ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 2005. Вип.64. С.245–257 *Ser.Mech-Math.2005. Vol.64. P.245–257*

УДК 517.95

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ВИРОДЖЕННЯМ

Наталія САЛДІНА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Встановлено умови існування та єдиності розв'язку оберненої задачі визначення невідомого коефіцієнта при старшій похідній у параболічному рівнянні зі слабким виродженням, який перетворюється в нуль у початковий момент часу як степінь t^{β}, $\beta < 1$.

Ключові слова: обернена задача, параболічне рівняння, теорема Шаудера, функція Ґріна.

Розв'язуючи задачі математичної фізики, виникає потреба досліджувати рівняння з виродженням і особливостями, в яких, крім розв'язку диференціального рівняння, потрібно визначити невідомий коефіцієнт. До таких задач зводиться багато практично важливих задач з природокористування та економіки. Прямі задачі з виродженням досліджувало багато авторів. Обернені задачі для рівнянь з виродженням досліджені мало. Серед відомих результатів можна було б зазначити [1], в якій для еліптичного рівняння з виродженням досліджено задачу визначення вільного члена. В праці [2] в області $\Omega = \{(x,t) : 0 \leqslant x < \infty, 0 \leqslant y < \infty\}$ розглянуто рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y^{\alpha}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + c(x)u, \quad 0 < \alpha < 2,$$

в якому невідомим, крім розв'язку u, є коефіцієнт $c(x)$.

Мета нашої праці – розглянути обернену задачу знаходження розв'язку параболічного рівняння та невідомого коефіцієнта залежного від часу, який у початковий момент прямує до нуля за степеневим законом.

В області $Q_T \equiv \{(x,t) : 0 < x < h, 0 < t < T\}$ розглянемо параболічне рівняння

$$u_t = a(t)u_{xx} + b(t)u_x + f(x,t) \tag{1}$$

з невідомим коефіцієнтом $a(t) > 0, t \in (0, T]$, початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,h], \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(h,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T] \tag{3}$$

та умовою перевизначення

$$a(t)u_x(0,t) = \mu_3(t), \quad t \in [0,T]. \tag{4}$$

Під розв'язком задачі (1)-(4) розуміємо пару функцій $(a(t), u(x,t))$ з класу $C[0,T] \times C^{2,1}(Q_T) \bigcap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $a(t) > 0, t \in (0,T]$, для якої існує границя $\lim\limits_{t \to +0} a(t)t^{-\beta} > 0, 0 < \beta < 1$– задане число, яка задовольняє рівняння (1) та умови (2)-(4).

Теорема існування. *Припустимо, що виконуються умови:*

1) $\varphi \in C^1[0,h]$; $\mu_i \in C^1[0,T], i = 1,2$; $b, \mu_3 \in C[0,T]$; $f \in C(\overline{Q}_T)$ *і* $f(x,t)$ *за змінною* x *задовольняє умову Гельдера з показником* $\alpha, 0 < \alpha < 1$;

2) $\varphi'(x) > 0, x \in [0,h], \mu_3(t) > 0, t \in (0,T]$, *існує* $\lim\limits_{t \to +0} \mu_3(t)t^{-\beta} = M > 0, 0 < \beta < 1$;

3) $\varphi(0) = \mu_1(0)$, $\varphi(h) = \mu_2(0)$.

Тоді можна зазначити таке число $t_0, 0 < t_0 \leqslant T$, *яке визначається вихідними даними задачі, що розв'язок задачі (1)-(4) існує при* $x \in [0,h], t \in [0,t_0]$.

