ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2005. Вип.64. С.258–265 *Ser.Mech-Math.2005. Vol.64. P.258–265*

УДК 517.5

ПРО ПОХІДНІ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

Олег СКАСКІВ, Ярослав СТАСЮК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Для абсолютно збіжного у півплощині $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$ ряду Діріхле $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, $\lambda_n \in \mathbb{R}_+$ доведено, що умова $|x|L(x, F) \to +\infty$ $(x \to -0)$ достатня для правильності співвідношення $F^{(k)} = (1 + o(1))L^k(x, F)F(z)$ для кожного $k \in \mathbb{N}$ при $x \to -0$ зовні деякої множини нульової лінійної щільності в точці $x = 0$ і для всіх z, $\operatorname{Re} z = x$ таких, що $|F(z)| = (1 + o(1))M(x, F)$ $(x \to -0)$, де $M(x, F) = \sup\{|F(x + iy)| : y \in \mathbb{R}\}$, $L(x, F) = (\ln M(x, F))'_+$ – правостороння похідна.

Ключові слова: ряд Діріхле, аналітична функція, похідна.

Нехай $D_b(\lambda)$ – клас абсолютно збіжних в $\{z : \operatorname{Re} z < b\}$ рядів вигляду

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}, \tag{1}$$

де $\lambda = (\lambda_n)$, $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty$ $(1 \le n \to +\infty)$, $-\infty < b \le +\infty$.

Для $-\infty \le a < b \le +\infty$ через $S(a, b)$ позначимо клас аналітичних в $\{z : a < \operatorname{Re} z < b\}$ функцій F таких, що для кожного $x \in (a, b)$ функція F обмежена в смузі $\{z : a < \operatorname{Re} z < x\}$. Зауважимо, що $D_b(\lambda) \subset S(-\infty, b) \subset S(a, b)$ для всіх $-\infty \le a < b \le +\infty$. Для $x \in (a, b)$ і $F \in S(a, b)$ позначимо

$$M(x, F) = \sup\{|F(x + iy)| : y \in \mathbb{R}\}.$$

Відомо ([1, с.145, с.266]), що функція $\ln M(x, F)$ — опукла на (a, b) для $F \in S(a, b)$ і, отже, для всіх $x \in (a, b)$ існує неспадна правостороння похідна

$$L(x) = L(x, F) = (\ln M(x, F))'_+.$$

Для функцій $F \in S(0,+\infty)$ таких, що $L(x,F) \to +\infty$ $(x \to +\infty)$ з доведеного в [1] (с. 149, теорема 1.3.17) випливає, що співвідношення

$$F'(z) = (1+o(1))L(x,F)F(z) \tag{2}$$

є правильним при $x \to +\infty$ зовні деякої множини E скінченної міри для всіх z таких, що $\operatorname{Re} z = x$ і

$$|F(z)| = (1+o(1))M(x,F) \tag{3}$$

при $x \to +\infty$. В [2] це твердження доповнено у частині описання виняткової множини E. В [2] відповідне твердження (теорема 3) доведене для класу $D_{+\infty}(\lambda)$. Аналіз доведення теореми 3 [2] свідчить, що воно залишається правильним і у випадку класу $S(a,+\infty)$ для функцій F таких, що $L(x,F) \to +\infty$ $(x \to +\infty)$.

У випадку класу $S(0,1)$ для функцій F таких, що $(1-x)L(x,F) \to +\infty$ $(x \to 1-0)$, міркуючи подібно до доведення теореми 2.2.25 [1, с. 274], можна довести, що у випадку, коли

$$\varliminf_{x\to 1-0} \frac{\ln L(x,F)}{-\ln(1-x)} > 1, \tag{4}$$

співвідношення (2) виконується при $x \to 1-0$ зовні деякої множини E скінченної логарифмічної міри на $(0,1)$, тобто $\int_{E\cap(0,1)} \frac{dx}{1-x} < +\infty$, для всіх z, $\operatorname{Re} z = x$ таких, що виконується (3). В [1] також доведено аналоги останнього твердження у випадку, коли умову (4) замінено деякою слабшою умовою. Про виняткову множину E відомо лише, по суті, що множина $(0,1)\setminus E$ містить збіжну до 1 послідовність; власне, якщо $\overline{\lim}_{x\to 1-0} \frac{\ln L(x,F)}{-\ln(1-x)} > 1$, то $(0,1)\setminus E$ має нескінченну логарифмічну міру.

