ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2005. Вип.64. С.218–235

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2005. Vol.64. P.218–235

УДК 517.95

МІШАНА ЗАДАЧА В НЕОБМЕЖЕНІЙ ЗА ПРОСТОРОВИМИ ЗМІННИМИ ОБЛАСТІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Петро ПУКАЧ

Національний університет "Львівська політехніка", вул. С. Бандери, 12 79013 Львів, Україна

Досліджено першу мішану задачу для слабко нелінійної гіперболічної системи другого порядку в необмеженій за просторовими змінними області. Розглянута система є певним узагальненням системи нелінійних хвильових рівнянь $u_{tt} - \sigma\Delta u + |u_t|^{p-2}u_t = f(x,t)$, $\quad p > 2$, яку вивчають у теорії пружності. Досліджено випадок зростання коефіцієнта σ при $|x| \to \infty$. Отримано умови існування та єдиності узагальненого розв'язку. Зазначені класи існування та єдиності є просторами локально інтегровних функцій.

Ключові слова: нелінійна гіперболічна система другого порядку, метод Гальоркіна.

1. Формулювання задачі та огляд літератури. У цій праці досліджено першу мішану задачу для слабко нелінійної гіперболічної системи другого порядку

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n}(A_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n}(A_i(x,t)u_t)_{x_i} +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}B_i(x,t)u_{x_i} + C(x,t)u + G(x,t,u_t) = F(x,t) \tag{1}$$

в необмеженій за просторовими змінними області. Система (1) моделює коливні процеси у середовищі з опором [1]. Рівняння та системи вигляду (1) вивчають у теорії пружності (див. для прикладу [2–4]). Зокрема, в [2] досліджено асимптотичну поведінку розв'язку мішаної задачі для лінійної системи $u_{tt} - \mu\Delta u - (\lambda - \mu)\nabla div(u) + q(x,t)u = 0$, де $x \in \mathbf{R}^3$, $t \in \mathbf{R}$, λ, μ – коефіцієнти Ляме, функція $q : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ моделює наявність так званих проміжних домішок. Вивчено питання існування та розповсюдження резонансу залежно від властивостей функції q. В [5] досліджено коректність узагальненого розв'язку мішаної задачі в обмеженій області для системи вигляду (1) за умов $A_i \equiv 0$, $B_i \equiv 0$, $i = 1, ..., n$, $C \equiv 0$, $G(x,t,u_t) = |u_t|^{p-2} u_t$, $p > 2$, отримано L^p – оцінки градієнта розв'язку. Праця [6] присвячена вивченню зростаючих (залежно від форми нелінійного члена) розв'язків слабко нелінійних хвильових рівнянь, в [7] досліджено систему нелінійних хвильових рівнянь в обмеженій області.

Задачі для слабко нелінійних гіперболічних рівнянь і систем вигляду $u_{tt} - \sum\limits_{i,j=1}^{n} (a_{ij}u_{x_i})_{x_j} + A(u) = f$, A – нелінійний оператор, у необмежених областях розглядали у працях [8–19]. Припускали обмеженість коефіцієнтів a_{ij} еліптичного оператора. Деякі результати існування єдиного розв'язку задач у необмежених областях у цих працях отримано в припущенні певної якісної поведінки розв'язку, початкових даних та правої частини рівняння на нескінченності, інші результати – без таких припущень. У [20] вивчено мішану задачу для слабко нелінійної системи гіперболічних рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними. Праця [21] присвячена дослідженню першої мішаної задачі для слабко нелінійного гіперболічного рівняння другого порядку в необмеженій області. Розглянуто випадок зростання на нескінченності коефіцієнтів еліптичного оператора. Отримано умови існування та єдиності узагальненого розв'язку в просторах локально інтегровних функцій. Зазначимо, що при обґрунтуванні відповідних результатів у цій праці використано певну ідею праць [22, 23], в яких розглянуто задачі для параболічного рівняння в необмеженій області.

Мета нашої праці – дослідити випадок зростаючих при $|x| \to \infty$ коефіцієнтів еліптичного оператора системи (1). Порядок зростання цих коефіцієнтів залежить від показника нелінійності p функції G та розмірності області. Отримано умови існування та єдиності узагальненого розв'язку мішаної задачі без обмежень на поведінку при $|x| \to \infty$ розв'язку, правої частини системи та початкових даних.

В області $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $0 < T < \infty$ розглядаємо для системи (1) мішану задачу з початковими умовами

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \tag{2}$$

$$u_t|_{t=0} = \varphi_1(x) \tag{3}$$

та крайовою умовою

$$u|_S = 0, \tag{4}$$

де $S = \partial\Omega \times (0,T)$ – бічна поверхня області Q_T. У системі (1) квадратні матриці A_{ij}, A_i, B_i $(i,j = 1, ..., n)$ та матриця C – дійснозначні і мають порядок $m \in \mathbf{N}$, $u = \mathrm{col}(u_1, ..., u_m)$, $G = \mathrm{col}(G_1, ..., G_m)$, $F = \mathrm{col}(F_1, ..., F_m)$, $\varphi_0 = \mathrm{col}(\varphi_{01}, ..., \varphi_{0m})$, $\varphi_1 = \mathrm{col}(\varphi_{11}, ..., \varphi_{1m})$.

Припускаємо, що область Ω має такі властивоті:
1) Ω – необмежена область з гладкою межею $\partial\Omega$ класу C^1;
2) $\Omega^R = \Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| < R\}$ – зв'язна множина для довільного $R > 1$ з регулярною за Кальдероном [24, с. 45] межею $\partial\Omega^R$.

Зауваження 1. Зокрема, опукла область Ω задовольняє усі зазначені умови [24, с. 46, заув. 1.11].

Позначимо $Q_\tau = \Omega\times(0,\tau)$, $Q_\tau^R = \Omega^R\times(0,\tau)$, $\Omega_\tau^R = Q_T^R\cap\{t|\,t = \tau\}$, $\Omega_\tau = Q_T\cap\{t|\,t = \tau\}$ для довільних $\tau \in [0,T]$, $R > 1$, $\partial\Omega^R = \Gamma_1^R \cup \Gamma_2^R$, $\Gamma_1^R = \partial\Omega \cap \partial\Omega^R$, $\Gamma_2^R = \partial\Omega^R \setminus \Gamma_1^R$.

Використовуємо такі функціональні простори:

$$H^1_{0,\Gamma_1^R}(\Omega^R) = \left\{v \in H^1(\Omega^R) : v|_{\Gamma_1^R} = 0\right\},$$

$$H^1_{0,loc}(\overline{\Omega}) = \left\{v : v \in H^1_{0,\Gamma_1^R}(\Omega^R) \ \ \forall R > 1\right\},$$

$$L^r_{loc}(\overline{\Omega}) = \left\{v : v \in L^r(\Omega^R)\ \forall R > 1\right\},\ r \in (1, +\infty).$$

Всюди надалі через V' позначено простір, спряжений до простору V, символ D^* позначає матрицю, транспоновану до D, $\|D\|$ – евклідову норму матриці D, а $\mu * \nu$ – згортку за змінною t.

Стосовно коефіцієнтів, правої частини системи (1) та початкових даних припускатимемо виконання таких умов.