Доведення. Задачу (1)-(4) зведемо до системи рівнянь стосовно невідомих функцій $a(t), u(x,t)$. Для цього введемо такі позначення. Функції Ґріна першої ($k = 1$) та другої ($k = 2$) крайових задач для рівняння теплопровідності

$$u_t = a(t)u_{xx} + f(x,t) \tag{5}$$

позначимо через $G_k(x,t,\xi,\tau), k = 1,2$. Вони мають вигляд

$$G_k(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right) + \right.$$

$$\left. +(-1)^k \exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)\right), \quad \text{де} \quad \theta(t) = \int\limits_0^t a(\tau)d\tau. \tag{6}$$

Тимчасово припустимо, що функція $a(t)$ відома. Використовуючи функцію Ґріна, розв'язок прямої задачі (5),(2),(3) подамо у вигляді

$$u_0(x,t) = \int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)\varphi(\xi)d\xi + \int\limits_0^t G_{1\xi}(x,t,0,\tau)a(\tau)\mu_1(\tau)d\tau -$$

$$-\int\limits_0^t G_{1\xi}(x,t,h,\tau)a(\tau)\mu_2(\tau)d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau. \tag{7}$$

Задача (1)-(3) еквівалентна інтегро-диференціальному рівнянню

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \int_0^t \int_0^h G_1(x,t,\xi,\tau) b(\tau) u_\xi(\xi,\tau) d\xi d\tau. \tag{8}$$

Диференціюючи вираз (8) і позначаючи $u_x(x,t) \equiv v(x,t)$, отримаємо

$$v(x,t) = u_{0x}(x,t) + \int_0^t \int_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau) b(\tau) v(\xi,\tau) d\xi d\tau, \tag{9}$$

де $u_{0x}(x,t)$ має вигляд

$$u_{0x}(x,t) = \int_0^h G_2(x,t,\xi,0)\varphi'(\xi)d\xi - \int_0^t G_2(x,t,0,\tau)\mu_1'(\tau)d\tau + \int_0^t G_2(x,t,h,\tau)\mu_2'(\tau)d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau) f(\xi,\tau) d\xi d\tau. \tag{10}$$

Вираз (10) одержано послідовним диференціюванням (7), інтегруванням частинами з застосуванням властивостей функції Ґріна та умов узгодженості. З того, що $\int_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)d\xi = = 1$, і з умови 2 теореми існування випливає додатність першого доданку виразу (10). Можемо зазначити таке $t_1, 0 < t_1 \leqslant T$, що

$$\frac{1}{2}\int_0^h G_2(x,t,\xi,0)\varphi'(\xi)d\xi \geqslant \int_0^t G_2(x,t,0,\tau)\mu_1'(\tau)d\tau - \int_0^t G_2(x,t,h,\tau)\mu_2'(\tau)d\tau -$$

$$- \int_0^t \int_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau) f(\xi,\tau) d\xi d\tau - \int_0^t \int_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau) b(\tau) v(\xi,\tau) d\xi d\tau.$$

Звідси

$$v(x,t) \geqslant \frac{1}{2} \min_{x\in[0,h]} \varphi'(x) \equiv M_1 > 0, \quad t \in [0, t_1]. \tag{11}$$

Підставляючи вираз (9) в умову (4), отримаємо рівняння стосовно $a(t)$

$$a(t) = \frac{\mu_3(t)}{v(0,t)}, \quad t \in [0, t_1]. \tag{12}$$

Обернену задачу зведено до еквівалентної системи рівнянь (9),(12). Для дослідження цієї системи застосуємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Спочатку встановимо апріорні оцінки розв'язків системи. З існування границі відношення $\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{\mu_3(t)}{t^\beta}$ і з нерівності (11) для функції $a(t)$ випливає така оцінка зверху:

$$a(t)\leqslant\frac{\mu_3(t)}{M_1}\leqslant A_1t^\beta,\quad A_1>0,\quad t\in[0,t_1]. \tag{13}$$

Щоб оцінити $a(t)$ знизу, попередньо визначимо оцінку $|v(x,t)|$. Легко бачити, що перший доданок з (9) безпосередньо оцінюється виразом

$$|u_{0x}(x,t)|\leqslant C_1+C_2\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}, \tag{14}$$

де C_1,C_2- константи, що визначаються вихідними даними. Оцінимо другий доданок виразу (9), використовуючи явний вигляд функції Ґріна, неперервність функції $b(t)$ і позначення $V(t)=\max\limits_{x\in[0,h]}|v(x,t)|$

$$I_1\equiv\int\limits_0^t\int\limits_0^h|G_{1x}(x,t,\xi,\tau)||b(\tau)||v(\xi,\tau)|d\xi d\tau\leqslant C_3\int\limits_0^t\frac{V(\tau)d\tau}{\sqrt{(\theta(t)-\theta(\tau))^3}}\times$$

$$\times\int\limits_0^h\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(|x-\xi+2nh|\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)+\right.$$

$$\left.+|x+\xi+2nh|\exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)\right)d\xi.$$