Ми подамо інший варіант такого твердження у класі функцій з $S(0,1)$, що задовольняють деяку універсальну умову $L(x,F) \geq \Phi(x)$ $(x_0 \leq x < 1)$ з зростаючою функцією Φ такою, що $(1-x)\Phi(x) \to +\infty$ $(x \to 1-0)$, використовуючи для описання виняткової множини E у співвідношенні (2) щільності множини в точці $x = 1$. Схема доведення така сама як в [1, 2], і полягає в комбінованому використанні леми Шварца для аналітичної функції в крузі, модифікованої нерівності Коші для степеневого ряду та варіанту леми Бореля-Неванлінни у запропонованому в [2, 3] вигляді. Наприкінці статті подамо застосування отриманого твердження до класу $D_0(\lambda)$.

Зазначимо, що нам зручніше замість класу $S(0,1)$ розглянути клас $S(-1,0)$, а також, що з огляду на лінійну заміну змінних $z_1 = b + z(b-a)$, це є рівносильним до розгляду класу $S(a,b)$ з $-\infty < a < b < +\infty$.

Доведемо таку теорему.

Теорема 1. *Нехай $F \in S(-1,0)$ – така, що*

$$L(x,F) \geq \Phi(x) \quad (x_0 \leq x < 0), \tag{5}$$

де Φ — додатна неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[-1,0)$ функція така, що

$$|x|\Phi(x) \to +\infty \quad (x \to -0). \tag{6}$$

Тоді співвідношення (2) виконується при $x \to -0$ $(x \in (-1,0)\setminus E)$ для всіх z, $\operatorname{Re} z = x$ таких, що виконується (3), для кожної додатної неспадної на $(-1,0)$ функції h такої, *що*

$$h(x) = o(\Phi(x)),\ h\left(x + o\left(\frac{1}{h(x)}\right)\right) = O(h(x)) \quad (x \to -0), \tag{7}$$

множина E має нульову $h-$щільність в точці $x = 0$, тобто

$$D_h E = \overline{\lim_{x\to -0}}\, h(x) \operatorname{meas}\,(E \cap [x, 0]) = 0,$$

де meas E_1 *означає міру Лебега вимірної множини* E_1 *на* $(-1, 0)$.

2. Допоміжні твердження. Доведення теореми 1 розіб'ємо на два етапи. Спочатку доведемо, що за умов (5) і (6) зовні множини

$$E = \{x \in (-1, 0) \colon |L(x \pm \delta(x)/L(x)) - L(x)| \ge L(x)/\delta(x), \tag{8}$$

де $\delta(x) \nearrow +\infty\ x \to -0)$ – деяка функція така, що $\delta(L(x)) < |x|L(x)$, виконується співвідношення (2), як тільки множина $(-1,0) \setminus E$ містить хоча б одну збіжну до нуля послідовність. Потім, скориставшись доведеним в [3] варіантом леми Бореля-Неванлінни, доведемо, що $D_h E = 0$ для кожної функції h такої, що виконується (7).