(A) $\max\limits_{i,j} \operatorname*{esssup}\limits_{x\in\Omega^R} \|A_{ij}(x)\| \le a_1 R^\alpha$ для довільного $R > 1$, $a_1 > 0$, причому $0 \le \le \alpha < 1 - \frac{(p-2)n}{2p}$, $p > 2$, $i,j = 1,\dots,n$; $A_{ij}(x) = A^*_{ij}(x)$ для майже всіх $x \in \Omega$; для довільних векторів $\xi_l = (\xi_{1l},\dots,\xi_{ml}) \in \mathbf{R}^m$ та для майже всіх $x \in \Omega$ виконується умова $\sum\limits_{i,j=1}^n (A_{ij}(x)\xi_i,\xi_j) \ge a_0 \sum\limits_{i=1}^n |\xi_i|^2$, $a_0 > 0$.

$(\mathbf{A}_0)$ $\max\limits_i \operatorname*{esssup}\limits_{(x,t)\in Q_T^R} \|A_i(x,t)\| \le a_2\, R^\alpha$ для довільного $R > 1$; елементи a^{kl}_{i,x_i} матриць A_{i,x_i} належать до простору $L^\infty(Q_T)$ для довільних $i = 1,\dots,n$ та $k,l = 1,\dots,m$.

(B) Елементи b_i^{kl} матриць B_i належать до простору $L^\infty(Q_T)$ для довільних $i = = 1,\dots,n$ та $k,l = 1,\dots,m$.

(C) Елементи c^{kl} $(k,l = 1,\dots,m)$ матриці C належать до простору $L^\infty((0,T); L^\infty_{loc}(\overline{\Omega}))$, елементи $c^{kl}_t(k,l = 1,\dots,m)$ матриці C_t належать до простору $L^\infty(Q_T)$, причому $C(x,t) = C^*(x,t)$, $(C\xi,\xi) \ge c_1|\xi|^2$, $c_1 \geqslant 0$ для довільного вектора $\xi \in \mathbf{R}^m$ та для майже всіх $(x,t) \in Q_T$.

(G) Функції $G_i(x,t,\eta)(i = 1,\dots,m)$ – вимірні за x, неперервні за t,η, причому для довільних $\xi,\eta \in \mathbf{R}^m$ та для майже всіх $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$ виконуються умови: $((G(x,t,\xi) - G(x,t,\eta)),\xi - \eta) \ge g_0|\xi - \eta|^p$, де $p > 2$, $g_0 = \text{const} > 0$, $|G_i(x,t,\eta)| \le \le g_1 \sum\limits_{j=1}^m |\eta_j|^{p-1}$, $g_1 = \text{const} > 0$.

(F) $F \in \left(L^q((0,T); L^q_{loc}(\overline{\Omega}))\right)^m$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

(U) $\varphi_0 \in \left(H^1_{0,loc}(\overline{\Omega})\right)^m$, $\varphi_1 \in \left(L^2_{loc}(\overline{\Omega})\right)^m$.

Означення 1. *Узагальненим розв'язком задачі (1)–(4) називаємо функцію* $u = col(u_1, ..., u_m)$ *з простору* $\left(C([0,T]; H^1_{0,loc}(\overline{\Omega}))\right)^m$ *таку, що*

$$u_t \in \left(C\left([0,T]; (H^1_{0,loc}(\overline{\Omega}) \cap L^p_{loc}(\overline{\Omega}))'\right)\right)^m \cap \left(L^p((0,T); L^p_{loc}(\overline{\Omega}))\right)^m,$$

яка задовольняє умови (2), (4) та інтегральну тотожність

$$\int\limits_{Q_\tau}\left[-(u_t, v_t) + \sum_{i,j=1}^{n}(A_{ij}(x)u_{x_i}, v_{x_j}) - \sum_{i=1}^{n}(A_i(x,t)u_t, v_{x_i})\right]dxdt +$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\left[\sum_{i=1}^{n}(B_i(x,t)u_{x_i}, v) + (C(x,t)u, v) + (G(x,t,u_t), v) - (F, v)\right]dxdt +$$

$$+\int\limits_{\Omega}(u_t(x,\tau), v(x,\tau))\,dx - \int\limits_{\Omega}(\varphi_1(x), v(x,0))\,dx = 0 \qquad (5)$$

для довільного $\tau \in (0,T]$ *і для довільної функції* $v = col(v_1, ..., v_m)$ *з компактним носієм такої, що* $v \in \left(L^2((0,T); H^1_{0,loc}(\overline{\Omega}))\right)^m \cap \left(L^p((0,T); L^p_{loc}(\overline{\Omega}))\right)^m$, $v_t \in \left(L^2((0,T); L^2_{loc}(\overline{\Omega}))\right)^m$.

Для подальшого викладення необхідно дослідити класи коректності задачі (1)–(4) в обмеженій області. Нехай $D_T = \Sigma \times (0,T)$, $0 < T < \infty$, $\Sigma \subset \mathbf{R}^n$ – обмежена область з регулярною межею $\partial\Sigma$, $\partial\Sigma \times (0,T)$ – бічна поверхня області D_T. В області D_T розглядаємо для системи (1) мішану задачу з початковими умовами (2), (3) та крайовою умовою

$$u|_{\partial\Sigma\times(0,T)} = 0. \qquad (6)$$

Означення 2. *Узагальненим розв'язком задачі (1)–(3), (6) називаємо функцію* $u \in (C([0,T]; H^1_0(\Sigma)))^m$ *таку, що* $u_t \in \left(C\left([0,T]; (H^1_0(\Sigma) \cap L^p(\Sigma))'\right)\right)^m \cap (L^p((0,T); L^p(\Sigma)))^m$, *яка задовольняє умови (2), (6) та інтегральну тотожність (5), в якій* Q_τ *замінено на* D_τ, *для довільної функції* v *такої, що* $v \in (L^2((0,T); H^1_0(\Sigma)))^m \cap (L^p((0,T); L^p(\Sigma)))^m$, $v_t \in (L^2((0,T); L^2(\Sigma)))^m$.

2. Допоміжні результати.

Лема 1. *Нехай виконуються умови* **(A)** – **(G)** *і* $u = col(u_1, ..., u_m)$ *та* $u^{(0)} = col(u_1^{(0)}, ..., u_m^{(0)})$ – *узагальнені розв'язки задачі (1)–(4) з правими частинами* F *і* F^0 *відповідно. Тоді для довільних* τ, R, R_0 *таких, що* $1 < R_0 < R$, $\tau \in (0,T]$, *правильна оцінка*

$$\int\limits_{\Omega_\tau^{R_0}}\left[\left|u_t - u_t^{(0)}\right|^2 + \sum_{i=1}^{n}\left|\left(u_{x_i} - u_{x_i}^{(0)}\right)\right|^2\right]dx + \int\limits_{Q_\tau^{R_0}}\left|u_t - u_t^{(0)}\right|^p dxdt \le$$

$$\leq \left(\frac{R}{R-R_0}\right)^{\beta}\left(C_1 R^{n+(\alpha-1)\frac{2p}{p-2}} + C_2 \int\limits_{Q_\tau^R} \left|F - F^0\right|^q dxdt\right), \tag{7}$$

де $\beta > \frac{2p}{p-2}$, C_1, C_2 *– додатні сталі, що залежать лише від* n, p, β.