Розбиваючи останній інтеграл на суму двох інтегралів і роблячи відповідні заміни змінних $z=\dfrac{x-\xi+2nh}{2\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}$ та $z=\dfrac{x+\xi+2nh}{2\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}$, одержимо

$$I_1\leqslant C_4\int\limits_0^t\frac{V(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\limits_{\frac{x+h(2n-1)}{2\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}}^{\frac{x+h(2n+1)}{2\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}}|z|\exp(-z^2)dz=$$

$$=C_4\int\limits_0^t\frac{V(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|z|\exp(-z^2)dz=C_4\int\limits_0^t\frac{V(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}.$$

Остаточно маємо оцінку

$$V(t)\leqslant C_1+C_2\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}+C_4\int\limits_0^t\frac{V(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}},$$

або, позначивши $V_1(t) = V(t) + 1$, отримаємо

$$V_1(t) \leqslant C_5 + C_6 \int_0^t \frac{V_1(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}}. \tag{15}$$

З умови (4) знаходимо

$$\frac{1}{a(t)} \leqslant \frac{V_1(t)}{\mu_3(t)}.$$

За допомогою цієї нерівності з (15) маємо

$$V_1(t) \leqslant C_5 + C_6 \int_0^t \frac{a(\tau)V_1^2(\tau)d\tau}{\mu_3(\tau)\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}}. \tag{16}$$

Піднесемо до квадрата обидві частини нерівності. Використовуючи нерівності Коші та Коші-Буняковського, знаходимо

$$V_1^2(t) \leqslant 2C_5^2 + 2C_6^2 \int_0^t \frac{V_1^4(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} \int_0^t \frac{a^2(\tau)d\tau}{\mu_3^2(\tau)\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}}. \tag{17}$$

З оцінки (13) маємо $\theta(t) \leqslant \dfrac{A_1}{\beta+1} t^{\beta+1}$ або $t \geqslant \theta(t)^{\frac{1}{\beta+1}} \left(\dfrac{\beta+1}{A_1}\right)^{\frac{1}{\beta+1}}$. Оцінимо другий множник у (17), використовуючи існування границі $\lim\limits_{t\to+0} \dfrac{\mu_3(t)}{t^\beta}$

$$I_2 \equiv \int_0^t \frac{a^2(\tau)d\tau}{\mu_3^2(\tau)\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} \leqslant C_7 \int_0^t \frac{a(\tau)d\tau}{\tau^\beta\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} \leqslant C_8 \int_0^t \frac{a(\tau)d\tau}{(\theta(\tau))^{\beta/\beta+1}\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}}.$$

Після заміни змінних $z = \dfrac{\theta(\tau)}{\theta(t)}$ отримаємо

$$I_2 \leqslant C_8(\theta(t))^{\frac{1-\beta}{2(\beta+1)}} \int_0^1 \frac{dz}{z^{\beta/\beta+1}\sqrt{1-z}} \leqslant C_9 \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)}} = C_9\pi.$$

Тоді нерівність (17) набуває вигляду

$$V_1^2(t) \leqslant C_{10} + C_{11} \int_0^t \frac{V_1^4(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}}.$$

Звідси отримаємо

$$\int_0^t \frac{a(\sigma)V_1^2(\sigma)d\sigma}{\mu_3(\sigma)\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}} \leqslant C_{10}\int_0^t \frac{a(\sigma)d\sigma}{\mu_3(\sigma)\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}} + C_{11}\int_0^t \frac{a(\sigma)d\sigma}{\mu_3(\sigma)\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}}\times$$
$$\times \int_0^\sigma \frac{V_1^4(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(\sigma)-\theta(\tau)}}.$$

