

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 65



Львів
Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка
2006

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 65

Видається з 1965 року

Львівський національний університет
імені Івана Франка
2006

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. – 2006.
– Випуск 65.– 248с.

Visnyk of the Lviv University. Series Mechanics and Mathematics. – 2006.
– Vol. 65.– 248p.

Вісник містить статті з теорії крайових задач для диференціальних рівнянь, алгебри, топології, теорії функцій комплексного змінного, функціонального аналізу, теорії ймовірності та статистики, проблем математичного моделювання фізико-механічних процесів і механіки.

Для наукових працівників, аспірантів і студентів старших курсів.

The issue contains articles on theory of boundary value problems for differential equations, algebra, topology, complex analysis, functional analysis, probability theory and statistics, problems of mathematical modelling of physical and mechanical processes and mechanics.

For scientists, post graduates and students.

Редакційна колегія: д-р фіз.-мат. наук, проф. *В. Лянце* (почесний ред.); д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Зарічний* (відп. ред.); д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Комарницький* (заст. ред.); д-р фіз.-мат. наук, проф. *С. Лавренюк* (заст. ред.); д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Іванчов* (відп. секр.); д-р фіз.-мат. наук, проф., член-кор. НАН України *О. Андрейків*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *В. Андрійчук*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *О. Артемович*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *Т. Банах*; д-р фіз.-мат. наук, проф., член-кор. НАН України *Я. Бурак*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *Я. Єлейко*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Заболоцький*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *А. Кондратюк*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *Б. Копитко*; канд. фіз.-мат. наук, проф. *Я. Припула*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *О. Скасків*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *О. Сторож*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *Г. Сулим*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Шеремета*.

Editorial board: *V.Lyantse* (honorary editor-in-chief), *M.Zarichny* (executive editor-in-chief), *M.Komarnitskyi* (associate editor), *S.Lavrenyuk* (associate editor), *M.Ivanchov* (executive secretary), *O.Andreykiv*, *V.Andriychuk*, *O.Artemovych*, *T.Banakh*, *Ya.Burak*, *Ya.Yeleyko*, *M.Zabolotskyi*, *A.Kondratyuk*, *B.Kopytko*, *Ya.Prytula*, *O.Skaskiv*, *O.Storozh*, *G.Sulym*, *M.Sheremeta*.

Адреса редакційної колегії:
Львівський національний університет
імені Івана Франка,
механіко-математичний факультет,
вул. Університетська, 1 79602 Львів
Україна тел. (0322) 74-11-07

Editorial address:
Ivan Franko National University
of Lviv
Mechanical and Mathematical department
Universytets'ka st. 1 UA-79602 Lviv,
Ukraine tel. +(38) (0322) 74-11-07

E-mail: diffeq@franko.lviv.ua

Редактор *Н. Плиса*

Друкується за ухвалою Вченої Ради

Львівського національного університету імені Івана Франка

ЗМІСТ

<i>Божидарнік Віктор, Опанасович Віктор, Герасимчук Павло. Згин ізотропної пластини, ослабленої розрізом по дузі кола з контактуючими берегами</i>	<i>7</i>
<i>Сулим Георгій, Кривень Марта. Пластичне відшаровування під час поздовжнього зсуву жорсткого прямокутного включення у середовищі з великою затримкою текучості.....</i>	<i>17</i>
<i>Галазюк Оксана, Турчин Ігор. Метод поліномів Лагерра в нестационарній задачі теплопровідності для радіально-шаруватого циліндра</i>	<i>24</i>
<i>Скальський Валентин, Михальчук Віталій, Окрепкий Юрій, Селівончик Тетяна. Акустико-емісійна оцінка об'ємної пошкодженості алюмінієвого сплаву.....</i>	<i>32</i>
<i>Кузь Ігор, Ришард Качинські. Напружений стан шаруватих масивів гірських порід з урахуванням зміни рельєфу.....</i>	<i>40</i>
<i>Опанасович Віктор, Слободян Микола. Двосторонній згин пластини з круговим отвором та радіальною тріщиною з урахуванням контакту її берегів.....</i>	<i>46</i>
<i>Галазюк Віталій, Коцюбайло Вікторія. Нестационарний розігрів простору дисковим тепловиділяючим елементом.....</i>	<i>60</i>
<i>Кундрат Микола, Сулим Георгій. Термопружна рівновага півбезмежної пластини з нерозтяжливою гнучкою накладкою в модельному формулюванні.....</i>	<i>73</i>
<i>Паук Володимир. Контактна задача кочення з урахуванням теплоутворення</i>	<i>84</i>
<i>Галазюк Віталій, Крупник Андрій. Динаміка пружного півпростору при нормальних навантаженнях</i>	<i>93</i>
<i>Гачкевич Олександр, Михайлишин Віра. Методика розв'язування задач термомеханіки, які описують механічну поведінку тіл за охолодження в процесі високотемпературного відпалювання.....</i>	<i>106</i>
<i>Опанасович Віктор, Копоть Наталія, Коцюмбас Назар. Контактна задача для пластини з двома тріщинами, які розміщені уздовж дуг неконцентричних кіл</i>	<i>114</i>
<i>Сас Наталія. Визначення залишкової довговічності пластини з системою двох компланарних тріщин при дії довготривалого статичного навантаження і високій температурі.....</i>	<i>123</i>
<i>Махоркін Микола, Сулим Георгій. Застосування апарата узагальнених функцій до визначення порядку сингулярності за поздовжнього зсуву у клиновій системі.....</i>	<i>128</i>
<i>Турчин Ольга, Щукін Валентин. Квазістатичні температурні напруження в системі шар-півпростір, зумовлені імпульсним нагрівом.....</i>	<i>137</i>
<i>Краснюк Петро, Мандзик Юрій, Чаповська Роксоляна. Плоска контактна задача взаємодії жорсткого клину та пружного шару за фрикційного теплоутворення</i>	<i>144</i>
<i>Опанасович Віктор, Селіверстов Роман. Вплив контакту берегів двох співвісних тріщин на напружений стан трансверсально-ізотропної пластини в умовах чистого згину.....</i>	<i>152</i>

<i>Гачкевич Олександр, Гачкевич Микола, Ірза Євген, Касперський Зигмунд.</i> Числові алгоритми при побудові оптимальних режимів термообробки скляних тіл обертання.....	158
<i>Сулим Георгій, Любін Олександр.</i> Контакт жорстких зношуваних тіл під дією змінюваного навантаження.....	164
<i>Скальський Валентин, Сергієнко Олег, Лотоцький Юрій, Плахтій Роман.</i> Оцінка розподілу напружень за триточкового згину ізотропної призми з еліпсоїдальним включенням.....	173
<i>Максимович Володимир, Думанський Остап.</i> Дослідження пружного стану пластинчастого елемента конструкції, який перебуває під дією зосереджених силових факторів.....	180
<i>Краснюк Петро.</i> Плоска контактна задача взаємодії нахилоного прямокутного штампа та пружного шару в уточненому формулюванні за умови фрикційного теплоутворення.....	187
<i>Опанасович Віктор, Слободян Микола.</i> Про граничне значення інтегрального подання розв'язку рівняння Клейна-Гордона.....	194
<i>Прокопишин Іван, Хлебніков Дмитро.</i> Циліндричний згин пружного трансверсально-ізотропного шару періодичною системою гладких штампів.....	201
<i>Онишкевич Володимир.</i> Урахування впливу термічної провідності контакту в осесиметричних задачах.....	208
<i>Дробенко Богдан.</i> Моделювання процесів деформування електропровідних тіл за умов їхньої високочастотної термообробки.....	216
<i>Вайсфельд Наталія.</i> Осесиметрична нестационарна задача для суцільного скінченного циліндра, зчепленого з жорсткою основою.....	226
<i>Ревенко Віктор.</i> Знаходження плоского напруженого стану прямокутної пластини методом інтегральних моментів.....	232
<i>Пир'єв Юрій.</i> Фрикційна термopужна нестійкість у контактних задачах.....	241

CONTENTS

<i>Bozhydarnik Viktor, Opanasovych Viktor, Herasymchuk Pavlo.</i> Flexure of the isotropic plate, weakening with the thickness circular arc crack with account of its edges contact	7
<i>Sulym Georgij, Kryven Marta.</i> Plastic exfoliation of rectangular rigid inclusion in the solid with a great yield drop under longitudinal shear	17
<i>Halazyuk Oksana, Turchyn Igor.</i> Laguerre's polinoms method in non-stationary axisymmetrical problem of heat conduction for a radial-layered cylinder.....	24
<i>Skalsky Valentyn, Mychalchuk Vitaliy, Okrepky Yuriy, Selivonchyk Tetyana.</i> Volume damaged estimation of aluminum alloy by methods of acoustic emission.....	32
<i>Kuz' Igor, Kaczynski Ryszard.</i> Stress state of layer rock mass with taking into account relief change.....	40
<i>Opanasovych Viktor, Slobodyan Mikola.</i> Bilateral bending of the plate with a circular orifice and a radial crack with considering of the contact it's shores.....	46
<i>Halazyuk Viyaliy, Kotsyubaylo Viktoriya.</i> Nonstationary warming up of space disk fuel element.....	60
<i>Kundrat Mikola, Sulym Georgij.</i> Thermoelastic equilibrium of semiinfinite plate with nontensile flexible reinforcement plate in modelling formulation.....	73
<i>Pauk Volodymyr.</i> Rolling contact problem involving heat generation.....	84
<i>Halazyuk Vitaliy, Krupnik Andriy.</i> Nonstationary vibrations of elastic half-space due to normal loadings.....	93
<i>Hachkevych Olexandr, Mykhailyshyn Vira.</i> Methodology of solving of thermomechanical problems describing mechanical behavior of solids on the cooling under hightemperature annealing	106
<i>Opanasovych Viktor, Kopot' Nataliya, Kotsyumbas Nazar.</i> Contact problem for a plate with two cracks on arches of nonconcentric circles.....	114
<i>Sas Natalija.</i> Evaluation of residual life time of a plate with system two coplanar of cracks under long term static tension at high-temperature	123
<i>Mahorkin Mikola, Sulym Georgij.</i> Application of apparatus of generalized functions for defining singularity order under longitudinal shear in arbitrary wedge system.....	128
<i>Turchyn Olha, Shchukin Valentyn.</i> Quasistatic thermal stress analysis in the system a layer-halfspace from impulsive heating	137
<i>Krasnyuk Peter, Mandzyk Yuriy, Chapovska Roxolyana.</i> A flat contact problem of interaction of the rigid wedge and elastic layer at frictional head generation	144
<i>Opanasovych Viktor, Seliverstov Roman.</i> The influence of closure of two collinear cracks on the stress state of transversal-isotropic plate under pure bending	152
<i>Hachkevych Olexandr, Hachkevych Mikola, Irza Evgen, Kaspersky Zigmund.</i> Numerical algorithms for optimal regimes of thermal treatment of axis-symmetric circular glass shells.....	158

<i>Sulym Georgij, Lyubin Olexsandr</i> . Contact problem for rigid wearing bodies under variable load	164
<i>Skalsky Valentyn, Sergiyenko Oleg, Lotockiy Yuriy, Plahtiy Roman</i> . Estimation of stress distribution in an isotropic prism with the ellipsoidal inclusion by the three-point bending	173
<i>Maksymovych Volodymyr, Dumanskiy Ostap</i> . Research of the resilient state of plates element of construction, that is under action of the concentrated power factors	180
<i>Krasnyuk Peter</i> . A flat contact problem of interaction of the inclined rectangular stamp and an elastic layer in the specified statement under condition of a frictional head generation	187
<i>Opanasovych Viktor, Slobodyan Mikola</i> . About boundary value of integral expression of Klein-Gordon's equation solution	194
<i>Prokopyshyn Ivan, Khlebnikov Dmytro</i> . Cylindrical bending of elastic transversally-isotropic layer by periodical system of smooth stamps	201
<i>Onyshkevych Volodymyr</i> . Consideration of variable thermal resistance in some axially symmetrical problems	208
<i>Drobenko Bogdan</i> . Simulation of deformation process of electrically conductive solids subjected to electromagnetic field	216
<i>Vaysfel'd Nataliya</i> . The axysymmetrical non-stationary problem for the solid finite cylinder, adhesioned with the rigid basis	226
<i>Revenko Viktor</i> . Construction of solution to plane problem of elasticity theory forrectangular plate by integral moment method	232
<i>Pyryev Yuriy</i> . Frictional thermoelastic instability in contact problem	241

УДК 539.3

ЗГИН ІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ, ОСЛАБЛЕНОЇ РОЗРІЗОМ ПО ДУЗІ КОЛА З КОНТАКТУЮЧИМИ БЕРЕГАМИ

Віктор БОЖИДАРНИК¹, Віктор ОПАНАСОВИЧ²,
Павло ГЕРАСИМЧУК¹

¹Луцький державний технічний університет,
вул. Львівська, 75, 43018 Луцьк, Україна

²Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

На основі класичної теорії згину пластини досліджено задачу про односторонній згин моментами на нескінченності пластини з наскрізною несиметричною тріщиною по дузі кола в припущенні, що береги тріщини приходять у гладкий контакт по одній із основ пластини. Проведено числовий аналіз контактної тиску, коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів, результати якого подано графічно.

Ключові слова: згин, ізотропна пластина, тріщина по дузі кола, плоска задача теорії пружності, класична теорія згину, комплексні потенціали, контактний тиск, коефіцієнти інтенсивності моментів і зусиль.

Коли згинати пластину з наскрізною тріщиною, береги якої вільні від зовнішнього навантаження, то зрозуміло, що вони будуть контактувати. Багато дослідників, розв'язуючи такі задачі, контакт берегів не враховували. Систематизацію цих результатів наведено в довіднику [1] та монографіях [2-4]. Врахування контакту берегів для прямолінійної тріщини при згині пластини за класичною теорією розглянуто в працях [5, 6], а за теорією згину пластин типу Тимошенка у публікації [7], а для тріщини по дузі кола у статті [8] при геометричній і фізичній симетрії задачі.

Мета нашої праці – дослідити циліндричний згин ізотропної пластини з наскрізною тріщиною по дузі кола довільного радіуса, при порушенні фізичної симетрії задачі. Вважається, що гладкий контакт відбувається по всій довжині тріщини на одній з основ пластини, а її згин описується за класичною теорією.

Формулювання задачі. Розглянемо нескінчену ізотропну пластину постійної товщини $2h$, яка містить наскрізну тріщину, що розміщена по дузі кола радіуса R і вільна від зовнішнього навантаження.

Виберемо в серединній площині пластини початок декартової системи координат $Ox\bar{y}\bar{z}$, направивши вісь $O\bar{z}$ перпендикулярно до неї, причому початок координат O збігається з центром кола, вздовж дуги якого розміщена тріщина. Вважаємо, що вісь Ox проходить через середину дуги тріщини, центральний кут її розхилу позначимо через 2φ . Нехай тріщина

має кінці a і b , причому $a = R e^{-i\varphi}$ і $b = R e^{i\varphi}$, де $i = \sqrt{-1}$. Ділянку в середині кола радіуса R позначимо через S^+ , зовні – через S^- . Лінію, де розміщена тріщина у середній площині, позначимо через L . Пластина згинається на нескінченності рівномірно розподіленими моментами M , площини дії яких утворюють кут γ з віссю Ox (див. рис. 1). Як і в [5], припустимо, що гладкий контакт берегів тріщини відбувається по лінії, яка лежить на верхній основі пластини.

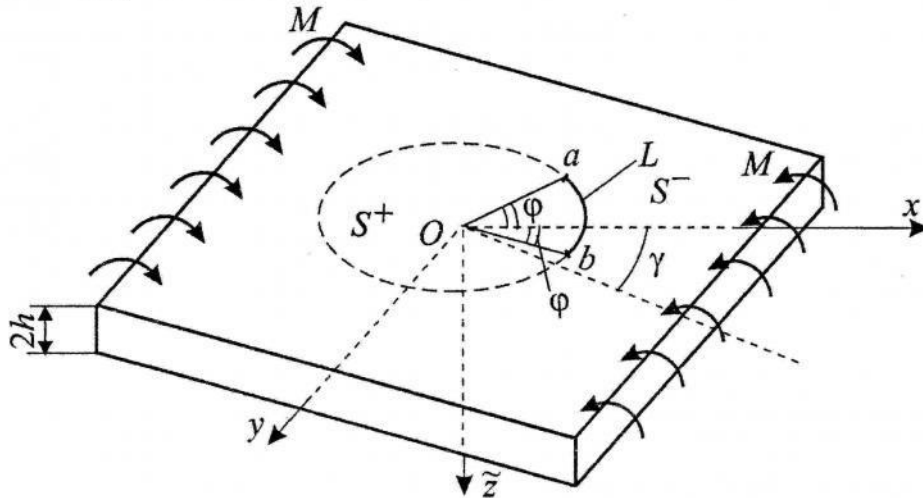


Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщини

Розв'язок задачі подамо у вигляді розв'язків двох задач: плоскої задачі та задачі згину пластини, причому для опису згину скористаємось класичною теорією.

Згідно з формулюванням задачі матимемо такі граничні умови:

$$\sigma_{rr}^+ = \sigma_{rr}^- = -N_r/(2h), \quad \sigma_{r\theta}^+ = \sigma_{r\theta}^- = 0, \quad M_r^+ = M_r^- = M_r,$$

$$P_r^+ = P_r^- = 0, \quad \text{на } L, \quad (1)$$

$$M_r = hN_r, \quad [\nu_r] + h[\partial w/\partial r] = 0, \quad \text{на } L, \quad (2)$$

де N_r – контактний тиск між берегами тріщини; σ_{rr} і $\sigma_{r\theta}$ та v_r і v_θ – компоненти тензора напружень та компоненти вектора переміщення в полярній системі координат r і θ з початком у центрі кола радіуса R для плоскої задачі; M_r та P_r – згинальний момент та узагальнена в сенсі Кірхгофа перерізувальна сила в тій самій системі координат r і θ ; w – прогин пластини при згині; $[f] = f^+ - f^-$; значками “+” і “-” позначено граничні значення функції при прямуванні точки до лінії L відповідно з ділянок S^+ і S^- .

Побудова розв'язку задачі. Для розв'язку плоскої задачі теорії пружності введемо комплексні потенціали $\Phi(z)$ і $\Omega(z)$ [9], тоді напружено-деформований стан пластини знайдемо за формулами

$$\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta} = \Phi(z) - R^2 r^{-2} \Omega(R^2/\bar{z}) + (1 - R^2 r^{-2}) \cdot [\overline{\Phi(z)} - \bar{z} \cdot \overline{\Phi'(z)}], \quad (3)$$

$$2\mu \cdot r(v_r + iv_\theta) = \bar{z} \cdot [\kappa\varphi(z) + \omega(R^2/\bar{z}) - z(1 - R^2 r^{-2})\overline{\Phi'(z)}], \quad (4)$$

де μ і ν – відповідно модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини; $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$; $z = x + iy$, x і y – координати точки, в якій знаходимо шукані величини; $r = |z|$, $\omega'(z) = \Omega(z)$. Для функцій $\Phi(z)$ і $\Omega(z)$ правильні розвинення

$$\Phi(z) = \begin{cases} A_0 + A_1 z + \dots, & z \rightarrow 0, \\ a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + \dots, & z \rightarrow \infty; \end{cases}$$

$$\Omega(z) = \begin{cases} b_0 + b_1 z + \dots, & z \rightarrow 0, \\ B_0 + B_1 z^{-1} + \dots, & z \rightarrow \infty; \end{cases} \quad A_0 + \bar{B}_0 = 0, \quad B_1 = 0.$$

Для розв'язку задачі згину пластини введемо комплексні потенціали $\Phi_3(z)$ і $\Omega_3(z)$ [10] і одержимо залежності

$$m(M_r + ic' + iP_r) = \bar{\kappa}\Phi_3(z) + R^2 r^{-2} \Omega_3(R^2/\bar{z}) - (1 - R^2 r^{-2}) \cdot [\overline{\Phi_3(z)} - \bar{z}\overline{\Phi_3'(z)}], \quad (5)$$

$$\partial w/\partial r + i \cdot \partial w/\partial s = \bar{z}/r [\varphi_3(z) - \omega_3(R^2/\bar{z}) + z(1 - R^2 r^{-2})\overline{\Phi_3'(z)}], \quad (6)$$

де s – дугова координата; c' – дійсна стала; $\omega_3'(z) = \Omega_3(z)$, $\bar{\kappa} = (3 + \nu)/(1 - \nu)$, $m = -1/(D(1 - \nu))$, $D = 2Eh^3/(3(1 - \nu^2))$. Для функцій $\Phi_3(z)$ і $\Omega_3(z)$ в околі нуля і нескінченно віддаленої точки правильні розвинення

$$\Phi_3(z) = \begin{cases} A'_0 + A'_1 z + \dots, & z \rightarrow 0, \\ \Gamma + a'_2 z^{-2} + \dots, & z \rightarrow \infty; \end{cases}$$

$$\Omega_3(z) = \begin{cases} \bar{\Gamma}' R^2 z^{-2} + b'_0 + b'_1 z + \dots, & z \rightarrow 0, \\ B'_0 + B'_1 z^{-1} + \dots, & z \rightarrow \infty; \end{cases}$$

де $\Gamma = nM$, $\Gamma' = -0,5mMe^{-2i\gamma}$, $n = -1/(4D(1+\nu))$, $B'_1 = 0$, $A'_0 + \overline{B'_0} = 0$.

Беручи до уваги (4) і (5), задовольняючи граничні умови (1), одержимо такі задачі лінійного спряження:

$$[\Phi(t) + \Omega(t)]^+ - [\Phi(t) + \Omega(t)]^- = 0,$$

$$[\tilde{\kappa}\Phi_3(t) - \Omega_3(t)]^+ - [\tilde{\kappa}\Phi_3(t) - \Omega_3(t)]^- = 0, \text{ на } L,$$

розв'язавши які, отримаємо

$$\Omega(z) = -\overline{A_0} - \Phi(z), \quad \Omega_3(z) = \tilde{\kappa}\Phi_3(z) - D'_0 - P/(2z^2),$$

$$D'_0 = \tilde{\kappa}\Gamma + \overline{A'_0}, \quad P = -2\overline{\Gamma'}R^2. \quad (7)$$

Якщо врахувати (4), (6) та (7), з другої граничної умови (2) отримаємо задачу лінійного спряження, розв'язавши яку, знайдемо

$$\begin{aligned} f(z) + \beta[\Phi_3(z) - z\Phi'_3(z)] - \beta[\tilde{\Phi}_3(R^2/z) - R^2/z\tilde{\Phi}'_3(R^2/z)] = \\ = -\overline{A_0} + \beta(\Gamma - \overline{A'_0}), \end{aligned} \quad (8)$$

де

$$\beta = 2h(1 + \tilde{\kappa})\mu/(1 + \kappa), \quad f(z) = \Phi(z) - z\Phi'(z) - \tilde{\Phi}(R^2/z) + R^2/z\tilde{\Phi}'(R^2/z).$$

Спрямувавши в (8) z до L справа і зліва, додавши отримані співвідношення, а також прийнявши до уваги залежності

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = -N_r/(2h) - \overline{A_0},$$

$$\Phi_3^+(t) + \Phi_3^-(t) = \tilde{\kappa}^{-1}[N_r h + D'_0 + P/(2t)^2], \quad t \in L, \quad (9)$$

матимемо диференціальне рівняння для знаходження невідомого контактного тиску N_r між берегами тріщини, розв'язавши яке, знайдемо

$$N_r = -C\theta + A - 3\tilde{\delta}_1 \cos 2\theta, \quad |\theta| \leq \varphi, \quad \beta\Gamma = \operatorname{Re}(A_0 + \beta A'_0). \quad (10)$$

Тут A — невідома стала; $\tilde{\delta}_1 = -MP_1/4$, $C = P_1 c'$, $P_1 = 3(1 + \nu)/(2h(3 + 2\nu))$.

Якщо підставити вираз для контактної тиску (10) у залежності (9) та розв'язати задачі лінійного спряження, то знайдемо

$$\begin{aligned} \Phi(z) = cf_2(z)/(2h) + [\tilde{\delta}_4 + P_2(\tilde{\delta}_1 R^2 z^{-2} + \delta_1 z^2 R^{-2})]/2 - \\ - [\delta_4(z + \gamma_5) + P_2 R^{-2} \delta_1(z^3 + z^2 \gamma_5 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +z\gamma_6 + \gamma_7) + P_2 \bar{\delta}_1 R^2 (\gamma_1 z^{-2} + \gamma_2 z^{-1}) / (2X(z)), \\
\Phi_3(z) = & (q_3 + q_4 z^{-2} + q_5 z^2) / 2 - [q_3(z + \gamma_5) + q_5(z^3 + z^2 \gamma_5 + \gamma_6 z + \gamma_7) + \\
& + q_4(\gamma_1 z^{-2} + \gamma_2 z^{-1}) - 2(d_1 z + d_0)] / (2X(z)) + q_2 f_2(z), \quad (11)
\end{aligned}$$

де $\gamma_1 = -R$, $\gamma_2 = \cos \varphi$, $\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2$, $\gamma_7 = -\gamma_5 \gamma_6$, $q_2 = -mhC/\tilde{\kappa}$, $P_2 = 0,75/h$,

$$\begin{aligned}
X(z) = & \sqrt{(z-a)(z-b)}, \quad \delta_4 = -\bar{A}_0 - A/(2h), \quad q_1 = P_1^{-1}, \quad d_1 = \Gamma, \\
\gamma_6 = & 0,5R^2 \sin^2 \varphi, \quad d_0 = d_1 \gamma_5, \quad q_5 = -3mh\delta_1 / (2\tilde{\kappa}R^2), \\
q_3 = & [m(hA + iq_1 C) + D'_0] / \tilde{\kappa}, \quad \gamma_3 = -(2R)^{-1} \sin^2 \varphi, \\
q_4 = & (-3hmR^2 \bar{\delta}_1 + P) / (2\tilde{\kappa}), \quad \delta_1 = -\Gamma' \beta h / (2m\beta h^2 - \tilde{\kappa}), \quad t = R \cdot e^{i\theta}, \quad \varphi_1 = \varphi/2,
\end{aligned}$$

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_L \frac{\theta X^+(t) dt}{t-z},$$

$$B = -\frac{2}{\pi} \int_0^\varphi \theta \sin \theta_1 \sqrt{\sin(\varphi_1 + \theta_1) \sin(\varphi_1 - \theta_1)} d\theta, \quad \theta_1 = \theta/2.$$

Якщо врахувати, що $A_0 = \Phi(0)$ і $A'_0 = \Phi_3(0)$, то на основі (11) отримаємо

$$\operatorname{Re} A_0 = \sin^2 \varphi_1 [-A + 3 \operatorname{Re} \delta_1 \cos^4 \varphi_1] / (2h \cdot (1 + \sin^2 \varphi_1)), \quad \operatorname{Im} A_0 = 0, \quad (12)$$

$$\operatorname{Re} A'_0 = (\Gamma \cos^2 \varphi_1 - q_6 A \sin^2 \varphi + \operatorname{Re}(\gamma_7 q_5 - \gamma_3 q_4) / (2R)) / (1 - \tilde{\kappa}^{-1} \sin^2 \varphi_1),$$

$$\operatorname{Im} A'_0 = -(CB / \cos^2 \varphi_1 + 3 \operatorname{Im} \delta_1 \cdot \sin^4 \varphi_1) / (2h),$$

де $q_6 = 3(1 - \nu^2) / (2Eh^2(3 + \nu))$,

$$C = (\gamma_7 \operatorname{Im} q_5 - \gamma_3 \operatorname{Im} q_4) / (2R(Bq_6 - q_7 \sin \varphi_1)).$$

Для знаходження сталої A підставимо (12) у друге співвідношення (10), після перетворень матимемо

$$\begin{aligned}
A = & 3M(1 + \nu) \{ 3P_3 \cos \varphi_1 (3 + v - (1 - v) \sin^2 \varphi_1) + (1 + \sin^2 \varphi_1) [1 - P_3 \cos^2 \varphi_1 \cdot \\
& (9(1 + v) \sin^2 \varphi_1 + 3 - v)] \} / [4h(3 + 2\nu + (1 + 2\nu) \sin^2 \varphi_1)], \\
P_3 = & -\cos 2\gamma / (4(3 + 2\nu)).
\end{aligned}$$

Коефіцієнти інтенсивності зусиль k_1 і k_2 та моментів K_1 і K_2 [3] знайдемо за формулами:

- з врахуванням контакту берегів

$$\tilde{K}_1^\pm = f(\varphi) \{ d_8 q_{21}^\pm + (d_6 + d_9) \cos \varphi_1 \pm d_7 \sin \varphi_1 + d_{10} [\cos(\pm 3\varphi_1 - 2\gamma) \pm 0,5 \sin \varphi (\sin(\pm \varphi_1 - 2\gamma) + \cos \varphi \sin(\mp \varphi_1 - 2\gamma))] - d_5 \cos(\mp 3\varphi_1 + 2\gamma) \},$$

$$\tilde{K}_2^\pm = -f(\varphi) \{ d_8 q_{22}^\pm \mp (d_6 + d_9) \sin \varphi_1 + d_7 \cos \varphi_1 - d_{10} [-\sin(\pm 3\varphi_1 - 2\gamma) \pm 0,5 \sin \varphi (\cos(\pm \varphi_1 - 2\gamma) + \cos \varphi \cos(\mp \varphi_1 - 2\gamma))] - d_5 \sin(\mp 3\varphi_1 + 2\gamma) \},$$

$$\tilde{k}_1^\pm = -f(\varphi) \{ d_8 q_{21}^\pm + d_{14} \cos \varphi_1 \pm d_{13} \sin \varphi_1 + d_{11} (3 \cos 3\varphi_1 + 1,5 \sin \varphi \sin^3 \varphi_1) \mp d_{12} (3 \cos 3\varphi_1 - \sin \varphi \cos^3 \varphi_1) \},$$

$$\tilde{k}_2^\pm = f(\varphi) \{ d_8 q_{22}^\pm \mp d_{14} \sin \varphi_1 + d_{13} \cos \varphi_1 + 1,5 \sin \varphi (\mp d_{11} \cos^3 \varphi_1 + d_{12} \sin^3 \varphi_1) \};$$

- без врахування контакту берегів

$$\tilde{K}_1^\pm = f(\varphi) \{ [3(1-v) \cos \varphi_1 + 0,5(d_4 \cos \varphi_1 \pm d_3 \sin \varphi_1)]/d_2 + 0,5 \cos(2\gamma \mp 3\varphi_1),$$

$$\tilde{K}_2^\pm = \pm f(\varphi) \{ [3(1-v) \sin \varphi_1 + 0,5(d_4 \sin \varphi_1 \mp d_3 \cos \varphi_1)]/d_2 \mp 0,5 \sin(2\gamma \mp 3\varphi_1),$$

$$\text{де } \tilde{K}_i^\pm = \frac{K_i^\pm}{M\sqrt{R\varphi}}, \tilde{k}_i^\pm = \frac{hk_i^\pm}{M\sqrt{R\varphi}}, f(\varphi) = \sqrt{\frac{\sin \varphi}{\varphi}}, d_2 = \frac{6(1-v^2)}{3+v},$$

$$d_5 = -\frac{15+7v}{16(3+2v)}, d_6 = \frac{3+v}{2(1+v)}, d_3 = -d_2 \sin 2\gamma \cos^2 \varphi_1, d_7 = -\frac{0,25\tilde{c}}{d_{15}},$$

$$d_4 = -\frac{3\{\tilde{\kappa}(1-v)(\tilde{\kappa} + \cos \varphi) - 0,5(1+v)\sin^2 \varphi \cos 2\gamma\}}{\tilde{\kappa}(\tilde{\kappa} - \sin \varphi_1)}, d_8 = \frac{\tilde{c}}{\sin \varphi},$$

$$\tilde{c} = \frac{\sin 2\gamma \sin^2 \varphi \{9(1+v) \cos \varphi_1 + 3-v\}}{8\{(3+2v)\sin^2 \varphi_1 + 1,5(1+v)B\}} \cdot d_{15},$$

$$d_{14} = \frac{-\tilde{A} - 0,75d_{11} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi_1}{1 + \sin^2 \varphi_1}, d_{15} = \frac{3(1+v)}{8(3+2v)},$$

$$d_9 = -\frac{1.5(1-\nu)(\tilde{\kappa} + \cos \varphi) + d_2 \tilde{A} \tilde{\kappa}}{(\tilde{\kappa} - \sin^2 \varphi_1) d_2} +$$

$$+ \frac{0.5 d_{15} \tilde{\kappa}^{-1} \cos 2\gamma \sin^2 \varphi \{9(1+\nu) \sin^2 \varphi_1 + 3 - \nu\}}{(\tilde{\kappa} - \sin^2 \varphi_1) d_2},$$

$$d_{10} = -1.5 d_{15}, \quad d_{11} = -d_{15} \cos 2\gamma, \quad d_{12} = d_{15} \sin 2\gamma, \quad \tilde{A} = \frac{Ah}{M},$$

$$d_{13} = -\frac{B\tilde{c}}{\cos^2 \varphi_1} - 3d_{12} \sin^4 \varphi_1,$$

$$q_{21}^{\pm} = \frac{1}{\pi} \int_{-\varphi}^{\varphi} \theta \cos(\theta \mp \varphi) \sqrt{\frac{\sin(\varphi_1 \pm \theta_1)}{\sin(\varphi_1 \mp \theta_1)}} d\theta,$$

$$q_{22}^{\pm} = \mp \frac{1}{\pi} \int_{-\varphi}^{\varphi} \theta \sin(\varphi \mp \theta) \sqrt{\frac{\sin(\varphi_1 \pm \theta_1)}{\sin(\varphi_1 \mp \theta_1)}} d\theta, \quad \varphi_1 = \frac{\varphi}{2}, \quad \theta_1 = \frac{\theta}{2}.$$

Числовий аналіз задачі та висновки. Ми провели числовий аналіз задачі, який зображено на рис. 2–5.

На рис. 2 показано графічну залежність граничного значення кута розкриття φ^* , коли контакт відбувається по всій довжині тріщини від кута нахилу площини дії моментів на нескінченності γ при різних значеннях коефіцієнта Пуассона матеріалу пластини. Як видно з рисунка, при

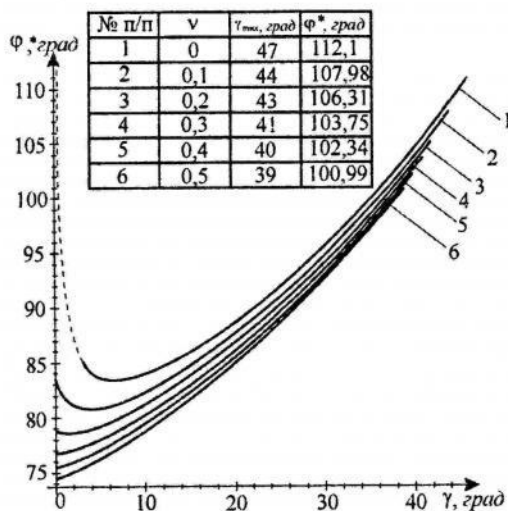


Рис. 2

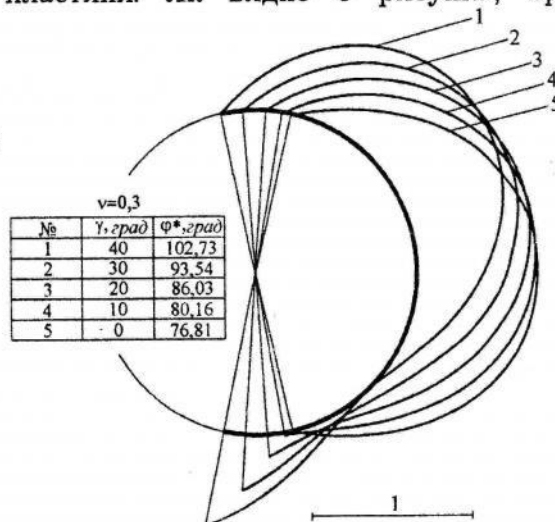


Рис. 3

фіксованому куті γ зі зростанням коефіцієнта Пуассона граничний кут розхилу тріщини φ^* падає. Якщо для заданого γ визначено граничний кут φ^* , то для кута розкриття тріщини $\varphi \leq \varphi^*$ береги тріщини завжди контактують, а при $\varphi > \varphi^*$ відбуватиметься відставання її берегів поблизу вершини b . Крім того, граничний кут φ^* від радіуса кола R не залежить, а при $\gamma = 0$ і $\nu = 0$ контакт берегів тріщини буде проходити завжди незалежно від величини її кута розкриття.

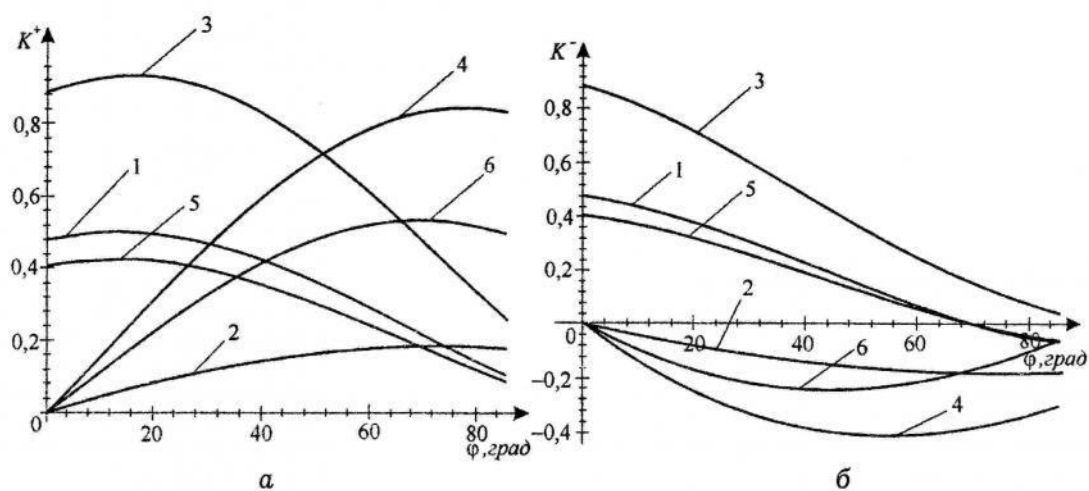


Рис. 4

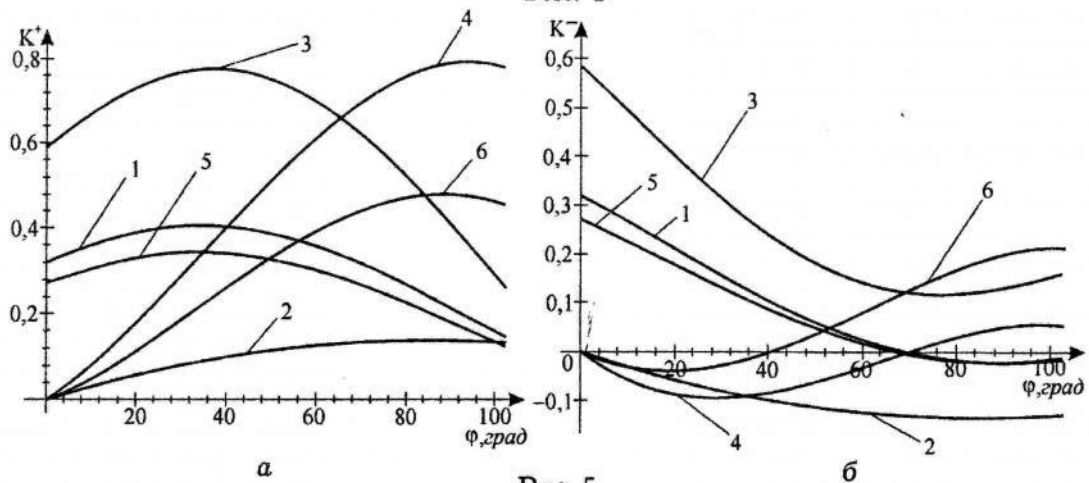


Рис. 5

На рис. 3 показано розподіл приведенного контактного тиску $N_r^* = N_r h / M$ між берегами тріщини для максимального граничного кута розкриття тріщини φ^* при різних γ для $\nu = 0,3$. Як видно з цього рисунка, контактний тиск у вершині тріщини b дорівнює нулю, у вершині a

збільшується зі збільшенням γ , причому він від радіуса кола R не залежить.

Для $\nu = 0,3$ на рис. 4 і рис. 5 показано графічну залежність приведених коефіцієнтів інтенсивності зусиль (КІС) та моментів (КІМ) від кута розкриття тріщини φ при $\gamma = 20^\circ$ і граничному куті розкриття тріщини $\varphi^* = 86,03^\circ$ та $\gamma = 40^\circ$ і $\varphi^* = 102,73^\circ$. Рисунки а відповідають вершині b (значок зверху "+"), рисунки б – вершині a (значок зверху "-"). Кривим 1 (k_1^*) і 2 (k_2^*) відповідають зображені КІС ($k_i^* = k_i h / (M \sqrt{R \varphi})$), кривим 3, 5 (K_1^*) та 4, 6 (K_2^*) – зображені КІМ $K_i / (M \sqrt{R \varphi})$, причому криві 3 (K_1^*) і 4 (K_2^*) відповідають випадку, коли контакту берегів немає. Зауважимо, що значення КІС і КІМ для кута розкриття тріщини $\varphi = 0$ відповідає випадку прямолінійної тріщини. Крім того, КІС $k_1^{*\pm}$ і КІМ $K_1^{*\pm}$ зв'язані між собою залежністю $k_1^{*\pm} / K_1^{*\pm} = 3(1 + \nu) / (3 + \nu)$. На підставі цих рисунків можна зробити висновок, що зі збільшенням кута розхилу тріщини φ симетричні КІМ і КІС, збільшуються у вершині b і спадають у вершині a порівняно з прямолінійною тріщиною, при цьому з'являються антисиметричні КІМ і КІС, які по величині спочатку також збільшуються в обох її вершинах. Як і для прямолінійної тріщини врахування контакту її берегів приводить до зменшення КІМ та появи КІС.

-
1. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2-х т. / Под. ред. Ю. Мураками. – М., 1990.
 2. Мазурак Л. П., Бережницкий Л. Т. Изгиб трансверсально-изотропных пластин с дефектами типа трещин. – К., 1990.
 3. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К., 1981.
 4. Бережницкий Л. Т., Делявский М. В., Панасюк В. В. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. – К., 1979.
 5. Шацький І. П. Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами. Доп. АН УРСР. Сер. А. Фіз.-мат. та техн. науки. – 1988. – № 7. – С. 49–51.
 6. Kwon Y. W. Finite element analysis of crack closure in plate bending // Comp. and Struct. – 1989. – Vol. 32. – N 6. – P. 1439–1445.
 7. Опанасович В. К., Новосад В. П., Селіверстов Р. Г. Врахування контакту берегів тріщини під час згину трансверсально-ізотропної пластини // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та

- конструкцій. Зб. наук. праць. – Вип. 5 / За заг. ред. О. Є. Андрейківа, Й. Й. Лучка, В. В. Божидарніка. – Львів, 2002. – С. 148–153.
8. Божидарник В., Опанасович В., Герасимчук П. Двосторонній згин ізотропної пластини з наскрізною тріщиною по дузі кола з урахуванням контакту її берегів // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій // Під заг. ред. В. В. Панасюка. Львів. Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, 2004. – С. 213–218.
9. Прусов И. А. Некоторые задачи термоупругости. – Минск, 1972.
10. Прусов И. А. Метод сопряжения в теории плит. – Минск, 1975.

FLEXURE OF THE ISOTROPIC PLATE, WEAKENING WITH THE THICKNESS CIRCULAR ARC CRACK WITH ACCOUNT OF ITS EDGES CONTACT

Viktor Bozhydarnik¹, Viktor Opanasovych², Pavlo Herasymchuk¹

¹*Lutsk State Technical University,
Lvivska Str., 75, 43018 Lutsk, Ukraine*
²*Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine*

On the of the classical theory of plate flexural arc crack with extrinsic asymmetrical load consign smoth contact of its edges along the whole length of one of its surfaces by moments applied at infinity has been investigated. The conditions, permithing such solution, have been determined. Numerical analysis of contact pressure and moment – intensive factors are presented in the form of diagrams.

Key words: bending, isotropic plate, circular arc crack, two-dimensional problem of the theory of elasticity, classical theory of bend, complex potentials, contact pressure, coefficients intensity moment and efforts.

Стаття надійшла до редколегії 17.05.2005

Прийнята до друку 22.11.2006

УДК 539.3

ПЛАСТИЧНЕ ВІДШАРОВУВАННЯ ПІД ЧАС ПОЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ ЖОРСТКОГО ПРЯМОКУТНОГО ВКЛЮЧЕННЯ У СЕРЕДОВИЩІ З ВЕЛИКОЮ ЗАТРИМКОЮ ТЕКУЧОСТІ

Георгій СУЛИМ, Марта КРИВЕНЬ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

Досліджено напружено-деформований стан і розвиток смуг пластичності за поздовжнього зсуву пружно-пластичного середовища з великою затримкою текучості, що містить жорстке включення прямокутного перерізу. Показано, що на відміну від ідеального пружно-пластичного середовища, обов'язково з'являються пластичні смуги в матеріалі матриці, довжина яких виявилась набагато меншою, ніж у смугах, які оточують включення.

Ключові слова: антиплоска деформація, прямокутник, пружно-пластичний матеріал, зуб пластичності, смуги пластичності, відшарування.

Дослідження розвитку пластичних смуг (ПС) під час зсуву поблизу тріщин і безмежно тонких жорстких включень у середовищі з затримкою текучості (із зубом пластичності на діаграмі напруження-деформація матеріалу) свідчать, що кількість смуг, які розвиваються від точок найвищої концентрації напружень, так само, як і кути між ними, визначаються величиною затримки текучості (висотою зуба): чим більша затримка, тим менша кількість смуг [1, 2].

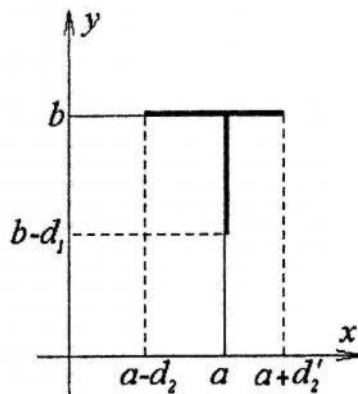


Рис. 1.

Схема розвитку пластичних смуг біля однієї з вершин включення

Згадані дослідження напружено-деформованого стану та розвитку пластичних деформацій стосуються випадку безмежно тонкого включення і мають обмежене практичне значення, більший інтерес становить вивчення включень скінченної товщини, оскільки зі зменшенням товщини з нього у граничному випадку повинен бути отриманий випадок включення безмежно тонкого.

У випадку поздовжнього зсуву тіла з включенням прямокутного перерізу однією з можливих форм розвитку пластичних деформацій є відшаровування матриці, тобто локалізація пластичних деформацій на межі включення-середовище. Однак з причини, яку з'ясовано далі, вважати пластичні

деформації локалізованими лише на межі включення-середовище не можна. Треба допускати виникнення додаткових смуг усередині матриці.

У цій праці розглянемо випадок, коли поза вершинами включення прямолінійно продовжуються горизонтальні смуги (рис. 1) та з'ясуємо умови, за яких така схема розвитку пластичних деформацій буде обґрунтованою. Сформулюємо задачу дослідження розвитку ПС від вершин жорсткого включення $|x| \leq a$, $|y| \leq b$ в ідеальному пружно-пластичному середовищі з нижнім порогом текучості k_0 і верхнім k та знаходження довжин вертикальної d_1 і горизонтальних d_2 , d_2' ПС залежно від величини прикладеного на нескінченності навантаження $\tau_{yz} = \tau_\infty$, $\tau_{xz} = 0$. Величину затримки текучості $k - k_0$ вважатимемо достатньою для виникнення такої схеми пластичних деформацій.

Формалізація задачі. Крайова задача у напруженнях у першому квадранті площини Oxy поза включенням і поза ПС (область D) є такою:

$$\begin{aligned} \tau_{xz}(0, y) &= 0 \quad (y > b), \quad \tau_{xz}(x, b) = 0 \quad (0 < x < a - d_1), \\ \tau_{yz}(x, b) &= k_0 \quad (a - d_2 \leq x \leq a + d_2'), \quad \tau_{xz}(a, y) = k_0 \quad (b \leq x \leq b - d_1), \\ \tau_{yz}(a, y) &= 0 \quad (0 < y < b - d_1), \quad \tau_{xz}(x, 0) = 0 \quad (a < x < +\infty), \\ \tau_{xz}(x, b) &= 0 \quad (0 < x < a - d_1), \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \tau_{yz}(x, y) = \tau_\infty, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \tau_{xz}(x, y) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Оскільки поза смугами пластичності верхня межа текучості досягатися не може, в області D повинна виконуватися також така умова:

$$\tau_{xz}^2(x, y) + \tau_{yz}^2(x, y) < k^2. \quad (2)$$

Крім того, оскільки крайова задача (1) сформульована у напруженнях, то треба додатково вимагати однозначності переміщення під час обходу включення

$$\Delta w_{FE} + \Delta w_{ED} = \Delta w_{CD}, \quad (3)$$

де Δw_{FE} – приріст переміщення на ділянці FE межі матриці. Аналогічний зміст мають й інші члени цієї рівності.

Розв'язування крайової задачі (1)–(3). Складена з компонент тензора напружень функція

$$\tau(\zeta) = \tau_{yz}(x, y) + i\tau_{xz}(x, y)$$

змінної $\zeta = x + iy$ є аналітичною в області D і внаслідок умов (1) конформно відображає цю область на квадрат G площини τ (рис. 2). Отож, розв'язування задачі (1) зводиться до

побудови відповідного конформного відображення. Відповідність характерних точок цього відображення зображена на рис. 1, 2.

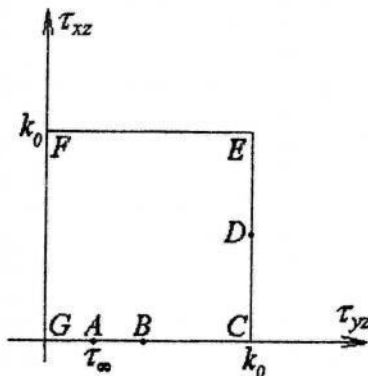


Рис. 2.

Образ G області D під час конформного відображення у площину напружень

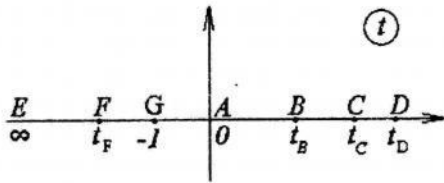


Рис. 3.

Допоміжна комплексна площина

однопараметрична система розв'язків задачі (1). Вільним параметром множини розв'язків вважатимемо довжину d'_2 додаткової смуги. Існування вільного параметра дає змогу забезпечити виконання однозначності переміщення (3). Отже, розвиток ПС за схемою одного пластичного відшаровування включення, загалом неможливий – для однозначності переміщення треба допускати існування додаткових смуг у матриці.

Межа фігур D і G є ламаною прямою і, отже, потрібне відображення можна побудувати за допомогою перетворення Крістофеля-Шварца. Введемо для цього допоміжну комплексну площину t , у якій фігурам D і G відповідатиме верхня півплощина (область H). Точкам меж областей D і G з фіксованими координатами прийемо у відповідність на межі області H фіксовані точки – решті характерних точок границі областей D і G на дійсній осі площини t відповідатимуть точки, координати яких підлягають визначенню (рис. 3). Функції $\zeta(t)$ і $\tau(t)$ тепер можна подати так:

$$\zeta(t) = a + \frac{b}{M_1} \int_{-1}^t F_{\zeta}(\eta) d\eta; \quad (4)$$

$$\tau(t) = \frac{\tau_{\infty}}{M_2} \int_{-1}^t F_{\tau}(\eta) d\eta, \quad (5)$$

де

$$F_{\zeta}(\eta) = (\eta - t_D)^{-3/2} (\eta - t_B)^{-1/2} (\eta + 1)^{-1/2},$$

$$F_{\tau}(\eta) = (\eta + 1)^{-1/2} (\eta - t_C)^{-1/2} (\eta - t_F)^{-1/2}, \quad M_1 = \int_{-\infty}^{-1} |F_{\zeta}(\eta)| d\eta, \quad M_2 = \int_{-1}^0 |F_{\tau}(\eta)| d\eta.$$

Під нецілим степенем комплексної змінної розумітимемо аналітичну в області H функцію, дійсну та додатну для таких самих значень аргумента.

Вже з картини конформного відображення стає очевидною величина затримки текучості, за якої пластичні деформації будуть розвиватися за згаданою схемою. Оскільки максимальне зсувне напруження в області D має точну верхню межу, що дорівнює $k_0 \sqrt{2}$, розглядувана схема реалізуватиметься, коли $k \geq k_0 \sqrt{2}$.

З рівностей (1) випливає наявність на межі областей D і G трьох пар точок, а саме $\zeta = \infty$ і $\tau = \tau_{\infty}$; $\zeta = a + ib$ і $\tau = \tau_0(1 + i)$ та $\zeta = a$ і $\tau = 0$, координати яких фіксовані й апіорі відомі. Тому за теоремою Рімана про єдність конформного відображення [3] існує

Функції $\zeta(t)$ $\tau(t)$ містять чотири невідомі параметри t_F ($-\infty < t_F < -1$), t_B , t_C , t_D ($0 < t_B < t_C < t_D < +\infty$). Два рівняння для них отримуємо з метричних співвідношень у фігурах D і G

$$\int_{t_B}^{t_D} |F_\zeta(\eta)| d\eta - \int_{t_D}^{+\infty} |F_\zeta(\eta)| d\eta = \frac{a}{b} \int_{-\infty}^{-1} |F_\zeta(\eta)| d\eta; \quad (6)$$

$$\int_{t_F}^{-1} F_\tau(\eta) d\eta = \int_{-1}^{t_C} F_\tau(\eta) d\eta, \quad (7)$$

які забезпечують необхідні співвідношення довжин сторін включення і рівність сторін фігури G. Ще одне рівняння одержимо, вимагаючи у безмежно віддаленій точці площини ζ , якій у допоміжній площині t відповідає точка $t = 0$, виконання рівності $\tau = \tau_\infty$

$$k_0 \int_{-1}^0 F_\tau(\eta) d\eta = \tau_\infty \int_{-1}^{t_C} F_\tau(\eta) d\eta. \quad (8)$$

Четверте рівняння отримаємо з умови неперервності переміщення (3). Відносне зміщення точок $\zeta_1 = x_1 + iy_1$ і $\zeta_2 = x_2 + iy_2$ визначається за формулою [4]

$$w = \frac{1}{\mu} \operatorname{Im} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \tau(\zeta) d\zeta,$$

де μ – пружний модуль зсуву.

З формул (3)–(5) одержуємо останнє рівняння, яке замикає систему для шуканих параметрів перетворення Крістофеля–Шварца

$$\int_{t_C}^{t_D} |F_\zeta(t)| dt \int_{t_C}^t |F_\tau(\eta)| d\eta = \int_{-\infty}^{t_F} |F_\zeta(t)| dt \int_{t_F}^t |F_\tau(\eta)| d\eta + \int_{t_D}^{\infty} |F_\zeta(t)| dt \int_{t_D}^t |F_\tau(\eta)| d\eta. \quad (9)$$

Система рівнянь (6)–(9) розв'язана методом послідовних наближень. Під час побудови алгоритму важливим є, по-перше те, що параметр t_D вважається вільним; по-друге те, що рівняння (7) і (8) не містять параметра t_B . Без урахування рівняння (9), тобто вибравши параметр t_D ($t_C < t_D < +\infty$) довільно, отримаємо однопараметричний розв'язок системи рівнянь (6)–(8).

Система (6)–(8) розпадається на дві незалежні: систему рівнянь (7), (8) і, окремо, рівняння (6).

Розв'язок системи (7), (8) стосовно параметрів t_F , t_C дає такий збіжний алгоритм:

$$t_F^{(j+1)} = -t_F^{(j)} \frac{FG^{(j)}}{GC^{(j)}}, \quad t_C^{(j+1)} = t_C^{(j)} \left(1 + \frac{GA^{(j)}}{GC^{(j)}} - \frac{\tau_\infty}{k_0} \right), \quad (10)$$

де

$$FG^{(j)} = \int_{t_F^{(j)}}^{-1} |F_\tau^{(j)}(\eta)| d\eta, \quad GC^{(j)} = \int_{-1}^{t_C^{(j)}} |F_\tau^{(j)}(\eta)| d\eta, \quad GA^{(j)} = \int_{-1}^0 |F_\tau^{(j)}(\eta)| d\eta;$$

початкові наближення $t_F^{(0)} = -2$, $t_C^{(0)} = 1$; функція $F_\tau^{(j)}(\eta)$ відрізняється від $F_\tau(\eta)$ лише заміною t_F і t_C на $t_F^{(j)}$ і $t_C^{(j)}$.

Параметр t_B визначається з рівняння (6) таким алгоритмом:

$$t_B^{(j+1)} = t_B^{(j)} \left(1 + \frac{BD^{(j)} - ED^{(j)}}{2EG^{(j)}} - \frac{a}{b} \right). \quad (11)$$

$$\text{Тут } BD^{(j)} = \int_{t_B^{(j)}}^{t_D^{(j)}} |F_\zeta^{(j)}(\eta)| d\eta, \quad ED^{(j)} = \int_{t_D^{(j)}}^{+\infty} |F_\zeta^{(j)}(\eta)| d\eta, \quad EG^{(j)} = \int_{-\infty}^{-1} |F_\zeta^{(j)}(\eta)| d\eta;$$

початкове наближення $t_B^{(0)} = t_C / 2$, функція $F_\zeta^{(j)}(\eta)$ відрізняється від $F_\zeta(\eta)$ тільки заміною t_B на $t_B^{(j)}$.

Рівняння (9) є лінійним алгебричним стосовно параметра t_D . Воно дає

$$t_D = \frac{a_1 - a_3 - a_5}{a_2 - a_4 - a_6},$$

де

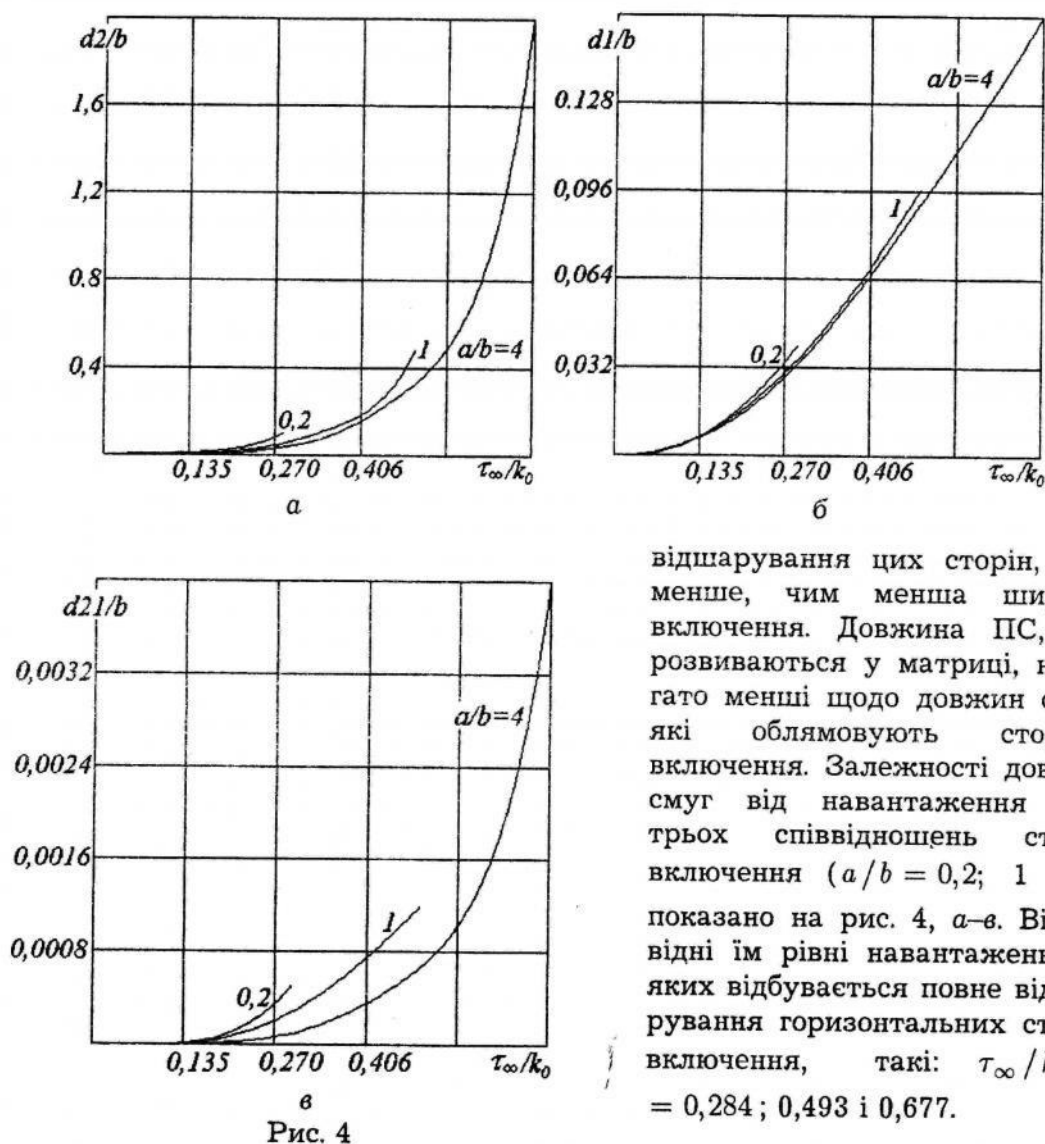
$$a_1 = \int_{-\infty}^{t_F} t dt \int_{-\infty}^t F(t, \eta) d\eta, \quad a_3 = \int_{t_D}^{+\infty} t dt \int_t^{+\infty} F(t, \eta) d\eta, \quad a_5 = \int_{t_C}^{t_D} t dt \int_{t_C}^t F(t, \eta) d\eta,$$

$$a_2 = \int_{-\infty}^{t_F} dt \int_{-\infty}^t F(t, \eta) d\eta, \quad a_4 = \int_{t_D}^{+\infty} dt \int_t^{+\infty} F(t, \eta) d\eta, \quad a_6 = \int_{t_C}^{t_D} dt \int_{t_C}^t F(t, \eta) d\eta, \quad F(t, \eta) = F_\zeta(t) F_\tau(\eta).$$

Тепер, коли всі шукані параметри знайдено, з використанням формули (4) легко обчислити довжини пластичних смуг

$$d_1 = \frac{a}{M_1} \int_{-\infty}^{t_F} F_\zeta(\eta) d\eta, \quad d_2 = \frac{a}{M_1} \int_{t_C}^{t_D} F_\zeta(\eta) d\eta, \quad d'_2 = \frac{a}{M_1} \int_{t_D}^{+\infty} F_\zeta(\eta) d\eta. \quad (12)$$

Числові результати. Як і у випадку ідеально пружно-пластичного тіла [5], незалежно від відношення між шириною і висотою включення завжди спочатку відшаровуються ті сторони включення, паралельно до яких на нескінченності діє зсувне навантаження. Навантаження, за якого настає



відшарування цих сторін, тим менше, чим менша ширина включення. Довжина ПС, які розвиваються у матриці, набагато менші щодо довжин смуг, які облямовують сторони включення. Залежності довжин смуг від навантаження для трьох співвідношень сторін включення ($a/b = 0,2$; 1 і 4) показано на рис. 4, а-в. Відповідні їм рівні навантажень, за яких відбувається повне відшарування горизонтальних сторін включення, такі: $\tau_{\infty}/k_0 = 0,284$; $0,493$ і $0,677$.

Найсуттєвішою відмінністю картини розвитку ПС для включення з прямокутним перерізом у середовищі зі затримкою текучості порівняно з ідеально пружно-пластичним середовищем є обов'язкова поява додаткових смуг у матриці, які починають розвиватися від вершини включення. У середовищі з великою затримкою $k - k_0 \geq (\sqrt{2} - 1)k_0$ під дією паралельного до горизонтальних сторін включення зсувного навантаження додаткові смуги розвиваються на продовженні цих сторін і набагато менші щодо смуг

на межі включення-середовище. Тому можна сподіватися, що наближений розв'язок задачі, в якому знехтувано додатковою смугою всередині матриці, будучи набагато простішим, зможе забезпечити досить високу точність.

