ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2005. Вип.64. С.236–244 *Ser.Mech-Math.2005. Vol.64. P.236–244*

УДК 517.95

ПРО ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ВИЗНАЧЕННЯ СТАРШИХ КОЕФІЦІЄНТІВ У ДВОВИМІРНОМУ ПАРАБОЛІЧНОМУ РІВНЯННІ

Роман САГАЙДАК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

На основі теореми Шаудера встановлені умови існування розв'язку оберненої задачі визначення старших коефіцієнтів у двовимірному параболічному рівнянні. Показано, що при виконанні цих умов розв'язок існує на всьому часовому проміжку $[0, T]$. Окремо визначено умови єдиності розв'язку розглянутої задачі.

Ключові слова: обернена задача, параболічне рівняння, теорема Шаудера.

У праці досліджено обернену задачу визначення двох старших коефіцієнтів у двовимірному параболічному рівнянні. Припускаємо, що кожен коефіцієнт є добутком двох функцій різних аргументів, одна з яких, залежна від однієї з просторових змінних, є відомою, а інша, залежна від часу, підлягає визначенню. Подібну одновимірну задачу з аналогічною структурою старшого коефіцієнта досліджено в [1]. Випадок, коли невідомі функції в старших коефіцієнтах рівняння збігаються, вивчено в [2]. Задачі подібного типу розглядали в [3–5], де знайдено умови єдиності розв'язку, а його існування не досліджували.

В області $\Omega_T = \{(x, y, t) : 0 < x < h, 0 < y < l, 0 < t < T\}$ розглянемо обернену задачу визначення трійки функцій $(a_1(t), a_2(t), u(x, y, t)) \in C[0, T] \times C[0, T] \times C^{2,1}(\overline{\Omega}_T), a_i(t) > 0, t \in [0, T], i = 1, 2$, що задовольняють рівняння

$$u_t = a_1(t)b_1(x)u_{xx} + a_2(t)b_2(y)u_{yy} + c_1(x, y, t)u_x + c_2(x, y, t)u_y + c_3(x, y, t)u + f(x, y, t),$$
$$(x, y, t) \in \Omega_T, \quad (1)$$

початкову умову

$$u(x,y,0)=\varphi(x,y), \quad (x,y)\in[0,h]\times[0,l], \tag{2}$$

крайові умови

$$u(0,y,t)=\mu_1(y,t), \quad u(h,y,t)=\mu_2(y,t), \quad (y,t)\in[0,l]\times[0,T], \tag{3}$$

$$u(x,0,t)=\mu_3(x,t), \quad u(x,l,t)=\mu_4(x,t), \quad (x,t)\in[0,h]\times[0,T], \tag{4}$$

та умови перевизначення

$$a_1(t)u_x(0,y_0,t)=\nu_1(t), \quad a_2(t)u_y(x_0,0,t)=\nu_2(t), \quad t\in[0,T], \tag{5}$$

де x_0, y_0 – довільні фіксовані точки з проміжків $(0,h)$ та $(0,l)$, відповідно.

Стосовно вихідних даних задачі (1)–(5) припускатимемо виконання таких умов:

$(A1)$ $\varphi(x,y)\in C^2(\overline{D})$, де $D=(0,h)\times(0,l)$, $\mu_i(y,t)\in C^{2,1}([0,l]\times[0,T]), i=1,2, \mu_i(x,t)\in C^{2,1}([0,h]\times[0,T]), i=3,4, \nu_i(t)\in C[0,T], i=1,2, f(x,y,t)\in C^{1,1,0}(\overline{\Omega}_T), b_1(x)\in C^1[0,h], b_2(y)\in C^1[0,l], c_i(x,y,t)\in C^{1,1,0}(\overline{\Omega}_T), i=1,2,3$;

