ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2005.Вип.64.С.287–290

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2005.Vol.64.P.287–290

УДК 517.53

ЗРОСТАННЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ З ДВОЧЛЕННОЮ РЕКУРЕНТНОЮ ФОРМУЛОЮ ДЛЯ КОЕФІЦІЄНТІВ

Зоряна ШЕРЕМЕТА
*Інститут прикладних проблем математики і механіки
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул.Наукова, 3б 79060 Львів, Україна*

Досліджено асимптотику цілої функції f з такими тейлоровими коефіцієнтами f_n, що $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ і $f_{n+1} = \xi_n f_n + \eta_n f_{n-1}$, де $\xi_n > 0$, $\eta_n > 0\,(n \geqslant 1)$.
Ключові слова: цілі функції, асимптотика.

Нехай $f(z) = z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} f_n z^n$ – ціла функція і

$$f_{n+1} = \xi_n f_n + \eta_n f_{n-1}, \quad \xi_n > 0, \eta_n > 0 \quad (n \geqslant 1), \tag{1}$$

а l – додатна неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функція. Метою нашої праці – знайти асимптотику $\ln f(r)$ при $r \to +\infty$, якщо

$$\xi_n l(n) \sim \beta > 0, \quad \eta_n l(n) l(n-1) \sim \gamma > 0 \quad (n \to \infty). \tag{2}$$

За умови $l(x) \equiv x$ така задача розв'язана в [1–2]. Ми доведемо таку теорему.

Теорема. *Нехай тейлорові коефіцієнти цілої функції f задовольняють умову (1), а функція l додатна, неперервна, зростаюча до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ і така, що*

$$\ln l(x) = o(x), \quad x \to +\infty. \tag{3}$$

Тоді за умови (2) правильною є рівність

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{L^{-1}(\ln f(r))}{r} = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\gamma}}{2}, \quad L(x) = \int\limits_1^x \frac{l^{-1}(t)}{t} dt. \tag{4}$$

Доведення. Перепишемо (1) у вигляді

$$1 = \frac{f_n}{l(n) f_{n+1}} l(n) \xi_n + \frac{f_{n-1}}{l(n-1) f_n} \frac{f_n}{l(n) f_{n+1}} l(n) l(n-1) \eta_n.$$

Завдяки умові (2) матимемо

$$1 = (\beta + o(1)) \frac{f_n}{l(n) f_{n+1}} + (\gamma + o(1)) \frac{f_{n-1}}{l(n-1) f_n} \frac{f_n}{l(n) f_{n+1}}, \quad n \to \infty,$$

тобто

$$\frac{l(n)f_{n+1}}{f_n} = (\beta + o(1)) + (\gamma + o(1))\frac{f_{n-1}}{l(n-1)f_n}, \quad n \to \infty.$$

Приймемо $\alpha^* = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{f_n}{l(n)f_{n+1}}$ і $\alpha_* = \varliminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{f_n}{l(n)f_{n+1}}$. Тоді з останньої рівності отримуємо рівності $\dfrac{1}{\alpha_*} = \beta + \gamma\alpha^*$ і $\dfrac{1}{\alpha^*} = \beta + \gamma\alpha_*$, тобто $\dfrac{1}{\alpha_*} = \beta + \dfrac{\gamma}{\beta+\gamma\alpha_*}$ і $\dfrac{1}{\alpha^*} = \beta + \dfrac{\gamma}{\beta+\gamma\alpha^*}$. Звідси випливає, що α_* і α^* є коренями того самого рівняння $\gamma\alpha^2 + \beta\alpha - 1 = 0$. Це квадратне рівняння має два корені різних знаків, оскільки $0 < \alpha_* \leqslant \alpha^* < +\infty$, то

$$\alpha_* = \alpha^* = \alpha = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\gamma}}{2\gamma} = \frac{2}{\beta + \sqrt{\beta^2+4\gamma}}. \tag{5}$$

Звідси випливає, що $f_n/f_{n+1} = (\alpha + o(1))l(n)$, $n \to \infty$, тобто $(\alpha - \varepsilon/2)l(n) \leqslant f_n/f_{n+1} \leqslant (\alpha+\varepsilon/2)l(n)$ для кожного $\varepsilon \in (0,\alpha)$ і всіх $n \geqslant n_0(\varepsilon)$ і, отже,

$$\frac{K_1}{(\alpha+\varepsilon/2)^n}\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{l(j)} \leqslant f_{n+1} \leqslant \frac{K_2}{(\alpha-\varepsilon/2)^n}\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{l(j)}, \tag{6}$$

де сталі K_1 і K_2 не залежать від n.