1. Кривень В.А. Галуження пластичних смуг біля вершини вирізу за поздовжнього зсуву // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2001. – № 3. – С. 38–46.
2. Sulym H., Krywen M. Odseparowywanie plastyczne cienkiej sztywnej inkluzji w osrodku z duzym zatrzymaniem plynincia podczas antyplaskiego stanu odkształcenia // Materiały III Symp. Mechaniki Zniszczenia Materialow i Konstrukcji (Augustyw, 1-4 czerwca 2005). – Bialystok, 2005. – S. 397–400.
3. Иванов В.И., Попов В.Ю. Конформные отображения и их приложения. – М., 2002.
4. Райс Дж. Математические методы в механике разрушения // Разрушение. – М., 1975. – Т. 2. – С. 204–335.
5. Кривень В.А., Гнатюк О.Б., Гром'як Р.С. Антиплоска деформація ідеально пружно-пластичного тіла з жорстким прямокутним включенням // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2000. – № 6. – С. 19–23.

PLASTIC EXFOLIATION OF RECTANGULAR RIGID INCLUSION IN THE SOLID WITH A GREAT YIELD DROP UNDER LONGITUDINAL SHEAR

Georgij Sulym, Marta Kryven

*Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine*

The stress–deformation state and plastic bands development from the tips of rectangular rigid inclusion in the solid with a great value of yielding delay under uniform quasi-static shear on infinity is considered. It is shown that unlike ideally elastic-plastic body necessarily appearance of plastic bands in material matrices, which length appeared far less from one of bands bordering inclusion.

Key words: antiplane strain, rectangle, elastic-plastic material, yield drop, plastic band, exfoliation.

Стаття надійшла до редколегії 09.08.2005

Прийнята до друку 22.11.2006

УДК 539.3

МЕТОД ПОЛІНОМІВ ЛАГЕРРА В НЕСТАЦІОНАРНІЙ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ РАДІАЛЬНО-ШАРУВАТОГО ЦИЛІНДРА

Оксана ГАЛАЗЮК, Ігор ТУРЧИН

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

З використанням інтегрального перетворення Лагерра-Фур'є побудовано розв'язок осесиметричної нестационарної задачі теплопровідності для радіально-шаруватого циліндра при локальному нагріві його граничних поверхонь.

Ключові слова: інтегральне перетворення Лагерра-Фур'є, нестационарна задача теплопровідності, радіально-шаруватий циліндр.

Найпоширеніший метод дослідження фізико-механічних полів у композитних тілах і середовищах – гомогенізація його властивостей за однією або декількома координатами з подальшим вивченням їхньої поведінки як гіпотетично однорідних структур [1]. Такий підхід допомагає спростити загальне формулювання задачі, використати відомі методи досліджень фізико-механічних полів в однорідних тілах. У рамках такого підходу не вдається достовірно визначити якісні та кількісні характеристики процесів у самому композиті, зумовлені його неоднорідністю.

Інший підхід, який враховує внутрішню неоднорідність і взаємодію окремих складових композита, приводить до розгляду окремих задач для кожного елемента композита з подальшим врахуванням умов спряження [2]. На підставі цього підходу вдається врахувати реальний стан у кожному шарі та визначити особливості трансформації фізико-механічних полів на поверхнях розділу. Сьогодні досить ґрунтовно вивчено стаціонарні процеси в таких тілах, проте в сучасній літературі практично немає синтезуючих аналітичних методів, які б дали змогу вирішити подібну проблему у випадку нестационарного процесу від математичного моделювання до здійснення достовірного кількісного та якісного аналізу.

Мета нашої праці – розробити аналітико-числової методики побудови розв'язку квазістатичних осесиметричних задач теплопровідності для радіально-шаруватих циліндричних тіл і дослідження перехідного температурного поля в композитних циліндричних тілах, зумовлених раптовою зміною температур граничних поверхонь.

Розглянемо композит, що складається з M вкладених циліндрів різної товщини і з різними фізико-механічними властивостями. Циліндр з індексом "1" є внутрішнім циліндричним шаром композита, а з індексом

“ M ” – зовнішнім. Джерелом перехідного термонапруженого стану в композиті є раптова локальна (за осью координатою) зміна температур граничних внутрішньої та зовнішньої поверхні.

Нестационарне температурне поле в тілі визначається розв'язком початково-крайової задачі для рівнянь теплопровідності

$$\frac{1}{\rho} \partial_{\rho} (\rho \partial_{\rho} T^{(i)}) + \partial_{\gamma}^2 T^{(i)} = \frac{1}{\tilde{a}_2} \frac{\partial T^{(i)}}{\partial \tau}, \quad i = 1, M \quad (1)$$

при таких крайових умовах

$$T^{(1)}(\rho_0, \gamma, \tau) = T_0(\gamma, \tau); \quad T^{(M)}(\rho_M, \gamma, \tau) = T_M(\gamma, \tau), \quad (2)$$

умовах спряження

$$\begin{aligned} T^{(i)}(\rho_i, \gamma, \tau) &= T^{(i+1)}(\rho_i, \gamma, \tau); \\ \tilde{\lambda}_T^{(i)} \partial_{\rho} T^{(i)}(\rho_i, \gamma, \tau) &= \tilde{\lambda}_T^{(i+1)} \partial_{\rho} T^{(i+1)}(\rho_i, \gamma, \tau), \end{aligned} \quad (3)$$

та при нульових початкових умовах

$$T^{(i)}(\rho, \gamma, 0) = 0, \quad (4)$$

де $T^{(i)}(\rho, \gamma, Fo)$ – температурне поле i -го циліндра; $\rho = r/R_0$, $\gamma = z/R_0$ – безрозмірні змінні циліндричної системи координат; $\tau = at/R_0^2$ – критерій Фур'є; $T^{(0)}(\gamma, \tau)$ – температура внутрішньої поверхні композита; $\tilde{a}_i = a/a_i$, $\tilde{\lambda}_T^i = \lambda_T^{i+1}/\lambda_T^i$, λ_T^i, a_i – відповідно коефіцієнти теплопровідності та температуропровідності i -го шару; a – коефіцієнт температуропровідності деякого матеріалу (вибирається залежно від завдань числового аналізу); $\rho_i = R_i/R_0$, R_0, R_M – радіуси внутрішньої та зовнішньої поверхонь композита $R_i; (i = \overline{1, M-1})$ – радіуси поверхонь спряження між шарами.

Без обмеження загальності будемо вважати, що температури граничних поверхонь симетричні щодо площини $\gamma = 0$. Застосувавши до задачі (1)–(3) інтегральне перетворення Лагерра за змінною τ [3] та cos-перетворення Фур'є за змінною γ [4], врахувавши нульову початкову умову (4), одержимо трикутну послідовність крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{1}{\rho} d_{\rho} (\rho d_{\rho} \bar{T}_n^{(i)}) - \left(\xi^2 + \lambda \frac{1}{\tilde{a}_i} \right) \bar{T}_n^{(i)} = \lambda \frac{1}{\tilde{a}_i} \sum_{m=0}^{n-1} \bar{T}_m^{(i)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad i = \overline{1, 2} \quad (5)$$

з відповідно трансформованими крайовими умовами та умовами спряження (2), (3)

$$\bar{T}_n^{(1)}(\xi, \rho_0) = \bar{T}_{0,n}(\xi); \quad \bar{T}_n^{(M)}(\xi, \rho_M) = \bar{T}_{M,n}(\xi), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_n^{(i)}(\xi, \rho_i) &= \bar{T}_n^{(i+1)}(\xi, \rho_i); \\ \tilde{\lambda}_T^{(i)} d_\rho \bar{T}_n^{(i)}(\xi, \rho_i) &= \tilde{\lambda}_T^{(i+1)} d_\rho \bar{T}_n^{(i+1)}(\xi, \rho_i), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{Тут } \bar{T}_n^{(i)}(\xi, \rho) = \int_0^\infty \cos(\xi\gamma) \left[\int_0^\infty \exp(-\lambda\tau) T^{(i)}(\rho, \gamma, \tau) L_n(\lambda\tau) d\tau \right] d\gamma - \text{зображення}$$

за Лагерром і Фур'є, $L_n(\cdot)$ – поліноми Лагерра; λ – масштабний множник.

Загальний розв'язок послідовності (5) можна записати у вигляді алгебричної згортки [3]

$$T_n^i = \sum_{j=0}^n [A_{n-j}^{(i)}(\xi) G_j^{(i)}(\xi, \rho) + B_{n-j}^{(i)}(\xi) W_j^{(i)}(\xi, \rho)], \quad (8)$$

де $\omega_i = \sqrt{\xi^2 + \lambda \frac{1}{\tilde{a}_i}}$, $A_{n-j}^{(i)}(\xi)$, $B_{n-j}^{(i)}(\xi)$ – функції, які визначають з трансформованих умов (6), (7). Відповідно $G_j(\cdot)$ і $W_j(\cdot)$ – лінійно-незалежні послідовності фундаментальних розв'язків систем (1.5), які можна подати у такому вигляді

$$G_j^{(i)}(\xi, \rho) = \sum_{k=0}^j a_{j,k}^{(i)} \rho^k I_k(\omega_i \rho), \quad W_j(\xi, \rho) = \sum_{k=0}^j a_{j,k}^{(i)} (-\rho^k) K_k(\omega_i \rho). \quad (9)$$

Тут $I_p(\cdot)$, $K_p(\cdot)$ – модифіковані функції Бесселя [5].

Для знаходження коефіцієнтів $a_{j,k}^{(i)}$ підставимо вирази $G_j^{(i)}(\xi, \rho)$, які мають подання (9) в (5). Оскільки

$$\frac{1}{\rho} d_\rho (\rho d_\rho G_j^{(i)}) = \sum_{k=0}^j a_{j,k}^{(i)} \omega [2k\rho^{k-1} I_{k-1}(\omega\rho) + \omega\rho^k I_k(\omega\rho)],$$

то після підстановки цього виразу в рівняння

$$\frac{1}{\rho} d_\rho (\rho d_\rho G_j) - \omega^2 G_j = \lambda \frac{1}{\tilde{a}_i} \sum_{m=0}^{j-1} G_m, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad i = \overline{1, M}$$

одержимо

$$2\omega \sum_{k=1}^j k a_{j,k} \rho^{k-1} I_{k-1}(\omega\rho) = \lambda \frac{1}{\tilde{a}_i} \sum_{m=0}^{j-1} \sum_{k=0}^m a_{j,k} \rho^k I_k(\omega\rho).$$

Прирівнюючи у цьому рівнянні коефіцієнти при однакових ρ^k і $I_k(\omega\rho)$ ($k = 1, 2, \dots$), прийдемо до рекурентних співвідношень на коефіцієнти $a_{j,k}$

$$a_{j,k+1}^{(i)} = \frac{\lambda}{2\tilde{a}_i\omega_i(k+1)} \sum_{m=k}^{j-1} a_{m,k}^{(i)}, \quad k = 0, 1, \dots, j-1; \quad j = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Для визначення функцій $A_{n-j}^{(i)}(\xi)$, $B_{n-j}^{(i)}(\xi)$ підставимо розв'язок (8) в крайові умови (6) й умови спряження (7). В результаті одержимо послідовність алгебричних рівнянь

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n \left[A_{n-j}^{(1)}(\xi) G_j^{(1)}(\xi, \rho_0) + B_{n-j}^{(1)}(\xi) W_j^{(1)}(\xi, \rho_0) \right] &= \bar{T}_{0,n}(\xi), \\ \sum_{j=0}^n \left[A_{n-j}^{(M)}(\xi) G_j^{(M)}(\xi, \rho_M) + B_{n-j}^{(M)}(\xi) W_j^{(M)}(\xi, \rho_M) \right] &= \bar{T}_{M,n}(\xi); \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n \left[A_{n-j}^{(i)}(\xi) G_j^{(i)}(\xi, \rho_i) + B_{n-j}^{(i)}(\xi) W_j^{(i)}(\xi, \rho_i) \right] &= \\ = \sum_{j=0}^n \left[A_{n-j}^{(i+1)}(\xi) G_j^{(i+1)}(\xi, \rho_i) + B_{n-j}^{(i+1)}(\xi) W_j^{(i+1)}(\xi, \rho_i) \right], \\ \tilde{\lambda}_T^{(i)} \sum_{j=0}^n \left[A_{n-j}^{(i)}(\xi) d_\rho G_j^{(i)}(\xi, \rho_i) + B_{n-j}^{(i)}(\xi) d_\rho W_j^{(i)}(\xi, \rho_i) \right] &= \\ = \tilde{\lambda}_T^{(i+1)} \sum_{j=0}^n \left[A_{n-j}^{(i+1)}(\xi) d_\rho G_j^{(i+1)}(\xi, \rho_i) + B_{n-j}^{(i+1)}(\xi) d_\rho W_j^{(i+1)}(\xi, \rho_i) \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

У рівняннях (11), (12) в лівій частині залишимо доданки, що містять невідомі $A_n^{(i)}$, $B_n^{(i)}$, решту перенесемо в праву частину

$$\begin{aligned} A_n^{(1)}(\xi) G_0^{(1)}(\xi, \rho_0) + B_n^{(1)}(\xi) W_0^{(1)}(\xi, \rho_0) &= \bar{T}_{0,n}(\xi) - \\ - \sum_{j=1}^n \left[A_{n-j}^{(1)}(\xi) G_j^{(1)}(\xi, \rho_0) + B_{n-j}^{(1)}(\xi) W_j^{(1)}(\xi, \rho_0) \right], \\ A_n^{(M)}(\xi) G_0^{(M)}(\xi, \rho_M) + B_n^{(M)}(\xi) W_0^{(M)}(\xi, \rho_M) &= \bar{T}_{M,n}(\xi) - \\ - \sum_{j=1}^n \left[A_{n-j}^{(M)}(\xi) G_j^{(M)}(\xi, \rho_M) + B_{n-j}^{(M)}(\xi) W_j^{(M)}(\xi, \rho_M) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_n^{(i)}(\xi) G_0^{(i)}(\xi, \rho_i) + B_n^{(i)}(\xi) W_0^{(i)}(\xi, \rho_i) - \\
& - A_n^{(i+1)}(\xi) G_0^{(i+1)}(\xi, \rho_i) - B_n^{(i+1)}(\xi) W_0^{(i+1)}(\xi, \rho_i) = \\
& = \sum_{j=1}^n \left[A_{n-j}^{(i+1)}(\xi) G_j^{(i+1)}(\xi, \rho_i) + B_{n-j}^{(i+1)}(\xi) W_j^{(i+1)}(\xi, \rho_i) \right] - \\
& - \sum_{j=1}^n \left[A_{n-j}^{(i)}(\xi) G_j^{(i)}(\xi, \rho_i) + B_{n-j}^{(i)}(\xi) W_j^{(i)}(\xi, \rho_i) \right], \\
& A_n^{(i)}(\xi) \tilde{\lambda}_T^{(i)} d_\rho G_0^{(i)}(\xi, \rho_i) + B_n^{(i)}(\xi) \tilde{\lambda}_T^{(i)} d_\rho W_0^{(i)}(\xi, \rho_i) - \\
& - A_n^{(i+1)}(\xi) \tilde{\lambda}_T^{(i+1)} d_\rho G_0^{(i+1)}(\xi, \rho_i) - B_n^{(i+1)}(\xi) \tilde{\lambda}_T^{(i+1)} d_\rho W_0^{(i+1)}(\xi, \rho_i) = \\
& = \tilde{\lambda}_T^{(i+1)} \sum_{j=1}^n \left[A_{n-j}^{(i+1)}(\xi) d_\rho G_j^{(i+1)}(\xi, \rho_i) + B_{n-j}^{(i+1)}(\xi) d_\rho W_j^{(i+1)}(\xi, \rho_i) \right] - \\
& - \tilde{\lambda}_T^{(i)} \sum_{j=1}^n \left[A_{n-j}^{(i)}(\xi) d_\rho G_j^{(i)}(\xi, \rho_i) + B_{n-j}^{(i)}(\xi) d_\rho W_j^{(i)}(\xi, \rho_i) \right].
\end{aligned} \tag{13}$$

Якщо врахувати значення для $G_0^{(i)}(\xi, \rho)$ і $W_0^{(i)}(\xi, \rho)$ відповідно до подань (9) та прийняти $a_{0,0} = 1, a_{j,0} = 0, j = 1, 2, \dots$, то з (13) одержимо трикутні послідовності лінійних рівнянь стосовно невідомих $A_n^{(i)}$ і $B_n^{(i)}$, які в матричному записі матимуть вигляд

$$(b_{m,k}) \{A_n^{(1)}, B_n^{(1)}, A_n^{(2)}, B_n^{(2)}, \dots, A_n^{(M)}, B_n^{(M)}\}^T = \{c_{n,k}\}^T, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{14}$$

Матриця $(b_{m,k})$ має вигляд

$$\begin{pmatrix}
b_{1,1} & b_{1,2} & 0 & \dots & 0 \\
& [B_2] & & & \\
0 & & \ddots & & 0 \\
& & & [B_i] & \\
\vdots & & & & \ddots \\
& & & & & [B_{M-1}] \\
0 & \dots & 0 & b_{2M-1,2M} & b_{2M,2M}
\end{pmatrix}, \tag{15}$$

де $[B_i]$ – блоки розмірності 2×4

$$[B_i] \equiv \begin{bmatrix} b_{2i,2i-1} & b_{2i,2i} & b_{2i,2i+1} & b_{2i,2i+2} \\ b_{2i+1,2i-1} & b_{2i+1,2i} & b_{2i+1,2i+1} & b_{2i+1,2i+2} \end{bmatrix},$$

а ненульові коефіцієнти обчислюють за формулами

$$\begin{aligned} b_{1,1} &= I_0(\omega_1 \rho_0) ; \quad b_{1,2} = K_0(\omega_1 \rho_0) ; \quad b_{2i,2i-1} = \lambda_T^{(i)} \omega_i I_1(\omega_i \rho_i) ; \\ b_{2i,2i} &= -\lambda_T^{(i)} \omega_i K_1(\omega_i \rho_i) ; \quad b_{2i,2i+1} = -\lambda_T^{(i+1)} \omega_{i+1} I_1(\omega_{i+1} \rho_i) ; \\ b_{2i,2i+2} &= \lambda_T^{(i+1)} \omega_{i+1} K_1(\omega_{i+1} \rho_i) ; b_{2i+1,2i-1} = I_0(\omega_i \rho_i) ; b_{2i+1,2i} = K_0(\omega_i \rho_i) ; (16) \\ b_{2i+1,2i+1} &= -I_0(\omega_{i+1} \rho_i) ; b_{2i+1,2i+2} = -K_0(\omega_{i+1} \rho_i) ; i = \overline{1, M-1} ; \\ b_{2M-1,2M} &= I_0(\omega_M \rho_M) ; \quad b_{2M,2M} = K_0(\omega_M \rho_M) . \end{aligned}$$

Стовпець вільних членів $\{c_{n,k}\}$ – є правою частиною рівнянь (13), його компоненти мають вигляд

$$\begin{aligned} c_{n,1} &= \bar{T}_{0,n}(\xi) - \sum_{j=1}^n \left[A_{n-j}^{(1)}(\xi) G_j^{(1)}(\xi, \rho_0) + B_{n-j}^{(1)}(\xi) W_j^{(1)}(\xi, \rho_0) \right] ; \\ c_{n,2M} &= \bar{T}_{M,n}(\xi) - \sum_{j=1}^n \left[A_{n-j}^{(M)}(\xi) G_j^{(M)}(\xi, \rho_M) + B_{n-j}^{(M)}(\xi) W_j^{(M)}(\xi, \rho_M) \right] ; \\ c_{n,2i} &= -\sum_{j=1}^n \left[A_{n-j}^{(i)}(\xi) G_j^{(i)}(\xi, \rho_i) + B_{n-j}^{(i)}(\xi) W_j^{(i)}(\xi, \rho_i) \right] + \\ &+ \sum_{j=1}^n \left[A_{n-j}^{(i+1)}(\xi) G_j^{(i+1)}(\xi, \rho_i) + B_{n-j}^{(i+1)}(\xi) W_j^{(i+1)}(\xi, \rho_i) \right], \quad i = \overline{1, M-1} ; \quad (17) \\ c_{n,2i+1} &= -\tilde{\lambda}_T^{(i)} \sum_{j=1}^n \left[A_{n-j}^{(i)}(\xi) d_\rho G_j^{(i)}(\xi, \rho_i) + B_{n-j}^{(i)}(\xi) d_\rho W_j^{(i)}(\xi, \rho_i) \right] + \\ &+ \tilde{\lambda}_T^{(i+1)} \sum_{j=1}^n \left[A_{n-j}^{(i+1)}(\xi) d_\rho G_j^{(i+1)}(\xi, \rho_i) + B_{n-j}^{(i+1)}(\xi) d_\rho W_j^{(i+1)}(\xi, \rho_i) \right], \quad i = \overline{1, M-1} . \end{aligned}$$

Структура (15) матриці $[b_{k,l}]$ дає змогу досить просто звести її до трикутного вигляду і записати рекурентний розв'язок

$$\begin{aligned}
B_n^{(M)} &= \frac{c_{n,2M}^*}{b_{2M,2M}^*}; \quad A_n^{(M)} = \frac{1}{b_{2M-1,2M-1}^*} \left(c_{n,2M-1}^* - B_n^{(M)} b_{2M-1,2M}^* \right); \\
B_n^{(i)} &= \frac{1}{b_{2i,2i}^*} \left(c_{n,2i}^* - B_n^{(i+1)} b_{2i,2i+2}^* - A_n^{(i+1)} b_{2i,2i+1}^* \right), \quad i = \overline{M-1, 1}; \quad (18) \\
A_n^{(i)} &= \frac{1}{b_{2i-1,2i-1}^*} \left(c_{n,2i-1}^* - B_n^{(i)} b_{2i-1,2i}^* \right), \quad i = \overline{M-1, 1},
\end{aligned}$$

де зроблено такі позначення:

$$\begin{aligned}
b_{1,1}^* &= b_{1,1} = I_0(\omega_1 \rho_0); \quad b_{1,2}^* = b_{1,2} = K_0(\omega_1 \rho_0); \\
b_{2i,2i}^* &= -\lambda_T^{(i)} \omega_i \left(K_1(\omega_i \rho_i) b_{2i-1,2i-1}^* - I_1(\omega_i \rho_i) b_{2i-1,2i}^* \right); \\
b_{2i,2i+1}^* &= -\lambda_T^{(i+1)} \omega_{i+1} I_1(\omega_{i+1} \rho_i) b_{2i-1,2i-1}^*; \\
b_{2i,2i+2}^* &= \lambda_T^{(i+1)} \omega_{i+1} K_1(\omega_{i+1} \rho_i) b_{2i-1,2i-1}^*; \\
b_{2i+1,2i+1}^* &= -\lambda_T^{(i+1)} \omega_{i+1} I_1(\omega_{i+1} \rho_i) b_{2i-1,2i-1}^* \left(K_0(\omega_i \rho_i) b_{2i-1,2i-1}^* - b_{2i-1,2i}^* I_0(\omega_i \rho_i) \right) - \\
&\quad - \lambda_T^{(i)} \omega_i I_0(\omega_{i+1} \rho_i) b_{2i-1,2i-1}^* \left(K_1(\omega_i \rho_i) b_{2i-1,2i-1}^* - I_1(\omega_i \rho_i) b_{2i-1,2i}^* \right); \\
b_{2i+1,2i+2}^* &= \lambda_T^{(i+1)} \omega_{i+1} K_1(\omega_{i+1} \rho_i) b_{2i-1,2i-1}^* \left(K_0(\omega_i \rho_i) b_{2i-1,2i-1}^* - b_{2i-1,2i}^* I_0(\omega_i \rho_i) \right) - \\
&\quad - \lambda_T^{(i)} \omega_i K_0(\omega_{i+1} \rho_i) b_{2i-1,2i-1}^* \left(K_1(\omega_i \rho_i) b_{2i-1,2i-1}^* - I_1(\omega_i \rho_i) b_{2i-1,2i}^* \right), \quad i = \overline{1, M-1}; \\
b_{2M,2M}^* &= b_{2M-1,2M}^* I_0(\omega_M \alpha_M) - K_0(\omega_M \alpha_M) b_{2M-1,2M-1}^*; \\
c_{n,1}^* &= c_{n,1}; \quad c_{n,2i}^* = c_{n,2i} b_{2i-1,2i-1}^* - c_{n,2i-1} \lambda_T^{(i)} \omega_i I_1(\omega_i \rho_i); \\
c_{n,2i+1}^* &= \left(c_{n,2i} b_{2i-1,2i-1}^* - c_{n,2i-1} \lambda_T^{(i)} \omega_i I_1(\omega_i \rho_i) \right) \times \\
&\quad \times \left(K_0(\omega_i \rho_i) b_{2i-1,2i-1}^* - b_{2i-1,2i}^* I_0(\omega_i \rho_i) \right) + \\
&\quad + \lambda_T^{(i)} \omega_i \left(K_1(\omega_i \rho_i) b_{2i-1,2i-1}^* - b_{2i-1,2i}^* I_1(\omega_i \rho_i) \right) \times \\
&\quad \times \left(c_{n,2i+1} b_{2i-1,2i-1}^* - c_{n,2i-1} I_0(\omega_i \rho_i) \right), \quad i = \overline{1, M-1}; \\
c_{n,2M}^* &= c_{n,2M-1}^* I_0(\omega_M \alpha_M) - c_{n,2M}^* b_{2M-1,2M-1}^*.
\end{aligned}$$

Послідовно знайшовши зі співвідношень (18) всі $A_n^{(i)}$ і $B_n^{(i)}$, а, отже, і $\bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma)$, остаточний розв'язок задачі (1)-(4) подамо у вигляді

$$T^{(i)}(\rho, \gamma, \tau) = \frac{2\lambda}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(\lambda\tau) \int_0^{\infty} \sum_{j=0}^n [A_{n-j}^{(i)} G_j(\omega_i, \rho) + B_{n-j}^{(i)} W_j(\omega_i, \rho)] \cos(\xi\gamma) d\xi. \quad (19)$$

1. *Matysiak S., Wozniak Cz.* On the modelling of heat conduction problem in laminated bodies // *Acta mech.* – 1986. – Vol. 65. – P. 223–238.
2. *Коляно Ю.М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К., 1992.
3. *Галазюк В.А.* Метод поліномів Чебишева-Лагерра в змішаній задачі для лінійного диференціального рівняння другого порядку в часткових похідних з постійними коефіцієнтами // *Доп. АН УРСР. Сер. А.* – 1981. – № 1. – С. 3–7.
4. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. – М., 1955.
5. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. – М., 1979.

LAGUERRE'S POLINOMS METHOD IN NON-STATIONARY AXISYMMETRICAL PROBLEM OF HEAT CONDUCTION FOR A RADIAL-LAYERED CYLINDER

Oksana Halazyuk, Igor Turchyn

*Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine*

Using Fourier-Laguerre's integral transformation method the solution of the non-stationary axisymmetrical heat conduction problem for a radial-layered cylinder under local heating is constructed.

Key words: Fourier-Laguerre's integral transformation, non-stationary heat conduction problem, radial-layered cylinder.

Стаття надійшла до редколегії 14.06.2005

Прийнята до друку 22.11.2006

УДК 539.3

АКУСТИКО-ЕМІСІЙНА ОЦІНКА ОБ'ЄМНОЇ ПОШКОДЖЕНОСТІ АЛЮМІНІЄВОГО СПЛАВУ

**Валентин СКАЛЬСЬКИЙ, Віталій МИХАЛЬЧУК,
Юрій ОКРЕПКИЙ, Тетяна СЕЛІВОНЧИК**

*Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України,
вул. Наукова, 5, 79601 Львів, Україна*

Описано результати акустико-емісійних досліджень об'ємної пошкодженості (ОП) алюмінієвого сплаву під час розтягу циліндричних зразків діаметром 4 мм. На підставі результатів досліджень отримано критерій визначення початку макроруйнування та показано, що залежність ОП від істинної деформації розтягу добре апроксимується лінійною функцією.

Ключові слова: об'ємна пошкодженість, алюмінієві сплави, акустична емісія, пластичне деформування, діаграма розтягу.

Актуальність проблеми. Під час дослідження міцності деформованих тіл із тріщинами дуже важливим моментом є виявлення напружень і деформацій, які виникають біля дефекту. Найбільшу зацікавленість викликає область безпосередньо наближена до контуру тріщини – область пластичних деформацій (ПД), оскільки саме тут максимальна концентрація напружень і відбувається руйнування матеріалу. Вивчення механізмів його зародження та поширення, які проводять методами метало- та фрактографії до появи ПД кристалів і до зміни їх внутрішньої мікроструктури сьогодні уже не відповідають вимогам часу, бо не можуть безпосередньо використовуватись на об'єктах контролю. Тому виникла потреба залучати нові методологічні підходи, які дали б змогу наблизитись до кількісної оцінки процесів руйнування саме в зонах ПД за допомогою неруйнівних методів контролю.

Серед відомих методів неруйнівного контролю все більше визнання має метод акустичної емісії (АЕ). Пов'язано це, передусім, із бурхливим розвитком сучасної електроніки, що дає змогу створювати високочутливі, малогабаритні з широкою гамою функціональних можливостей апаратурні засоби, інформаційно-вимірювальні системи та комплекси. З огляду на це, чітко виділилися дві тенденції застосування методу АЕ: 1 – для НК і діагностування різних виробів і конструкцій; 2 – як тонкий фізичний метод дослідження динаміки розвитку процесів деформації та руйнування у матеріалі.

Стан проблеми. У металах завжди є мікропори, які утворилися через особливості технології їх виготовлення, наприклад, внаслідок виділення газів під час охолодження плавки, через пластичне деформування, сторонні

включення та інші причини. Ці пори під дією напружень є джерелами тріщиноутворення. Отож, у матеріалі велика кількість різних дефектів може призводити до високих локальних напружень, а розвиток руйнування з плином часу можна вважати результатом складної взаємодії цілої низки часових процесів.

Пошкодження матеріалу зводиться до розвитку тріщиноутворення, розрихлення [1]. Тріщиноутворення розпочинається на ранніх етапах деформації і пов'язане із ростом наявних та виникненням нових суб- і мікродефектів. У металах внаслідок рухливості вакансій вони можуть групуватися і утворювати щілини, які у полі напружень перетворюються в тріщини. Такі утворення здебільшого відбуваються на границях зерен. З іншого боку, відомо, що скупчення дислокацій призводить до високих локальних розтягуючих напружень, які породжують тріщину нормального відриву. Треба зазначити, що кількість згаданих дефектів в одиниці об'єму дуже значне [1]. Виникненню дефектів сприяють також теплові флуктуації атомів, які призводять до накопичення розривів міжатомних зв'язків.

У [2] пропонується у простішому варіанті пошкодженість описувати деяким скаляром $1 \geq \psi \geq 0$. У початковому стані за відсутності пошкодженості $\psi = 1$; в часі функція ψ спадає і пропонується її інтерпретувати як "суцільність". У праці [3] введено функцію $\omega \geq 0$, що дорівнює нулю в початковому стані та одиниці в момент руйнування. Функцію ω природно називати пошкодженістю на відміну від суцільності ψ і можна вважати, що $\psi = 1 - \omega$. Автор [2] пропонує надати функції ψ статистичний зміст і тоді зміну суцільності описати кінетичним рівнянням вигляду

$$\frac{d\psi}{dt} = F(\psi, \dots), \quad (1)$$

де F залежить від ψ та деяких інших змінних: тензора напружень чи тензора деформацій, температури, часу тощо. Суттєвим є те, щоб функції та параметри, які входять у рівняння (1), могли бути визначені з простих експериментів.

За таким принципом підбирали характеристики (за сталої температури), які суттєво впливають на довготривалу міцність в умовах повзучості матеріалу. Тобто, визначали критерії довготривалої міцності. Серед них важливе місце займає критерій найбільшого розтягуючого напруження $\sigma_1 > 0$ (за умови $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – головні напруження). В умовах плоско-напруженого стану (ПНС) цей критерій відомий ще як критерій Джонсона. Він дає добрий прогноз у випадку, коли $\sigma_1 \geq 0$ та $\sigma_2 \geq 0$. Якщо одне з головних напружень стає іншого знака (стискаюче), то є суттєві відхилення від прогнозу. За критерієм Зібеля всесторонній рівномірний розтяг $\sigma \geq 0$ сприяє крихкому руйнуванню. До цього класу критеріїв також належать критерії Сдобирева та Труніна, які дають кучний опис експериментів за кімнатних температур.

У літературі відомі також інші схеми концептуальних підходів для побудови континуальних моделей накопичення пошкоджень. Добре відома

схема побудови теорії довготривалої міцності розроблена у праці [4], де вводиться поняття пошкодження Π (його компоненти $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$), що характеризує накопичення дефектів і залежить від історії навантаження цього елемента середовища. Передбачається, що існують невід'ємні міри пошкоджень

$$M_j(\Pi), \quad j=1,2,\dots,m; \quad m \leq n. \quad (2)$$

Руйнування відбувається, коли для будь-якого $j = k$

$$M_k(\Pi) = c_k, \quad (3)$$

де c_k – константи матеріалу. У спрощеному варіанті теорії пошкоджень, пошкодження Π є симетричним тензором другого рангу.

Як критерій руйнування відома також концепція критичного значення ентропії запропонована у праці [5], що властива для цього матеріалу. Якщо не враховувати теплообмін із навколишнім середовищем, то швидкість наростання ентропії пов'язана передусім із потужністю деформацій повзучості, а відтак і з реологічними властивостями матеріалу. Накопичення пошкоджень пов'язується з деформаційними характеристиками, тобто має в'язкий характер. Ця схема дає змогу вивести закон лінійного підсумовування пошкоджень і низку визначених раніше емпіричних залежностей.

Для опису механічної поведінки матеріалу з тріщиною застосовано мікромеханічну модель руйнування, яка ґрунтується на відомому критерії Гурсона-Твергаарда-Нідлемана пластичного течіння для пористого матеріалу [6]. Така модель вбудована в розрахункову програму з використанням методу кінцевих елементів. Критичні величини мікромеханічних параметрів пошкоджуваності визначені експериментально і чисельними розрахунками стосовно гладких зразків, щоб прогнозувати початок пластичного руйнування компактного зразка з тріщиною. На прикладі низьколегованої сталі з ємності тиску показано, що застосовану мікромеханічну модель можна використати для прогнозу початку руйнування гладкого та компактного зразків.

Враховуючи те, що алюмінієві сплави (АС) добре досліджені у літературі [7], то виникла потреба створити методичні підходи для АЕ-оцінки їх об'ємної пошкоженості (ОП), щоб порівняти АЕ-міру ОП з літературними даними. З іншого боку, АС, маючи досить високу питому міцність, добру корозійну стійкість і технологічність, у багатьох областях техніки успішно конкурують зі сталями. Однак використання їх у великогабаритних конструкціях, які працюють в умовах дії високих розтягуючих напружень, призвело до проявів руйнування, коли прикладені зусилля відчутно менші розрахункової межі текучості сплавів. Це зумовило підвищену зацікавленість до вивчення процесів руйнування у них.

Отож, враховуючи те, що ефективних методів кількісної оцінки міри ОП під впливом навантаження чи деформування за допомогою сучасних методів НК у літературі не знайдено, ми розробили новий підхід на часткове розв'язання проблеми.

Мета нашої праці – розробити акустико-емісійну оцінку об'ємної пошкодженості алюмінієвого сплаву.

Результати досліджень та їх інтерпретування. Оскільки в основі АС є алюміній, то він здебільшого і визначає їх фізико-хімічні властивості. Al має кубічну гранецентровану ґратку. Перед руйнуванням більшість чистих металів під напруженнями розтягу пластично деформуються, що призводить до утворення шийки. В шийці виникають пори, які зливаються між собою, утворюючи спочатку мікротріщини (м/т), які, розвиваючись, переходять у макротріщини (МТ), а вони ростуть під напруженнями розтягу і призводять до зруйнування зразка. В чистому алюмінії утворення шийки не супроводжується виникненням пор, а відбувається шляхом розвитку м/т, які зароджуються у смугах деформації.

Для кількісної оцінки ОП матеріалу в його пластично-деформованому об'ємі (ПДО) покладена модель [8], де акустико-емісійну міру ОП матеріалу ξ_1 визначають за співвідношенням суми амплітуд сигналів АЕ A_i до об'єму V , де відбувається дефектоутворення

$$\xi_1 = \alpha(\sum A_i)/V, \quad (4)$$

де α – константа, яка враховує механічні властивості матеріалу та режими відбору САЕ. Для того самого матеріалу за тих самих режимів роботи АЕ-апаратури константа α є незмінною. В точці макрозруйнування матеріалу критичною величиною акустико-емісійної міри ОП матеріалу буде ξ_1^* , яку можна визначати експериментально. Маючи таке кількісне значення ξ_1^* для реального матеріалу під час неруйнівного контролю (НК) реальних виробів чи конструкцій критерієм, який визначає міру ОП конструкційного матеріалу до початку макроруйнування, стане залежність

$$\xi_1 \leq \xi_1^*. \quad (5)$$

Як відомо, коли виникає потреба вивчити фізичні процеси, які відбуваються на всіх ділянках діаграми розтягу, то використовують діаграму розтягу “справжні напруження σ – справжня деформація ϵ ”. Ця діаграма відрізняється від умовної діаграми розтягу тим, що в області рівномірного видовження враховують постійність об'єму деформації у припущенні, що зразок зберігає свою циліндричну форму, у розрахунку справжніх напружень в області утворення шийки – передбачається врахування діаметра в її найвужчому місці. У згаданій області справжня деформація збільшується значно швидше, ніж умовна. Водночас виникає багатовісність напруженого стану. Це зумовлено тим, що деформування і утворення ПДО відбувається лише в обмеженій зоні, тому локальна швидкість в області рівномірного видовження дещо знижується, у зоні звуження – сильно збільшується. Ці два фактори визначальні в області утворення шийки і під час випробувань вплив багатовісних напружень треба враховувати.

Для побудови справжніх діаграм розтягу варто отримати експериментальні залежності “зусилля навантаження P – найменший діаметр шийки d ” і “зусилля навантаження P – абсолютне видовження l ”. У праці [9] отримано рівняння, за яким легко будується діаграма $s - e$ для одновісного розтягу пластичного матеріалу від моменту утворення шийки і до моменту зруйнування зразка. Крім того, там виведені формули для розрахунку головних напружень у будь-якій точці найменшого перерізу шийки розтягнутого зразка. Переваги методики полягають у тому, що немає потреби визначати радіус кривини профілю шийки, а це суттєво полегшує проведення експериментів.

Отже, для проведення кількісної оцінки ОП матеріалу в його ПДО за амплітудами сигналів акустичної емісії (САЕ) треба:

- 1) Кількісно оцінити площу S новоутворених дефектів через показник $\sum A_i$, підсумовуючи зареєстровані під час випробування амплітуди САЕ, що опосередковано відображають динаміку та кількісні характеристики дефектоутворення [10];
- 2) Для знаходження величини ПДО V використовували експериментальні методики, які ґрунтуються на вимірюванні видовження зразка та біжучого діаметра шийки [11].

Результати експериментів. Спочатку без запису САЕ циліндричні зразки АС розтягували зафіксованими в спеціальній оправці. Це дає змогу опресувати місце затисків, щоб за допомогою ефекту Кайзера усунути генерацію АЕ з цих місць під час експерименту.

Для побудови діаграми $\xi - e$ циліндричні зразки АС розтягували на розривній машині типу FPZ-100/1 зі швидкістю переміщення рухомого затиску 4×10^{-7} m/s. Аналогові сигнали з тензометричного динамометра сили та тензометричних перетворювачів видовження і зміни діаметра шийки у її найвужчому перерізі подавали на параметричні входи АЕ комплексу MISTRAS-2001 виробництва фірми PAC (США). Там їх відповідно оцифровували і після цього запам'ятовували на жорсткому диску. За отриманими даними будували необхідні діаграми та визначали величину e . Після зняття оправки на розміщеному в затисках машини зразка, а саме на спеціально підготовленій шліфуванням поверхні лиски, встановлювали первинні перетворювачі АЕ (ПАЕ), з якого електричні сигнали подавали на попередній підсилювач системи відбору та обробки САЕ типу MISTRAS-2001 фірми PAC (USA). Аналогові сигнали від перетворювачів сили, видовження та звуження зразка надходили на відповідні низькочастотні канали цієї ж системи, де вони оцифровувалися, оброблялися і зберігалися на жорсткому дискові персонального комп'ютера типу IBM PC.

Так отримували синхронний запис САЕ і характеристики навантаження зразків, за якими оперативно можна було стежити на екрані монітора в реальному часі. Для всіх зразків місце встановлення ПАЕ, режими відбору, підсилення та обробки САЕ були незмінними. Коефіцієнт підсилення АЕ-тракту становив 80 dB (40 dB – попередній підсилювач) у смузі пропускання 0,1...1,0 МГц, яка визначалася амплітудно-частотною характеристикою ПАЕ.

Як видно з акустограми, на початкових стадіях навантаження в АС з'являються поодинокі САЕ з великими амплітудами від руйнування крихких включень. З наближенням до межі текучості інтенсивність їх наростає і такий характер генерації АЕ триває аж до утворення шийки. Далі розпочинається інтенсивне руйнування інтерметалідів та інших включень малих розмірів, розвиток дислокаційних переміщень із різними ступенями їх густини, зародження і розвиток МТ тощо зі зменшенням рівня САЕ, але з суттєвим зростанням їх кількості сигналів. На цій стадії деформування також інтенсивно зароджуються та розвиваються м/т, порушується когезія дрібних частинок у АС, що також є джерелом АЕ. Такі механізми вступають у дію за величин $e_1 = 6,1...6,7\%$. На закритичній ділянці діаграми розтягу м/т стрибкоподібно розвиваються аж до злиття їх у МТ і аналогічний розвиток її спричиняє зростання амплітуд дискретних САЕ. Всі ці процеси добре відображає характер кривих $\xi_1 - e$ (рис. 1). Виявлено, що до утворення шийки (стрибок значень ξ_1 на кривих) акустико-емісійна ОП невелика і її значеннями можна знехтувати (від моменту прикладання навантаження і до утворення шийки становить приблизно 11% від ξ_{1max}) [11]. Отож, накопичення ОП головно відбувається після утворення шийки. Цю ділянку кривих можна апроксимувати лінійною залежністю вигляду $\xi_1 = ae + b$ (рис. 1), а значення a , b та коефіцієнта кореляції r , отримані методом найменших квадратів для АС Д16-Т: $a = 0,74$; $b = -4,61$; $r = 0,929$. Як бачимо, існує добра кореляція між акустико-емісійною мірою ОП АС і динамікою зародження та розвитку руйнування у їх ПДО.

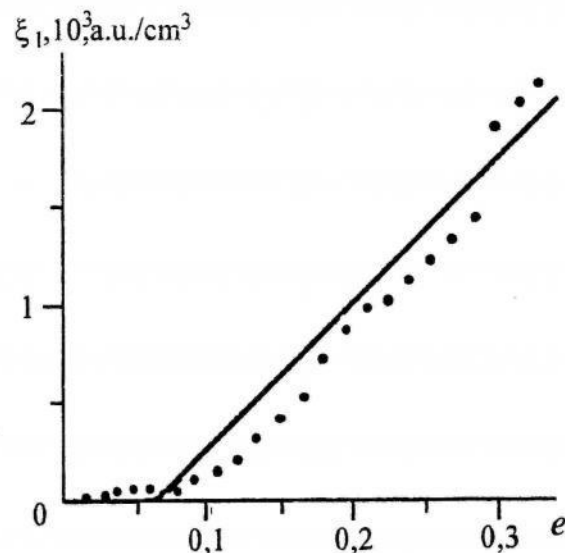


Рис. 2. Залежність $\xi_1 - e$ для сплаву Д16-Т

Отож, для нашого АС марки Д16-Т критичне значення АЕ-міри ОП становить $\xi_1^* = 2,2 \times 10^3$ а.о./см³ ($\alpha = 0,02$ см²/а.о.). Це допомагає за зміною суми амплітуд САЕ та відомою величиною ПДО визначати механічну міру ОП у твердих КТ різної будови, що має важливе прикладне значення для

виконання технічного діагностування виробів і конструкцій. Далі АЕ-дослідження порівнювали з відомими літературними даними [7]. Це дало змогу ідентифікувати походження САЕ і засвідчило добру кореляцію отриманих нами і літературних даних експериментів.

1. Метод АЕ допомагає виявляти ранні стадії руйнування АС за будь-якими механізмами. Для АС марки Д16-Т вони настають за $СД_e = 6,1...6,7\%$.
2. Під час розтягання гладких циліндричних зразків ПДО матеріалу концентрується у шийці зразка, а в його локальних мікрооб'ємах зароджуються і розвиваються несутцільності, пори, МТ тощо, які є джерелами АЕ.
3. Зміна значень акустико-емісійної ОП від справжньої деформації розтягу добре інтерполюється лінійною залежністю з максимальним відхиленням $7,4...8,1\%$.
4. Кількісна оцінка ОП тіла може ефективно проводитись за САЕ, якщо попередньо визначити константу матеріалу α .

-
1. Robinson E.L. Effect of temperature variation on the long time rupture strength of steels // Trans. ASME. – 1952. – Vol. 74. – N 5. – P. 68–76.
 2. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. – М., 1974.
 3. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М., 1966.
 4. Ильюшин А.А. Об одной теории длительной прочности // Мех. твердого тела. – 1967. – № 3. – С. 210–35.
 5. Киялбаев Д.А., Чудновский А.И. О разрушении деформируемых тел // Прикл. матем. и теор. физика. – 1970. – № 3. – С. 105–109.
 6. Разрушение алюминиевых сплавов при растягивающих напряжениях / М.Е. Дриц, А.М. Корольков, Ю.П. Гук и др. – М., 1973.
 7. Analysis of steel micromechanical damage parametrs trasferability in dactile fracture initiation conditions / M. Rakin, Z. Cvijovic., A. Sedmak and S. Sedmak // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002. – № 1. – С. 87–92.
 8. Скальський В.Р. Акустико-емісійне визначення накопичення об'ємної пошкодженості твердих тіл // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – № 2. – С. 84–92.
 9. Соколов П.С. Определение истинных характеристик прочности пластичных материалов // Заводская лаборатория. – 1959. – № 1. – С. 95–99.
 10. Analysis of acoustic emission caused by internal crack / O.Ye. Andreykiv, M.V. Lysak, O.M. Serhienko, V.R. Skalsky // Eng. Fract. Mech. – 2001. – Issue 11. – 68. – N 7. – P. 1317–1333.

11. Скальський В.Р. Методологія оцінки розвитку дефектоутворення у сплавах Д16-Т та 1201-Т методом акустичної емісії // *Машинознавство*. – 2001. – № 3. – С. 13–18.

**VOLUME DAMAGED ESTIMATION OF ALUMINUM ALLOY
BY METHODS OF ACOUSTIC EMISSION**

**Valentyn Skalsky, Vitaliy Mychalchuk, Yuriy Okrepky,
Tetyana Selivonchuk**

*Karpenko Physico-Mechanical Institute of the NAS of Ukraine,
Naukova Str., 5, 79601 Lviv, Ukraine*

The results of investigations of volumetric damage (VD) of aluminum alloys (AA) by acoustic emission of the cylindrical samples with a diameter of 4 mm during tensile loading are described. On the basis of investigation results the criterion for determining of a macrocracking start is obtained and is shown that the dependence VD on true strain could be good approximated by linear function.

Key words: volume damaged, aluminum alloys, acoustic emission, plastic deformation, strain diagram.

Стаття надійшла до редколегії 05.05.2005
Прийнята до друку 22.11.2006

УДК 539.3

НАПРУЖЕНИЙ СТАН ШАРУВАТИХ МАСИВІВ ГІРСЬКИХ ПОРІД З УРАХУВАННЯМ ЗМІНИ РЕЛЬЄФУ

Ігор КУЗЬ¹, Ришард КАЧИНСЬКІ²

¹Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

²Варшавський університет
Краківське Передмістя, 26/28, 00-927 Варшава, Польща

За допомогою методу осереднення досліджено напружений стан шаруватих масивів гірських порід. Для врахування зміни рельєфу земної поверхні цей метод доповнюємо варіаційно-різницевим методом для областей з криволінійною межею.

Ключові слова: шарувате середовище, метод осереднення, варіаційно-різницевий метод.

Масиви гірських порід, які входять до земної кори, переважно шаруваті. Дослідження напружено-деформованого стану таких масивів з урахуванням зміни рельєфу – важливий етап перед добуванням корисних копалин або будівництвом різних інженерних споруд. За допомогою методу осереднення [1] задача для періодичного шаруватого середовища зводиться до двох простіших задач: задачі для трансверсально-ізотропного однорідного середовища у вихідній області та задачі на комірці періодичності. У цій праці метод осереднення доповнюється числовим методом [2], який дає змогу врахувати змінний рельєф земної поверхні.

Формулювання задачі. Розглянемо рівняння рівноваги для неоднорідного анізотропного пружного середовища під дією сили тяжіння в області з параболічним вирізом, який моделює гірську долину (рис. 1)

$$(C_{ijkl}(\bar{x})u_{k,l})_{,j} - \rho g \delta_{i2} = 0, \quad \bar{x} \in V, \quad (1)$$

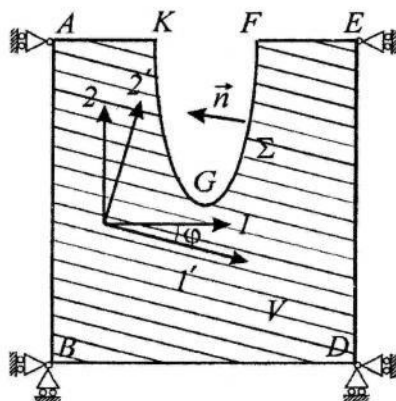


Рис. 1. Прямокутна область з

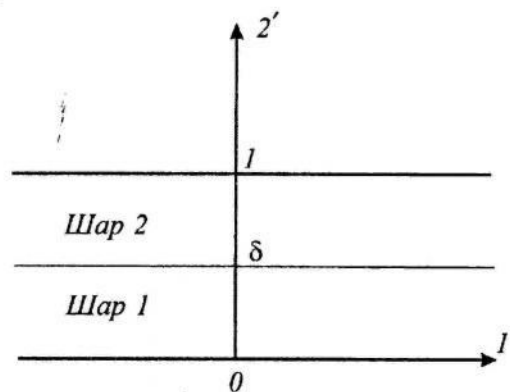


Рис. 2. Комірка періодичності з двох

параболічним вирізом шарів
де $C_{ijkl}(\bar{x})$ – компоненти тензора модулів пружності, які є періодичними функціями x'_2 ; u_k – компоненти вектора переміщень; $u_{k,l} \equiv \partial u_k / \partial x_l$, δ_{ij} – компоненти одиничного тензора.

Шари залягають вздовж осі $1'$ (під кутом φ до горизонту).

На межі області V задамо крайові умови, кінематична схема яких теж зображена на рис. 1

$$\begin{aligned} \text{на } AB \text{ і } DE: \quad u_1 &= 0, \quad \sigma_{12} = 0; \\ \text{на } BD: \quad u_2 &= 0, \quad \sigma_{12} = 0; \\ \text{на } AKGFE: \quad C_{ijkl}(\bar{x}) u_{k,l} n_j &= 0, \quad i, j = 1, 2. \end{aligned} \quad (2)$$

Надалі вважатимемо, що масив порід перебуває в стані плоскої деформації ($u_i = u_i(x_1, x_2)$, $u_3 = 0$, $i = 1, 2$).

Метод розв'язування задачі. Використаємо метод осереднення, який допомагає звести задачу (1), (2) до двох простіших задач. Нульове наближення цього методу (за точністю цілком достатнє для практики) полягає у пошуку розв'язку в такому вигляді:

$$u_i = v_i + \alpha N_{ipq} v_{p,q}. \quad (3)$$

Тут $\alpha = 1/N$, N – кількість періодів функцій C_{ijkl} (комірок періодичності) в області V .

Гладку складову v_i суми (3) знаходимо, розв'язуючи крайову задачу в області V з осередненими модулями H_{ijkl} , які від координат не залежать

$$H_{ijkl} v_{k,l} - \rho g \delta_{i2} = 0, \quad (4)$$

з крайовими умовами (2), в яких вона має такий вигляд:

$$H_{ijkl} v_{k,l} \cdot n_j = 0. \quad (5)$$

Задачу (4), (2), (5) розв'язуємо чисельно, використовуючи варіаційно-різницький метод разом з відображенням сітки у вихідній області V на рівномірну сітку в прямокутнику або в області, яка складається з прямокутників.

Зазвичай шарувате середовище складається з пакета шарів, які повторюються (комірок періодичності), яке зображене на рис. 2. Функції N_{kpq} , які залежать лише від "швидкої" координати $\xi_2 = x'_2 / \alpha$, легко визначаються з розв'язку звичайного диференціального рівняння на комірці періодичності

$$\frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(C_{i2m2} \frac{\partial N_{mpq}}{\partial \xi_2} + C_{i2pq} \right) = 0 \quad (6)$$

з умовами $N_{mpq}(0) = N_{mpq}(1)$ і $\langle N_{mpq} \rangle = \int_0^1 N_{mpq}(\xi_2) d\xi_2 = 0$.

Осереднені модулі H_{ijkl} знаходять після знаходження N_{kpq} так:

$$H_{ijkl} = \langle R_{ijkl} \rangle,$$

$$R_{ijkl} = C_{ijm2} \frac{\partial N_{mkl}}{\partial \xi_2} + C_{ijkl}. \quad (7)$$

Деформації та напруження в компонентах шаруватого середовища знаходимо за формулами

$$\varepsilon_{ij} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial N_{ipq}}{\partial \xi_j} + \frac{\partial N_{jpq}}{\partial \xi_i} \right) v_{p,q},$$

$$\sigma_{ij} = R_{ijpq} v_{p,q}. \quad (8)$$

Наведений метод реалізований у вигляді пакета програм на мові FORTRAN з підпрограмою побудови сітки у вихідній області на DELPHI, який дає змогу враховувати різні крайові умови, параметри області та середовища.

Аналіз числових результатів. При проведенні розрахунків вважається, що середовище, яке утворює схили гірської долини (рис. 1), складається з пакетів, кожен з яких містить два шари (рис. 2), які повторюються. Шари залягають під кутом 45° до горизонту ($\varphi = 45^\circ$). Усі розрахунки проводили у безрозмірних величинах.

У випадку, коли комірка періодичності складається з двох ізотропних шарів однакової товщини, однак з різними властивостями ($E_1 = 10$; $\nu_1 = 0,3$; $E_2 = 1$; $\nu_2 = 0,4$), напруження залежать від того, в межах якого шару вони визначаються. На рис. 3 показано поля напружень у жорстких (більший модуль Юнга E) шарах. Як видно з рисунка, маємо несиметричний розподіл напружень. Найбільші (за модулем) напруження в нижній частині долини там, де породи залягають вздовж схилу. На протилежному схилі теж є локальна концентрація напружень, але вона менша за максимальну у два-три рази.

У м'якіших шарах розподіл напружень суттєво інший. Найбільші (за модулем) напруження в найнижчій частині долини або там, де породи падають в схил. Лінія нульових дотичних напружень перебуває в нижній частині долини з того боку, де залягання порід збігається зі схилом. Отже, більша частина області піддається однонапрямленому зсуву.

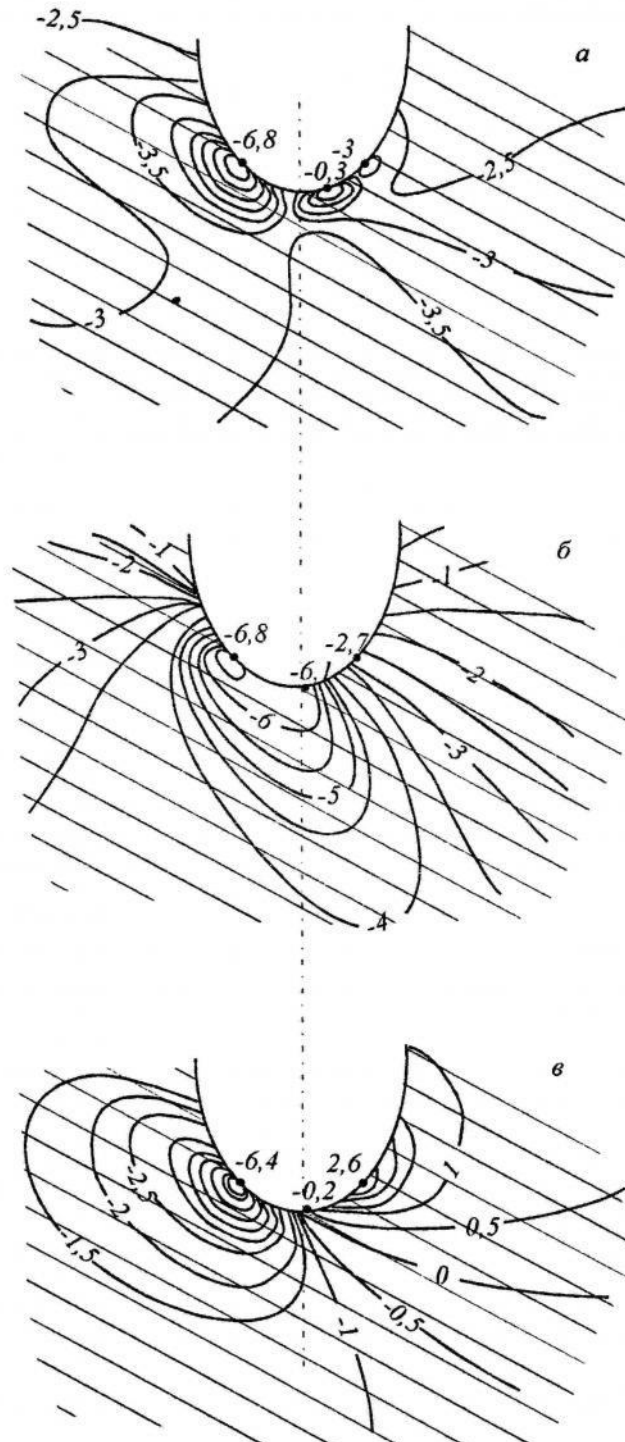


Рис. 3. Розподіл напружень у жорстких шарах на схилах гірської долини:

$a - \sigma_{22}$, $б - \sigma_{11}$, $в - \sigma_{12}$

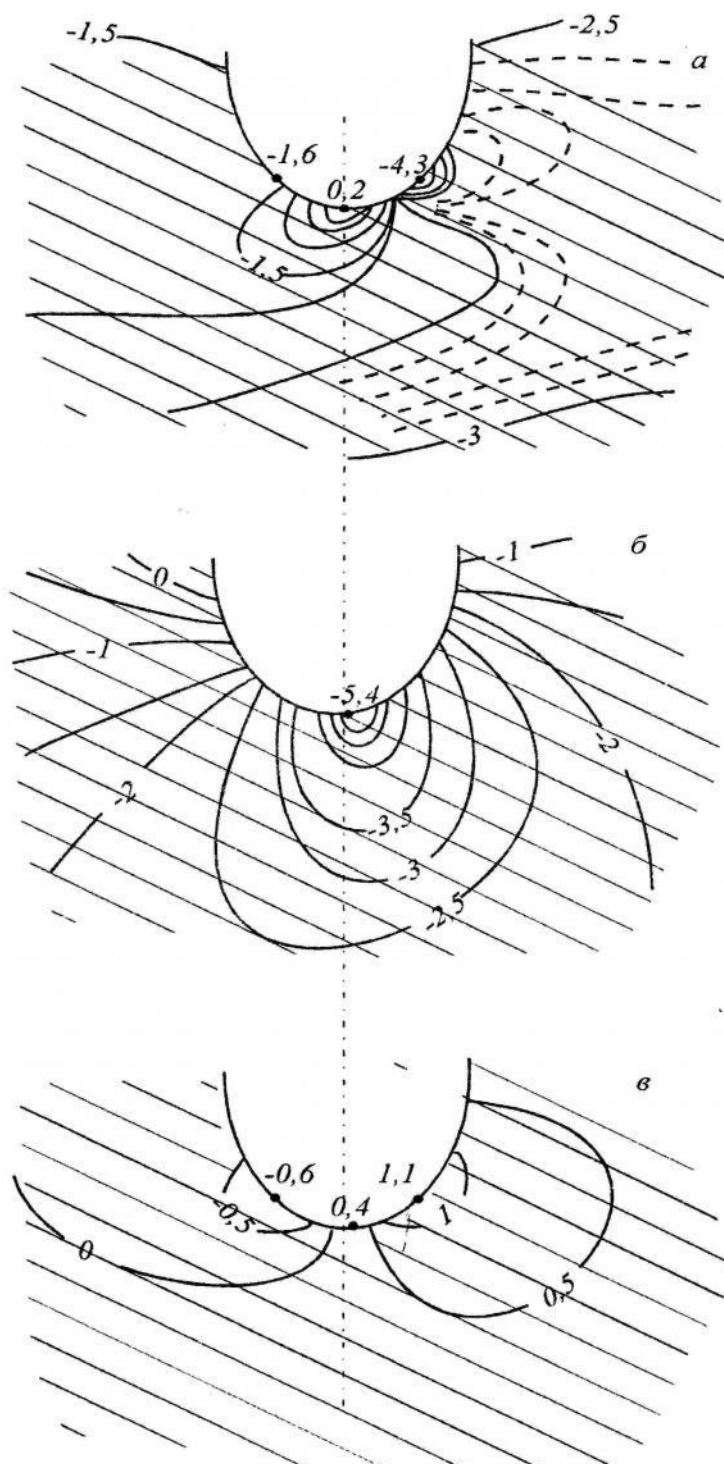


Рис. 4. Розподіл напружень у м'яких шарах на схилах гірської долини:

$a - \sigma_{22}$, $б - \sigma_{11}$, $в - \sigma_{12}$

Запропонований метод можна використати для вивчення напружено-деформованого стану різноманітних шаруватих масивів гірських порід з урахуванням зміни рельєфу. Отримані результати свідчать про значний вплив на величини напружень і на характер їх розподілу анізотропії пружних властивостей порід, які становлять гірський масив.

1. Победра Б.Е. Механика композиционных материалов. – М., 1984.
2. Шешенин С.В., Кузь И.С. О прикладных итерационных методах // Вычислительная механика деформируемого твердого тела. – 1990. – № 1. – С. 63–75.

STRESS STATE OF LAYER ROCK MASS WITH TAKING INTO ACCOUNT RELIEF CHANGE

Igor Kuz'¹, Ryszard Kaczynski²

¹Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

²Warsaw University,
Krakowske Przedmiescie Str., 26/28, 00-927 Warsaw, Poland

Using averaging method stress state of layer rock mass is investigated. For taking into account relief change this method is supplemented by variational difference method.

Key words: layer medium, averaging method, variational difference method.

Стаття надійшла до редколегії 08.12.2005
Прийнята до друку 22.11.2006

УДК 539.3

ДВОСТОРОННІЙ ЗГИН ПЛАСТИНИ З КРУГОВИМ ОТВОРОМ ТА РАДІАЛЬНОЮ ТРІЩИНОЮ З УРАХУВАННЯМ КОНТАКТУ ЇЇ БЕРЕГІВ

Віктор ОПАНАСОВИЧ, Микола СЛОБОДЯН

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна*

Досліджено двосторонній згин ізотропної пластини з круговим отвором і радіальною тріщиною з врахуванням контакту її берегів. Із використанням теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів розв'язок задачі зведений до системи сингулярних інтегральних рівнянь, яка розв'язана за допомогою методу механічних квадратур. Проведено числовий аналіз контактного зусилля між берегами тріщини, коефіцієнтів інтенсивності моментів і зусиль.

Ключові слова: двосторонній згин, ізотропна пластина, круговий отвір, радіальна тріщина, плоска задача теорії пружності, класична теорія згину, комплексні потенціали, контактне зусилля, коефіцієнти інтенсивності моментів і зусиль.

Пластини широко застосовують у машинобудуванні та інших галузях техніки. Їх дієздатність і експлуатаційні характеристики залежать від тріщиноподібних дефектів та отворів, які різко знижують діапазон допустимого навантаження. Під час експлуатації пластинчатих елементів важливо знати, як такі дефекти впливають на міцність і механічні характеристики конструкції.

Актуальною проблемою є вивчення напружено-деформованого стану пластини в умовах згину з врахуванням контакту берегів тріщиноподібних дефектів. Формулювання задач згину пластин з отворами та тріщинами і методи їх розв'язування подано в монографіях [1, 2, 5]. Проте в них не враховувався контакт берегів тріщиноподібних дефектів, хоча з фізичних міркувань зрозуміло, що він впливає на напружено-деформований стан пластини в цілому. В [8–10] розглянуто згин пластини з тріщиноподібними дефектами з врахуванням контакту її берегів, але немає досліджень, пов'язаних із взаємодією кругового отвору з прямолінійними тріщинами, береги яких контактують.