Змінюючи порядок інтегрування в останньому інтегралі і використовуючи рівність

$$\int_\tau^t \frac{a(\sigma)d\sigma}{\sqrt{(\theta(t)-\theta(\sigma))(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}} = \pi,$$

приходимо до нерівності

$$\int_0^t \frac{a(\sigma)V_1^2(\sigma)d\sigma}{\mu_3(\sigma)\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}} \leqslant C_{12} + C_{13}\int_0^t \frac{V_1^4(\tau)d\tau}{\tau^\beta}. \tag{18}$$

За допомогою (18) зведемо нерівність (16) до вигляду

$$V_1(t) \leqslant C_{14} + C_{15}\int_0^t \frac{V_1^4(\tau)d\tau}{\tau^\beta}. \tag{19}$$

Позначимо $W(t) = C_{14} + C_{15}\int\limits_0^t \frac{V_1^4(\tau)d\tau}{\tau^\beta}$. Тоді $W'(t) = C_{15}\frac{V_1^4(t)}{t^\beta} \leqslant C_{15}\frac{W^4(t)}{t^\beta}$. Інтегруючи, з цієї нерівності отримуємо

$$\frac{1}{3C_{14}^3} - \frac{1}{3W^3(t)} \leqslant \frac{C_{15}}{1-\beta}t^{1-\beta},$$

що приводить до такої оцінки

$$W(t) \leqslant \frac{C_{14}\sqrt[3]{1-\beta}}{\sqrt[3]{1-\beta-3C_{14}^3C_{15}t^{1-\beta}}}, \quad t\in[0,t_2], \tag{20}$$

де число t_2, $0 < t_2 \leqslant T$ задовольняє умову $1-\beta-3C_{14}^3C_{15}t_2^{1-\beta} > 0$. Враховуючи те, що $V_1(t) \leqslant W(t)$, одержуємо оцінку

$$|v(x,t)| \leqslant M_2 < \infty, \quad t\in[0,t_2], \quad x\in[0,h]. \tag{21}$$

Наявність (21) дає змогу оцінити функцію $a(t)$ знизу

$$a(t) \geqslant \frac{\mu_3(t)}{M_2} \geqslant A_0 t^\beta, \quad A_0 > 0, \quad t\in[0,t_2]. \tag{22}$$

Доведемо існування границі $\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{a(t)}{t^\beta} > 0$. З умов теореми випливає, що $\lim\limits_{t\to+0} v(0,t) = \lim\limits_{t\to+0}\int\limits_0^h G_2(0,t,\xi,0)\varphi'(\xi)d\xi = \varphi'(0)$. Отже,

$$\lim_{t\to+0}\frac{a(t)}{t^\beta} = \lim_{t\to+0}\frac{\mu_3(t)}{t^\beta v(0,t)} = \frac{M}{\varphi'(0)} > 0.$$

Оцінки розв'язків системи рівнянь (9),(12) отримано. Запишемо систему рівнянь (9),(12) у такому вигляді:

$$\omega = P\omega, \tag{23}$$

де $\omega = (a,v)$, $P = (P_1,P_2)$, оператори P_1, P_2 визначаються правими частинами рівнянь (9),(12). Визначимо множину $N = \{(a(t),v(x,t)) \in C[0,t_0]\times C(\overline{Q}_{t_0}) : A_0 \leqslant \frac{a(t)}{t^\beta} \leqslant A_1, M_1 \leqslant v(x,t) \leqslant M_2\}$, де $t_0 = \min\{t_1,t_2\}$. Згідно з отриманими оцінками (13),(22) і (11),(21) оператор P переводить множину N в себе. Покажемо, що оператор P цілком неперервний на N. Згідно з теоремою Арцела-Асколі для цього треба з'ясувати, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що

$$|P_1(t_2) - P_1(t_1)| < \varepsilon \quad \text{та} \quad |P_2(x_2,t_2) - P_2(x_1,t_1)| < \varepsilon, \quad \forall (a(t),v(x,t)) \in N, \tag{24}$$