Лема 1. *Нехай $F \in S(-1, 0)$ і функція $\delta(x) \nearrow +\infty$ $(x \to -0)$ — такі, що $\delta(x) < |x|L(x, F)$ $(x \in (x_0, 0))$ і множина E, визначена в (8), містить хоча б одну збіжну до нуля послідовність. Тоді співвідношення (2) виконується при $x \to -0$ $(x \in (-1, 0) \setminus E)$ для всіх z, $\operatorname{Re} z = x$ таких, що виконується (3).*

Лема 2 [3]. *Нехай $u(x)$ — додатна неспадна на $(-1, 0)$ функція, а функції Φ і h — додатні неперервні неспадні на $(-1, 0)$ і такі, що виконуються умови (6) і (7). Якщо*

$$u(x) \ge \Phi(x) \quad (x_0 \le x < 0),$$

то існує така функція $\delta(x) \nearrow +\infty$ $(x \to -0)$, що нерівність

$$|u(x + \tau) - u(x)| < u(x)/\delta(x)$$

виконується для всіх $x \in (-1, 0) \setminus E$ і всіх $\tau \in \mathbb{R}$, $|\tau| \le \psi(x) \equiv \delta(x)/u(x)$, при цьому множина E має нульову h- щільність в точці $x = 0$.

Доведення леми 1. Повторюємо схему доведення теореми 3 [2], а також міркування з [3]. Позначимо $\psi(x) = \delta(x)/L(x, F)$. Для всіх $x \in (-1, 0) \setminus E$ і $\tau \in \mathbb{C}$, $|\tau| \le \psi(x)$ маємо

$$|L(x + \tau, F) - L(x, F)| \le$$
$$\le \max\{L(x + \psi(x), F) - L(x, F), L(x, F) - L(x - \psi(x), F)\} \le 1/\psi(x).$$

Нехай $\varepsilon(x) \to +0$ $(x \to -0)$ – фіксована функція, а $z = x + iy$ – довільна точка така, що $|F(z)| \ge M(x, F)(1 + \varepsilon(x))^{-1}$. З того, що $L(x, F) \nearrow$, випливає ([1, с. 147]), що для всіх $x \in (-1, 0)$, $h \in \mathbb{R}$, $|x| - 1 < h < |x|$

$$\ln M(x + h, F) - \ln M(x, F) \le hL(x + h, F),$$

звідки для $x \in (-1,0) \setminus E$, $h \in \mathbb{R}$, $|h| \le \psi(x)$

$$\ln M(x+h,F) - \ln M(x,F) - hL(x,F) \le h(L(x+h,F) - L(x,F)) = \\ = |h||L(x+h,F) - L(x,F)| \le 1.$$

Звідси для $x \in (-1,0) \setminus E$, $\eta \in \mathbb{C}$, $|\operatorname{Re}\eta| \le \psi(x)$

$$\left|\frac{F(z+\eta)}{F(z)} e^{-\eta L(x,F)}\right| \le \\ \le (1+\varepsilon(x)) \exp\{\ln M(x+\operatorname{Re}\eta, F) - \ln M(x,F) - \operatorname{Re}\eta L(x,F)\} \le \\ \le e(1+\varepsilon(x)) = c(x) - 1.$$

Застосуємо тепер при фіксованому z до аналітичної функції

$$g(\eta) = \frac{F(z+\eta)}{F(z)} e^{-\eta L(x,F)} - 1$$

в крузі $\{\eta \colon |\eta| \le \psi(x)\}$ лему Шварца. За лемою Шварца [4, с.317], для всіх $\eta \in \mathbb{C}$, $|\eta| < \psi(x)$

$$|g(\eta)| < c(x) \frac{|\eta|}{\psi(x)}. \tag{9}$$

Позаяк $|g(\eta)| < 1$ при $|\eta| < \psi(x)/c(x)$, $x \in (-1,0) \setminus E$, то

$$\left|\frac{F(z+\eta)}{F(z)} e^{-\eta L(x,F)}\right| \ge 1 - |g(\eta)| > 0,$$

тобто $F(z+\eta) \ne 0$ для $|\eta| < \psi(x)/c(x)$. Отже, при фіксованому z, такому, як і вище, функція

$$G(\eta) = \int\limits_0^\eta \frac{F'(z+\tau)}{F(z+\tau)} d\tau - \eta L(x,F)$$