Мета нашої праці – дослідити двосторонній згин ізотропної пластини з круговим отвором і радіальною тріщиною з врахуванням контакту її берегів. Із застосуванням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів розв'язок задачі зведений до системи інтегральних рівнянь, яка розв'язана чисельно за допомогою методу механічних квадратур. Виконано числовий аналіз задачі, на основі якого побудовано відповідні графічні залежності.

Формулювання задачі. Розглянемо нескінченну ізотропну пластину завтовшки $2h$, яка містить круговий отвір радіуса R та радіальну тріщину завдовжки $2l$, які вільні від зовнішнього навантаження. Вважатимемо, що

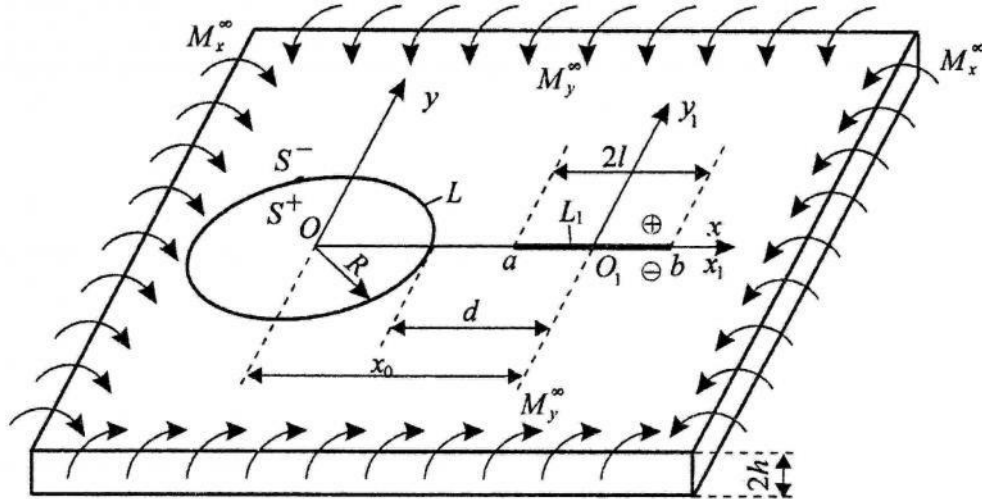


Рис. 1. Схема навантаження пластини

під дією зовнішнього навантаження на нескінченності (див. рис. 1) береги тріщини приходять у гладкий контакт по лінії на верхній основі пластини. Виберемо в серединній площині пластини початок декартової системи координат $Oxy\bar{z}$, направивши вісь $O\bar{z}$ перпендикулярно до неї, причому початок координат O збігається з центром кругового отвору. В площині Oxy введемо полярну систему координат r і θ з полюсом в точці O і полярною віссю Ox . Вважатимемо, що тріщина перебуває на осі Ox , а її центр перебуває на відстані x_0 від точки O , так що $x_0 > R + l$. Пов'яжемо з тріщиною декартову систему координат $O_1x_1y_1$. Точки площини Oxy , які збігаються з кінцями тріщини, позначимо через a і b , область в середині кругового отвору – через S^+ , зовні – через S^- , лінію, де розміщена тріщина, – через L_1 , коло – через L . Вважатимемо, що пластина згинається на нескінченності рівномірно розподіленими моментами M_x^∞ і M_y^∞ (див. рис. 1).

На підставі контакту берегів тріщини розв'язок задачі подамо у вигляді розв'язків двох задач: задачі згину пластини та плоскої задачі за таких крайових умов

$$\sigma_{y_1y_1}^\pm = -N/(2h), \quad \sigma_{x_1y_1}^\pm = 0, \quad P^\pm = 0, \quad M_{y_1}^\pm = hN,$$

$$\partial[v_\Pi]/\partial x_1 + h \cdot [\partial^2 w / (\partial x_1 \partial y_1)] = 0, \quad x_1 \in L_1, \quad (1)$$

$$M_r = 0, \quad \sigma_r = 0, \quad \sigma_{r\theta} = 0, \quad P_r = 0, \quad x \in L, \quad (2)$$

де N – контактне зусилля між берегами тріщини; $\sigma_{x_1 y_1}$, $\sigma_{y_1 y_1}$, σ_r і $\sigma_{r\theta}$ – компоненти тензора напружень; v_{II} – компонента вектора переміщень в плоскій задачі; $H_{r\theta}$ і $H_{x_1 y_1}$ – крутні моменти; M_r і M_{y_1} – згинальні моменти; N_{y_1} і N_r – перерізувальні сили; P і P_r – узагальнені в сенсі Кірхгофа перерізувальні сили, $[f] = f^+ - f^-$; значками “+” і “-” позначено граничні значення функції при прямуванні точки площини до тріщини, коли $y_1 \rightarrow \pm 0$.

Побудова розв’язку задачі згину пластини. Введемо потенціали Колосова-Мусхелішвілі [5]

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \quad \Psi(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z), \quad (3)$$

де $z = x + iy$, $i = \sqrt{-1}$, $\Phi_1(z)$ і $\Psi_1(z)$ – голоморфні функції поза тріщиною, які зникають на нескінченності; $\Phi_2(z)$ і $\Psi_2(z)$ – голоморфні в області S^- функції, які при великих $|z|$ можна подати у вигляді [5]

$$\Phi_2(z) = \Gamma + O(1/z^2), \quad \Psi_2(z) = \Gamma' + O(1/z^2). \quad (4)$$

$$\text{Тут } \Gamma = -\frac{M_y^\infty + M_x^\infty}{4D(1+\nu)}, \quad \Gamma' = \frac{M_y^\infty - M_x^\infty}{2D(1-\nu)}, \quad D = \frac{2Q}{3(1-\nu^2)}, \quad Q = Eh^3;$$

E – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона.

Якщо ввести функції [5]

$$\Omega_1(z_1) = -\bar{\Phi}_1(z_1) - z_1 \bar{\Phi}_1'(z_1) - \bar{\Psi}_1(z_1),$$

$$\Phi_2(z) = -\bar{\Phi}_2\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z} \cdot \bar{\Phi}_2'\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z^2} \cdot \bar{\Psi}_2\left(\frac{R^2}{z}\right), \quad z \in S^+,$$

то для визначення напружено-деформованого стану пластини отримаємо формули

$$\begin{aligned} & \Phi_1(z_1) - \Omega_1(\bar{z}_1) + (z_1 - \bar{z}_1) \cdot \overline{\Phi_1'(z_1)} + \Phi_2(z) + \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right) \cdot \overline{\Phi_2(z)} + \\ & + \left\{ z \cdot \left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right) \cdot \overline{\Phi_2'(z)} + \frac{R^2}{z^2} \cdot \Phi_2\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) \right\} = \frac{\partial g}{\partial x}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \bar{\kappa} \cdot \Phi_1(z_1) + \Omega_1(\bar{z}_1) - (z_1 - \bar{z}_1) \cdot \overline{\Phi_1'(z_1)} + \bar{\kappa} \cdot \Phi_2(z) - \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right) \cdot \overline{\Phi_2(z)} - \\ & - \left\{ z \cdot \left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right) \cdot \overline{\Phi_2'(z)} + \frac{R^2}{z^2} \cdot \Phi_2\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) \right\} = f, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(z) - \frac{R^2}{r^2} \cdot \Phi_2\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) + \Phi_2(z) \cdot \left\{1 - \frac{R^2}{r^2}\right\} - \bar{z} \cdot \overline{\Phi_2'(z)} \cdot \left\{1 - \frac{R^2}{r^2}\right\} + \Phi_1(z_1) + \\ + \overline{\Phi_1(z_1)} \cdot \left\{1 + \frac{\bar{z}}{z} \cdot e^{2i\alpha}\right\} + \frac{\bar{z}}{z} \cdot \left\{\Omega_1(\bar{z}_1) - (z_1 - \bar{z}_1) \cdot \overline{\Phi_1'(z_1)}\right\} = \tilde{g}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa} \cdot \Phi_2(z) + \frac{R^2}{r^2} \cdot \Phi_2\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) - \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \cdot \left\{\overline{\Phi_2(z)} - \bar{z} \cdot \overline{\Phi_2'(z)}\right\} + \tilde{\kappa} \cdot \Phi_1(z_1) - \\ - \overline{\Phi_1(z_1)} \cdot \left(1 + \frac{\bar{z}}{z}\right) - \frac{\bar{z}}{z} \cdot \left\{\Omega_1(\bar{z}_1) - (z_1 - \bar{z}_1) \cdot \overline{\Phi_1'(z_1)}\right\} = \tilde{f}, \end{aligned} \quad (8)$$

де

$$g = \frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y}, \quad f = m \cdot \left\{ M_y + i \tilde{c}'_0 + i H_{xy} + i \int_{-\infty}^t N_y(\tau) d\tau \right\}, \quad \tilde{\kappa} = \frac{3+v}{1-v},$$

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad \tilde{g} = \frac{1}{iz} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{i}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \cdot e^{i\theta} \right],$$

$$\tilde{f} = m \cdot \left\{ M_r + i \tilde{c}' + i H_{r\theta} + i \int_0^s N_n ds \right\}, \quad m = -\frac{1}{D(1-v)},$$

де $\tilde{c}'_0, \tilde{c}'$ – дійсні сталі.

Для функції $\Phi_2(z)$ правильне подання [5]

$$\Phi_2(z) = B_0(z) + O(1), \quad |z| \rightarrow 0, \quad B_0(z) = \frac{\bar{\Gamma}' R^2}{z^2}. \quad (9)$$

На основі крайової задачі (1) та залежності (6) отримаємо задачу лінійного спряження

$$(\tilde{\kappa} \cdot \Phi_1(x_1) - \Omega_1(x_1))^+ - (\tilde{\kappa} \cdot \Phi_1(x_1) - \Omega_1(x_1))^- = 0, \quad x_1 \in L_1,$$

розв'язавши яку, матимемо

$$\Omega_1(z_1) = \tilde{\kappa} \cdot \Phi_1(z_1). \quad (10)$$

Функцію $\Phi_1(z_1)$ згідно з [2] можна подати у вигляді

$$\Phi_1(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{-l}^l \frac{y_1(t)}{t - z_1} dt. \quad (11)$$

Тут $y_1(x) = \frac{1}{1+\tilde{\kappa}} \cdot \left[\frac{\partial g}{\partial x} \right].$

Якщо ввести функцію

$$F(z) = \begin{cases} \Phi_2(z) + \tilde{\kappa} \cdot \Phi_1(z - x_0) - ic', & z \in S^+, \\ -\tilde{\kappa} \cdot \Phi_2(z) + \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right) \cdot \bar{\Phi}_1\left(\frac{R^2}{z} - x_0\right) + \\ + \frac{R^2}{z^2} \cdot \left[\tilde{\kappa} \cdot \Phi_1\left(\frac{R^2}{z} - x_0\right) - \left(z - x_0 - \left(\frac{R^2}{z} - x_0\right)\right) \cdot \bar{\Phi}_1'\left(\frac{R^2}{z} - x_0\right)\right], & z \in S^-, \end{cases} \quad (12)$$

то вона, на підставі співвідношень (2) та формули (8), задовольняє задачу лінійного спряження

$$F^+(t) - F^-(t) = 0, \quad t \in L. \quad (13)$$

Враховавши залежності (4) і (9), розв'язок задачі лінійного спряження (13) можна подати у вигляді

$$F(z) = \frac{\bar{\Gamma}' R^2}{z^2} - \tilde{\kappa} \cdot \Gamma + B, \quad \text{де } B = \frac{i}{2\pi} \int_{-l}^l \frac{\overline{y_1(t)}}{t + x_0} dt. \quad (14)$$

Враховуючи (14), на підставі співвідношення (12) можемо записати

$$\Phi_2(z) = \begin{cases} \frac{\bar{\Gamma}' \cdot R^2}{z^2} - \tilde{\kappa} \cdot \Gamma + B - \tilde{\kappa} \cdot \Phi_1(z - x_0) + ic', & z \in S^+, \\ \frac{1}{\tilde{\kappa}} \cdot \left[-\frac{\bar{\Gamma}' \cdot R^2}{z^2} + \tilde{\kappa} \cdot \Gamma - B + \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right) \cdot \bar{\Phi}_1\left(\frac{R^2}{z} - x_0\right) + \right. \\ \left. + \frac{R^2}{z^2} \cdot \left[\tilde{\kappa} \cdot \Phi_1\left(\frac{R^2}{z} - x_0\right) - \left(z - x_0 - \left(\frac{R^2}{z} - x_0\right)\right) \cdot \bar{\Phi}_1'\left(\frac{R^2}{z} - x_0\right)\right] \right], & z \in S^-. \end{cases} \quad (15)$$

З крайових умов (1) та формули (6) матимемо

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa} \cdot \Phi_1^+ + \tilde{\kappa} \cdot \Phi_1^- + \tilde{\kappa} \cdot \Phi_2(x_0 + x_1) - \left(1 + \frac{R^2}{(x_0 + x_1)^2}\right) \cdot \overline{\Phi_2(x_0 + x_1)} - \\ - \left[\left((x_0 + x_1) - \frac{R^2}{(x_0 + x_1)} \right) \cdot \overline{\Phi_2'(x_0 + x_1)} + \right. \\ \left. + \frac{R^2}{(x_0 + x_1)^2} \cdot \Phi_2\left(\frac{R^2}{x_0 + x_1}\right) \right] = ic'_0 + m \cdot M_y, \quad x_1 \in L_1. \end{aligned} \quad (16)$$

Враховавши залежності (11), (15), на підставі формули (16) отримаємо інтегральне рівняння для знаходження невідомої функції $y_1(t)$, яке в безрозмірних координатах матиме вигляд

$$\begin{aligned}
& i \cdot \int_{-1}^1 \{Y_1(\eta) \cdot K(\eta, \xi) + \overline{Y_1(\eta)} \cdot L(\eta, \xi)\} d\eta - \frac{\varepsilon^2 \cdot i \cdot c'}{X^2} = \\
& = i \cdot c'_0 + \tilde{m} \cdot M_y / M_y^\infty + P(\xi) \quad \xi \in [-1, 1], \quad (17)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
P(\xi) &= -\tilde{\kappa}A + \frac{\varepsilon^2 \tilde{B}}{X^2} + A - \frac{\varepsilon^2 \tilde{B}}{\tilde{\kappa}X^2} - \frac{\varepsilon^4 \tilde{B}}{\tilde{\kappa}X^4} + \frac{\varepsilon^2 A}{X^2} + \frac{2\tilde{B}\varepsilon^2}{\tilde{\kappa}} \cdot \frac{X^2 - \varepsilon^2}{X^4} + \tilde{B} - \frac{\tilde{\kappa}\varepsilon^2 A}{X^2}, \\
K(\eta, \xi) &= -\frac{1}{\pi} \cdot \left\{ \frac{\tilde{\kappa}}{\eta - \xi} + \frac{\lambda\varepsilon^2}{2} \cdot \left(\frac{2\tilde{\kappa}}{X(TX - \varepsilon^2)} + \frac{1}{\tilde{\kappa}} \cdot \frac{\varepsilon^2 - T^2}{T(TX - \varepsilon^2)^2} + \frac{1}{\tilde{\kappa}} \cdot \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{(\varepsilon^2 - T^2) \cdot (2TX^3 - 3\varepsilon^2 TX + \varepsilon^4)}{TX^2(\varepsilon^2 - TX)^3} \right) \right\}, \\
L(\eta, \xi) &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\lambda\varepsilon^2}{2} \cdot \left\{ \frac{T^2 - \varepsilon^2}{T(TX - \varepsilon^2)^2} - \frac{1}{X(TX - \varepsilon^2)} - \frac{1}{TX^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{X^2 \cdot (2TX - \varepsilon^2) - 3\varepsilon^2 TX + 2\varepsilon^4}{X^3(TX - \varepsilon^2)^2} \right\},
\end{aligned}$$

$$y_1(t) = \frac{M_y^\infty}{Q} \cdot Y_1(t), \quad Y_1(t) = Y_{11}(t) + iY_{12}(t), \quad A = -\frac{\rho + 1}{4\tilde{D}(1 + \nu)},$$

$$\tilde{B} = \frac{1 - \rho}{2} \cdot \tilde{m}, \quad \tilde{D} = \frac{2}{3(1 - \nu^2)}, \quad \tilde{m} = -\frac{1}{\tilde{D} \cdot (1 - \nu)}, \quad \rho = \frac{M_x^\infty}{M_y^\infty}, \quad t = l\eta,$$

$$x_1 = l\xi, \quad \lambda = l/d, \quad \varepsilon = R/d, \quad T = 1 + \varepsilon + \lambda\eta, \quad X = 1 + \varepsilon + \lambda\xi,$$

$Y_{11}(t)$ і $Y_{12}(t)$ – дійсні функції.

Взявши уявну та дійсну частину від (17) та врахувавши (1), отримаємо

$$\int_{-1}^1 \{Y_{11}(\eta) \cdot (K(\eta, \xi) + L(\eta, \xi))\} d\eta - \frac{\varepsilon^2 \cdot c'}{X^2} = c'_0, \quad \xi \in [-1, 1], \quad (18)$$

$$\int_{-1}^1 \{Y_{12}(\eta) \cdot (-K(\eta, \xi) + L(\eta, \xi))\} d\eta = \tilde{m} \cdot h \cdot N / M_y^\infty + P(\xi), \quad \xi \in [-1, 1]. \quad (19)$$

Рівняння (18) і (19) доповнюємо додатковими умовами

$$\int_{-1}^1 Y_1(\eta) d\eta = 0, \quad \int_{-1}^1 \eta \cdot Y_{11}(\eta) d\eta = 0, \quad (20)$$

які виражають собою, відповідно, однозначність кутів повороту і прогину пластини при обході контуру тріщини.

Для знаходження сталої c' скористаємося однозначністю прогину пластини при обході кругового отвору

$$c' = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\lambda Y_{11}(\eta) d\eta}{T}. \quad (21)$$

Побудова розв'язку плоскої задачі. Введемо в розгляд комплексні потенціали Колосова-Мусхелішвілі $\Phi_{II}(z)$ і $\Psi_{II}(z)$, які подамо у вигляді

$$\Phi_{II}(z) = \Phi_{1II}(z) + \Phi_{2II}(z), \quad \Psi_{II}(z) = \Psi_{1II}(z) + \Psi_{2II}(z), \quad (22)$$

де $\Phi_{1II}(z)$ і $\Psi_{1II}(z)$ — голоморфні функції поза тріщиною і зникають на нескінченності; $\Phi_{2II}(z)$ і $\Psi_{2II}(z)$ — голоморфні ззовні кола і при великих $|z|$ можна подати у вигляді

$$\Phi_{2II}(z) = O(1/z^2), \quad \Psi_{2II}(z) = O(1/z^2). \quad (23)$$

Ввівши функції [4]

$$\Phi_{2II}(z) = -\bar{\Phi}_{2II}\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z} \bar{\Phi}'_{2II}\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z^2} \bar{\Psi}_{2II}\left(\frac{R^2}{z}\right),$$

$$\Omega_{1II}(z_1) = \bar{\Phi}_{1II}(z_1) + z_1 \bar{\Phi}'_{1II}(z_1) + \bar{\Psi}_{1II}(z_1),$$

напружено-деформований стан пластини знайдемо на основі формул

$$\begin{aligned} \Phi_{2II}(z) - \frac{R^2}{r^2} \bar{\Phi}_{2II}\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) + \Phi_{2II}(z) \left\{1 - \frac{R^2}{r^2}\right\} - \bar{z} \cdot \overline{\Phi'_{2II}(z)} \left\{1 - \frac{R^2}{r^2}\right\} + \Phi_{1II}(z_1) + \\ + \overline{\Phi_{1II}(z_1)} \cdot \left\{1 + \frac{\bar{z}}{z}\right\} - \frac{\bar{z}}{z} \cdot \left\{\Omega_{1II}(\bar{z}_1) + (z_1 - \bar{z}_1) \cdot \overline{\Phi'_{1II}(z_1)}\right\} = \sigma_{rr} + i \cdot \sigma_{r\theta}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \kappa \Phi_{2II}(z) + \frac{R^2}{r^2} \cdot \bar{\Phi}_{2II}\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) - \left\{1 - \frac{R^2}{r^2}\right\} \left\{\overline{\Phi_{2II}(z)} - \bar{z} \cdot \overline{\Phi'_{2II}(z)}\right\} + \kappa \Phi_{1II}(z_1) - \\ - \overline{\Phi_{1II}(z_1)} \cdot \left\{1 + \frac{\bar{z}}{z}\right\} + \frac{\bar{z}}{z} \cdot \left\{\Omega_{1II}(\bar{z}_1) + (z_1 - \bar{z}_1) \cdot \overline{\Phi'_{1II}(z_1)}\right\} = \frac{2\mu}{iz} \cdot \frac{\partial(u + i \cdot v)}{\partial\theta}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\Phi_{1II}(z_1) + \Omega_{1II}(\bar{z}_1) + (z_1 - \bar{z}_1) \cdot \overline{\Phi'_{1II}(z_1)} + \Phi_{2II}(z) + \left\{1 + \frac{R^2}{z^2}\right\} \cdot \overline{\Phi_{2II}(z)} +$$

$$+\left\{z \cdot \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \cdot \overline{\Phi'_{2\Pi}(z)} + \frac{R^2}{z^2} \cdot \Phi_{2\Pi}\left(\frac{R^2}{z}\right)\right\} = \sigma_{yy} - i \cdot \sigma_{xy}, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \kappa \Phi_{1\Pi}(z_1) - \Omega_{1\Pi}(\bar{z}_1) - (z_1 - \bar{z}_1) \overline{\Phi'_{1\Pi}(z_1)} + \kappa \Phi_{2\Pi}(z) - \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right) \overline{\Phi_{2\Pi}(z)} - \\ - \left\{z \cdot \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \cdot \overline{\Phi'_{2\Pi}(z)} + \frac{R^2}{z^2} \cdot \Phi_{2\Pi}\left(\frac{R^2}{z}\right)\right\} = 2\mu \cdot (u + i \cdot v)'_x, \end{aligned} \quad (27)$$

де $\mu = E/(2(1 + \nu))$ – модуль зсуву; $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$.

Аналогічно до задачі згину пластини, на основі формул (22)–(27) і граничних умов (1), (2) можна отримати співвідношення

$$\Phi_{1\Pi}(z) = \Omega_{1\Pi}(z), \quad (28)$$

$$\Phi_{1\Pi}(z_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l \frac{g'_1(t)}{t - z_1} dt, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{2\Pi}(z) = \begin{cases} B_{\Pi} + \Phi_{1\Pi}(z - x_0), & z \in S^+, \\ B_{\Pi} - \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right) \cdot \overline{\Phi_{1\Pi}\left(\frac{R^2}{z} - x_0\right)} + \\ + \frac{R^2}{z^2} \cdot \left[\Phi_{1\Pi}\left(\frac{R^2}{z} - x_0\right) + \left(z - x_0 - \left(\frac{R^2}{z} - x_0\right)\right) \cdot \overline{\Phi'_{1\Pi}\left(\frac{R^2}{z} - x_0\right)}\right], & z \in S^-, \end{cases} \end{aligned} \quad (30)$$

$$\text{де } g'_1(x_1) = \frac{2\mu}{i \cdot (1 + \kappa)} \cdot \left[\frac{\partial(u + iv)}{\partial x_1}\right], \quad B_{\Pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-l}^l \frac{\overline{g'_1(t)}}{t + x_0} dt.$$

Врахувавши (28) та формулу (26), на підставі крайової умови (1) можемо записати вираз для контактного зусилля між берегами тріщини

$$\begin{aligned} -N/h = 2\Phi_{1\Pi}^+(x_1) + 2\Phi_{1\Pi}^-(x_1) + 2\Phi_{2\Pi}(z) + \\ + 2\left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right) \cdot \overline{\Phi_{2\Pi}(z)} + 2z \cdot e^{-2i\alpha} \cdot \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \cdot \overline{\Phi'_{2\Pi}(z)} + \frac{2R^2}{z^2} \cdot \Phi_{2\Pi}\left(\frac{R^2}{z}\right). \end{aligned} \quad (31)$$

Взявши до уваги вираз для функції $\Phi_{1\Pi}(z)$ (29) та $\Phi_{2\Pi}(z)$ (30), для знаходження невідомої функції $g'_1(t)$ з формули (31) отримаємо інтегральне рівняння

$$\int_{-1}^1 \{G_1(\eta) \cdot R(\eta, \xi) + \overline{G_1(\eta)} \cdot S(\eta, \xi)\} d\eta = H(\xi), \quad \xi \in [-1, 1], \quad (32)$$

де

$$R(\eta, \xi) = \frac{1}{\eta - \xi} + \frac{\lambda \varepsilon^2}{2} \left[\frac{1}{X(TX - \varepsilon^2)} + \frac{\varepsilon^2 - T^2}{T(TX - \varepsilon^2)^2} + \right. \\ \left. + \frac{(\varepsilon^2 - T^2)(2TX^3 - 3\varepsilon^2 TX + \varepsilon^4) - TX(\varepsilon^2 - TX)^2}{TX^2(\varepsilon^2 - TX)^3} \right],$$

$$S(\eta, \xi) = \frac{\lambda \varepsilon^2}{2} \cdot \left[\frac{\varepsilon^2 - T^2}{T(TX - \varepsilon^2)^2} + \frac{1}{X(TX - \varepsilon^2)} + \frac{1}{TX^2} - \right. \\ \left. - \frac{X^2 \cdot (2TX - \varepsilon^2) - 3\varepsilon^2 TX + 2\varepsilon^4}{X^3(TX - \varepsilon^2)^2} \right],$$

$$H(x) = -0.5\pi \cdot hN/M_y^\infty, \quad g_1(t) = \frac{M_y^\infty}{h^2} \cdot G_1(t), \quad G_1(t) = G_{11}(t) + iG_{12}(t),$$

причому $G_{11}(t)$ і $G_{12}(t)$ – дійсні функції.

Зауважимо, що ядра $R(\eta, \xi)$ і $S(\eta, \xi)$ збігаються з відповідними ядрами, отриманими в [3] іншим підходом. Крім того, якщо формально прийняти $\tilde{\kappa} = 1$, то ядра інтегральних подань (17) і (32) зв'язані залежностями $\pi \cdot L(\eta, \xi) = -S(\eta, \xi)$ і $\pi \cdot K(\eta, \xi) = -R(\eta, \xi)$.

Виділивши уявну та дійсну частину у (32), матимемо

$$\int_{-1}^1 \{G_{12}(\eta) \cdot (R(\eta, \xi) - S(\eta, \xi))\} d\eta = 0, \quad \xi \in [-1, 1], \quad (33)$$

$$N(\xi)/M_y^\infty = -2 \cdot (\pi \cdot h)^{-1} \cdot \int_{-1}^1 \{G_{11}(\eta) \cdot (R(\eta, \xi) + S(\eta, \xi))\} d\eta, \quad \xi \in [-1, 1]. \quad (34)$$

Зауважимо, що на підставі співвідношень (1) функції $Y_{12}(\eta)$ і $G_{11}(\eta)$ пов'язані співвідношенням

$$G_{11}(\eta) + \frac{(1 + \tilde{\kappa})}{(1 + \kappa) \cdot (1 + \nu)} Y_{12}(\eta) = 0, \quad \eta \in [-1, 1]. \quad (35)$$

Врахувавши формули (19) і (34), з крайової умови (1) отримаємо рівняння

$$\int_{-1}^1 \{Y_{12}(\eta) (-K(\eta, \xi) + L(\eta, \xi))\} d\eta +$$

$$+2 \cdot \pi^{-1} \cdot \tilde{m} \cdot \int_{-1}^1 \{G_{11}(\eta) \cdot (R(\eta, \xi) + S(\eta, \xi))\} d\eta = P(\xi), \quad \xi \in [-1, 1]. \quad (36)$$

Враховуючи умову однозначності переміщень при обході контуру тріщини, матимемо

$$\int_{-1}^1 G_1(\eta) d\eta = 0. \quad (37)$$

Отож, для знаходження невідомих функцій $Y_1(\eta)$ і $G_1(\eta)$ отримали систему інтегральних рівнянь (18), (20), (21), (33), (35)-(37).

Числовий аналіз задачі та висновки. Отримана система інтегральних рівнянь розв'язана чисельно за допомогою методу механічних квадратур [3] і зведена до такої системи лінійних алгебричних рівнянь стосовно невідомих $U_{ij}(\eta_m)$, $(m = \overline{1, M}, i, j = 1, 2)$, c' , c'_0

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{M} \sum_{m=1}^M U_{11}(\eta_m) \cdot (K(\eta_m, \xi_r) + L(\eta_m, \xi_r)) - \frac{\varepsilon^2 \cdot c'}{X_r^2} &= c'_0, \quad r = \overline{1, M-1}, \\ \sum_{m=1}^M U_{11}(\eta_m) &= 0, \quad \sum_{m=1}^M U_{12}(\eta_m) = 0, \quad \sum_{m=1}^M \eta_m U_{11}(\eta_m) = 0, \\ c' &= -\frac{\lambda}{2M} \sum_{m=1}^M \frac{U_{11}(\eta_m)}{T_m}, \quad \sum_{m=1}^M U_{21}(\eta_m) = 0, \quad \sum_{m=1}^M U_{22}(\eta_m) = 0, \\ \sum_{m=1}^M U_{21}(\eta_m) \cdot (R(\eta_m, \xi_r) - S(\eta_m, \xi_r)) &= 0, \quad r = \overline{1, M-1}, \\ U_{21}(\xi_r) + \frac{1 + \tilde{\kappa}}{(1 + \kappa)(1 + \nu)} \cdot U_{12}(\xi_r) &= 0, \quad r = \overline{1, M-1}, \\ \frac{\pi}{M} \sum_{m=1}^M \{U_{12}(\eta_m) \cdot (-K(\eta_m, \xi_r) + L(\eta_m, \xi_r)) + \\ + \frac{2\tilde{m}}{\pi} U_{21}(\eta_m) \cdot (R(\eta_m, \xi_r) + S(\eta_m, \xi_r))\} &= P(\xi_r), \end{aligned} \quad (38)$$

де $\eta_m = \cos \frac{2m-1}{2M} \pi$, $\xi_r = \cos \frac{\pi \cdot r}{M}$, $T_m = 1 + \varepsilon + \lambda \eta_m$, $X_r = 1 + \varepsilon + \lambda \xi_r$,

$$Y_{1i}(\eta) = \frac{U_{1i}(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}}, \quad G_{1i}(\eta) = \frac{U_{2i}(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}}, \quad i = 1, 2.$$

Виконали числовий аналіз задачі, який подано на рис. 2-5.

Якщо вважати, що кругового отвору немає ($\varepsilon = 0$) або тріщина перебуває на нескінченності ($\lambda = 0$, $\varepsilon = 0$), то приходимо до результатів праці [8], якщо у формулі (6) спрямувати $R \rightarrow \infty$ і прийняти $B_0(z) = 0$, то отримаємо результати праці [9].

На рис. 2 зображено графічну залежність приведенного контактного зусилля $N^* = hN/M_y^\infty$ між берегами тріщини від безрозмірної координати $\xi = x_1/l$ при $\nu = 0,3$, $R = l$ та $M_x^\infty = 0$. Кривій 1 відповідає контактний тиск N^* при $\lambda = 1/1,1$, кривій 2 – при $\lambda = 1/1,2$, кривій 3 – при $\lambda = 1/1,4$, кривій 4 – при $\lambda = 1/1,6$, кривій 5 – при $\lambda = 1/2$, кривій 6 – при $\lambda = 1/5$, кривій 7 – при $\lambda = 1/10$, кривій 8 – при $\lambda = 0$ [8]. Як видно з рис.,

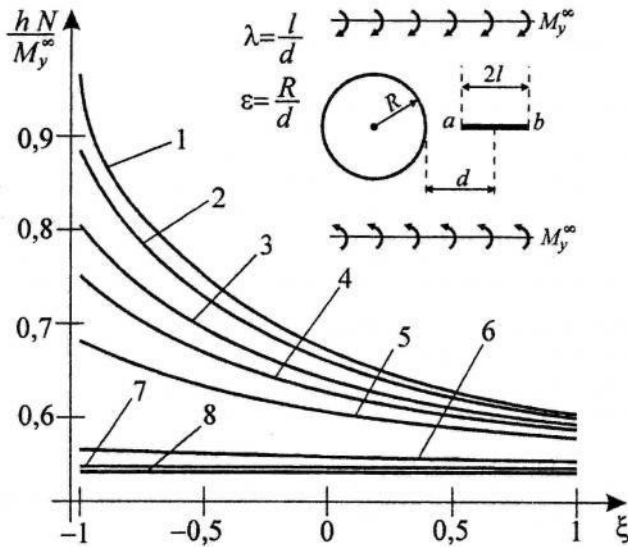


Рис. 2

при наближенні тріщини до кругового отвору величина контактного зусилля N^* збільшується порівняно з ізольованою тріщиною, в ближній до отвору вершині a ($\xi = -1$) він більший, ніж у дальній вершині b ($\xi = 1$).

Наведені коефіцієнти інтенсивності моментів (КИМ) K_M обчислювали за формулою

$$K_M^* = \frac{K_M}{M_y^\infty \sqrt{l}} = \mp \frac{2i(3+\nu)}{3(1-\nu^2)} \cdot u(\pm 1),$$

$$\text{де } u(1) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (-1)^{m+1} U_{12}(\eta_m) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi,$$

$$u(-1) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (-1)^{m+M} U_{12}(\eta_m) \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4M} \pi.$$

Графічні залежності K_M^* від параметра $\rho = M_x^\infty/M_y^\infty$ зображені відповідно у вершині a (рис. 3, а) та b (рис. 3, б) при $\nu = 0,3$, $\lambda = 0,8$. Криві 1 побудовані при $\varepsilon = 0$ [8], криві 2 – при $\varepsilon = 0,1$, криві 3 – при $\varepsilon = 0,5$, криві 4 – при $\varepsilon = 1$, криві 5 – при $\varepsilon = 2$. На основі рис. 3, а

можна стверджувати, що при $\varepsilon < 0,4515$ КІМ у точці a спадають з ростом ρ , а при $\varepsilon > 0,4515$ – зростають. Із рис. 3, б бачимо, що у точці b КІМ

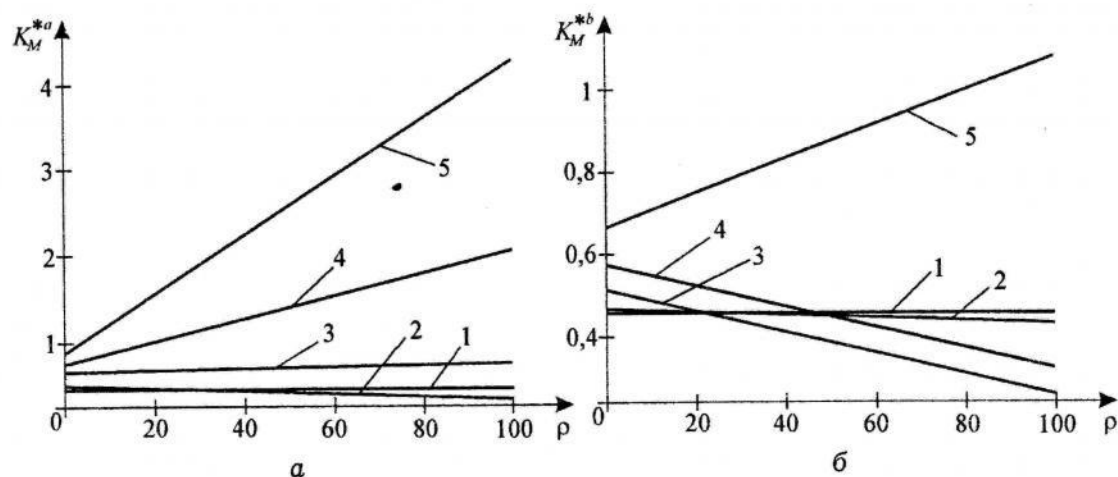


Рис. 3

спадають при $\varepsilon < 1,475$ при збільшенні ρ , а вже при $\varepsilon > 1,475$ – зростають. Зауважимо, що КІМ у точці a є більшими, ніж у точці b . Крім того, наявність кругового отвору приводить до впливу згинальних моментів M_x^∞ на КІМ, чого не простежується у випадку ізольованої тріщини.

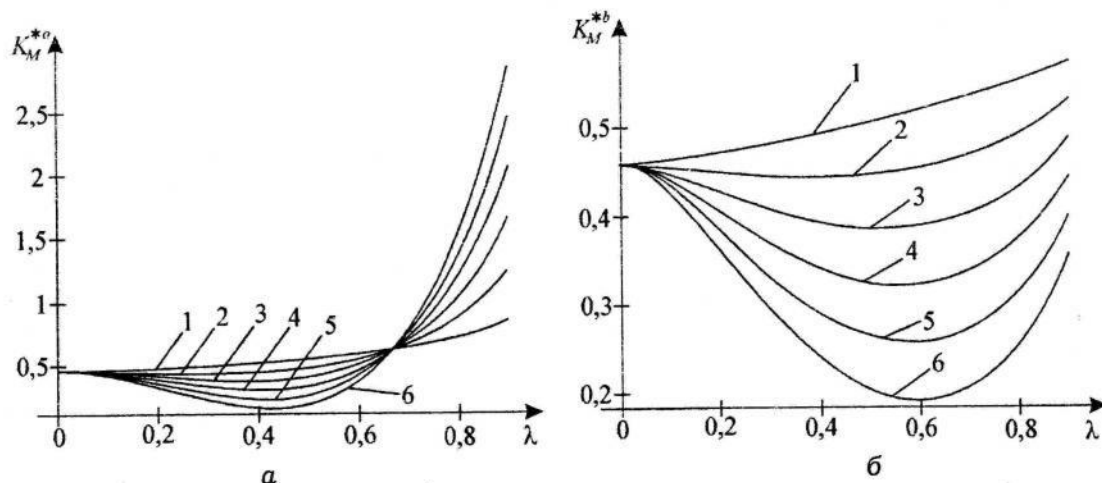


Рис. 4

На рис. 4 подано графічну залежність приведених КІМ у вершинах a і b при зміні відстані між тріщиною та круговим отвором для $\nu = 0,3$ і $\varepsilon = \lambda$. Криві 1 побудовані для $\rho = 0$, криві 2 – для $\rho = 20$, криві 3 – для $\rho = 40$, криві 4 – для $\rho = 60$, криві 5 – для $\rho = 80$, криві 6 – для $\rho = 100$. Як видно з рис. 4, а, при $\lambda = 0$ і $\lambda \approx 0,67$ значення КІМ не залежить від M_x^∞ . Крім того, можна стверджувати, що при наближенні тріщини до кругового отвору КІМ спочатку спадають, їхні значення менші, ніж у випадку, коли

отвору немає, а потім починають зростати. Зауважимо, що коефіцієнти інтенсивності зусиль $K_N^* = K_N / (M_y^\infty \sqrt{l})$ і моментів K_M^* пов'язані між собою залежністю $K_N^* / K_M^* = 3(1 + \nu) / (3 + \nu)$, тому графічні залежності для K_N^* не наводимо.

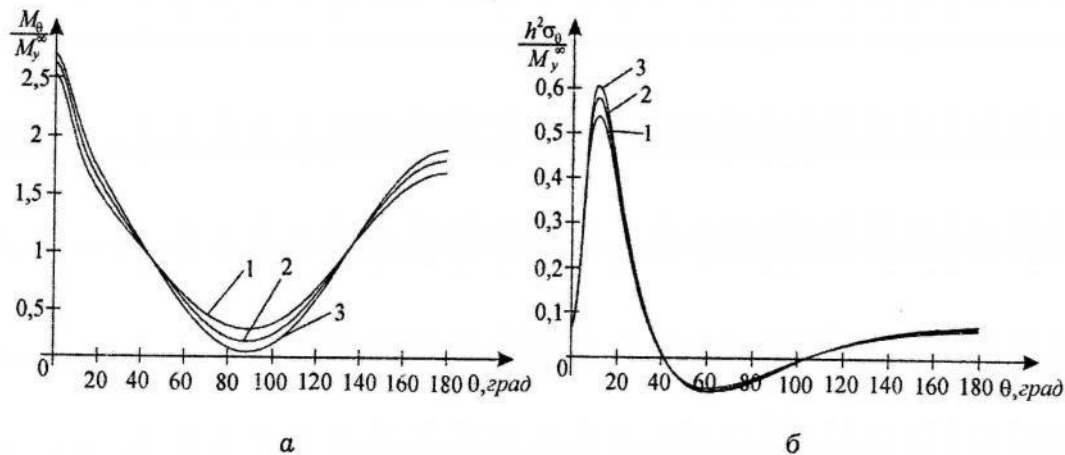


Рис. 5

На рис. 5 зображено графічні залежності M_θ / M_y^∞ (рис. 5, а) і $h^2 \sigma_\theta / M_y^\infty$ (рис. 5, б) на круговому отворі від полярного кута θ при $\varepsilon = 1$, $\lambda = 0,8$ і $M_x^\infty = 0$. Криві 1 побудовані при $\nu = 0$, криві 2 – при $\nu = 0,25$, криві 3 – при $\nu = 0,5$. Як видно з рис. 5, а, момент M_θ на отворі набуває свого максимального значення в точці кругового отвору, яка найближча до тріщини, і мінімального значення – при $\theta \approx 90^\circ$. З рис. 5, б, видно, що напруження σ_θ найбільші при $\theta \approx 14^\circ$, найменші – при $\theta \approx 62^\circ$, причому вони міняють знак. У граничному випадку при $\lambda = 0$ отримуємо відомі результати [5]. На основі рис. 5 можна стверджувати, що момент M_θ і напруження σ_θ на отворі від коефіцієнта Пуассона майже не залежать.

-
1. Бережницький Л. Т., Делявський М. В., Панасюк В. В. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. – К., 1979.
 2. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К., 1981.
 3. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распространение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К., 1976.
 4. Прусов И. А. Некоторые задачи термоупругости. – Минск, 1962.

5. Прусов И. А. Метод сопряжения в теории плит. – Минск, 1975.
6. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М., 1966.
7. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2-х т. / Пер. с англ. Под ред. Ю. Мураками. – М., 1990.
8. Шацький І. П. Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами. Доп. АН УРСР. Сер. А. Фіз.-мат. та техн. науки. – 1988. – № 7. – С. 49–51.
9. Шацький І. П., Перепічка В. В. Згин напівнескінченної пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами. Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 1992. – Т. 28. – № 2. – С. 54–58.
10. Шацький І., Перепічка В., Даляк Т., Щербій А. Задачі теорії пластин та оболонок із взаємопов'язаними крайовими умовами на розрізах // Матем. проблеми механіки неоднорідних структур: В 2-х т. – Львів, 2000. – Т. 2. – С. 51–54.

BILATERAL BENDING OF THE PLATE WITH A CIRCULAR ORIFICE AND A RADIAL CRACK WITH CONSIDERING OF THE CONTACT IT'S SHORES

Viktor Opanasovych, Mikola Slobodyan

*Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine*

The bilateral bending of an isotropic plate with a circular orifice and a radial crack with considering of the contact it's shores is investigated. With application of methods of the theory of functions of complex variable and complex potentials the solution of a problem is shown to a system of integral equations, which is solved by numerical method with the help of method of mechanical quadratures. The numerical analysis of a problem is conducted, because of which are constructed of graphic dependence of contact pressure, coefficients intensity moment and efforts.

Key words: bilateral bending, isotropic plate, circular orifice, radial crack, two-dimensional problem of the theory of elasticity, classical theory of bend, complex potentials, contact pressure, coefficients intensity moment and efforts.

Стаття надійшла до редколегії 03.11.2005
Прийнята до друку 22.11.2006

УДК 539.3

НЕСТАЦІОНАРНИЙ РОЗІГРІВ ПРОСТОРУ ДИСКОВИМ ТЕПЛОВИДІЛЯЮЧИМ ЕЛЕМЕНТОМ

Віталій ГАЛАЗЮК, Вікторія КОЦЮБАЙЛО

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

Сформульовано задачу теплопровідності для простору, що розігрівається дисковим тепловиділяючим елементом. Запропоновано методику розв'язування задачі на підставі застосування методу інтегрального перетворення Чебишева-Лагерра, а також розглянуто традиційний аналітичний метод розв'язування за допомогою інтегрального перетворення Лапласа за часовою змінною.

Показано, що за умови $q_r(\alpha, \pm 0) = 0$ ($1 < \alpha < \infty$) температурний потік q_α має логарифмічну особливість на краю включення $\alpha = 1$, що суперечить фізиці явища. Проведено числовий аналіз задачі, на підставі якого побудовано відповідні графічні залежності.

Ключові слова: теплові потоки, регулярність, сингулярність.

Традиційним аналітичним методом розв'язання початково-крайової задачі для рівняння в частинних похідних з незалежними від часу коефіцієнтами полягає у зведенні її за допомогою інтегрального перетворення Лапласа за часовою змінною до крайової задачі у просторі зображень. До недоліків цього методу належать труднощі математичного характеру, які виникають при переході від зображення до оригіналу у випадках складних крайових умов, оскільки за відсутності точної формули обернення треба застосовувати наближені методи знаходження оригіналу розв'язку. Потрібно знайти розв'язок інтегрального рівняння Фредгольма першого роду з гладким ядром, що є некоректною задачею.

Нижче, на прикладі початково-крайової задачі про нестационарний розігрів простору дисковим тепловиділяючим елементом, пропонуємо метод розв'язування, що передбачає застосування до вихідної початково-крайової задачі інтегрального перетворення Лагерра [1] і зведення її до нескінченної послідовності крайових задач, які залежать від деякого параметра. На підставі теореми про розвинення функції в ряд за поліномами Лагерра розв'язок вихідної початково-крайової задачі подається ортогональним рядом за поліномами Лагерра, коефіцієнтами якого є розв'язки послідовності крайових задач. Отож, запропонований метод — це побудова алгоритму знаходження коефіцієнтів ортогонального ряду за поліномами Лагерра.

Формулювання задачі. Розглянемо простір, віднесений до циліндричної системи координат $(R\alpha, \beta, R\gamma)$ з початком у центрі дискового включення радіуса R , яке є тепловиділяючим елементом і забезпечує осесиметричний

стосовно осі γ розподіл температури $T(\alpha, \gamma, \tau)$ у просторі $|\gamma| \geq 0$. Тоді для визначення температурного поля у просторі треба розв'язати осесиметричну початково-крайову задачу, яка у безрозмірних змінних (α, γ) набуде вигляду

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial \gamma^2} = \frac{\partial T}{\partial \tau}; \quad (1)$$

$$T(\alpha, \gamma, 0) = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \gamma} = \mp T_0 f(\alpha^2) g(\tau) \quad \forall \alpha \in [0, 1) \quad \gamma = 0; \quad (2)$$

$$\lim_{(|\alpha|, |\gamma|) \rightarrow \infty} q_\alpha(\alpha, \gamma, \tau) = 0, \quad (3)$$

де $\alpha = \frac{r}{R}$, $\gamma = \frac{z}{R}$, $\tau = \frac{at}{R}$; a — коефіцієнт температуропровідності і $g(0) = 0$.

Побудова розв'язку задачі методом поліномів Лагерра. До початково-крайової задачі (1)–(3) застосуємо інтегральне перетворення Лагерра [1] за часовою змінною τ

$$T_n(\alpha, \gamma) = \int_0^\infty T(\alpha, \gamma, \tau) e^{-\lambda \tau} L_n(\lambda \tau) d\tau \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (4)$$

де $L_n(\lambda \tau)$ — поліноми Лагерра [5], формула обернення якого має вигляд

$$T(\alpha, \gamma, \tau) = \lambda \sum_{n=0}^\infty T_n(\alpha, \gamma) L_n(\lambda \tau). \quad (5)$$

У результаті отримаємо послідовність крайових задач

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\alpha \frac{\partial T_n}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial^2 T_n}{\partial \gamma^2} - \lambda T_n = \lambda \sum_{m=0}^{n-1} T_m; \quad (6)$$

$$\frac{\partial T_n}{\partial \gamma} = \mp T_0 f(\alpha^2) g_n \quad \forall \alpha \in [0, 1) \quad \gamma = 0; \quad (7)$$

$$\lim_{(|\alpha|, |\gamma|) \rightarrow \infty} \frac{\partial T_n}{\partial \alpha} = 0, \quad (8)$$

де $g_n = \int_0^\infty g(\tau) e^{-\lambda \tau} L_n(\lambda \tau) d\tau \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$.

З використанням інтегрального перетворення Ганкеля за радіальною координатою α трикутну послідовність диференціальних рівнянь у частинних похідних (6) зведемо до послідовності звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d^2 T_n^H}{d\gamma^2} - (\lambda + \xi^2) T_n^H = \lambda \sum_{m=0}^{n-1} T_m, \quad (9)$$

де

$$T_n^H(\gamma) = \int_0^\infty \alpha J_0(\xi\alpha) T_n(\alpha, \gamma) d\alpha \quad (10)$$

перетворення функції T_n^H по Ганкелю; $J_0(\xi\alpha)$ – функція Бесселя першого роду нульового порядку.

Загальний розв'язок трикутної послідовності диференціальних рівнянь (9) запишемо у вигляді алгебричної згортки [2]

$$T_n^H(\xi, \gamma) = \sum_{j=0}^n A_{n-j}(\xi) G_j(\xi, \gamma), \quad (11)$$

де $A_{n-j}(\xi)$ – довільні функції, які визначають з трансформованих крайових умов (7), а $G_j(\xi, \gamma)$ – фундаментальна система розв'язків трикутної послідовності звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d^2 G_j}{d\gamma^2} - (\lambda + \xi^2) G_j = \lambda \sum_{m=0}^{j-1} G_m. \quad (12)$$

Для визначення функцій $G_j(\xi, \gamma)$ подамо їх у вигляді

$$G_j(\xi, \gamma) = e^{-|\gamma|\sqrt{\lambda+\xi^2}} \sum_{m=0}^j b_{m,j} \gamma^m, \quad (13)$$

де коефіцієнти $b_{m,j}$ знаходять шляхом підстановки виразу (13) у рівняння (12) і прирівнювання до нуля коефіцієнтів при однакових степенях γ . Для кожного фіксованого значення j всі значення $b_{m,j}$ рекурентними співвідношеннями

$$b_{m,j+1} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda+\xi^2}} \left[(j+2)b_{m,j+2} - \frac{\lambda}{j+1} \sum_{k=j}^{m-1} b_{k,j} \right] \quad (14)$$

визначаються через $b_{0,j}$, які вибирають з умов нормування.

Застосувавши до рівності (11) обернене перетворення Ганкеля, одержимо інтегральне подання розв'язків трикутної системи диференціальних рівнянь у часткових похідних (6) у вигляді лінійної комбінації інтегралів Ганкеля –

$$T_n(\alpha, \gamma) = \sum_{j=1}^n \int_0^\infty A_{n-j}(\xi) G_j(\xi, \gamma) \xi J_0(\xi \alpha) d\xi. \quad (15)$$

Якщо вираз (15) підставити у крайову умову (7), то для визначення функцій $A_{n-j}(\xi)$ отримаємо інтегральне рівняння Фредгольма першого роду

$$\int_0^\infty \sum_{j=1}^n A_{n-j}(\xi) G_j'(\xi, 0) \xi J_0(\xi \alpha) d\xi = \mp T_0 f(\alpha^2) g_n, \quad (16)$$

розв'язок якого шукатимемо у вигляді узагальненого ряду Неймана

$$-\xi \sum_{j=1}^n A_{n-j}(\xi) G_j'(\xi, 0) = \sum_{k=0}^\infty a_k \frac{J_{2k-p+1}(\xi)}{\xi^p}, \quad (17)$$

розв'язок цієї системи стосовно функцій $A_{n-j}(\xi)$ можна суттєво спростити, якщо скористатися тим фактом, що функції $G_j(\xi, \gamma)$ визначають з точністю до довільних сталих $b_{0,j}$. Виберемо ці довільні сталі так, щоб виконувалися такі умови нормування:

$$G_0'(\xi, 0) = -\xi, \quad G_j'(\xi, 0) = 0 \quad \forall j \in N \quad (18)$$

і зведемо систему (17) до діагонального вигляду

$$A_n(\xi) = \sum_{k=0}^\infty a_k \frac{J_{2k-p+1}(\xi)}{\xi^{p+2}}. \quad (19)$$

Якщо подання (19) підставити в інтегральне рівняння (16) і обчислити розривний інтеграл Вебера-Шафгайтліна [4], то в області $(0 \leq \alpha \leq 1)$ отримаємо функційне рівняння

$$\sum_{k=0}^\infty a_k \frac{\Gamma(k-p+1) F(k-p+1, -k, 1; \alpha^2)}{2^p \Gamma(k+1)} = T_0 f(\alpha^2) g_n. \quad (20)$$

Позаяк при $a = -k$ або $b = -k$ гіпергеометрична функція Гаусса $F(a; b; c; x^2)$ вироджується в поліном степеня $2k$ [4], то на підставі апроксимаційної теореми Вейерштрасса рівняння (20) має єдиний розв'язок — набір коефіцієнтів a_k за довільної неперервної на проміжку $(0 \leq \alpha \leq 1)$ функції $f(\alpha^2)$.

Якщо коефіцієнти $A_{n-j}(\xi)$ відомі, то шуканий розв'язок початково-крайової задачі (1)-(3) матиме вигляд

$$T(\alpha, \gamma, \tau) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} L_n(\lambda \tau) \sum_{j=0}^n \int_0^{\infty} A_{n-j}(\xi) G_j(\xi, \gamma) \xi J_0(\xi) d\xi, \quad (21)$$

де функції $G_j(\xi, \gamma)$ визначаються з (13).

Вираз (21) на підставі формул (13), (19) зведемо до вигляду

$$T(\alpha, \gamma, \tau) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} L_n(\lambda \tau) \sum_{j=0}^n \left\{ \sum_{m=0}^j b_{m,j} \gamma^m \times \right. \\ \left. \times \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_0^{\infty} \frac{J_{2k-p+1}(\xi) J_0(\xi \alpha)}{\xi^{p+1}} e^{-|\gamma| \sqrt{\lambda + \xi^2}} d\xi \right] \right\}. \quad (22)$$

Коефіцієнти розвинення в ряд за Лагерром теплових потоків у всьому просторі подамо формулами

$$q_{\alpha,n}(\alpha, \gamma) = \frac{\lambda_T}{R} \sum_{j=0}^n \left\{ \sum_{m=0}^j b_{m,j} \gamma^m \times \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_0^{\infty} \frac{J_{2k-p+1}(\xi) J_1(\xi \alpha)}{\xi^p} e^{-|\gamma| \sqrt{\lambda + \xi^2}} d\xi \right] \right\}; \\ q_{\gamma,n}(\alpha, \gamma) = \frac{\lambda_T}{R} \cdot \text{sign } \gamma \times \\ \times \sum_{j=0}^n \left\{ \sum_{m=0}^j b_{m,j} \gamma^m \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_0^{\infty} \sqrt{\lambda + \xi^2} \frac{J_{2k-p+1}(\xi) J_0(\xi \alpha)}{\xi^{p+1}} e^{-|\gamma| \sqrt{\lambda + \xi^2}} d\xi \right] \right\} - \\ - \frac{\lambda_T}{R} \sum_{j=0}^n \left\{ \sum_{m=1}^j m \cdot b_{m,j} \gamma^{m-1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_0^{\infty} \frac{J_{2k-p+1}(\xi) J_1(\xi \alpha)}{\xi^p} e^{-|\gamma| \sqrt{\lambda + \xi^2}} d\xi \right] \right\}, \quad (23)$$

які залежать від параметра p , λ_T — коефіцієнт температуропровідності.

Для знаходження меж зміни параметра p будемо вимагати виконання фізичної умови неперервності радіальної складової вектора теплового потоку на краю включення $\alpha = 1$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1-0} q_{\alpha}(\alpha, \pm 0, \tau) = \lim_{\alpha \rightarrow 1+0} q_{\alpha}(\alpha, \pm 0, \tau). \quad (24)$$

Обчислимо радіальну складову $q_{\alpha,n}(\alpha, \pm 0)$ вектора теплового потоку в області $(0 \leq \alpha \leq 1)$

$$q_{\alpha,n}(\alpha, \pm 0) = \frac{\lambda_T}{R} \sum_{j=0}^n b_{0,j} \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\alpha \Gamma\left(k - p + \frac{3}{2}\right) F\left(k - p + \frac{3}{2}, -k + \frac{1}{2}, 2; \alpha^2\right)}{2^p \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) \Gamma(2)} \right]; \quad (25)$$

а в області $(1 < \alpha < \infty)$ отримаємо

$$q_{\alpha,n}(\alpha, \pm 0) = \frac{\lambda_T}{R} \times \sum_{j=0}^n b_{0,j} \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\Gamma\left(k - p + \frac{3}{2}\right) F\left(k - p + \frac{3}{2}, k - p + \frac{1}{2}, 2k - p + 2; \frac{1}{\alpha^2}\right)}{2^p \alpha^{2k-2p+2} \Gamma(2k - p + 2) \Gamma\left(-k + p + \frac{1}{2}\right)} \right] \quad (26)$$

Гранична рівність (24) буде виконана, якщо

$$0 < p < \frac{1}{2}. \quad (27)$$

Обмеження параметра p зверху забезпечує зникання потоків тепла на нескінченності. Разом з тим відповідно до другого виразу (23) нормальна складова $q_{\gamma,n}(\alpha, \pm 0)$ вектора теплового потоку має стрибок у площині $\gamma = 0$, оскільки $\text{sign } \gamma = +1$ при $\gamma > 0$ і $\text{sign } \gamma = -1$ при $\gamma < 0$.

Якщо стрибка нормальної складової $q_{\gamma,n}(\alpha, \pm 0)$ вектора теплового потоку у площині включення поза його межами немає, то це можливо тільки при $p = 0$. Тоді з першої формули (23) при $p = 0$ одержимо, що в площині включення ($0 \leq \alpha \leq 1$, $\gamma = 0$)

$$q_{\alpha,n}(\alpha, \pm 0) = \frac{\lambda_T}{R} \sum_{j=0}^n b_{0,j} \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\alpha \Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right) F\left(k + \frac{3}{2}, -k + \frac{1}{2}, 2; \alpha^2\right)}{\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) \Gamma(2)} \right]; \quad (28)$$

і відповідно в області ($1 < \alpha < \infty$, $\gamma = 0$)

$$q_{\alpha,n}(\alpha, \pm 0) = \frac{\lambda_T}{R} \sum_{j=0}^n b_{0,j} \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right) F\left(k + \frac{3}{2}, k + \frac{1}{2}, 2k + 2; \frac{1}{\alpha^2}\right)}{\alpha^{2k+2} \Gamma(2k + 2) \Gamma\left(-k + \frac{1}{2}\right)} \right]. \quad (29)$$

Оскільки за умови $c - a - b = 0$ гіпергеометрична функція Гаусса $F(a, b, c; 1)$ є логарифмічно сингулярною, то таку логарифмічну особливість матимуть відповідно до подань (28), (29) функції $q_{\alpha,n}(\alpha, \pm 0)$, а, отже, потік $q_{\alpha}(\alpha, \pm 0, \tau)$ на краю включення при $\alpha = 1$, що фізично неможливо.

Зауважимо, що нестационарне температурне поле, яке визначається розв'язком задачі (1)-(3) при $\tau \rightarrow \infty$ асимптотично повинно прямувати до стаціонарного температурного поля, яке можна визначити за допомогою теореми про граничне значення для інтегрального перетворення Лагерра –

$$T(\alpha, \gamma, \infty) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} T_0(\alpha, \gamma) \quad (30)$$

Прийmemo, зокрема, $f(\alpha^2) \equiv 1$ і тоді з формули (20) одержимо, що

$$a_0 = \frac{2^p T_0}{\Gamma(1-p)}, \quad a_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (31)$$

і відповідно з формул (23) при $\gamma = 0$ в області $(0 \leq \alpha \leq 1)$

$$q_\alpha(\alpha, \pm 0) = \frac{\lambda_T}{R} a_0 \frac{\alpha \Gamma\left(\frac{3}{2} - p\right) F\left(\frac{3}{2} - p, \frac{1}{2}, 2; \alpha^2\right)}{2^p \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(2)};$$

$$q_\gamma(\alpha, \pm 0) = \frac{\lambda_T}{R} \cdot a_0 \frac{\Gamma(1-p) F(1-p, 0; 1; \alpha^2)}{2^p \Gamma(2)},$$

а в області $(1 < \alpha < \infty)$

$$q_\alpha(\alpha, \pm 0) = \frac{\lambda_T}{R} a_0 \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} - p\right) F\left(\frac{3}{2} - p, \frac{1}{2} - p, 2 - p; \frac{1}{\alpha^2}\right)}{2^p \alpha^{2-2p} \Gamma(2-p) \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)};$$

$$q_\gamma(\alpha, \pm 0) = \frac{\lambda_T}{R} \cdot a_0 \frac{\Gamma(1-p) F\left(1-p, 1-p; 2-p; \frac{1}{\alpha^2}\right)}{2^p \alpha^{2-2p} \Gamma(2-p) \Gamma(p)}.$$

Переконаємося, що за умови (27) справді виконується гранична рівність (24). Для цього обчислимо $q_\alpha(1, \pm 0)$ в областях $(0 \leq \alpha \leq 1)$ і $(1 < \alpha < \infty)$ відповідно за поданнями (32), (33)

$$q_\alpha(1, \pm 0) = \frac{\lambda_T}{R} a_0 \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} - p\right) \Gamma(p)}{2^p \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)};$$

$$q_\alpha(1, \pm 0) = \frac{\lambda_T}{R} a_0 \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} - p\right) \Gamma(p)}{2^p \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}.$$

Однакові праві частини у виразах (34), (35), одержані за умови $p > 0$, підтверджують виконання граничної рівності (24). Якщо вимагати виконання умови $q_\gamma(\alpha, \pm 0) = 0$ поза межами включення, тобто $(1 < \alpha < \infty)$, то це можливо тільки при $p = 0$. Як видно з виразів (34), (35), потік $q_\alpha(\alpha, \pm 0)$ у точці $\alpha = 1$ при $p = 0$ матиме логарифмічну сингулярність. Такий результат фізично суперечливий.

Побудова розв'язку задачі за допомогою інтегрального перетворення Лапласа. За допомогою інтегрального перетворення Лапласа по часу початково-крайову задачу (1)-(3) зведемо до крайової задачі

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\alpha \frac{\partial T^L}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial^2 T^L}{\partial \gamma^2} - s T^L = 0; \quad (36)$$

$$\frac{\partial T^L}{\partial \gamma} = \mp T_0 f(\alpha^2) g^L(s) \quad \forall \alpha \in [0, 1) \quad \gamma = 0; \quad (37)$$

$$\lim_{(|\alpha|, |\gamma|) \rightarrow \infty} \frac{\partial T^L(\alpha, \gamma)}{\partial \alpha} = 0, \quad (38)$$

де введені позначення

$$T^L(\alpha, \gamma) = \int_0^\infty T(\alpha, \gamma, \tau) e^{-s\tau} d\tau, \quad g^L(s) = \int_0^\infty g(\tau) e^{-s\tau} d\tau.$$

Загальний розв'язок рівняння (36), що задовольняє умову (38), запишемо у вигляді інтеграла Ханкеля

$$T^L(\alpha, \gamma) = \int_0^\infty \frac{A(\xi, s)}{\sqrt{s + \xi^2}} e^{-\sqrt{s + \xi^2} |\gamma|} \xi J_0(\xi \alpha) d\xi \quad (39)$$

з невідомою функцією $A(\xi, s)$, яка визначається з крайової умови (37).