$(A2)$ $\varphi(x,y)\geqslant 0, \varphi_x(x,y)>0, \varphi_y(x,y)>0, (x,y)\in\overline{D}, \mu_1(y,t)\geqslant 0, \mu_2(y,t)\geqslant 0, \mu_{1y}(y,t)>0, \mu_{2y}(y,t)>0, \mu_{1yy}(y,t)\geqslant 0, \mu_{2yy}(y,t)\geqslant 0, (y,t)\in[0,l]\times[0,T], \mu_3(x,t)\geqslant 0, \mu_4(x,t)\geqslant 0, \mu_{3x}(x,t)>0, \mu_{4x}(x,t)>0, \mu_{3xx}(x,t)\geqslant 0, \mu_{4xx}(x,t)\geqslant 0, (x,t)\in[0,h]\times[0,T], \mu_{1t}(y,t)-c_2(0,y,t)\mu_{1y}(y,t)-c_3(0,y,t)\mu_1(y,t)-f(0,y,t)<0, \mu_{2t}(y,t)-c_2(h,y,t)\mu_{2y}(y,t)-c_3(h,y,t)\mu_2(y,t)-f(h,y,t)>0, \mu_{3t}(x,t)-c_1(x,0,t)\mu_{3x}(x,t)-c_3(x,0,t)\mu_3(x,t)-f(x,0,t)<0, \mu_{4t}(x,t)-c_1(x,l,t)\mu_{4x}(x,t)-c_3(x,l,t)\mu_4(x,t)-f(x,l,t)>0, f(x,y,t)\geqslant 0, f_x(x,y,t)>0, f_y(x,y,t)>0, c_1(0,y,t)<0, c_1(h,y,t)>0, c_2(x,0,t)<0, c_2(x,l,t)>0, c_{1y}(x,y,t)\geqslant 0, c_{2x}(x,y,t)\geqslant 0, c_{3x}(x,y,t)\geqslant 0, c_{3y}(x,y,t)\geqslant 0, (x,y,t)\in(\overline{\Omega}_T), b_1(x)>0, x\in[0,h], b_2(y)>0, y\in[0,l]$;

$(A3)$ виконуються умови узгодження нульового та першого порядків [6, с. 363] .

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* $(A1)-(A3)$. *Тоді існує розв'язок задачі* (1)–(5).

Доведення. Припустивши, що функції $a_i(t)>0, i=1,2$ відомі, обернену задачу (1)–(5) зведемо до системи рівнянь стосовно функцій $a_i(t), i=1,2, u(x,y,t), u_x(x,y,t)$, $u_y(x,y,t)$.

Пряма задача (1)–(4) еквівалентна такому інтегро-диференціальному рівнянню:

$$u(x,y,t)=u_0(x,y,t)+\int_0^t\int_0^l\int_0^h G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)((c_1(\xi,\eta,\tau)-\frac{1}{2}a_1(\tau)b_1'(\xi))u_\xi+$$

$$+(c_2(\xi,\eta,\tau)-\frac{1}{2}a_2(\tau)b_2'(\eta))u_\eta+c_3(\xi,\eta,\tau)u)d\xi d\eta d\tau, \tag{6}$$

де $u_0(x,y,t)$ є розв'язком рівняння

$$u_{0t}=a_1(t)b_1(x)u_{0xx}+a_2(t)b_2(y)u_{0yy}+\frac{1}{2}a_1(t)b_1'(x)u_{0x}+\frac{1}{2}a_2(t)b_2'(y)u_{0y}+f(x,y,t),$$

$$(x,y,t)\in\Omega_T, \tag{7}$$

та задовольняє умови (2)–(4).

Легко бачити, що

$$u_0(x,y,t) = \int\limits_0^l \int\limits_0^h G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta +$$

$$+\sqrt{b_1(0)} \int\limits_0^t \int\limits_0^l \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\sqrt{b_1(\xi)}G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\right)\Big|_{\xi=0} a_1(\tau)\mu_1(\eta,\tau)d\eta d\tau -$$

$$-\sqrt{b_1(h)} \int\limits_0^t \int\limits_0^l \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\sqrt{b_1(\xi)}G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\right)\Big|_{\xi=h} a_1(\tau)\mu_2(\eta,\tau)d\eta d\tau +$$

$$+\sqrt{b_2(0)} \int\limits_0^t \int\limits_0^h \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\sqrt{b_2(\eta)}G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\right)\Big|_{\eta=0} a_2(\tau)\mu_3(\xi,\tau)d\xi d\tau -$$

$$-\sqrt{b_2(l)} \int\limits_0^t \int\limits_0^h \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\sqrt{b_2(\eta)}G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\right)\Big|_{\eta=l} a_2(\tau)\mu_4(\xi,\tau)d\xi d\tau +$$

$$+\int\limits_0^t \int\limits_0^l \int\limits_0^h G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau, \tag{8}$$