якщо $|t_2 - t_1| < \delta, |x_2 - x_1| < \delta$, де $(x_1,t_1),(x_2,t_2) \in \overline{Q}_{t_0}$. З того, що $P_1 a(t) = a(t)$ та $A_0 \leqslant \frac{a(t)}{t^\beta} \leqslant A_1$ для всіх $a(t) \in N$, робимо висновок, що для довільного $\varepsilon > 0$ існують досить малі значення $t^* > 0$, для яких виконується нерівність $|P_1 a(t)| < \varepsilon$, $0 \leqslant t \leqslant t^*$. Доведемо першу нерівність з (24) у випадку, коли $t_i > t^*, i = 1,2$. Зважаючи на те, що

$$|P_1 a(t_2) - P_1 a(t_1)| = \left|\frac{\mu_3(t_2)}{v(0,t_2)} - \frac{\mu_3(t_1)}{v(0,t_1)}\right| \leqslant \left|\frac{\mu_3(t_2) - \mu_3(t_1)}{v(0,t_2)}\right| +$$

$$+ \left|\frac{\mu_3(t_1)(v(0,t_2) - v(0,t_1))}{v(0,t_2)v(0,t_1)}\right|,$$

і враховуючи оцінку $v(0,t) \geqslant M_1 > 0$, оцінимо вираз $|v(0,t_2) - v(0,t_1)|$. Розглянемо вираз

$$R = \left|\int\limits_0^{t_2} G_2(0,t_2,0,\tau)\mu_1'(\tau)d\tau - \int\limits_0^{t_1} G_2(0,t_1,0,\tau)\mu_1'(\tau)d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int\limits_0^{t_1}(G_2(0,t_2,0,\tau) - G_2(0,t_1,0,\tau))\mu_1'(\tau)d\tau\right| + \left|\int\limits_{t_1}^{t_2} G_2(0,t_2,0,\tau)\mu_1'(\tau)d\tau\right| \equiv R_1 + R_2.$$

Припустимо для визначеності, що $t_2 > t_1$. Оцінка $G_2(0,t,0,\tau)$ дає змогу записати

$$R_2 \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}} \max_{[0,T]} |\mu_1'(t)| \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{\sqrt{\theta(t_2)-\theta(\tau)}} + C_{16} \right) d\tau \leqslant$$

$$\leqslant C_{17} \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t_2)-\theta(\tau)}} + C_{18}(t_2 - t_1).$$

З означення множини N отримуємо

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t_2)-\theta(\tau)}} \leqslant \sqrt{\frac{\beta+1}{A_0}} \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{d\tau}{\sqrt{t_2^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}}} \leqslant \sqrt{\frac{\beta+1}{A_0 t_2^{\beta}}} \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{d\tau}{\sqrt{t_2 - \tau}} \leqslant C_{19}\sqrt{t_2 - t_1}.$$

Остаточно маємо

$$R_2 \leqslant C_{20}\sqrt{t_2 - t_1} + C_{18}(t_2 - t_1).$$

Використовуючи вигляд функції Ґріна та виділяючи з ряду доданок, що відповідає $n = 0$, оцінимо R_1

$$R_1 \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}} \max_{[0,T]} |\mu_1'(t)| \left(\int\limits_0^{t_1} \left| \frac{1}{\sqrt{\theta(t_2)-\theta(\tau)}} - \frac{1}{\sqrt{\theta(t_1)-\theta(\tau)}} \right| d\tau + 2\int\limits_0^{t_1} \left| \frac{1}{\sqrt{\theta(t_2)-\theta(\tau)}} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2h^2}{\theta(t_2)-\theta(\tau)} \right) - \frac{1}{\sqrt{\theta(t_1)-\theta(\tau)}} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2h^2}{\theta(t_1)-\theta(\tau)} \right) \right| d\tau \right) \equiv$$

$$\equiv R_{1,1} + R_{1,2}.$$

Розглянемо вираз

$$\frac{1}{\sqrt{\theta(t_1)-\theta(\tau)}} - \frac{1}{\sqrt{\theta(t_2)-\theta(\tau)}} =$$

$$= \frac{\theta(t_2)-\theta(t_1)}{\sqrt{(\theta(t_2)-\theta(\tau))(\theta(t_1)-\theta(\tau))}(\sqrt{\theta(t_1)-\theta(\tau)} + \sqrt{\theta(t_2)-\theta(\tau)})}.$$