Доведення. Нехай $R > R_0 > 1$, $\tau \in (0,T]$ – довільні числа. Розглянемо функцію $\varphi_R(x) = \begin{cases} \frac{R^2-|x|^2}{R}, |x| \leq R, \\ 0, |x| > R. \end{cases}$ Зауважимо, що

$$R - |x| \leq \varphi_R(x) \leq 2(R - |x|). \tag{8}$$

Приймемо $w = u - u^{(0)}$. Зафіксуємо $s_0, s_1 \in [0,T]$, $s_0 < s_1$. Нехай θ_k – неперервна кусково лінійна функція на $[0,T]$, $\theta_k = 0$ при $t > s_1 - \frac{1}{k}$ та при $t < s_0 + \frac{1}{k}$, $\theta_k = 1$, якщо $s_0 + \frac{2}{k} < t < s_1 - \frac{2}{k}$, $k = 1,2,...$ Нехай ρ_l – регуляризуюча послідовність у просторі нескінченно диференційовних в $\mathbf{R}$ функцій з компактним носієм така, що

$$\rho_l(t) = \rho_l(-t), \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_l(t)dt = 1, \quad \text{supp}\, \rho_l \subset \left[-\frac{1}{l}, \frac{1}{l}\right], \quad l \in \mathbf{N}.$$

Приймемо $v = ((\theta_k w_t) * \rho_l * \rho_l)\theta_k \varphi_R^{\beta}$, $\beta > \frac{2p}{p-2}$ та віднімемо від інтегральної рівності для функцій u, F, аналогічної до (5), відповідну інтегральну рівність для $u^{(0)}$, F^0. Проведемо процедуру регуляризації, описану в [1, с. 238–239]. Після граничного переходу при $l \to \infty$, $k \to \infty$ одержимо

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau^R} \left[|w_t|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} \left(A_{ij}(x) w_{x_i}, w_{x_j}\right)\right] \varphi_R^{\beta} dx +$$

$$+ \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i,j=1}^{n} (A_{ij}(x) w_{x_i}, w_t) \left(\varphi_R^{\beta}\right)_{x_j} dxdt \; - \int\limits_{Q_\tau^R} \left(F - F^0, w_t\right) \varphi_R^{\beta} dxdt +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^{n} (A_{i,x_i}(x,t) w_t, w_t) \varphi_R^{\beta} dxdt -$$

$$- \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^{n} (A_i(x,t) w_t, w_t) \left(\varphi_R^{\beta}\right)_{x_i} dxdt +$$

$$+ \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^{n} (B_i(x,t) w_{x_i}, w_t) \varphi_R^{\beta} dxdt + \int\limits_{Q_\tau^R} (C(x,t) w, w_t) \varphi_R^{\beta} dxdt +$$

$$+ \int\limits_{Q_\tau^R} \left(G(x,t,u_t) - G(x,t,u_t^{(0)}), u_t - u_t^{(0)}\right) \varphi_R^{\beta} dxdt = 0. \tag{9}$$

Враховуючи умови леми, оцінимо інтеграли рівності (9)

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau^R}\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}(x)w_{x_i},w_{x_j}\varphi_R^\beta\right)dx \geq \frac{a_0}{2}\int\limits_{\Omega_\tau^R}\sum_{i=1}^{n}|w_{x_i}|^2\varphi_R^\beta dx,$$

$$\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^{n}\left(B_i(x,t)w_{x_i},w_t\varphi_R^\beta\right)dxdt \leq b\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^{n}|(w_{x_i},w_t)|\,\varphi_R^\beta dxdt \leq$$

$$\leq b\left(\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^{n}|w_{x_i}|^2\varphi_R^\beta dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^2\varphi_R^\beta dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq M_1\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^{n}|w_{x_i}|^2\varphi_R^\beta dxdt + \delta_1\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^p\,\varphi_R^\beta dxdt,$$

де $b=\max\limits_i \operatorname*{esssup}\limits_{(x,t)\in Q_T}\|B_i(x,t)\|$, δ_1 – довільна достатньо мала додатна стала, M_1 – деяка додатна стала, що залежить від n, p, β, b, δ_1. Зауважимо, що в цій оцінці використано нерівність Гельдера.

Крім того, згідно з умовами **(A)** та $(\mathbf{A}_0)$

$$\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}(x)w_{x_i},w_t\right)\left(\varphi_R^\beta\right)_{x_j}dxdt \leq$$

$$\leq na_1\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^{n}|(w_{x_i},w_t)|\,\frac{\varphi_R^{\frac{\beta}{2}}\varphi_R^{\frac{\beta}{p}}}{\varphi_R^{\frac{\beta}{2}+\frac{\beta}{p}}}\left|(\varphi_R^\beta)_{x_i}\right|R^\alpha dxdt \leq$$

$$\leq na_1\left(\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^{n}|w_{x_i}|^2\varphi_R^\beta dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^p\,\varphi_R^\beta dxdt\right)^{\frac{1}{p}}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{Q_\tau^R}\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\varphi_R^\beta\right)_{x_i}R^\alpha}{\varphi_R^{\frac{\beta}{2}+\frac{\beta}{p}}}\right|^{p_1}dxdt\right)^{\frac{1}{p_1}} \leq$$

$$\leq M_2\delta_2T\int\limits_{\Omega_\tau^R}\sum_{i=1}^{n}|w_{x_i}|^2\varphi_R^\beta dx + \delta_3\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^p\,\varphi_R^\beta dxdt +$$

$$+M_3(\delta_2,\delta_3)\int\limits_{Q_\tau^R}\varphi_R^{\beta-p_1}R^{\alpha p_1}dxdt \leq M_2\delta_2T\int\limits_{\Omega_\tau^R}\sum_{i=1}^{n}|w_{x_i}|^2\varphi_R^\beta dx +$$

$$+\,\delta_3\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^p\,\varphi_R^\beta dxdt+M_4R^{\beta+(\alpha-1)\frac{2p}{p-2}+n},$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^n(A_{i,x_i}(x,t)w_t,w_t)\varphi_R^\beta dxdt\le\frac{na_3}{2}\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^2\,\varphi_R^\beta dxdt,$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^n(A_i(x,t)w_t,w_t)\left(\varphi_R^\beta\right)_{x_i}dxdt\le\;M_5\delta_4\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^n|w_t|^2\varphi_R^\beta dxdt+$$

$$+\,\delta_5\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^p\,\varphi_R^\beta dxdt+M_6R^{\beta+(\alpha-1)\frac{2p}{p-2}+n},$$

де $a_3=\max\limits_i\operatorname*{esssup}\limits_{(x,t)\in Q_T}\|A_{i,x_i}(x,t)\|$, $p_1=\frac{2p}{p-2}$, δ_2, δ_3, δ_4, δ_5 – довільні достатньо малі додатні сталі, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 – деякі додатні сталі, що залежать від n, p, β.

Інші інтеграли рівності (9) оцінимо на підставі умов **(G)**, **(F)** і **(C)**

$$\int\limits_{Q_\tau^R}\left(G(x,t,u_t)-G(x,t,u_t^{(0)}),u_t-u_t^{(0)}\right)\varphi_R^\beta dxdt\ge g_0\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^p\,\varphi_R^\beta dxdt,$$

$$\int\limits_{Q_\tau^R}(C(x,t)w,w_t)\,\varphi_R^\beta dxdt=\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau^R}(C(x,t)w,w)_t\,\varphi_R^\beta dxdt-$$

$$-\,\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau^R}(C_t(x,t)w,w)\,\varphi_R^\beta dxdt\ge$$

$$\ge\frac{c_1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau^R}|w|^2\,\varphi_R^\beta dx-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau^R}(C_t(x,t)w,w)\,\varphi_R^\beta dxdt\ge$$

$$\ge\frac{c_1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau^R}|w|^2\,\varphi_R^\beta dx-\frac{c_2}{2}\int\limits_{Q_\tau^R}|w|^2\,\varphi_R^\beta dxdt,$$

$$\int\limits_{Q_\tau^R}\left(F-F^0,w_t\right)\varphi_R^\beta dxdt\le M_7\int\limits_{Q_\tau^R}\left|F-F^0\right|^q\varphi_R^\beta dxdt+\delta_6\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^p\,\varphi_R^\beta dxdt,$$

де $c_2=\operatorname*{esssup}\limits_{(x,t)\in Q_T}\|C_t(x,t)\|$, δ_6 – довільна достатньо мала додатна стала, M_7 – деяка додатна стала, що залежить від n, p, β.

