t_0}|^p\Big] \, dx\, dy\, dt, \quad \forall v \in V_0(Q_{t_0,T}), v \in K. \tag{14}$$

Звідси $D^\alpha u^{\varepsilon,t_0} \to D^\alpha u^{t_0}$ в $L^2(Q_{t_0,T})$, $|\alpha| \leqslant m$; $u^{\varepsilon,t_0} \to u^{t_0}$ в $L^p(Q_{t_0,T})$.

Перейшовши до границі в (13) при $\varepsilon \to 0$, одержимо нерівність (2) при $k = t_0$ та умову $u(x,y,t_0) = u_0(x,y)$. Теорему доведено.

Зауваження. Якщо в умовах теореми 1 функція $g(x,y,t,u) = g(x)|u|^{p-2}u$, $g(x) > 0$, то p може бути довільним скінченним числом, більшим за 2.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1 для довільного* $t_0 \in (-\infty, T]$; $f \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}((-\infty,T); L^{p'}(D))$, $\min\limits_{Q_T} \lambda_y \geqslant 0$, *тоді існує слабкий розв'язок нерівності (1).*

Доведення. Розглянемо початкову умову

$$u(x,y,t_0) = 0. \tag{15}$$

Виберемо $t_0 = T-1,\ T-2, ..., T-k$, функції

$$F^k(x,y,t) = \begin{cases} f^k(x,y,t)\xi(t), & (x,y,t) \in Q_{T-k,T}; \\ 0, & (x,y,t) \in Q_{T-k}. \end{cases},$$

де $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, $\xi \in C^1((-\infty;T])$, $\xi(t) = 0$, при $t \leqslant T-k$, а $f^k \to f$ у просторі $L^{p'}_{\mathrm{loc}}((-\infty,T]; L^{p'}(D))$. Тоді і $F^k \to f$ у просторі $L^{p'}_{\mathrm{loc}}((-\infty,T]; L^{p'}(D))$ при $k \to \infty$.

За теоремою 1 існує функція u^k, яка є розв'язком нерівності (2), в якій замість f^k записано F^k, та з початковою умовою (15) при $t_0 = T-k$. Продовжимо кожну з функцій послідовності $\{u^k\}_{k=1}^\infty$ нулем в область Q_{T-k} і збережемо для неї те саме позначення.

Очевидно, що u^k задовольняє нерівність

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[u_t^k(v-u^k) - \lambda(x,y,t)u_y^k(v-u^k) + \sum_{|\alpha|=|\gamma|\leqslant m} a_{\alpha\gamma}(x,y,t)D^\alpha u^k(D^\gamma v - D^\gamma u^k) +$$
$$+ g(x,y,t,u^k)(v-u^k) - F^k(x,y,t)(v-u^k)\Big]\,dx\,dy\,dt \geqslant 0,$$

для всіх $v \in V_{0,\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T)$, $v \in K$ для майже всіх $(y,t) \in \Pi_T$ та всіх $t_1 < t_2 \leqslant T$, тобто є її сильним розв'язком.

Виберемо функцію $\theta_1(t)$ [27, с. 24] таку, що $\theta_1 \in C^1(\mathbb{R})$, $\theta_1'(t) \geqslant 0$ на $\mathbb{R}$, $0 \leqslant \theta_1(t) \leqslant 1$; $\theta_1(t) = 0$, якщо $t \in (-\infty; -1]$, $\theta_1(t) = \exp\{-1/(t+1)\}$, якщо $t \in (-1; -1/2]$, $\theta_1(t) \geqslant \exp\{-2\}$, якщо $t \in (-1/2; 0)$, $\theta_1(t) = 1$, якщо $t \in [0; +\infty)$. Зауважимо, що

$$\sup_{\mathbb{R}} \theta_1'(t)\theta_1^{-\kappa}(t) \leqslant C, \tag{16}$$

де $0 < \kappa < 1$, C – стала, яка залежить тільки від κ.