де

$$G_{ij}(x,y,t,\xi,\eta,\tau) = \frac{1}{4\pi\sqrt{(\alpha_1(t)-\alpha_1(\tau))(\alpha_2(t)-\alpha_2(\tau))b_1(\xi)b_2(\eta)}}\times$$

$$\times\sum_{n,m=-\infty}^{+\infty}\left(\exp\left(-\frac{(\beta_1(x)-\beta_1(\xi)+2nH)^2}{4(\alpha_1(t)-\alpha_1(\tau))}\right)+(-1)^i\exp\left(-\frac{(\beta_1(x)+\beta_1(\xi)+2nH)^2}{4(\alpha_1(t)-\alpha_1(\tau))}\right)\right)\times$$

$$\times\left(\exp\left(-\frac{(\beta_2(y)-\beta_2(\eta)+2mL)^2}{4(\alpha_2(t)-\alpha_2(\tau))}\right)+(-1)^j\exp\left(-\frac{(\beta_2(y)+\beta_2(\eta)+2mL)^2}{4(\alpha_2(t)-\alpha_2(\tau))}\right)\right),$$

$$\alpha_k(t) = \int\limits_0^t a_k(\tau)d\tau,\ \beta_1(x) = \int\limits_0^x \frac{d\sigma}{\sqrt{b_1(\sigma)}},\ \beta_2(y) = \int\limits_0^y \frac{d\sigma}{\sqrt{b_2(\sigma)}}, H = \beta_1(h), L = \beta_2(l),$$

$i,j,= 1,2,\ k = 1,2$. Продиференціювавши рівність (6) окремо за x і за y і ввівши позначення $u_x = v, u_y = w$, отримаємо

$$v(x,y,t) = u_{0x}(x,y,t) + \int\limits_0^t \int\limits_0^l \int\limits_0^h G_{11x}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)((c_1(\xi,\eta,\tau) - \frac{1}{2}a_1(\tau)b_1'(\xi))v +$$

$$+(c_2(\xi,\eta,\tau) - \frac{1}{2}a_2(\tau)b_2'(\eta))w + c_3(\xi,\eta,\tau)u)d\xi d\eta d\tau, \quad (x,y,t)\in\overline{\Omega}_T, \tag{9}$$

$$w(x,y,t) = u_{0y}(x,y,t) + \int_0^t \int_0^l \int_0^h G_{11y}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)((c_1(\xi,\eta,\tau) - \frac{1}{2}a_1(\tau)b_1'(\xi))v+$$

$$+(c_2(\xi,\eta,\tau) - \frac{1}{2}a_2(\tau)b_2'(\eta))w + c_3(\xi,\eta,\tau)u)d\xi d\eta d\tau, \quad (x,y,t) \in \overline{\Omega}_T. \tag{10}$$

З врахуванням введених позначень (6) набере вигляду

$$u(x,y,t) = u_0(x,y,t) + \int_0^t \int_0^l \int_0^h G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)((c_1(\xi,\eta,\tau) - \frac{1}{2}a_1(\tau)b_1'(\xi))v+$$

$$+(c_2(\xi,\eta,\tau) - \frac{1}{2}a_2(\tau)b_2'(\eta))w + c_3(\xi,\eta,\tau)u)d\xi d\eta d\tau, \quad (x,y,t) \in \overline{\Omega}_T. \tag{11}$$

Для отримання рівнянь стосовно невідомих функцій $a_i(t), i = 1,2$ використаємо умови (5). Припустимо, що $v(0,y_0,t) \neq 0, w(x_0,0,t) \neq 0, t \in [0,T]$ та врахуємо щойно введені позначення. Тоді

$$a_1(t) = \frac{\nu_1(t)}{v(0,y_0,t)}, \quad a_2(t) = \frac{\nu_2(t)}{w(x_0,0,t)}, \quad t \in [0,T]. \tag{12}$$

Отже, обернену задачу (1) – (5) зведено до системи рівнянь (9) – (12). Можна показати [2], що вихідна задача й отримана система еквівалентні. Для доведення існування розв'язку цієї системи, а, отже, і вихідної задачі, застосуємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора [7, с. 616].