Враховуючи наведені оцінки, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_\tau^R}|w_t|^2\,\varphi_R^\beta dx+(a_0-2M_2\delta_2T)\int\limits_{\Omega_\tau^R}\sum_{i=1}^n|w_{x_i}|^2\varphi_R^\beta dx+$$

$$+ c_1 \int\limits_{\Omega_\tau^R} |w|^2 \varphi_R^\beta dx + 2\left(g_0 - \delta_1 - \delta_3 - \delta_5 - \delta_6\right) \int\limits_{Q_\tau^R} |w_t|^p \varphi_R^\beta dxdt \le$$

$$\le 2M_1 \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^n |w_{x_i}|^2 \varphi_R^\beta dxdt + c_2 \int\limits_{Q_\tau^R} |w|^2 \varphi_R^\beta dxdt +$$

$$+ (2M_5\delta_4 + na_3) \int\limits_{Q_\tau^R} |w_t|^2 \varphi_R^\beta dxdt +$$

$$+ 2(M_4 + M_6) R^{\beta+n+(\alpha-1)\frac{2p}{p-2}} + 2M_7 \int\limits_{Q_\tau^R} \left|F - F^0\right|^q \varphi_R^\beta dxdt.$$

З останньої нерівності можна отримати оцінку

$$y(\tau) \leqslant \Lambda_1(R) + \Lambda_2 \int\limits_0^\tau y(t)dt,$$

де $y(\tau) = \int\limits_{\Omega_\tau^R} \left[|w_t|^2 + |w|^2 + \sum\limits_{i=1}^n |w_{x_i}|^2 \right] \varphi_R^\beta dx$, а $\Lambda_1(R)$, Λ_2 – деякі додатні сталі, причому $\Lambda_2 = \max\{2M_1, c_2, 2M_5\delta_4 + na_3\}$ не залежить від R. Тоді на підставі леми Гронуола, вибравши достатньо малі сталі δ_1, δ_2, δ_3, δ_5, δ_6, робимо висновок, що

$$\int\limits_{\Omega_\tau^R} \left[|w_t|^2 + |w|^2 + \sum_{i=1}^n |w_{x_i}|^2 \right] \varphi_R^\beta dx \leqslant \Lambda_1(R) e^{\Lambda_2 T}.$$

Оцінка (8) забезпечує, що $R - |R_0| \le \varphi_R(x) \le 2R$ для довільного $R_0 < R$. Тому отримаємо

$$(R - R_0)^\beta \left(\int\limits_{\Omega_\tau^{R_0}} |w_t|^2 dx + \int\limits_{\Omega_\tau^{R_0}} \sum_{i=1}^n |w_{x_i}|^2 dx + \int\limits_{Q_\tau^{R_0}} |w_t|^p dxdt \right) \le$$

$$\le M_8 R^{\beta+n+(\alpha-1)\frac{2p}{p-2}} + M_9 R^\beta \int\limits_{Q_\tau^R} \left|F - F^0\right|^q dxdt$$

для довільних τ, R, R_0 таких, що $1 < R_0 < R$, $\tau \in (0, T]$, де M_8, M_9 – додатні сталі, що залежать лише від n, p, β. З цієї нерівності легко отримати (7). Лему доведено.

Теорема 1. *Нехай в області D_T виконується умова (G) і, крім того:*
1) елементи a_{ij}^{kl} $(k, l = 1, ..., m)$ матриць A_{ij} належать до простору $L^\infty(\Sigma)$, $A_{ij}(x) = A_{ij}^*(x)$ для майже всіх $x \in \Sigma$ та для всіх $i, j = 1, ..., n$, для довільних

векторів $\xi_l = (\xi_{l1}, ..., \xi_{lm}) \in \mathbf{R}^m$ *і для майже всіх* $x \in \Sigma$ *виконується нерівність* $\sum\limits_{i,j=1}^{n}(A_{ij}(x)\xi_i, \xi_j) \geq a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} |\xi_i|^2$, $a_0 > 0$;
2) для довільних $i = 1, ..., n$ *та* $k, l = 1, ..., m$ *елементи* a_i^{kl} *матриць* A_i *та елементи* a_{i,x_i}^{kl} *матриць* A_{i,x_i} *належать до простору* $L^\infty(D_T)$;
3) елементи b_i^{kl} $(k, l = 1, ..., m)$ *матриць* B_i *для довільних* $i = 1, ..., n$ *належать до простору* $L^\infty(D_T)$;
4) елементи c^{kl} *матриці* C *та елементи* $c_t^{kl}(k, l = 1, ..., m)$ *матриці* C_t *належать до простору* $L^\infty(D_T)$, $C(x,t) = C^*(x,t)$, $(C\xi, \xi) \geq c_1 |\xi|^2$, $c_1 \geqslant 0$ *для довільного вектора* $\xi \in \mathbf{R}^m$ *та для майже всіх* $(x,t) \in D_T$;
5) $F \in (L^q((0,T); L^q(\Sigma)))^m$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$;
6) $\varphi_0 \in \left(H_0^1(\Sigma)\right)^m$, $\varphi_1 \in \left(L^2(\Sigma)\right)^m$.

Тоді задача (1)–(3), (6) має єдиний узагальнений розв'язок в області D_T.

Доведення. Існування. Розглянемо в області D_T послідовність гальоркінських наближень $u^N(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{N} C_k^N(t)\omega_k(x)$, де $N = 1, 2, ...$, $\{\omega_k\}$ – база в просторі $(H_0^1(\Sigma))^m \cap (L^p(\Sigma))^m$, ортонормована в $(L^2(\Sigma))^m$, причому функції C_k^N визначаються як розв'язки задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\int\limits_{\Sigma} \left[(u_{tt}^N, \omega_k) + \sum_{i,j=1}^{n} (A_{ij}(x)u_{x_i}^N, \omega_{k_{x_j}}) - \sum_{i=1}^{n} (A_i(x,t)u_t^N, \omega_{k_{x_i}}) - (F(x,t), \omega_k)\right] dx +$$

$$+ \int\limits_{\Sigma} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(B_i(x,t)u_{x_i}^N + C(x,t)u^N + G(x,t,u_t^N), \omega_k\right)\right] dx = 0, \qquad (10)$$

$$C_k^N(0) = \varphi_{0,k}^N, k = 1, ..., N, \varphi_0^N(x) = \sum_{k=1}^{N} \varphi_{0,k}^N \omega_k(x),$$

$$C_{kt}^N(0) = \varphi_{1,k}^N, \quad k = 1, ..., N, \quad \varphi_1^N(x) = \sum_{k=1}^{N} \varphi_{1,k}^N \omega_k(x),$$

$$\left\|\varphi_1^N - \varphi_1\right\|_{(L^2(\Sigma))^m} \to 0, \quad \left\|\varphi_0^N - \varphi_0\right\|_{(H_0^1(\Sigma))^m} \to 0, \quad N \to +\infty.$$