Нехай $v \in V_{1,\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T)$. Доведемо фундаментальність послідовності $\{u^k\}_{k=1}^\infty$ в просторах $C((-\infty,T];L^2(D))$ та $V_{0,\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T)$. Позначимо $\omega^{k,l} = (u^k + u^l)/2$, $\theta(t) = \theta_1\left(\frac{t-t_1}{\delta}\right)$, $\delta > 0$. Так само, як в [28, с. 60] доводимо, що функції u^s, $s \in \{k,l\}$ задовольняють нерівність

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[(v-u^s)^2\theta'(t) + \Big[v_t(v-u^s) - \lambda(x,y,t)v_y(v-u^s) - \frac{\lambda_y(x,y,t)}{2}(v-u^s)^2 +$$
$$+ \sum_{|\alpha|=|\gamma|\leqslant m} a_{\alpha\gamma}(x,y,t)D^\alpha u^s(D^\gamma v - D^\gamma u^s) + g(x,y,t,u^s)(v-u^s) - F^s(v-u^s)\Big]\times$$
$$\times\theta(t)\Big]\,dx\,dy\,dt \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_D (v-u^s)^2\theta(t)\,dx\,dy\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} + \frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega \lambda(v-u^s)^2\theta(t)\,dx\,dt\Big|_{y=0}, \tag{17}$$

де $s \in \{k,l\}$, а $v \in V_{1,\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T)$, $v \in K$ для майже всіх $(y,t) \in \Pi_T$ та всіх $t_1 < t_2 \leqslant T$.

Додамо одержані нерівності для $s = k$ і $s = l$ та виберемо в отриманій нерівності $t_1 - \delta$ та ζ замість відповідно t_1 і t_2, де ζ – довільне число з проміжку $[t_1,t_2]$, а функцію $v = \omega^{k,l}$. Матимемо

$$\int\limits_{Q_{t_1-\delta,\zeta}} \Big[\frac{1}{2}(u^l-u^k)^2\theta'(t) + \Big[\frac{\lambda_y(x,y,t)}{4}(u^l-u^k)^2 + \frac{1}{2}\sum_{|\alpha|=|\gamma|\leqslant m} a_{\alpha\gamma}(x,y,t)(D^\alpha u^l - D^\gamma u^k)\times$$
$$\times(D^\gamma u^k - D^\gamma u^l) + \frac{1}{2}(g(x,y,t,u^l) - g(x,y,t,u^k))(u^k-u^l) - (F^k - F^l)(u^k-u^l)\Big]\times$$
$$\times\theta(t)\Big]\,dx\,dy\,dt \geqslant \frac{1}{4}\int\limits_D (u^l-u^k)^2\,dx\,dy\Big|_{t=\zeta} + \frac{1}{4}\int\limits_{t_1-\delta}^{\zeta}\int\limits_\Omega \lambda(u^l-u^k)^2\theta(t)\,dx\,dt\Big|_{y=0}. \tag{18}$$

Виберемо $T-k<t_1$, $T-l<t_1$. Тоді $f^k - f^l \equiv 0$. Із (17) випливає, що

$$\frac{1}{2}\int\limits_{Q_{t_1-\delta,\zeta}}(u^l-u^k)^2\theta'(t)\,dx\,dy\,dt \leqslant \frac{\delta_1}{p}\int\limits_{Q_{t_1-\delta,\zeta}}|u^l-u^k|^p\theta(t)\,dx\,dy\,dt + C_1[\delta_1\delta]^{-2/(p-2)},$$

де стала C_1 залежить тільки від κ, $\delta_1>0$. Використавши умови (A)-(L), із (18) отримаємо нерівність

$$\frac{1}{4}\int\limits_{D_\zeta}(u^k-u^l)^2\,dx\,dy + \frac{1}{4}\int\limits_{t_1-\delta}^{\zeta}\int\limits_{\Omega}\lambda(u^k(x,0,t)-u^l(x,0,t))^2\theta(t)\,dx\,dt +$$
$$+\int\limits_{Q_{t_1-\delta,\zeta}}\left[\frac{\lambda_y(x,y,t)}{4}(u^k-u^l)^2+\left(\frac{-\delta_1}{p}+\frac{g_0}{2}\right)|u^k-u^l|^p+\right.$$
$$\left.+\frac{a_0}{2}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u^k - D^\alpha u^l|^2\right]\theta(t)\,dx\,dy\,dt \leqslant C_1[\delta\delta_1]^{-2/(p-2)}. \qquad (19)$$

Виберемо $\delta_1=\frac{g_0 p}{4}$. Зафіксуємо $\varepsilon>0$ та виберемо δ таким, щоб права частина попередньої рівності була менша за ε. Тоді отримуємо фундаментальність послідовності $\{u^k\}_{k=1}^\infty$ в просторах $C((-\infty,T];L^2(D))$ та $V_{0,\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T)$, отже,

$$u^k\to u \text{ в } C((-\infty,T];L^2(D)); \qquad u^k\to u \text{ в } V_{0,\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T).$$

Оскільки f^k збігається до f в $L^{p'}_{\mathrm{loc}}((-\infty;T];L^{p'}(D))$, то за означенням 1, функція u є слабким розв'язком задачі Фур'є для варіаційної нерівності (1).