Якщо вираз (39) підставити у крайову умову (37), то отримаємо інтегральне рівняння

$$\int_0^\infty \xi A(\xi) J_0(\xi \alpha) d\xi = T_0 f(\alpha^2) g^L(s), \quad (40)$$

множину розв'язків якого побудуємо за допомогою розривних інтегралів Вебера-Шафгайтліна [4]. Якщо прийняти, що

$$\xi A(\xi) = g^L(s) \sum_{k=0}^\infty a_k \frac{J_{2k-p+1}(\xi)}{\xi^p}, \quad (41)$$

то отримаємо функційне рівняння стосовно невідомих коефіцієнтів a_k

$$\sum_{k=0}^\infty a_k \int_0^\infty \frac{J_0(\xi \alpha) J_{2k-p+1}(\xi)}{\xi^p} d\xi = T_0 f(\alpha^2) \quad (0 \leq \alpha \leq 1).$$

Обчисливши розривний інтеграл Вебера-Шафгайтліна [4], отримаємо

$$\sum_{k=0}^\infty a_k \frac{\Gamma(k-p+1) F(k-p+1, -k, 1; \alpha^2)}{2^p \Gamma(k+1)} = T_0 f(\alpha^2). \quad (42)$$

Рівняння (42) дають змогу визначити при заданому $f(\alpha^2)$ всі коефіцієнти a_k і тоді згідно з формулами (41) і (39) у просторі зображень за Лапласом матимемо

$$T^L(\alpha, \gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_0^{\infty} \frac{g^L(s) e^{-\sqrt{s+\xi^2}|\gamma|}}{\sqrt{s+\xi^2}} \frac{J_0(\xi\alpha) J_{2k-p+1}(\xi)}{\xi^p} d\xi. \quad (43)$$

Відповідно до теореми про згортку оригіналом зображення $\frac{g^L(s) e^{-\sqrt{s+\xi^2}|\gamma|}}{\sqrt{s+\xi^2}}$ є функція

$$H(\xi, \gamma, \tau) = \int_0^{\tau} G(\xi, \gamma, x) g(\tau - x) dx, \quad (44)$$

де $G(\xi, \gamma, \tau)$ — оригінал зображення $\frac{e^{-\sqrt{s+\xi^2}|\gamma|}}{\sqrt{s+\xi^2}}$.

Якщо функцію $g(\tau)$ подати у вигляді $g(\tau) = (1 - e^{-a\tau})$, то формула (44) набуде вигляду

$$H(\xi, \gamma, \tau) = \int_0^{\tau} \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \exp\left(-\xi^2 x - \frac{\gamma^2}{4x}\right) \{1 - \exp[-a(\tau - x)]\} dx. \quad (45)$$

Тоді розв'язком початково-крайової задачі (1)–(3), враховуючи подання (45) і (43), буде функція

$$T(\alpha, \gamma, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_0^{\tau} \left\{ \int_0^{\tau} \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \exp\left(-\xi^2 x - \frac{\gamma^2}{4x}\right) \{1 - \exp[-a(\tau - x)]\} dx \right\} \times \\ \times \frac{J_0(\xi\alpha) J_{2k-p+1}(\xi)}{\xi^p} d\xi.$$

Не обмежуючи міркувань, змінимо порядок інтегрування та температурне поле подамо у вигляді

$$T(\alpha, \gamma, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_0^{\tau} \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \{1 - \exp[-a(\tau - x)]\} \exp\left(-\frac{\gamma^2}{4x}\right) \times \\ \times \left\{ \int_0^{\infty} \exp(-\xi^2 x) \frac{J_0(\xi\alpha) J_{2k-p+1}(\xi)}{\xi^p} d\xi \right\} dx. \quad (46)$$

До формули (46) застосуємо такий відомий визначений інтеграл [5, с. 732]

$$\int_0^{\infty} x^{\lambda+1} \exp(-\alpha x^2) J_{\mu}(\beta x) J_{\nu}(\gamma x) dx = \frac{\beta^{\mu} \gamma^{\nu} \alpha^{\frac{\mu+\nu+\lambda+2}{2}}}{2^{\nu+\mu+1} \Gamma(\nu+1)} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\lambda + 1\right)}{m! \Gamma(m + \mu + 1)} \left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)^m F\left(-m, -\mu - m; \nu + 1; \frac{\gamma^2}{\beta^2}\right).$$

Тоді

$$\int_0^{\infty} \exp(-\xi^2 x) \frac{J_0(\xi \alpha) J_{2k-p+1}(\xi)}{\xi^p} d\xi =$$

$$= \frac{x^{p-1}}{2^{2-p} \Gamma(2-p)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m-p+1)}{m! \Gamma(m+1)} \left(-\frac{\alpha^2}{4x}\right)^m F\left(-m, -m; 2-p; \frac{1}{\alpha^2}\right). \quad (47)$$

Використавши формулу подання поліномів Якобі [5, с. 1049]

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{\Gamma(n+1+\beta)}{n! \Gamma(1+\beta)} \frac{(x-1)^n}{2^n} F\left(-n, -n-\alpha; \beta+1; \frac{x+1}{x-1}\right),$$

визначимо гіпергеометричну функцію через поліноми Якобі з аргументом $\left(\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}\right)$, тобто

$$F\left(-m, -m; 2-p; \frac{1}{\alpha^2}\right) = \frac{m! \Gamma(2-p)}{\Gamma(m+2-p)} \left(\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2}\right)^m P_m^{(0, 1-p)}\left(\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}\right). \quad (48)$$

Розв'язок (46), врахувавши подання (47) і (48), виконавши певні перетворення, можна подати у вигляді

$$T(\alpha, \gamma, \tau) =$$

$$= \frac{1}{2^{2-p}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha^2 - 1)^m}{(m+1-p) \Gamma(m+1)} P_m^{(0, 1-p)}\left(\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}\right) \times$$

$$\times \int_0^{\tau} \frac{x^{p-1}}{\sqrt{\pi x}} \left(\frac{1}{4x}\right)^m \{1 - \exp[-a(\tau-x)]\} \exp\left(-\frac{\gamma^2}{4x}\right) dx. \quad (49)$$

Числовий аналіз задачі та висновки. Проведено числовий аналіз задачі, на рис. 1-4 зображено залежності від часової та просторової координат нестационарного температурного поля та теплового потоку. Розрахунки виконані при таких значеннях функцій і параметрів:

$$g(\tau) = (1 - e^{-a\tau}), \quad f(\alpha^2) = 1, \quad p = \frac{1}{4}.$$

На рис. 1 показано залежність нестационарного температурного поля залежно від відстані від дискового включення за часовою змінною τ . Зі

збільшенням величини γ температура спадає. Як видно з рис., з часом температурне поле у просторі виходить на стаціонарний режим. Розрахунок нестационарного температурного поля виконали за формулами (22), яку одержали за допомогою інтегрального перетворення Лагерра та (49), одержаною за допомогою інтегрального перетворення Лапласа.

Поліноми Лагерра рахували за рекурентними співвідношеннями [5], а параметр λ вибирали так, щоб $1 \leq \lambda\tau \leq 5$.

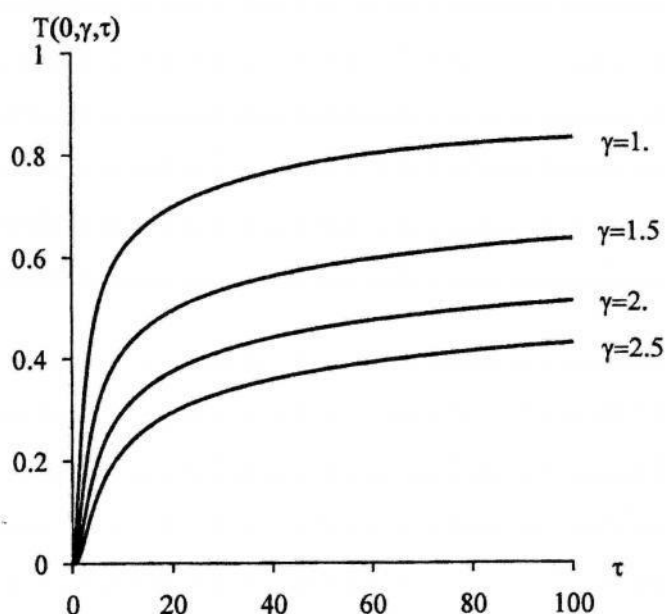


Рис. 1

За допомогою числового експерименту визначили, що при утриманні тридцяти і шестидесяти членів ряду похибка між результатами становить

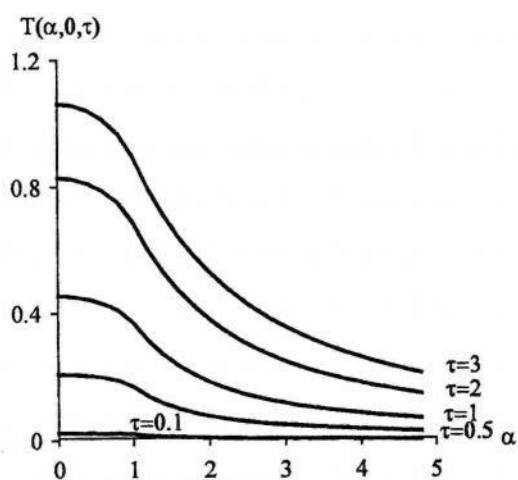


Рис. 2

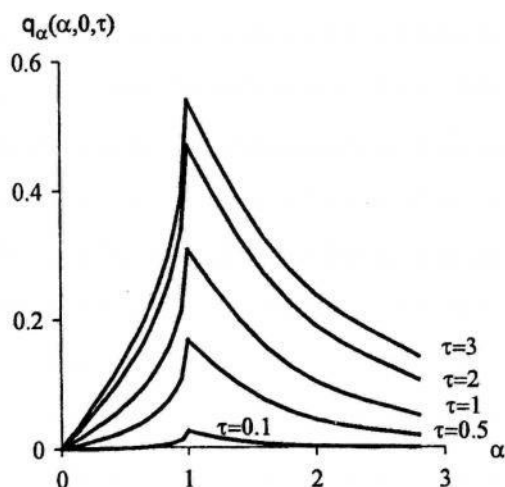


Рис. 3

близько 0,1%.

На рис. 2 зображено залежність температури в різні моменти часу τ від радіальної змінної α на поверхні включення. Температурне поле є неперервною функцією за змінною α і зникає при $\alpha \rightarrow \infty$.

Рис. 3 ілюструє залежність радіального теплового потоку на поверхні включення за змінною α . Тепловий потік є неперервною функцією за α , що забезпечується умовою неперервності теплового потоку (24) в радіальному напрямі.

На рис. 4 подано залежність теплового потоку за радіальною координатою α на поверхні включення $\gamma = 0$ за умови $q_\gamma(\alpha, \pm 0) = 0$ ($1 < \alpha < \infty$) при $p = 0$. З наведених результатів видно, що для такого випадку температурний потік терпить розрив другого роду на краю включення $\alpha = 1$, поза включенням є неперервною функцією і зникає за координатою α .

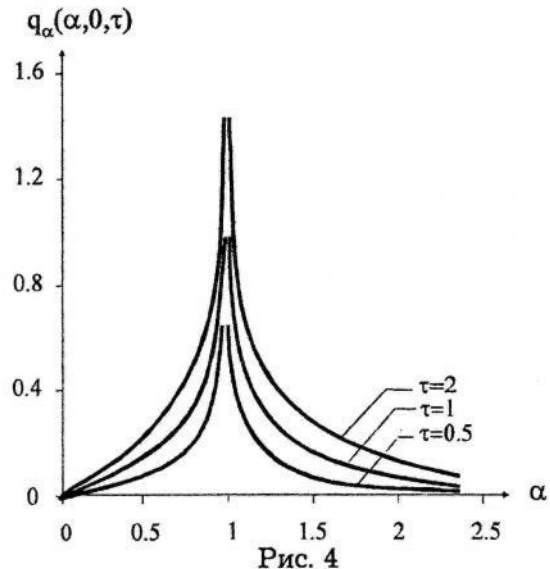


Рис. 4

1. Галазюк В. А. Метод поліномів Чебишева-Лагерра в змішаній задачі для лінійного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1981. – № 1. – С. 3-7.
2. Галазюк В. А., Горечко А. Н. Общее решение бесконечной системы дифференциальных уравнений // Укр. матем. журнал. – 1982. – Т. 35. – № 6. – С. 742-745.
3. Галазюк В. А., Коляно Я. Ю. Исследование нестационарных температурных полей в телах сферической формы методом полиномов Чебышева-Лагерра // Инж.-физ. журн. – 1987. – Т. 52. – № 5. – С. 844-851.
4. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. – М., 1979.
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. – М., 1963.

NONSTATIONARY WARMING UP OF SPACE DISK FUEL ELEMENT

Vitaliy Halazyuk, Viktoriya Kotsyubaylo

*Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine*

In work statement of a problem of heat conductivity for space which is warmed up disk fuel element is made. The offered technique of the decision of a problem on the basis of application of a method of integrated Laguerre transformation, and also the traditional analytical method of the decision with the help of integrated Laplace transformation on time replaceable is considered.

It is shown, that under condition $q_\gamma(\alpha, \pm 0) = 0$ ($1 < \alpha < \infty$) of a temperature stream q_α has logarithmic feature at edge of inclusion $\alpha = 1$ which contradicts physics of the phenomenon. The numerical analysis of a problem is lead, on the basis of which constructed corresponding graphic dependences.

Key words: thermal streams, regularity, singularity.

Стаття надійшла до редколегії 22.09.2005

Прийнята до друку 22.11.2006

УДК 539.4:624.012

ТЕРМОПРУЖНА РІВНОВАГА ПІВБЕЗМЕЖНОЇ ПЛАСТИНИ З НЕРОЗТЯГЛИВОЮ ГНУЧКОЮ НАКЛАДКОЮ В МОДЕЛЬНОМУ ФОРМУЛЮВАННІ

Микола КУНДРАТ, Георгій СУЛИМ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

В умовах плоскої задачі досліджується термопружна рівновага півбезмежної пластини з нерозтяжливою гнучкою скінченної міцності на розрив нагрітою накладкою за умов ідеального теплового контакту та дії розтягуючого навантаження на пластину. Уздовж межі пластина-накладка розвиваються локалізовані зони передруйнування (ослабленого контакту). Аналітичний розв'язок задачі отримано через комплексні потенціали зведенням до задачі спряження. З використанням деформаційного критерію з'ясовано граничні навантаження та температура можливого відшарування накладки чи її розриву. Досліджено взаємовплив силового та температурного навантажень на розвиток зон передруйнування.

Ключові слова: накладка, термопружність, граничне навантаження, двофазова зона передруйнування.

Дослідження та огляд праць плоскої контактної задачі Мелана [1] для ідеально пружного тіла виконано в монографіях [2–5] та ін. Запропоновані у них пружні розв'язки містять механічно некоректні сингулярності напружень в околах кінців накладок, підкріплень. Вплив малих зон пластичності матеріалу ізотропної півплощини в околі країв накладки на розподіл контактних напружень дослідив Ю.І. Кудишин [6], використовуючи ітераційний метод пружних розв'язків О.А. Ільюшина. Отримано обмежені напруження біля кінців підкріплюючого ребра. Однак усі ці підходи розглядали доволі сильно ідеалізовані схеми, які не враховували можливостей ані розриву накладки, ані виникнення в області її кінців часто спостережуваних зон ослабленого контакту з пластиною. Відповідну модельну пружно-пластичну задачу для ортотропної півплощини з підкріпленням розглядали у [7]. У пропонованій праці модельна схема [7] застосована до аналізу граничної рівноваги в системі “півбезмежна пластина—нагріта накладка”. Тепловий контакт між нерозтяжливою гнучкою обмеженої міцності на розрив накладкою та пластиною ідеальний. Розглядається два можливих механізми руйнування композиції (відшаруванням накладки та її розривом) і для кожного обчислено граничне навантаження.

Формулювання задачі та її розв'язок. За умов плоскої задачі теорії термопружності розглянемо півбезмежну пластину, що розтягується на нескінченності зусиллями інтенсивності $\sigma_{xx}^{\infty} = N_1$ паралельно до її краю (рис. 1). Пластина підкріплена нагрітою до температури T_1 абсолютно

жорсткою, але скінченної міцності на розрив P_{ut} накладкою завдовжки $2a$. Тепловий контакт між накладкою та пластиною ідеальний, температура вільного краю пластини дорівнює $T_0 = 0$. Осі декартової системи координат xOy збігаються з осями геометричної симетрії композиції.

Для пластини найбільша концентрація напружень виникає в околах

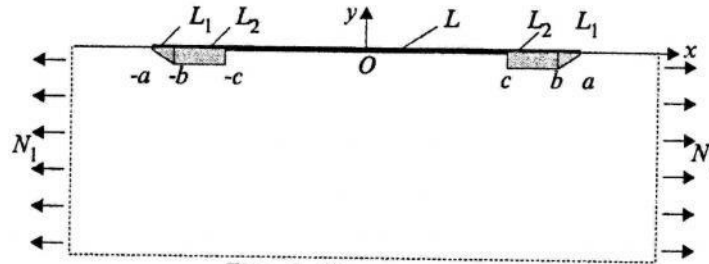


Рис. 1. Схема задачі

кінців накладки, де насамперед і треба чекати появи зон передруйнування. Їм можуть відповідати області накопичення пошкоджень, пластичного деформування (проковзування), часткового розриву зв'язку між пластиною й накладкою та ін. Під час досягнення переміщеннями внаслідок пластичного проковзування матеріалу під накладкою певної граничної межі у зонах передруйнування може порушитися зв'язок між матеріалами, тобто накладка відшарується, зберігаючи контакт з пластиною. З іншого боку, різниця температурних коефіцієнтів розширення матеріалів пластини й накладки, передача дії прикладених зовнішніх зусиль спричиняють у накладці осьові зусилля розтягу. Вони при досягненні межі міцності накладки можуть спричинити її розрив.

Припускаємо, що зони передруйнування розвиваються уздовж межі пластина-накладка від краю до її центру і складаються з двох ділянок: зони розпушення $L_1 = (-a, -b) \cup (b, a)$ та зони пластичності $L_2 = (-b, -c) \cup (c, b)$. У зонах передруйнування виконуються такі крайові умови: на ділянках розпушення (ослабленого контакту) дотичні напруження лінійно зростають від нуля до свого граничного значення τ_s^* –

$$\sigma_{xy}(x) = \tau_s^* \frac{a - |x|}{a - b} \operatorname{sign}(x) \quad (x \in L_1); \quad (1)$$

на ділянках пластичного деформування –

$$\sigma_{xy}(x) = \tau_s^* \operatorname{sign}(x) \quad (x \in L_2), \quad (2)$$

де τ_s^* – зсувна межа міцності контактної межі пластина-накладка, а при пластичному деформуванні – її зсувний поріг пластичності; σ_{ij} – компоненти тензора напружень; $\operatorname{sign}(x) = \{1 \text{ для } x > 0; -1 \text{ для } x < 0; 0 \text{ для } x = 0\}$. Значення параметрів b та c наперед невідомі і знаходять з додаткових механічних умов. Зазначимо, що запроваджена так зона передруйнування

дає змогу уникнути особливостей напружень в околах кінців накладки та отримати обмежені напруження в усіх точках композиції, які дають механічно коректну картину деформування конструкції, що задовольняє також і закон парності дотичних напружень.

На проміжку $|x| < c$ пружного деформування зберігається ідеальний контакт, тому переміщення дорівнюють

$$u(x) = T_1 \alpha_p x \quad (x \in L), \quad (3)$$

де α_p — температурний коефіцієнт лінійного видовження матеріалу накладки; u, v — компоненти вектора переміщень у напрямках осей Ox та Oy відповідно.

Напруження на нескінченності

$$\sigma_{xx}^\infty = N_1, \quad \sigma_{yy}^\infty = \sigma_{xy}^\infty = 0 \quad \text{при} \quad \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Оскільки накладка вважається абсолютно гнучкою, то дії нормальних контактних зусиль під накладкою немає. Оскільки вільний край пластини теж не навантажений, то по всьому краю пластини $\sigma_{yy} = 0$ ($y = 0$).

Для розв'язування задачі використаємо відомі [8, 9] подання Колосова-Мусхелішвілі для напружень і деформацій

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 4 \operatorname{Re} \Phi(z), \quad \sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi(z) - \Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \\ 2G \partial(u + iv)/\partial x &= \kappa \Phi(z) + \Phi(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} + \beta \Psi_0(z). \end{aligned} \quad (5)$$

Тут $z = x + iy$; $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$, $\beta = 4G\alpha_0$ для плоского напруженого стану (ПНС); $\kappa = 3 - 4\nu$, $\beta = 4G(1 + \nu)\alpha_0$ в умовах плоскої деформації (ПД); α_0, G, ν — температурний коефіцієнт лінійного розширення, модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини. Зазначимо, що за плоского напруженого стану вільні поверхні пластини вважають теплоізованими.

Функція $\Psi_0(z)$ визначається співвідношеннями [8, 9]

$$2 \operatorname{Re} \Psi_0(z) = T, \quad \Psi_0(z) = F_0(z) - \bar{F}_0(z), \quad F_0(z) - F_0(\bar{z}) = T + i\eta,$$

де η — дійсна функція; $F_0(z)$ — визначена в областях D^* ($y < 0$) та D ($y > 0$) аналітична функція. Звідси отримуємо, що

$$\Psi_0(z) = \frac{1}{2} T_0 + \frac{T_1 - T_0}{2\pi i} \ln \frac{z + a}{z - a}. \quad (6)$$

Функцію $\Phi(z)$ знайдемо після підставлення формул (5) у крайові умови (1)–(3). З урахуванням виразу (6), це приведе до задачі спряження з кусково-неперервними коефіцієнтами

$$\begin{aligned} \Phi^+(x) - g(x)\Phi^-(x) &= f(x), \\ g(x) &= \begin{cases} -1 & (x \in L), \\ 1 & (x \in L_1 \cup L_2); \end{cases} \\ f(x) &= \begin{cases} f_1(x) = -i\tau_s^*(a - |x|)/(a - b)\operatorname{sign}(x) & (x \in L_1), \\ f_2(x) = -i\tau_s^*\operatorname{sign}(x) & (x \in L_2), \\ f_3(x) = 2[G\alpha_p T_1 - \beta \operatorname{Re} \Psi_0^+(x)] & (x \in L). \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

Загальним розв'язком крайової задачі (7) з урахуванням умови на нескінченності (4) буде функція

$$\Phi(z) = \frac{f_3(z)}{2} + \frac{zB_4(z, a, b, c)}{X(z)} + \frac{\tau_s^*}{2\pi(a-b)} f_6(z, a, b, c), \quad (8)$$

де

$$B_4(z, a, b, c) = N_1/4 - f_3(z)/2 - \tau_s^* f_5(a, b, c)/[\pi(a-b)], \quad X(z) = \sqrt{z^2 - c^2},$$

$$\begin{aligned} f_5(a, b, c) &= \sqrt{b^2 - c^2} - \sqrt{a^2 - c^2} - b \cdot \ln\left[(b + \sqrt{b^2 - c^2})/c\right] + \\ &+ a \cdot \ln\left[(a + \sqrt{a^2 - b^2})/c\right], \end{aligned}$$

$$f_6(z, a, b, c) = b\Gamma_1(z, b, c) - a\Gamma_1(z, a, c) + z[\Gamma_2(z, a, c) - \Gamma_2(z, b, c)],$$

$$\Gamma_1(z, \omega, c) = \ln(\zeta^-/\zeta^+), \quad \zeta^\pm = \omega\sqrt{z^2 - c^2} \pm z\sqrt{\omega^2 - c^2},$$

$$\Gamma_2(z, \omega, c) = \ln(\xi^-/\xi^+), \quad \xi^\pm = \sqrt{\omega^2 - c^2} \pm \sqrt{z^2 - c^2}.$$

Формули (5), (6), (8) цілком описують поле напружень і деформацій у тілі з накладкою, дають змогу дослідити умови його руйнування.

Деформаційний критерій руйнування. З умови, що напруження у вершинах лінійних пластичних зон ($x = \pm c$) неперервні (обмежені), отримаємо нелінійне рівняння

$$\frac{N_1}{4} - \frac{2GT_1}{\kappa + 1}(\alpha_p - k\alpha_0) - \frac{\tau_s^*}{\pi(a-b)} f_5(a, b, c) = 0, \quad (9)$$

де $k = 1$ в умовах ПНС та $k = 1 + \nu$ за ПД.

Використаємо для опису зони передруйнування безрозмірні параметри довжини $\varepsilon = (a - c)/a$ та навантаження

$$S = N_1 - 8GT_1(\alpha_p - k\alpha_0)/(\kappa + 1). \quad (10)$$

На рис. 2 зображено залежність довжини зони передруйнування від параметра $S/(2\tau_s^*)$. Номери біля ліній відповідають різним довжинам зони

розпушення $\gamma = (a - b)/a$, яка може вважатися залежним від структури матеріалів додатковим механічним параметром контактної взаємодії пари пластина-накладка: 1 – $\gamma = 10^{-10}$ (зони розпушення практично немає); 2 – $\gamma = 0,05$; 3 – 0,1; 4 – 0,15; 5 – 0,2. Збільшення зони розпушення за фіксованого рівня навантаження загалом видовжує зону передруйнування,

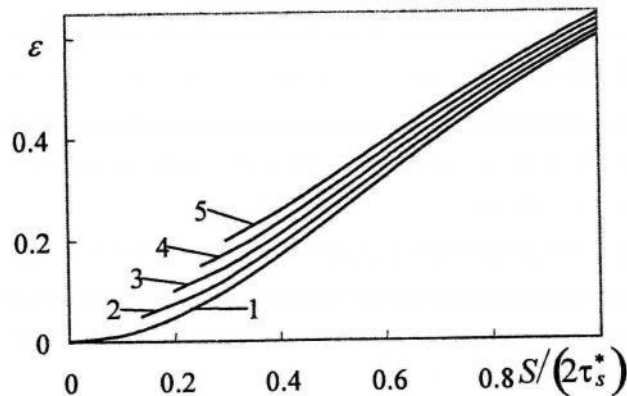


Рис. 2. Довжина зон передруйнування

хоча область пластичності зменшується.

Простий аналітичний вираз для довжини лінії пластичності отримаємо при незначних зонах розпушення, спрямовуючи їхню довжину γ до нуля ($b=a$)

$$\varepsilon = \frac{a - c}{a} = 1 - 1 / \operatorname{ch} \left(\frac{\pi S}{4 \tau_s^*} \right), \quad (11)$$

або в першому наближенні після розвинення у формулі (9) у ряд за степенями ε

$$\varepsilon = \pi^2 S^2 / (8 \tau_s^{*2}). \quad (12)$$

Якщо силове навантаження таке, що $N_1 = 8GT_1(\alpha_p - k\alpha_0)/(\kappa + 1)$, то згідно з рівнянням (9) за комбінованої дії зусиль і температури виконується умова $c = b = a$, зони передруйнування не виникають. Подібно, задаючи на накладці залежну від зусиль розтягу температуру $T_1 = N_1(\kappa + 1)/[8G(\alpha_p - k\alpha_0)]$, також можна уникнути виникнення зон передруйнування біля кінців накладки. Якщо $\alpha_p = k\alpha_0$, то саме лише нагрівання накладки ($N_1 = 0$) не спричинятиме появи зон передруйнування. За умови $\alpha_p < k\alpha_0$ впливи навантаження розтягу і температурного чинника взаємно посилюються, а за $\alpha_p > k\alpha_0$ температурні напруження послаблюють дію зусиль розтягу на розвиток зон передруйнування.

На відміну від зон пружного контакту у смугах пластичності та розпушення ($c \leq |x| < a$) відбувається зміщення (проковзування) точок матеріалу пластини стосовно накладки. Інтегруванням у третій формулі (5) з урахуванням результатів (8) знаходимо переміщення під накладкою

$$u(x) = u^t(x) + u^c(x), \quad u^t(x) = T_1 \alpha_p x, \quad u^c(x) = \frac{(\kappa + 1) \tau_s^*}{8\pi G(a-b)} f_8(x, a, b, c),$$

де

$$f_8(x, a, b, c) = (a^2 + x^2) \Gamma_2(x, a, c) + 2x[b\Gamma_2(x, b, c) - a\Gamma_1(x, a, c)] - \\ - (b^2 + x^2) \Gamma_2(x, b, c) - 2\sqrt{x^2 - c^2}(\sqrt{a^2 - c^2} - \sqrt{b^2 - c^2}).$$

Звідси випливає, що зміщення точок пластини під накладкою найбільші у точках $x = \pm a$

$$u(a) = -u(-a) = u^t(a) + u^c(a), \\ u^t(a) = T_1 \alpha_p a, \quad u^c(a) = \frac{(\kappa + 1) \tau_s^*}{4\pi G(a-b)} f_9(a, b, c). \quad (13)$$

Тут

$$f_9(a, b, c) \equiv f_8(a, a, b, c) = 2a^2 \ln(a/c) + ab\Gamma_1(a, b, c) - \\ - 0,5(a^2 + b^2) \Gamma_2(a, b, c) + c^2 - a^2 + \sqrt{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}.$$

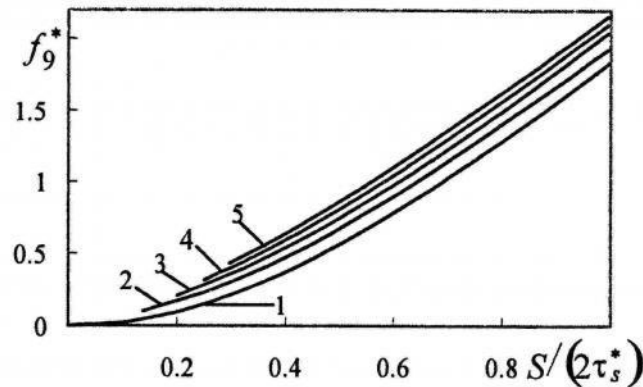
Коли ці максимальні переміщення $u(a)$ досягають граничного значення δ_{2c} , яке є характеристикою зсувної контактної міцності системи “пластина-накладка” та з’ясовується експериментально, то втрачається безпосередній механічний зв’язок між накладкою й пластиною – відбувається руйнування. Критеріальна умова

$$u(a) = \delta_{2c}, \quad (14)$$

що характеризує початок відшарування накладки, аналогічна до відомої [10] умови δ_c -моделі. З (13), (14) отримуємо залежність

$$\left(\frac{\delta_{2c}}{a} - T_1 \alpha_p \right) \frac{\pi G a}{(\kappa + 1) \tau_s^*} = \frac{f_9(a, b, c)}{4(a-b)}. \quad (15)$$

Система рівнянь (9), (15) описує стан граничної рівноваги композиції, коли можливе розшарування між накладкою й пластиною, а її розв’язок дає значення граничного навантаження $N_1 = N_1^*$ та температури $T_1 = T_1^*$.


 Рис. 3. Зміна функції f_9^*

На рис. 3 зображено значення функції $f_9^* \equiv f_9(a, b, c)/[a(a-b)]$ залежно від параметра навантаження $S/(2\tau_s^*)$. Номери біля ліній відповідають тим самим значенням довжини зон розпушення γ , що і на рис. 2. При сталих навантаженні та фізико-механічних характеристиках зі збільшенням зони розпушення зміщення точок матеріалу пластини стосовно накладки збільшується. Інакше кажучи, при фіксованому δ_{2c} зі збільшенням зони розпушення допустиме граничне навантаження розшарування зменшується.

Розподіл дотичних напружень σ_{xy} під накладкою згідно з другою формулою (5) та результатами (8)

$$\sigma_{xy}(x) = \text{Im}[f_3(x) - 2\Phi(x)] = 2\tau_s^* f_7(x, a, b, c)/[\pi(a-b)] \quad (x \in L), \quad (16)$$

де

$$f_7(x, a, b, c) = a \arctg \frac{x\sqrt{a^2 - c^2}}{a\sqrt{c^2 - x^2}} - b \arctg \frac{x\sqrt{b^2 - c^2}}{b\sqrt{c^2 - x^2}} + \\ + x \left(\arctg \frac{\sqrt{c^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}} - \arctg \frac{\sqrt{c^2 - x^2}}{\sqrt{b^2 - c^2}} \right).$$

Параметри c та b визначають із системи рівнянь (9), (15) за відомим силовим і температурним навантаженням.

На рис. 4 зображено розподіл контактних дотичних напружень уздовж правої половини накладки (на лівій – картина симетрична) при фіксованому навантаженні $S/(2\tau_s^*)=0,2$: для лінії 1 — $\gamma = 10^{-10}$ (згідно з рівнянням (9) довжина зони передруйнування $\varepsilon = 0,0474$); 2 — $\gamma = 0,05$ ($\varepsilon = 0,0723$); 3 — 0,1 ($\varepsilon = 0,10035$). Основна частина дотичних зусиль

передається підкріпленню в околах його кінців і з наближенням до центральної частини накладки напруження швидко зменшуються: в околах точок $x = \pm c$ і у центральній області накладки вони вже порівняно

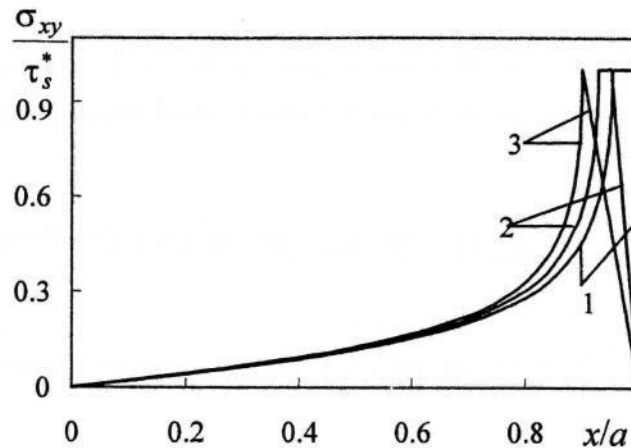


Рис. 4. Контактні напруження

невеликі. Зміна довжини зони розпушення γ впливає на розподіл контактних напружень біля кінців накладки, не змінюючи картину розподілу в середній частині.

Розрив накладки. Дотичні напруження вздовж поверхні зчеплення пластини з накладкою (16), (1), (2) спричиняють появу у поперечному перерізі її осевого зусилля $P(x) = \int_x^a \sigma_{xy}(x) dx$, яке під час перевищення деякого граничного значення може її розірвати. Розподіл осевих зусиль на різних ділянках контакту накладки з півплощиною обчислюється за формулами

$$P(x) = \begin{cases} 0,5\tau_s^* (a-x)^2 / (a-b) & (b \leq |x| \leq a) , \\ 0,5\tau_s^* (a+b-2x) & (b \leq |x| \leq b) , \\ (\tau_s^* / \pi) f_{10}(x, a, b, c) / (a-b) & (0 \leq |x| \leq c) , \end{cases} \quad (17)$$

де

$$\begin{aligned} f_{10}(x, a, b, c) = & 2x \left(b \cdot \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{b^2 - c^2}}{b\sqrt{c^2 - x^2}} - a \cdot \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{a^2 - c^2}}{a\sqrt{c^2 - x^2}} \right) + \\ & + (b^2 + x^2) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{c^2 - x^2}}{\sqrt{b^2 - c^2}} + \sqrt{c^2 - x^2} (\sqrt{b^2 - c^2} - \sqrt{a^2 - c^2}) + \\ & + 0,5\pi (a^2 - b^2) - (a^2 + x^2) \operatorname{arctg} \left(\sqrt{(c^2 - x^2) / (a^2 - c^2)} \right). \end{aligned}$$

Силове навантаження пластини та температура накладки сюди входять опосередковано через значення параметрів b, c .

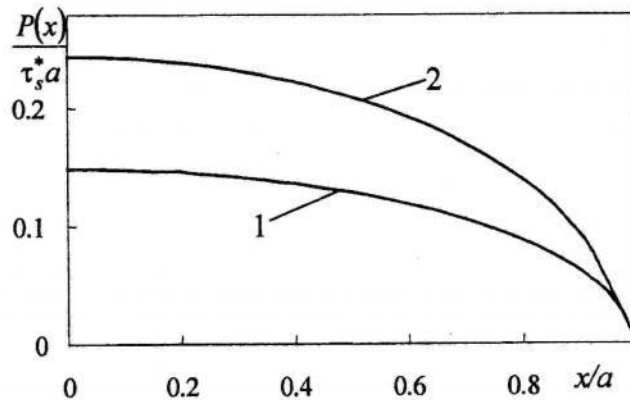


Рис. 5. Розподіл осевих зусиль у накладці

На рис. 5 зображено розподіл осевих зусиль уздовж правої половини накладки за $\gamma = 0,01$: для лінії 1 — $S/(2\tau_s^*) = 0,15$; 2 — $S/(2\tau_s^*) = 0,25$.

Помітне існування області у центральній частині накладки, де розривні зусилля змінюються незначно. Наприклад, якщо не зважати на зміну зусиль у межах 5% (скажімо, похибки визначення сталих, обчислень, математичної моделі тощо), то така область становить більше третини довжини накладки, що свідчить про можливість за досить швидкої зміни навантаження одночасного множинного розриву підкріплюючого елемента у заданій зоні.

Найбільшого значення розривні зусилля досягають посередині накладки ($x = 0$)

$$P(0) = (\tau_s^*/\pi) f_{11}(a, b, c)/(a - b), \quad (18)$$

де

$$f_{11}(a, b, c) = c(\sqrt{b^2 - c^2} - \sqrt{a^2 - c^2}) + b^2 \arctg\left(\frac{c}{\sqrt{b^2 - c^2}}\right) - a^2 \arctg\left(\frac{c}{\sqrt{a^2 - c^2}}\right) + \frac{\pi}{2}(a^2 - b^2).$$

Зміна довжини зони розпушення дуже слабо впливає на значення максимальних осевих розривних зусиль у накладці. На рис. 6 подано їх величину залежно від параметра навантаження. Номери біля ліній відповідають тим самим значенням зони розпушення γ , що і на рис. 4. Лінії 2, 3 обриваються в нижній частині обмеженням на навантаження.

Зі збільшенням навантаження та розвитком ліній пластичності осьові зусилля також збільшуються. Збільшення розривних зусиль у накладці відбуватиметься до початку її відшарування чи, що те саме, до моменту досягнення відносними зсувами точок пластини стосовно накладки

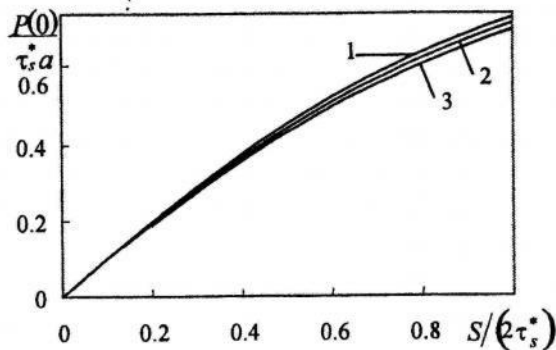


Рис. 6. Максимальні осьові зусилля у накладці

граничного значення δ_{2c} . Тому максимальні осьові зусилля у накладці $P_{\max}$, на які треба орієнтуватися під час вибору накладки, знаходимо, розв'язуючи систему рівнянь (18), (15) та прийнявши $P(0) = P_{\max}$.

З іншого боку, міцність накладки на розрив обмежена. Для запобігання її розриву потрібно, щоб осьові зусилля не перевищували межі міцності накладки P_{ut} : $P_{\max} \leq P_{ut}$. Приймаючи цю умову за критеріальну та розв'язавши систему рівнянь (9), (18) за умови $P(0) = P_{ut}$, отримуємо граничні значення силового навантаження $N_1 = N_1^{**}$ та температури $T_1 = T_1^{**}$ розриву накладки.

Запроваджено зону передруйнування (ослабленого контакту) у композиції з накладкою за умов температурного та силового навантажень, що дало змогу уникнути сингулярності напружень в околах країв накладки та отримати механічно коректні обмежені напруження в усіх точках композиції.

За одночасної дії температурного та силового навантажень залежно від фізико-механічних характеристик композиції можливий їх взаємно підсилювальний та послаблювальний вплив на розвиток зон передруйнування. Якщо задана температура накладки, то завжди можна так підібрати силове навантаження, що розвиток зон передруйнування не відбуватиметься. І навпаки, задаючи відповідно температуру накладки, також можна уникнути виникнення цих зон.

З використанням деформаційного критерію отримано формули для граничних значень силового навантаження та температури, за яких відбуватиметься відшарування накладки. З умови, що зусилля розтягу у накладці не можуть перевищувати її міцності на розтяг, знайдено граничні зусилля на нескінченності та температуру, за яких накладка розірветься.

1. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen // Ingenieur. – Archiv. – 1932. – Bd. 3. – Heft 2. – S. 123–129.
2. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости. – М., 1973.
3. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. – М., 1980.
4. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – М., 1982.
5. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. – М., 1983.
6. Кудишин Ю.И. Задача о подкреплении полуплоскости ребром с учетом пластических свойств материала // Строительная механика и расчет сооружений. – 1982. – №2. – С. 25–28.
7. Кундрат М.М. Пружно-пластична рівновага ортотропної півплощини з накладкою // Машинознавство. – 2002. – №1. – С. 31–35.
8. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М., 1966.
9. Прусов И.А. Некоторые задачи термоупругости. – Минск, 1972.
10. Панасюк В.В. Механика квазихрупкого разрушения материалов. – К., 1991.

THERMOELASTIC EQUILIBRIUM OF SEMIINFINITE PLATE WITH NONTENSILE FLEXIBLE REINFORCEMENT PLATE IN MODELLING FORMULATION

Mikola Kundrat, Georgij Sulym

*Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine*

Thermoelastic equilibrium of semiinfinite plate with nontensile flexible and limited tensile strength reinforcement plate for the plane problem is investigated. The thermal contact between reinforcement and semiinfinite plate is perfect, stresses on infinity are parallel to its edge. Local prefracture zones are developed along interface border from tips to the center of reinforcement. Analytical decision of the problem is obtained using complex potentials. Limiting efforts and temperature for exfoliation of the reinforcement or its rupture are determined using the criterion of deformation. Interaction between temperature and efforts effects on the development of prefracture zones is investigated.

Key words: strength reinforcement, thermoelastic, limit loading, biphasic prefracture zone.

Стаття надійшла до редколегії 20.10.2005
Прийнята до друку 22.11.2006

УДК 539.3

КОНТАКТНА ЗАДАЧА КОЧЕННЯ З УРАХУВАННЯМ ТЕПЛОУТВОРЕННЯ

Володимир ПАУК

*Технічний Університет Кельце,
Ал. 1000-річчя Польської держави, 7, 25-314 Кельце, Польща*

Запропоновано нову математичну модель для опису теплоутворення внаслідок тертя при коченні двох термопружних циліндрів. Модель враховує взаємну залежність швидкості проковзування, ширину ділянки проковзування і контактний тиск. Додатково враховано неідеальний тепловий контакт між тілами.

Ключові слова: кочення, тертя, проковзування, теплоутворення.

Теплоутворення внаслідок дії сил тертя є явищем, яке відбувається в різних галузях техніки. Це явище добре вивчене у випадку тертя ковзання, див. огляд [1]. Головною тезою при терті ковзання є пропорційна залежність теплових потоків від сили тертя і відносної швидкості ковзання тіл, яка є незмінною на ділянці контакту. Подібні задачі достатньо вивчені у випадку тертя обертання. Мета нашої праці – обговорити явища теплоутворення при терті кочення.

Багато авторів [2–6] спрощує задачу теплоутворення при русі кочення, зводячи її до задачі теплоутворення при ковзанні зі сталою швидкістю, за яку приймають швидкість кочення, зменшену в величину коефіцієнта відносного проковзування. Такі формулювання задач, на думку автора, не розкривають сутності руху кочення, а їхні розв'язки можна використати щонайбільше до оцінки середнього рівня генерованої температури.

Коротко обговоримо рух кочення. Звичним є припущення, що тіла котяться без проковзування. Проте відсутність помітного проковзування не означає досконалої причепності поверхонь тіл у спільній ділянці контакту. Відомо [7], що при коченні пружних тіл ділянка контакту складається з зон, на яких поверхні дотичних тіл зчеплені, і з ділянок проковзування. Якщо у зонах зчеплення відносна швидкість між поверхнями нульова, то на ділянках проковзування швидкість додатна та змінна і її треба визначити при розв'язуванні задачі. Зауважимо, що поділ ділянки контакту на ділянки зчеплення і ковзання є невідомим. В умовах сухого тертя відносно ковзання поверхонь спричиняє теплоутворення тільки в зонах проковзування (а не по всій ширині ділянки контакту), а термічні деформації змінюють не тільки контактний тиск і ширину контактної зони, як це відбувається при русі ковзання, а й також відносну швидкість контактних поверхонь і розміри ділянок зчеплення і проковзування. Це робить задачу теплоутворення при коченні нелінійною. У такому

формулюванні контактну задачу кочення з теплоутворенням від тертя вперше розглядали в [8] для випадку одного термопружного тіла. Додатково приймаємо, що обидва тіла є термопружними, а тепловий контакт між ними неідеальний згідно з умовами з [9].

Формулювання задачі. Нехай два термопружні циліндри дотикаються бічними поверхнями і котяться один по одному під дією дотичної сили Q (рис. 1). Вважається, що тіла перебувають у плоскій деформації, а розглядувані термопружні процеси є усталеними. Така пружна задача відома в літературі як задача Картера [10]. Її характерна особливість – поділ спільної ділянки контакту $(-a, a)$ на передню зону зчеплення $(-a, c)$ і зону проковзування (c, a) , яка локалізована поблизу вихідного кінця. Положення точки c невідоме. Варто зазначити, що цей поділ відбувається при додатковому припущенні про ідентичність механічних властивостей матеріалів тіл. Відносна швидкість між поверхнями тіл у зоні проковзування дорівнює [7]

$$v(x) = V \left(\xi_x - \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial x} \right), \quad x \in (c, a), \quad (1)$$

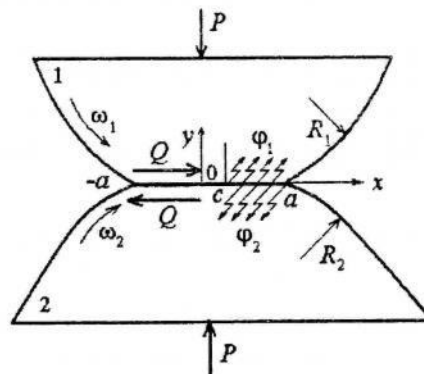


Рис. 1

де V – лінійна швидкість входження поверхонь в область стику; ξ_x – невідомий коефіцієнт відносного ковзання; U_1, U_2 – горизонтальне переміщення поверхонь, відповідно, першого і другого тіла.

Відносний рух поверхонь в умовах сухого тертя спричиняє теплоутворення, тобто у зоні проковзування виникають теплові потоки φ_1, φ_2 , скеровані у контактуючі тіла. Тепловий контакт в зоні зчеплення неідеальний, а поверхні тіл поза нею вважаються теплоізованими. В задачі варто визначити ці теплові потоки, розподіл температур у тілах T_1, T_2 , розподіли нормальних $p(x)$ і дотичних $q(x)$ напружень на ділянці контакту, її ширину та величини зон зчеплення і проковзування.

Граничні умови сформульованої задачі мають вигляд

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) = q(x)v(x), \quad x \in (c, a), \quad (2)$$

$$\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = h(T_1(x) - T_2(x)), \quad x \in (c, a), \quad (3)$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial y}(x) = 0, \quad x \notin (c, a), \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial x} = -\frac{x}{R}, \quad x \in (-a, a), \quad (5)$$

$$v(x) = 0, \quad x \in (-a, c), \quad q(x) < fp(x), \quad x \in (-a, c), \quad (6)$$

$$v(x) > 0, \quad x \in (c, a), \quad q(x) = fp(x), \quad x \in (c, a). \quad (7)$$

Тут h – теплопровідність зони контакту в умові неідеального теплового контакту (3) взятій з [9]; f – коефіцієнт тертя Кулона, $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$; R_1, R_2 – радіуси циліндрів; V_1, V_2 – вертикальні переміщення поверхонь тіл.

Інтегральні рівняння. До опису полів температур і переміщень у контактуючих тілах використаємо відомі розв'язки задачі термопружності для півпростору про рухомі зі сталою швидкістю V поверхневі нормальні і дотичні навантаження, а також розподілені теплові потоки у формі [7, 11]

- поверхневі температури

$$T_i(x) = \frac{1}{\pi K_i} \int_c^a M_i(x' - x) \varphi_i(x') dx', \quad (8)$$

$$M_i(z) = K_0 \left(\frac{V|z|}{2k_i} \right) \exp \left(-\frac{Vz}{2k_i} \right); \quad (9)$$

- нормальні пружні переміщення

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial x} = \frac{2(1-\nu)}{\pi\mu} \int_{-a}^a \frac{p(x') dx'}{x' - x}; \quad (10)$$

- дотичні пружні переміщення

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} - \frac{\partial U_2}{\partial x} = \frac{2(1+\nu)}{\pi\mu} \int_{-a}^a \frac{q(x') dx'}{x' - x}; \quad (11)$$

- нормальні термічні переміщення

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial x} = \int_c^a [N_1(x' - x) \varphi_1(x') + N_2(x' - x) \varphi_2(x')] dx', \quad (12)$$

$$N_i(z) = \frac{(1+\nu)\alpha_i}{K_i} \left[I_0 \left(\frac{Vz}{2k_i} \right) - I_1 \left(\frac{Vz}{2k_i} \right) \right] \exp \left(-\frac{Vz}{2k_i} \right) H(z); \quad (13)$$

- дотичні термічні переміщення

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} - \frac{\partial U_2}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \int_c^a [L_1(x' - x)\varphi_1(x') - L_2(x' - x)\varphi_2(x')] dx', \quad (14)$$

$$L_i(z) = \frac{(1 + \nu)\alpha_i}{K_i} \left\{ -\frac{2k_i}{Vz} + \left[K_0 \left(\frac{V|z|}{2k_i} \right) + K_1 \left(\frac{V|z|}{2k_i} \right) \operatorname{sgn}(z) \right] \exp \left(-\frac{Vz}{2k_i} \right) \right\}. \quad (15)$$

Тут індекс $i = 1, 2$ описує властивості кожного з тіл, ν і μ є коефіцієнтом Пуассона і модулем Юнга, K_i , k_i , і α_i є, відповідно, коефіцієнтами теплопровідності, температуропровідності і лінійного теплового розширення тіл.

Задовольняючи за допомогою цих інтегральних подань граничні умови (2), (3), (5), (6)₁, (7)₂, отримаємо систему інтегральних рівнянь задачі

$$\begin{aligned} \Delta(x) - \frac{h}{2\pi K_1} \int_c^a M(x' - x) \Delta(x') dx' &= \frac{f}{2\pi K_1} \int_c^a M_0(x' - x) v(x') p(x') dx', x \in (c, a) \\ \frac{2(1 - \nu)}{\pi\mu} \int_{-a}^a \frac{p(x') dx'}{x' - x} + \frac{f}{2} \int_c^a N(x' - x) v(x') p(x') dx' + \\ &+ \frac{h}{2} \int_c^a R(x' - x) v(x') \Delta(x') dx' = \frac{x}{R}, x \in (-a, a), \\ \frac{2(1 - \nu)}{\pi\mu} \int_{-a}^a \frac{q(x') dx'}{x' - x} + \frac{f}{2\pi} \int_c^a L(x' - x) v(x') p(x') dx' + \\ &+ \frac{h}{2\pi} \int_c^a Q(x' - x) v(x') \Delta(x') dx' = \xi_x, x \in (-a, c), \end{aligned} \quad (16)$$

де введено невідому функцію стрибка температури

$$\Delta(x) = T_1(x) - T_2(x), \quad x \in (c, a), \quad (17)$$

і ядра

$$M(z) = M_1(z) + \frac{K_1}{K_2} M_2(z), \quad M_0(z) = M_1(z) - \frac{K_1}{K_2} M_2(z), \quad (18)$$

$$N(z) = N_1(z) + N_2(z), \quad R(z) = N_1(z) - N_2(z), \quad L(z) = L_1(z) + L_2(z),$$

$$Q(z) = L_1(z) - L_2(z).$$

Цю систему треба замкнути умовами рівноваги тіл

$$\int_{-a}^a p(x)dx = P, \int_{-a}^a q(x)dx = Q. \quad (19)$$

Швидкість проковзування поверхонь (1) з врахуванням розв'язків (8)–(16) можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{v(x)}{V} = & \xi_x - \frac{2(1-\nu)}{\pi\mu} \int_{-a}^a \frac{q(x')dx'}{x'-x} - \frac{f}{2\pi} \int_c^a [L(x'-x) - f\pi N(x'-x)] \times \\ & \times v(x')p(x')dx' - \frac{h}{2\pi} \int_c^a [Q(x'-x) - f\pi R(x'-x)] \times \\ & \times v(x')\Delta(x')dx', x \in (c, a). \end{aligned} \quad (20)$$

Як бачимо, система інтегральних рівнянь задачі (16) нелінійна через інтегральну залежність (20) швидкості проковзування $v(x)$, яка входить у цю систему, від шуканих нормальних, дотичних тисків і стрибка температури. Додатковим ускладненням є те, що функція дотичних напружень $q(x)$ невідома на всій ділянці контакту, водночас третє інтегральне рівняння системи (16) записане тільки в ділянці проковзування. Для того щоб обійти це ускладнення, шукані дотичні напруження подамо у такому вигляді

$$q(x) = fp(x) + \begin{cases} q_0(x), & -a < x < c, \\ 0, & c < x < a, \end{cases} \quad (21)$$

де введено нову невідому функцію $q_0(x)$, яку називатимемо коригуючими дотичними напруженнями в області проковзування. Треба звернути увагу, що зображення (21) автоматично виконує решту граничних умов задачі. З фізичної вимоги неперервності функції дотичного тиску на поверхні тіл випливають додаткові умови на коригуючі напруження

$$q_0(-a) = q_0(c) = 0. \quad (22)$$

Фізичними умовами на функцію нормального тиску є умови

$$p(\pm a) = 0, \quad (23)$$

які випливають з припущення про гладкість поверхонь тіл в ділянці контакту.

Підставляючи зображення (21) до інтегрального рівняння (16)₃, за певними перетвореннями отримаємо інтегральне рівняння на коригуючі напруження

$$\begin{aligned} & \frac{2(1-\nu)}{\pi\mu} \int_{-a}^c \frac{q_0(x')dx'}{x'-x} + \frac{f}{2\pi} \int_c^a [L(x'-x) - f\pi N(x'-x)] v(x')p(x')dx' + \\ & + \frac{h}{2\pi} \int_c^a [Q(x'-x) - f\pi R(x'-x)] v(x')\Delta(x')dx' = \xi_x + \frac{fx}{R}, -a < x < c. \end{aligned} \quad (24)$$

Умова рівноваги (19)₂ з врахуванням зображення (21) набуде вигляду

$$\int_{-a}^c q_0(x)dx = Q - fP, \quad (25)$$

а функцію відносної швидкості проковзування $v(x)$ обчислюємо з рівняння

$$\begin{aligned} \frac{v(x)}{V} = \xi_x + \frac{fx}{R} - \frac{2(1-\nu)}{\pi\mu} \int_{-a}^c \frac{q_0(x')dx'}{x'-x} - \\ - \frac{f}{2\pi} \int_c^a [L(x'-x) - f\pi N(x'-x)] v(x')p(x')dx' - \\ - \frac{h}{2\pi} \int_c^a [Q(x'-x) - f\pi R(x'-x)] v(x')\Delta(x')dx', c < x < a. \end{aligned} \quad (26)$$

Таким способом отримуємо замкнуту систему інтегральних рівнянь (16)₁, (16)₂, (24), (26), (19)₁, (25) стосовно невідомих функцій $p(x)$, $q_0(x)$, $v(x)$, яку треба замкнути фізичними умовами (22), (23).

Розв'язування інтегральних рівнянь і результати. З огляду на нелінійність отриманих інтегральних рівнянь, запропоновано ітераційну схему її розв'язування. На першому її кроці швидкість проковзування вважається відомою з відповідного розв'язку пружної задачі кочення [10]. Тоді можна отримати числовий розв'язок системи інтегральних рівнянь (16)₁, (16)₂, (24), (19)₁, (25). Для апроксимації інтегралів типу Коші варто використати відомі квадратурні формули Гауса-Чебишова [12]. Додаткова невідома – положення точки поміж зонами зчеплення і проковзування визначається ітераційно з фізичної умови (22). Після того, як таким способом визначено перші наближення шуканих функцій $p(x)$, $q_0(x)$, $\Delta(x)$, з інтегрального рівняння типу Фредгольма (26) визначається друге наближення функції швидкості проковзування, яке підставляється до системи інтегральних рівнянь (16)₁, (16)₂, (24), (19)₁, (25). Розв'язуючи її описаним способом, одержимо такі наближення шуканих функцій. Цю процедуру продовжуємо доти, доки різниця між розв'язками з двох послідовних наближень не буде перевищувати заданої. Проведені обчислення засвідчили добру збіжність запропонованої ітераційної схеми.

Отриману систему інтегральних рівнянь контактної задачі розв'язували у безрозмірних величинах, введених співвідношеннями

$$\begin{aligned}
 p^*(s) &= \frac{a}{P} p(x), \quad \Delta^*(s) = \frac{aK_1\mu}{2(1-\nu)fVP^2} \Delta(x), \quad q_0^*(s) = \frac{a}{P} q_0(x), \\
 v^*(s) &= \frac{a\mu}{2(1-\nu)PV} v(x), \quad c_0 = \frac{c}{a}, \quad \xi_x^* = \frac{a\mu\xi_x}{2(1-\nu)P}, \quad Pe = \frac{Va}{2k_1}, \\
 H &= \frac{2(1+\nu)\alpha_1 k_1 P}{aK_1}, \quad Q^* = \frac{Q}{fP}, \quad K = \frac{K_1}{K_2}, \quad k = \frac{k_1}{k_2}, \quad h^* = \frac{ah}{K_1}.
 \end{aligned} \quad (27)$$

Мета проведених обчислень – показати вплив безрозмірних параметрів задачі на рівень і характер генерованої внаслідок тертя теплоти. Найперше дослідимо розкладення температури поверхонь тіл у випадку ідеального теплового контакту в зоні проковзування. Цей випадок контакту отримуємо при безмежній провідності ділянки контакту, $h \rightarrow \infty$. З рис. 2 видно розподіл температур поверхонь контактуючих тіл в області контакту ($-1 < s < 1$) і поза нею ($s < -1$, $s > 1$) при $Q^* = 0,5$, $K = 0,2$, $k = 0,2$ і для кількох значень числа Пекле Pe . Хоча на ділянці проковзування поверхневі температури рівні, але поза нею вони суттєво різняться, з огляду на різницю термічних властивостей циліндрів. До вищої температури прогрівається тіло з вищою провідністю. Як і можна було очікувати, збільшення швидкості кочення зменшує рівень генерованої температури. Це можна пояснити зменшенням часу, протягом якого відбувається теплоутворення.

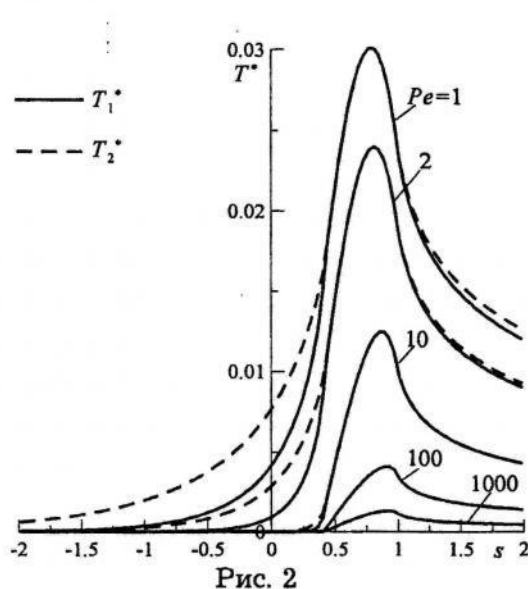


Рис. 2

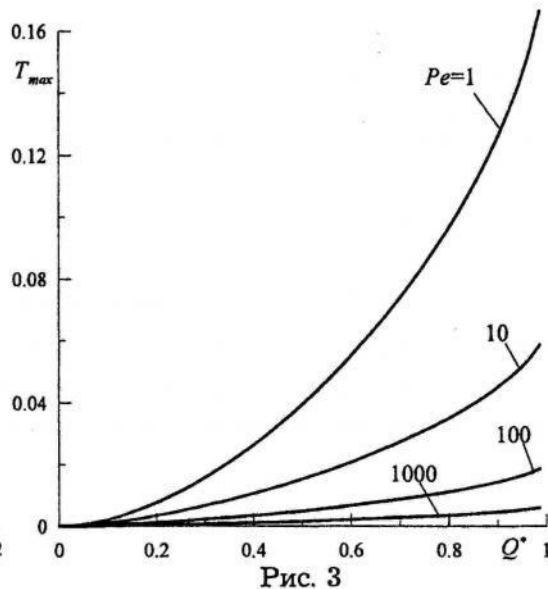


Рис. 3

На рис. 3 показано залежність максимальної безрозмірної температури тертя від дотичної сили для тих самих термічних властивостей циліндрів і для кількох значень числа Пекле. Видно, що збільшення дотичної сили різко збільшує рівень генерованої температури. Нагадаємо, що згідно з

теорією Картера [10] при $Q^*=0$ тіла котяться без проковзування, а при $Q^*=1$ ($Q=fP$) отримуємо пробуксовування, тобто рух ковзання.

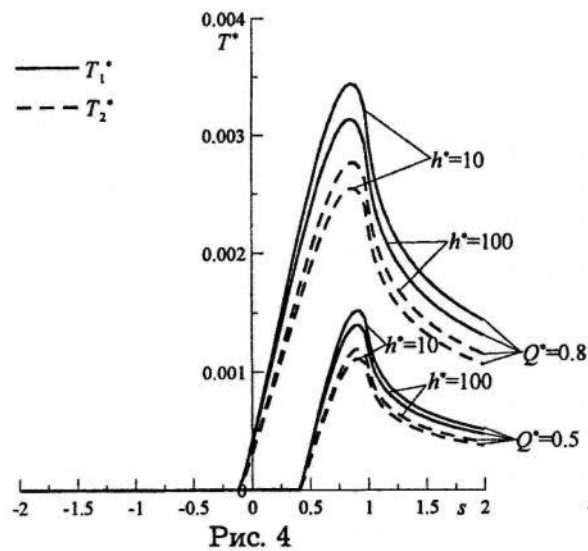


Рис. 4

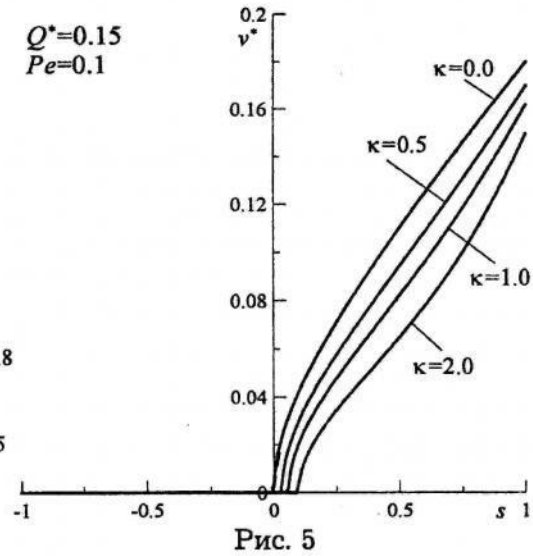


Рис. 5

У випадку неідеального теплового контакту стрибок поміж функціями поверхневих температур залежить від коефіцієнта провідності ділянки контакту h і показаний на рис. 4 для $Pe=1\,000$, $K=0,5$, $k=0,75$ і при двох значеннях дотичної сили.

Вкінці покажемо розвинення швидкості проковзування від коефіцієнта $k=fPeH$ для $Q^*=0,75$, рис. 5. Як видно, теплоутворення хоч і незначно, але зменшує швидкість проковзування при коченні.

1. Гриліцький Д.В., Євтушенко О.О. Контактні задачі термопружності з врахуванням теплоутворення // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1992. – Вип. 35. – С. 93–100.
2. Cameron A., Gordon A.N., Symm G.T. Contact temperature in rolling/sliding surfaces // Proceedings of the Royal Society of London, Series A. – 1965. – Vol. 286. – P. 46–61.
3. Tanvir M.A. Temperature rise due to slip between wheel and rail – an analytical solution for Hertzian contact // Wear. – 1980. – Vol. 61. – P. 295–308.
4. Knothe K., Liebelt S. Determination of temperature for sliding contact with applications for wheel-rail system // Wear. – 1995. – Vol. 189. – P. 91–99.