аналітична в крузі $\{\eta \colon |\eta| < \psi(x)/c(x)\}$, $G(0) = 0$ і $G'(0) = \frac{F'(z)}{F(z)} - L(x,F)$. Враховуючи, що за умови $|\eta| \le q < \psi(x)/c(x)$ з (9) випливає нерівність

$$\operatorname{Re} G(\eta) = \ln \left|\frac{F(z+\eta)}{F(z)} e^{-\eta L(x,F)}\right| = \ln|1 + g(\eta)| \le \ln\left(1 + \frac{qc(x)}{\psi(x)}\right), \tag{10}$$

за модифікованою нерівністю Коші ([5, с.30]), застосованою в крузі $\{\eta \colon |\eta| \le q\}$, отримаємо

$$\left|\frac{F'(z)}{F(z)} - L(x,F)\right| = |G'(0)| \le 2\max\{\operatorname{Re} G(\eta) \colon |\eta| = q\} \le \\ \le 2\ln\left(1 + \frac{qc(x)}{\psi(x)}\right) \le \frac{2c(x)}{\psi(x)}. \tag{11}$$

Звідси при $x \to -0$ ($x \notin E$) і для всіх z, $\operatorname{Re} z = x$ таких, що $|F(z)| \geq M(x,F)(1+\varepsilon(x))^{-1}$,

$$\left|\frac{F'(z)}{F(z)}\frac{1}{L(x,F)} - 1\right| \leq \frac{2c(x)}{L(x,F)\psi(x)} = \frac{c(x)}{\delta(x)} = o(1).$$

Лему 1 доведено.

3. Доведення теореми 1. Виберемо у лемі 2 $u(x) = L(x,F)$. Тоді, застосовуючи послідовно лему 2, за лемою 1, отримуємо твердження теореми 1, позаяк, очевидно, що $E \subset E_1$, де E — множина, визначена в (8), а E_1 — множина з леми 2.

4. Асимптотичні співвідношення для похідних вищих порядків.

Теорема 2. *Нехай для функцій $F \in S(-1,0), \Phi, h$ виконуються умови (5)–(7) теореми 1. Тоді існує множина $E \subset (-1,0)$, $D_h E = 0$ така, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ співвідношення*

$$F^{(k)}(z) = (1+o(1))L^k(x,F)F(z) \tag{12}$$

виконується при $x \to -0$ ($x \in (-1,0)\setminus E$) для всіх z, $\operatorname{Re} z = x$ таких, що виконується (3).

Доведення. Зберігаємо позначення з доведення теореми 1. Скориставшись, як і в доведенні леми 1, модифікованою нерівністю Коші, при фіксованому $k \in \mathbb{N}$ для $|\eta| \leq q < \psi(x)/c(x)$ з нерівності (10) отримуємо

$$\frac{1}{k!}\left|G^{(k)}(0)\right| \leq \frac{2}{q^k}\max\{\operatorname{Re} G(\eta)\colon |\eta| = q\} \leq$$
$$\leq 2q^{-k}\ln(1+qc(x)/\psi(x)) \stackrel{\text{def}}{=} \psi_k(x) \leq 2q^{-k+1}c(x)/\psi(x). \tag{13}$$

Зауважимо, що для $|\eta| \leq q$

$$F(z+\eta) = F(z)\exp\left\{\frac{F'(z)}{F(z)}\eta + \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{G^{(k)}(0)}{k!}\eta^k\right\} = F(z)A(\eta) \tag{14}$$

і $A(\eta)$ — аналітична функція, $A(0) = 1$. Нехай

$$A(\eta) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k\eta^k, \quad |\eta| \leq q. \tag{15}$$

Нескладно зрозуміти, що оскільки для $G_1(\eta) = G(\eta) + \eta L(x,F)$ виконується

$$A(\eta) = 1 + \sum_{s=1}^{+\infty}\frac{1}{s!}\left(\frac{F'(z)}{F(z)}\eta + \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{G^{(k)}(0)}{k!}\eta^k\right)^s = 1 + \sum_{s=1}^{+\infty}\frac{1}{s!}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{G_1^{(k)}(0)}{k!}\eta^k\right)^s,$$

