ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2005. Вип.64. С.280–286 *Ser.Mech-Math.2005. Vol.64. P.280–286*

УДК 517.518+517.982

НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ПРОСТОРУ L_2 $(C, \alpha > 0)$-СЕРЕДНІМИ ІХ ОРТОПОДІБНИХ РОЗВИНЕНЬ

Леонід ТКАЧУК

Південноукраїнський державний педагогічний університет ім. К. Д. Ушинського, вул. Старопортофранківська, 26 65091 Одеса, Україна

Розглянуто системи розвинення подібні до ортогогнальних. Для цих систем отримано аналог теореми Качмажа-Штейнгауза.

Ключові слова: ортоподібні системи, чезарівські середні, теорема Качмажа-Штейнгауза.

У працях [1–3] розглянуто невід'ємні системи розвинення подібні до ортогональних (ортоподібні системи). Такі системи є узагальненням ортогональних систем і більшість властивостей ортогональних систем притаманні невід'ємним ортоподібним системам.

Нехай Ω – простір із визначеною на ньому σ-адитивною невід'ємною мірою μ, $\{e_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ – невід'ємна ортоподібна в гільбертовому просторі H система, $\{\Omega_n\}_{n=0}^{\infty}$ – довільне вичерпування Ω, $c(\omega) \in L_2(\Omega)$ – довільна функція така, що $c(\omega)e_\omega \in L(\Omega)$. В [1] доведено, що правильні такі твердження.

Кожний елемент y простору H може бути поданий у вигляді розвинення за системою $\{e_\omega\}$: $y = \int\limits_{\Omega}(y, e_\omega)e_\omega d\mu(\omega)$.

Якщо

$$\int\limits_{\Omega} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) < \infty, \tag{1}$$

то для довільного вичерпування $\{\Omega_n\}_{n=0}^{\infty}$ простору Ω існує єдина границя

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega_n} c(\omega)e_\omega d\mu(\omega)$$

(аналог теореми Ріса-Фішера).

Якщо виконується умова (1), то для довільної вимірної множини $E \subset \Omega$ правильна нерівність

$$\left\| \int\limits_{\Omega \setminus E} c(\omega) e_\omega d\mu(\omega) \right\|^2 \leqslant \int\limits_{\Omega \setminus E} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega). \tag{2}$$

Важливе практичне значення відіграє теорія ортогональних систем функцій. Аналогічну теорію можна побудувати і для ортоподібних систем. У праці [3] доведено аналоги теорем Меньшова-Радемахера [4, с.87-88] про збіжність майже всюди, В. Орлича [4, с.108-110] і К. Тандорі [5, с.348-349] про безумовну збіжність, а також аналог леми Меньшова-Радемахера й аналоги деяких наслідків із зазначених теорем.

Надалі приймемо: X – простір із зчисленно-адитивною невід'ємною мірою $\xi(x)$, Ω – простір із визначеною на ньому σ-адитивною невід'ємною мірою μ, $\{e_\omega(x)\}_{\omega\in\Omega}$ – невід'ємна ортоподібна в просторі $H = L_2(X)$ система, $\{\Omega_n\}_{n=0}^{\infty}$ – довільне вичерпування Ω, $\Omega_0 = \emptyset$, $c(\omega)e_\omega(x) \in L(\Omega)$.

Наведемо формулювання такої теореми.

Теорема А (аналог теореми Меньшова-Радемахера). *Нехай $\{\Omega_k\}_{k=0}^{\infty}$ – таке вичерпування Ω, що функція $c(\omega)e_\omega(x)$ інтегровна за Лебегом на $\Omega_k, k = 0, 1, \ldots$. Якщо функція $c(\omega)$ задовольняє умову*

$$\int\limits_{\Omega_1 \setminus \Omega_0} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) + \sum_{k=2}^{\infty} \log_2^2 k \int\limits_{\Omega_k \setminus \Omega_{k-1}} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) < \infty,$$

то послідовність частинних інтегралів $I_k(x) = \int\limits_{\Omega_k} c(\omega)e_\omega(x)d\mu(\omega)$ збігається майже всюди на X.