5. *Fischer F.D., Werner E., Yan W.Y.* Thermal stresses for frictional contact in wheel-rail system // *Wear.* – 1997. – Vol. 211. – P. 156–163.
6. *Gupta V., Hahn G.T., Bastias P.S., Rubin C.A.* Calculation of the frictional heating of a locomotive wheel attending rolling plus sliding // *Wear.* – 1996. – Vol. 191. – P. 237–241.
7. *Johnson K.L.* Contact mechanics. Cambridge. Cambridge University Press. – 1985.
8. *Pauk V.J., Zastrau B.W.* 2D Rolling contact problem involving frictional heating // *International Journal of Mechanical Sciences.* – 2002. – Vol. 44. – P. 2573–2584.
9. *Гриліцький Д.В., Баран В.П.* Про постановку контактних задач термопружності при неідеальному тепловому контакті тіл // *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* – 1987. – Вип. 27. – С. 10–13.
10. *Carter F.W.* On the action of a locomotive driving wheel // *Proceedings of the Royal Society of London, Series A.* – 1926. – Vol. 112. – P. 151–157.
11. *Barber J.R.* Thermoelastic displacements and stresses due to a heat source moving over the surface of a half-plane // *ASME Journal of Applied Mechanics.* – 1984. – Vol. 51. – P. 636–640.
12. *Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. – М., 1985.

ROLLING CONTACT PROBLEM INVOLVING HEAT GENERATION

Volodymyr Pauk

*Technical University of Kielce,
Avenue of 1 000-year the Polish state, 7, 25-314 Kielce, Poland*

New mathematical model describing frictional heating in the rolling contact is proposed. This model involves effects of the contact pressure on the slipping velocity as well as on the slip zone size. In addition, it takes into account the non-ideal thermal contact between the rolling bodies.

Key words: rolling, friction, slipping, heat generation.

Стаття надійшла до редколегії 03.06.2005
Прийнята до друку 22.11.2006

УДК 539.3

ДИНАМІКА ПРУЖНОГО ПІВПРОСТОРУ ПРИ НОРМАЛЬНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

Віталій ГАЛАЗІЮК, Андрій КРУПНИК

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна*

Запропоновано метод поліномів Лагерра для розв'язку динамічної задачі про дію поступового нормального навантаження на границі пружного півпростору, за допомогою якого знайдено поле напружень і переміщень точок півпростору.

Ключові слова: пружний півпростір, динамічна задача, поліноми Лагерра, напружено-деформований стан.

Традиційним методом розв'язування початково-крайових задач для рівняння в часткових похідних із незалежними від часу коефіцієнтами є зведення її за допомогою інтегрального перетворення Лапласа [3] за часом до крайової задачі в просторі зображень. Перехід від зображень до оригіналів у випадку складних крайових умов може бути виконаний тільки за допомогою числового обернення інтегрального перетворення Лапласа.

Відомий розв'язок класичної задачі Лемба, одержаний за допомогою схеми Cagniard-de Hoop [4], та інтегральне перетворення Лапласа дає змогу проаналізувати тільки вертикальні переміщення границі півпростору. При аналізі динамічних процесів по глибині півпростору або в плоско-паралельному шарі ця схема не може бути реалізована.

Ми пропонуємо метод поліномів Лагерра для розв'язання динамічної задачі про дію поступового нормального навантаження на границі пружного півпростору. Метод ґрунтується на застосуванні до початково-крайової задачі інтегрального перетворення Лагерра [1], [3] за часом і зведенні її до трикутної послідовності крайових задач, в результаті чого розв'язок вихідної задачі подаємо у вигляді ортогонального ряду за поліномами Лагерра. Метод дає змогу проводити обчислення та дослідження переміщень і напружень різних точок півпростору. Тому дослідження динамічних процесів у тілах тим методом є актуальним.

Розглянемо ізотропний пружний півпростір, віднесений до циліндричної системи координат $(R\alpha, \beta, R\gamma)$, де R – параметр, що має розмірність довжини. Вважатимемо, що під дією зовнішнього навантаження площини $\gamma = 0$ у півпросторі реалізується осесиметричний напружено-деформований стан. Запишемо для ненульових компонент вектора пружного переміщення $Ru_\alpha(\alpha, \gamma, \tau)$ і $Ru_\gamma(\alpha, \gamma, \tau)$ систему диференціальних рівнянь руху

пружного тіла стосовно функцій об'ємної деформації $\theta(\alpha, \gamma, \tau) = \text{div} \mathbf{u}$ і

$$\omega_\beta(\alpha, \gamma, \tau) = \frac{1}{2}(\text{rot} \mathbf{u})_\beta$$

$$\kappa^2 \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + 2 \frac{\partial \omega_\beta}{\partial \gamma} = \kappa^2 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \tau^2}, \quad (1)$$

$$\kappa^2 \frac{\partial \theta}{\partial \gamma} - \frac{2}{\alpha} \frac{\partial(\alpha \omega_\beta)}{\partial \alpha} = \kappa^2 \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial \tau^2}, \quad (2)$$

де в циліндричній системі координат в осесиметричному випадку

$$\theta = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha}(\alpha u_\alpha) + \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma}; \quad \omega_\beta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \gamma} - \frac{\partial u_\gamma}{\partial \alpha} \right), \quad (3)$$

і $\kappa^2 = \frac{c_1^2}{c_2^2} = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$; c_1, c_2 – швидкості поширення повздовжніх та поперечних

хвиль у матеріалі середовища відповідно; ν – коефіцієнт Пуассона; $\tau = \frac{c_1 t}{R}$ – безрозмірний час.

Подіємо оператором $\frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha$ на рівняння (1), оператором $\frac{\partial}{\partial \gamma}$ на рівняння (2), складемо трансформовані таким способом рівняння, використавши означення (3) функції $\theta(\alpha, \gamma, \tau)$, отримаємо, що

$$\nabla^2 \theta + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \gamma^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2}. \quad (4)$$

Тут $\nabla^2 = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right)$ – оператор Бельтрамі в осесиметричному випадку.

Отже, функція $\theta(\alpha, \gamma, \tau)$ є розв'язком початково-крайової задачі для хвильового рівняння (4). Введемо ключову функцію $\Phi(\alpha, \gamma, \tau)$ як $2\omega_\beta = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}$

і подіємо оператором $\frac{\partial}{\partial \gamma}$ на рівняння (1), а оператором $\frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha}$ на рівняння (2) і віднімемо трансформовані рівняння. Тоді, враховуючи означення (3) функції $\omega_\beta(\alpha, \gamma, \tau)$, отримаємо

$$\nabla^2 \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma^2} = \kappa^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2}, \quad (5)$$

тобто функція $\Phi(\alpha, \gamma, \tau)$ є розв'язком початково-крайової задачі для хвильового рівняння (5).

Введемо ключову функцію $P(\alpha, \gamma, \tau)$ як $u_\alpha(\alpha, \gamma, \tau) = \frac{\partial P}{\partial \alpha}$, тоді на підставі означення (3) функції $\theta(\alpha, \gamma, \tau)$ отримаємо таке диференціальне співвідношення:

$$\nabla^2 P = \theta - \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma}, \quad (6)$$

а на підставі означення (3) функції $\omega_\beta(\alpha, \gamma, \tau)$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial P}{\partial \gamma} - u_\gamma - \Phi \right) = 0, \quad (7)$$

звідки випливає, що

$$u_\gamma = \frac{\partial P}{\partial \gamma} - \Phi. \quad (8)$$

Якщо вираз (8) підставити у співвідношення (6), то для визначення функції $P(\alpha, \gamma, \tau)$ отримаємо рівняння Пуассона

$$\nabla^2 P + \frac{\partial^2 P}{\partial \gamma^2} = \theta + \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma},$$

яке після подвійного диференціювання за часом набуде вигляду

$$\left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} \right) \frac{\partial^2 P}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} \right). \quad (9)$$

Якщо в праву частину диференціального співвідношення (8) підставити рівняння (4) і (5), то отримаємо простий зв'язок між функцією $P(\alpha, \gamma, \tau)$ та ключовими функціями $\theta(\alpha, \gamma, \tau)$ і $\Phi(\alpha, \gamma, \tau)$

$$\left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} \right) \left[\frac{\partial^2 P}{\partial \tau^2} - \left(\theta + \kappa^{-2} \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \right) \right] = 0,$$

причому для виконання цієї рівності достатньо, щоб

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \tau^2} - \left(\theta + \kappa^{-2} \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \right) = 0. \quad (10)$$

Отже, якщо ключові функції $\theta(\alpha, \gamma, \tau)$ і $\Phi(\alpha, \gamma, \tau)$ визначені розв'язками відповідних початково-крайових задач, то безрозмірені компоненти вектора пружного переміщення $u_\gamma(\alpha, \gamma, \tau)$ і $u_\alpha(\alpha, \gamma, \tau)$, а також єдину відмінну від нуля компоненту вектора обертання $\Omega = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{u}$ знаходимо за формулою (8) та за формулами

$$u_\alpha(\alpha, \gamma, \tau) = \frac{\partial P}{\partial \alpha}, \quad \omega_\beta(\alpha, \gamma, \tau) = \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}. \quad (11)$$

Позаяк крайові умови динамічної задачі теорії пружності можуть формулюватися в напруженнях, то необхідно подати компоненти тензора напружень через ключові функції $\theta(\alpha, \gamma, \tau)$ і $\Phi(\alpha, \gamma, \tau)$. Оскільки відповідно до закону Гука

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \gamma, \tau) = \mu \left[(\kappa^2 - 2) \theta + 2 \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} \right], \quad \sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, \gamma, \tau) = \mu \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \gamma} + \frac{\partial u_\gamma}{\partial \alpha} \right), \quad (12)$$

де μ – стала Ламе, то, враховуючи співвідношення (8), матимемо рівність

$$\sigma_{\gamma\gamma} = \mu \left[(\kappa^2 - 2) \theta + 2 \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \gamma^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \right) \right],$$

яку двічі продиференціюємо за часом

$$\frac{\partial^2 \sigma_{\gamma\gamma}}{\partial \tau^2} = \mu \left[(\kappa^2 - 2) \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \gamma^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \right) \right]$$

і використаємо рівняння (4), (5) та (10)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_{\gamma\gamma}}{\partial \tau^2} = \mu \left[(\kappa^2 - 2) \left(\nabla^2 \theta + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \gamma^2} \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} \left(\theta + \kappa^{-2} \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \right) - \right. \\ \left. - 2\kappa^{-2} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\nabla^2 \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma^2} \right) \right] = \mu \left[(\kappa^2 - 2) \nabla^2 \theta + \kappa^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \gamma^2} + -2\kappa^{-2} \frac{\partial}{\partial \gamma} (\nabla^2 \Phi) \right]. \quad (13) \end{aligned}$$

Підставимо означення (11) функції $P(\alpha, \gamma, \tau)$ та рівність (8) у друге співвідношення (12), після чого матимемо

$$\sigma_{\alpha\gamma} = \mu \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(2 \frac{\partial P}{\partial \gamma} - \Phi \right). \quad (14)$$

Отже, формули (13) і (14) виражають компоненти тензора напружень через ключові функції $\theta(\alpha, \gamma, \tau)$, $\Phi(\alpha, \gamma, \tau)$ і $P(\alpha, \gamma, \tau)$.

Нехай на границі $\gamma = 0$ пружного півпростору в початковий момент часу починає діяти нормальне навантаження (рис. 1), тоді для визначення ключових функцій $\theta(\alpha, \gamma, \tau)$ і $\Phi(\alpha, \gamma, \tau)$, які є розв'язками хвильових рівнянь (4) і (5), можна сформулювати таку початково-крайову задачу:

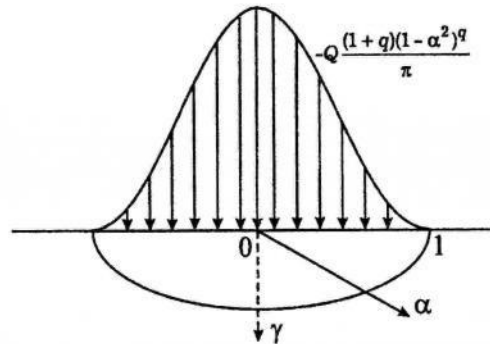


Рис. 1

$$u_{\alpha}(\alpha, \gamma, 0) = \frac{\partial u_{\alpha}(\alpha, \gamma, 0)}{\partial \tau} = 0, \quad u_{\gamma}(\alpha, \gamma, 0) = \frac{\partial u_{\gamma}(\alpha, \gamma, 0)}{\partial \tau} = 0, \quad (15)$$

$$\sigma_{\gamma}(\alpha, 0, \tau) = -Q \frac{(1+q)(1-\alpha^2)^q}{\pi} S_{+}(1-\alpha)(1-\exp(-a\tau))^2, \quad q > 1, a > 0,$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, 0, \tau) = 0, \quad (16)$$

$$\lim_{(\alpha, \gamma) \rightarrow \infty} u_{\alpha}(\alpha, \gamma, \tau) = 0, \quad \lim_{(\alpha, \gamma) \rightarrow \infty} u_{\gamma}(\alpha, \gamma, \tau) = 0, \quad (17)$$

де $S_{+}(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \geq 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases}$ – асиметрична функція Гевісайда.

Якщо інтеграл

$$f_n(\alpha, \gamma) = \int_0^{\infty} f(\alpha, \gamma, \tau) \exp(-\lambda\tau) L_n(\lambda\tau) d\tau \quad (18)$$

є інтегральним перетворенням Лагерра [1, 3] функції $f(\alpha, \gamma, \tau)$ з додатним параметром λ , то формулою його обернення слугує ортогональний ряд

$$f(\alpha, \gamma, \tau) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\alpha, \gamma) L_n(\lambda\tau), \quad (-)$$

де $L_n(\lambda\tau)$ – поліноми Лагерра, які утворюють повну й ортогональну систему функцій на проміжку $[0, \infty)$. Якщо ввести

$$\bar{\theta}_n(\xi, \gamma) = \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha \theta(\alpha, \gamma, \tau) J_0(\xi \alpha) d\alpha \exp(-\lambda \tau) L_n(\lambda \tau) d\tau, \quad (20)$$

$$\bar{\Phi}_n(\xi, \gamma) = \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha \Phi(\alpha, \gamma, \tau) J_0(\xi \alpha) d\alpha \exp(-\lambda \tau) L_n(\lambda \tau) d\tau \quad (21)$$

зображення шуканих ключових функцій $\theta(\alpha, \gamma, \tau)$ і $\Phi(\alpha, \gamma, \tau)$ за Ганкелем і Лагерром, де $J_0(\xi \alpha)$ – функція Бесселя першого роду нульового порядку, то для визначення функцій $\bar{\theta}_n(\xi, \gamma)$ і $\bar{\Phi}_n(\xi, \gamma)$ на підставі рівнянь (4) і (5) можна записати такі послідовності [1] звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{d^2 \bar{\theta}_n}{d\gamma^2} - \xi^2 \bar{\theta}_n = \lambda^2 \sum_{m=0}^n (n-m+1) \bar{\theta}_m, \quad (22)$$

$$\frac{d^2 \bar{\Phi}_n}{d\gamma^2} - \xi^2 \bar{\Phi}_n = \kappa^2 \lambda^2 \sum_{m=0}^n (n-m+1) \bar{\Phi}_m, \quad (23)$$

загальними розв'язками яких є алгебричні згортки [1]

$$\bar{\theta}_n(\xi, \gamma) = \sum_{j=0}^n [A_{n-j}(\xi) G_j(1, \xi, \gamma) + B_{n-j}(\xi) W_j(1, \xi, \gamma)], \quad (24)$$

$$\bar{\Phi}_n(\xi, \gamma) = \sum_{j=0}^n [C_{n-j}(\xi) G_j(\kappa, \xi, \gamma) + D_{n-j}(\xi) W_j(\kappa, \xi, \gamma)], \quad (25)$$

де функції $G_j(1, \xi, \gamma)$, $W_j(1, \xi, \gamma)$ і $G_j(\kappa, \xi, \gamma)$, $W_j(\kappa, \xi, \gamma)$ – фундаментальні системи розв'язків відповідно до рівнянь (22) і (23), для яких відомі [2] такі подання:

$$G_j(x, \xi, \gamma) = \sum_{k=0}^j a_{j,k}(x, \xi) \left(\sqrt{\xi^2 + \lambda^2 x^2} \gamma \right)^k \exp\left(-\sqrt{\xi^2 + \lambda^2 x^2} \gamma\right), \quad (26)$$

$$W_j(x, \xi, \gamma) = \sum_{k=0}^j a_{j,k}(x, \xi) \left(\sqrt{\xi^2 + \lambda^2 x^2} \gamma \right)^k \exp\left(+\sqrt{\xi^2 + \lambda^2 x^2} \gamma\right), \quad (27)$$

$x \in \{1, \kappa\}$, $a_{j,k}(x, \xi)$ – коефіцієнти, які обчислюють за рекурентною формулою

$$a_{j,k+1} = \frac{k+2}{2} a_{j,k+2} - \frac{\lambda^2 x^2}{2(\xi^2 + \lambda^2 x^2)(k+1)} \sum_{l=k}^{j-1} (j-l+1) a_{l,k}, \quad (j = \overline{1, n}, k = \overline{0, j-1}) \quad (28)$$

причому $a_{p,0}$ – довільні і визначаються умовами нормування функцій $G_j(x, \xi, \gamma)$ і $W_j(x, \xi, \gamma)$.

Відповідно до умов на безмежності (17) у поданнях (24) та (25) всі константи $B_{n-j}(\xi) = 0$ і $D_{n-j}(\xi) = 0$, а для визначення констант $A_{n-j}(\xi)$ і $C_{n-j}(\xi)$ запишемо співвідношення (10), (13), (14) і крайові умови (16) в просторі зображень

$$\bar{P}_n = \lambda^{-2} (\bar{f}_n - 2\bar{f}_{n-1} + \bar{f}_{n-2}), \quad \bar{f}_n = \bar{\theta}_n + \kappa^{-2} \frac{d\bar{\Phi}_n}{d\gamma}, \quad (29)$$

$$\frac{\lambda^2}{\mu} \sum_{m=0}^n (n-m+1) \bar{\sigma}_{\gamma, m} = \kappa^2 \frac{d^2 \bar{\theta}_n}{d\gamma^2} - (\kappa^2 - 2) \xi^2 \bar{\theta}_n + 2\kappa^{-2} \xi^2 \frac{d\bar{\Phi}_n}{d\gamma}, \quad (30)$$

$$\sigma_{\alpha\gamma, n} = \mu \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(2 \frac{\partial P_n}{\partial \gamma} - \Phi_n \right), \quad (31)$$

$$\bar{\sigma}_{\gamma, n} = - \frac{2^q Q\Gamma(q+2) J_{q+1}(\xi)}{\pi \xi^{q+1}} \left[\frac{1}{\lambda} \delta_{n,0} - \frac{2a^n}{(\lambda+a)^{n+1}} + \frac{(2a)^n}{(\lambda+2a)^{n+1}} \right], \quad \text{при } \gamma = 0, \\ \bar{\sigma}_{\alpha\gamma, n} = 0, \quad \text{при } \gamma = 0, \quad (32)$$

де $\delta_{n,0}$ – функція Кронекера, зокрема з формули (31) й умови (32) випливає, що

$$\bar{\Phi}_n = 2 \frac{d\bar{P}_n}{d\gamma} \quad \text{при } \gamma = 0, \quad (33)$$

а, отже,

$$\bar{\Phi}_n = \frac{2}{\lambda^2} \frac{d}{d\gamma} (\bar{f}_n - 2\bar{f}_{n-1} + \bar{f}_{n-2}), \quad \bar{f}_n = \bar{\theta}_n + \kappa^{-2} \frac{d\bar{\Phi}_n}{d\gamma} \quad \text{при } \gamma = 0. \quad (34)$$

Підставимо у співвідношення (30) і (34) подання зображень ключових функцій $\bar{\theta}_n(\xi, \gamma)$ і $\bar{\Phi}_n(\xi, \gamma)$ (24) і (25) при $\gamma = 0$, після чого отримаємо систему рівнянь стосовно невідомих констант $A_n(\xi)$ і $C_n(\xi)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{cases} -(2\xi^2 + \kappa^2 \lambda^2) A_n + 2\kappa^{-2} \xi^2 \sqrt{\xi^2 + \kappa^2 \lambda^2} C_n = F_n^{(1)}, \\ 2\sqrt{\xi^2 + \lambda^2} A_n - \kappa^{-2} (2\xi^2 + \kappa^2 \lambda^2) C_n = F_n^{(2)}, \end{cases} \quad (35)$$

де

$$\begin{aligned} F_n^{(1)}(\xi) &= -\frac{\lambda^2}{\mu} \sum_{m=0}^n (n-m+1) \bar{\sigma}_{n,m} + \\ &+ \kappa^2 \sum_{j=1}^n A_{n-j} G_j'(1, \xi, 0) + 2\kappa^{-2} \xi^2 \sum_{j=1}^n C_{n-j} G_j'(\kappa, \xi, 0), \\ F_n^{(2)}(\xi) &= 2\psi_n(\xi) - 4\varphi_{n-1}(\xi) + 2\varphi_{n-2}(\xi), \\ \psi_n(\xi) &= \sum_{j=1}^n [A_{n-j} G_j'(1, \xi, 0) + \kappa^{-2} C_{n-j} G_j'(\kappa, \xi, 0)], \\ \varphi_n(\xi) &= \sum_{j=0}^n [A_{n-j} G_j'(1, \xi, 0) + \kappa^{-2} C_{n-j} G_j'(\kappa, \xi, 0)], \\ G_j'(x, \xi, 0) &\equiv \frac{dG_j(x, \xi, \gamma)}{d\gamma} \Big|_{\gamma=0}; \quad G_j''(x, \xi, 0) \equiv \frac{d^2 G_j(x, \xi, \gamma)}{d\gamma^2} \Big|_{\gamma=0}, \quad x \in \{1, \kappa\}. \end{aligned}$$

Будемо вимагати, щоб функції $G_j(x, \xi, \gamma)$ при $\gamma = 0$ задовольняли такі умови: $G_0(x, \xi, 0) = 1$, $G_j(x, \xi, 0) = 0$ при $j = 1, 2, 3, \dots$, тоді, враховуючи співвідношення (26), довільні коефіцієнти $a_{p,0}(x, \xi) = \delta_{p,0}$ і

$$\begin{aligned} G_j'(x, \xi, 0) &= \sqrt{\xi^2 + \lambda^2 x^2} (a_{j,1}(x, \xi) - a_{j,0}(x, \xi)), \\ G_0''(x, \xi, 0) &= \xi^2 + \lambda^2 x^2, \quad G_j''(x, \xi, 0) = \lambda^2 x^2 (j+1), \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Розв'язавши систему рівнянь (35), отримаємо формули для визначення констант $A_n(\xi)$ і $C_n(\xi)$

$$A_n = \frac{(2\xi^2 + \kappa^2 \lambda^2) F_n^{(1)} + 2\xi^2 \sqrt{\xi^2 + \kappa^2 \lambda^2} F_n^{(2)}}{D(\xi)}, \quad (36)$$

$$C_n = \frac{2\kappa^2 \sqrt{\xi^2 + \lambda^2} F_n^{(1)} + \kappa^2 (2\xi^2 + \kappa^2 \lambda^2) F_n^{(2)}}{D(\xi)}, \quad (37)$$

де

$$D(\xi) = 4\xi^2 \sqrt{\xi^2 + \kappa^2 \lambda^2} \sqrt{\xi^2 + \lambda^2} - (2\xi^2 + \kappa^2 \lambda^2)^2, \quad (38)$$

які дають змогу однозначно знайти зображення ключових функцій $\bar{\theta}_n(\xi, \gamma)$ і $\bar{\Phi}_n(\xi, \gamma)$, а отже, записати компоненти вектора пружного переміщення $u_\alpha(\alpha, \gamma, \tau)$, і $u_\gamma(\alpha, \gamma, \tau)$, а також $\omega_\beta(\alpha, \gamma, \tau)$.

На підставі формул обернення інтегрального перетворення Лагерра (19) і Ганкеля, співвідношення (11), остаточно визначимо поле переміщень у півпросторі та вираз єдиної ненульової компоненти вектора обертання $\Omega(\alpha, \gamma, \tau)$

$$u_\alpha(\alpha, \gamma, \tau) = -\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^\infty \xi^2 \bar{P}_n(\xi, \gamma) J_1(\xi \alpha) d\xi \right] L_n(\lambda \tau), \quad (39)$$

$$u_\gamma(\alpha, \gamma, \tau) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^\infty \xi \left[\frac{d\bar{P}_n(\xi, \gamma)}{d\gamma} - \bar{\Phi}_n(\xi, \gamma) \right] J_0(\xi \alpha) d\xi \right] L_n(\lambda \tau), \quad (40)$$

$$\omega_\beta(\alpha, \gamma, \tau) = -\frac{\lambda}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^\infty \xi \bar{\Phi}_n(\xi, \gamma) J_1(\xi \alpha) d\xi \right] L_n(\lambda \tau). \quad (41)$$

Визначимо вирази напружень $\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \gamma, \tau)$, $\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, \gamma, \tau)$. Із закону Гука (12) та співвідношень (6), (39), (40) маємо

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \gamma, \tau)}{\mu} &= \kappa^2 \theta(\alpha, \gamma, \tau) - 2\nabla^2 P(\alpha, \gamma, \tau) = \\ &= \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^\infty \xi \left(\kappa^2 \bar{\theta}_n(\xi, \gamma) + 2\xi^2 \bar{P}_n(\xi, \gamma) \right) J_0(\xi \alpha) d\xi \right] L_n(\lambda \tau), \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, \gamma, \tau)}{\mu} &= \frac{\partial u_\alpha}{\partial \gamma} + \frac{\partial u_\gamma}{\partial \alpha} = \\ &= \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^\infty \xi \left(\xi \bar{\Phi}_n(\xi, \gamma) - (1 + \xi) \frac{d\bar{P}_n(\xi, \gamma)}{d\gamma} \right) J_1(\xi \alpha) d\xi \right] L_n(\lambda \tau). \end{aligned} \quad (43)$$

Функції $\bar{\theta}_n(\alpha, \gamma)$, $\bar{\Phi}_n(\alpha, \gamma)$ і $\bar{P}_n(\alpha, \gamma)$ визначають з формул (24), (25) і (29).

Для аналітичного аналізу результатів при $\tau \rightarrow 0$ і $\tau \rightarrow \infty$ застосуємо граничні співвідношення інтегрального перетворення Лапласа [3], яке отримуємо з перетворення Лагерра при $n = 0$

$$u_\gamma(\alpha, \gamma, 0) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda u_{\gamma,0}(\alpha, \gamma) = 0, \quad (44)$$

$$u_\gamma(\alpha, \gamma, \infty) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda u_{\gamma,0}(\alpha, \gamma) = \frac{2^{q-1} Q \Gamma(q+2)}{\pi \mu (\kappa^2 - 1)} \int_0^\infty \frac{(\kappa^2 + \gamma \xi \kappa^2 - \gamma \xi) J_{q+1}(\xi) J_0(\xi \alpha) \exp(-\xi \gamma) d\xi}{\xi^{1+q}}, \quad (45)$$

$$\sigma_\gamma(\alpha, \gamma, 0) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \sigma_{\gamma,0}(\alpha, \gamma) = 0, \quad (46)$$

$$\sigma_\gamma(\alpha, \gamma, \infty) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \sigma_{\gamma,0}(\alpha, \gamma) = -\frac{2^q Q \Gamma(q+2)}{\pi} \int_0^\infty \frac{(1 + \xi \gamma) J_{q+1}(\xi) J_0(\xi \alpha) \exp(-\xi \gamma) d\xi}{\xi^q}, \quad (47)$$

$$\sigma_{a\gamma}(\alpha, \gamma, 0) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \sigma_{a\gamma,0}(\alpha, \gamma) = 0, \quad (48)$$

$$\sigma_{a\gamma}(\alpha, \gamma, \infty) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \sigma_{a\gamma,0}(\alpha, \gamma) = -\frac{2^q Q \Gamma(q+2)}{\pi} \gamma \int_0^\infty \frac{J_{q+1}(\xi) J_0(\xi \alpha) \exp(-\xi \gamma) d\xi}{\xi^{1-q}}. \quad (49)$$

Співвідношення (45), (47), (49) повністю збігаються з розв'язками відповідної статичної задачі, що підтверджує істинність формул (40)–(43). Табулюючи функції $\sigma_{\gamma, \text{стат}}(\alpha, \gamma) \equiv \sigma_\gamma(\alpha, \gamma, \infty)$, $\sigma_{a\gamma, \text{стат}}(\alpha, \gamma) \equiv \sigma_{a\gamma}(\alpha, \gamma, \infty)$ залежно від $\gamma \in [0; 10]$ при значенні параметра $q=2$ і фіксованих α , отримуємо, що абсолютні величини $\sigma_{\gamma, \text{стат}}(\alpha, \gamma)$ при $\alpha > 0,7$ є зростаючими

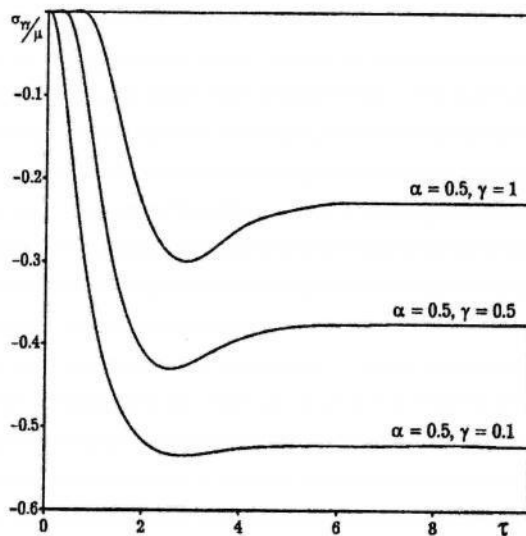


Рис. 2

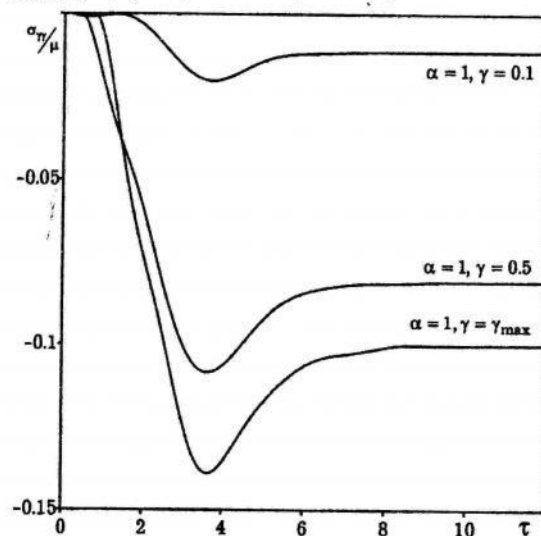


Рис. 3

функціями до деякого $\gamma_{\max}$ (див. табл.), після чого спадають до 0. Абсолютні величини $\sigma_{\alpha\gamma, \text{стат}}(\alpha, \gamma)$ поведуть себе аналогічно за будь-яких $\alpha > 0$.

	$\sigma_{\eta, \text{стат}}(\alpha, \gamma)$	$\sigma_{\alpha\gamma, \text{стат}}(\alpha, \gamma)$
$\alpha = 0,5$	$\gamma_{\max} = 0$	$\gamma_{\max} = 0,32$
$\alpha = 1$	$\gamma_{\max} = 0,91$	$\gamma_{\max} = 0,58$
$\alpha = 2$	$\gamma_{\max} = 2,31$	$\gamma_{\max} = 1,52$

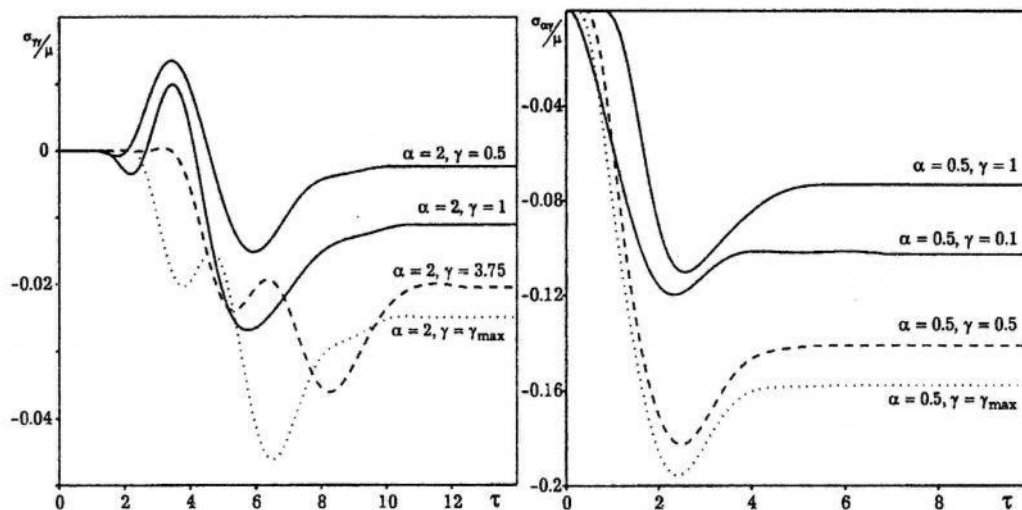


Рис. 4.

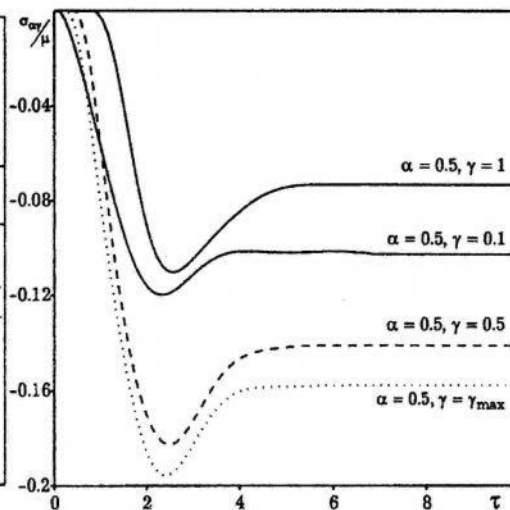


Рис. 5.

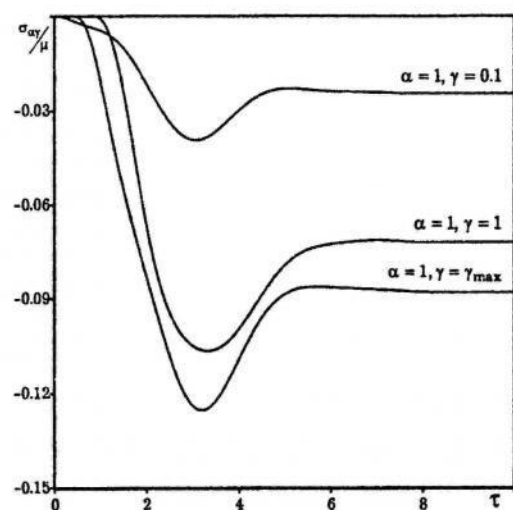


Рис. 6.

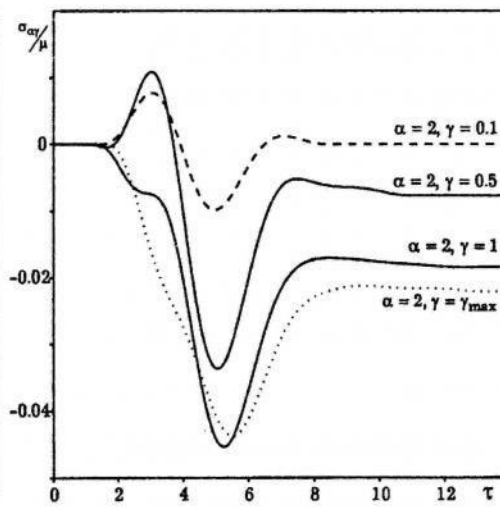


Рис. 7.

Числовий аналіз запропонованої задачі виконали при $\nu = 0,25$ для значень параметрів $q = 2$, $a = 2$ і $Q/\mu = 1$. При фіксованих значеннях α будемо збільшувати γ , рухаючись у глибину півпростору.

Із рис. 2–7 випливає, що при великих часах як і нормальні $\sigma_{\gamma}(\alpha, \gamma, \tau)$, так і дотичні $\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, \gamma, \tau)$ напруження виходять на положення статичної рівноваги, які збігаються з відповідними розв'язками аналогічної статичної задачі. Як видно з рис. 2–7, практично у всіх випадках у деякий момент часу напруження досягають максимального значення, яке значно перевищує значення статичної рівноваги. Це підтверджує важливість отриманої картини динамічних процесів і недостатність аналізу розв'язків відповідної статичної задачі. При $\alpha = 2$ (рис. 4, 7) напруження в точках, близьких до поверхні півпростору, змінюють знак, тобто поза ділянкою навантаження існує відрізок часу, коли матеріал працює на розтяг, а це означає, що в приповерхневому шарі матеріалу виникають розтягуючі напруження, які можуть призвести до викривлення.

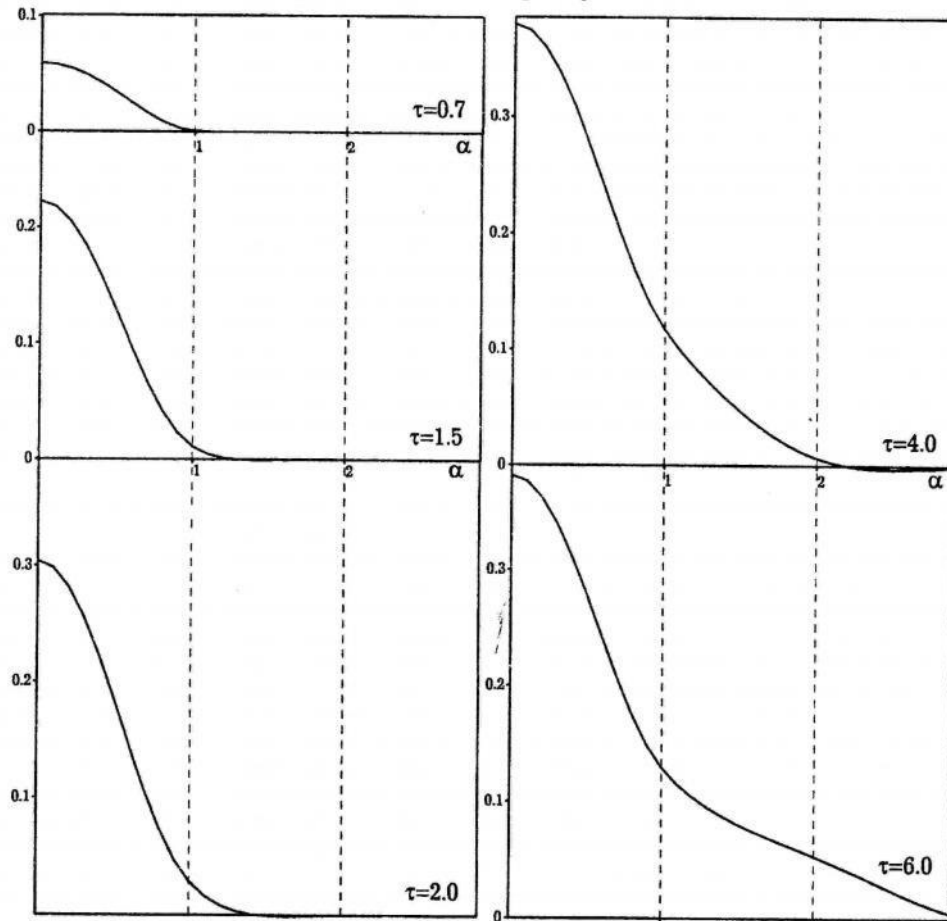


Рис. 8

На рис. 8 зображені вертикальні переміщення на поверхні півпростору $u_z(\alpha, 0, \tau)$ залежно від α при фіксованих значеннях τ . З часом вертикальні переміщення зростають, досягаючи максимуму, який збігається з положенням статичної рівноваги.

Зауважимо, що при великих q , зокрема при $q \geq 25$ як частковий випадок отримуємо задачу, наближену до задачі про локальне навантаження межі півпростору (задача Лемба) [4].

1. Галазюк В.А. Метод полиномов Чебышева-Лагерра в смешанной задаче для линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. – № 1. – С. 3–7.
2. Галазюк В.А., Горечко А.Н. Об одном методе решения динамических задач теории упругости в сферических и цилиндрических координатах // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1980. – № 6. – С. 41–44.
3. Онищук В.Я. Інтегральні перетворення в задачах механіки твердого деформівного тіла. – Львів, 1998.
4. Achenbach J.D. Wave propagation in elastic solids. – Amsterdam: North-Holland, 1973.

NONSTATIONARY VIBRATIONS OF ELASTIC HALF-SPACE DUE TO NORMAL LOADINGS

Vitaliy Halazyuk, Andriy Krupnik

*Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine*

The method of Laguerre polynomials for the solution of a dynamic problem on operating a normal loading on border of an elastic half-space is offered, with the help which one the pressure stresses and displacements of half-space points are retrieved.

Key words: elastic halfspace, dynamic task, polynomials of Laguerre, tensely-deformed state.

Стаття надійшла до редколегії 05.07.2005
Прийнята до друку 22.11.2006

УДК 539.3

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ТЕРМОМЕХАНІКИ, ЯКІ ОПИСУЮТЬ МЕХАНІЧНУ ПОВЕДІНКУ ТІЛ ЗА ОХОЛОДЖЕННЯ В ПРОЦЕСІ ВИСОКОТЕМПЕРАТУРНОГО ВІДПАЛЮВАННЯ

Олександр ГАЧКЕВИЧ¹, Віра МИХАЙЛИШИН²

¹Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 36, 79053 Львів, Україна

²Політехніка Опольська,
вул. Станіслава Миколайчука, 5, 45-271 Ополь, Польща

Сформульовано задачі термомеханіки для тіл при високотемпературному відпалюванні на стадії охолодження. Запропоновано наближену методику розв'язування задачі про температурні напруження на основі методу скінченних елементів для апроксимованої по кроках ітераційно уточнюваної лінеаризованої задачі. Вивчено вплив зміцнюваності матеріалу в рамках модельних наближень ідеального, ізотропно зміцнюваного та матеріалу з ізотропно-кінематичним зміцненням на поточні та залишкові напруження в пластинці при охолодженні.

Ключові слова: термомеханіка, високотемпературне відпалювання, залишкові напруження.

Температурна обробка відпалюванням є одним із способів зняття чи пониження залишкових напружень у виробках. Вона полягає в нагріванні виробу від початкової температури до підвищеної при забезпеченні в кінці етапу нагрівання відомого її розподілу в зоні наявності залишкових напружень, витримці заданий час при цьому розподілі температури і подальшому охолодженні до природного стану [9]. В кінці етапу витримки (за температури витримки $T_{\text{втр}} \equiv T^{(0)}$) досягається найнижчий рівень

напружень (розподіл яких позначимо $\{\hat{\sigma}_{\text{втр}}\} \equiv \{\hat{\sigma}^{(0)}\}$). Розподіли температури $T^{(0)}$ і напружень $\{\hat{\sigma}^{(0)}\}$ є початковими при наступному процесі охолодження.

Залежно від умов теплообміну тіла з зовнішнім середовищем при охолодженні може відбутись пластичне деформування матеріалу, яке може привести до збільшення напружень $\{\hat{\sigma}^{(0)}\}$. Тому для прогнозування термомеханічної поведінки виробів на стадії охолодження потрібна ефективна методика дослідження фізико-механічних процесів при охолодженні тіл з врахуванням початкових локальних розподілів температури (за наявності підвищених температур) і напружень, а також можливості пружно-пластичного деформування.

При побудові згаданої методики тіло вважаємо ізотропним з границею Γ_0 (що обмежує ділянку Ω_0 вихідної конфігурації тіла в декартовій системі

координат (x_1, x_2, x_3)). Процес деформування приймаємо квазістатичним. Тоді відповідну математичну модель наявних фізико-механічних процесів формулюємо за два етапи.

На першому етапі задача теплопровідності для термочутливих тіл описує тепловий режим охолодження від підвищеної температури $T^{(0)}$ до температури середовища T_C при конвективному теплообміні з зовнішнім середовищем (за коефіцієнта тепловіддачі β). Вона охоплює відоме рівняння теплопровідності для температури $T(x, t)$ за відповідних початкової та граничних умов [4] (t – час).

На другому етапі формулюємо задачу для тіла з початковими напруженнями $\{\hat{\sigma}^{(0)}\}$ про визначення температурних напружень $\{\hat{\sigma}\}$, зумовлених нестационарним температурним полем $T(x, t)$, можливими механічними навантаженнями $\{P_n\}$ на частині поверхні $\Gamma_{0\sigma} \subset \Gamma_0$, масовими силами $\{X\}$, а також заданими переміщеннями $\{u^*\}$ на частині $\Gamma_{0u} \subset \Gamma_0$ ($\Gamma_{0\sigma} \cup \Gamma_{0u} = \Gamma_0$, $\Gamma_{0\sigma} \cap \Gamma_{0u} = \emptyset$). В тілі можуть виникати великі переміщення, пластичне течіння матеріалу при його зміцненні за рахунок підвищення межі текучості σ_T . Приймаємо, що матеріал тіла не зазнає фазових перетворень за підвищених температур охолодження після витримки. Задача другого етапу охоплює рівняння рівноваги, геометричні лінійні співвідношення [5] і рівняння стану [8] теорії пластичного неізотермічного течіння з ізотропно-кінематичним зміцненням при відповідних граничних умовах. Це рівняння стану

$$\begin{aligned} \{d\sigma\} &= [D^{ep}]^{t+dt} (\{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon^T\}) + \\ &+ [dD^{ep}] (\{\varepsilon\}^t - \{\varepsilon^p\}^t - \{\varepsilon^T\}^t) + \{Q\}^{t+dt} dT \end{aligned} \quad (1)$$

описує поведінку анізотропно зміцнюваних термочутливих матеріалів. Тут

$$\begin{aligned} [D^{ep}]^{t+dt} &= [D]^{t+dt} - (l^t)^2 (M^t)^{-1} [D]^{t+dt} \{\bar{s}\}^t \{\bar{s}\}^{t'} [D]^{t+dt}, \\ [dD^{ep}]^{t+dt} &= [dD]^{t+dt} - (l^t)^2 (M^t)^{-1} [D]^{t+dt} \{\bar{s}\}^t \{\bar{s}\}^{t'} [dD]^{t+dt}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\{Q\}^{t+dt} = l^t (M^t)^{-1} [D]^{t+dt} \{\bar{s}\}^t \frac{\partial \tilde{\sigma}_i^t}{\partial T},$$

де $[D]^{t+dt}$ і $[dD]$ – відповідно матриця ізотермічних пружних модулів та її приріст у зв'язку зі зміною температури; $\tilde{\sigma}_i$ – інтенсивність напружень Коші; $\{\bar{s}\}^t$ – вектор у просторі напружень, приведених до центру поверхні

текучості $\{\gamma\}^t$ девіаторних компонент вектора напружень $\{\sigma\}^t = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}\}^{t'}$ (символ “'” означає операцію транспонування)

$$\{\bar{s}\}^t = \{\bar{\sigma}\}^t - \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}^{t'} \bar{\sigma}_0^t,$$

$$\{\bar{\sigma}\}^t = \{\sigma\}^t - \{\gamma\}^t,$$

$$\bar{\sigma}_0^t = \frac{1}{3} \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}^t (\{\sigma\}^t - \{\gamma\}^t).$$

У формулах (2) введено позначення $l^t = \frac{3}{2} \frac{\bar{\sigma}_0^t}{\bar{\sigma}_0^t}$ ($\bar{\sigma}_0^t$ – інтенсивність приведених до $\{\gamma\}^t$ напружень), $M^t = H^t + 3 G^{t+dt}$ (H^t – поточне значення тангенса кута нахилу ізотермічної кривої “інтенсивність напружень – інтенсивність деформацій”, G^{t+dt} – модуль пружності при зсуві). В зв'язку з Лагранжевим підходом до формулювання задачі компонентами векторів повної $\{\varepsilon\}^t = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{23}\}^{t'}$, пластичної $\{\varepsilon^p\}$ і температурної $\{\varepsilon^T\}$ деформацій є компоненти відповідних тензорів деформацій Гріна; компонентами вектора напружень $\{\sigma\}^t$ є компоненти тензора напружень Піоли-Кірхгофа другого роду. Верхні індекси t і $t + dt$ відповідають значенням величин для моментів деформування t і $t + dt$ відповідно.

З використанням модифікованої на випадок ізотропно-кінематичного зміцнення умови текучості Мізеса [8] запропоновано еквівалентний їй аналог

$$\sqrt{\frac{3}{2} \{\bar{s}\}^{t'} \{\bar{s}\}^t} = \sigma_T + \beta^* b (\varepsilon_i^{pt})^m \quad (0 \leq \beta^* \leq 1). \quad (3)$$

При $\beta^* = 0$ розміром поверхні текучості є σ_T і при $\{\gamma\}^t = 0$ для всіх $t \geq 0$ умова (3) описує ідеальні, а для $\{\gamma\}^t \neq 0$ ($t > 0$) – кінематично зміцнювані матеріали. При $0 < \beta^* \leq 1$ – ізотропно-кінематичне зміцнення при $\{\gamma\}^t \neq 0$ для $t > 0$, ізотропне зміцнення – при $\{\gamma\}^t = 0$ для всіх $t \geq 0$. За допомогою параметрів матеріалу β^* , b , m можна досягнути доброї узгодженості експериментальної й описуваної формулою (3) кривої деформування “інтенсивність напружень – інтенсивність деформацій”. Зміцнення центру поверхні опишемо правилом Ціглера [12]

$$\{d\gamma\} = d\mu (\{\sigma\}^t - \{\gamma\}^t)$$

з множником [3]

$$d\mu = \frac{3\{\bar{s}\}^t \{d\sigma\} - 2\bar{\sigma}_i^t \beta^* b m (\varepsilon_i^{pt})^{m-1} d\varepsilon_i^p}{3\{\bar{s}\}^t (\{\sigma\}^t - \{\gamma\}^t)}.$$

Запропонуємо наближену методику розв'язування цих задач. Вона опирається на еквівалентні варіаційні формулювання із застосуванням методу скінченних елементів (МСЕ) [6]. Ця методика для розв'язування задачі I етапу (задачі теплопровідності) описана в [1]. Для задачі II етапу вихідним (еквівалентним до сформульованої задачі про температурні напруження) є принцип віртуальної роботи [7]

$$\iiint_{\Omega_0} \{\delta\varepsilon\}' \{\sigma\} d\Omega - \iint_{\Gamma_{\sigma\sigma}} \{\delta u\}' \{P_n\} d\Gamma - \iiint_{\Omega_0} \{\delta u\}' \{X\} d\Omega = 0, \quad (4)$$

визначений на множині кінематично допустимих переміщень із простору Соболева $W_2^1(\Omega_0)$ і отриманий з варіаційного рівняння [2] в припущенні самозрівноваженості початкових перед охолодженням напружень $\{\sigma^{(0)}\}$.

Покрокова апроксимація. В зв'язку з неінтегрованістю фізичного рівняння (1) вихідна математична задача з визначення напружень зведена до послідовності апроксимованих за відомим методом "кроків" для проміжку деформування $[t_N, t_{N+1}]$ ($N = 0, 1, 2, \dots, N^* - 1$). Математичний вираз принципу віртуальної роботи (4) (масовими силами $\{X\}$ нехтуємо) для дискретного кроку $(\Delta t)_N$ при його адаптації до розглядуваної фізичної моделі анізотропно зміцнюваних термочутливих матеріалів з рівнянням стану (1) набуває вигляду [3]

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega_0} \{\delta\Delta u\}'_N [B]' [D^{ep}]_{N+1} [B] \{\Delta u\}_N d\Omega = \\ & = \iint_{\Gamma_{\sigma\sigma}} \{\delta\Delta u\}'_N \{\Delta P_n\}_N d\Gamma + \iiint_{\Omega_0} \{\delta\Delta u\}'_N [B]' [D^{ep}]_{N+1} \{\Delta\varepsilon^T\}_N d\Omega - \\ & - \iiint_{\Omega_0} \{\delta\Delta u\}'_N [B]' [\Delta D^{ep}]_N (\{\varepsilon\}_N - \{\varepsilon^p\}_N - \{\varepsilon^T\}_N) d\Omega - \\ & - \iiint_{\Omega_0} \{\delta\Delta u\}'_N [B]' \{Q\}_{N+1} (\Delta T)_N d\Omega + \varphi_{N+1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Індексом N позначено прирости величин протягом кроку навантаження $[t_N, t_{N+1}]$ або значення величин у момент часу t_N , $[B]$ – матриця диференціальних операторів геометричних співвідношень. Отримана

послідовність покроково апроксимованих задач (5) ($N = 0, 1, 2, \dots, N^* - 1$), також нелінійних на підставі нелінійності рівняння стану (1).

Лінеаризація. Відповідно до формалізму методу змінних параметрів пружності (МЗПП) [11] для лінеаризованого фізичного рівняння

$$\begin{aligned} \{\Delta\sigma\}_N^j &= [D^{ep}]_{N+1}^{j-1} (\{\Delta\varepsilon\}_N^j - \{\Delta\varepsilon^T\}_N) + \\ &+ [\Delta D^{ep}]_{N+1}^{j-1} (\{\varepsilon\}_{N+1}^{j-1} - \{\varepsilon^p\}_{N+1}^{j-1} - \{\varepsilon^T\}_N) + \{Q\}_{N+1}^{j-1} (\Delta T)_N \end{aligned} \quad (6)$$

ітераційний процес побудований шляхом уточнення змінних значень для матриць $[D^{ep}]_{N+1}$, $[\Delta D^{ep}]_N$ і вектора $\{Q\}_{N+1}$ на кожній j -й ітерації, враховуючи досягнутий рівень напружень на $(j-1)$ -й ітерації при відповідних початкових наближеннях, відомих у кінці попереднього кроку $[t_{N-1}, t_N]$. У [7] наведено формули для початкових наближень величин, які входять у рівняння стану, а також формули для ітераційного уточнення значень $[D^{ep}]_{N+1}^{j-1}$, $[\Delta D^{ep}]_{N+1}^{j-1}$ і $\{Q\}_{N+1}^{j-1}$.

При лінеаризації за методом додаткових навантажень (МДН) [11] вихідна задача опирається на співвідношення

$$\begin{aligned} \{\Delta\sigma\}_N^j &= [D]_{N+1} (\{\Delta\varepsilon\}_N^j - \{\Delta\varepsilon^T\}_N) + \\ &+ [\Delta D]_N (\{\varepsilon\}_N - \{\varepsilon^p\}_N - \{\varepsilon^T\}_N) - [D^p]_{N+1}^{j-1} (\{\Delta\varepsilon\}_N^j - \{\Delta\varepsilon^T\}_N) - \\ &- [\Delta D^p]_{N+1}^{j-1} (\{\varepsilon\}_N - \{\varepsilon^p\}_N - \{\varepsilon^T\}_N) + \{Q\}_{N+1}^{j-1} (\Delta T)_N, \end{aligned} \quad (7)$$

що є лінеаризованим варіантом рівняння (1) і впливає із можливості подання тензорів $[D^{ep}]$ і $[dD^{ep}]$ у вигляді різниці лінійних членів $[D]$ і $[dD]$ та нелінійних членів $[D^p]$ і $[dD^p]$ відповідно. Значенням "додаткових напружень", спричинених "додатковими навантаженнями", формально відповідають значення останніх трьох членів у формулі (7). Для сформованої послідовності лінійних задач в ітераційному процесі уточнення "додаткових напружень" відбувається з початковими наближеннями, відовими з кінця кроку $[t_{N-1}, t_N]$ при ітераційному уточненні $[D^p]_{N+1}^{j-1}$, $[\Delta D^p]_{N+1}^{j-1}$ і $\{Q\}_{N+1}^{j-1}$ [7].

На підставі лінеаризованих за МЗПП та МДН варіантів розв'язувальних рівнянь (6) і (7) при варіаційному формулюванні апроксимованих по кроках вихідних задач отримані відповідні лінеаризовані рівняння методу скінчених елементів.

У розробленому з використанням запропонованої методики програмному забезпеченні реалізуються алгоритми МСЕ для кожного покроково апроксимованого ітераційно уточнюваного наближення вихідної фізично нелінійної задачі.

Як приклад розглянемо процес деформування достатньо довгої пластинки (з розмірами поперечного перерізу $h \cdot a$) при її охолодженні за рахунок конвективного теплообміну через вільні поверхні від температури $T_{\text{внтр}} = T^* = \text{const}$ до температури середовища T_C . Напружений стан проаналізуємо в центральному поперечному перерізі, в якому є найвищі градієнти температур. При симетрії теплових факторів стосовно центрального поздовжнього перерізу термомеханічні поля досліджують в ділянці $\Omega_0 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : -\frac{h}{2} \leq x_1 \leq \frac{h}{2}, 0 \leq x_2 \leq \frac{a}{2}, x_3 = 0 \right\}$.

Задача теплопровідності в ділянці Ω_0 охоплює залежне від координат x_1, x_2 рівняння теплопровідності [4] з початковою умовою $T|_{t=0} = T^*$ і граничними умовами теплообміну за Ньютоном через поверхні $x_1 = \pm \frac{h}{2}$ і $x_2 = \frac{a}{2}$. Задача визначення температурних напружень при охолодженні розв'язана при відсутності зовнішніх механічних навантажень.

У початковий момент часу $t = 0$ пластинка має розміри поперечного перерізу $h = 1$ мм, $a = 5$ мм. Розрахунки температурного поля і термонапружень у пластинці зі сталі 0X13 зроблено при $T_0 = T_{\text{внтр}} = 1000^\circ\text{C}$, $T_N = 20^\circ\text{C}$ та залежних від температури коефіцієнті теплопровідності λ_T , модулі Юнга E , коефіцієнті Пуассона ν [10]. Межа текучості σ_T лінійно спадає від 96 МПа при 20°C [8] до 1 МПа при 1000°C .

Питома об'ємна теплосмність $C = 3\,592,44$ кДж/(м³·К) [10], коефіцієнт лінійного температурного видовження $\alpha_T = 11,0 \cdot 10^{-6}$ 1/К⁻¹, коефіцієнт тепловіддачі $\beta = 200$ кВт/(м²·град.).

Розрахунки зроблено за допомогою МЗПП при точності обчислень $\delta_0 = 0,1 \cdot 10^{-4}$. Ділянка Ω_0 розбита за допомогою 103 вузлів на 20 8-вузлових елементів серендипової сім'ї [С.] (рис. 1). Напружений стан до кінцевого моменту остигання проаналізовано протягом 198 кроків. Із розрахунків випливає, що при теплообміні з коефіцієнтом $\beta = 200$ кВт/(м²·град.) температура досягла значення 20°C за час $t^* \approx 0,2$ с. Таке швидке охолодження можливе за рахунок спеціальних способів відбору тепла.

Досліджено поточний і залишковий напружено-деформовані стани для ідеального матеріалу ($\beta^* = 0$, $\{\gamma\}^t = 0$ у функції текучості (3)), ізотропно зміцнюваного ($\beta^* = 0,515$, $b = 2208$ МПа, $m = 0,435$ [8] і $\{\gamma\}^t = 0$ у

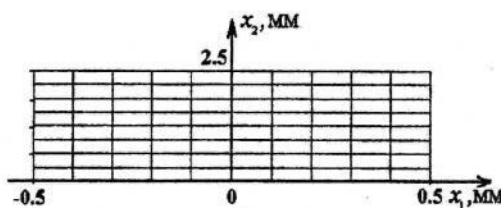


Рис. 1

співвідношенні (3)) та матеріалу з ізотропно-кінематичним зміцненням ($\beta^* = 0,515$, $b = 2208$ МПа, $m = 0,435$ і $\{\gamma\}^t \neq 0$ для $t > 0$ у формулі (3)).

Рис. 2 ілюструє еволюцію напружень $\sigma_{22} \approx \sigma_{33}$ та інтенсивності напружень σ_i по товщині пластинки вздовж координати x_1 при $x_2 = 0$ для двох моментів часу остигання. На цьому ж рисунку на лівих графіках показано розподіл температури для вибраних часових моментів. Видно, що неврахування зміцнення матеріалів приводить до суттєвого заниження рівня залишкових напружень, зумовлених охолодженням після витримки в процесі високотемпературного відпалювання.

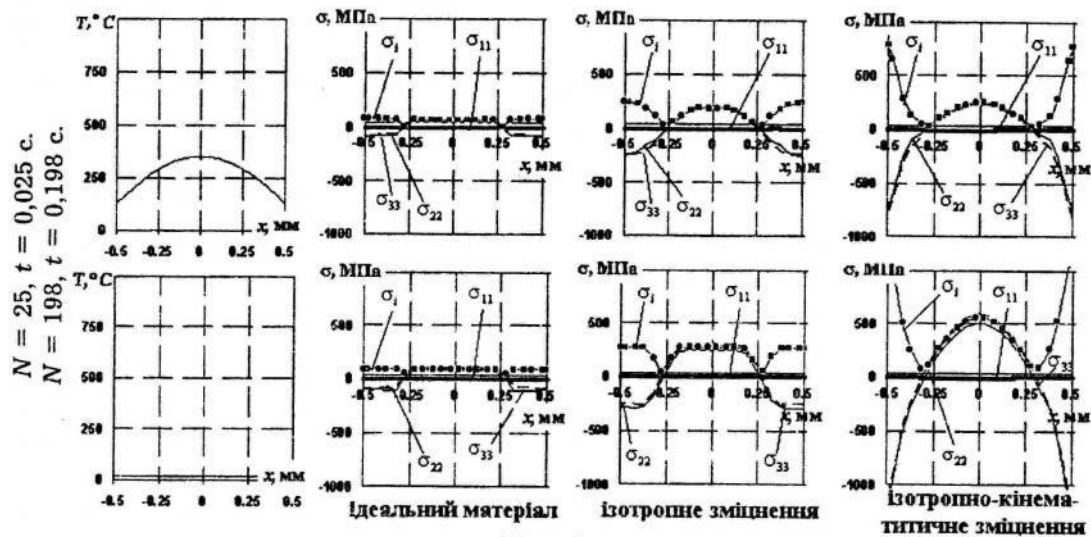


Рис. 2

1. Будз С.Ф., Дробенко Б.Д., Михайлишин В.С. Компьютерное моделирование термоупругопластического поведения механических систем. препринт № 34 – 84. – Львов, 1992.
2. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. Пер. с англ. – М., 1987.
3. Гачкевич О.Р., Михайлишин В.С. Математичне моделювання і дослідження напруженого стану тіл у процесі охолодження при високотемпературному відпалі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – Т. 47. – № 3. – С.186–198.
4. Коваленко А.Д. Термоупругость. – К., 1975.
5. Колтунов М.А., Кравчук А.С., Майборода В.П. Прикладная механика деформируемого твердого тела. – М., 1983.

6. Метод конечных элементов в механике твердых тел / Под общ. ред. Сахарова А.С. и Альтенбаха И. – К., 1982.
7. Михайлишин В.С. Ітераційні процедури для задач неізотермічної пружнопластичності з ізотропно-кінематичним зміцненням // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1999. – Т. 35. – № 4. – С. 102–112.
8. Морозов Е.М., Нижишков Г.П., Черныш Т.А. Неизотермическая модель упругопластического тела с комбинированным законом упрочнения и ее применение для МКЭ-расчета тел с трещинами // Аналитические и численные методы решения краевых задач пластичности и вязкоупругости. – Свердловск. Уральск. научн. центр, АН СРСР. – 1986. – С. 87–94.
9. Напряжения и деформации при сварке / Б.С. Касаткин, В.М. Прохоренко, И.М. Чертов. – К., 1987.
10. Теплотехнический справочник / Под ред. Юренева В.Н., Лебедева П.Д. В 2-х т. – М., 1976. – Т. 2.
11. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести: Справ. пособие // Писаренко Г.С., Можаровский Н.С. – К., 1981.
12. Ziegler H. A modification of Prager's hardening rule // Quart. Appl. Math. – 1959. – Vol. 17. – P. 55–65.

METHODOLOGY OF SOLVING OF THERMOMECHANICAL PROBLEMS DESCRIBING MECHANICAL BEHAVIOR OF SOLIDS ON THE COOLING UNDER HIGHTEMPERATURE ANNEALING

Olexandr Hachkevych¹, Vira Mykhailyshyn²

¹*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
Naukova Str., 3b, 79053 Lviv, Ukraine*

²*Technical University of Opole,
Stanislawa Mikolajchuka Str., 5, 45-271 Opole, Poland*

Thermomechanical problem for solids under hightemperature annealing on the cooling stage is set. Approximate approach to solving the problem about temperature stresses on the base of finite element method for step-approximated iterative adjustable linearized problem is proposed. The influence of material hardening in model assumptions of ideal, isotropic hardenable material and material with isotropic-kinematic hardening on the current and residual stresses in plate under cooling is studied.

Key words: thermomechanic, hightemperature annealing, residual stresses.