то тейлорові коефіцієнти у розвиненні (15) утворені за допомогою скінченних сум вигляду

$$A_k = \sum_{\|\alpha\|=k} B_\alpha \left(G_1'(0)\right)^{\alpha_1}\left(\frac{G_1''(0)}{2!}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\frac{G_1^{(k)}(0)}{k!}\right)^{\alpha_k},$$

де $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ — мультиіндекс, а $\|\alpha\| = \sum_{j=1}^k j\alpha_j$ — його вага, $B_\alpha \in \mathbb{C}$.

Зауважимо тепер, що з розвинень $F(z+\eta) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{F^{(k)}(z)}{k!}\eta^k$ і (14) випливає, що $F^{(k)}(z) = F(z)k!A_k$ $(k \geq 1)$, тому

$$\frac{F^{(k)}(z)}{F(z)} \frac{1}{L^k(x,F)} - 1 = \left(\frac{F'(z)}{F(z)} \frac{1}{L(x,F)}\right)^k - 1 + \sum_{\substack{\|\alpha\|=k \\ \alpha_1<k}} B_\alpha \prod_{j=1}^k \left(\frac{G_1^{(j)}(0)}{j!}\right)^{\alpha_j}$$

і, отже, за допомогою нерівностей (12) і (13) отримуємо, що для $q = \frac{1}{2}\frac{\psi(x)}{c(x)} = \frac{1}{2}\frac{\delta(x)}{c(x)L(x,F)}$

$$\left|\frac{F^{(k)}(z)}{F(z)} \frac{1}{L^k(x,F)} - 1\right| \leq \left|\left(\frac{F'(z)}{F(z)} \frac{1}{L(x,F)}\right)^k - 1\right| +$$

$$+ \sum_{\substack{\|\alpha\|=k \\ \alpha_1<k}} |B_\alpha|(qL(x,F))^{-k} \left(\frac{2qc(x)}{\psi(x)}\right)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k} \leq$$

$$\leq \left|\frac{F'(z)}{F(z)} \frac{1}{L(x,F)} - 1\right| \sum_{j=0}^{k-1} \left|\frac{F'(z)}{F(z)} \frac{1}{L(x,F)}\right|^j + \sum_{\substack{\|\alpha\|=k \\ \alpha_1<k}} |B_\alpha| \left(\frac{2c(x)}{\delta(x)}\right)^k \leq$$

$$\leq \frac{c(x)}{\delta(x)} \sum_{j=0}^{k-1} \left(1 + \frac{c(x)}{\delta(x)}\right)^j + \sum_{\substack{\|\alpha\|=k \\ \alpha_1<k}} |B_\alpha| \left(\frac{2c(x)}{\delta(x)}\right)^k =$$

$$= \left(1 + \frac{c(x)}{\delta(x)}\right)^k - 1 + \sum_{\substack{\|\alpha\|=k \\ \alpha_1<k}} |B_\alpha| \left(\frac{2c(x)}{\delta(x)}\right)^k.$$

Залишається пригадати, що $c(x) = O(1)$, $\delta(x) \nearrow +\infty$ $(x \to -0)$. Тому при $x \to -0$ $(x \notin E, D_h E = 0)$ для всіх z, $\mathrm{Re}\, z = x$ і таких, що $|F(z)| \geq M(x,F)(1+\varepsilon(x))^{-1}$ отримуємо

$$\left|\frac{F^{(k)}(z)}{F(z)} \frac{1}{L^k(x,F)} - 1\right| = o(1).$$

Теорему 2 доведено.

5. Наслідки для рядів Діріхле й аналітичних в одиничному крузі функцій. Нескладно переконатись, що абсолютно збіжні у півплощині $\Pi_0 = \{z : \mathrm{Re}\, z < 0\}$ ряди Діріхле

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}, \quad \lambda_n \in \mathbb{R}_+ \ (n \geq 0) \tag{16}$$

належать до класу $S(-1;0)$, а також, що ([5, с. 82]) у випадку $\lambda_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$ сума F збіжного ряду (16) належить до $S(-1;0)$. Тому з теореми 1 випливає такий наслідок.