1. Наближення (C, α)-середніми в просторі L_2. Приймемо позначення: $I_n(x) = \int\limits_{\Omega_n} c(\omega)e_\omega(x)d\mu(\omega)$ – n-ий частинний інтеграл функції $y(x) = \int\limits_{\Omega} c(\omega)e_\omega(x)d\mu(\omega)$, $\sigma_n^\alpha(x) = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum\limits_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} I_k(x)$ – (C, α)-середні для послідовності частинних інтегралів $\{I_n(x)\}$, де $\alpha > 0$ і $A_n^\alpha = \left(\frac{n+\alpha}{n}\right)$. У випадку, коли $\alpha = 1$, то за аналогією з теорією рядів замість σ_n^α записуватимемо σ_n.

Означення 1. *Будемо говорити, що елемент $y(x) = \int\limits_{\Omega} c(\omega)e_\omega(x)d\mu(\omega)$ з простору H в точці $x_0 \in X$ можна наблизити (C, α)-середніми, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n^\alpha(x_0) = y(x_0)$.*

Означення 2. *Говоритимемо, що елемент $y(x) = \int\limits_{\Omega} c(\omega)e_\omega(x)d\mu(\omega)$ з простору H в точці $x_0 \in X$ можна сильно наблизити (C, α)-середніми, якщо*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \left|\sigma_n^{\alpha-1}(x_0) - y(x_0)\right|^2 = 0.$$

Наближення (C,α)-середніми та сильне наближення (C,α)-середніми елементів простору $H = L_2$ є аналогами методів підсумовування (C,α)-середніми і сильного підсумовування (C,α)-середніми в теорії рядів.

Якщо записати

$$y(x) = \int\limits_{\Omega} c(\omega)e_\omega(x)d\mu(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega_n\setminus\Omega_{n-1}} c(\omega)e_\omega d\mu(\omega),$$

то очевидно, що частинний інтеграл $I_n(x)$ становитиме n-у частинну суму цього ряду, (C,α)-середні є чезарівськими середніми порядку α для частинних сум ряду, а сильне наближення (C,α)-середніми рівносильне сильній (C,α)-сумовності ряду. Тому для наближень (C,α)-середніми правильні аналоги теорем теорії числових рядів, зокрема правильні такі теореми.

Теорема В. *Якщо елемент $y(x)$ можна наблизити $(C,\alpha > -1)$-середніми в деякій точці $x_0 \in X$, то для довільного $\beta > 0$ $y(x)$ в цій точці можна наблизити $(C,\alpha+\beta)$-середніми* [4, с.76].

Теорема С. *Якщо $\alpha > \frac{1}{2}$, то з того, що $y(x)$ допускає сильне наближення (C,α)-середніми в точці $x_0 \in X$, випливає, що в цій точці $y(x)$ можна наблизити $(C,\alpha-\frac{1}{2}+\varepsilon)$-середніми при довільному $\varepsilon > 0$* [4, с.83-84].

2. Критерій наближення функцій (C,α)-середніми.

Лема 1. *Нехай $\Lambda_0 \subset \Lambda_1 \subset \ldots \subset \Lambda_n$ – вимірні підмножини простору Ω, $\{t_i\}_{i=1}^n \subset$ і функція $a(\omega)$ задана так:*

$$a(\omega) = \begin{cases} t_i c(\omega), & \omega \in \Lambda_i \setminus \Lambda_{i-1}, i = 1,2,\ldots n, \\ c(\omega), & \omega \notin \Lambda_n \setminus \Lambda_0. \end{cases}$$

Якщо виконується (1), *то* $\left\| \int\limits_{\Lambda_n\setminus\Lambda_0} a(\omega)e_\omega d\mu(\omega) \right\|^2 \leqslant \int\limits_{\Lambda_n\setminus\Lambda_0} |a(\omega)|^2 d\mu(\omega).$