На підставі теореми Каратеодорі [25] існує абсолютно неперервний розв'язок такої задачі Коші на проміжку $[0, \tau_0]$ для деякого $\tau_0 \leq T$. З оцінок, отриманих нижче, випливатиме, що $\tau_0 = T$. Помножимо кожне рівняння системи (10) на C_{kt}^N, підсумуємо усі рівняння за k від 1 до N та проінтегруємо результат за t на проміжку $[0, \tau]$. На підставі міркувань, подібних до тих, що зроблені при доведенні леми, одержимо

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma} \left[\left|u_t^N(x,\tau)\right|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} \left(A_{ij}(x)u_{x_i}^N(x,\tau), u_{x_j}^N(x,\tau)\right)\right] dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{D_\tau}\sum_{i=1}^{n}\left(A_{ix_i}(x,t)u_t^N,u_t^N\right)dxdt+\int\limits_{D_\tau}\sum_{i=1}^{n}\left(B_i(x,t)u_{x_i}^N,u_t^N\right)dxdt+$$

$$+\int\limits_{D_\tau}\left(C(x,t)u^N,u_t^N\right)dxdt-\int\limits_{D_\tau}\left(F,u_t^N\right)dxdt+$$

$$+\int\limits_{D_\tau}\left(G(x,t,u_t^N),u_t^N\right)dxdt=0. \tag{11}$$

Враховуючи умови теореми 1 і проводячи оцінки інтегралів рівності (11) подібно до виконаних при доведенні леми, можна отримати, що

$$\int\limits_{\Sigma}\left|u_t^N(x,\tau)\right|^2dx+\int\limits_{\Sigma}\sum_{i=1}^{n}\left|u_{x_i}^N(x,\tau)\right|^2dx+\int\limits_{D_T}\left|u_t^N\right|^p dxdt\le M_{10} \tag{12}$$

для всіх $0<\tau\le T$, де M_{10} – додатна стала, що залежить від F,φ_0,φ_1 та не залежить від N. З нерівності (12) робимо висновок: існує підпослідовність u^{N_k} послідовності u^N така, що

$$u^{N_k}\to u \quad \text{сильно в} \quad (C([0,T];H_0^1(\Sigma)))^m,$$

$$u_t^{N_k}\to u_t \quad * - \text{слабко в} \quad (L^\infty([0,T];L^2(\Sigma)))^m,$$

$$u_t^{N_k}\to u_t \quad \text{слабко в} \quad (L^p((0,T);L^p(\Sigma)))^m$$

при $N_k\to\infty$. Перший з одержаних фактів доводимо, використовуючи [1, с. 20, лема 1.2]. Міркуючи аналогічно до [1, с. 234], можна одержати також, що $u_t\in\left(C\left([0,T];\left(H_0^1(\Sigma)\cap L^p(\Sigma)\right)'\right)\right)^m$. Зауважимо, що $G(x,t,u_t^{N_k})\to G(x,t,u_t)$ слабко в $L^q((0;T);L^q(\Sigma)))^m$. Цей факт отримуємо подібно до [1, с. 236–237]. Неважко показати, що функція u задовольняє (5) і для неї виконуються умови (2),(6).

Єдиність отриманого узагальненого розв'язку випливає з нерівності (12). Справді, прийнявши $w=u^1-u^2$, де u^1, u^2 – два узагальнені розв'язки задачі (1)–(3), (6), з (12) одержимо

$$\int\limits_{\Sigma}|w_t(x,\tau)|^2dx+\int\limits_{\Sigma}\sum_{i=1}^{n}|w_{x_i}(x,\tau)|^2dx+\int\limits_{D_T}|w_t|^p dxdt\le 0.$$

Отже, $u^1=u^2$ майже всюди в D_T. Теорему 1 доведено.

3. Основний результат.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* $(\boldsymbol{A})$, $(\boldsymbol{A}_0)$, $(\boldsymbol{B})$, $(\boldsymbol{C})$, $(\boldsymbol{G})$, $(\boldsymbol{F})$, $(\boldsymbol{U})$, $n<\frac{2p}{p-2}$. *Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок* $u=col(u_1,...,u_m)$ *задачі (1)–(4) в області* Q_T.

Доведення. Існування. Виберемо послідовність областей $\{\Omega^k\}$, $k = 2, 3, \ldots$ таку, що $\bigcup\limits_k \Omega^k = \Omega$. Позначимо далі $S_T^k = \partial\Omega^k \times (0,T)$, $F^{(k)}(x,t) = \begin{cases} F(x,t), & |x| \le k, \\ 0, & |x| > k, \end{cases}$ $\varphi_0^{(k)}(x) = \varphi_0(x)\xi_k(x)$, $\xi_k \in C^1(\mathbf{R}^n)$, $\xi_k(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le k-1, \\ 0, & |x| > k, \end{cases}$ $0 \le \xi_k(x) \le 1$, $\varphi_1^{(k)}(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & |x| \le k, \\ 0, & |x| > k. \end{cases}$ Зрозуміло, що $\varphi_0^{(k)} \in \left(H_0^1(\Omega^k)\right)^m$, $\varphi_0^{(k)} \to \varphi_0$ сильно в просторі $\left(H_{0,loc}^1(\overline{\Omega})\right)^m$, $\varphi_1^{(k)} \to \varphi_1$ сильно в $\left(L_{loc}^2(\overline{\Omega})\right)^m$. Розглянемо в області Q_T^k $(k = 2, 3, \ldots)$ мішану задачу

$$u_{tt}^{(k)} - \sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}(x)u_{x_i}^{(k)}\right)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n}\left(A_i(x,t)u_t^{(k)}\right)_{x_i} +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} B_i(x,t)u_{x_i}^{(k)} + C(x,t)u^{(k)} + G\left(x,t,u_t^{(k)}\right) = F^{(k)}(x,t), \tag{13}$$

$$u^{(k)}\Big|_{t=0} = \varphi_0^{(k)}(x), \tag{14}$$

$$u_t^{(k)}\Big|_{t=0} = \varphi_1^{(k)}(x), \tag{15}$$

$$u^{(k)}\Big|_{S_T^k} = 0. \tag{16}$$

На підставі теореми 1 можна стверджувати: існує єдиний узагальнений розв'язок $u^{(k)}$ задачі (13)–(16) в Q_T^k. Розглянемо тепер послідовність задач вигляду (13)–(16) для $k = 2$, $k = 3, \ldots$, довизначивши $u^{(k)}$ нулем на $Q_T \backslash Q_T^k$. Отримаємо послідовність розв'язків задачі (1)–(4) в Q_T, яку для зручності знову позначимо $\{u^{(k)}\}$. Покажемо, що послідовність $\{u^{(k)}\}$ є фундаментальною у просторі $\left(C([0,T]; H_{0,loc}^1(\overline{\Omega}))\right)^m$, а послідовність $\left\{u_t^{(k)}\right\}$ – фундаментальна у $\left(C\left([0,T]; \left(H_{0,loc}^1(\overline{\Omega}) \cap L_{loc}^p(\overline{\Omega})\right)'\right)\right)^m \cap$ $\cap \left(L^p((0,T); L_{loc}^p(\overline{\Omega}))\right)^m$. В області Q_τ^R розглянемо різницю $u^{(l)} - u^{(m)}$, $l, m \in \mathbf{N}$, $R > R_0$ та використаємо доведену вище лему. Аналогічно до (7) отримаємо, що