Встановимо апріорні оцінки розв'язків системи (9) – (12). З того, що функція $u(x,y,t)$ є розв'язком задачі (1) – (4), і з умов $(A_1),(A_2)$ теореми випливає, що правильна оцінка [6, с. 24]

$$0 \leqslant u(x,y,t) \leqslant M_1 < \infty, \quad (x,y,t) \in \overline{\Omega}_T. \tag{13}$$

Функцію $v(x,y,t)$ можна зобразити так:

$$v(x,y,t) = v_0(x,y,t) + \int_0^t \int_0^l \int_0^h \widetilde{G}_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)c_{2\xi}(\xi,\eta,\tau)w(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau, \tag{14}$$

де $v_0(x,y,t)$ – розв'язок задачі

$$v_{0t} = a_1(t)b_1(x)v_{0xx} + a_2(t)b_2(y)v_{0yy} + (a_1(t)b_1'(x) + c_1(x,y,t))v_{0x} + c_2(x,y,t)v_{0y}+$$

$$+(c_{1x}(x,y,t) + c_3(x,y,t))v_0 + c_{3x}(x,y,t)u + f_x(x,y,t), \quad (x,y,t) \in \Omega_T, \tag{15}$$

$$v_0(x,y,0) = \varphi_x(x,y), \quad (x,y) \in \overline{D}, \tag{16}$$

$$a_1(t)b_1(0)v_{0x}(0,y,t) + c_1(0,y,t)v_0(0,y,t) = \mu_{1t}(y,t) - a_2(t)b_2(y)\mu_{1yy}(y,t)-$$

$$-c_2(0,y,t)\mu_{1y}(y,t) - c_3(0,y,t)\mu_1(y,t) - f(0,y,t), \quad (y,t) \in [0,l] \times [0,T], \tag{17}$$

$$a_1(t)b_1(h)v_{0x}(h,y,t)+c_1(h,y,t)v_0(h,y,t)=\mu_{2t}(y,t)-a_2(t)b_2(y)\mu_{2yy}(y,t)-$$
$$-c_2(h,y,t)\mu_{2y}(y,t)-c_3(h,y,t)\mu_2(y,t)-f(h,y,t), \quad (y,t)\in[0,l]\times[0,T], \tag{18}$$
$$v_0(x,0,t)=\mu_{3x}(x,t), \quad (x,t)\in[0,h]\times[0,T], \tag{19}$$
$$v_0(x,l,t)=\mu_{4x}(x,t), \quad (x,t)\in[0,h]\times[0,T], \tag{20}$$

а $\widetilde{G}_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$ – її функція Ґріна. Для функції $w(x,y,t)$ правильне подібне зображення

$$w(x,y,t)=w_0(x,y,t)+\int_0^t\int_0^l\int_0^h \widehat{G}_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)c_{1\eta}(\xi,\eta,\tau)v(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau, \tag{21}$$

де $\widehat{G}_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$ – функція Гріна, а $w_0(x,y,t)$ – розв'язок відповідної крайової задачі.

Встановимо оцінку знизу розв'язку задачі (15) – (20). Спочатку проведемо в цій задачі заміну $v_0=\widetilde{v}e^{\lambda t}$, де число λ визначимо пізніше. Позначимо через (x^*,y^*,t^*) точку, в якій досягається $\min\limits_{\overline{\Omega}_T} v_0(x,y,t)$, і розглянемо можливі варіанти розміщення точка (x^*,y^*,t^*).

Припустимо, що $(x^*,y^*,t^*)\in D\times(0,T]$. У цьому випадку оцінку функції $v_0(x,y,t)$ знайдемо з рівняння (15). Оцінивши його вільний член знизу, приходимо до нерівності

$$-(c_{1x}(x^*,y^*,t^*)+c_3(x^*,y^*,t^*)-\lambda)\widetilde{v}(x^*,y^*,t^*)\geqslant C_1>0. \tag{22}$$