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми 2. Тоді нерівність (1) не може мати більше одного слабкого розв'язку.*

Доведення. Нехай існує два слабкі розв'язки u_1 і u_2 варіаційної нерівності (1). За означенням 2 існують послідовності $\{u_s^k\}_{k=1}^\infty$, $s=1,2$, які збігаються до u_s в просторі $V_{0,\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T)\cap C((-\infty,T];L^2(D))$ при $k\to\infty$, де u_s^k задовольняє нерівність

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}\{u_{st}^k(v-u_s^k)-\lambda(x,y,t)u_{sy}^k(v-u_s^k)+\sum_{|\alpha|=|\gamma|\leqslant m}a_{\alpha\gamma}(x,y,t)D^\alpha u_s^k(D^\gamma v - D^\gamma u_s^k)+$$
$$+g(x,y,t,u_s^k)(v-u_s^k)-f_k^s(x,y,t)(v-u_s^k)\}\,dx\,dy\,dt\geqslant 0,$$
$$s=1,2,\ v\in V_{0,\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T),\ v\in K \text{ для м. в. } (y,t)\in\Pi_T,$$

а послідовності $\{f_k^s\}_{k=1}^\infty$ збігаються до f у просторі $L^{p'}_{\mathrm{loc}}((-\infty;T];L^{p'}(D))$.

Так само, як в [28, с. 60] доводимо, що u_s^k задовольняє нерівність (18), в якій замість u_s записано u_s^k, а замість $F^k - f_s^k$, а $s\in\{1,2\}$. Позначимо $\omega_k^{1,2}=(u_1^k+u_2^k)/2$. Додамо одержані нерівності та виберемо $t_2=\tau$, $w=\omega_k^{1,2}$, $t_2\in(t_1,T]$. Матимемо

$$\int\limits_{Q_{t_1-\delta,\zeta}}\left[\frac{1}{2}(u_1^k-u_2^k)^2\theta'(t)+\left[-\frac{\lambda_y(x,y,t)}{4}(u_1^k-u_2^k)^2-\sum_{|\alpha|=|\gamma|\leqslant m}a_{\alpha\gamma}(x,y,t)(D^\alpha u_2^k - D^\alpha u_1^k)\times\right.\right.$$

$$\times(D^\gamma u_2^k - D^\gamma u_1^k) - (g(x,y,t,u_1^k) - g(x,y,t,u_2^k))(u_1^k - u_2^k) - (f_1^k - f_2^k)(u_2^k - u_1^k)\Big]\times$$

$$\times\theta(t)\Big]\,dx\,dy\,dt \geqslant \frac{1}{4}\int\limits_D (u_1^k - u_2^k)^2\,dx\,dy\Big|_{t=\zeta} + \frac{1}{4}\int\limits_{t_1-\delta}^{\zeta}\int\limits_\Omega \lambda(u_1^k - u_2^k)^2\theta(t)\,dx\,dt\Big|_{y=0}.$$

Аналогічно, як з формули (17), отримуємо нерівність

$$\frac{1}{4}\int\limits_{D_\zeta} (u_1^k - u_2^k)^2\,dx\,dy + \frac{1}{4}\int\limits_{t_1-\delta}^{\zeta}\int\limits_\Omega \lambda(u_1^k(x,0,t) - u_2^k(x,0,t))^2\theta(t)\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q_{t_1-\delta,\zeta}}\left[\frac{\lambda_y(x,y,t)}{4}(u_1^k - u_2^k)^2 + \left(\frac{-\delta_1}{p} + \frac{g_0}{2}\right)|u_1^k - u_2^k|^p + \frac{a_0}{2}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u_1^k - D^\alpha u_2^k|^2\right]\times$$

$$\times\theta(t)\,dx\,dy\,dt \leqslant C_1[\delta\delta_1]^{-2/(p-2)} + \int\limits_{Q_{t_1-\delta,\zeta}} |f_1^k - f_2^k|^{p'}\,dx\,dy\,dt. \qquad (20)$$