Тоді для $R_{1,1}$ одержуємо

$$R_{1,1} \leqslant \frac{A_1(\beta+1)^{3/2}}{2\sqrt{\pi}A_0^{3/2}} \max_{[0,T]} |\mu_1'(t)| \int\limits_0^{t_1} \left(\frac{1}{\sqrt{t_1^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}}} - \frac{1}{\sqrt{t_2^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}}} \right) d\tau.$$

Після заміни змінних $z = \dfrac{\tau}{t_1}$ знаходимо

$$R_{1,1} \leqslant C_{21} t_1^{\frac{1-\beta}{2}} \left(\int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^{\beta+1}}} - \int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(t_2/t_1)^{\beta+1} - z^{\beta+1}}} \right).$$

Позначимо

$$K(\omega) \equiv \int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{\omega - z^{\beta+1}}}, \quad \text{де} \quad \omega \in [1, \infty). \tag{25}$$

Очевидно, що $\int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{\omega - z^{\beta+1}}} \leqslant \int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z}}$. З цього випливає, що функція $K(\omega)$ неперервна на $[1,\infty)$. Отже, для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta_1 > 0$, що $R_{1,1} < \varepsilon$, коли $|t_2 - t_1| < \delta_1$. Подамо $R_{1,2}$ у вигляді

$$R_{1,2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \max_{[0,T]} |\mu_1'(t)| \int\limits_0^{t_1} \left| \int\limits_{\theta(t_1)-\theta(\tau)}^{\theta(t_2)-\theta(\tau)} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2h^2}{z}\right)\right) dz \right| d\tau.$$

За допомогою нерівності $x^p \exp(-qx^2) \leqslant M_{p,q} < \infty, x \in [0,\infty), p \geqslant 0, q > 0$ ми приходимо до оцінки

$$R_{1,2} \leqslant C_{22}|\theta(t_2) - \theta(t_1)| \leqslant C_{23}|t_2^{\beta+1} - t_1^{\beta+1}| < \varepsilon, \quad \text{коли} \quad |t_2 - t_1| < \delta_2.$$

Оцінювання інших виразів, які входять у (24), проводиться аналогічно до невиродженого випадку [3]. Отже, оператор P цілком неперервний на N. За теоремою Шаудера розв'язок системи (9),(12) існує. За еквівалентністю системи рівнянь (9),(12) та задачі (1)-(4) одержуємо твердження теореми при $t \in [0, t_0]$, де число $t_0, 0 < t_0 \leqslant T$ визначається вихідними даними задачі.

Доведемо єдиність розв'язку задачі (1)-(4).

Теорема єдиності. *Припустимо, що виконуються умови:*
1) $\varphi \in C^2[0,h]$; $\mu_i \in C^1[0,T], i = 1,2$; $b \in C[0,T]$; $f \in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$;
2) $\mu_3(t) \neq 0, t \in (0,T]$ *і існує границя* $\lim\limits_{t\to+0} \frac{\mu_3(t)}{t^\beta} \neq 0$.
Тоді розв'язок задачі (1)-(4) єдиний.

Доведення. Нехай $(a_i(t), u_i(x,t)), i = 1,2,$ – два розв'язки задачі (1)-(4). Для їхньої різниці $a(t) = a_1(t) - a_2(t)$, $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ отримуємо задачу

$$u_t = a_1(t)u_{xx} + b(t)u_x + a(t)u_{2xx}, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{26}$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in [0,h], \tag{27}$$

$$u(0,t) = u(h,t) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{28}$$

$$a_1(t)u_x(0,t) = -a(t)u_{2x}(0,t), \quad t \in [0,T]. \tag{29}$$

За допомогою функції Ґріна $G_1^{(1)}(x,t,\xi,\tau)$ для рівняння $u_t = a_1(t)u_{xx}$ задачу (26)-(28) зведемо до інтегро-диференціального рівняння