$$\int\limits_{\Omega_\tau^{R_0}} \left|u_t^{(l)} - u_t^{(m)}\right|^2 dx + \int\limits_{\Omega_\tau^{R_0}} \sum_{i=1}^{n}\left|u_{x_i}^{(l)} - u_{x_i}^{(m)}\right|^2 dx + \int\limits_{Q_\tau^{R_0}} \left|u_t^{(l)} - u_t^{(m)}\right|^p dxdt \le$$

$$\le C_3 \frac{R^{\beta+n+(\alpha-1)\frac{2p}{p-2}}}{(R-R_0)^\beta} + \left(\frac{R}{R-R_0}\right)^\beta \times$$

$$\times \left(C_4 \left\|F^{(l)} - F^{(m)}\right\|_{\left(L^{p'}((0,T);L^{p'}(\overline{\Omega}))\right)^m}^{p'} + C_5 \left\|\varphi_1^{(l)} - \varphi_1^{(m)}\right\|_{\left(L^2(\overline{\Omega})\right)^m}^2\right) +$$

$$+ C_6(R) \left\|\varphi_0^{(l)} - \varphi_0^{(m)}\right\|_{\left(H_0^1(\overline{\Omega})\right)^m}^2, \quad \tau \in [0,T], \tag{17}$$

де сталі $C_3 - C_5$ не залежать від R. Нехай $\varepsilon > 0$ – довільне як завгодно мале число. Оскільки $\lim\limits_{R\to+\infty}\left(\frac{R}{R-R_0}\right)^\beta = 1$ і за умов теореми $\lim\limits_{R\to+\infty} R^{n+(\alpha-1)\frac{2p}{p-2}} = 0$, то існує таке $R_1 > R_0$, що

$$C_3\left(\frac{R_1}{R_1-R_0}\right)^\beta R_1^{n+(\alpha-1)\frac{2p}{p-2}} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Враховуючи збіжності послідовностей $\{f^k\}$, $\{u_0^k\}$ і $\{u_1^k\}$, можемо вибрати таке $k_0 \in \mathbf{N}$, $k_0 > [R_1]+1$, що для всіх $l, m > k_0$ правильні оцінки

$$C_4\left(\frac{R_1}{R_1-R_0}\right)^\beta \left\|F^{(l)} - F^{(m)}\right\|^{p'}_{\left(L^{p'}\left((0,T);L^{p'}(\Omega^{R_1})\right)\right)^m} < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$C_5\left(\frac{R}{R-R_0}\right)^\beta \left\|\varphi_1^{(l)} - \varphi_1^{(m)}\right\|^2_{(L^2(\Omega^{R_1}))^m} < \frac{\varepsilon}{4}, C_6(R_1)\left\|\varphi_0^{(l)} - \varphi_0^{(m)}\right\|^2_{(H_0^1(\Omega^{R_1}))^m} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Отож, для довільного фіксованого $R_0 > 1$ та довільного як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує таке $k_0(\varepsilon) \in \mathbf{N}$, що

$$\int\limits_{\Omega_\tau^{R_0}} \left|u_t^{(l)} - u_t^{(m)}\right|^2 dx + \int\limits_{\Omega_\tau^{R_0}} \sum_{i=1}^n \left|u_{x_i}^{(l)} - u_{x_i}^{(m)}\right|^2 dx + \int\limits_{Q_\tau^{R_0}} \left|u_t^{(l)} - u_t^{(m)}\right|^p dxdt < \varepsilon$$

для довільних $l, m > k_0$, $\tau \in [0,T]$. Отже, $\{u^{(k)}\}$ є фундаментальною послідовністю в $\left(C([0,T]; H^1_{0,loc}(\overline{\Omega}))\right)^m$. Крім того, $\left\{u_t^{(k)}\right\}$ – фундаментальна в $\left(C\left([0,T]; \left(H^1_{0,loc}(\overline{\Omega}) \cap L^p_{loc}(\overline{\Omega})\right)'\right)\right)^m \cap \left(L^p((0,T); L^p_{loc}(\overline{\Omega}))\right)^m$ послідовністю. Враховуючи довільність R_0, отримаємо, що послідовність $\{u^{(k)}\}$ збігається до u в просторі $\left(C([0,T]; H^1_{0,loc}(\overline{\Omega}))\right)^m$, а послідовність $\{u_t^{(k)}\}$ збігається до u_t в

$$\left(C\left([0,T]; \left(H^1_{0,loc}(\overline{\Omega}) \cap L^p_{loc}(\overline{\Omega})\right)'\right)\right)^m \cap \left(L^p((0,T); L^p_{loc}(\overline{\Omega}))\right)^m.$$

Для функції u виконуються умови (2), (4). Для довільного $R > 1$

$$\left\|u_t^{(k)}\right\|_{(L^p((0,T);L^p(\Omega^R)))^m} \le C_7, \quad C_7 = \text{const} > 0. \tag{18}$$

З нерівності (18), врахувавши умову **(G)**, легко отримати, що

$$\int\limits_{Q_\tau^R} \left|G_i\left(x,t,u_t^{(k)}\right)\right|^q dxdt \le \int\limits_{Q_\tau^R} g_1^q \left(\sum_{j=1}^m \left|u_{jt}^{(k)}\right|^{p-1}\right)^q dxdt \le C_8, C_8 > 0. \tag{19}$$

З нерівностей (18)–(19) робимо висновок (переходячи при потребі до підпослідовностей), що $G(\cdot,\cdot,u_t^{(k)}) \to Z$ слабко в $\left(L^q((0,T); L^q_{loc}(\overline{\Omega}))\right)^m$. Подібно до того як це зроблено в [1, с. 236–237], покажемо, що $Z = G(x,t,u_t)$, тобто $G(x,t,u_t^{(k)}) \to$

$G(x,t,u_t)$ слабко в$L^q(((0,T);L^q_{loc}(\overline{\Omega}))^m$. Міркуючи так само, як і при отриманні рівності (9), легко показати, що

$$\int\limits_{Q_\tau}\left(F,u_t^{(k)}\varphi_R^\beta\right)dxdt=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\left[\left|u_t^{(k)}\right|^2+\sum_{i,j=1}^n\left(A_{ij}(x)u_{x_i}^{(k)},u_{x_j}^{(k)}\right)\right]\varphi_R^\beta dx+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\left(\sum_{i,j=1}^n\left(A_{ij}(x)u_{x_i}^{(k)},u_t^{(k)}\right)\left(\varphi_R^\beta\right)_{x_j}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\left(A_{ix_i}(x,t)u_t^{(k)},u_t^{(k)}\right)\varphi_R^\beta\right)dxdt-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n\left(A_i(x,t)u_t^{(k)},u_t^{(k)}\right)\left(\varphi_R^\beta\right)_{x_i}dxdt+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n\left(B_i(x,t)u_{x_i}^{(k)},u_t^{(k)}\right)\varphi_R^\beta dxdt+\int\limits_{Q_\tau}\left(C(x,t)u^{(k)},u_t^{(k)}\right)\varphi_R^\beta dxdt-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\left[\left|\varphi_1^{(k)}\right|^2+\sum_{i,j=1}^n\left(A_{ij}(x)\left(\varphi_0^{(k)}\right)_{x_i},\left(\varphi_0^{(k)}\right)_{x_j}\right)\right]\varphi_R^\beta dx+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\left(G(x,t,u_t^{(k)}),u_t^{(k)}\right)\varphi_R^\beta dxdt=0 \tag{20}$$

для довільного $R>1$. На підставі збіжностей, одержаних для послідовності $\left\{u^{(k)}\right\}$, з рівності (20) маємо