За нерівністю трикутника $\|f_2^k - f_1^k\|_{L^{p'}(Q_{t_1-\delta,\zeta})} \leqslant \|f_2^k - f\|_{L^{p'}(Q_{t_1-\delta,\zeta})} + \|f_1^k - f\|_{L^{p'}(Q_{t_1-\delta,\zeta})}$. Оскільки кожна з послідовностей $\{f_s^k\}_{k=1}^\infty$ збіжна до функції f у просторі $L^{p'}_{\mathrm{loc}}((-\infty,T);L^{p'}(D))$, то існує таке $k_0(\varepsilon)$, що для всіх $k > k_0$ норма $\|f_s^k - f\|_{L^{p'}(Q_{t_1-\delta,\zeta})} < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/p'}$. Тоді з (20) отримуємо $\|u_2^k - u_1^k\|_{C([t_0,T];L^2(D))} \leqslant \varepsilon$. Оскільки $\|u_2 - u_1\|_{C([t_0,T];L^2(D))} \leqslant \|u_2^k - u_2\|_{C([t_0,T];L^2(D))} + \|u_2^k - u_1^k\|_{C([t_0,T];L^2(D))} + \|u_1^k - u_1\|_{C([t_0,T];L^2(D))}$, то $\|u_2 - u_1\|_{C([t_0,T];L^2(D))} \leqslant \varepsilon$. Числа t_0 та ε довільні, тому $u_2 = u_1$. Теорему доведено.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови теореми 2 і, крім того,*

$$\int\limits_{Q_{t,t+1}} |f|^{p'}\,dx\,dy\,dt \leqslant C^0 \quad \forall t \in (-\infty, T-1].$$

Тоді існує така стала C^1, що слабкий розв'язок нерівності (1) задовольняє умову

$$\int\limits_{Q_{t,t+1}}\left[\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u|^2 + |u|^p\right]dx\,dy\,dt \leqslant C^1,\ t \in (-\infty, T-1].$$

Доведення. Розглянемо послідовність функцій $\{u^k\}_{k=1}^\infty$, яка є фундаментальною в просторі $V_{0,\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T) \cap C((-\infty,T];L^2(D))$ та задовольняє означення 2. Зараз покажемо, що ці функції є обмеженими за змінною t. Розіб'ємо $(-\infty;T]$ на інтервали $[j-1,j]$, $j = T, T-1, T-2, \ldots$

Позначимо через $t_j \in [j-1,j]$ таке, що

$$\sup_{[j-1,j]}\int\limits_{D_t} |u^k|^2\,dx\,dy = \int\limits_{D_{t_j}} |u^k|^2\,dx\,dy. \qquad (21)$$

У нерівності (2) виберемо $v \equiv 0$ і одержимо, що для довільних s і t, $s < t$

$$\int\limits_{Q_{s,t}} \Big[u_t^k u^k - \lambda(x,y,t) u_y^k u^k + \sum_{|\alpha|=|\gamma|\leqslant m} a_{\alpha\gamma}(x,y,t) D^\alpha u^k D^\gamma u^k + g(x,y,t,u^k) u^k - $$
$$ - f^k(x,y,t) u^k \Big] \, dx\, dy\, dt \leqslant 0.$$

Оцінивши кожний доданок як у випадку обмеженої області, одержимо оцінку

$$\int\limits_{D_t} |u^k|^2 \, dx\, dy + 2a_0 \int\limits_{Q_{s,t}} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u^k|^2 \, dx\, dy\, dt + g_0 \int\limits_{Q_{s,t}} |u^k|^p \, dx\, dy\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{D_s} |u^k|^2 \, dx\, dy + \frac{2}{pg_0} \int\limits_{Q_{s,t}} (f^k(x,y,t))^{p'} \, dx\, dy\, dt, \tag{22}$$

де C – стала.

Позначимо через $M = \gamma_{0,m} \frac{C_1}{\min\{2a_0, g_0\}} + C_1$, де $C_1 = \frac{2}{pg_0} \sup\limits_{s,t} \int\limits_{Q_{s,t}} |f|^{p'} \, dx\, dy\, dt$.