Тоді λ виберемо з такої умови:

$$\lambda>\max_{\overline{\Omega}_T}(c_{1x}(x,y,t)+c_3(x,y,t).$$

Отож,

$$v_0(x^*,y^*,t^*)\geqslant C_2>0. \tag{23}$$

Нехай $(x^*,y^*,t^*)\in\overline{D}\times\{t=0\}$. У цьому випадку

$$v_0(x^*,y^*,t^*)\geqslant\min_{\overline{D}}\varphi_x(x,y)=C_3>0. \tag{24}$$

Якщо $(x^*,y^*,t^*)\in\{x=0\}\times[0,l]\times[0,T]$, то правильна оцінка

$$v_0(x^*,y^*,t^*)\geqslant\min_{[0,l]\times[0,T]}\frac{\mu_{1t}(y,t)-c_2(0,y,t)\mu_{1y}(y,t)-c_3(0,y,t)\mu_1(y,t)-f(0,y,t)}{c_1(0,y,t)}=$$
$$=C_4>0. \tag{25}$$

При $(x^*,y^*,t^*)\in\{x=h\}\times[0,l]\times[0,T]$ справджується аналогічне співвідношення.

У випадку, коли $(x^*,y^*,t^*)\in[0,h]\times\{y=0\}\times[0,T]$, $v_0(x,y,t)$ оцінимо так:

$$v_0(x^*,y^*,t^*)\geqslant\min_{[0,h]\times[0,T]}\mu_{3x}(x,t)=C_5>0. \tag{26}$$

Якщо $(x^*, y^*, t^*) \in [0, h] \times \{y = l\} \times [0, T]$, то встановлюємо подібну нерівність.

Отже, для довільного розміщення точки (x^*, y^*, t^*) ми одержали оцінку функції $v_0(x, y, t)$ знизу

$$v_0(x, y, t) \geqslant C_6 > 0, \quad (x, y, t) \in \overline{\Omega}_T, \tag{27}$$

де $C_6 = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant 5} C_i$.

Оцінку

$$v_0(x, y, t) \leqslant C_7 < \infty, \quad (x, y, t) \in \overline{\Omega}_T, \tag{28}$$

одержуємо так само.

Провівши аналогічні міркування для функції $w_0(x, y, t)$, встановлюємо, що

$$0 < C_8 \leqslant w_0(x, y, t) \leqslant C_9 < \infty, \quad (x, y, t) \in \overline{\Omega}_T. \tag{29}$$

Підставимо (14) в (21) та навпаки

$$v(x, y, t) = v_0(x, y, t) + \int\limits_0^t \int\limits_0^l \int\limits_0^h \widetilde{G}_{11}(x, y, t, \xi, \eta, \tau) c_{2\xi}(\xi, \eta, \tau) \Big[w_0(\xi, \eta, \tau) +$$

$$+ \int\limits_0^\tau \int\limits_0^l \int\limits_0^h \widehat{G}_{11}(\xi, \eta, \tau, \rho, \sigma, \vartheta) c_{1\sigma}(\rho, \sigma, \vartheta) v(\rho, \sigma, \vartheta) d\rho d\sigma d\vartheta \Big] d\xi d\eta d\tau, \tag{30}$$

$$w(x, y, t) = w_0(x, y, t) + \int\limits_0^t \int\limits_0^l \int\limits_0^h \widehat{G}_{11}(x, y, t, \xi, \eta, \tau) c_{1\eta}(\xi, \eta, \tau) \Big[v_0(\xi, \eta, \tau) +$$

$$+ \int\limits_0^\tau \int\limits_0^l \int\limits_0^h \widetilde{G}_{11}(\xi, \eta, \tau, \rho, \sigma, \vartheta) c_{2\rho}(\rho, \sigma, \vartheta) w(\rho, \sigma, \vartheta) d\rho d\sigma d\vartheta \Big] d\xi d\eta d\tau. \tag{31}$$

Співвідношення (30), (31) є інтегральними рівняннями Вольтерри другого роду. Врахувавши властивості їхніх розв'язків, припущення (A_2) теореми та наявність оцінок (27), (29), отримуємо такі співвідношення:

$$v(x, y, t) \geqslant v_0(x, y, t) \geqslant C_6 > 0, \quad (x, y, t) \in \overline{\Omega}_T, \tag{32}$$

$$w(x, y, t) \geqslant w_0(x, y, t) \geqslant C_8 > 0, \quad (x, y, t) \in \overline{\Omega}_T. \tag{33}$$