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\left[|u_t|^2+\sum_{i,j=1}^n(A_{ij}(x)u_{x_i},u_{x_i})\right]\varphi_R^\beta dx+2\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n(B_i(x,t)u_{x_i},u_t)\varphi_R^\beta dxdt+$$
$$+\int\limits_{Q_\tau}\left(2\sum_{i,j=1}^n(A_{ij}(x)u_{x_i},u_t)\left(\varphi_R^\beta\right)_{x_j}+\sum_{i=1}^n(A_{ix_i}(x,t)u_t,u_t)\varphi_R^\beta\right)dxdt-$$
$$-\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n(A_i(x,t)u_t,u_t)\left(\varphi_R^\beta\right)_{x_i}dxdt+2\int\limits_{Q_\tau}(C(x,t)u+Z-F,u_t)\varphi_R^\beta dxdt+$$
$$-\int\limits_{\Omega_0}\left[|\varphi_1|^2+\sum_{i,j=1}^n\left(A_{ij}(x)(\varphi_0)_{x_i},(\varphi_0)_{x_j}\right)\right]\varphi_R^\beta dx=0 \tag{21}$$

для довільного $\tau\in(0,T]$. Наша мета – отримати оцінки

$$\int\limits_{Q_T}(Z-G(x,t,v),u_t-v)\varphi_R^\beta dxdt\geq 0. \tag{22}$$

для довільної функції $v\in\left(L^p((0,T);L^p_{loc}(\overline{\Omega}))\right)^m$. Для цього розглянемо

$$0\leq I_k=\int\limits_{Q_T}\left(G(x,t,u_t^{(k)})-G(x,t,v),u_t^{(k)}-v\right)\varphi_R^\beta dxdt=$$

$$= \int\limits_{Q_T} \left(G(x,t,u_t^{(k)}), u_t^{(k)}\right) \varphi_R^\beta dxdt - \int\limits_{Q_T} \left(G(x,t,u_t^{(k)}), v\right) \varphi_R^\beta dxdt - \\ - \int\limits_{Q_T} \left(G(x,t,v), u_t^{(k)} - v\right) \varphi_R^\beta dxdt.$$

Використовуючи (20), маємо

$$\int\limits_{Q_T} \left(G(x,t,u_t^{(k)}), u_t^{(k)}\right) \varphi_R^\beta dxdt = \int\limits_{Q_T} \left(F, u_t^{(k)} \varphi_R^\beta\right) dxdt - \\ -\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_T} \left[\left|u_t^{(k)}\right|^2 + \sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij}(x) u_{x_i}^{(k)}, u_{x_j}^{(k)}\right) \right] \varphi_R^\beta dx - \\ - \int\limits_{Q_T} \left(\sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij}(x) u_{x_i}^{(k)}, u_t^{(k)}\right) \left(\varphi_R^\beta\right)_{x_j} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(A_{ix_i}(x,t) u_t^{(k)}, u_t^{(k)}\right) \varphi_R^\beta \right) dxdt + \\ + \frac{1}{2} \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^n \left(A_i(x,t) u_t^{(k)}, u_t^{(k)}\right) \left(\varphi_R^\beta\right)_{x_i} dxdt - \\ - \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^n \left(B_i(x,t) u_{x_i}^{(k)}, u_t^{(k)}\right) \varphi_R^\beta dxdt - \int\limits_{Q_T} \left(C(x,t) u^{(k)}, u_t^{(k)}\right) \varphi_R^\beta dxdt + \\ + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0} \left[\left|\varphi_1^{(k)}\right|^2 - \sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij}(x) \left(\varphi_0^{(k)}\right)_{x_i}, \left(\varphi_0^{(k)}\right)_{x_j}\right) \right] \varphi_R^\beta dx.$$

Тому можна стверджувати, що

$$0 \le I_k = \int\limits_{Q_T} \left(F, u_t^{(k)} \varphi_R^\beta\right) dxdt - \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_T} \left[\left|u_t^{(k)}\right|^2 + \sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij}(x) u_{x_i}^{(k)}, u_{x_j}^{(k)}\right) \right] \varphi_R^\beta dx - \\ - \int\limits_{Q_T} \left(\sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij}(x) u_{x_i}^{(k)}, u_t^{(k)}\right) \left(\varphi_R^\beta\right)_{x_j} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(A_{ix_i}(x,t) u_t^{(k)}, u_t^{(k)}\right) \varphi_R^\beta \right) dxdt + \\ + \frac{1}{2} \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^n \left(A_i(x,t) u_t^{(k)}, u_t^{(k)}\right) \left(\varphi_R^\beta\right)_{x_i} dxdt - \\ - \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^n \left(B_i(x,t) u_{x_i}^{(k)}, u_t^{(k)}\right) \varphi_R^\beta dxdt - \int\limits_{Q_T} \left(C(x,t) u^{(k)}, u_t^{(k)}\right) \varphi_R^\beta dxdt + \\ + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0} \left[\left|\varphi_1^{(k)}\right|^2 - \sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij}(x) \left(\varphi_0^{(k)}\right)_{x_i}, \left(\varphi_0^{(k)}\right)_{x_j}\right) \right] \varphi_R^\beta dx - \\ - \int\limits_{Q_T} \left(G(x,t,u_t^{(k)}), v\right) \varphi_R^\beta dxdt - \int\limits_{Q_T} \left(G(x,t,v), u_t^{(k)} - v\right) \varphi_R^\beta dxdt.$$

Звідси [24, с. 20, лема 5.3] отримаємо

$$0 \le \limsup I_k = \int\limits_{Q_T} \left(F, u_t\varphi_R^\beta\right) dxdt - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_T} \left[|u_t|^2 + \sum_{i,j=1}^n (A_{ij}(x)u_{x_i}, u_{x_j})\right] \varphi_R^\beta dx -$$
$$- \int\limits_{Q_T} \left(\sum_{i,j=1}^n (A_{ij}(x)u_{x_i}, u_t)\left(\varphi_R^\beta\right)_{x_j} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (A_{ix_i}(x,t)u_t, u_t)\,\varphi_R^\beta \right) dxdt +$$
$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^n (A_i(x,t)u_t, u_t)\left(\varphi_R^\beta\right)_{x_i} dxdt -$$
$$- \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^n (B_i(x,t)u_{x_i}, u_t)\,\varphi_R^\beta dxdt - \int\limits_{Q_T} (C(x,t)u, u_t)\,\varphi_R^\beta dxdt +$$
$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} \left[|\varphi_1|^2 - \sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij}(x)\,(\varphi_0)_{x_i}, (\varphi_0)_{x_j}\right)\right] \varphi_R^\beta dx -$$
$$- \int\limits_{Q_T} (Z, v)\,\varphi_R^\beta dxdt - \int\limits_{Q_T} (G(x,t,v), u_t - v)\,\varphi_R^\beta dxdt. \tag{23}$$

Додавши (21) та (23), отримаємо нерівність (22). Приймемо в нерівності (22) $v = u_t - \lambda\chi$, $\lambda > 0$, $\chi \in \left(L^p((0,T); L^p_{loc}(\overline{\Omega}))\right)^m$. Тоді одержимо, що

$$\lambda \int\limits_{Q_T} \left(Z - G(x,t,u_t - \lambda\chi), \chi\varphi_R^\beta\right) dxdt \ge 0.$$

Використавши теорему Лебега і спрямувавши $\lambda \to +0$, маємо

$$\int\limits_{Q_T} \left(Z - G(x,t,u_t), \chi\varphi_R^\beta\right) dxdt \ge 0.$$

Оскільки існує $R > 1$ таке, що $\operatorname{supp} v \subset \Omega^R$ для довільної функції v з компактним носієм такої, що $v \in \left(L^p((0,T); L^p_{loc}(\overline{\Omega}))\right)^m$, то $\int\limits_{Q_T} (Z - G(x,t,u_t), v)\, dxdt \ge 0$. Отже, $Z = G(x,t,u_t)$. Отож, u є узагальненим розв'язком задачі (1)–(4) в сенсі означення 1.