Покажемо, що $\int\limits_{D_{t_{j+2}}} |u^k|^2 \, dxdy \leqslant \max\{M, \int\limits_{D_{t_j}} |u^k|^2 \, dxdy\}$, де стала M не залежить від j і k.

Нехай $\int\limits_{D_{t_{j+2}}} |u^k|^2 \, dxdy > \int\limits_{D_{t_j}} |u^k|^2 \, dxdy$, (в іншому випадку доведення завершено). Запишемо (22) для $t = t_{j+2}$, $s = t_j$

$$g_0 \int\limits_{Q_{t_j,t_{j+2}}} |u^k|^p \, dx\, dy\, dt + \int\limits_{D_{t_{j+2}}} |u^k|^2 \, dx\, dy + 2a_0 \int\limits_{Q_{t,t_{j+2}}} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u^k|^p \, dx\, dy\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{D_{t_j}} |u^k|^2 \, dx\, dy + C_1, \tag{23}$$

де $C_1 = \frac{2}{pg_0} \sup\limits_{s,t} \int\limits_{Q_{s,t}} |f|^{p'} \, dx\, dy\, dt$. Оскільки виконується (21), то з (22) випливає, що

$$\int\limits_{Q_{s,t}} |u^k|^p \, dx\, dy\, dt + \int\limits_{Q_{t_j,t_{j+2}}} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u^k|^2 \, dx\, dy\, dt \leqslant C_2, \quad \text{де } C_2 = \frac{C_1}{\min\{2a_0, g_0\}}.$$

Звідси, врахувавши, що $t_{j+2} - t_j \leqslant 1$ випливає, що існує $\tau \in [t_j, t_{j+2}]$

$$\int\limits_{D_\tau} \Big[\sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u^k|^2 + |u^k|^p \Big] \, dx\, dy \leqslant C_2.$$

Оскільки $\int\limits_{D_\tau} |u^k|^2 \, dx\, dy \leqslant \gamma_{0,m} \int\limits_{D_\tau} \sum\limits_{|\alpha|=m} |D^\alpha u^k|^2 \, dxdy \leqslant \gamma_{0,m} C_2 \equiv C_3$. Запишемо (22) для $t = t_{j+2}$, $s = \tau$, отримаємо $\int\limits_{D_{t_{j+2}}} |u^k|^2 \, dxdt \leqslant C_3 + C_1 \equiv M, j = T-2, T-3, \ldots$

Тому з (22) випливає, що для довільного $t \in [j+1, j+2]$ вираз $\int\limits_{D_t} |u^k|^2 \, dxdt \leqslant C_4$. Запишемо (21) для проміжку $[t, t+1]$ і отримаємо

$$g_0 \int\limits_{Q_{t,t+1}} |u^k|^p \, dx\, dy\, dt + 2a_0 \int\limits_{Q_{t,t+1}} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u^k|^2 \, dx\, dy\, dt \leqslant C_4 + C_1 = C_5.$$

Звідси випливає, що $\int\limits_{Q_{t,t+1}} \left[|u^k|^p + \sum\limits_{|\alpha|=m} |D^\alpha u^k|^2 \right] dx\, dy\, dt \leqslant C^1,\ t \in (-\infty, T-1]$. Оскільки послідовність $\{u^k\}_{k=1}^{\infty}$ є фундаментальною в $V_{0,\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T) \cap C((-\infty, T]; L^2(D))$, то $\int\limits_{Q_{t,t+1}} \left[\sum\limits_{|\alpha|=m} |D^\alpha u^k|^2 + |u|^p \right] dx\, dy\, dt \leqslant C^1,\ t \in (-\infty, T-1]$. Теорему доведено.

Позначимо $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ – зовнішня нормаль до S, $S_{t_1,t_2} = S \cap \{(t_1, t_2)\}$, $S_{2,t_1,t_2} = S_2 \cap \{(t_1, t_2)\}$.

Наведемо деякі приклади розв'язності задачі Фур'є для слабко нелінійних ультрапараболічних рівнянь четвертого порядку.