На основі (32), (33) з (12) одержуємо оцінки $a_i(t), i = 1, 2$ зверху

$$a_1(t) \leqslant \frac{\max\limits_{[0,T]} \nu_1(t)}{C_6} = A_1 < \infty, \quad t \in [0, T], \tag{34}$$

$$a_2(t) \leqslant \frac{\max\limits_{[0,T]} \nu_2(t)}{C_8} = A_2 < \infty, \quad t \in [0, T]. \tag{35}$$

Позначимо $V(t) = \max\limits_{(x,y)\in\overline{D}} v(x,y,t), W(t) = \max\limits_{(x,y)\in\overline{D}} w(x,y,t)$. Використавши введені позначення, оцінки (28), (29) з (30), (31) отримуємо такі нерівності:

$$V(t) \leqslant C_7 + C_{10}\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h \widetilde{G}_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\Bigg[1+$$
$$+\int\limits_0^\tau V(\vartheta)\int\limits_0^l\int\limits_0^h \widehat{G}_{11}(\xi,\eta,\tau,\rho,\sigma,\vartheta)d\rho d\sigma d\vartheta\Bigg]d\xi d\eta d\tau, \tag{36}$$

$$W(t) \leqslant C_9 + C_{11}\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h \widehat{G}_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\Bigg[1+$$
$$+\int\limits_0^\tau W(\vartheta)\int\limits_0^l\int\limits_0^h \widetilde{G}_{11}(\xi,\eta,\tau,\rho,\sigma,\vartheta)d\rho d\sigma d\vartheta\Bigg]d\xi d\eta d\tau. \tag{37}$$

Оцінивши в (36), (37) інтеграли за просторовими змінними від функцій Ґріна $\widetilde{G}_{11}, \widehat{G}_{11}$, приходимо до нерівності Ґронуола, з якої випливає

$$v(x,y,t) \leqslant M_2 < \infty, \quad w(x,y,t) \leqslant M_3 < \infty, \quad (x,y,t) \in \overline{\Omega}_T. \tag{38}$$

Тоді можна оцінити $a_i(t), i = 1,2$ знизу

$$a_1(t) \geqslant \frac{\min\limits_{[0,T]} \nu_1(t)}{M_2} = A_3 > 0, \quad t \in [0,T], \tag{39}$$

$$a_2(t) \geqslant \frac{\min\limits_{[0,T]} \nu_2(t)}{M_3} = A_4 > 0, \quad t \in [0,T]. \tag{40}$$

При наявності оцінок (13), (32) – (35), (38) – (40) перевірка виконання умов теореми Шаудера проводиться аналогічно до [8]. Теорему доведено.

Перейдемо до питання єдиності розв'язку задачі (1) – (5).

Теорема 2. *Нехай $\nu_i(t) > 0, i = 1,2, t \in [0,T]$. Тоді розв'язок задачі (1)-(5) єдиний.*

Доведення. Припустимо, що існує два розв'язки цієї задачі $(a_{11}, a_{12}, u_1), (a_{21}, a_{22}, u_2)$. Введемо такі позначення: $A_1(t) = a_{11}(t) - a_{21}(t), A_2(t) = a_{12}(t) - a_{22}(t), U(x,y,t) = u_1(x,y,t) - u_2(x,y,t)$. Тоді трійка функцій (A_1, A_2, U) задовольняє умови

$$U_t = a_{11}(t)b_1(x)U_{xx} + a_{12}b_2(y)U_{yy} + A_1(t)b_1(x)u_{2xx} + A_2(t)b_2(y)u_{2yy}+$$
$$+c_1(x,y,t)U_x + c_2(x,y,t)U_y + c_3(x,y,t)U, \quad (x,y,t) \in \Omega_T, \tag{41}$$

$$U(x,y,0) = 0, \quad (x,y) \in [0,h]\times[0,l], \tag{42}$$

$$U(0,y,t) = U(h,y,t) = 0, \quad (y,t) \in [0,l]\times[0,T], \tag{43}$$

$$U(x,0,t) = U(x,l,t) = 0, \quad (x,t) \in [0,h] \times [0,T], \tag{44}$$

$$a_{11}(t)U_x(0,y_0,t) = -A_1(t)u_{2x}(0,y_0,t), \quad t \in [0,T], \tag{45}$$

$$a_{12}(t)U_y(x_0,0,t) = -A_2(t)u_{2y}(x_0,0,t), \quad t \in [0,T]. \tag{46}$$

Використовуючи функцію Гріна G_{11}^* задачі (41) – (44), її розв'язок зобразимо так:

$$U(x,y,t) = \int_0^t \int_0^l \int_0^h G_{11}^*(x,y,t,\xi,\eta,\tau)(A_1(\tau)b_1(\xi)u_{2\xi\xi} + A_2(\tau)b_2(\eta)u_{2\eta\eta})d\xi d\eta d\tau. \tag{47}$$