Єдиність отриманого розв'язку випливає з леми. Розглянемо два довільних розв'язки u^1 та u^2 задачі (1)–(4). Оскільки $u^1(x,0) = u^2(x,0)$, $u^1_t(x,0) = u^2_t(x,0)$, то нерівність (7) набуває вигляду

$$\int\limits_{\Omega_\tau^{R_0}} \left[\left|u_t^1 - u_t^2\right|^2 + \sum_{i=1}^n \left|u_{x_i}^1 - u_{x_i}^2\right|^2\right] dx + \int\limits_{Q_\tau^{R_0}} \left|u_t^1 - u_t^2\right|^p dxdt \le$$
$$\le \left(\frac{R}{R - R_0}\right)^\beta C_9 R^{n + (\alpha - 1)\frac{2p}{p-2}}$$

для довільних τ, R, R_0 таких, що $1 < R_0 < R$, $\tau \in (0,T]$, C_9 – додатна стала, що залежать лише від n, p, β. Враховуючи умови теореми 2, робимо висновок, що для довільного фіксованого $R_0 > 1$

$$\int\limits_{\Omega_\tau^{R_0}} \left[\left|u_t^1 - u_t^2\right|^2 + \sum_{i=1}^{n} \left|u_{x_i}^1 - u_{x_i}^2\right|^2 \right] dx + \int\limits_{Q_\tau^{R_0}} \left|u_t^1 - u_t^2\right|^p dxdt \leq 0.$$

Отже, $u^1 = u^2$ майже всюди в $Q_T^{R_0}$. Довільність R_0 завершує доведення єдиності. Теорему 2 доведено.

1. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., 2002.

2. *Astaburuaga M., Coimbra Charao R., Fernandez C., Perla Menzala G.* Scattering frequencies for a perturbed system of elastic wave equations// J. Math. Anal. And Appl. – 1998. – Vol. 219. – P. 52-75.

3. *Duvaut G., Lions J. L.* Les inequations en mecanique et en physique. – Paris: Dunod, 1972.

4. *Gurtin M.* An introduction to continuum Mechanics. – New York, 1981.

5. *Hoshino K.* On a construction of weak solutions to semilinear dissipative hyperbolic systems with the higher integrable gradients// Nonlin. Anal. – 1999. – Vol. 38. – P. 813-826.

6. *Ohta M., Takamura H.* Remarks on the blow – up boundaries and rates for nonlinear wave equations// Nonlin. Anal.– 1998.– Vol. 33. – P. 693-698.

7. *Li M.-R., Tsai L-Y.* Existence and nonexistence of global solutions of some system of semilinear wave equations// Nonlin. Anal.– 2003. – Vol. 54. – P. 1397-1415.

8. *D'Ancona P., Manfrin R.* A class of locally solvable semilinear equations of weakly hyperbolic type// Ann. Mat. Pura Appl.– 1995. – Vol. 168. – P. 355-372.

9. *Agre K., Rammaha M. A.* Global solutions to boundary value problems for a nonlinear wave equation in high space dimensions// Diff. And Integr. Equat. – 2001. – Vol. 14. – P. 1315-1331.

10. *Georgiev V., Todorova G.* Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and sourse terms// J. Diff. Equat. – 1994. – Vol. 109. – P. 295-308.

11. *Dragieva N. A.* A hyperbolic equation with two space variables with strong nonlinearity// Godishnik Vish. Uchebn. Zaved. Prilozhna Mat. – 1987. – Vol. 23. – N 4. – P. 95-106.

12. *Carpio A.* Existence of global solutions to some nonlinear dissipative wave equations// J. Math. Pures Appl. – 1994. – Vol. 73. – N 5. – P. 471-488.

13. *Vittilaro E.* Global nonexistence theorems for a class of evolution equation with dissipation// Arch. Ration. Mech. Anal. – 1999. – Vol. 149. – N 2. – P. 155-182.

14. *Rubino B.* Weak solutions to quasilinear wave equations of Klein–Gordon or Sine–Gordon type and relaxation to reaction–diffusion equations// Nonlin. Diff. Equat. And Appl. – 1997. – Vol. 4. – P. 439-457.

15. *Pecher H.* Sharp existence results for self – similar solutions of semilinear wave equations// Nonlin. Diff. Equat. And Appl. – 2000. – Vol. 7. – P. 323-341.

16. *Todorova G., Yordanov B.* Critical exponent for a nonlinear wave equations with damping// J. Diff. Equat. – 2001. – Vol. 174. – P. 464-489.

17. *Choquet–Bruhat Y.* Global existence for solutions of $u_{tt} - \Delta u = A\,|u|^p$// J. Diff. Equat. – 1989. – Vol. 82. – P. 98-108.

18. *Levine H. A., Park S. R., Serrin J.* Global existence and global nonexistence of solutions of the Cauchy problem for a nonlinearly damped wave equations // J. Math. Anal. And Appl. – 1998. – Vol. 228. – P. 181-205.

19. *Ohta M.* Blowup for systems of semilinear wave equations in low space dimensions // J. Math. Anal. And Appl.– 1999. – Vol. 240. – P. 340-360.

20. *Лавренюк С. П., Оліскевич М. О.* Метод Гальоркіна для гіперболічних систем першого порядку з двома незалежними змінними// Укр. мат. журн. – 2002. – Т. 54. – N 10. – С. 1356-1370.

21. *Пукач П. Я.* Змішана задача в необмеженій області для слабко нелінійного гіперболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.–мех. поля. – 2004. – Т. 47.– N 4. – С. 149-154.

22. *Bernis F.* Elliptic and parabolic semilinear problems without conditions at infinity// Arch. Ration. Mech. Anal. – 1989. – Vol. 106. – N 3. – P. 217-241.

23. *Бокало Н. М.* Задача Фурье для полулинейных параболических уравнений произвольного порядка в неограниченных областях// Нелинейные граничные задачи. – 2000. – Вып. 10. – С. 9-15.

24. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М., 1978.

25. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М., 1958.

THE MIXED PROBLEM IN DOMAIN UNBOUNDED WITH RESPECT TO SPACE VARIABLES FOR NONLINEAR HYPERBOLIC SYSTEM OF THE SECOND ORDER

Petro Pukach

Lviv Polytechnic National University,
Bandery Str., 12 79013 Lviv, Ukraine

The paper is devoted to investigation of the first mixed problem for nonlinear hyperbolic system of the second order in domain unbounded with respect to space variables. Described system generalizes the system of nonlinear wave equations $u_{tt} - \sigma\Delta u + |u_t|^{p-2}u_t = f(x,t)$, $p > 2$, which is studied in elasticity theory. We consider the case of growth of coefficient σ. The conditions of the existence and uniqueness of generalized solution have been obtained. The classes of the existence and uniqueness are the spaces of local integrable functions.

Key words: nonlinear hyperbolic system of the second order, Galerkin method.

Стаття надійшла до редколегії 09.07.2004

Прийнята до друку 19.10.2005