Нехай у нерівності (1) число m дорівнює 4, тобто, розглядатимемо нерівність

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Bigg[u_t(v-u) - \lambda(x,y,t) u_y (v-u) + \sum_{i,j,r,l=1}^{n} a_{ijrl}(x,y,t) u_{x_i x_j} (v_{x_r x_l} - u_{x_r x_l}) +$$
$$+ g(x,y,t,u)(v-u) - f^k(x,y,t)(v-u) \Bigg] dx\, dy\, dt \geqslant 0.$$

Позначимо через $A_1 u = \sum\limits_{i,j,r,l=1}^{n} a_{ijrl,x_l} u_{x_i x_j} \nu_r$, $A_2 u = \sum\limits_{i,j,r,l=1}^{n} a_{ijrl} u_{x_i x_j x_l} v \nu_r$, $A_3^r u = \sum\limits_{i,l,j=1}^{n} a_{ijrl}(x,y,t) u_{x_i x_j} \nu_l$. де $A_1 u$, $A_2 u$, A_3^r розумітимемо в сенсі розподілів [13, с. 216]. Тоді останню нерівність запишемо так:

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Bigg[u_t(v-u) - \lambda(x,y,t) u_y (v-u) + \sum_{i,j,r,l=1}^{n} (a_{ijrl}(x,y,t) u_{x_i x_j})_{x_r x_l} (v-u) +$$
$$+ g(x,y,t,u)(v-u) - f^k(x,y,t)(v-u) \Bigg] dx\, dy\, dt + \int\limits_{S_{2,t_1,t_2}} \sum_{r=1}^{n} A_3^r u \cdot (v-u)_{x_r} \, dS -$$
$$- \int\limits_{S_{2,t_1,t_2}} A_1 u \cdot (v-u) \, dS - \int\limits_{S_{2,t_1,t_2}} A_2 u \cdot (v-u) \, dS \geqslant 0.$$

Нехай K – конус. Тоді нерівність (1) еквівалентна системі

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Bigg[u_t v - \lambda(x,y,t) u_y v + \sum_{i,j,r,l=1}^{n} (a_{ijrl}(x,y,t) u_{x_i x_j})_{x_r x_l} v + g(x,y,t,u) v -$$

$$-f(x,y,t)v\Big]\,dx\,dy\,dt+\int\limits_{S_{2,t_1,t_2}}\sum_{r=1}^{n}A_3^r u\cdot v_{x_r}\,dS-\int\limits_{S_{2,t_1,t_2}}A_1u\cdot v\,dS-\int\limits_{S_{2,t_1,t_2}}A_2u\cdot v\,dS\geqslant 0,$$

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}\Big[u_tu-\lambda(x,y,t)u_yu+\sum_{i,j,r,l=1}^{n}(a_{ijrl}(x,y,t)u_{x_ix_j})_{x_rx_l}u+g(x,y,t,u)u-$$

$$-f(x,y,t)u\Big]\,dx\,dy\,dt+\int\limits_{S_{2,t_1,t_2}}\sum_{r=1}^{n}A_3^r u\cdot u_{x_r}\,dS-\int\limits_{S_{2,t_1,t_2}}A_1u\cdot u\,dS-\int\limits_{S_{2,t_1,t_2}}A_2u\cdot u\,dS=0 \qquad (24)$$

для довільних $t_1,\ t_2\in(-\infty,T]$. Якщо $C_0^\infty(\Omega)\subset K$, то ця система еквівалентна системі

$$\int\limits_{S_{2,t_1,t_2}}\left[\sum_{r=1}^{n}A_3^r u\cdot v_{x_r}-A_1u\cdot v-A_2u\cdot v\right]dS\geqslant 0,$$

$$\int\limits_{S_{2,t_1,t_2}}\left[\sum_{r=1}^{n}A_3^r u\cdot u_{x_r}-A_1u\cdot u-A_2u\cdot u\right]dS=0 \qquad (25)$$

та рівнянню

$$u_t-\lambda(x,y,t)u_y+\sum_{i,j,r,l=1}^{n}(a_{ijrl}(x,y,t)u_{x_ix_j})_{x_rx_l}+g(x,y,t,u)=f(x,y,t). \qquad (26)$$