Стаття надійшла до редколегії 17.08.2005
Прийнята до друку 22.11.2006

УДК 539.3

КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПЛАСТИНИ З ДВОМА ТРІЩИНАМИ, ЯКІ РОЗМІЩЕНІ УЗДОВЖ ДУГ НЕКОНЦЕНТРИЧНИХ КІЛ

Віктор ОПАНАСОВИЧ, Наталія КОПОТЬ, Назар КОЦЮМБАС

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

Досліджено напружено-деформований стан ізотропної пластини з двома тріщинами різної довжини, які розміщені уздовж дуг неконцентричних кіл за умови, що береги тріщин зазнають гладкого контакту вздовж усієї довжини, під дією однорідного поля зусиль на нескінченності. Із використанням теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів, розв'язок задачі зведений до системи сингулярних інтегральних рівнянь, яка розв'язана за допомогою методу механічних квадратур. Проведено числовий аналіз контактних напружень і коефіцієнтів інтенсивності напружень при різному значенні параметрів задачі.

Ключові слова: ізотропна пластина, тріщина, гладкий контакт, комплексні потенціали, коефіцієнти інтенсивності напружень.

У реальних матеріалах завжди є різні дефекти мікро- та макроструктури, розвиток яких під дією навантаження призводить до появи тріщин, а згодом і до руйнування тіла. Причиною руйнування є формування та поширення однієї з тріщин, яка є своєрідним катализатором руйнування. Якщо пластина з тріщинами перебуває під дією однорідного поля напружень на нескінченності, між берегами тріщин існує певна взаємодія, що призводить до перерозподілу поля напружень і деформацій в ній. Аналіз умов повного контакту берегів тріщини по дузі кола розглянуто в [1]. Напружений стан пластини з двома розрізами, які симетрично

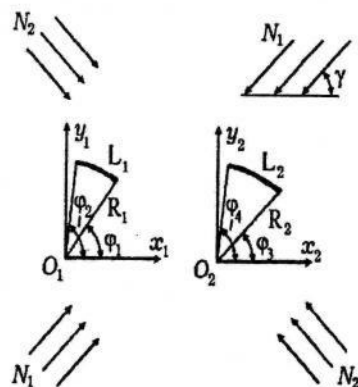


Рис. 1. Схема розміщення тріщин у пластині

розміщені стосовно осей координат уздовж дуг одного кола, краї яких повністю змикаються, досліджено в [2]. Контакт берегів різних завдовжки тріщин, які розміщені уздовж дуги одного кола та різних концентричних кіл, розглянуто в працях [3, 4].

Мета нашої праці – провести аналіз напружено-деформованого стану ізотропної пластини з двома тріщинами різної довжини, які розміщені уздовж дуг неконцентричних кіл за умови, що береги тріщин зазнають гладкого контакту вздовж усієї довжини під дією однорідного поля зусиль на нескінченності.

Формулювання задачі. Нехай ізотропна пластина містить дві тріщини уздовж дуг неконцентричних кіл і перебуває під дією однорідного поля зусиль на нескінченності N_1 і N_2 , причому

головна вісь, що відповідає N_1 , утворює кут γ з віссю Ox , крім того, для стискування $N_j > 0$. Центри кіл, уздовж дуг яких розміщені тріщини, позначимо через O_j . Тут і надалі індекс j набуває двох значень 1 та 2.

Виберемо початок j -ї декартової системи координат $O_j x_j y_j$ в центрі j -го кола радіуса R_j , спрямувавши осі $O_j x_j$ уздовж відрізка $O_1 O_2$ (див. рис. 1). Центральні кути, які відповідають кінцям тріщин, позначимо через φ_i ($i = \overline{1,4}$), дуги, вздовж яких розміщені тріщини, – через L_j .

Згідно з формулюванням задачі крайові умови матимуть вигляд

$$\sigma_{rj}^+ = \sigma_{rj}^- = \sigma_{rj}, \quad \sigma_{r\vartheta j}^+ = \sigma_{r\vartheta j}^- = 0, \quad u_{rj}^+ - u_{rj}^- = 0, \quad \text{на } L_j, \quad (1)$$

де σ_{rj} , $\sigma_{r\vartheta j}$ – компоненти тензора напружень у полярній системі координат $(r_j)(\vartheta_j)$ з полюсом у центрі кола радіуса R_j і полярною віссю Ox_j ; u_{rj} , $u_{\vartheta j}$ – проекції вектора переміщення відповідно на осі (r_j) і (ϑ_j) ; значками “+”, “–” позначено граничні значення відповідних функцій при прямуванні точки пластини до лінії L_j при $r_j \rightarrow R_j \mp 0$.

Побудова розв’язку задачі. Введемо до розгляду комплексні потенціали Колосова-Мусхелішвілі [5], тоді для визначення напружено-деформованого стану пластини матимемо співвідношення [6]

$$\sigma_{rj} + i\sigma_{\vartheta j} = 4\Gamma + 2\sum_{n=1}^2 (\Phi_n(z_n) + \overline{\Phi_n(z_n)}), \quad (2)$$

$$\sigma_{rj} + i\sigma_{r\vartheta j} = 2\Gamma - \frac{\bar{z}_j}{z_j} \bar{\Gamma}' + \sum_{n=1}^2 \left\{ \Phi_n(z_n) + \overline{\Phi_n(z_n)} - \frac{\bar{z}_j}{z_j} (z_n \overline{\Phi_n'(z_n)} + \overline{\Psi_n(z_n)}) \right\}, \quad (3)$$

$$2\mu \partial((u_{rj} + iu_{\vartheta j})e^{i\vartheta_j})/\partial\vartheta_j = iz_j((\kappa - 1)\Gamma + \bar{z}_j/z_j \bar{\Gamma}' + \sum_{n=1}^2 [\kappa\Phi_n(z_n) - \overline{\Phi_n(z_n)} + \bar{z}_j/z_j (\overline{\Psi_n(z_n)} + z_n \overline{\Phi_n'(z_n)})]), \quad (4)$$

де $\Gamma = -0,25(N_1 + N_2)$, $\Gamma' = 0,5(N_1 - N_2)e^{-2i\gamma}$, $\mu = E/(2(1 + \nu))$ – модуль зсуву; E – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона; $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$, $z_j = x_j + iy_j$; i – уявна одиниця, причому $z_1 = z_2 + x_0$.

Введемо до розгляду функції [6]

$$\Omega_j(z_j) = -\bar{\Phi}_j(R_j^2/z_j) + R_j^2/z_j \bar{\Phi}_j'(R_j^2/z_j) + R_j^2/z_j^2 \bar{\Psi}_j(R_j^2/z_j), \quad (5)$$

тоді функції $\Phi_j(z_j)$ і $\Omega_j(z_j)$ в околі безмежно віддаленої точки та нуля можна подати у вигляді [6]

$$\Phi_j(z_j) = \begin{cases} O(1/z_j^2), & z_j \rightarrow \infty, \\ A_{1j} + O(z_j), & z_j \rightarrow 0, \end{cases} \quad \Omega_j(z_j) = \begin{cases} -\bar{A}_{1j} + O(1/z_j^2), & z_j \rightarrow \infty, \\ O(1), & z_j \rightarrow 0. \end{cases} \quad (6)$$

Тут A_{1j} – невідома комплексна стала.

Врахувавши (5), залежності (2)–(4) перепишемо у вигляді

$$\sigma_{rj} + i\sigma_{r\vartheta j} = 2\Gamma - \bar{z}_j/z_j \bar{\Gamma}' + \sum_{n=1}^2 \{ \Phi_n(z_n) - \tilde{\Omega}_n(z_j, z_n) \}, \quad (7)$$

$$2\mu \frac{\partial((u_{rj} + iu_{\vartheta j})e^{i\vartheta j})}{\partial \vartheta_j} = iz_j \left[(\kappa - 1)\Gamma + \frac{\bar{z}_j}{z_j} \bar{\Gamma}' + \sum_{n=1}^2 [\kappa \Phi_n(z_n) + \tilde{\Omega}_n(z_j, z_n)] \right], \quad (8)$$

де $\tilde{\Omega}_n(z_j, z_n) = (\bar{z}_j/z_j)(R_n^2/\bar{z}_n^2)\Omega_n(R_n^2/\bar{z}_n) - (1 - (\bar{z}_j/z_j)(R_n^2/\bar{z}_n^2))\overline{\Phi_n(z_n)} +$
 $+ \bar{z}_j/z_j(1 - R_n^2/r_n^2)z_n \overline{\Phi_n'(z_n)}.$

Беручи до уваги (7), з крайової умови (1) отримаємо

$$(\Phi_j(t_j) + \Omega_j(t_j))^+ - (\Phi_j(t_j) + \Omega_j(t_j))^- = 0, \quad t_j \in L_j. \quad (9)$$

Враховуючи (6) та розв'язуючи задачу лінійного спряження (9), матимемо

$$\Omega_j(z_j) = -\Phi_j(z_j) - \bar{A}_{1j}. \quad (10)$$

Підставивши (10) у (8) та врахувавши останню крайову умову (1), прийдемо до задач лінійного спряження для знаходження функцій $\Phi_j(z_n)$, розв'язавши які, отримаємо

$$\Phi_j(z_n) = \frac{B}{2\pi i} \int_{L_j} \frac{1}{t_j} \frac{\partial}{\partial u_j} (e^{iu_j} (u_{\vartheta j}^+ - u_{\vartheta j}^-)) \frac{dt_j}{t_j - z_n}, \quad t_j = R_j e^{i\vartheta_j}, \quad n = 1, 2, \quad (11)$$

де $B = 2\mu/(\kappa + 1)$.

На основі (11) можемо записати

$$\begin{aligned} \Phi_j^+(t_j) + \Phi_j^-(t_j) &= -\frac{B}{\pi R_j} \int_{L_j^*} \frac{\partial}{\partial u} (u_{\vartheta j}^+ - u_{\vartheta j}^-) L_n \left| \sin \frac{\vartheta_j - u}{2} \right| du - \\ &- \frac{iB}{2\pi R_j} \int_{L_j^*} \frac{\partial}{\partial u} (u_{\vartheta j}^+ - u_{\vartheta j}^-) \left(\operatorname{ctg} \frac{\vartheta_j - u}{2} + u \right) du, \quad t_j \in L_j, \end{aligned} \quad (12)$$

де $L_j^* = [\varphi_{2j-1}, \varphi_{2j}]$.

Підставивши (10) у (7) і задовольнивши крайові умови (1), отримаємо

$$\sigma_{rj} = 2\Gamma - \bar{t}_j/t_j \bar{\Gamma}' + \Phi_j^+(t_j) + \Phi_j^-(t_j) + \bar{A}_{1j} + \tilde{R}_{3-j}(t_j), \quad t_j \in L_j. \quad (13)$$

Тут

$$\begin{aligned} \tilde{R}_j(t_{3-j}) &= 2\operatorname{Re}(\Phi_j(t_j^*)) + \bar{t}_{3-j}t_{3-j}^{-1}R_j^2\bar{t}_j^{*-2}\left[\Phi_j(R_j^2/\bar{t}_j^*) + \bar{A}_{1j} - \overline{\Phi_j(t_j^*)}\right] - \\ &- \bar{t}_{3-j}t_{3-j}^{-1}\left(1 - R_j^2/(\bar{t}_j^*t_j^*)\right)t_j^*\overline{\Phi_j'(t_j^*)}, \quad t_j^* = t_{3-j} - R_j\gamma_j, \quad \gamma_j = (-1)^j x_0/R_j. \end{aligned}$$

Підставивши (12) у (13), виділивши уявну та дійсну частини та ввівши позначення $y_j(\vartheta_j) = B/((N_1 - N_2)R_j)\partial(u_{\vartheta_j}^+ - u_{\vartheta_j}^-)/\partial\vartheta_j$, з одержаної залежності отримаємо сингулярні інтегральні рівняння для визначення шуканих функцій $y_j(\vartheta_j)$

$$\int_{L_j^*} y_j(u) \operatorname{ctg} \frac{\vartheta_j - u}{2} du + \int_{L_{3-j}^*} y_{3-j}(u) Q_{3-j}(\vartheta_j, u) du = \pi \sin 2(\gamma - \vartheta_j), \quad \vartheta_j \in L_j^*, \quad (14)$$

і вираз для визначення контактних напружень $\sigma_{\pi j}$

$$\begin{aligned} \sigma_{\pi j} &= 2\Gamma - \frac{1}{2}(N_1 - N_2)\cos 2(\gamma - \vartheta_j) - \frac{(N_1 - N_2)}{2\pi} \times \\ &\times \left(2 \int_{L_j^*} y_j(u) L_n \left| \sin \left(\frac{\vartheta_j - u}{2} \right) \right| du - \int_{L_{3-j}^*} y_{3-j}(u) W_{3-j}(\vartheta_j, u) du \right), \quad \vartheta_j \in L_j^*, \end{aligned} \quad (15)$$

де

$$\begin{aligned} Q_j(\vartheta, u) &= d_{3-j}^2 \alpha_{03-j}^{-2} \left\{ 2(\alpha_{3-j} K_{2j}(\vartheta, u) - \beta_{3-j} K_{1j}(\vartheta, u)) + \right. \\ &\quad \left. + (d_j^2 \alpha_{03-j} - 1)(\alpha_{3-j} K_{4j}(\vartheta, u) - \beta_{3-j} K_{3j}(\vartheta, u)) \right\}, \\ W_j(\vartheta, u) &= -L_n |G_j(\vartheta, u)| + d_{3-j}^2 \alpha_{03-j}^{-2} \left\{ 2((d_j^2 \alpha_{03-j}^2 - \alpha_{3-j}) K_{1j}(\vartheta, u) - \right. \\ &\quad \left. - \beta_{3-j} K_{2j}(\vartheta, u)) - (d_j^2 \alpha_{03-j} - 1)(\alpha_{3-j} K_{3j}(\vartheta, u) + \beta_{3-j} K_{4j}(\vartheta, u)) \right\}, \\ \alpha_{0j} &= 1 + \gamma_j^2 + 2\gamma_j \cos \vartheta_j, \quad \alpha_j = 1 + \gamma_j^2 \cos 2\vartheta_j + 2\gamma_j \cos \vartheta_j, \\ \beta_j &= -\gamma_j^2 \sin 2\vartheta_j - 2\gamma_j \sin \vartheta_j, \quad d_j = R_{3-j}/R_j, \\ K_{1j}(\vartheta, u) &= (1 + \gamma_j \cos u - d_j \cos(\vartheta - u))/G_j(\vartheta, u), \\ K_{2j}(\vartheta, u) &= (\gamma_j \sin u + d_j \sin(\vartheta - u))/G_j(\vartheta, u), \\ K_{3j}(\vartheta, u) &= (1 + \gamma_j^2 \cos 2u + 2\gamma_j \cos u + d_j^2 \cos 2(\vartheta - u) - \\ &\quad - 2d_j(\cos(\vartheta - u) + \gamma_j \cos(\vartheta - 2u)))/G_j^2(\vartheta, u), \\ K_{4j}(\vartheta, u) &= (\gamma_j^2 \sin 2u + 2\gamma_j \sin u - d_j^2 \sin 2(\vartheta - u) + \\ &\quad + 2d_j(\sin(\vartheta - u) + \gamma_j \sin(\vartheta - 2u)))/G_j^2(\vartheta, u), \\ G_j(\vartheta, u) &= 1 + d_j^2 - 2d_j \cos(\vartheta - u) + \gamma_j^2 + 2\gamma_j(\cos u - d_j \cos \vartheta). \end{aligned}$$

Рівняння (14) доповнимо співвідношеннями, які виражають однозначність переміщень при обході контурів тріщин

$$\int_{L_j^*} y_j(t) dt = 0. \quad (16)$$

Числові результати та висновки. Систему інтегральних рівнянь (14), (16) розв'язуємо чисельно за допомогою методу механічних квадратур [7]. У результаті прийдемо до такої системи алгебричних рівнянь для знаходження вузлових значень шуканих функцій

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^2 \sum_{m=1}^M U_i(t_m) G_{ij}(t_m, x_r) &= \sin 2(\gamma - a_j x_r - b_j), \quad r = \overline{1, M-1}, \\ \sum_{m=1}^M U_j(t_m) &= 0, \end{aligned} \quad (17)$$

де

$$\begin{aligned} x_r &= \cos \frac{\pi r}{M}, \quad t_m = \cos \frac{2m-1}{2M} \pi, \quad U_j(t) = y_j(a_j t + b_j) \sqrt{1-t^2}, \\ G_{jj}(t, x) &= a_j \operatorname{ctg} \frac{a_j(x-t)}{2}, \quad G_{ij}(t, x) = a_i Q_i(a_i t + b_i, a_j x + b_j), \\ a_j &= (\varphi_{2j} - \varphi_{2j-1})/2, \quad b_j = (\varphi_{2j} + \varphi_{2j-1})/2. \end{aligned}$$

Коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) знайдемо за формулами [7]

$$K_{1j}^{\pm} = 0, \quad K_{2j}^{\pm} = \mp \sqrt{R_j a_j} \tilde{U}_j(\pm 1), \quad (j = 1, 2), \quad (18)$$

де

$$\tilde{U}_j(\pm 1) = \frac{(\pm 1)^{M+1}}{M} \sum_{m=1}^M (-1)^{m+1} U_j(t_m) \operatorname{ctg}^{\pm 1} \frac{2m-1}{4M} \pi.$$

Враховуючи (15), контактні напруження можна подати у вигляді

$$\sigma_{\pi j} = 2\Gamma - 0,5(N_1 - N_2)(\cos 2(\gamma - \vartheta_j) - B(\vartheta_j)), \quad \vartheta_j \in L_j^*, \quad (19)$$

де

$$\begin{aligned} B(\vartheta_j) &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left\{ 2a_j U_j(t_m) \operatorname{Ln} \left| \sin \frac{\vartheta_j - t_{jm}}{2} \right| - a_{3-j} U_{3-j}(t_m) W_{3-j}(\vartheta_j, t_{3-j} m) \right\}, \\ t_{jm} &= a_j t_m + b_j. \end{aligned}$$

Для визначення залежності між кутами розкриття тріщин і напруженим станом на нескінченності, за якого відбуватиметься повний контакт берегів тріщин, подамо контактні напруження $\sigma_{\pi j}(\vartheta_j)$ (19) у вигляді

$$\sigma_{\pi j}^* = \sigma_{\pi j}(\vartheta_j)/N_1 = -1 - \lambda_j(\vartheta_j) + \tilde{\nu} \lambda_j(\vartheta_j), \quad \tilde{\nu} = N_2/N_1, \quad j = 1, 2, \quad (20)$$

де

$$\lambda_j(\vartheta_j) = 0,5(-1 + \cos 2(\gamma - \vartheta_j) + B(\vartheta_j)). \quad (21)$$

Користуючись (21), знайдемо максимальне та мінімальне значення $\lambda_j(\vartheta_j)$, коли $\varphi_{2j-1} < \vartheta_j < \varphi_{2j}$, позначимо їх відповідно $\lambda_{j \max}$ та $\lambda_{j \min}$.

Введемо позначення

$$\nu_{j \max} = 1 + 1/\lambda_{j \max}, \quad \nu_{j \min} = 1 + 1/\lambda_{j \min}, \quad j = 1, 2. \quad (22)$$

Як видно з (20), контактні напруження лінійно залежать від $\tilde{v}$, тому береги j -ї тріщини зазнаватимуть гладкого контакту вздовж усієї довжини, якщо $\tilde{v}$ задовольняє нерівність $\nu_{j \min} \leq \tilde{v} \leq \nu_{j \max}$ і $\nu_{j \min} < \nu_{j \max}$, в протилежному випадку, якщо $\tilde{v} > \nu_{j \max}$ або $\tilde{v} < \nu_{j \min}$.

Зробили числовий аналіз задачі, який подано на рис. 2–7. Зауважимо, що у часткових випадках результати збігаються з числовими значеннями, які отримали у працях [1–4].

Розглянемо дві однакові завдовжки тріщини, коли $\varphi_1 = -\varphi$, $\varphi_2 = \varphi$, $\varphi_3 = \pi - \varphi$, $\varphi_4 = \pi + \varphi$, $R_1 = R_2 = R$.

Рис. 2 та 3 побудовані для випадку, коли $\varphi = 45^\circ$, $\gamma = 0$, $x_0/R = 3$, при цьому $\nu_{1 \max} = \nu_{2 \max} = \nu_{\max} = 12,95$, $\nu_{1 \min} = \nu_{2 \min} = \nu_{\min} = -0,63$. На рис. 2 зображено розподіл контактних напружень $\sigma_{rr1}^* = \sigma_{rr1}/N_1$ уздовж берегів

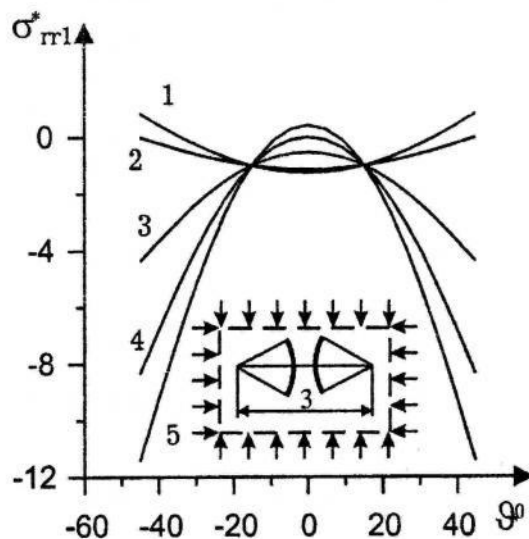


Рис. 2

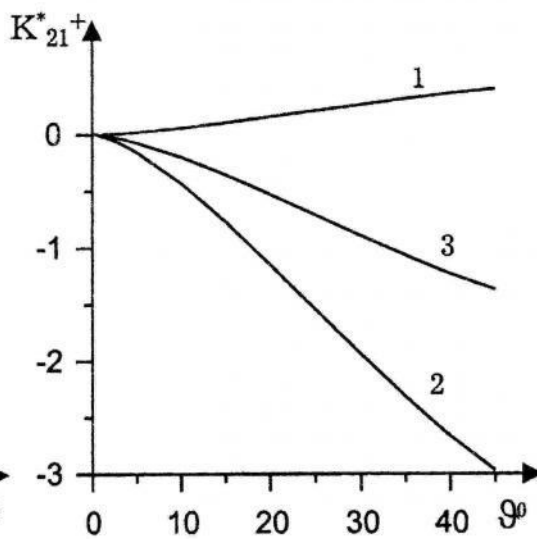


Рис. 3

першої тріщини. Криві 1–5 побудовано відповідно при $\tilde{v} = -2 < \nu_{\min}$, $\tilde{v} = \nu_{\min}$, $\tilde{v} = 6,5$, $\tilde{v} = \nu_{\max}$, $\tilde{v} = 18 > \nu_{\max}$. Як видно з рис. 2, при $\tilde{v} = \nu_{\min}$ величина σ_{rr1}^*

перетворюється в нуль на кінцях тріщин, а при $\tilde{v} = v_{\max}$ – у центрі, якщо $v_{\min} \leq \tilde{v} \leq v_{\max}$, то береги обох тріщин контактуватимуть уздовж усієї своєї довжини, якщо ця нерівність не виконується, то контактні напруження змінюють знак, тобто треба розглянути задачу в іншому формулюванні, враховуючи відставання берегів тріщин.

На рис. 3 показано графічну залежність приведених КІН $K_{21}^{*\pm} = K_{21}^{\pm}/N_1$. Крива 1 побудована при $\tilde{v} = v_{\min} = -0,63$, крива 2 – при $\tilde{v} = 6,5$, крива 3 – при $\tilde{v} = v_{\max} = 12,95$. Зауважимо, що для заданого випадку $K_{21}^{*+} = K_{22}^{*+}$ і $K_{2j}^{*+} = -K_{2j}^{*-}$.

На рис. 4 зображено графічну залежність граничних значень головних напружень на нескінченності $\tilde{v} = N_2/N_1$, за яких береги тріщин зазнаватимуть повного контакту, від зміни кута γ для $\varphi = 45^\circ$. Зауважимо таке: якщо $\gamma \leq 74,5^\circ$, то береги тріщин контактуватимуть, коли $\tilde{v}$ виберемо з діапазону $v_{\min} \leq \tilde{v} \leq v_{\max}$, а для $\gamma > 74,5^\circ$ – якщо $\tilde{v} > v_{\min}$ або $\tilde{v} < v_{\max}$. Якщо γ змінювати від 90° до 180° то криві для $v_{\min}$ і $v_{\max}$ будуть симетричними відносно прямої $\gamma = 90^\circ$.

На рис. 5 зображено графічну залежність K_{21}^{*-} від зміни кута γ при $\tilde{v} = 0,07$. Крива 1 побудована при $\varphi = 30^\circ$, криві 2 і 3 – при $\varphi = 45^\circ$ та $\varphi = 60^\circ$ відповідно. Як видно з рис. 5, коефіцієнти інтенсивності напружень спочатку зростають до деякого числа, а потім спадають і міняють знак. Зазначимо, що $K_{21}^{*+} = K_{22}^{*+}$, $K_{2j}^{*+} = -K_{2j}^{*-}$ і криві для K_{2j}^{*+} є симетричними до

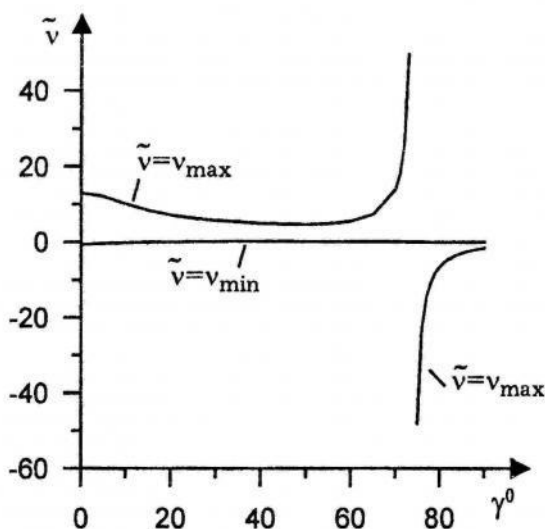


Рис. 4

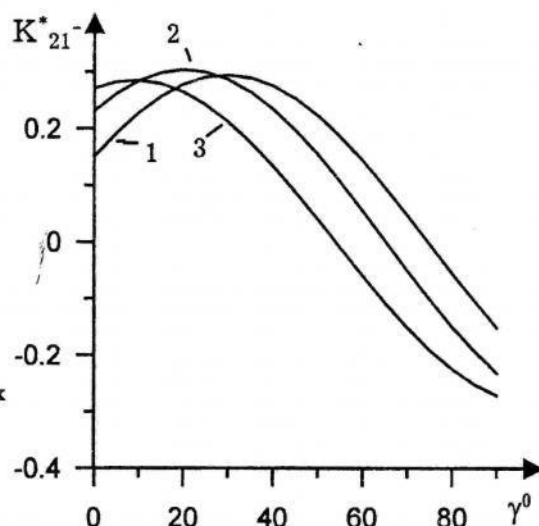


Рис. 5

K_{2j}^* стосовно прямої $\gamma = 45^\circ$, тому графічної залежності для них не наводимо.

Рис. 6, 7 побудовані для випадку, коли $\varphi_1 = \varphi_3 = -60^\circ$, $\varphi_2 = \varphi_4 = 60^\circ$, $\gamma = 0$, $R_1 = R_2 = R$. На рис. 6 зображено залежність граничних значень $\tilde{v}$ від відстані між центрами кіл $x_0^* = x_0/R$. Кривим 1 і 2 відповідають $v_{1 \max}$ та $v_{2 \max}$, а кривим 3, 4 – $v_{1 \min}$ та $v_{2 \min}$ відповідно. На підставі рис. 6 можна зробити висновки, що береги обох тріщин зазнаватимуть контакту уздовж усієї своєї довжини, якщо $\tilde{v}$ задовольнятиме нерівність $v_{1 \min} \leq \tilde{v} \leq v_{1 \max}$, коли $v_{1 \max} < \tilde{v} \leq v_{2 \max}$ (або $v_{2 \min} \leq \tilde{v} < v_{1 \min}$), то береги другої тріщини контактуватимуть уздовж усієї довжини, а на першій тріщині буде відставання у центрі тріщини (на кінцях). Якщо $\tilde{v} > v_{2 \max}$, то у центрі обох тріщин береги не будуть контактувати, а при $\tilde{v} < v_{2 \min}$ – на кінцях обидвох

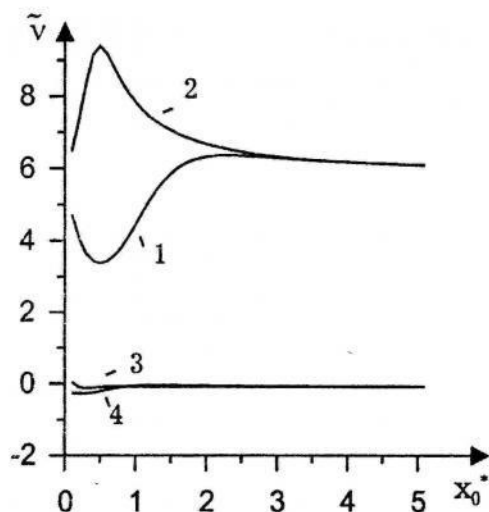


Рис. 6

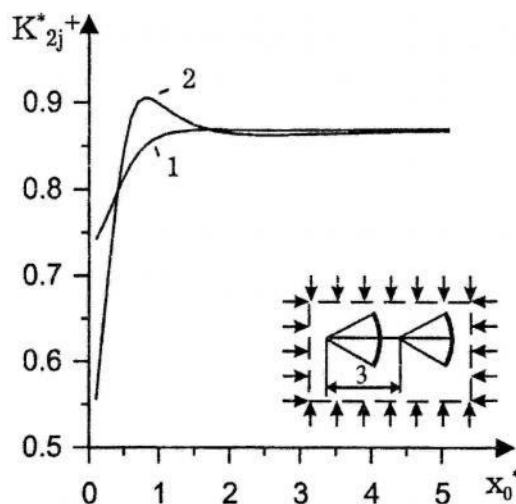


Рис. 7

тріщин буде відставання.

На рис. 7 показано графічну залежність приведених КІН від x_0^* при $\tilde{v} = 4$. Кривій 1 відповідає K_{21}^{*+} , кривій 2 – K_{22}^{*+} . Як видно з рис. 7, для малих x_0^* коефіцієнти інтенсивності напружень менші за величиною від відповідних значень для однієї тріщини, при цьому для певних x_0^* K_{22}^{*+} перевищують це значення.

З рис. 6, 7 можна зробити висновки, що при збільшенні відстані між центрами кіл максимальні граничні значення головних напружень на нескінченності та коефіцієнти інтенсивності напружень прямують до однакової величини і збігаються з результатами для однієї тріщини.

1. Опанасович В.К. Аналіз умов повного контакту берегів тріщини по дузі кола// Праці наукового товариства ім. Шевченка. – 1997. – Т. 1. – С. 483–493.
2. Гриліцький Д.В., Луцишин Р.М. Напруження в пластинах з коловою лінією розмежування граничних умов. – Львів, 1975.
3. Опанасович В., Копоть Н. Контактна задача для пластини з двома тріщинами різних довжин уздовж дуги кола // Вісн. Львів. ун.-ту. Сер. мех.-мат. – 2002. – Вип. 60. – С. 155–160.
4. Опанасович В., Копоть Н. Контактна задача для пластини з тріщинами уздовж дуг концентричних кіл // Математичні методи механіки неоднорідних структур. – Львів, 2003. – С. 328–331 (564).
5. Мусхелишвили И.Н. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М., 1966.
6. Прусов И.А. Некоторые задачи термоупругости. – Минск, 1972.
7. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К., 1976.

CONTACT PROBLEM FOR A PLATE WITH TWO CRACKS ON ARCHES OF NONCONCENTRIC CIRCLES

Viktor Opanasovych, Nataliya Kopot', Nazar Kotsyumbas

*Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine*

In the paper the stress state of a isotropic plate containing two unequal cracks on arches of nonconcentric circles is considered. It is assumed that the faces of the cracks are in smooth contact on all length of the cracks under the influence of a homogeneous load field on infinity. Using the methods of the theory of functions of complex variable and complex potentials the solution of this problem is reduced to a system of singular integral equations, which is solved by numerical method with by help of method of mechanical quadratures. The stress intensity factors and components of stress tensor are investigated on the circle where the cracks are located.

Key words: isotropic plate, crack, smooth contact, complex potentials, stress intensity factors.

Стаття надійшла до редколегії 12.05.2005
Прийнята до друку 22.11.2006

УДК 539.4:536.543

ВИЗНАЧЕННЯ ЗАЛИШКОВОЇ ДОВГОВІЧНОСТІ ПЛАСТИНИ З СИСТЕМОЮ ДВОХ КОМПЛАНАРНИХ ТРІЩИН ПРИ ДІЇ ДОВГОТРИВАЛОГО СТАТИЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ І ВИСОКІЙ ТЕМПЕРАТУРІ

Наталія САС

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

З використанням раніше сформульованої автором розрахункової моделі визначена довговічність пластини з системою двох компланарних тріщин в умовах розтягу при високій температурі. Розглянуті часткові випадки, зокрема аналог задачі Гріффітса для випадку тріщини високотемпературної повзучості.

Ключові слова: довговічність, компланарні тріщини, високотемпературна повзучість, довготривале статичне навантаження.

Відомо [1–7], що при дії довготривалого статичного навантаження і високій температурі втрата міцності і вичерпання ресурсу елементів конструкцій проходить шляхом зародження і поширення тріщини високотемпературної повзучості. Особливо, це відбувається, коли елемент конструкції вже послаблений дефектами типу тріщин набутими при їх виготовленні або в процесі експлуатації. Щодо досліджень кінетики поширення тріщин високотемпературної повзучості, то цьому питанню присвячена незначна кількість праць (див., наприклад, [1, 6–9]).

Розвинуто раніше сформульований автором підхід [2, 3] на випадок визначення кінетики поширення системи двох компланарних тріщин високотемпературної повзучості.

Формулювання задачі і метод її розв'язку. Не порушуючи концептуальної загальності, але з метою спрощення математичного викладення, розглянемо металічну пластину, яка містить дві рівні колінеарні тріщини вздовж осі Ox на відрізках $-b \leq x \leq -a$ і $a \leq x \leq b$, перебуває під дією високої температури і довготривалого статичного навантаження p (рис. 1).

Вважається, що тріщини макроскопічні, а зовнішні розтягуючі навантаження прикладені так, що стосовно лінії розміщення тріщин напружено-деформований стан симетричний,

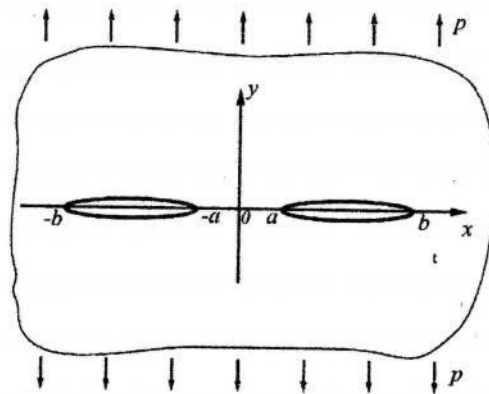


Рис. 1. Схема навантаження пластини послабленої системою двох компланарних тріщин

тобто описується в околі їхніх вершин тільки коефіцієнтом інтенсивності напружень K_I . Задача полягає у визначенні часу $t=t_*$, коли в результаті високотемпературної повзучості тріщини підростуть до критичного розміру $l_* = b_* - a_*$ і пластина зруйнується.

Для розв'язку такої задачі використовуємо розрахункову модель з [5], тобто математичні рівняння, які описують такий процес:

$$V = 0,6666EA_1 [\delta_{It}(0)\delta_{Ic}^{-1}]^m [\sigma_t - \delta_{Ic}^{-1}\sigma_t\delta_{It}(0)]^{-1}. \quad (1)$$

Тут E – модуль пружності; $A_1 = A\delta_{Ic}\varepsilon_c^{(m-1)}$, де A , m – характеристики високотемпературної повзучості матеріалу; $\delta_{It}(0)\delta_{Ic}^{-1} = K_I^2/K_{Ic}^2$, K_I – коефіцієнт інтенсивності напружень; K_{Ic} – характеристика тріщиностійкості матеріалу; σ_t – усереднене нормальне напруження в зоні передруйнування згідно з δ_c – моделлю [10].

Додамо початкову і кінцеву умови

$$t = 0, \quad a(0) = a_0, \quad b(0) = b_0; \quad t = t_*, \quad a(t_*) = a_*, \quad b(t_*) = b_*, \quad (2)$$

де критичну довжину $l = l_* = b_* - a_*$ визначають із критерію критичного розкриття тріщини [1]

$$\delta_{It}(l_*) = \delta_{Ic}. \quad (3)$$

Відомо [11], що для такої задачі коефіцієнти інтенсивності матимуть вигляд:

$$K_I(b) = \frac{\sqrt{\pi}pb^2(1 - E(k)/K(k))}{\sqrt{b(b^2 - a^2)}}, \quad K_I(a) = \frac{\sqrt{\pi}pa^2(b^2E(k)/(a^2K(k)) - 1)}{\sqrt{a(b^2 - a^2)}}, \quad (4)$$

де $K(k)$ – повний еліптичний інтеграл першого роду з модулем $k = \sqrt{b^2 - a^2}/b$; $E(k)$ – повний еліптичний інтеграл другого роду.

Тоді сформульована розрахункова модель (1)–(3) з врахуванням співвідношення (4) зведеться до такої системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{db}{dt} &= \frac{2EA_1}{3\sigma_t} \left(\frac{\pi p^2 b^3 (1 - E(k)/K(k))^2}{(b^2 - a^2)K_{Ic}^2} \right)^m \left(1 - \frac{\pi p^2 b^3 (1 - E(k)/K(k))^2}{(b^2 - a^2)K_{Ic}^2} \right)^{-1}, \\ \frac{da}{dt} &= -\frac{2EA_1}{3\sigma_t} \left(\frac{\pi p^2 b^4 (E(k)/K(k) - a^2/b^2)^2}{a(b^2 - a^2)K_{Ic}^2} \right)^m \left(1 - \frac{\pi p^2 b^4 (E(k)/K(k) - a^2/b^2)^2}{a(b^2 - a^2)K_{Ic}^2} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (5)$$

з початковими і кінцевими умовами

$$t = 0, \quad a(0) = a_0, \quad b(0) = b_0; \quad t = t_*, \quad a(t_*) = a_*, \quad b(t_*) = b_*. \quad (6)$$

У системі (5) зробимо заміну

$$\varepsilon = 1 - a/b, \quad l = b - a. \quad (7)$$

В результаті система диференціальних рівнянь (5) набуде вигляду

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dt} &= \frac{4EA_1}{3\sigma_t} \left(\frac{\pi p^2 l}{(2-\varepsilon)K_{IC}^2} \right)^m \left(1 - \frac{\pi p^2 l}{(2-\varepsilon)K_{IC}^2} \right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{2} \left(m + \frac{\pi p^2 K_{IC}^{-2} l}{2 - \pi p^2 K_{IC}^{-2} l} \right) \varepsilon \right), \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{4EA_1}{3\sigma_t} \left(\frac{\pi p^2 l}{(2-\varepsilon)K_{IC}^2} \right)^m \left(1 - \frac{\pi p^2 l}{(2-\varepsilon)K_{IC}^2} \right)^{-1} \frac{\varepsilon}{l} \left(1 - \frac{1}{2} \left(m + 1 + \frac{\pi p^2 K_{IC}^{-2} l}{2 - \pi p^2 K_{IC}^{-2} l} \right) \varepsilon \right), \end{aligned} \quad (8)$$

з такими початковими і кінцевими умовами

$$t = 0, \quad l(0) = l_0, \quad \varepsilon(0) = \varepsilon_0; \quad t = t_*, \quad l(t_*) = l_*, \quad \varepsilon(t_*) = \varepsilon_*. \quad (9)$$

Поділимо друге рівняння системи (8) на перше і отримаємо таке диференціальне рівняння

$$\frac{d\varepsilon}{dl} = \frac{\varepsilon}{l} - \frac{\varepsilon^2}{2l} \left(1 - \frac{1}{2} \left(m + \frac{\pi p^2 K_{IC}^{-2} l}{2 - \pi p^2 K_{IC}^{-2} l} \right) \varepsilon \right)^{-1}. \quad (10)$$

Розкладемо задане рівняння (10) за ε і проінтегруємо, враховуючи початкові та кінцеві умови (9). В результаті отримаємо

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \frac{l}{l_0}. \quad (11)$$

Підставивши (11) в перше рівняння системи (8) і розклавши його за степенями ε , одержимо

$$\begin{aligned} dt &= \frac{3\sigma_t}{4EA_1} \left(\frac{2K_{IC}^2}{\pi p^2} \right)^m l^m \times \\ &\times \left(1 - \frac{\pi p^2 K_{IC}^{-2} l}{2} - \left(\frac{\pi p^2 K_{IC}^{-2} l^2}{8l_0} - \frac{m\pi p^2 K_{IC}^{-2} l^2}{4l_0(2 - \pi p^2 K_{IC}^{-2} l)} + \frac{\pi^2 p^4 K_{IC}^{-4} l^3}{8l_0(2 - \pi p^2 K_{IC}^{-2} l)^2} \right) \varepsilon_0^2 \right) dl. \end{aligned} \quad (12)$$

Легко бачити таке: якщо в рівнянні (12) $\varepsilon_0 \rightarrow 0$, то отримаємо аналог задачі Гріффітса для випадку високотемпературної повзучості [2, 3].

$$dt = \frac{3\sigma_t}{4EA_1} \left(\frac{2K_{IC}^2}{\pi p^2} \right)^m \left(l^{-m} - \frac{\pi p^2 K_{IC}^{-2}}{2} l^{1-m} \right) dl. \quad (13)$$

Проінтегруємо рівняння (13) з врахуванням умов (9), одержимо розв'язок у вигляді

$$t = \frac{3\sigma_t}{4EA_1} \left(\frac{2K_{IC}^2}{\pi p^2} \right)^m \left(\frac{l^{1-m}}{1-m} - \frac{l_0^{1-m}}{1-m} - \frac{\pi p^2}{2K_{IC}^2} \frac{l^{2-m}}{2-m} + \frac{\pi p^2}{2K_{IC}^2} \frac{l_0^{2-m}}{2-m} \right). \quad (14)$$

Задамо параметри рівняння (14) для випадку матеріалу Allow 100 [8] так:

$$E = 1,9 \cdot 10^5 \text{ MPa}, \sigma_t = 730 \text{ MPa}, A_1 = 3,22 \cdot 10^{-4}, m = 7,53,$$

$$l_0 = 2 \text{ мм}, p = 0,2186 K_{IC}. \quad (15)$$

Враховуючи це, співвідношення (14) зведемо до вигляду

$$t = -4,37 \cdot 10^6 \cdot l^{-6,53} + 3,05 \cdot 10^4 + 7,75 \cdot 10^5 \cdot l^{-5,53}. \quad (16)$$

На основі цього співвідношення на рис. 2 побудовано залежність довжини тріщини l від часу її росту t .

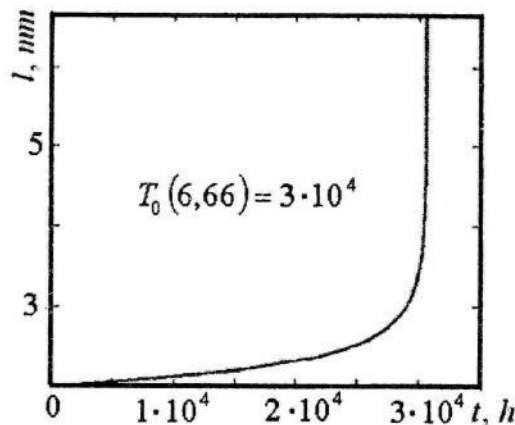


Рис. 2

Як видно з рис. 2, при наближенні довжини тріщини до критичного значення $l = l_c$ швидкість її росту прямує до нескінченності.

1. Тайра С., Отани Р. Теория высокотемпературной прочности материалов. – М., 1986.
2. Андрейків О.Є., Сас Н.Б. Визначення залишкового ресурсу труби з поверхневою тріщиною при довготривалому тиску і високій температурі // Машинознавство. – Львів, 2005. – № 4. – С. 3–6.
3. Андрейків О.Є., Сас Н.Б. Механіка руйнування металічних пластин при високотемпературній повзучості // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2006. – № 2. – С. 62–68.

4. *Лепин Г.Ф.* Ползучесть металлов и критерии жаропрочности. – М., 1976.
5. *Jakowluk A.* Procesy pelzania i zmecznia w materialach. – Warszawa, 1993.
6. *Каминский А.А.* Механика разрушения вязкоупругих тел. – К., 1980.
7. *Kaminsky A.A.* Subcritical crack growth in polymer composite materials under creep // *Advances in Fracture Resistance and Structural Integrity: Selected papers from the 8th Int.Conf. on Fracture (ICF 8), Kyiv, Ukraine, 8-14 June 1993.* – Pergamon, 1994. – P. 513–520.
8. *Fuji A. and Kitagawa M.* A Comparison of Creep Crack Growth Behaviour in Nickel Based Super Alloy with Low Alloy Steel // *Ibid.* – P. 487–495.
9. *Koterazawa R.* Propagation of surface crack under creep and fatigue conditions at elevated temperature // *Proc. Int. Conf. on Creep, ISME, ImechE, ASME, ASTM, 1986.* – P. 291–296.
10. *Панасюк В.В., Андрейкив А.Е., Партон В.З.* Основы механики разрушения. – К., 1988.
11. Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие: В 4-х т. / Под общей редакцией Панасюка В.В. – К., 1988. – Т. 2: Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами / Саврук М.П. – 1988. – С. 74–81.

EVALUATION OF RESIDUAL LIFE TIME OF A PLATE WITH SYSTEM TWO COPLANAR OF CRACKS UNDER LONG TERM STATIC TENSION AT HIGH-TEMPERATURE

Natalija SAS

*Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine*

The life time of a plate with the system of two coplanar of cracks under long-term static tension at high-temperature is determined with the help of a calculation model, which was formulated by the author earlier. Cases, especially analoges of the Griffith in the case of the crack propagation crack under high-temperature creep were examined.

Key words: : life time, coplanar cracks, high-temperature creep, long-term static tension .

Стаття надійшла до редколегії 21.12.2005

Прийнята до друку 22.11.2006

УДК 539.3

ЗАСТОСУВАННЯ АПАРАТА УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ ДО ВИЗНАЧЕННЯ ПОРЯДКУ СИНГУЛЯРНОСТІ ЗА ПОЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ У КЛИНОВІЙ СИСТЕМІ

Микола МАХОРКІН¹, Георгій СУЛИМ²

¹ Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 36, 79053 Львів, Україна

² Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

Запропоновано процедуру використання узагальнених функцій для визначення порядку сингулярності напружень в околі вістря довільної клинової системи за позовдовжнього зсуву. Досліджено особливості напружень у пластині, складеній із чотирьох клинів і розташованого на лінії з'єднання клинів півбезмежного абсолютно жорсткого включення.

Ключові слова: порядок сингулярності, клинова система, узагальнені функції, кутова точка.

Аналіз причин пластичного деформування і аварійного виходу з ладу різних конструкцій свідчить, що значна їх частина зумовлена руйнуванням в околі зламів поверхонь поділу матеріалів. Тому вивчення концентрації напружень в околі кутових точок фронтів вирізів і клинових композицій та конструкцій становить значний інтерес. За допомогою методу комплексних потенціалів Колосова-Мусхелішвілі [7, 5] і функцій Ері [2] в працях Д.Б. Боджі [1, 2], І.Т. Денисюка [5], І.П. Бутвинника [4] проведено дослідження характеру сингулярності напружень в околі нерегулярних точок. Проте у зв'язку з громіздкістю перетворень, до яких призводить використання згаданих методів, описані лише в системі, складені з трьох клинів [4].

На прикладі дослідження порядку сингулярності напруженого стану в околі кутової точки O системи (рис. 1), що складається з кутового вирізу з розхилом кута α_{n+1} і

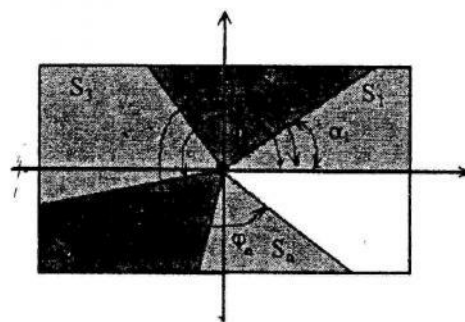


Рис. 1

довільної кількості клинів S_j з кутами розхилу α_j , $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 2\pi - \alpha_{n+1})$ та модулями зсуву μ_j , при позовдовжньому зсуві (переміщення

$u=0, v=0, w=w(r, \varphi) \neq 0$) проілюструємо підхід з використанням узагальнених функцій.

Подібні задачі були розв'язані для двоклинової системи у працях [4, 5].

Запровадимо полярну систему координат r, φ з початком у точці O , в якій визначальні співвідношення теорії пружності мають такий вигляд [3, 9]:

1) співвідношення Коші виглядають

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{r\varphi} = 0, \varepsilon_{\varphi z} = \frac{1}{2r} \frac{\partial w}{\partial \varphi}, \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial r}; \quad (1)$$

2) закон Гука –

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{zz} = \sigma_{r\varphi} = 0, \sigma_{\varphi z} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi}, \sigma_{rz} = \mu \frac{\partial w}{\partial r}; \quad (2)$$

3) рівняння рівноваги –

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} = 0. \quad (3)$$

Для моделювання кусково-однорідного середовища використаємо метод, запропонований Я.С. Підстригачем та Ю.М. Коляном у праці [6, 8]. Вважатимемо модуль зсуву μ кусково-сталою функцією, залежною лише від полярного кута $\mu(r, \varphi z) = \mu(\varphi)$, і запишемо з використанням одиничної функції

$$\mu(\varphi) = \mu_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (\mu_{i+1} - \mu_i) S_+(\varphi - \varphi_i), \quad \varphi_i = \sum_{j=1}^i \alpha_j, \quad S_+ = \begin{cases} 1 & (\xi > 0), \\ 0 & (\xi \leq 0). \end{cases} \quad (4)$$

В результаті отримаємо

$$\frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{r} \left(\mu \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \sum_{i=1}^{n-1} (\mu_{i+1} - \mu_i) \frac{\partial w}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_i} \delta_+(\varphi - \varphi_i) \right). \quad (5)$$

Відповідно до цього рівняння рівноваги набуде вигляду

$$\mu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \sum_{i=1}^{n-1} (\mu_{i+1} - \mu_i) \frac{\partial w}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_i} \delta_+(\varphi - \varphi_i) = 0. \quad (6)$$

Його можна записати також і так:

$$\mu \Delta w = -\frac{1}{r^2} \sum_{i=1}^{n-1} (\mu_{i+1} - \mu_i) \frac{\partial w}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_i} \delta_+(\varphi - \varphi_i), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (7)$$

Згадавши подання (4) і використавши фільтруючу властивість дельта функції [8] $\delta_+(\varphi - \varphi_i) \mu(\varphi) = \mu(\varphi_i)$, можемо записати

$$\Delta w = -\frac{1}{r^2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\mu_{i+1} - \mu_i)}{\mu_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (\mu_{i+1} - \mu_i) S_+(\varphi - \varphi_i)} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_i} \delta_+(\varphi - \varphi_i),$$

звідки отримаємо остаточний вигляд рівняння рівноваги

$$\Delta w = -\frac{1}{r^2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\mu_{i+1} - \mu_i)}{\mu_{i+1}} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_i} \delta_+(\varphi - \varphi_i). \quad (8)$$

Запишемо переміщення w у вигляді неперервної функції кута φ з кусково-неперервною похідною так:

$$w = w_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (w_{i+1} - w_i) S_+(\varphi - \varphi_i). \quad (9)$$

Для такого подання w похідні виглядатимуть

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w_1}{\partial r} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial w_{i+1}}{\partial r} - \frac{\partial w_i}{\partial r} \right) S_+(\varphi - \varphi_i); \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial^2 w_{i+1}}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 w_i}{\partial r^2} \right) S_+(\varphi - \varphi_i); \quad (11)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \varphi} = \frac{\partial w_1}{\partial \varphi} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial w_{i+1}}{\partial \varphi} - \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} \right) S_+(\varphi - \varphi_i) + \sum_{i=1}^{n-1} (w_{i+1} - w_i) \Big|_{\varphi=\varphi_i} \delta_+(\varphi - \varphi_i); \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} &= \frac{\partial^2 w_1}{\partial \varphi^2} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial^2 w_{i+1}}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 w_i}{\partial \varphi^2} \right) S_+(\varphi - \varphi_i) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial w_{i+1}}{\partial \varphi} - \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\varphi=\varphi_i} \delta_+(\varphi - \varphi_i) + \sum_{i=1}^{n-1} (w_{i+1} - w_i) \Big|_{\varphi=\varphi_i} \delta'_+(\varphi - \varphi_i). \end{aligned} \quad (13)$$

Тепер можемо записати рівняння рівноваги у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \Delta w_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (\Delta w_{i+1} - \Delta w_i) S_+(\varphi - \varphi_i) + \frac{1}{r^2} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial w_{i+1}}{\partial \varphi} - \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\varphi_i} \delta_+(\varphi - \varphi_i) + \\ + \frac{1}{r^2} \sum_{i=1}^{n-1} (w_{i+1} - w_i) \Big|_{\varphi_i} \delta'_+(\varphi - \varphi_i) = -\frac{1}{r^2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\mu_{i+1} - \mu_i)}{\mu_{i+1}} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi_i} \delta_+(\varphi - \varphi_i). \end{aligned} \quad (14)$$

Отож, отримаємо сукупність рівнянь Лапласа з відповідними крайовими умовами

$$\Delta w_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \quad (15)$$

$$(w_{i+1} - w_i) \Big|_{\varphi=\varphi_i} = 0; \quad (16)$$

$$\left(\frac{\partial w_{i+1}}{\partial \varphi} - \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\varphi=\varphi_i} = -\frac{(\mu_{i+1} - \mu_i)}{\mu_{i+1}} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_i}. \quad (17)$$

Очевидно, що умова (16) є умовою рівності переміщень на лінії контакту $\varphi = \varphi_i$. Покажемо тепер, що умова (17) є умовою рівності дотичних напружень. Справді, якщо переписати (17) у такому вигляді:

$$\left(\mu_{i+1} \frac{\partial w_{i+1}}{\partial \varphi} - \mu_{i+1} \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\varphi=\varphi_i} = \left(-\mu_{i+1} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \mu_i \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\varphi=\varphi_i},$$

то після виконання нескладних алгебричних перетворень отримуємо

$$\frac{\mu_{i+1}}{r} \frac{\partial w_{i+1}}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_i} = \frac{\mu_i}{r} \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_i}, \quad (18)$$

що згідно з (2) свідчить про рівність напружень. Інакше кажучи, умови (16), (17) є однією з можливих форм запису умов ідеального контакту на лініях спаювання $\varphi = \varphi_i$.

Загальний розв'язок рівняння (15) шукатимемо у вигляді

$$w_i = \sum_{j=1}^{\infty} r^{q_j} (A_{ij} \cos(q_j \varphi) + B_{ij} \sin(q_j \varphi)) = \sum_{j=1}^{\infty} r^{q_j} w_{ij}^*. \quad (19)$$

Надалі в перетвореннях, поки не визначимо значення q_j , упускатимемо підсумовування за індексом j та сам цей індекс, вважаючи, що умови виконуються для однакових q_j , індекс i засвідчує матеріал клину, в якому розглядають переміщення. Підставивши розв'язок (19) в умови (16) та (17), отримаємо такі співвідношення:

$$\begin{aligned} (A_{i+1} - A_i) \cos(q\varphi_i) + (B_{i+1} - B_i) \sin(q\varphi_i) &= 0, \\ -q(A_{i+1} - A_i) \sin(q\varphi_i) + q(B_{i+1} - B_i) \cos(q\varphi_i) &= \frac{(\mu_i - \mu_{i+1})}{\mu_{i+1}} \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi_i}, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (20)$$

Вводячи позначення

$$K_i^* = -\frac{(\mu_{i+1} - \mu_i)}{\mu_{i+1}} \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_i}, \quad A_i^* = A_{i+1} - A_i, \quad B_i^* = B_{i+1} - B_i, \quad (21)$$

вирази (20) можна записати так:

$$\begin{aligned} A_i^* \cos(q\varphi_i) + B_i^* \sin(q\varphi_i) &= 0, \\ -qA_i^* \sin(q\varphi_i) + qB_i^* \cos(q\varphi_i) &= K_i^*. \end{aligned} \quad (22)$$

Звідси знаходимо $A_i^* = -K_i^* \frac{\sin(q\varphi_i)}{q}$, $B_i^* = K_i^* \frac{\cos(q\varphi_i)}{q}$.

Вираз для переміщень згідно з (22) можна подати так:

$$w = A_1 \cos(q\varphi) + B_1 \sin(q\varphi) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{K_i^*}{q} \sin(q(\varphi - \varphi_i)) S_+(\varphi - \varphi_i). \quad (23)$$

Для визначення величини $K_i^* = -\frac{(\mu_{i+1} - \mu_i)}{\mu_{i+1}} \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_i}$ згідно з (12)

обчислимо похідну

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \varphi} &= -qA_1 \sin(q\varphi) + qB_1 \cos(q\varphi) - \sum_{i=1}^{n-1} q(-A_i^* \sin(q\varphi) + B_i^* \cos(q\varphi)) S_+(\varphi - \varphi_i) = \\ &= -qA_1 \sin(q\varphi) + qB_1 \cos(q\varphi) - \sum_{i=1}^{n-1} K_i^* \cos(q(\varphi - \varphi_i)) S_+(\varphi - \varphi_i). \end{aligned}$$

Звідси, прийнявши $\varphi = \varphi_j$, отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi_j} &= -qA_1 \sin(q\varphi_j) + qB_1 \cos(q\varphi_j) - \\ &- \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\mu_{i+1} - \mu_i)}{\mu_{i+1}} \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi_i} \cos(q(\varphi_j - \varphi_i)) S_+(\varphi - \varphi_i). \end{aligned} \quad (24)$$

Тепер для визначення величини $K_i^* = -\frac{(\mu_{i+1} - \mu_i)}{\mu_{i+1}} \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_i}$ можна записати таку рекурентну формулу:

$$K_j^* = -\frac{\mu_{j+1} - \mu_j}{\mu_{j+1}} (A_1 L_1^j + B_1 L_2^j), \quad (25)$$

де

$$\begin{aligned} L_1^j &= -q \sin(q\varphi_j) - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(\mu_{i+1} - \mu_i)}{\mu_{i+1}} L_1^i \cos(q(\varphi_j - \varphi_i)) S_+(\varphi - \varphi_i), \\ L_2^j &= q \cos(q\varphi_j) - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(\mu_{i+1} - \mu_i)}{\mu_{i+1}} L_2^i \cos(q(\varphi_j - \varphi_i)) S_+(\varphi - \varphi_i). \end{aligned}$$

Для визначення невідомих A_1, B_1 одержимо систему двох лінійних алгебричних рівнянь. Враховуючи те, що згідно з (23), (24)

$$\begin{aligned} w &= A_1 \cos(q\varphi) + B_1 \sin(q\varphi) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{q\mu_{j+1}} (A_1 L_1^i + B_1 L_2^i) \sin(q(\varphi - \varphi_i)) S_+(\varphi - \varphi_i), \\ \frac{\partial w}{\partial \varphi} &= -qA_1 \sin(q\varphi) + qB_1 \cos(q\varphi) - \\ &- \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{\mu_{i+1}} (A_1 L_1^i + B_1 L_2^i) \cos(q(\varphi - \varphi_i)) S_+(\varphi - \varphi_i), \end{aligned}$$

значення переміщень на берегах вирізу дорівнюють

$$w|_{\varphi=0} \equiv A_1$$

$$w|_{\varphi=\varphi_n} \equiv A_1 \left(\cos(q\varphi_n) + \sum_{i=1}^{n-1} -\frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{q\mu_{i+1}} L_1^i \sin(q(\varphi_n - \varphi_i)) S_+(\varphi_n - \varphi_i) \right) + \quad (26)$$

$$+ B_1 \left(\sin(q\varphi_n) + \sum_{i=1}^{n-1} -\frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{q\mu_{i+1}} L_2^i \sin(q(\varphi_n - \varphi_i)) S_+(\varphi_n - \varphi_i) \right),$$

а напруження –

$$\sigma_{\varphi z}|_{\varphi=0} \equiv \frac{\mu}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_n=0} = \frac{\mu}{r} r^q q B_1,$$

$$\sigma_{\varphi z}|_{\varphi=\varphi_n} \equiv \frac{\mu}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_n} = \frac{\mu}{r} r^q (-q A_1 \sin(q\varphi_n) + q B_1 \cos(q\varphi_n) - \quad (27)$$

$$- \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{\mu_{i+1}} (A_1 L_1^i + B_1 L_2^i) \cos(q(\varphi_n - \varphi_i)) S_+(\varphi_n - \varphi_i)).$$

Оскільки на краях вирізу задано однорідні умови, то умовою існування нетривіального розв'язку системи лінійних алгебричних рівнянь, побудованої згідно зі співвідношеннями (26), (27) та конкретними умовами на берегах вирізу, визначник заданої системи дорівнюватиме нулю. Згідно з цією умовою обчислюємо величину q_j , яка визначає порядок сингулярності напружень.

Проілюструємо описаний метод побудови характеристичного рівняння та обчислення порядку сингулярності на конкретному прикладі. Побудуємо характеристичне рівняння для визначення власних значень, обчислимо порядок сингулярності напружень в околі точки сходження клинів у системі, яка складається з чотирьох клинів та жорсткого включення, розташованого на одній із ліній спаювання. Нехай кути розхилу клинів дорівнюють $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, а півбезмежне жорстке включення розташоване на лінії спаювання першого і четвертого клинів. У такому випадку згідно з наведеною методикою побудови характеристичного рівняння $n = 5$,

$$\varphi_0 = 0, \varphi_1 = \alpha_1, \varphi_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \varphi_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \varphi_4 = \sum_{i=1}^4 \alpha_i = 2\pi, \text{ кут}$$

розхилу вирізу дорівнює $\alpha_5 = 0$, переміщення на берегах вирізу дорівнюють нулю ($w|_{\varphi=0} = w|_{\varphi=2\pi} = 0$). Згідно зі співвідношеннями (26) та (25) одержимо таке характеристичне рівняння для визначення власних значень q_j :

$$\begin{aligned}
& \mu_2 \mu_3 \mu_4 \sin(2\pi q) + \mu_2 \mu_3 (\mu_4 - \mu_3) \cos(q(2\pi - \alpha_4)) \sin(q\alpha_4) + \mu_2 (\mu_2 - \mu_3) \times \\
& \times \cos(q(\alpha_1 + \alpha_2)) ((\mu_3 - \mu_4) \cos(q\alpha_4) \sin(q\alpha_4) - \mu_4 \sin(q(\alpha_3 + \alpha_4))) + \\
& + (\mu_1 - \mu_2) \cos(q\alpha_1) (-\mu_3 \mu_4 \sin(q(2\pi - \alpha_1)) - (\mu_2 - 2\mu_3) \cos(q\alpha_2) \cos(q\alpha_3) + \\
& + \mu_3 \sin(q\alpha_2) \sin(q\alpha_3)) \sin(q\alpha_4) + (\mu_2 - \mu_3) \mu_4 \cos(q\alpha_2) \sin(q(\alpha_3 + \alpha_4))) = 0.
\end{aligned} \tag{28}$$

Прийнявши в (28), що один із кутів α_i дорівнює нулю, або прирівнявши пружні сталі сусідніх клинів $\mu_i = \mu_{i+1}$, отримаємо як частковий випадок характеристичне рівняння для трьох клинів і жорсткого включення, яке розташоване на лінії спаювання. Аналогічно до рівняння (28) можна отримати рівняння для жорсткого включення, розташованого на ламаній межі поділу матеріалів [2].