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_1^{(1)}(x,t,\xi,\tau)(a(\tau)u_{2\xi\xi}(\xi,\tau) + b(\tau)u_\xi(\xi,\tau))d\xi d\tau.$$

Диференціюючи цей вираз і підставляючи його в (29), отримаємо

$$a(t)u_{2x}(0,t) = -a_1(t)\int_0^t\int_0^h G_{1x}^{(1)}(0,t,\xi,\tau)(a(\tau)u_{2\xi\xi}(\xi,\tau) + b(\tau)u_\xi(\xi,\tau))d\xi d\tau.$$

Введемо позначення $v(x,t) \equiv u_x(x,t)$, $a_0(t) \equiv \dfrac{a(t)}{t^\beta}$. У цих позначеннях задача (26)-(29) зводиться до системи рівнянь

$$a_0(t) = -\frac{a_1(t)}{t^\beta u_{2x}(0,t)}\int_0^t\int_0^h G_{1x}^{(1)}(0,t,\xi,\tau)(a_0(\tau)\tau^\beta u_{2\xi\xi}(\xi,\tau) + b(\tau)v(\xi,\tau))d\xi d\tau,$$

$$v(x,t) = \int_0^t\int_0^h G_{1x}^{(1)}(x,t,\xi,\tau)(a_0(\tau)\tau^\beta u_{2\xi\xi}(\xi,\tau) + b(\tau)v(\xi,\tau))d\xi d\tau, \tag{30}$$

або

$$a_0(t) = \int_0^t K_{11}(t,\tau)a_0(\tau)d\tau + \int_0^t\int_0^h K_{12}(\xi,t,\tau)v(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

$$v(x,t) = \int_0^t K_{21}(x,t,\tau)a_0(\tau)d\tau + \int_0^t\int_0^h K_{22}(x,t,\xi,\tau)v(\xi,\tau)d\xi d\tau. \tag{31}$$

Доведемо інтегровність ядер $K_{ij}, i,j = 1,2$. Подамо розв'язок $u_2(x,t)$ задачі (1)-(4) у вигляді (8) з функцією Ґріна $G_1^{(2)}(x,t,\xi,\tau)$ для рівняння $u_t = a_2(t)u_{xx}$. Знайдемо $u_{2xx}(x,t)$

$$u_{2xx}(x,t) = u_{02xx}(x,t) + \int_0^t d\tau\int_0^h G_{1xx}^{(2)}(x,t,\xi,\tau)b(\tau)u_{2\xi}(\xi,\tau)d\xi, \tag{32}$$

де

$$u_{02xx}(x,t) = \int_0^h G_1^{(2)}(x,t,\xi,0)\varphi''(\xi)d\xi + \int_0^t G_{1\xi}^{(2)}(x,t,0,\tau)\mu_1'(\tau)d\tau -$$

$$-\int_0^t G_{1\xi}^{(2)}(x,t,h,\tau)\mu_2'(\tau)d\tau + \int_0^t d\tau\int_0^h G_{1xx}^{(2)}(x,t,\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi.$$

Інтегруючи частинами з використанням властивостей функції Ґріна, з (32) отримуємо

$$u_{2xx}(x,t) = \int_0^h G_1^{(2)}(x,t,\xi,0)\varphi''(\xi)d\xi + \int_0^t G_{1\xi}^{(2)}(x,t,0,\tau)(\mu_1'(\tau) - f(0,\tau) - b(\tau)u_{2\xi}(0,\tau))d\tau +$$

$$+\int_0^t G_{1\xi}^{(2)}(x,t,h,\tau)(f(h,\tau)-\mu_2'(\tau)+b(\tau)u_{2\xi}(h,\tau))d\tau-$$

$$-\int_0^t\int_0^h G_{1\xi}^{(2)}(x,t,\xi,\tau)(f_\xi(\xi,\tau)+u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)b(\tau))d\xi d\tau$$

або

$$u_{2xx}(x,t)=\widetilde{u}(x,t)-\int_0^t\int_0^h G_{1\xi}^{(2)}(x,t,\xi,\tau)u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)b(\tau)d\xi d\tau. \tag{33}$$