Підставляючи його в умови перевизначення (45), (46), отримаємо рівняння стосовно невідомих функцій $A_i(t), i = 1,2$

$$A_1(t)u_{2x}(0,y_0,t) = -a_{11}(t) \int_0^t \int_0^l \int_0^h G_{11x}^*(0,y_0,t,\xi,\eta,\tau)(A_1(\tau)b_1(\xi)u_{2\xi\xi} +$$

$$+A_2(\tau)b_2(\eta)u_{2\eta\eta})d\xi d\eta d\tau, \quad t \in [0,T], \tag{48}$$

$$A_2(t)u_{2y}(x_0,0,t) = -a_{12}(t) \int_0^t \int_0^l \int_0^h G_{11y}^*(x_0,0,t,\xi,\eta,\tau)(A_1(\tau)b_1(\xi)u_{2\xi\xi} +$$

$$+A_2(\tau)b_2(\eta)u_{2\eta\eta})d\xi d\eta d\tau, \quad t \in [0,T]. \tag{49}$$

Оскільки функції $(a_{21}(t), a_{22}(t), u_2(x,y,t))$ є розв'язком задачі (1)–(5), то з умови теореми випливає, що $a_{21}(t)u_{2x}(0,y_0,t) = \nu_1(t) > 0, a_{22}(t)u_{2y}(x_0,0,t) = \nu_2(t) > 0$. Тому $u_{2x}(0,y_0,t) > 0, u_{2y}(x_0,0,t) > 0$, і (48), (49) є системою однорідних рівнянь Вольтерра другого роду з інтегровними ядрами. Внаслідок єдиності її розв'язку $A_i(t) \equiv 0, i = 1,2, t \in [0,T]$. Оскільки розв'язок прямої задачі єдиний, то робимо висновок, що $U(x,y,t) \equiv 0$, $(x,y,t) \in \overline{\Omega}_T$. Теорему доведено.

---

1. *Іванчов М. І.* Про одну обернену задачу для параболічного рівняння // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1997. – Вип. 47. – С. 63-71.
2. *Сагайдак Р. В.* Про одну обернену задачу для двовимірного рівняння параболічного типу. // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004.– Т. 47. – № 1. – С. 7-16.
3. *Ратыни А. К.* О восстановлении коэффициентов температуропроводности анизотропного тела // Краевые задачи. – Пермь. – 1982. – С. 146-147.
4. *Ратыни А. К.* Задача определения матрицы коэффициентов при старших производных параболического уравнения // Краевые задачи. – Пермь. – 1985. – С. 82-86.
5. *Ратыни А. К.* Условия корректности задачи определения матрицы коэффициентов при старших производных параболического уравнения // Дифференциальние уравнения. – 1992. – Т. 28. – № 8. – С. 1419-1426.

6. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М., 1967.
7. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М., 1977.
8. *Ковальчук С. М.* Визначення коефіцієнта температуропровідності прямокутної пластини // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1996. – Вип. 45. – С. 96-103.

LARGE ON EXISTENCE AND UNIQUENESS OF SOLUTION FOR THE INVERSE PROBLEM OF DETERMINATION MAJOR COEFFICIENTS IN TWO-DIMENSIONAL PARABOLIC EQUATION

Roman Sagaydak

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine

The inverse problem for two-dimensional parabolic equation in rectangle is considered. We establish existence and uniqueness conditions for solution of this problem using Schauder fixed-point theorem. Under certain assumptions solution exists on all time interval $[0, T]$.

Key words: inverse problem, parabolic equation, Schauder fixed-point theorem.

Стаття надійшла до редколегії 25.06.2005

Прийнята до друку 19.10.2005