Розглянемо степеневий ряд

$$F(r;a) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \prod_{j=1}^{n}\frac{1}{l(j)} r^{n+1} = r\sum_{n=1}^{\infty} b_n r^n, \quad b_n = a^n\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{l(j)}. \tag{7}$$

Оскільки $l(n) \uparrow +\infty$, то цей ряд збіжний для всіх $r \in [0, +\infty)$.

Нехай $\mu(r) = \max\{b_n r^n : n \geqslant 1\}$ – максимальний член ряду (7), а $\nu(r) = \max\{n : b_n r^n = \mu(r)\}$ – його центральний індекс. Оскільки $\varkappa_n = b_n/b_{n+1} = l(n+1)/a \uparrow +\infty$, $n \to \infty$, то $\nu(r) = n$ для $\varkappa_{n-1} \leqslant r < \varkappa_n$. Отже, $l(\nu(r))/a \leqslant r < l(\nu(r)+1)/a$ і $l^{-1}(ar) - 1 < \nu(r) \leqslant l^{-1}(ar)$. Використовуючи рівність $\ln \mu(r) = \ln \mu(1) + \int\limits_1^r \dfrac{\nu(t)}{t}dt$, звідси отримуємо $\ln \mu(1) + \int\limits_1^r \dfrac{l^{-1}(at)}{t}dt - \ln r \leqslant \ln \mu(r) \leqslant \int\limits_1^r \dfrac{l^{-1}(at)}{t}dt$, тобто

$$L(ar) - \ln r + K \leqslant \ln \mu(r) \leqslant L(ar) + K, \quad K = \text{const}. \tag{8}$$

Але для $\delta > 0$

$$r\mu(r) \leqslant F(r;a) \leqslant r\sum_{n=1}^{\infty} b_n((1+\delta)r)^n(1+\delta)^{-n} \leqslant r\mu((1+\delta)r)/\delta,$$

тобто

$$\ln \mu(r) + \ln r \leqslant \ln F(r;a) \leqslant \ln \mu((1+\delta)r) + \ln r - \ln \delta. \tag{9}$$

З (8) і (9) отримуємо $L(ar)+K \leqslant \ln F(r;a) \leqslant L((1+\delta)ar)+\ln r+K-\ln\delta$ і, оскільки

$$\ln F\left(r;\frac{1}{\alpha+\varepsilon/2}\right)+\ln K_1 \leqslant \ln f(r) \leqslant \ln F\left(r;\frac{1}{\alpha-\varepsilon/2}\right)+\ln K_2,$$

то

$$L\left(\frac{r}{\alpha+\varepsilon/2}\right)+K+\ln K_1 \leqslant \ln f(r) \leqslant L\left(\frac{(1+\delta)r}{\alpha-\varepsilon/2}\right)+\ln r+K-\ln\delta+\ln K_1.$$

Вибираючи $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2(\alpha-\varepsilon)}$, звідси отримуємо

$$L\left(\frac{r}{\alpha+\varepsilon}\right)+K_3 \leqslant \ln f(r) \leqslant L\left(\frac{r}{\alpha-\varepsilon}\right)+\ln r+K_4, \tag{10}$$

де сталі K_3 і K_4 не залежать від r.

З умови (3) випливає, що $l^{-1}(r)/\ln r \to +\infty$, $r\to+\infty$ і тому для будь-яких $\varepsilon>0$ та $K>0$

$$L((1+\varepsilon)r)-L(r)=\int\limits_r^{(1+\varepsilon)r}\frac{l^{-1}(t)}{t}dt \geqslant l^{-1}(r)\ln(1+\varepsilon) \geqslant K\ln r, \quad r\geqslant r_0(\varepsilon,K).$$

Звідси випливає, що $L(r)+O(\ln r)=L((1+o(1))r)$, $r\to+\infty$. Тому з огляду на довільність ε з (10) отримуємо рівність (4). Теорему доведено.