Доведення. Маємо

$$\int\limits_{\Lambda_n\setminus\Lambda_0} |a(\omega)|^2 d\mu(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Lambda_i\setminus\Lambda_{i-1}} |t_i c(\omega)|^2 d\mu(\omega) \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}\{|t_i|^2\} \int\limits_{\Lambda_n\setminus\Lambda_0} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega).$$

Оскільки $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{|t_i|^2\}$ – скінченне, хоча, можливо, і досить велике число і

$$\int\limits_{\Omega} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) < \infty,$$

то

$$\int\limits_{\Omega} |a(\omega)|^2 d\mu(\omega) = \int\limits_{\Lambda_n\setminus\Lambda_0} |a(\omega)|^2 d\mu(\omega) + \int\limits_{\Omega\setminus(\Lambda_n\setminus\Lambda_0)} |a(\omega)|^2 d\mu(\omega) =$$

$$= \max_{1\leqslant i\leqslant n}\{|t_i|^2\} \int\limits_{\Lambda_n\setminus\Lambda_0} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) + \int\limits_{\Omega\setminus(\Lambda_n\setminus\Lambda_0)} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) < \infty.$$

Згідно з (2)

$$\left\| \int\limits_{\Lambda_n\setminus\Lambda_0} a(\omega) e_\omega d\mu(\omega) \right\|^2 \leqslant \int\limits_{\Lambda_n\setminus\Lambda_0} |a(\omega)|^2 d\mu(\omega).$$

Лема доведена.

Лема 2. *Якщо виконується умова* (1) *і для деякого* $\alpha > \frac{1}{2}$ *елемент* $y(x)$ *майже всюди на* X *наближається* (C,α)*-середніми, то він також майже всюди на* X *сильно наближається* (C,α)*-середніми.*

Доведення. Оцінимо величину $\delta_k^\alpha(x) = \frac{1}{k+1}\sum\limits_{n=0}^{k} |\sigma_n^{\alpha-1}(x) - \sigma_n^\alpha(x)|^2$. Оскільки

$$\sigma_n^{\alpha-1}(x) - \sigma_n^\alpha(x) = \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{i=1}^{n} i A_{n-i}^{\alpha-1} \int\limits_{\Omega_i\setminus\Omega_{i-1}} c(\omega) e_\omega(x) d\mu(\omega),$$

то позначимо

$$a(\omega) = \begin{cases} \dfrac{iA_{n-i}^{\alpha-1}}{\alpha A_n^\alpha} c(\omega), & \omega \in \Omega_i \setminus \Omega_{i-1}, i = 1, 2, \dots n, \\ c(\omega), & \omega \notin \Omega_n \setminus \Omega_0. \end{cases}$$

Застосовуючи лему 1, одержимо

$$\int\limits_X \delta_{2^m}^\alpha d\xi(x) \leqslant \frac{1}{(2^m+1)\alpha^2} \sum_{\nu=0}^{2^m} \frac{1}{(A_\nu^\alpha)^2} \sum_{i=1}^{\nu} \left(A_{\nu-i}^{\alpha-1}\right)^2 i^2 \int\limits_{\Omega_i\setminus\Omega_{i-1}} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega).$$

Тоді результат леми отримуємо тими самими міркуваннями, що і в теоремі 2.6.2 [4, с.117-118]. Лема доведена.

Теорема 1. *Якщо виконується співвідношення* (1), *то для довільної лакунарної послідовності* ν_n *майже всюди на* X *виконується*

$$I_{\nu_n}(x) - \sigma_{\nu_n}(x) = o_x(1).$$

Доведення. Маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_X |I_{\nu_n}(x) - \sigma_{\nu_n}(x)|^2 d\xi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\nu_n+1)^2} \left\| \sum_{k=0}^{\nu_n} (I_{\nu_n}(x) - I_k(x)) \right\|^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\nu_n+1)^2} \left\| \sum_{k=1}^{\nu_n} k \int\limits_{\Omega_k\setminus\Omega_{k-1}} c(\omega) e_\omega(x) d\mu(\omega) \right\|^2 . \qquad (3)$$