Означення 4. *Функцію u таку, що $u\in K$ для майже всіх $(y,t)\in\Pi_T$ назвемо слабким розв'язком задачі без початкових умов для рівняння (26), якщо вона є границею в просторі $V_{0,\mathrm{loc}}(\overline{Q}_{k,\tau})$ функцій $\{u^k\}_{k=1}^\infty$ таких, що для всіх $k\in\mathbb{N}$, $u^k\in V_0(Q_{k,\tau})$, $u^k\in K$ для майже всіх $(y,t)\in\Pi_T$ і u^k задовольняє рівність*

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}\Big[vu_t-\lambda(x,y,t)u_yv+\sum_{i,j,r,l=1}^{n}a_{ijrl}(x,y,t)u_{x_ix_j}v_{x_rx_l}+g(x,y,t,u)v-$$

$$-f^k(x,y,t)v\Big]\,dx\,dy\,dt=0, \qquad (27)$$

для всіх $v\in V_{1,\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T)$, $v\in K$ для майже всіх $(y,t)\in\Pi_T$, і задовольняє певні крайові умови, а послідовність $\{f^k\}_{k=1}^\infty$ є збіжною до функції f в $L^{p'}([0,T];L^{p'}_{\mathrm{loc}}(D))$.

Приклад. Виберемо $W(\Omega)=W_1(\Omega)$, $K=\{v\in W_1(\Omega),\ \ v\geqslant 0$ на $\Gamma_2,\ v_{x_i}=0$ на Γ_2 , $i=\overline{1,n}\}$. При так вибраному K виконується вкладення $C_0^\infty(\Omega)\subset K$, а, отже, виконуються і (25), (26). Тобто, $u\geqslant 0$ на S_2, $u_{x_i}=0$ на S_2, $i=\overline{1,n}$ і $A_1u|_{S_2}\leqslant 0$, $A_2u|_{S_2}\leqslant 0$, $A_1u\cdot u|_{S_2}=0$, $A_2u\cdot u|_{S_2}=0$.

Отже, функція u є слабким розв'язком задачі

$$u_t-\lambda(x,y,t)u_y+\sum_{i,j,r,l=1}^{n}\big(a_{ijrl}(x,y,t)u_{x_ix_j}\big)_{x_rx_l}+g(x,y,t,u)=f(x,y,t),$$

$u \geqslant 0$ на S_2, $u_{x_i} = 0$ на S_2, $i = \overline{1,n}$, $A_1 u|_{S_2} \leqslant 0$, $A_2 u|_{S_2} \leqslant 0$, $A_1 u \cdot u|_{S_2} = 0$, $A_2 u \cdot u|_{S_2} = 0$, $u(x, y_0, t) = 0$.

---

1. *Генчев Т. Г.* Об ультрапараболических уравнениях // Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 151. – N 2. – С. 265-268.
2. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. – М., 1977.
3. *Баруча-Рид А. Т.* Элементы теории марковских процессов и их приложения. – М., 1969.
4. *Polidoro S.* On the regularity of solutions to a nonlinear ultraparabolic equation arising in mathematical finance// Nonlinear Analysis. – 2001. – Vol. 47. – P. 491-502.
5. *Дронь В. С., Івасишен С. Д.* Властивості фундаментальних розв'язків і теореми єдиності розв'язків задачі Коші для одного класу ультрапараболічних рівнянь // Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50. – N 11. – С. 1482-1496.
6. *Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.* Об интегральном представлении решений вырожденных уравнений типа Колмогорова с $2\vec{b}$-параболической частью по основной группе переменных // Дифференциальные уравнения. – 2000. – Т. 36. – N 5. – С. 647-655.
7. *Дронь В. С.* Про коректну розв'язність у вагових просторах Гельдера задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. – Вип. 76. Математика. Чернівці, ЧДУ, 2000. – С. 32-42.
8. *Орлова С. А.* О первой краевой задаче для прямо и обратно ультрапараболического уравнения // Сиб. мат. журн. – 1990. – Т. 31. – N 6. – С. 211-215.
9. *Терсенов С. А.* О краевых задачах для одного класса ультрапараболических уравнений и их приложения // Мат. сб. – 1987. – Т. 133 (175). – N 4 (8). – С. 539-555.
10. *Ragusa M. A.* On weak solutions of ultraparabolic equations// Nonlinear Analysis. – 2001. – Vol. 47. – P. 503-511.
11. *Schonbek M. E., Süli E.* Decay of the total variation and Hardy norms of solutions to parabolic conservation laws// Nonlinear Analysis. – 2001. – Vol. 45. – P. 515-528.
12. *Suvorov S. G.* Nonlinear ultraparabolic equations in general domains // Nonlinear boundary value problems. – 1997. – N 7. – P. 180-188.
13. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., 1972.
14. *Процах Н. П.* Мішана задача для нелінійного ультрапараболічного рівняння // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр.– Вип. 134. Математика. Чернівці, ЧДУ, 2002. – С. 97-103.
15. *Лавренюк С. П., Процах Н. П.* Задача Фур'є для ультрапараболічного рівняння // Нелинейные граничные задачи. – 2002. – Вып. 12. – С. 128-139.
16. *Барабаш Г. М., Лавренюк С. П., Процах Н. П.* Мішана задача для напівлінійного