Наслідок 1. *Нехай ряд (16) або абсолютно збіжний в* Π_0, *або виконується умова* $\lambda_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$ *і ряд (16) збіжний в* Π_0. *Нехай виконується умова*

$$|x|L(x, F) \to +\infty \quad (x \to -0).$$

Тоді існує така множина $E \subset (-1, 0)$, *що для кожного* $k \in \mathbb{N}$ *співвідношення (12) виконується при* $x \to -0$ $(x \notin E)$ *для всіх* z, $\operatorname{Re} z = x$ *таких, що виконується (3), при цьому* $\operatorname{meas}(E \cap [x, 0]) = o(|x|)$ $(x \to -0)$.

Доведення. Достатньо застосувати теорему 2 з функціями $\Phi(x) = L(x, F)$ та $h(x) = \frac{1}{|x|}$.

Наслідок 2. *Нехай для аналітичної в одиничному крузі* $\mathrm{U} = \{w : |w| < 1\}$ *функції* $f(w)$ *виконується умова*

$$(1 - r)K_f(r) \to +\infty \quad (r \to 1 - 0),$$

де $K_f(r) = (\ln M_f(r))'$, $M_f(r) = \max\{|f(w)| : |w| = r\}$. *Тоді співвідношення*

$$f^{(k)}(w) = (1 + o(1))K_f^k(r)f(w)$$

виконується при $r \to 1 - 0$ *для всіх* $w \in U$, $|w| = r$ *таких, що*

$$|f(w)| = (1 + o(1))M_f(r) \quad (r \to 1 - 0)$$

зовні деякої множини $E_1 \subset [0, 1)$ *такої, що*

$$D^1 E_1 = \varlimsup_{r \to 1-0} \frac{1}{1 - r} \operatorname{meas}(E_1 \cap [r, 1)) = 0.$$

Доведення. Достатньо, як і в [3] при доведенні наслідку 4, перевірити можливість застосування наслідку 1 до функції $F(z) = f(e^z)$.

---

1. *Стрелиц Ш. И.* Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений. – Вильнюс, 1972.

2. *Salo T. M., Skaskiv O. B., Stasyuk Ya. Z.* On a central exponent of entire Dirichlet series // Mat. Studii.– 2003.– Vol.19. – N 1.– P.61–72.

3. *Skaskiv O. B., Stasyuk Ya. Z.* On the Wiman theorem for absolutely convergent Dirichlet series // Mat. Studii.– 2003.– Vol.20. – N 2.– P.133-142.

4. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. – М., 1967. – Т. 1.

5. *Леонтьев А. Ф.* Целые функции. Ряды экспонент.– М., 1983.

ON THE DERIVATIVES OF THE DIRICHLET SERIES

Oleh Skaskiv, Yaroslav Stasyuk

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine

For absolutely convergent in the half-plane $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$ Dirichlet series $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, $\lambda_n \in \mathbb{R}_+$, it is proved that the condition $|x|L(x, F) \to +\infty$ $(x \to -0)$ is sufficient for the relation

$$F^{(k)} = (1 + o(1))L^k(x, F)F(z)$$

to hold as $x \to -0$ outside a certain set of zero linear density in the point $x = 0$ for every $k \in \mathbb{N}$ and for all z such that $\operatorname{Re} z = x$ and $|F(z)| = (1 + o(1))M(x, F)$ $(x \to -0)$, where $M(x, F) = \sup\{|F(x + iy)| : y \in \mathbb{R}\}$ and $L(x, F) = (\ln M(x, F))'_+$ is the derivative from the right.

Key words: Dirichlet series, analytic function, derivative.

Стаття надійшла до редколегії 09.07.2004

Прийнята до друку 19.10.2005