Позначимо

$$a_{\nu_n}(\omega) = \begin{cases} kc(\omega), & \omega \in \Omega_k \setminus \Omega_{k-1}, k = 1, 2, \dots \nu_n, \\ c(\omega), & \omega \in \Omega \setminus \Omega_{\nu_n}. \end{cases}$$

Згідно з лемою 1

$$\left\| \int\limits_{\Omega_{\nu_n}} a_{\nu_n}(\omega) e_\omega(x) d\mu(\omega) \right\|^2 \leqslant \int\limits_{\Omega_{\nu_n}} |a_{\nu_n}(\omega)|^2 d\mu(\omega) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\nu_n} k^2 \int\limits_{\Omega_k \setminus \Omega_{k-1}} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega). \tag{4}$$

З (3) і (4) випливає, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_X |I_{\nu_n}(x) - \sigma_{\nu_n}(x)|^2 \, d\xi(x) = O(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\nu_n+1)^2} \left\| \sum_{k=1}^{\nu_n} k \int\limits_{\Omega_k \setminus \Omega_{k-1}} c(\omega) e_\omega(x) d\mu(\omega) \right\|^2.$$

Виконуючи такі самі перетворення, як в [4, с.125], отримаємо, що цей ряд збігається. Тоді за теоремою Леві майже всюди на X збігається також ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |I_{\nu_n}(x) - \sigma_{\nu_n}(x)|^2$ і за необхідною ознакою збіжності ряду майже всюди на X маємо $I_{\nu_n}(x) - \sigma_{\nu_n}(x) = o_x(1)$. Теорема доведена.

З цієї теореми випливає очевидний наслідок.

Наслідок. *Нехай виконується співвідношення* (1). *Якщо майже всюди на* X *функція* $y(x) = \int\limits_\Omega c(\omega) e_\omega(x) d\mu(\omega)$ *наближається* $(C,1)$*-середніми* $\sigma_n(x)$, *то існує лакунарна послідовність* $\{\nu_n\}$, *для якої майже всюди на* X *послідовність частинних інтегралів* $\{I_{\nu_n}(x)\}$ *збігається до* $y(x)$.

Теорема 2. *Нехай виконується умова* (1), q *і* r *– сталі,* $1 < q < r$ *і* $\{\nu_n\} \uparrow \infty$ *– така послідовність натуральних чисел, що* $q \leqslant \frac{\nu_{n+1}}{\nu_n} \leqslant r$. *Якщо послідовність* $I_{\nu_n}(x)$ *майже всюди на* X *збігається до елемента* $y(x)$, *то* $y(x)$ *майже всюди на* X *можна наблизити* $(C, \alpha > 0)$*-середніми.*

Доведення. Доведемо спочатку теорему для випадку $\alpha = 1$. Оскільки $I_{\nu_n} - y(x) = o_x(1)$ майже всюди на X, то майже всюди на X $\sigma_{\nu_n} - y(x) = o_x(1)$. Виберемо натуральне число m таке, що $\nu_n < m \leqslant \nu_{n+1}$. Згідно з доведенням теореми 2.7.2.[4, с.126],

$$|\sigma_m(x) - \sigma_{\nu_n}(x)|^2 = O(1) \sum_{k=\nu_n}^{\nu_{n+1}} k |\sigma_k(x) - \sigma_{k-1}(x)|^2.$$

За лемою 1

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \int\limits_X |\sigma_k(x) - \sigma_{k-1}(x)|^2 d\xi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)^2} \left\| \sum_{i=1}^{k} i \int\limits_{\Omega_i \setminus \Omega_{i-1}} c(\omega) e_\omega(x) d\mu(\omega) \right\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)^2} \sum_{i=1}^{k} i^2 \int\limits_{\Omega_i \setminus \Omega_{i-1}} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) =$$

$$= O(1) \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \int\limits_{\Omega_k \setminus \Omega_{k-1}} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) \sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{1}{\nu^3} = O(1) \int\limits_{\Omega} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) < \infty.$$

Звідси, згідно з теоремою Леві, випливає, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k|\sigma_k(x) - \sigma_{k-1}(x)|^2$ збігається майже всюди на X. Тоді для довільного натурального m маємо $\sigma_m(x) - y(x) = o_x(1)$. Отже, у випадку $\alpha = 1$ теорема доведена.