Використовуючи рівняння (28), проведено обчислення порядку сингулярності $\lambda_j = 1 - q_j$ в околі точки сходження чотирьох спаяних між собою клинів та півбезмежного жорсткого включення, розташованого на одній із ліній спаювання. Результати обчислень видно на рисунках. На рис. 2 зображено графічну залежність порядку сингулярності від зміни кутів $0 \leq \alpha_1 \leq \pi, 0 \leq \alpha_3 \leq \pi/2, \alpha_2 = \pi/2, \alpha_4 = 2\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3$ при сталих значеннях модуля зсуву, взятих для металевих клинів $\mu_1 = 8,01 \cdot 10^4$ (сталь), $\mu_2 = 5,67 \cdot 10^4$ (мідь), $\mu_3 = 6,885 \cdot 10^4$ (чавун), $\mu_4 = 4,05 \cdot 10^4$ (бронза). З наведеної графічної залежності видно, що для металів при сталих значеннях модулів зсуву та значенню кута розхилу $\alpha_2 = \pi/2$ порядок сингулярності слабо залежить від зміни кутів розхилу і не є вищим, ніж порядок сингулярності у системі, складеній з двох клинів із модулями зсувів, які дорівнюють μ_2 та μ_4 .

На рис. 3 зображено зміну порядку сингулярності залежно від зміни модулів зсуву клинів $\mu_2 = k_1 \mu_1, \mu_3 = k_2 \mu_4, 1 \leq k_1 \leq 2, 0,5 \leq k_2 \leq 1$, які утворюють систему при сталих кутах розхилу $\alpha_1 = \pi/4, \alpha_2 = \pi/2, \alpha_3 = 3\pi/4, \alpha_4 = \pi/2$. Значення модулів зсуву першого і третього клинів дорівнюють $\mu_1 = 8 \cdot 10^4, \mu_4 = 4 \cdot 10^4$. Тут можна стверджувати, що зміна модуля зсуву впливає на порядок сингулярності сильніше, ніж зміна кутів розхилу. Найвищим за таких умов порядок сингулярності є при початковій конфігурації системи.

Отож, ми запропонували методику визначення порядку сингулярності напружень і побудови їхніх асимптотик у точці сходження довільної кількості спаяних між собою клинів. Методика ґрунтується на використанні апарата узагальнених функцій. Її застосування зводить розв'язування системи рівнянь порядку $2n$ (n – кількість клинів) до розв'язування системи другого порядку.

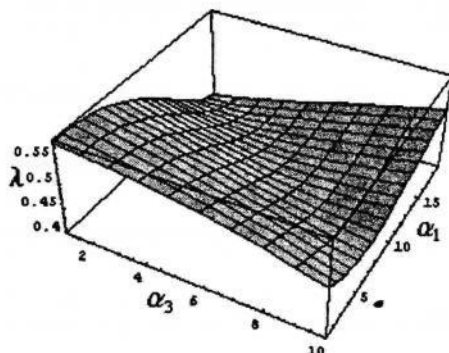


Рис. 2

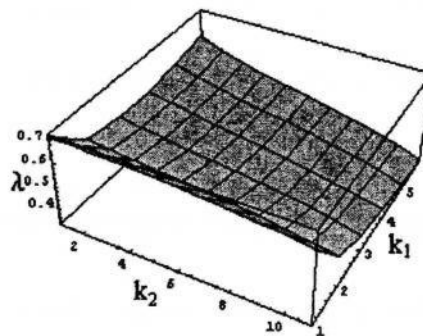


Рис. 3

Використавши запропоновані методики, отримали загальний вигляд характеристичного рівняння та асимптот напружень і переміщень при довільній кількості клинів; побудували характеристичні рівняння для системи з чотирьох клинів і вирізу, на берегах якого задано різні типи однорідних крайових умов; для системи, що складається з чотирьох клинів та розташованого на лінії спаювання абсолютно жорсткого включення, проведені числові дослідження.

1. Боджи Д.Б. Действие поверхностных нагрузок на систему из двух соединенных по граням упругих клиньев, изготовленных из различных материалов и имеющих произвольные углы раствора // Тр. АОИМ. Сер. Прикладная механика. – 1971. – № 2. – С. 87–96.
2. Боджи Д.Б. Плоская задача о нагруженной трещине, заканчивающейся на границе раздела материалов // Тр. АОИМ. Сер. Прикладная механика. – 1971. – № 4. – С. 196–198.
3. Божидарник В.В., Сулим Г.Т. Элементы теории пластичности та міцності. – Львів, 1994.
4. Бутвинник И.П., Бережницкий Л.Т., Похмурский В.И. О порядке сингулярности напряжений в композитах при антиплоской деформации // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1983. – № 2. – С. 102–103.
5. Денисюк І.Д. Сингулярні напруження в ізотропній матриці з пружним клином // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1992. – № 4. – С. 76–81.
6. Коляно Ю.М., Кулык О.М., Кушнир Р.М. О постановке обобщенной задачи сопряжения для уравнений термоупругости кусочно-однородных тел // ДАН УССР. Сер. А. – 1980. – № 2. – С. 44–49.
7. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. – М., 1981.

8. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – М., 1984.
9. Си Г., Либовиц Г. Математическая теория хрупкого разрушения // Разрушение. – М., 1975. – Т. 2.
10. Сулим Г., Махоркін М. Визначення порядку сингулярності напружень в околі точки сходження трьох клинів // Праці Наукового товариства ім. Шевченка. – 2003. – Т. 9.

APPLICATION OF APPARATUS OF GENERALIZED FUNCTIONS FOR DEFINING SINGULARITY ORDER UNDER LONGITUDINAL SHEAR IN ARBITRARY WEDGE SYSTEM

Mikola Mahorkin¹, Georgij Sulym²

¹ *Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
Naukova Str., 3b, 79053 Lviv, Ukraine*

² *Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine*

The procedure of using the generalized functions for defining the stress singularity order in the vicinity of an arbitrary wedge system's point under the longitudinal shear is proposed. The peculiarities of stresses in a plate consisting of four wedges and a semi-infinite absolutely rigid inclusion on the line of wedges join are studied.

Key words: singularity order, wedge system, generalized functions, corner point.

Стаття надійшла до редколегії 14.07.2005

Прийнята до друку 22.11.2006

УДК 539.3

КВАЗІСТАТИЧНІ ТЕМПЕРАТУРНІ НАПРУЖЕННЯ В СИСТЕМІ ШАР-ПІВПРОСТІР, ЗУМОВЛЕНІ ІМПУЛЬСНИМ НАГРІВОМ

Ольга ТУРЧИН¹, Валентин ЩУКІН²

¹Національний лісотехнічний університет України,
вул. Генерала Чупринки, 103, 79057 Львів, Україна

²Центр математичного моделювання
ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Дудаєва, 15, 79005 Львів, Україна

З використанням методу поліномів Лагерра та інтегрального перетворення Фур'є одержано аналітичний розв'язок плоскої квазістатичної задачі термопружності для системи шар-півпростір при імпульсному симетричному нагріві.

Ключові слова: термопружність, квазістатична задача, шаруваті тіла, поліноми Лагерра.

Характерною тенденцією розвитку сучасної техніки та більшості галузей машинобудування є розробка та широке застосування замість традиційних нових конструкційних матеріалів. Найперспективнішими новими матеріалами є композиційні матеріали, яким властива шаруватість та суттєва відмінність фізико-механічних властивостей складових шарів. Технологія виготовлення та умови експлуатації таких матеріалів пов'язані з високотемпературним локальним нагріванням, які зумовлюють високі рівні напружень на поверхнях контакту та в приконтактних ділянках. Для прогнозування необхідної міцності і надійності кусково-однорідних елементів конструкцій і приладів, що працюють в умовах змінного в часі високоінтенсивного теплового навантаження, потрібна методика ефективного дослідження температурних полів і термонапруженого стану композиту.

Мета нашої праці – розробка та числове тестування методики побудови аналітичного розв'язку квазістатичних задач термопружності для плоскошаруватих тіл і середовищ.

Розглянемо шар товщиною h , що лежить на масивному тілі (моделюється півпростором) з іншими теплофізичними характеристиками. Шар з певного моменту часу починає нагріватися імпульсним джерелом тепла, що симетрично розподілені по його вільній поверхні. Тепломеханічний контакт між шаром і півпростором будемо вважати ідеальним, а початкову температуру та напружений стан шару і півпростору такими, що дорівнюють нулю. Крім того, припустимо, що розміри джерел тепла в одному з напрямів значно більші за товщину шару,

тому зміною температури та напружено-деформованого стану в цьому напрямі знехтуємо (плоска задача).

Отож, задача теплопровідності формулюється так:

$$\Delta T^{(i)} = \tilde{a}_i^{-1} \partial_\tau T^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

$$T^{(i)}(\eta, \zeta, 0) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

$$\tilde{\lambda}_T^{(1)} \partial_\zeta T^{(1)} = -q(\eta, \tau), \quad \zeta = 0; \quad (3)$$

$$T^{(2)} = 0, \quad \zeta \rightarrow \infty, \quad (4)$$

$$T^{(1)} = T^{(2)}; \quad \tilde{\lambda}_T^{(1)} \partial_\zeta T^{(1)} = \tilde{\lambda}_T^{(2)} \partial_\zeta T^{(2)}, \quad \zeta = 1. \quad (5)$$

Тут і надалі всі функції та величини з індексом "1" належать до шару, а з індексом "2" – до півпростору, $T^{(i)}(\eta, \zeta, \tau)$ – температура, $\eta = x/h$,

$\zeta = y/h$, $\tau = a_0 t/h^2$, $\tilde{a}_i = a_i/a_0$, $\Delta = \partial_\eta^2 + \partial_\zeta^2$ – оператор Лапласа,

$\tilde{\lambda}_T^{(i)} = \lambda_T^{(i)} / \lambda_T^{(0)}$, $q(\eta, \tau) = \frac{q(\eta) S_+ (\tau_0 - \tau) S_+ (\tau)}{\lambda_T^{(0)} h}$, $\lambda_T^{(i)}$, a_i – відповідно, коефі-

цієнти тепло- і температуропровідності, $\tilde{l} = l/h$, l – півдовжина смуги, на якій розташовані джерела тепла, $q(\eta)$ – закон розподілу густини джерел, $\lambda_T^{(0)}$, a_0 – деякі розмірні величини, які вибираємо згідно з завданнями числового аналізу.

Застосовуючи до рівнянь (1), крайових умов (3), (4) та умов спряження (5) cos-перетворення Фур'є за змінною η та інтегральне перетворення Лагерра за змінною τ , після врахування початкових умов (2), одержимо трикутну послідовність крайових задач

$$d_{\tau\tau}^2 \bar{T}_n^{(i)} - \omega_i^2 \bar{T}_n^{(i)} = \beta_i \sum_{m=0}^{n-1} \bar{T}_m^{(i)}, \quad i = 1, 2; \quad (6)$$

$$\tilde{\lambda}_T^{(1)} d_\zeta \bar{T}_n^{(1)} \Big|_{\zeta=0} = -\bar{q}_n(\xi); \quad \bar{T}_n^{(2)} \Big|_{\zeta \rightarrow \infty} = 0; \quad (7)$$

$$\bar{T}_n^{(1)} = \bar{T}_n^{(2)}; \quad \tilde{\lambda}_T^{(1)} d_\zeta \bar{T}_n^{(1)} = \tilde{\lambda}_T^{(2)} d_\zeta \bar{T}_n^{(2)}, \quad \zeta = 1. \quad (8)$$

У формулах (6)–(9); $\bar{T}_n^{(i)}(\xi, \zeta) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\tau} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} T^{(i)}(\eta, \zeta, \tau) \cos(\eta\xi) d\eta \right] L_n(\lambda\tau) d\tau$ –

зображення за Лагерром і Фур'є, $L_n(\cdot)$ – поліноми Лагерра, $\omega_i = \sqrt{\xi^2 + \beta_i}$, $\beta_i = \lambda/\tilde{a}_i$, λ – масштабний множник.

Розв'язок задачі в трансформантах (6)–(8) згідно з [2] має вигляд

$$\bar{T}_n^{(i)}(\xi, \zeta) = \sum_{j=0}^n \left[A_{n-j}^{(i)}(\xi) G_j^{(i)}(\xi, \zeta) + B_{n-j}^{(i)}(\xi) W_j^{(i)}(\xi, \zeta) \right], \quad i = 1, 2; \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

де

$$G_j^{(i)}(\zeta, \omega_i) = e^{-\omega_i \zeta} \sum_{k=0}^j a_{j,k}^i \frac{(\omega_i \zeta)^k}{k!}; \quad W_j^{(i)}(\zeta, \omega_i) = e^{\omega_i \zeta} \sum_{k=0}^j a_{j,k}^i \frac{(-\omega_i \zeta)^k}{k!}, \quad (10)$$

а $a_{j,k}^i(\xi)$ задовольняють рекурентним співвідношенням

$$a_{j,k+1}^i = 0.5 \left(a_{j,k+2}^i - \frac{\beta_i}{\omega_i^2} \sum_{m=k}^{j-1} a_{m,k}^i \right), \quad (11)$$

при $a_{0,0}^i(\xi) \equiv 1, a_{j,0}^i \equiv 0, j = 1, 2, \dots$

Невідомі $A_n^{(i)}, B_n^{(i)}$ знаходимо зі співвідношень

$$B_n^{(2)}(\xi) \equiv 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

$$\begin{aligned} A_n^{(1)}(\xi) &= \frac{-e^{\omega_1} \left(\tilde{\lambda}_T^{(1)} \omega_1 + \tilde{\lambda}_T^{(2)} \omega_2 \right) f_n^{(1)} + \tilde{\lambda}_T^{(2)} \omega_1 \omega_2 f_n^{(2)} + \omega_1 f_n^{(3)}}{2\omega_1 \left(\tilde{\lambda}_T^{(1)} \omega_1 sh(\omega_1) + \tilde{\lambda}_T^{(2)} \omega_2 ch(\omega_1) \right)}, \\ A_n^{(2)}(\xi) &= \frac{e^{-\omega_1} \left(\tilde{\lambda}_T^{(1)} \omega_1 - \tilde{\lambda}_T^{(2)} \omega_2 \right) f_n^{(1)} + \tilde{\lambda}_T^{(2)} \omega_1 \omega_2 f_n^{(2)} + \omega_1 f_n^{(3)}}{2\omega_1 \left(\tilde{\lambda}_T^{(1)} \omega_1 sh(\omega_1) + \tilde{\lambda}_T^{(2)} \omega_2 ch(\omega_1) \right)}, \\ A_n^{(3)}(\xi) &= \frac{-\tilde{\lambda}_T^{(1)} f_n^{(1)} - \tilde{\lambda}_T^{(1)} \omega_1 sh(\omega_1) f_n^{(2)} + ch(\omega_1) f_n^{(3)}}{e^{-\omega_2} \left(\tilde{\lambda}_T^{(1)} \omega_1 sh(\omega_1) + \tilde{\lambda}_T^{(2)} \omega_2 ch(\omega_1) \right)}, \end{aligned} \quad (13)$$

де

$$\begin{aligned} f_n^{(1)}(\xi) &= -\bar{q}_n(\xi) - \sum_{j=1}^n \left[A_{n-j}^{(1)}(\xi) G_j^{(1)}(\xi, 0) + B_{n-j}^{(1)}(\xi) W_j^{(1)}(\xi, 0) \right]; \\ f_n^{(2)}(\xi) &= \sum_{j=1}^n \left[A_{n-j}^{(2)}(\xi) G_j^{(2)}(\xi, 1) - A_{n-j}^{(1)}(\xi) G_j^{(1)}(\xi, 1) - B_{n-j}^{(1)}(\xi) W_j^{(1)}(\xi, 1) \right]; \\ f_n^{(3)}(\xi) &= \sum_{j=1}^n \left[\tilde{\lambda}_T^{(2)} A_{n-j}^{(2)}(\xi) \partial_\zeta G_j^{(2)}(\xi, 1) - \tilde{\lambda}_T^{(1)} A_{n-j}^{(1)}(\xi) \partial_\zeta G_j^{(1)}(\xi, 1) - \tilde{\lambda}_T^{(1)} B_{n-j}^{(1)}(\xi) \partial_\zeta W_j^{(1)}(\xi, 1) \right]. \end{aligned}$$

Розв'язок вихідної задачі (1)–(5) одержимо у вигляді ряду за поліномами Лагерра

$$T^{(i)}(\eta, \zeta, \tau) = \frac{\lambda}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{T}_n^{(i)}(\xi, \zeta) \cos(\xi \eta) d\xi \right] L_n(\lambda \tau). \quad (14)$$

Напружено-деформований стан у композиті, зумовлений температурним полем (14), визначимо в припущенні, що його гранична поверхня вільна від навантажень, а на безмежності переміщення та напруження дорівнюють нулю.

Стосовно ключових функцій $\theta^{(i)}(\eta, \zeta, \tau) = \operatorname{div} \vec{U}^{(i)}$ і $w^{(i)}(\eta, \zeta, \tau)$ задача полягає в відшукуванні для кожного шару розв'язку двох рівнянь Пуассона

$$\Delta \theta^{(i)} = \tilde{\alpha}_T^{(i)} \frac{1 + \nu_i}{1 - \nu_i} \Delta T^{(i)}, \quad i = 1, 2; \quad (15)$$

$$\Delta w^{(i)} = -\frac{1}{1 - 2\nu_i} \partial_\zeta \theta^{(i)} + \tilde{\alpha}_T^{(i)} \frac{2(1 + \nu_i)}{1 - 2\nu_i} \partial_\zeta T^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad (16)$$

за нульових початкових умов

$$\theta^{(i)}(\eta, \zeta, 0) = w^{(i)}(\eta, \zeta, 0) = 0, \quad i = 1, 2; \quad (17)$$

умовах на безмежності

$$\theta^{(M)} = 0, \quad w^{(M)} = 0, \quad \zeta \rightarrow \infty; \quad (18)$$

та крайових умов і умов спряження

$$\begin{aligned} \sigma_{\zeta\zeta}^{(1)}(\eta, 0, \tau) &= 0; \quad \sigma_{\eta\zeta}^{(1)}(\eta, 0, \tau) = 0; \\ u^{(1)}(\eta, 1) &= u^{(2)}(\eta, 1), \quad w^{(1)}(\eta, 1) = w^{(2)}(\eta, 1), \\ \sigma_{\eta\zeta}^{(1)}(\eta, 1) &= \sigma_{\eta\zeta}^{(2)}(\eta, 1), \quad \sigma_{\zeta\zeta}^{(1)}(\eta, 1) = \sigma_{\zeta\zeta}^{(2)}(\eta, 1), \end{aligned} \quad (19)$$

де $\tilde{\alpha}_T^{(i)} = \alpha_T^{(i)} / \alpha_T^{(0)}$, $\tilde{E}_i = E_i / E_0$, $\alpha_T^{(i)}$, E_i , ν_i – відповідно, коефіцієнт лінійного температурного розширення, модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу i -го шару.

До рівнянь (15)–(16) та умов (18)–(19) застосуємо інтегральне перетворення Лагерра-Фур'є. В результаті одержимо послідовність крайових задач

$$d_{\zeta\zeta}^2 \bar{\theta}_n^{(i)} - \xi^2 \bar{\theta}_n^{(i)} = \tilde{\alpha}_T^{(i)} \frac{1 + \nu_i}{1 - \nu_i} (d_{\zeta\zeta}^2 \bar{T}_n^{(i)} - \xi^2 \bar{T}_n^{(i)}), \quad i = 1, 2; \quad (20)$$

$$d_{\zeta\zeta}^2 \bar{w}_n^{(i)} - \xi^2 \bar{w}_n^{(i)} = -\frac{1}{1 - 2\nu_i} d_\zeta \bar{\theta}_n^{(i)} + \tilde{\alpha}_T^{(i)} \frac{2(1 + \nu_i)}{1 - 2\nu_i} d_\zeta \bar{T}_n^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad (21)$$

з відповідно трансформованими крайовими умовами та умовами спряження.

Розв'язок рівнянь (20), (21) має вигляд

$$\bar{\theta}_n^{(i)}(\xi, \zeta) = C_n^{(i)}(\xi) \exp(\xi\zeta) + D_n^{(i)}(\xi) \exp(-\xi\zeta) + \tilde{\alpha}_T^{(i)} \frac{1 + \nu_i}{1 - \nu_i} \bar{T}_n^{(i)}(\xi, \zeta). \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \bar{w}_n^{(i)}(\xi, \zeta) = F_n^{(i)}(\xi) \exp(\xi \zeta) + H_n^{(i)}(\xi) \exp(-\xi \zeta) - \\ - \frac{\zeta}{2(1-2\nu_i)} [C_n^{(i)}(\xi) \exp(\xi \zeta) + D_n^{(i)}(\xi) \exp(-\xi \zeta)] + \frac{\tilde{\alpha}_T^{(i)}}{\beta_i} \frac{1+\nu_i}{1-\nu_i} d_\gamma \tilde{T}_n^{(i)}(\xi, \zeta), \end{aligned} \quad (23)$$

де $\tilde{T}_n^{(i)}(\xi, \zeta) = \bar{T}_n^{(i)}(\xi, \zeta) - \bar{T}_{n-1}^{(i)}(\xi, \zeta)$, $n = 1, 2, \dots$; $\tilde{T}_0^{(i)}(\xi, \zeta) = \bar{T}_0^{(i)}(\xi, \zeta)$.

Враховуючи вирази (22), (23) та умови (18), одержимо, що

$$C_n^{(M)} = F_n^{(M)} \equiv 0. \quad (24)$$

Задовольнивши трансформовані крайові умови та умови спряження, одержимо послідовність систем алгебричних рівнянь для визначення невідомих $C_n^{(1)}, D_n^{(1)}, F_n^{(1)}, H_n^{(1)}$

$$[d_{k,l}] \{C_n^{(1)}, D_n^{(1)}, F_n^{(1)}, H_n^{(1)}, D_n^{(2)}, H_n^{(2)}\}^T = \{f_{n,k}\}. \quad (25)$$

Знайшовши всі невідомі з систем (25), остаточний розв'язок задачі (16)–(19) подамо у вигляді

$$\theta^{(i)}(\eta, \zeta, \tau) = \lambda \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \bar{\theta}_n^{(i)}(\xi, \zeta) \cos(\xi \eta) d\xi \right] L_n(\lambda \tau); \quad (26)$$

$$w^{(i)}(\eta, \zeta, \tau) = \lambda \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \bar{w}_n^{(i)}(\xi, \zeta) \cos(\xi \eta) d\xi \right] L_n(\lambda \tau); \quad (27)$$

$$u^{(i)}(\eta, \zeta, \tau) = \lambda \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \xi^{-1} [\bar{\theta}_n^{(i)}(\xi, \zeta) - d_\gamma \bar{w}_n^{(i)}(\xi, \zeta)] \sin(\xi \eta) d\xi \right] L_n(\lambda \tau). \quad (28)$$

Числовий аналіз проводився для півпростору з властивостями алюмінієвого ступу ($a_2 = 11,9 \times 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$, $\lambda_T^{(2)} = 36 \frac{\text{А} \cdot \text{д}}{\text{м} \cdot \text{К}}$, $\alpha_T^{(2)} = 8,0 \times 10^{-6} \frac{1}{\text{К}}$, $A_2 = 343 \text{ А} \cdot \text{д}$, $\nu_2 = 0,33$) та покриття виготовленого з кераміки [3] ($a_1 = 90,6 \times 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$, $\lambda_T^{(1)} = 222 \frac{\text{А} \cdot \text{д}}{\text{м} \cdot \text{К}}$, $\alpha_T^{(1)} = 23,6 \times 10^{-6} \frac{1}{\text{К}}$, $A_1 = 70 \text{ А} \cdot \text{д}$, $\nu_1 = 0,33$).

На рис. 1 показано результати розрахунку безрозмірного температурного поля, а на рис. 2, 3 безрозмірних дотичних напружень на поверхні розділу матеріалів півпростору і покриття при $\zeta = \zeta_1 = 1,25$, зумовле-

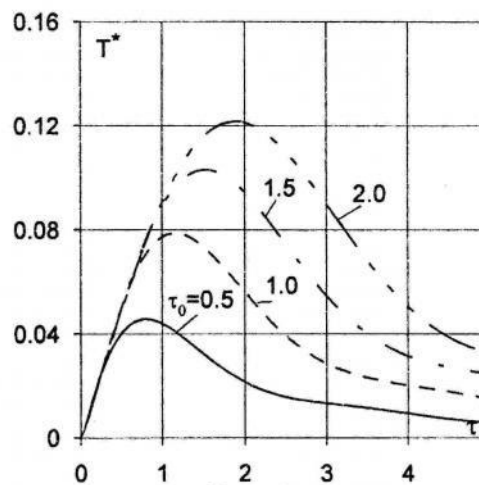


Рис. 1

них дією потоку тепла у вигляді прямокутного імпульсу тривалістю τ_0

$$q^*(\eta, \tau) = q^* S_+(1 - |\eta|) S_+(1 - \tau_0) S_+(\tau).$$

На рис. 2 зображено залежність зазначених напружень при $\gamma = 1$ від змінної τ для різних значень тривалості імпульсу. Як видно з наведеного, максимального за модулем значення дотичні напруження досягають перед закінченням дії імпульсу, причому час досягнення цього максимуму залежить від тривалості імпульсу (для наведених значень τ_0 , відповідно $0,9\tau_0$, $0,75\tau_0$, $0,7\tau_0$, $0,65\tau_0$). Зі збільшенням τ_0 зростає й абсолютне максимальне значення дотичних напружень. Це збільшення також залежить від τ_0 . При збільшенні τ_0 вдвічі від значення $\tau_0 = 0,5$ до $\tau_0 = 1,0$ максимум за модулем зростає на 53 %, а при аналогічному збільшенні від значення $\tau_0 = 1,0$ до $\tau_0 = 2,0$ – лише на 25 %.

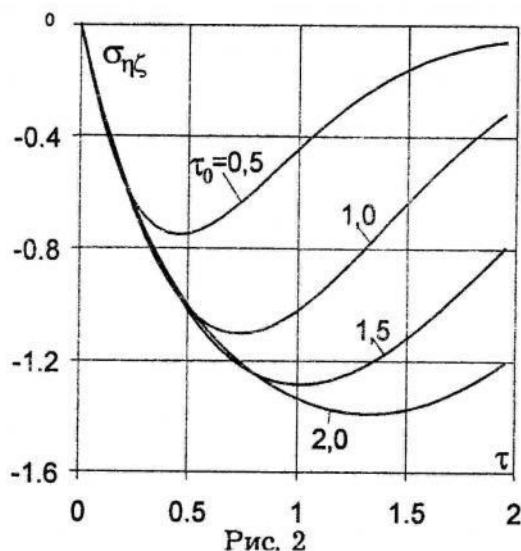


Рис. 2

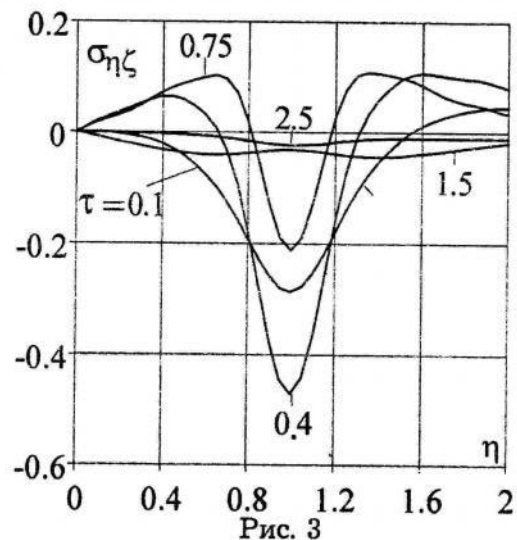


Рис. 3

На рис. 3 зображено результати розрахунку дотичних напружень на поверхні поділу шару і півпростору при $\tau_0 = 0,4$ для різних значень безрозмірного часу τ . Як видно з рисунків, максимального за модулем значення зазначені напруження досягають на краю ділянки нагріву ($\gamma = 1$), за винятком невеликої ділянки поблизу краю нагріву, під час перехідного періоду дотичні напруження змінюють знак.

1. Matysiak S., Wozniak Cz. On the modelling of heat conduction problem in laminated bodies // Acta mech. – 1986. – Vol. 65. – P. 223–238.
2. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К., 1992.

3. Галазюк В.А. Метод поліномів Чебишева-Лагерра в змішаній задачі для лінійного диференціального рівняння другого порядку в часткових похідних з постійними коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1981. – № 1. – С. 3–7.
4. Снеддон И. Преобразования Фурье. – М., 1955.
5. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. – М., 1979.

QUASISTATIC THERMAL STRESS ANALYSIS IN THE SYSTEM A LAYER-HALFSPACE FROM IMPULSIVE HEATING

Olha Turchyn¹, Valentyn Shchukin²

¹*National Forestry University of Ukraine,
General Chuprinka Str., 103, 79057 Lviv, Ukraine*

²*Center of Mathematical Modeling,
Dudayeva Str., 15, 79005 Lviv, Ukraine*

With the use of method of polynomials of Laguerre and integral transformation of Fourier the analytical decision of flat quasistatic problem of thermoelasticity is got for the system of layer-halfspace at the impulsive symmetric heating.

Key words: thermoelasticity, quasistatic task, stratified bodies, polynomials of Laguerre.

Стаття надійшла до редколегії 24.06.2005

Прийнята до друку 22.11.2006

УДК 539.3

ПЛОСКА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ВЗАЄМОДІЇ ЖОРСТКОГО КЛИНУ ТА ПРУЖНОГО ШАРУ ЗА ФРИКЦІЙНОГО ТЕПЛОУТВОРЕННЯ

Петро КРАСНЮК, Юрій МАНДЗИК, Роксоляна ЧАПОВСЬКА

Львівська державна фінансова академія,
вул. Коперника, 4, 79000 Львів, Україна

Сформульовано та побудовано розв'язок термopужної контактної задачі щодо взаємодії жорсткого клину та пружного шару за впливу теплоутворення від дії сил тертя при переміщенні штампa по поверхні основи. Розглянуто методику зведення граничної задачі термopужності до побудови розв'язку системи інтегральних рівнянь шляхом підстановки виразів для контактних напружень через інтерполяційні поліноми Лагранжа, коефіцієнти яких обчислюються з системи лінійних алгебричних рівнянь. Явно виділено логарифмічну особливість контактних напружень, спричинену існуванням розриву нахилу дотичної до профілю всередині ділянки взаємодії тіл. Досліджено вплив фрикційного теплоутворення на механізм взаємодії штампa з основою, а також проаналізовано ситуацію щодо зміни контактних напружень зі збільшенням кута при вершині утискуваного тіла.

Ключові слова: плоска контактна задача, жорсткий клин, пружний шар, фрикційне теплоутворення.

Сьогодні більшість досліджень термopужних контактних задач з врахуванням фрикційного теплоутворення проведено для тіл, модельованих пружними півпросторами [1–5], в які втискуються штампa з плоскою або параболічною основою. Водночас поза увагою дослідників залишаються задачі про вплив фрикційного теплоутворення на механізм взаємодії з основою штампa у формі клина. Однак таким класом задач не варто нехтувати, оскільки тіло у формі клина моделює дію ріжучого інструмента, а дослідження термомеханічних процесів, які відбуваються при механічній обробці матеріалу, потрібне для розроблення ефективних технологій у машинобудуванні.

Мета нашої праці – розглянути статичну термopужну контактну задачу для трибосистеми, що складається з пружного шару, защемленого з основи, по поверхні якого переміщується штамп клиноподібної у плані форми. Враховується теплоутворення від дії сил тертя, підпорядкованих закону Амонтона.

У припущенні теплоізоляції штампa задача приведена до системи двох інтегральних рівнянь стосовно контактного тиску та функції температури ділянки контакту. Запропоновано числовий алгоритм розв'язку цієї системи рівнянь та досліджено вплив фрикційного теплоутворення на розподіл контактного тиску за взаємодії штампa та шару скінченної товщини h .

Контактні задачі теорії пружності про втиснення у пружний півпростір жорсткого клина розглядали у монографіях [6, 7].

Математичне формулювання задачі. Нехай жорсткий штамп у формі клина втиснутий віднесеною до одиниці довжини силою P до пружного шару товщиною h , жорстко защемленого з основи (рис. 1). Ділянка контакту між штампом і шаром описується нерівностями $|x| \leq a$; $|z| < \infty$. Припускається, що штамп у напрямі осі z переміщується по поверхні шару з малою швидкістю v . За рахунок дії сил тертя τ_{yz} , які виникають на співдотичних поверхнях і підпорядкованих закону Амонтона ($\tau_{yz} = f\sigma_y$), в площині контакту відбувається теплоутворення, причому внаслідок термоізоляції штампів все тепло, згенероване на контакті, скеровується тільки у шар. Між нижньою поверхнею шару та основою, температура якої дорівнює нулю, а також між верхньою площиною поза ділянкою контакту та оточуючим середовищем нульової температури припускається теплообмін за законом Ньютона. Впливом дотичних напружень τ_{yx} на ділянці контакту нехтуємо.

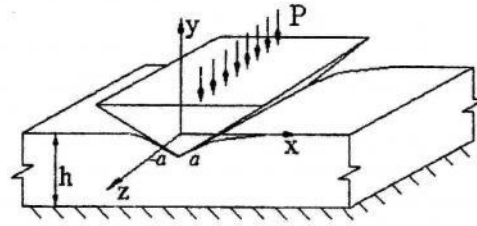


Рис. 1

Згадані припущення реалізують у системі плоску деформацію, тому в математичному плані задача зводиться до інтегрування системи диференціальних рівнянь теплопровідності

$$\partial_x^2 T + \partial_y^2 T = 0 \quad (1)$$

і термопружності

$$\begin{aligned} (1 - 2\nu)(\partial_x^2 u_x + \partial_y^2 u_x) + \partial_x(\partial_x u_x + \partial_y u_y) &= 2\alpha(1 + \nu)\partial_x T; \\ (1 - 2\nu)(\partial_x^2 u_y + \partial_y^2 u_y) + \partial_y(\partial_x u_x + \partial_y u_y) &= 2\alpha(1 + \nu)\partial_y T, \end{aligned} \quad (2)$$

за граничних і контактних умов

$$y = -h: \partial_y T = \gamma T; u_x = 0; u_y = 0, \quad (3)$$

$$y = 0: |x| \leq a: \partial_y T = f\nu\lambda^{-1}p(x); u_y = -\delta + \operatorname{ctg}(\alpha_0)|x|; \tau_{yx} = 0; \quad (4)$$

$$|x| > a: \partial_y T = -\gamma_0 T; \sigma_y = 0; \tau_{yx} = 0. \quad (5)$$

Замикають систему диференціальних рівнянь і граничних умов співвідношення рівноваги штампів як жорсткого цілого

$$\int_{-a}^a p(x) dx = P, \quad (6)$$

обмеженості контактного тиску $p(\pm a) = 0$ та умови теплового балансу [1]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \partial_y T(x, 0) dx = \gamma \int_{-\infty}^{\infty} T(x, -h) dx. \quad (7)$$

У наведених формулах: δ – осадка штампа; α_0 – кут розклинення штампа; $p(x)$ – контактний тиск; T – температура; u_x, u_y – компоненти вектора переміщень; σ_y, τ_{yx} – компоненти тензора напружень; f – коефіцієнт тертя; E – модуль Юнга, α, ν, λ – відповідно коефіцієнти лінійного теплового розширення, Пуассона та теплопровідності; γ, γ_0 – коефіцієнт теплообміну відповідно між нижньою та верхньою площинами шару та оточенням. Решта позначень описано вище.

Побудова розв'язку та аналіз числових результатів. Сформульовану задачу (1)–(5) приведемо до системи двох інтегральних рівнянь стосовно контактної тиску та температури ділянки контакту згідно зі схемою, викладеною в [8], де використано інтегральне перетворення Фур'є за координатою x . Опустивши проміжні викладення, запишемо тільки остаточний результат – систему інтегральних рівнянь у безрозмірному вигляді. Для цього віднесемо лінійні розміри тіла до товщини шару h , напруження до величини $P h^{-1}$, температуру – до комбінації параметрів $\alpha E h (2P(1-\nu))^{-1}$ і, як наслідок, отримаємо

$$\begin{aligned} T(x, 0) - \frac{a}{\pi} B i_0 \int_{-1}^1 T(t, 0) \Phi(a(t-x), 0) dt &= \frac{a}{\pi} \chi \int_{-1}^1 p(t) \Phi(a(t-x), 0) dt; \\ \frac{a}{\pi} \int_{-1}^1 p(t) [\Delta(a(t-x)) - \chi H(a(t-x))] dt - \\ - \frac{a}{\pi} B i_0 \int_{-1}^1 T(t, 0) H(a(t-x)) dt &= \delta_* - A_* a |x|; \quad |x| \leq 1, \end{aligned} \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned} \chi &= \alpha E h f \nu (2\lambda(1-\nu))^{-1}; \quad \delta_* = \delta E (2P(1-\nu^2))^{-1}; \\ A_* &= \operatorname{ctg}(\alpha_0) E h (2P(1-\nu^2))^{-1}; \\ \Phi(x, y) &= \int_0^\infty \frac{\xi \operatorname{ch}(\xi(1+y)) + B i \operatorname{sh}(\xi(1+y))}{\xi (\xi \operatorname{sh}(\xi) + B i \operatorname{ch}(\xi)) + B i_0 (\xi \operatorname{ch}(\xi) + B i \operatorname{sh}(\xi))} \cos(\xi x) d\xi; \\ \Delta(x) &= \int_0^\infty \frac{1}{\xi} \frac{(3-4\nu) \operatorname{ch}(\xi) \operatorname{sh}(\xi) - \xi}{\xi^2 - (1-2\nu)^2 \operatorname{sh}^2(\xi) + 4(1-\nu)^2 \operatorname{ch}^2(\xi)} \cos(\xi x) d\xi; \end{aligned}$$

$$H(x) = \int_0^\infty \frac{1}{\xi} \frac{(\xi^2 + (3 - 4\nu) \operatorname{sh}^2(\xi)) (\xi \operatorname{sh}(\xi) + Bi \operatorname{ch}(\xi)) +}{\xi (\xi (\xi \operatorname{sh}(\xi) + Bi \operatorname{ch}(\xi)) + Bi_0 (\xi \operatorname{ch}(\xi) + Bi \operatorname{sh}(\xi)))} \times \\ \times \frac{+ 2(1 - \nu) \xi (\xi \operatorname{ch}(\xi) - Bi \operatorname{sh}(\xi) + \operatorname{sh}(\xi))}{\times (\xi^2 - (1 - 2\nu)^2 \operatorname{sh}^2(\xi) + 4(1 - \nu)^2 \operatorname{ch}^2(\xi))} \cos(\xi x) d\xi;$$

$p(x)$, $T(x, y)$, a – відповідно безрозмірні функції контактної тиску та температури, а також безрозмірна межа проміжку контакту; $Bi = \gamma h$, $Bi_0 = \gamma_0 h$ – критерії Біо. Координата y змінюється в межах $-1 \leq y \leq 0$.

Замикають систему (8) умови рівноваги та обмеженості контактних напружень, коли ширина клина є більшою від значення a

$$a \int_{-1}^1 p(x) dx = 1; \quad p(\pm 1) = 0. \quad (9)$$

Для визначення температури шару маємо інтегральне зображення

$$T(x, y) = \frac{a}{\pi} \chi \int_{-1}^1 p(t) \Phi(a(t - x), y) dt + \frac{a}{\pi} Bi_0 \int_{-1}^1 T(t, 0) \Phi(a(t - x), y) dt.$$

Зауважимо, що у випадку теплоізоляції поверхні $y = 0$ поза ділянкою контакту ($Bi_0 = 0$) задача суттєво спрощується. Треба розв'язати тільки одне інтегральне рівняння стосовно контактної тиску

$$\frac{a}{\pi} \int_{-1}^1 p(t) [\Delta(a(x - t)) - \chi H(a(x - t))] dt = \delta_* - A_* a |x|; \quad |x| \leq 1 \quad (10)$$

за умов (9). Усі наведені формули для ядер правильні, коли в них прийняти $Bi_0 = 0$.

Розв'язок задачі (8), (9) шукатимемо з використанням відомого підходу [8]. Врахувавши те, що ядра інтегральних рівнянь (8) – функції $\varphi(x)$ і $\Phi(x, 0)$ мають логарифмічну особливість [7] (ядра $H(x)$ та $\Phi(x, y)$ є регулярними, коли $y > 0$), вибираємо вираз для функції $p(x)$ таким:

$$p(x) = \frac{2A_*}{\pi} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{|x|} \right) + \frac{\psi(x)}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad (11)$$

де $\psi(x)$ – неперервно-диференційована та обмежена функція, для якої добираємо подання у вигляді інтерполяційного полінома Лагранжа степеня n [9] за поліномами Чебишева першого роду $T_m(x)$ [10]

$$\psi(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \psi(x_j) \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{n-1} T_m(x_j) T_m(x) \right). \quad (12)$$

Тут $x_j = \cos((2j-1)\pi/(2n))$, ($j = 1, \dots, n$) – нулі полінома Чебишева першого роду порядку n [10], а при логарифмі у формулі (11) наведено асимптотичне значення контактного тиску при x , який прямує до нуля.

Щодо температури ділянки контакту, то $T(x, 0)$ також є неперервною та обмеженою функцією, для якої вибирається подання вигляду (12).

Підставивши вирази для контактного тиску (11) та температури вигляду (12) в систему інтегральних рівнянь (8) та знайшовши точно інтеграли з логарифмами за відомими формулами [11], а регулярні інтеграли обчисливши наближено за квадратурними формулами Гаусса, прийдемо до системи лінійних алгебричних рівнянь для обчислення коефіцієнтів розвинення в інтерполяційних поліномах Лагранжа. Невідомий параметр ψ підбирається так, щоб з достатньою обчислювальною точністю (здебільшого, відносна похибка не перевищуватиме 10^{-5}) виконувалися умови рівноваги з (9). Для розрахунків достатньо взяти степінь інтерполяційного полінома, який дорівнює $n = 20$ і тоді відносна похибка обчислень не перевищуватиме 1%. Щодо визначення параметра a , то треба зробити два зауваження.

1. Якщо маємо справу зі штампом фіксованої ширини a , то остаточна формула для контактного тиску подається формулою (11).

2. У випадку, коли ширина клина перевищує значення a , то воно є невідомим і обчислюється з умови $\psi(\pm 1) = 0$ [7], яка за числових розрахунків еквівалентна співвідношенню $\psi(\pm 1) < 10^{-5}$, де згадане значення 10^{-5} визначає похибку обчислень. Як наслідок, остаточний розв'язок можемо подати так:

$$p(x) = \frac{2A_*}{\pi} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{|x|} \right) + \psi_1(x) \sqrt{1-x^2}, \quad (13)$$

де для неперервно-диференційованої та обмеженої функції $\psi_1(x)$ вибирається подання у вигляді інтерполяційного полінома Лагранжа степеня n [9] за поліномами Чебишева $U_n(x)$ [10] другого роду порядку n

$$\psi_1(x) = \frac{2}{n+1} \sum_{j=1}^n \psi_1(x_j) (1-x_j^2) \left(1 + \sum_{m=1}^{n-1} U_m(x_j) U_m(x) \right); \quad (14)$$

$x_j = \cos(j\pi/(n+1))$, ($j = 1, \dots, n$). Тоді остаточний вираз для температури ділянки контакту $T(x, 0)$ також подається у вигляді полінома (14). Розрив нахилу дотичної до профілю всередині ділянки контакту (точка $x = 0$) призводить до наявності логарифмічної особливості контактного тиску $p(x)$.

На рис. 2, а та 2, б зображено розподіл контактний тиску та вигляд нормальних переміщень контактної поверхні шару $u_y(x, 0)$ пружної задачі, знайдені для різних значень параметра $\chi = (f\nu\alpha Eh)/(2\lambda(1-\nu))$, що, як було показано в [8], визначає інтенсивність теплоутворення. Індеси кривих цих рисунків відповідають таким величинам параметра χ : 0,5, 1,0 і 1,5 (штрихові лінії – $\chi = 0$). Решта параметрів $\nu = 0,3$, $Bi = 2,0$, $Bi_0 = 0$, $\alpha_0 = \pi/4$ та $(Eh)/(2P(1-\nu^2)) = 0,25$. Зростання параметра χ спричиняє зменшення осадки штампа, причому настає такий момент, що рівновага штампа

відбувається при від'ємних значеннях δ . Збільшення χ є причиною зменшення півширини ділянки контакту a , а за фіксованого χ ріст притисної сили P збільшує $|\delta|$ та значення a . Якщо рівновага штампа відбулася при від'ємних значеннях осадки, то ріст притисної сили додаткового

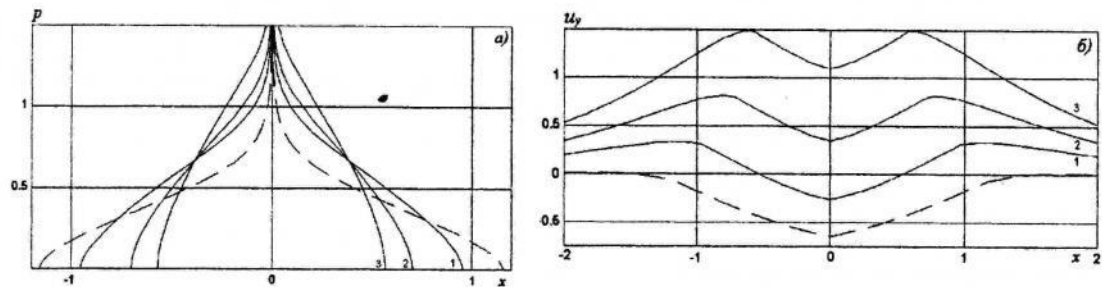


Рис. 2

викривлює контактну поверхню.

Однак для цього класу задач не характерні переважання якогось типу зовнішнього впливу: чисто механічного або теплового, що виявляється у відсутності критичних значень півширини ділянки контакту [8], на яких зміна притисної сили не впливає на величину проміжку взаємодії. Числові розрахунки засвідчують, що відбувається сумісний вплив

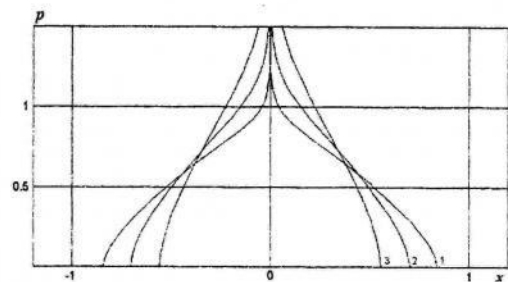


Рис. 3

термомеханічних чинників. Зокрема, за збільшення кута розклинення штампа простежується і у термопружній задачі ріст півширини ділянки контакту. На відміну від суто пружної задачі, де збільшення притисної сили спричиняє ріст осадки, у термопружній задачі ріст проміжку контакту збільшує теплоутворення і спричиняє зростання викривлення поверхні шару, що реалізується ростом від'ємного значення δ . Ці висновки ілюструє рис. 3, де наведено графіки розподілу контактного тиску за різних значень параметра α_0 : 1 – $\pi/3$, 2 – $\pi/4$ та 3 – $\pi/6$ коли $\chi = 1,0$. Решта значень параметрів збігаються з наведеними вище. За $\alpha_0 = \pi/3$ – $\delta \approx -0,1305$, коли $\alpha_0 = \pi/4$, то $\delta \approx -0,09$, у третьому випадку $\delta \approx -0,027$ ($\alpha_0 = \pi/6$).

Отже, ми сформулювали та побудували розв'язок термопружної контактної задачі щодо взаємодії жорсткого клина та пружного шару за впливу теплоутворення від дії сил тертя при переміщенні штампа по поверхні основи. Сформульована задача приведена до системи інтегральних рівнянь, розв'язок якої отримано шляхом підстановки виразів для контактних напружень через інтерполяційні поліноми Лагранжа, коефіцієнти яких обчислюють з системи лінійних алгебричних рівнянь. У виразі для контактних напружень явно виділена логарифмічна особливість, спричинена

існуванням розриву нахилу дотичної до профілю всередині ділянки взаємодії тіл. Дослідження впливу фрикційного теплоутворення дає змогу стверджувати про зменшення ділянки контакту за збільшення інтенсивності теплоутворення. Водночас за збільшення кута розклинення штампа маємо ріст півширини ділянки контакту у суто пружній і в термопружній задачі.

1. Грилицький Д.В. Система сингулярних інтегральних рівнянь для плоскої контактної задачі термопружності при стаціонарному тепловиділенні на площадці контакту // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1984. – Вип. 22. – С. 29–34.
2. Грилицький Д.В., Паук В.И. Контактная задача для толстого шероховатого слоя с учетом изнашивания и теплообразования // Физ.-хим. механика материалов. – 1989. – Т. 25, № 3. – С. 78–83.
3. Грилицький Д.В., Евтушенко А.А., Паук В.И. Плоская контактная задача нестационарной термоупругости с учетом теплообразования от трения // Изв. РАН. МТТ. – 1994. – № 5. – С. 62–68.
4. Ворovich И.И., Пожарский Д.А., Чебанов М.И. Задача термоупругости о движущемся штампе при учете тепловыделения от трения // Прикладная математика и механика. – 1994. – Т. 58. – Вып. 3. – С. 161–166.
5. Евтушенко А.А., Паук В.И. Нестационарная контактная задача для шероховатых тел при учете теплообразования от трения // Прикладная математика и механика. – 1996. – Т. 60. – Вып. 4. – С. 691–696.
6. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия / Пер. с англ. – М., 1989.
7. Ворovich И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные контактные задачи теории упругости. – М., 1974.
8. Краснюк П.П. Контактное взаимодействие жесткого штампа с упругим слоем при фрикционном теплообразовании // Прикладная механика. – 2000. – Т. 36. – № 1. – С. 130–138.
9. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. – М.; Л., 1949.
10. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган: Пер. с англ. – М., 1979.
11. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезв, тонких включений и подкреплений. – М., 1986.

**A FLAT CONTACT PROBLEM OF INTERACTION OF THE RIGID
WEDGE AND ELASTIC LAYER AT FRICTIONAL HEAD
GENERATION**

Peter Krasnyuk, Yuriy Mandzyk, Roxolyana Chapovska

*Lviv State Finance Academy,
Kopernika Str., 3, 79000 Lviv, Ukraine*

In work statement is made and the decision thermoelastic contact problem of interaction of a rigid wedge and an elastic layer is constructed at influence head generations from influence of forces of friction at moving a stamp on a surface of the basis. The technique of reduction of a boundary problem thermoelastic to construction of the decision of system of the integrated equations is considered by substitution of expressions for contact pressure through interpolation Lagrange's which factors receive from system of the linear algebraic equations. The logarithmic feature of contact pressure caused by existence of break of an inclination of a tangent to a structure inside area of interaction of ph is obviously allocated. Influence frictional head generations on the mechanism of interaction of a stamp and the basis are investigated, and also the situation concerning change of contact pressure is analysed at increase in a corner at top of a pressed body.

Key words: flat contact problem, rigid wedge, elastic layer, frictional head generation.

Стаття надійшла до редколегії 18.11.2006

Прийнята до друку 22.11.2006

УДК 539.3

ВПЛИВ КОНТАКТУ БЕРЕГІВ ДВОХ СПІВВІСНИХ ТРІЩИН НА НАПРУЖЕНИЙ СТАН ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ В УМОВАХ ЧИСТОГО ЗГИНУ

Віктор ОПАНАСОВИЧ¹, Роман СЕЛІВЕРСТОВ²

¹Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

²Львівський регіональний інститут державного управління Національної
академії державного управління при Президентові України,
вул. Сухомлинського, 16, 79491 Львів, Україна

Використовуючи теорію згину пластин шостого порядку, проаналізовано напружений стан трансверсально-ізотропної пластини з двома колінеарними наскрізними тріщинами, береги яких контактують під час деформування пластини. З'ясовано, що врахування контакту берегів тріщин знижує коефіцієнти інтенсивності напружень, контактне зусилля не стає вздовж тріщини, як у класичній теорії згину, а збільшується з наближенням до вершини тріщини.

Ключові слова: трансверсально-ізотропна пластина, тріщина, згин, контактне зусилля.

Напружений стан ізотропних пластин з тріщинами, береги яких не контактують під час згину пластини, достатньо проаналізований. Результати цих досліджень зібрані в [1]. В монографії [2] показано спосіб поширення цих результатів на випадок трансверсально-ізотропних пластин у межах уточнених теорій шостого порядку. Врахування контакту берегів тріщини при згині пластини за класичною теорією розглянуто в працях [3, 4], вважалося, що контакт відбувається вздовж лінії на стиснутому боці пластини. У [5, 6] методом скінченних елементів досліджено вплив закриття тріщини на напружений стан пластини Рейснера в умовах чистого згину, причому в [6] ділянка контакту не вважалася наперед лінійною, а визначалася в процесі розв'язування задачі. Мета нашої праці, – застосовуючи теорію згину пластин типу Тимошенка [7] і підхід, запропонований в [8, 9], дослідити коефіцієнти інтенсивності напружень і моментів у вершинах двох співвісних тріщин, береги яких взаємодіють під час деформування пластини в розумінні праць [3–5].

Формулювання задачі. Розглянемо безмежну трансверсально-ізотропну пластину завтовшки h , ослаблену двома співвісними прямолінійними наскрізними тріщинами завдовжки $2l$ кожна і з відстанню $2c$ між їхніми сусідніми (внутрішніми) вершинами. До берегів тріщин прикладені самозрівноважені сталі згинальні моменти M , а на нескінченності навантаження немає. Вважаємо, що під час деформування пластини береги тріщин контактують вздовж лінії на її стиснутому боці (поверхня $\tilde{z} = h/2$).

Зіставимо серединну площину пластини (площину ізотропії) з площиною xOy декартової системи координат $Oxy\bar{z}$ так, щоб береги тріщин були паралельними до осі Ox , а початок координат був посередині відрізка, який сполучає внутрішні вершини тріщин. У геометричних центрах тріщин, які визначаються координатами $(\mp(c+l); 0; 0)$, виберемо локальні системи координат $O_k x_k y_k$ ($k = 1, 2$), осі $O_k x_k$ яких спрямовані вздовж берегів тріщин.

Розв'язком сформульованої задачі є суперпозиція двох розв'язків [3, 8]: плоскої задачі теорії пружності з крайовими умовами

$$\sigma_{y_k}^{\pm} + i\sigma_{x_k y_k}^{\pm} = -T^{(k)}/h \quad (|x_k| < l, \quad k = 1, 2), \quad (1)$$

та задачі про згин пластини за таких крайових умов:

$$M_{y_k}^{\pm} + iH_{x_k y_k}^{\pm} = hT^{(k)}/2 - M, \quad Q_{y_k}^{\pm} = 0 \quad (|x_k| < l, \quad k = 1, 2), \quad (2)$$

де σ_{y_k} , $\sigma_{x_k y_k}$ – компоненти тензора напружень у локальній системі координат; $T^{(k)}$ – невідомі контактні зусилля (вважаємо, що $T^{(k)} > 0$, тобто контакт відбувається вздовж усієї довжини тріщини); індекси “+” і “–” позначають граничні значення функцій при $y_k \rightarrow \pm 0$.

Крім того, повинні виконуватись умови контакту

$$\left[\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right]_{\Pi}^{+} - \left[\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right]_{\Pi}^{-} + \left(\left[\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right]_{\text{З}}^{+} - \left[\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right]_{\text{З}}^{-} \right)_{\bar{z}=\frac{h}{2}} = 0. \quad (3)$$

Тут v_k – компонента вектора переміщення в локальній системі координат $O_k x_k y_k$ у напрямі осі $O_k y_k$; індекси “п” і “з” позначають величини, пов'язані відповідно з плоскою задачею теорії пружності і задачею згину пластини.

Зведення задачі до системи інтегральних рівнянь. Розв'язок плоскої задачі теорії пружності для загального випадку розташування тріщин у пластині наведено в [10]. У випадку двох співвісних тріщин він набуде вигляду

$$T^{(k)} = -\frac{h}{\pi} \sum_{j=1}^2 \int_{-l}^l K_{kj}(t, x_k) g_j(t) dt \quad (k = 1, 2), \quad (4)$$

де

$$g_j(x) = \frac{E}{4} \frac{\partial}{\partial x_j} [v^{+} - v^{-}]; \quad (5)$$

$$K_{jj}(t, x_k) = \frac{1}{t - x_j}; \quad K_{kj}(t, x_k) = \frac{1}{t - x_k + 2(-1)^j(l - c)} \quad (k \neq j);$$

E – модуль пружності матеріалу пластини в площині ізотропії.

Згин пластини досліджується за теорією, запропонованою І. О. Прусовим [7], визначальні співвідношення якої запишемо так:

$$M_{y_k} + iH_{x_k y_k} = m \left[\Phi_k(z_k) + \overline{\Phi_k(z_k)} \right] + n \left[z_k \overline{\Phi'_k(z_k)} + \overline{\Psi_k(z_k)} \right] +$$

$$+ \rho \left[2\overline{\Phi_k''(z_k)} + i \frac{\partial^2 \Omega_k(z_k, \bar{z}_k)}{\partial z_k^2} \right]; \quad (6)$$

$$Q_{x_k} - iQ_{y_k} = -2D \left[2\Phi_k'(z_k) - i \frac{\partial \Omega_k(z_k, \bar{z}_k)}{\partial z_k} \right], \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_k + iv_k) = \frac{h}{2} \left\{ 2\operatorname{Re} \Phi_k(z_k) + z_k \overline{\Phi_k'(z_k)} + \overline{\Psi_k(z_k)} + \right. \\ \left. + \frac{\rho}{n} \left[2\overline{\Phi_k''(z_k)} + i \frac{\partial^2 \Omega_k(z_k, \bar{z}_k)}{\partial \bar{z}_k^2} + i \frac{k_*^2}{4} \Omega_k(z_k, \bar{z}_k) \right] \right\}, \quad (8)$$

де $m = -D(1 + \nu)$; $n = D(1 - \nu)$; $\rho = \frac{4D}{k_*^2}$; $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$; $z_k = x_k + iy_k$;

$\Phi_k(z_k)$, $\Psi(z)$ – комплексні потенціали типу Колосова-Мусхелішвілі;

$\Omega_k(z_k, \bar{z}_k)$ – функція, яка задовольняє рівняння Гельмгольца

$$4 \frac{\partial^2 \Omega_k(z_k, \bar{z}_k)}{\partial z_k \partial \bar{z}_k} = k_*^2 \Omega_k(z_k, \bar{z}_k), \quad k_*^2 = \frac{12 G'}{h^2 G};$$

G і G' – модулі зсуву матеріалу пластини відповідно в площині ізотропії та в перпендикулярному до неї напрямі. Зазначимо також, що співвідношення (8) записане для основи пластини $\bar{z} = h/2$, уздовж якої береги тріщин взаємодіють.

Враховавши результати праць [6, 8] і принцип суперпозиції розв'язків [10], комплексний потенціал $\Phi_k(z_k)$ та функцію $\Omega_k(z_k, \bar{z}_k)$ шукаємо у вигляді

$$\Phi_k(z_k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^2 \int_{-l}^l \frac{f_j(t)}{t - z_{kj}} dt;$$

$$\Omega_k(z_k, \bar{z}_k) = \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^2 \operatorname{Im} \int_{-l}^l \frac{w_{kj} K_1(w_{kj})}{t - z_{kj}} f_j(t) dt,$$

де $z_{kj} = x_k + x_k^0 - x_j^0$; x_k^0 – абсциса центру k -ї тріщини; $K_1(x)$ – функція Макдональда першого порядку; $w_{kj} = k_* \sqrt{(t - z_{kj})(t - \bar{z}_{kj})}$, $f_j(t)$ – шукані дійсні функції.

На підставі формули (8) та залежності (5) для плоскої задачі теорії пружності, з умови (3) знайдемо зв'язок між функціями $g_j(x)$ і $f_j(x)$

$$g_j(x) = -\frac{Eh}{2(1 - \nu)} f_j(x). \quad (9)$$

Використавши розв'язок задачі згину пластини з двома співвісними тріщинами без врахування контакту їхніх берегів [8] і розв'язок плоскої

задачі теорії пружності (4) шляхом задоволення крайових умов (2) та з врахуванням того, що напружено-деформований стан пластин симетричний щодо осі Oy , одержимо систему сингулярних інтегральних рівнянь стосовно невідомої функції $\rho(x) = f_1(x_1/l) = -f_2(-x_1/l)$, яка після зведення інтегрування до проміжку $[-1; 1]$ і доповнення її умовами однозначності переміщень при обході тріщин по замкнутому контурі матиме вигляд

$$\begin{cases} \frac{m_1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{m_2 + 2\tilde{K}_2(|t-x|/\lambda)}{t-x} + \frac{m_2 + 2\tilde{K}_2(|t-x+\gamma|/\lambda)}{t-x+\gamma} \right] \rho(t) dt = \frac{2M}{n}; \\ \int_{-1}^1 \rho(t) dt = 0 \quad (|x| < 1), \end{cases} \quad (10)$$

де $m_1 = 4/(1-\nu)$; $m_2 = 3+2\nu$; $\lambda = h/(l\sqrt{12G'/G})$; $\gamma = 2(1+c/l)$; $\tilde{K}_2(x) = K_2(x) - 2/x^2$; $K_2(x)$ - функція Макдональда другого порядку.

Розв'язуючи СІР (6.10), треба стежити, щоб контактні тиски $T^{(k)}$ були додатними вздовж кожної тріщини. В протилежному випадку потрібно змінювати формулювання задачі.

Числовий аналіз результатів і висновки. Проаналізовано поведінку коефіцієнтів інтенсивності згинальних моментів і розподіл контактного тиску вздовж тріщин, розв'язавши систему інтегральних рівнянь (10) з використанням методу механічних квадратур. Зведені коефіцієнти інтенсивності згинальних моментів обчислювали за формулою

$$\tilde{K}_M^\pm = -K_M^\pm/(M\sqrt{l}) = \mp 2q\tilde{\rho}(\pm 1), \quad \tilde{\rho}(x) = n\sqrt{1-x^2}\rho(x)/(2M),$$

коефіцієнти інтенсивності напружень пов'язані з ними співвідношенням

$$k_1^\pm = -6K_M^\pm/h, \quad (11)$$

яке впливає з (9) та означення коефіцієнтів інтенсивності, а вираз для зведеного контактного тиску $\tilde{T} = hT/(2M)$ набуде вигляду

$$\tilde{T} = -\frac{6q}{S} \sum_{s=1}^S \left[\frac{1}{T_s - X_r} + \frac{1}{T_s - X_r + (-1)^j \gamma} \right] \tilde{\rho}(T_s) \quad (r = 1, 2, \dots, S-1),$$

де S - кількість вузлів методу механічних квадратур;

$$T_s = \cos \frac{\pi(2s-1)}{2S}; \quad X_r = \cos \frac{\pi r}{S};$$

$$\rho(1) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S (-1)^{s+1} \rho(T_s) \operatorname{ctg} \frac{(2s-1)\pi}{4S};$$

$$\rho(-1) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S (-1)^{s+S} \rho(T_s) \operatorname{tg} \frac{(2s-1)\pi}{4S}.$$

Результати числового аналізу задачі для випадку $\nu = 0,3$ показано на рис. 1–3. Щодо впливу параметра λ і відстані між тріщинами на напружений стан пластини, то якісно він такий самий, як і при нехтуванні контактом берегів тріщин [10]. Врахування контакту берегів тріщин суттєво зменшує значення зведених коефіцієнтів інтенсивності моментів (у 2–3 рази), але водночас зумовлює появу коефіцієнтів інтенсивності напружень. Графічні залежності для них не наведені, оскільки їх можна обчислити безпосередньо на підставі співвідношення (11). Як видно з рис. 1, для пластини нульової товщини контактний тиск не змінюється вздовж тріщини, що узгоджується з результатами згину пластини за класичною теорією [3].