Вибираючи функцію l, з теореми можна одержати, наприклад, два такі твердження.

Наслідок 1. *Якщо $\xi_n \sim \beta n^{-1/\varrho}$ і $\eta_n \sim \gamma n^{-2/\varrho}$, $0<\varrho<+\infty$, при $n\to\infty$, а коефіцієнти цілої функції f задовольняють умову (1), то* $\ln f(r) \sim \dfrac{1}{\varrho}\left(\dfrac{\beta+\sqrt{\beta^2+4\gamma}}{2}\right)^{\varrho} r^{\varrho}$, $r\to+\infty$.

Наслідок 2. *Якщо $\xi_n \sim \dfrac{\beta}{\ln_k n}$ і $\eta_n \sim \dfrac{\gamma}{\ln_k^2 n}\gamma$, $k\in\mathbb{N}$, при $n\to\infty$, а коефіцієнти цілої функції f задовольняють умову (1), то* $\ln_{k+1} f(r) \sim \dfrac{\beta+\sqrt{\beta^2+4\gamma}}{2}r$, $\quad r\to+\infty$.

Ззначимо, що висновок теореми є правильним і у випадку, коли одне з чисел β чи γ дорівнює нулеві.

Зауважимо також, що умову (3) у теоремі усунути загалом не можна. Справді, якщо виберемо $\beta=1$, $\gamma=0$, $l(x)=e^x$ і $f_{k+1}=f_k e^{-k}$, то $L^{-1}(x)=e^{\sqrt{2x}}$ і

$$f(r)=rF(r), \quad F(r)=1+\sum_{k=1}^{\infty} b_k r^k, \quad b_k=e^{-k(k+1)/2}.$$

Легко перевірити, що $F(r)=I(r)+\alpha(r)\mu(r)$, де $I(r)=\int\limits_0^{\infty} e^{-x(x+1)/2+x\ln r}dx$, $-1<\alpha(r)<1$ і $\mu(r)=\max\{b_k r^k : k\geqslant 0\}$. Оскільки

$$\ln\mu(r) \leqslant \max -x(x+1)/2+x\ln r : x\geqslant 0=\ln r(\ln r-1)/2$$

і, використовуючи метод Лапласа [3, с. 20-22], можна показати, що

$$I(r) \sim \sqrt{2\pi}\exp\{\ln r(\ln r-1)/2\},\ r\to+\infty,$$

то $\ln F(r)=\ln r(\ln r-1)/2+O(1)$ і $\ln f(r)=\ln r(\ln r+1)/2+O(1)$ при $r\to+\infty$. Тому

$$L^{-1}(\ln f(r))=\exp\{\sqrt{\ln r(\ln r+1)+O(1)}\}=\exp\{\ln r+1/2+o(1)\}=$$
$$=(1+o(1))r\sqrt{e},\quad r\to+\infty,$$

і, оскільки $(\beta+\sqrt{\beta^2+4\gamma})/2=1$, то рівність (4) не є правильною.

Автор висловлює щиру подяку М.В. Заболоцькому за цінні зауваження.

---

1. *Шеремета З.М.* О свойствах целых решений одного дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. – 2000. – Т. 35. – N 8. – С. 1045-1050.

2. *Шеремета З.М.* Близькість до опуклості цілого розв'язку одного диференціального рівняння // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1999. – Т.42ю – N 3. – С. 31-35.

3. *Евграфов М.А.* Асимптотические оценки и целые функции. – М., 1962.

GROWTH OF ENTIRE FUNCTIONS WITH TWO-MEMBER RECURRENT FORMULA FOR THE COEFFICIENTS

Zoryana SHEREMETA

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, Naukova Str., 3b 79060 Lviv, Ukraine

An asymptotic behavior of an entire function f with Taylor coefficients f_n such that $f_0=0$, $f_1=1$ and $f_{n+1}=\xi_n f_n+\eta_n f_{n-1}$, where $\xi_n>0$, $\eta_n>0\,(n\geqslant 1)$, is investigated.

Key words: entire functions, asymptotic behavior.

Стаття надійшла до редколегії 16.02.2005

Прийнята до друку 19.10.2005