Подамо $\widetilde{u}(x,t)$ у вигляді $\widetilde{u}(x,t)=\sum\limits_{i=1}^{4}I_i$. Оцінимо кожен доданок цього виразу. З того, що $G_1^{(2)}(x,t,\xi,0)<G_2^{(2)}(x,t,\xi,0)$ та $\int\limits_0^h G_2^{(2)}(x,t,\xi,0)d\xi=1$, для доданку I_1 запишемо

$$|I_1|\leqslant\max_{x\in[0,h]}|\varphi''(x)|\int_0^h G_2^{(2)}(x,t,\xi,0)d\xi\leqslant C_{24}.$$

Оцінимо I_2

$$|I_2|=\left|\int_0^t G_{1\xi}^{(2)}(x,t,0,\tau)(\mu_1'(\tau)-f(0,\tau)-b(\tau)u_{2\xi}(0,\tau))d\tau\right|\leqslant$$

$$\leqslant C_{25}\int_0^t\left|G_{1\xi}^{(2)}(x,t,0,\tau)\right|d\tau.$$

Підставляючи замість функції Ґріна її вираз і враховуючи нерівність

$$1\leqslant\frac{1-x^{\beta+1}}{1-x}\leqslant 1+\beta,\quad x\in[0,1],\quad \beta\in(0,1),$$

отримаємо

$$\int_0^t|G_{1\xi}^{(2)}(x,t,0,\tau)|d\tau\leqslant\frac{C_{26}}{t^{(3\beta+1)/2}}\int_0^1\frac{1}{z^{3/2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x+2nh|\exp\left(-\frac{C_{27}(x+2nh)^2}{t^{\beta+1}z}\right)dz.$$

Зводячи останній інтеграл до інтеграла ймовірності та використовуючи його властивості, приходимо до оцінки

$$|I_2|\leqslant\frac{C_{28}}{t^\beta}.$$

Доданок I_3 оцінюється аналогічно до I_2, а для I_4 запишемо

$$|I_4| \leqslant \max_{\overline{Q}_T} |f_x(x,t)| \int_0^t \int_0^h |G_{1\xi}^{(2)}(x,t,\xi,\tau)| d\xi d\tau \leqslant C_{29} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}} \leqslant$$

$$\leqslant C_{30} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}} \leqslant C_{31} t^{\frac{1-\beta}{2}}.$$

Отже, для $\widetilde{u}(x,t)$ доведена оцінка

$$|\widetilde{u}(x,t)| \leqslant \frac{C_{32}}{t^{\beta}}. \tag{34}$$

З оцінки I_4 випливає, що ядро інтегрального рівняння (33) має слабку особливість. Тоді з (34) отримуємо оцінку для $u_{2xx}(x,t)$

$$|u_{2xx}(x,t)| \leqslant \frac{C_{33}}{t^{\beta}}. \tag{35}$$

Звідси випливає, що ядра системи (31) мають інтегровну особливість, тому за властивостями інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду система має тільки тривіальний розв'язок $a_0(t) \equiv 0, v(x,t) \equiv 0, (x,t) \in \overline{Q}_T$. Теорему доведено.

---

1. *Гаджиев М.М.* Обратная задача для вырождающегося эллиптического уравнения // Применение методов функионального анализа в уравнениях математической физики. – Новосибирск. – 1987. – С. 66-71.

2. *Елдесбаев Т.* Об одной обратной задаче для вырождающегося гиперболического уравнения второго порядка // Известия АН КазССР. Серия физико-математическая. – 1987. – N 3. – С. 27-29.

3. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. VNTL Publishers. – 2003.

INVERSE PROBLEM FOR A DEGENERATE PARABOLIC EQUATION

Nataliya Saldina

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine

We establish conditions for the existence and uniqueness of a solution of inverse problem for a weakly degenerate parabolic equation with unknown time-dependent coefficient at the higher-order derivative which vanishes at the initial moment as a power $t^\beta, \beta < 1$.

Key words: inverse problem, parabolic equation, Green function, the Schauder fixed-point theorem.

Стаття надійшла до редколегії 18.05.2005

Прийнята до друку 19.10.2005