ультрапараболічного рівняння // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2002. – N 4. – Т. 45 – С. 27-34.

17. *Городецкий В. В., Житарюк И. В.* Стабилизация решений задачи Коши для одного класса вырождающихся параболических уравнений в пространствах обобщенных функций // Нелинейн. граничн. задачи. – 1993. – Вып. 5. – С. 31-36.

18. *Ивасишен С. Д., Андросова Л. М.* Об интегральном представлении решений одного класса вырожденных параболических уравнений типа Колмогорова // Дифференциальные уравнения. – 1991. – Т. 27. – N 3. – С. 479-487.

19. *Івасишен С. Д., Андросова Л. М.* Принцип локалізації для розв'язків деяких вироджених параболічних рівнянь // Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями: Зб. наук. праць. Відп. ред. Івасишен С. Д. – Чернівці, 1990. – С. 48-61.

20. *Івасишен С. Д., Андросова Л. М.* Про інтегральне зображення та початкові значення розв'язків деяких параболічних рівнянь, що вироджуються // Доп. АН УРСР. Сер. А. Фіз.-мат. та техн. науки. – 1989. – N 1. – С. 16-18.

21. *Малицкая А. П.* Построение фундаментальных решений некоторых ультрапараболических уравнений высокого порядка // Укр. мат. журн. – 1985. – Т. 37. – N 6. – С. 713-719.

22. *Лавренюк С. П., Процах Н. П.* Варіаційні ультрапараболічні нерівності // Укр. мат. журн. – 2004. – Т. 56. – N 12. – С. 1616-1628.

23. *Лавренюк С. П., Процах Н. П.* Варіаційні ультрапараболічні нерівності без початкових умов // Математичні студії. – 2005. – Т. 23. – N 1. – С. 57-67.

24. *Lax P.D., Phillips R.S.* Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators // Comm. Pure and Appl. Math. – 1960. – Vol. 13.– P. 427-455.

25. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М., 1978.

26. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М., 1958.

27. *Бокало Н. М.* О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений // Труды семинара им. И. Г. Петровского. – М., 1989. – Вып. 14. – С. 3-44.

28. *Bokalo M. M.* Well-posedness of problems without initial conditions for nonlinear parabolic variational inequalities without initial data // Nonlinear boundary value problems. – 1998. – Issue 8. – P. 58-63.

SOLUTIONS OF THE PROBLEM WITHOUT INITIAL CONDITIONS FOR SEMILINEAR ULTRAPARABOLIC INEQUALITY OF HIGH ORDER

Nataliya Protsakh

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, Naukova Str., 3b 79060 Lviv, Ukraine

The variational semilinear ultraparabolic inequality of high order on the space variables

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[u_t(v-u) - \lambda(x,y,t)u_y(v-u) + \sum_{|\alpha|=|\gamma|\leqslant m} a_{\alpha\gamma}(x,y,t)D^\alpha u(D^\gamma v - D^\gamma u) +$$

$$+g(x,y,t,u)(v-u) - f(x,y,t)(v-u)\Big]\,dx\,dy\,dt \geqslant 0,$$

for all $t_1 < t_2 \leqslant T$ is considered in the bounded or unbounded on the time variable domains.

Conditions of existence and the uniqueness of this inequality are investigated without any restrictions on the grows of the initial functions. Some properties of the solution are proved.

Key words: ultraparabolic variational inequality, Fourier problem.

Стаття надійшла до редколегії 04.06.2004

Прийнята до друку 19.10.2005