Використовуючи лему 2, одержимо, що $y(x)$ майже всюди на X сильно наближається $(C, 1)$-середніми. Тоді за теоремою С $y(x)$ наближається $(C, \frac{1}{2} + \epsilon)$-середніми, де ϵ – довільне невід'ємне число. За лемою 2 з цього випливає, що майже всюди на X елемент $y(x)$ сильно наближається $(C, \frac{1}{2} + \epsilon)$-середніми. Застосувавши ще раз теорему С і прийнявши $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$, отримаємо кінцевий результат. Теорема доведена.

З теореми 2 та наслідку теореми 1 безпосередньо одержуємо таку теорему.

Теорема 3. *Нехай виконується співвідношення* (1). *Для того щоб функцію* $y(x) = \int\limits_{\Omega} c(\omega) e_\omega(x) d\mu(\omega) \in L_2(X)$ *майже всюди на* X *можна було наблизити* $(C, \alpha > 0)$-*середніми, необхідно і достатньо, щоб існувала така послідовність* $\{\nu_n\}$, *що* $q \leqslant \frac{\nu_{n+1}}{\nu_n} \leqslant r$ *і послідовність* $\{I_{\nu_n}(x)\}$ *майже всюди на* X *збігалась до* $y(x)$.

Теорема 4 (аналог теореми Меньшова-Качмажа). *Нехай*

$$y(x) = \int\limits_{\Omega} c(\omega) e_\omega(x) d\mu(\omega) \in L_2(X).$$

Якщо

$$\sum_{n=3}^{\infty} (\log_2 \log_2 n)^2 \int\limits_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} c(\omega) e_\omega(x) d\mu(\omega) < \infty,$$

то для будь-якого $\alpha > 0$ *функція* $y(x)$ *майже всюди на* X *наближається* (C, α)-*середніми.*

Доведення. Розглянемо співвідношення

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log_2^2 n \int\limits_{\Omega_{2^n+1}} \setminus \Omega_{2^n} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) = O(1) \sum_{k=3}^{\infty} (\log_2 \log_2 k)^2 \int\limits_{\Omega_k \setminus \Omega_{k-1}} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) < \infty.$$

Згідно з аналогом теореми Меньшова-Радемахера підпослідовність частинних інтегралів $\{I_{2^n}(x)\}$ збігається майже всюди на X до $y(x)$. Застосовуючи теорему 3, доходимо висновку, що функція $y(x)$ майже всюди на X наближається (C, α)-середніми. Теорема доведена.

---

1. *Лукашенко Т. П.* Ортоподобные неотрицательные системы разложения // Вест. Моск. ун–та. Сер.I. Математика, Механика. – 1997. – N 5. – С. 487-517.

2. *Лукашенко Т. П.* О коэффициентах систем разложения, подобных ортогональным// Матем.сб. – 1997. –Т. 188. – N 12. – С. 57-72.

3. *Лукашенко Т. П.* О свойствах систем разложения, подобных ортогональным // Изв. РАН. Сер. Матем. – 1998. – Т.62. – N 5. – С. 187-206.

4. *Алексич Г.* Проблемы сходимости ортогональных рядов. – М., 1963.

5. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. – М., 1999.

APPROXIMATION OF FUNCTIONS OF L_2-SPACE BY (C,α)-MEANS OF THEIR EXPANSIONS SIMILAR TO ORTHOGONAL ONE

Leonid Tkachuk

The South-Ukrainian State "K.D. Ushinsky"Pedagogical Univercity, Staroportofrankovskaya str. 26 65091 Odessa, Ukraine

Systems of expansions similar to orthogonal systems are considered. Analog of theorem Kaczmarz-Steinhaus are valid for these systems.

Key words: systems, similar to orthogonal systems, Cesaro means of positive order, theorem of Kaczmarz-Steinhaus.

Стаття надійшла до редколегії 09.07.2004

Прийнята до друку 19.10.2005