При $\lambda > 0$ поблизу вершин

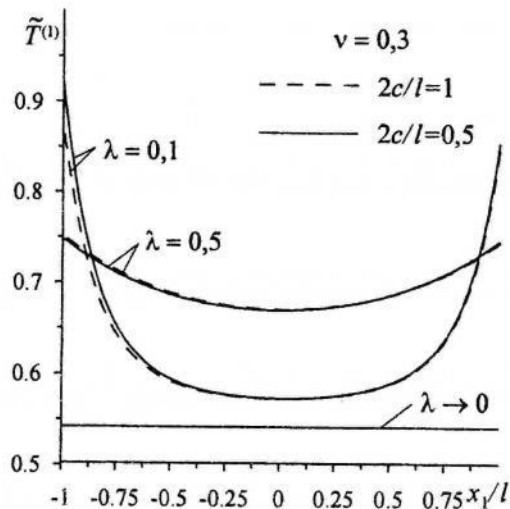


Рис. 1

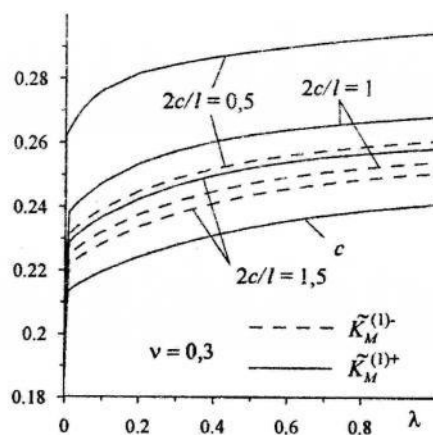


Рис. 2

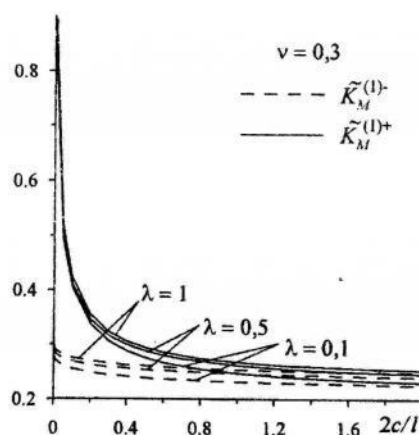


Рис. 3

тріщин $\tilde{T}$ спадає зі зменшенням λ , у середній частині тріщини — зростає, причому у зовнішніх вершинах він більший, ніж у внутрішніх. Зазначимо також, що вплив відстані між тріщинами на контактний тиск незначний порівняно з впливом параметра λ . При $c \rightarrow \infty$ результати збігаються з одержаними для випадку однієї тріщини [9].

1. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2-х т. / Под ред. Ю. Мураками. — М., 1990.

2. Мазурак Л. П., Бережницький Л. Т. Изгиб трансверсально-изотропных пластин с дефектами типа трещин. – К., 1990.
3. Шацький І. П. Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами // Доп. АН УРСР. Сер. А. Фіз.-мат. та техн. науки. – 1988. – № 7. – С. 49–51.
4. Kwon Y. W. Finite element analysis of crack closure in plate bending // *Comp. and Struct.* – 1989. – Vol. 32. – N 6. – P. 1439–1445.
5. Heming F. S. Sixth order analysis of crack closure in bending of an elastic plate // *Int. J. of Fracture.* – 1980. – Vol. 16 – N 4. – P. 289–304.
6. Joseph P. F., Erdogan F. Surface crack problems in plates // *Int. J. of Fracture.* – 1989. – Vol. 41. – P. 105–131.
7. Прусов И. А. Метод сопряжения в теории плит. – Минск, 1975.
8. Опанасович В. К., Селіверстов Р. Г. Згин плити з двома рівними прямолінійними колінеарними тріщинами за теорією Рейснера // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2001. – № 1. – С. 53–56.
9. Опанасович В. К., Новосад В. П., Селіверстов Р. Г. Врахування контакту берегів тріщини під час згину трансверсально-ізотропної пластини // *Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій: Збірник наукових праць.* – Вип. 5 / За заг. ред. О. Є. Андрейківа, Й. Й. Лучка, В. В. Божидарника. – Львів. – 2002. – С. 148–153.
10. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К., 1976.

THE INFLUENCE OF CLOSURE OF TWO COLLINEAR CRACKS ON THE STRESS STATE OF TRANSVERSAL-ISOTROPIC PLATE UNDER PURE BENDING

Viktor Opanasovych¹, Roman Seliverstov²

¹ Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

² Lviv Regional Institute of Public Administration of the NAPA
Sukhomlynskoho Str., 16, 79491 Lviv, Ukraine

Using Prusov's plate bending theory the stress state of transversal-isotropic plate with two collinear through cracks under pure bending is considered at the assumption of crack closure along line on compressed side. It is obtained that interaction between crack faces lead to decreasing of intensity of bending moments and to appearing plane stresses. The contact force is not constant as in the frames of classical theory and reach maximum value near the crack tips.

Key words: transversal-isotropic plate, crack, bending, contact force.

Стаття надійшла до редколегії 08.06.2005
Прийнята до друку 22.11.2006

УДК 539.3

ЧИСЛОВІ АЛГОРИТМИ ПРИ ПОБУДОВІ ОПТИМАЛЬНИХ РЕЖИМІВ ТЕРМООБРОБКИ СКЛЯНИХ ТІЛ ОБЕРТАННЯ

**Олександр ГАЧКЕВИЧ^{1,2}, Микола ГАЧКЕВИЧ¹, Євген ІРЗА¹,
Зигмунд КАСПЕРСЬКИЙ²**

¹*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 36, 79053 Львів, Україна*

²*Політехніка Опольська,
вул. Станіслава Миколайчука, 5, 45-271 Ополь, Польща*

Запропоновано методику побудови оптимальних за міцнісними та деформаційними характеристиками (напруженнями та деформаціями) режимів високотемпературної термообробки широко використовуваних в інженерній практиці скляних тіл обертання. Розглянуто клас нелінійних неklasичних екстремальних задач механіки, які виникають при такій оптимізації. В зв'язку з підвищеними температурами обробки згадані задачі описуються послідовно зв'язаними системами диференціальних рівнянь теплопровідності і термов'язкопружності, які є нелінійними за рахунок температурної залежності характеристик матеріалу, функціональних нелінійних критеріїв оптимальності й обмежень на функції керування та параметри стану.

Ключові слова: термов'язкопружність, нелінійні задачі, числові алгоритми.

Є актуальною розробка методики побудови оптимальних за міцнісними та деформаційними характеристиками (напруженнями та деформаціями) режимів високотемпературної термообробки широко використовуваних в інженерній практиці скляних тіл обертання. В літературі відоме формулювання задач оптимізації режимів нагріву скляних тіл, коли характеристики матеріалу приймають постійними, а процес деформування є пружним. У праці розглянуто клас нелінійних неklasичних екстремальних задач механіки, які виникають при такій оптимізації, в яких враховано в'язкопружний характер деформування при підвищених температурах, температурну залежність характеристик матеріалу, ефект склування, а також наявність функціональних нелінійних критеріїв оптимальності й обмежень на функції керування та параметри стану.

Вихідні допущення та формулювання задачі. З метою отримання заданого рівня залишкових напружень у скляних тілах обертання типова термообробка таких тіл відбувається за два етапи. На першому етапі тіло нагрівається від температури t_0 до деякої максимальної температури t^* , яка є вищою від температури склування t_g [1], а на другому – до початкової температури.

Сформулюємо математичну модель кількісного опису й оптимізації за напруженнями і деформаціями фізико-механічних процесів, які відбуваються при такій термообробці.

Приймаємо, що віднесене до криволінійної ортогональної системи координат $Ox^1x^2x^3$, скляне тіло займає область Ω евклідового простору R^3 і обмежене неперервною за Ліпшицем поверхнею Γ . Тіло піддається нагріву зовнішнім середовищем з температурою t_c через поверхню Γ . В тілі є розподілені джерела тепла густиною Q . Максимальна температура нагріву тіла є t^* (порядку 900°C для скла С-93). Потім тіло охолоджується зовнішнім середовищем з температурою t_c до стану з максимальною температурою t_k , яка є нижчою за температуру склування. На частині Γ_u поверхні тіла Γ задані переміщення $\bar{u} = (u_1^0, u_2^0, u_3^0)$, а на частині Γ_σ – силове навантаження, яке характеризується вектором $\bar{p} = (p^1, p^2, p^3)$, $(\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma = \Gamma)$.

Задачу формулюємо в квазістатичному формулюванні і в переміщеннях (з врахуванням залежності теплофізичних характеристик скла від температури).

За прийнятих припущень розподіл температури в тілі описується рівнянням теплопровідності [1]

$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = \nabla(\lambda \nabla t) + Q \quad (1)$$

при таких граничних і початкових умовах

$$\left[\lambda \frac{\partial t}{\partial n} + \alpha(t - t_c) \right]_\Gamma = 0; \quad t(M, 0) = t_0. \quad (2)$$

У зв'язку з тим, що максимальні температури нагріву є порядку 900°C , коефіцієнт α може враховувати теплообмін випромінюванням з зовнішнім середовищем [1].

Для кількісного опису напружено-деформованого стану скляних тіл при тепловому навантаженні врахуємо, що приріст компонент тензора повної деформації має вигляд [1]

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^t + d\varepsilon_{ij}^c + d\varepsilon_{ij}^{ost}. \quad (3)$$

Тут $d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2G} dS_{ij} + \frac{1}{9K} g_{ij} d\sigma$ – приріст компонент тензора пружної деформації в діапазоні температур $[t_0, t_g]$; $d\varepsilon_{ij}^t = \alpha_t g_{ij} dt$ – приріст компонент тензора термічної деформації; $d\varepsilon_{ij}^c = \frac{1}{2G\eta} S_{ij} d\tau$ – приріст компонент тензора деформації в'язкості в діапазоні температур $[t_g, t^*]$; $d\varepsilon_{ij}^{ost} = -\alpha_t g_{ij} d\Phi$ – приріст компонент тензора залишкової деформації при проходженні

температури склування tg ; S_{ij}, σ – відповідно девіаторна та кульова частини тензора напружень; α_t – лінійний коефіцієнт температурного розширення скла; K – модуль об'ємного стискування; G – модуль зсуву; η – коефіцієнт в'язкості; τ – час; g_{ij} – коваріантний метричний тензор.

Крім співвідношень (1)–(3), в області $\bar{\Omega}$ повинні виконуватися рівняння рівноваги

$$\nabla_j \sigma^{ij} + F^i = 0 \quad (4)$$

і механічні граничні умови

$$(n_j \sigma^{ij} - p^i)_{\Gamma_\sigma} = 0; u_{i/\Gamma_u} = u_i^0; (i = 1, \dots, 3). \quad (5)$$

Обмежимося випадком малих деформацій. Зв'язок між компонентами тензора деформацій $\hat{\varepsilon}$ і вектором переміщень $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ є лінійним, тобто

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i). \quad (6)$$

Співвідношення (1)–(6) становлять повну систему рівнянь прямої задачі для визначення температурного поля, вектора переміщень, тензорів деформацій і напружень при заданих значеннях температури навколишнього середовища t_c , густині внутрішніх джерел тепла Q і зовнішнього навантаження $\bar{p}$.

Задача оптимізації. Формулюється задача оптимізації за напруженнями і деформаціями режимів теплового навантаження (нагріву і охолодження) тіла при заданих механічних умовах.

На етапі нагріву від стану з початковою температурою t_0 до стану з максимальною температурою t^* функцією управління є температура навколишнього середовища t_c (позначимо її надалі умовно h), густина внутрішнього джерела тепла Q вважається заданою.

Задана функція управління h задовольняє такі умови:

$$h \in \{S_1\} : \forall h \in \{S_1\}, \exists \tau^* \in [0, \tau], \max t(M, \tau^*) = t^*, M \in \bar{\Omega}, \quad (7)$$

при заданих обмеженнях на температуру, напруження і деформації

$$t_0 \leq t(M, \tau) \leq t^*; \max \sigma_i(M, \tau) \leq \sigma_d; \max \varepsilon_i \leq \varepsilon_d;$$

$$M \in \bar{\Omega}, \tau \in [0, \tau^*], i = 1, \dots, 3, \quad (8)$$

де σ_i, ε_i – головні значення тензора нормальних напружень і деформацій;
 σ_d, ε_d – допустимі рівні напружень і деформацій; S_1 – множина функцій,
 на яких шукається розв'язок.

За критерій оптимальності вибираємо мінімальний час нагрівання до температури t^* . Тоді

$$I = \min \tau^* . \quad (9)$$

На етапі охолодження від стану з максимальною температурою t^* до стану з максимальною температурою t_k функція управління h повинна задовольняти умови

$$h \in \{S_2\} : \forall h \in \{S_2\}, \exists \tau_k \in [0, \tau], \max t(M, \tau_k) = t_k, M \in \bar{\Omega}, \quad (10)$$

де S_2 – множина функцій, на яких шукається розв'язок.

Повинні виконуватися обмеження (8). За критерій оптимальності вибираємо мінімум функціонала

$$I = \min F(\sigma_i^{ost}, \sigma_0), \quad (11)$$

який забезпечує досягнення мети термообробки – досягнення заданого рівня залишкових напружень у тілі.

Тут F – функціонал, який характеризує відхилення компонентів тензора залишкових напружень від заданих величин залишкових напружень σ_0 ;
 σ_i^{ost} – головні значення тензора залишкових напружень, які зумовлені залишковими деформаціями “заморожування” в момент склування.

У цьому формулюванні оптимізація за напруженнями режимів локального теплового навантаження скляних тіл полягає в мінімізації функціоналів (9), (11) за рахунок вибору функції управління h , при обмеженнях (7), (8), (10) і в'язях (1)–(6).

Методика розв'язування прямих задач. Ключове місце в схемі оптимізації займає побудова розв'язку прямої задачі, яка охоплює розв'язування задачі теплопровідності і термов'язкопружності. Оскільки геометрична конфігурація області, що займає тіло, часто досить складна, то використовуємо метод зважених нев'язок в поєднанні з кінцево-елементним підходом [3], який дає змогу отримувати наближені розв'язки сформульованих задач.

У зв'язку з цим співвідношення (1)–(6) піддаємо просторовій дискретизації на елементі розбиття і часовій дискретизації. Отримаємо систему нелінійних алгебричних рівнянь, які можна записати у вигляді [3]

$$[K_T] \{T\} = \{F_T\}; \quad [K_{U,T}] \{U\} = \{F_{U,T}\}, \quad (12)$$

де $[K_T]$, $[K_{U,T}]$ – відповідні матриці жорсткості; $\{F_T\}$, $\{F_{U,T}\}$ – вектори навантаження [3].

Система алгебричних рівнянь (12) загалом є нелінійною і може бути розв'язана за допомогою відповідного ітераційного методу.

Методика побудови розв'язку задачі оптимізації. Розв'язок сформульованої екстремальної задачі будемо на основі принципу поетапної параметричної оптимізації [4]. В рамках запропонованого підходу мінімізація функціоналів (9), (11) зводиться до задачі нелінійного програмування на знаходження мінімуму відповідних функцій вигляду $J = J(h_1, \dots, h_n)$, аргументами яких є значення функції управління h_i в дискретні моменти часу τ_i [4]. Отож, оптимізація за напруженнями і деформаціями режимів теплового навантаження тіл обертання зводиться до задачі на умовний екстремум функції J при в'язях (12) і обмеженнях (7), (8), (10). Для розв'язання цієї задачі застосовано метод прямого пошуку за Хуком і Джівсом [4].

Запропонована математична модель оптимізації використана при побудові оптимальних режимів зварки тонких скляних півсферичних оболонок.

Оптимізація режимів зварки скляних півсфер. Отриману методику використано для побудови оптимальних режимів зварки скляних півсфер, виготовлених із скла С-93. За нульове наближення прийнятий існуючий на виробництві режим зварки [1]. На рис. 1 штрихова крива відповідає нульовому наближенню функції управління t_c , а суцільна оптимальному

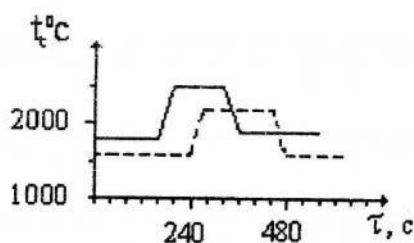


Рис. 1

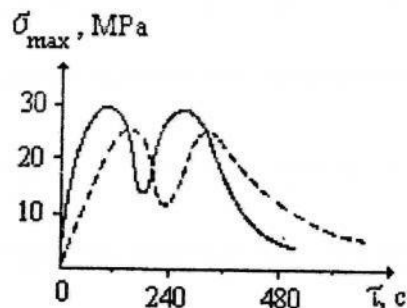


Рис. 2

розв'язку. Рис. 2 ілюструє відповідну зміну максимального розтягуючого напруження протягом усього процесу зварювання. З аналізу одержаних результатів випливає, що оптимальний режим дає змогу скоротити тривалість процесу зварювання на 25% і забезпечити заданий рівень залишкових напружень ($\sigma_{\text{доп}} = 75$ МПа), не порушуючи наявних обмежень.

Запропонована чисельна методика знаходження оптимальних за напруженнями та деформаціями режимів термообробки скляних тіл обертання, дає підстави врахувати в'язкопружний характер деформування в околі температури склування, термочутливість характеристик матеріалу і нелінійність відповідних обмежень, що допомагає ефективніше описати теплові та механічні процеси в скляних тілах при різного типу обмеженнях теплової і механічної природи, які наявні в реальних виробничих умовах.

1. Будз С.Ф., Ірза Є.М. Визначення залишкових напружень в зварних з'єднаннях скляних конструкцій // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1996. – 39. – № 1. – С. 23–30.
2. Гачкевич О., Гачкевич М., Ірза Є., Тріщ Б., Касперський З. Методика розрахунку режимів гартування скляних елементів машин і конструкцій // Машинознавство. – 2002. – № 2. – С. 3–6.
3. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. – М., 1986.
4. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М., 1975.

NUMERICAL ALGORITHMS FOR OPTIMAL REGIMES OF THERMAL TREATMENT OF AXIS-SYMMETRIC CIRCULAR GLASS SHELLS

**Olexandr Hachkevych^{1,2}, Mikola Hachkevych¹, Evgen Irza¹,
Zigmund Kaspersky²**

¹*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
Naukova Str., 3b, 79053 Lviv, Ukraine*

²*Technical University of Opole,
Stanislawa Mikolajchuka Str., 5, 45-271 Opole, Poland*

Methodology of optimal high temperature treatment regimes for wide used production of glass circular shells is proposed. Non linear non classical extremal mechanical problems which occur during such optimization is considered. As a result of high temperature treatment the above mentioned problems are described by combined differential equation systems of temperature conduction and thermal elastic viscosity which are non linear owing to temperature dependence of material characteristic, non linear optimal criteria, non linear limits of control function etc.

Key words: thermal elastic viscosity, non-linear problem, numerical algorithms.

Стаття надійшла до редколегії 04.08.2005

Прийнята до друку 22.11.2006

УДК 539.3

КОНТАКТ ЖОРСТКИХ ЗНОШУВАНИХ ТІЛ ПІД ДІЄЮ ЗМІНЮВАНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Георгій СУЛИМ¹, Олександр ЛЮБІН²

¹ Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

² Хмельницький національний університет
вул. Інститутська, 11, 29016 Хмельницький, Україна

Запропонована математична модель контактної взаємодії двох жорстких тіл з урахуванням зношування одного з них за моделлю старіння. З використанням аналітичного розв'язку контактної задачі сформульовано задачу керування зношуванням, коли як керуючу функцію використано діюче на з'єднання змінне навантаження. Задача керування розв'язана числовим методом. Для конкретного прикладу вивчено вплив параметрів у законі зношування на ресурс з'єднання.

Ключові слова: контактні напруження, зношування, модель старіння, керування зношуванням, циліндричний вузол тертя.

Процеси контактної взаємодії між елементами трибосистем ковзання зумовлені дією постійного чи змінного навантаження. У низці праць [1, 2, 4, 8], що містять аналітичні підходи до розв'язування контактних задач зі зношуванням, накладені на змінюване в часі навантаження обмеження, пов'язані лише з нехтуванням динамічними ефектами [1] чи необхідністю збільшення розмірів контактної області [2, 8]. Змінне навантаження використане як функції керування в задачах про керування зношуванням [6, 7]. Зазначимо, що можливість керування зношуванням пов'язана з вирішенням проблеми подовження надійної роботи трибосистеми, зокрема, а також із прогнозуванням її ресурсу.

Як розвиток результатів [7], ми розглянули задачу про керування зношуванням під час контакту жорстких тіл для однієї з моделей неусталеного зношування.

У працях [2, 9, 10] отримані

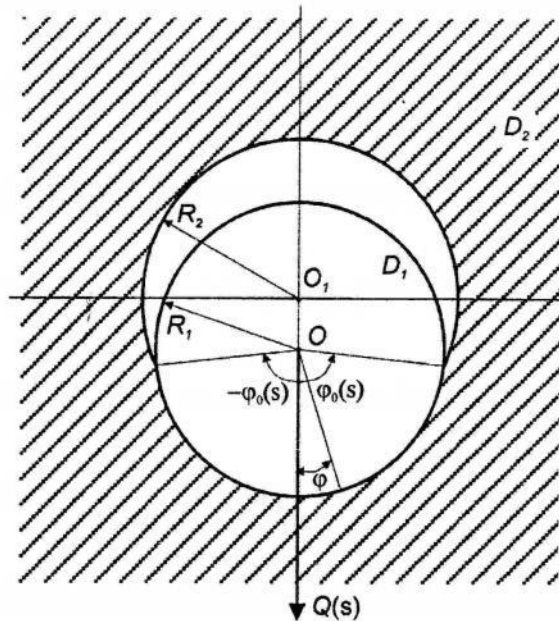


Рис. 1. Схема з'єднання

розв'язки зносоконтактних задач для пружних елементів з'єднань і зроблено висновок про те, що для зростаючого зношування зазначені розв'язки асимптотично наближаються до розв'язків спрощених задач, в яких елементи вважаються абсолютно жорсткими. Як видно з подальшого викладення, "жорстке" формулювання контактної задачі дає змогу одержати її точний аналітичний розв'язок, а це спрощує формулювання та розв'язування задачі керування.

Розглянемо контактну взаємодію між жорстким довгим суцільним циліндром D_1 радіуса R_1 , який з радіальним початковим прозором Δ поміщений у жорсткий корпус (обойму) D_2 внутрішнього радіуса $R_2 = R_1 + \Delta$ (рис. 1). Циліндр D_1 обертається навколо осі з постійною кутовою швидкістю ω та притиснутий до внутрішньої поверхні корпусу D_2 вертикальним змінюваним навантаженням $Q(s)$, яке припадає на одиницю довжини циліндра. Осі тіл D_1, D_2 – паралельні; зміщення осі циліндра колінеарне до діючого навантаження.

За припущенням, під час контактної взаємодії відбувається зношування внутрішньої поверхні корпусу, силами тертя для визначення нормальних контактних напружень та зношуванням циліндра нехтуємо.

Математична модель зносоконтактної задачі містить:

1) умову контакту

$$u_w(\varphi, s) = \Delta \left[\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_0(s)} - 1 \right]; \quad (1)$$

2) умову рівноваги циліндра D_1 –

$$Q(s) = R_1 \int_{-\varphi_0(s)}^{\varphi_0(s)} \sigma(\varphi, s) \cos \varphi d\varphi; \quad (2)$$

3) закон зношування внутрішньої поверхні корпусу

$$\frac{\partial u_w(\varphi, s)}{\partial s} = k_w \alpha [\sigma(\varphi, s)]^m s^{\alpha-1}. \quad (3)$$

Тут $u_w(\varphi, s)$ – лінійне зношення; $\sigma(\varphi, s)$ – контактний тиск; φ – кутова координата, що веде відлік від лінії дії сили $Q(s)$ ($-\varphi_0(s) \leq \varphi \leq \varphi_0(s)$); $\varphi_0(s)$ – змінюваний півкут контакту; s – шлях тертя для точки корпусу з координатою $\varphi = 0$, яка контактує від самого початку процесу; $k_w, m \geq 1, 0 < \alpha \leq 1$ – числові характеристики зношування матеріалу, які визначають на підставі експериментальних випробовувань.

Закон зношування у формі (3) відповідає зношуванню за моделлю старіння [5], причому для $\alpha = 1$ маємо загальний степеневий закон залежності інтенсивності зношування від контактної тиску.

Мета розв'язання зносоконтактної задачі – визначити кут $\varphi_0(s)$, контактний тиск $\sigma(\varphi, s)$ та зношування $u_w(\varphi, s)$ за заданих прозору та навантажувальної сили. Для досягнення мети спочатку здиференціюємо за s обидві частини (1), внаслідок чого

$$\frac{\partial u_w(\varphi, s)}{\partial s} = \Delta \cos \varphi \frac{\sin \varphi_0(s)}{\cos^2 \varphi_0(s)} \frac{d\varphi_0(s)}{ds}. \quad (4)$$

З урахуванням закону зношування (3) з (4) отримаємо для контактної тиску залежність

$$\sigma(\varphi, s) = \left[\frac{\Delta}{k_w \alpha s^{\alpha-1}} \frac{\sin \varphi_0(s)}{\cos^2 \varphi_0(s)} \frac{d\varphi_0(s)}{ds} \right]^{1/m} \cos^{1/m} \varphi. \quad (5)$$

Підставивши (5) в умову рівноваги (2), обчислюємо рівнодійну контактної тиску

$$Q(s) = R_1 \left[\frac{\Delta}{k_w \alpha s^{\alpha-1}} \frac{\sin \varphi_0(s)}{\cos^2 \varphi_0(s)} \frac{d\varphi_0(s)}{ds} \right]^{1/m} F[\varphi_0(s), m], \quad (6)$$

$$F[\varphi_0(s), m] = \int_{-\varphi_0(s)}^{\varphi_0(s)} \cos^{\frac{1}{m}+1} \varphi d\varphi$$

і, порівнюючи співвідношення (5) і (6), одержимо залежність

$$\sigma(\varphi, s) = \frac{Q(s) \cos^{1/m_2} \varphi}{R_1 F[\varphi_0(s), m]}, \quad (7)$$

згідно з якою тиск не залежить безпосередньо від параметра α у законі зношування (3).

На підставі диференціального рівняння (6) знаходимо залежність між s та $\varphi_0(s)$

$$\frac{k_w \alpha}{\Delta R_1^m} \int_0^s \xi^{\alpha-1} [Q(\xi)]^m d\xi = \int_0^{\varphi_0(s)} \frac{\sin z}{\cos^2 z} F^m[z, m] dz. \quad (8)$$

Після його розв'язання за відомою функцією $\varphi_0(s)$ лінійне зношування $u_w(\varphi, s)$ внутрішньої поверхні корпусу визначається за допомогою співвідношення (1).

Для жорстких тіл D_1, D_2 з формули (7) випливає, що контактний тиск не є нульовим на краях області контакту, що збігається з (2.33) [2, с. 92].

Формулювання та розв'язування задачі керування. На підставі отриманого аналітичного розв'язку зносоконтактної задачі (1)–(3) сформулюємо задачу керування зношуванням внутрішньої поверхні корпусу для подовження ресурсу заданого з'єднання.

Відповідно до конструкторської практики технічний ресурс вузла тертя визначають як напрацювання (в одиницях часу чи довжини шляху тертя) від початку експлуатації до переходу його у так званий граничний стан, за якого його подальше використання недоцільне або недопустиме. Досягнення граничного стану зумовлене одним з факторів: а) цілковитим зношуванням антифрикційного елемента (покриття); б) гранично-допустимими значеннями радіального прозору чи зношування; в) гранично-допустимим кутом контакту.

На підставі (1) максимальне зношування поверхні корпусу простежується в точці з координатою $\varphi = 0$, тобто

$$\max[u_w(\varphi, s)] = u_w(0, s) = \Delta \left(\frac{1}{\cos \varphi_0(s)} - 1 \right). \quad (9)$$

Нехай граничний стан спряження визначається граничнодопустимим зношуванням u_w^{zp} або пов'язаним із ним граничнодопустимим кутом контакту $2\varphi_0^{zp}$. З (9) впливає конкретизація цієї залежності у вигляді

$$u_w^{zp} = \Delta \left(\frac{1}{\cos \varphi_0^{zp}} - 1 \right), \quad (10)$$

або

$$\varphi_0^{zp} = \arccos \frac{\Delta}{u_w^{zp} + \Delta}. \quad (11)$$

Подамо діюче навантаження $Q(s)$, яке за змістом задачі керування зростає зі зміною шляху тертя s , у вигляді такої функції:

$$Q(s) \equiv Q(s, \mu_0, \mu_1, \mu_2) = \mu_0 + \mu_1 s + \mu_2 s^2,$$

обмежимо $Q(s)$ граничним навантаженням Q_{zp}

$$Q(s) \leq Q_{zp}. \quad (12)$$

Після цього сформулюємо задачу керування так: визначити такі значення параметрів μ_0, μ_1, μ_2 функції $Q(s)$, щоб забезпечити досягнення заданих величин u_w^{zp} або φ_0^{zp} за максимально можливого значення шляху тертя $s = s_{\max}$.

Відповідно до цього математична модель задачі керування полягає у знаходженні максимуму функції

$$V(s, \mu_0, \mu_1, \mu_2) = \frac{k_w \alpha}{\Delta R_1^m} \int_0^s \xi^{\alpha-1} (\mu_0 + \mu_1 \xi + \mu_2 \xi^2)^m d\xi \quad (13)$$

з обмеженнями

$$\begin{aligned} \mu_0 > 0, \mu_1 > 0, \mu_2 > 0, s > s_{\min}, \mu_0 + \mu_1 s + \mu_2 s^2 \leq Q_{zp}, \\ |U(\varphi_0^{zp}) - V(s, \mu_0, \mu_1, \mu_2)| \leq \varepsilon, \end{aligned} \quad (14)$$

де $s_{\min}$ – деяке задане мінімальне значення шляху тертя, яке може змінюватися під час розв'язування задачі для досягнення $s = s_{\max}$; ε – точність визначення кореня рівняння (8)

$$U(\varphi_0^{zp}) = \int_0^{\varphi_0^{zp}} \frac{\sin z}{\cos^2 z} \left[\int_{-z}^z (\cos \varphi)^{\frac{1}{m}+1} d\varphi \right]^m dz.$$

Розв'язування задачі (13), (14) можна успішно виконувати, використовуючи числові методи. Це можливе і з використанням комерційних математичних пакетів Mathcad, Mathematica, Matlab, Derive. Наприклад, Mathcad має для вирішення цього завдання ефективно діючу вбудовану функцію Maximize [3].

Хороша керованість процесом числового розв'язування задачі (13), (14) забезпечується поряд з математичною розробленістю реалізації багатьох числових процедур, а також і тим, що для знайдених числових значень параметрів μ_0, μ_1, μ_2 і відповідного закону зміни навантаження $Q(s)$ рівняння (8) має дійсні додатні корені (значення шляху тертя s) для всього проміжку зміни кутів $\varphi_0(s) \in [0, \varphi_0^{zp}]$.

Для вивчення впливу параметрів m та α на величину ресурсу $s_{\max}$, зміну навантаження $Q(s)$ та контактний тиск $\sigma_{\max} = \sigma(0, s)$ зроблено тестові розрахунки для таких даних:

$$R_1 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \Delta = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}; k_w = 1 \cdot 10^{-15} \text{ Па}^{-m} \cdot \text{м}^{1-\alpha};$$

$$\varphi_0^{zp} = 50^\circ (0,873 \text{ рад}); Q_{zp} = 1 \cdot 10^6 \text{ Н/м}.$$

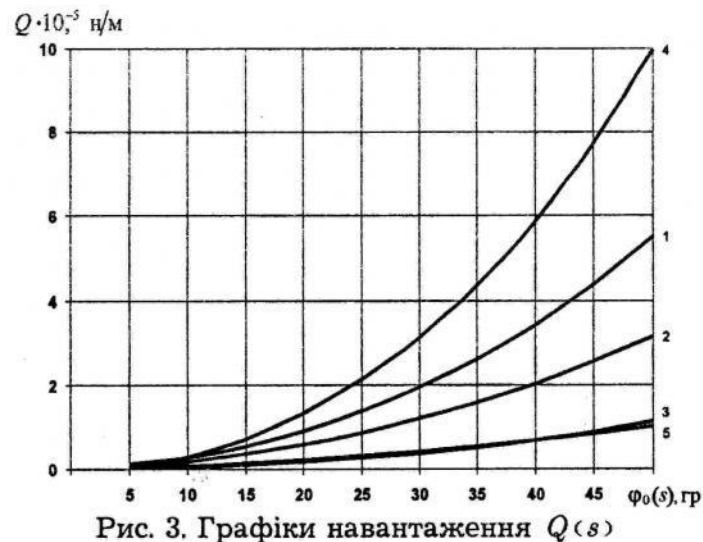
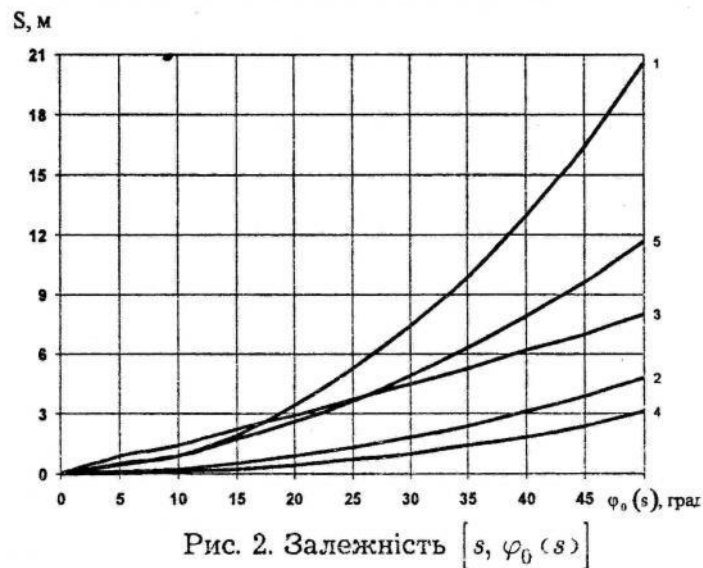
Рис. 2–4 відображають графіки зміни шляху тертя, навантаження та максимального контактного тиску для наведених геометричних даних і величин $k_w, Q_{zp}, \varphi_0^{zp}$ для п'яти різних комбінацій значень параметрів m, α . Номери кривих на усіх рисунках відповідають таким значенням параметрів: 1. $m = 1; \alpha = 0,7$; 2. $m = 1,2; \alpha = 0,7$; 3. $m = 1,4; \alpha = 0,7$; 4. $m = 1; \alpha = 0,5$; 5. $m = 1; \alpha = 1$. Оскільки розкид у визначенні шляху тертя за цих параметрів може сягати п'яти порядків, то для можливості відображення отриманих результатів на одному рисунку (рис. 2) введені

масштабні множники: у зв'язку з чим введена функція $S = 10^{-k}s$, де для відповідних кривих – 1. $k = 5$; 2. $k = 4$; 3. $k = 3$; 4. $k = 8$; 5. $k = 4$.

Виконані обчислення дають змогу зробити такі основні висновки.

1. Зміною навантаження вдається досягти максимуму шляху тертя, а отже, й оптимізувати процес зношування пари тертя.

2. Оптимальний шлях тертя досягається під час пришвидшеного порівняно зі збільшенням внаслідок зношування кута контакту збільшення



навантаження Q вузла тертя. Тобто, поступове розвантажування чи введення ощадних режимів навантажування не вимагається.

3. Під час зростання параметра m в діапазоні $[1; 1,4]$ ресурс з'єднання (максимальний шлях тертя) зменшується приблизно у $2,5 \cdot 10^2$ разів. Зміна

параметра α в межах $[0,5; 1]$ спричиняє ще суттєвіший вплив, зменшуючи ресурс приблизно у $2,7 \cdot 10^3$ разів.

4. Зміна параметрів m, α якісно однаково впливає і на зміну максимального навантаження, і на максимальний контактний тиск: зміна параметра m від 1 до 1,4 зменшує максимальне навантаження і максимальний контактний тиск приблизно у 5 разів; зміна параметра α від 0,5 до 1 зменшує максимальне навантаження і максимальний контактний тиск приблизно у 10 разів.

5. Те, що на рис. 2 лінії 1 і 5 перетинають лінію 1, а на рис. 4 крива 4 перетинає лінії 1 та 2 і лінія 3 та 5 теж мають взаємоперетин, свідчить про взаємний вплив параметрів m та α на процеси зношування і їхню різну роль за малих і великих областей третьового контакту.

Для оцінки величин максимальних шляхів тертя (ресурсу) $s_{\max}$, одержаних в результаті розв'язання задачі керування, порівняно зі шляхами тертя $s_{\max}^*$ при дії

постійного навантаження, виконані розрахунки величин $s_{\max}^*$ для:

- а) $Q(s) = Q_{zp}$;
- б) $Q(s) = Q(s_{\max})$;
- в) $Q(s) = \eta Q(s_{\max})$,

де коефіцієнт η підбирали так, щоб для досягнення кута φ_0^{zp} шляхи $s_{\max}$ та $s_{\max}^*$ були однакові.

Для постійного навантаження Q_0 залежність між s та $\varphi(s)$ на підставі (8) набуває вигляду

$$s = \left[\frac{\Delta R_1^m}{k_w Q_0^m} \int_0^{\varphi_0(s)} \frac{\sin z}{\cos^2 z} F^m[z, m] dz \right]^{\alpha^{-1}}, \quad (15)$$

який для згаданих випадків а–в дає змогу знаходити

$$s_{\max}^* = \left[\frac{\Delta R_1^m}{k_w Q_0^m} \int_0^{\varphi_0^{zp}} \frac{\sin z}{\cos^2 z} F^m[z, m] dz \right]^{\alpha^{-1}}. \quad (16)$$

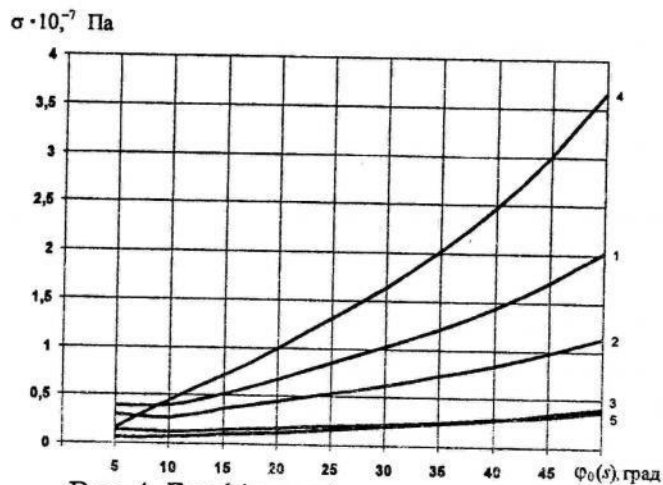


Рис. 4. Графіки зміни максимального контактного тиску $\sigma_{\max} = \sigma(0, s)$

Розрахунки $s_{\max}^*$ виконані для тих самих даних, що і в задачі керування, при цьому отримані такі найважливіші результати. 1. Величини $s_{\max}^*$ для $Q(s) = Q_{gr}$ від 9 до $7 \cdot 10^3$ разів менші за величини $s_{\max}$ залежно від параметрів m та α . На зміну ресурсу суттєвіше впливає зміна параметра m , ніж параметра α . 2. Величини $s_{\max}^*$ для $Q(s) = Q(s_{\max})$ від 2 до 9 разів менші за величини $s_{\max}$. Для $\alpha = 0,7$ і $m \in [1; 4]$ різниця в ресурсах змінюється від 4 до 9 разів, а для $m = 1$ і $\alpha \in [0,5; 1]$ ця різниця сягає від 2 до 9 разів. 3. Для того щоб величини $s_{\max}$ і $s_{\max}^*$ були приблизно однаковими, навантаження у з'єднанні повинно бути $\eta Q(s_{\max})$, де $\eta \in [0,3; 0,5]$ для розглянутого діапазону зміни параметрів m та α .

Отож, ми з'ясували, що за керованого процесу зношування прогнозований ресурс з'єднання суттєво зростає порівняно з ресурсом, розрахованим за дії постійного навантаження.

-
1. Александров В.М., Коваленко Е.В. Аналитическое решение контактной задачи об изнашивании сопряжения вал-втулка // Трение и износ. – 1987. – 8. – № 6. – С. 985–995.
 2. Галахов М.А., Усов П.П. Дифференциальные и интегральные уравнения математической теории трения. – М., 1990.
 3. Дьяконов В. Mathcad 2000: Учебный курс. – С.-Пб., 2000.
 4. Коваленко Е.В. К расчету изнашивания сопряжения вал-втулка // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1982. – № 6. – С. 66–72.
 5. Кузьменко А.Г., Кузьменко В.А., Насер Гассан Ахмед. Модели переходных процессов при изнашивании // Проблемы трибологии /Problems of Tribology/. – 1997. – № 3. – С. 81–121.
 6. Левицький В.П., Бурнаєв О.М. Оптимізація зношування з урахуванням теплоутворення від тертя // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1993. – 29. – № 5. – С. 91–94.
 7. Любин А.Г. Об управлении процессом изнашивания вкладыша радиального подшипника скольжения // Проблемы трибологии /Problems of Tribology/. – 2003. – № 2. – С. 81–85.
 8. Солдатенков И.А. Изнашивание покрытий в упругих сопряжениях при изменяющейся площадке контакта // Трение и износ. – 1987. – 8. – № 2. – С. 206–213.
 9. Солдатенков И.А. О необходимых условиях существования установившегося режима при изнашивании тонких покрытий // Трение и износ. – 1989. – 10. – № 5. – С. 837–843.

10. Усов П.П. Внутренний контакт цилиндрических тел близких радиусов при изнашивании их поверхностей // Трение и износ. – 1985. – 6. – № 3. – С.403–414.

CONTACT PROBLEM FOR RIGID WEARING BODIES UNDER VARIABLE LOAD

Georgij Sulym¹, Olexandr Lyubin²

¹ *Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine*

² *National University of Khmelnytsky,
Instytuyska Str., 11, 29016 Khmelnytsky, Ukraine*

The mathematical model of contact interaction of rigid bodies with take into consideration for wear are proposed. On based by analytical solving tribocontact problem life-time for joints and numerical solution for control problem of wear are obtained. The results of numerical analysis are presented.

Key words: contact stress, wear, ageing model, wear control, cylindrical friction joint.

Стаття надійшла до редколегії 23.11.2005

Прийнята до друку 22.11.2006

УДК 539.3

ОЦІНКА РОЗПОДІЛУ НАПРУЖЕНЬ ЗА ТРИТОЧКОВОГО ЗГИНУ ІЗОТРОПНОЇ ПРИЗМИ З ЕЛІПСОЇДАЛЬНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

**Валентин СКАЛЬСЬКИЙ, Олег СЕРГІЄНКО, Юрій ЛОТОЦЬКИЙ,
Роман ПЛАХТІЙ**

*Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України,
вул. Наукова, 5, 79601 Львів, Україна*

Методом скінченних елементів проведено розрахунок напружень в ізотропній призмі з еліпсоїдальним пружним включенням, яку навантажували за схемою триточкового згину. Показано характер розподілу напружень у крихкому пружному включенні і у призмі, виготовленій із піщано-цементної суміші.

Ключові слова: призма, еліпсоїдальне включення, розподіл напружень, тріщиноутворення, акустична емісія.

Мости є складними інженерно-технічними спорудами, які мають регламентовані терміни експлуатації. Як свідчить практика, вони нерідко служать в умовах перевантаження та посиленого впливу агресивного середовища, що є причиною зародження та розвитку тріщин в їхніх несучих елементах. Для технічного діагностування стану мостів все частіше застосовують метод акустичної емісії.

Найпоширеніший матеріал, який застосовують для виготовлення елементів мостових конструкцій, – бетон і залізобетон. Вони за своїм походженням належать до композитних матеріалів, основними складниками яких є: зерна піску, клінкер, цементний камінь, гравій та арматура.

Для прогнозування надійності роботи мостових конструкцій важливо вміти ідентифікувати сигнали АЕ, які генеруються під час зародження та розвитку руйнування в бетонах. Особливо цікавим є дослідження впливу гострокінцевих гравійних включень на згадані процеси під дією прикладених зовнішніх силових чинників. Аналітичне моделювання цих процесів у бетонах складне, тому з цією метою все частіше застосовують числові методи.

Актуальність проблеми. Крім спорудження мостів, бетон у сучасному будівництві найпоширеніший будівельний матеріал. Здебільшого його застосовують у спорудах і конструкціях, які призначені для довгострокової експлуатації: промислового, цивільного, гідротехнічного та дорожнього будівництва. Наприклад, бетонні та залізобетонні мости в Україні становлять понад 90% від їхньої загальної кількості [1].

Структура бетону досить неоднорідна і формується з цементного каменю, зерен піску та клінкеру, щебеню різної крупності та форми. Внаслідок специфіки формування під час твердіння, бетон пронизаний великою кількістю мікропор, капілярів, які містять хімічно незв'язану воду, водяну пару і повітря. Отже, фізично бетон – капілярно пористий матеріал, в якому порушена суцільність і є всі три агрегатні фази – тверда, рідка і

газоподібна [2, 3]. На етапі твердіння процеси утворення та зародження тріщин добре реєструються методом акустичної емісії (АЕ) [4, 5].

Внаслідок особливостей структури бетон схильний до крихкого руйнування шляхом утворення та субкритичного росту тріщиноподібних дефектів. Виявлення саме ранніх стадій зародження та розвитку руйнування бетону є пріоритетним напрямом досліджень з метою розробки ефективних методик неруйнівного контролю (НК) та технічної діагностики (ТД) реально працюючих будівельних конструкцій і споруд.

Стан проблеми. На сучасному етапі розвитку досліджень руйнування бетону підтверджується існуванням чотирьох стадій його деформування. На основі аналізу сигналів акустичної емісії (САЕ) [6] виявлено, що для таких пористих матеріалів на першій стадії відбувається пружне деформування бетону, на другій – зародження та ріст мікротріщин (м/т), на третій – розпочинається утворення макротріщин (МТ). Четвертою вважають закритичну стадію росту МТ, коли навантаження досягає $\sigma \geq 0,96 R$.

На цій підставі можна констатувати, що існує функціональний зв'язок між деформуванням бетону, зародженням та розвитком м/т, МТ і параметрами САЕ. Щоб створити методики НК і ТД виробів і конструкцій методом АЕ, під час їхньої експлуатації важливо виявляти вплив наявних дефектів і кожного з компонентів структури бетону на зародження та розвиток у ньому руйнування. Враховуючи те, що найбільша концентрація напружень у бетоні виникає поблизу гострокінцевих виступів його компонент структури, особливо крупного заповнювача (щебінь) [7], дослідження зародження м/т та МТ біля таких концентраторів напружень є важливою задачею.

Подібні задачі про вплив різних включень розв'язували здебільшого аналітично і вони добре описані в літературі [8–11]. Наприклад, у праці [8] розв'язок побудовано на використанні методу Фур'є та наведено розв'язки рівнянь рівноваги у формі Папковича-Нейбера. У [11] розглянуто задачу взаємодії безмежного тіла з пружним еліпсоїдальним включенням, яке обмежене гладкою поверхнею, жорстко зчеплене з основним матеріалом (матрицею) і перебуває під дією розтягуючих зусиль. У результаті розв'язування отримано систему сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь для оцінки напружень поблизу вершини включення та матриці. Запропоновано залежності для оцінки граничних зусиль початку локального руйнування за заданих параметрів включення і матриці. В нашому випадку застосування аналітичних розв'язків буде не коректним, оскільки у відомих працях включення менш жорстке, ніж матриця. Аналітично розв'язати задачу про розподіл напружень в околі пружного включення, яке перебуває в скінченному тілі за дії прикладеного навантаження, надзвичайно складно. Для знаходження розподілу напружень у нашому випадку доцільно використовувати числові методи, зокрема метод скінчених елементів (МСЕ). Ми використали програмний комплекс ANSYS.

Мета нашої праці – змодельовати задачу про вплив пружного включення в ізотропній призматичній матриці, розв'язати її МСЕ щодо розподілу напружень за триточкового згину.

Формулювання задачі. Бетон – багатокомпонентна структура, тому для спрощення розрахунків вибрали модель, де є лише одиничне включення у

формі тіла обертання (еліпсоїд), що розташоване у призмі, яка виготовлена з ізотропного матеріалу. Отож, МСЕ оцінимо розподіл напружень у призмі та на включенні. Отримані дані дадуть змогу оцінити в першому наближенні розподіл напружень поблизу гострокінцевих виступів включень кількісно, в реальних умовах експерименту і також використати їх для ідентифікації САЕ у наступних дослідженнях.

Таку геометрію зразків для випробувань і схему його навантаження вибрали не випадково. Враховуючи те, щоб наблизити результати досліджень до конкретних прикладних задач, наприклад, для несучих елементів мостових споруд (балки прогонової будови). Відомо, що для їх виготовлення зазвичай використовують бетон класу В-30...В-45 з фракціями крупного заповнювача 10...40 мм. Для розрахунків вибрали бетон класу В-35, матеріал щебеневої фракції – граніт.

Фізико-механічні властивості матеріалу призми і включення такі:

пружне тіло – бетон класу В-35; розрахунковий опір на стиск $R_s = 19,5$ МПа; модуль пружності $E_s = 34,5 \times 10^3$ МПа; коефіцієнт Пуассона $\mu = 0,18$; густина $\gamma = 2\,400$ кг/м³;

включення – гранітний щебінь; границя міцності на стиск $\sigma_s = 150$ МПа; модуль пружності $E_s = 49 \times 10^3$ МПа; коефіцієнт Пуассона $\mu = 0,25$; густина $\gamma = 2\,600$ кг/м³.

Розрахунок проводили для різного значення навантаження P : для призми з включенням і без нього. Розміри призми $100 \times 100 \times 400$ мм, а в її центрі розміщено пружне включення, яке може довільно бути орієнтованим до осі прикладання сили. Велика вісь еліпсоїда становить 30, а мала – 15 мм. Схема випробувань зображена на рис. 1.

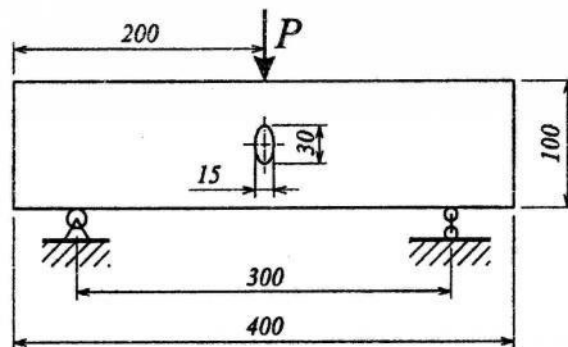


Рис. 1. Вид навантаження балки з пружним включенням

Теоретичний розрахунок напружень МСЕ. Суть методу розрахунку полягає в апроксимації тіла скінченною кількістю елементів, з'єднаних один з одним тільки в їхніх вузлах. Скінченим елементом є окремий фрагмент певної наперед заданої форми і властивостей, наділений скінченною кількістю ступенів вільності. Зв'язок вузлових зусиль із вузовими зміщеннями задають за допомогою матриці жорсткості елемента $[K]$ [12, 13]. Об'єднання матриць жорсткості окремих елементів у глобальну матрицю жорсткості допомагає звести задачу до розв'язання такої системи алгебричних рівнянь:

$$[K]\{u\} = \{F\},$$

де $[K]$ – глобальна матриця жорсткості; $\{u\}$ – вектор переміщень вузлів; $\{F\}$ – вектор зусиль.

Розбиття призми проводили з використанням тривимірних скінченних елементів у вигляді тетраедра з десятьма вузлами. Схематичний вигляд такого скінченного елемента зображено на рис. 2.

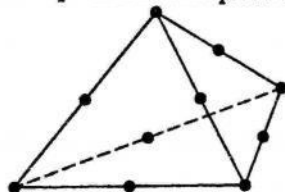


Рис. 2. Вигляд тривимірного скінченного елемента з десятьма вузлами

Аналогічне розбиття на скінченні елементи застосовували для включення. Орієнтація його великої осі до напрямку дії сили задавали кутом α . Розрахунки проводили для трьох значень α : I – $\alpha = 0^\circ$; II – $\alpha = 45^\circ$; III – $\alpha = 90^\circ$.

Результати розрахунків МСЕ. Кількість скінченних елементів в балці без включення та з ним, за різної орієнтації включення, подано у табл.

Параметри розбиття балки і включення скінченними елементами

Кут α°	Кількість елементів	Кількість вузлів
Без включення	11 602	18 441
0°	15 096	23 307
45°	14 862	23 000
90°	14 888	23 022

Аналіз отриманих результатів розрахунку показав, що для балки з включенням, велика вісь якого розташована паралельно до напрямку дії сили $P = 16$ кН ($\alpha = 0^\circ$), найбільші розтягуючі напруження становлять 3,8 МПа, у включенні – 1,3 МПа (рис. 3).

На рис. 4 подано епюри розподілу напружень у балці (а) та на включенні (б) в перерізі, зробленому вздовж осі дії сили $P = 16$ кН для варіанта розташування включення $\alpha = 0^\circ$.

Аналогічно отримано результати для балки з включенням, орієнтованим за варіантами II і III та без включення. Характер розподілу напружень у призмі за цих варіантів подібний до розподілу, який показано на рис. 3. Діапазон зміни напружень при дії того самого зусилля $P = 16$ кН становить для призми -8,6... 3,73 МПа та -8,0... 3,5 МПа; а для включення -1,41... 0,3 МПа та -1,2... 0 МПа, відповідно.

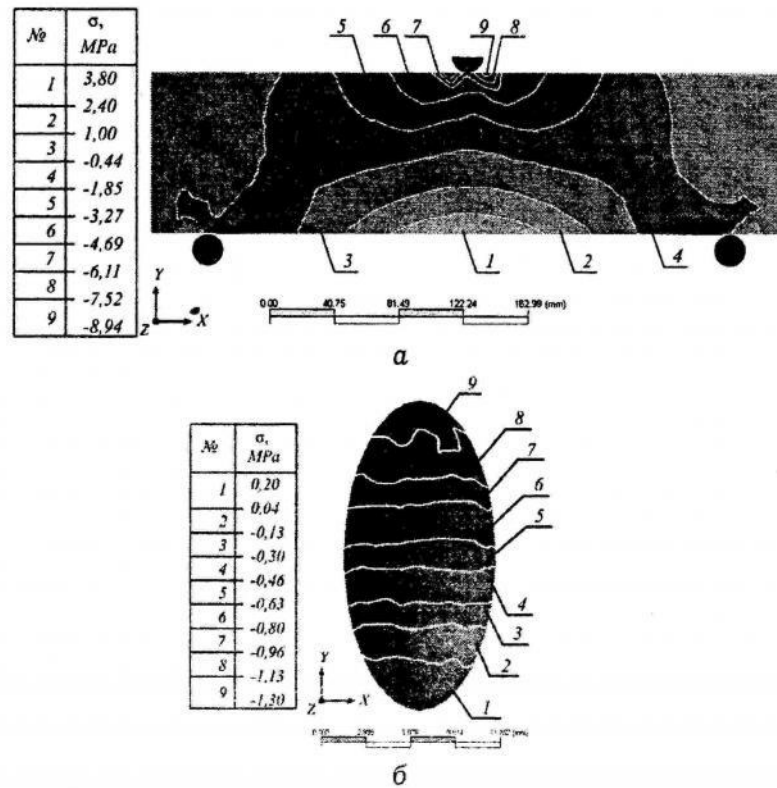


Рис. 3. Розподіл напружень в балці (а) і у включенні (б) за навантаження $P = 16$ кН

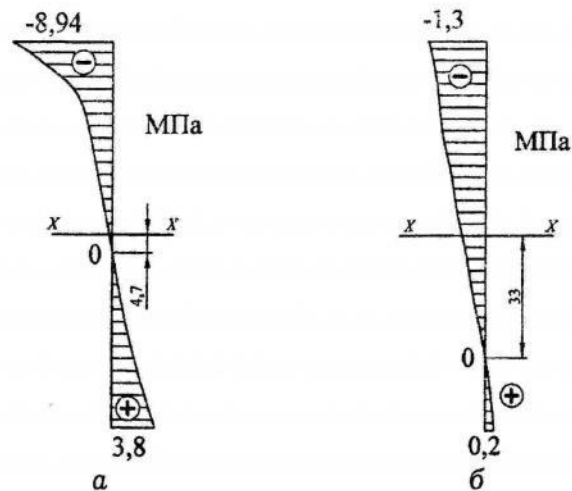


Рис. 4. Епюри розподілу напружень

Деяко інший розподіл напружень простежується у призмі без наявності включення. Тут вони змінюються у діапазоні $-6,5 \dots 2,0$ МПа за дії зусилля $P = 16$ кН (рис. 5).

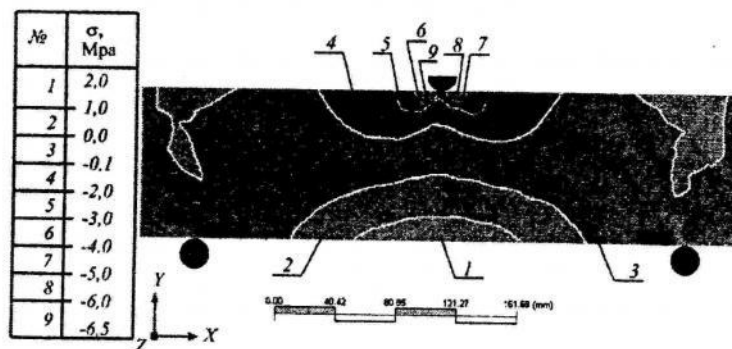


Рис. 5. Розподіл напружень у балці без наявності включення

Враховуючи, що в реальних конструкціях бетон добре працює на стиск і майже не працює на розтяг, то, як впливає з результатів досліджень, найневигоднішою орієнтацією включення є його розташування під кутами 0° та 45° до осі дії сили. Очевидно, що саме така орієнтація включень найімовірніше сприятиме зародженню та розвитку руйнування в бетонах, яке найкраще виявляється методом АЕ.

Запропонований підхід до розрахунку розподілу напружень дає змогу, застосувавши підходи механіки руйнування, ідентифікувати САЕ, що виникають під час деформування бетону на зразках, які використовують у лабораторних умовах досліджень і в реальнодіючих конструкціях елементів мостів.

Враховуючи, що в реальних конструкціях бетон добре працює на стиск і майже не працює на розтяг, то, як впливає з результатів досліджень, найневигоднішою орієнтацією включення є його розташування під кутами 0° та 45° до осі дії сили. Очевидно, що саме така орієнтація включень найімовірніше сприятиме зародженню та розвитку руйнування в бетонах, яке найкраще виявляється методом АЕ.

1. Коваль П. М. Марковські процеси підтримки рішень в управлінні мостами // Зб.: Автомобільні дороги і дорожнє будівництво. – 2004. – Вип. 69. – С. 87–91.
2. Берг О. Я. Физические основы теории прочности бетона и железобетона. – М., 1961.
3. Ахвердов И. И. Основы физики бетона. – М., 1981.
4. Скальський В. Р., Коваль П. М., Лотоцький Ю. Л. Оцінка сигналів акустичної емісії під час твердіння бетону // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій / За заг. ред. В.В. Панасюка – Львів, 2004. – С. 539–544.
5. Муравин Г. Б., Павловская Г. С., Щуров А. Т. Исследование акустической эмиссии твердеющего бетона // Дефектоскопия. – 1984. –

№ 10. – С. 77–81.

6. Скальський В. Р., Демчина Б. Г., Карпунін І. І. Руйнування бетонів і акустична емісія (Огляд). Повідомлення 1. Статичне навантаження і вплив температурного поля // Технич. диагностика и неразрушающий контроль. – 2000. – № 1. – С.12–23.
7. Гузеев Е. А., Леонович С. Н., Милованов А. Ф. Разрушение бетона и его долговечность. – Минск, 1997.
8. Подільчук Ю. М. Про напружений стан необмеженого середовища з пружним еліпсоїдальним включенням // Прикл. механіка. – 1968. – 14. – № 5. – С. 28–37.
9. Mura T., Cheng P.S. The elastic field outside on ellipsoidal inclusion // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1977. – Vol. 44. – P. 591–594.
10. Силованюк В. П., Стадник М. М. Тонкие упругие включения в условиях сдвига // Изв. АН СССР. Сер. Механика твердого тела. – 1985. – № 2. – С. 95–101.
11. Стадник М. М., Горбачевський І. Я. Локальне поле напружень біля пружних включень довільної жорсткості // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій / За заг. ред. В.В. Панасюка. – Львів, 2004. – С. 275–280.
12. Зинкевич О.К. Метод конечных элементов в технике. – М., 1975.
13. Стенг Г., Финк Дж. Теория метода конечных элементов. – М., 1977.

ESTIMATION OF STRESS DISTRIBUTION IN AN ISOTROPIC PRISM WITH THE ELLIPSOIDAL INCLUSION BY THE THREE-POINT BENDING

Valentyn Skalsky, Oleg Sergiyenko, Yuriy Lototski, Roman Plahtiy

*Karpenko Physico-Mechanical Institute of the NAS of Ukraine,
Naukova Str., 5 79601 Lviv, Ukraine*

In paper the calculation of stress in an isotropic prism with the ellipsoidal elastic inclusion was conducted by the finite-element method. The beam was loaded by the three-point bending. Character of stress distribution in the brittle elastic inclusion and in the prism made from a sand-cement mixture is shown.

Key words: prism, ellipsoidal inclusion, stress distribution, crack formation, acoustic emission.

Стаття надійшла до редколегії 03.10.2005
Прийнята до друку 22.11.2006

УДК 539.3

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРУЖНОГО СТАНУ ПЛАСТИНЧАСТОГО ЕЛЕМЕНТА КОНСТРУКЦІЇ, ЯКИЙ ПЕРЕБУВАЄ ПІД ДІЄЮ ЗОСЕРЕДЖЕНИХ СИЛОВИХ ФАКТОРІВ

Володимир МАКСИМОВИЧ¹, Остап ДУМАНСЬКИЙ²

¹Луцький державний технічний університет,
вул. Львівська, 75, 43018 Луцьк, Україна

²Національний лісотехнічний університет України,
вул. Генерала Чупринки, 103, 79057 Львів, Україна

Використовуючи апарат аналітичних функцій і конформних відображень, розроблено узагальнений розв'язок пружно-деформованого стану пластинчастого елемента конструкції, послабленого криволінійними отворами, які перебувають під дією зосереджених сил.

Ключові слова: пластинка, зосереджені силові фактори, концентрація напружень.

Актуальність проблеми. Головне завдання при проектуванні конструкцій – визначення їх надійної експлуатації, тобто проведення детального аналізу напружено-деформованого стану елементів конструкцій заданої форми, а також рекомендації для побудови, на основі проведених досліджень нових, раціональніших конструктивних форм. Більшість пластинчастих елементів конструкцій, пристроїв, устаткувань мають скінчені геометричні розміри і розрахунок їх надійності та міцності при експлуатації є важливим та актуальним.

Аналіз відомих досліджень проблеми. Оpubліковано достатню кількість монографій і наукових праць, присвячених дослідженню пружної та граничної рівноваги пластинчастих та оболонкових елементів конструкцій, які піддані дії різних силових і температурних факторів, послаблених отворами, надрізами, тріщинами тощо. Важливий внесок у розвиток досліджень цього напрямку зробив професор Гриліцький Д.В. та його учні.

Основний матеріал дослідження з обґрунтуванням отриманих результатів. Розглянемо пружний ізотропний пластинчастий елемент конструкції, який перебуває під дією зосереджених сил і послаблений криволінійним отвором. Віднесемо цей елемент до прямокутної системи декартових координат xOy так, щоб початок координат збігався з центром отвору, площина xOy – із серединною поверхнею пластини. Контур отвору вільний від навантажень. Потрібно побудувати фундаментальний (узагальнений) розв'язок основних плоских задач теорії пружності для пластинчастих елементів стосовно областей, які відображаються на круг.

Загальний розв'язок задачі. Для побудови розв'язку типу Гріна треба розглянути задачу теорії пружності для заданої області за умови, що в

деяких внутрішніх точках комплексні потенціали мають певні особливості та границя області вільна від навантаження.

Задача теорії пружності для області D , яка обмежена контуром L , зводиться до визначення функцій М.І. Мусхелішвілі $\varphi_1(z)$ та $\psi_1(z)$ з умови [1]

$$\varphi_1(z) + z\overline{\varphi_1'(z)} + \overline{\psi_1(z)} = f_1(z), \quad z \in L,$$

де $f_1(z)$ – неперервна і однозначна на контурі L функція, яка визначається через задані на границі зусилля (в цьому випадку її можна прийняти такою, що дорівнює нулю, однак для загальності її далі утримуватимемо).

Для побудови розв'язку типу Гріна треба знайти функції $\varphi_1(z)$ та $\psi_1(z)$, які мають такі особливості:

$$\varphi_1^0(z) = -\sum_{j=1}^n P_j \ln(z - z_j), \quad \psi_1^0(z) = \sum_{j=1}^n [\alpha \bar{P}_j \ln(z - z_j) + \bar{z}_j P_j \frac{1}{z - z_j}]. \quad (1)$$

Тут α – довільна дійсна стала; P_j – комплексні сталі, що задовольняють умову $\sum_{j=1}^n P_j = 0$. Зазначимо, що при $\alpha = \chi$ умова (1) є умовою рівноваги

прикладених до області D зосереджених сил. У цьому випадку будемо вважати також, щоби і головний момент був нульовим.

Розглядатимемо випадок, коли область D , яку займає тіло, обмежена, однозв'язна і відображається на одиничний круг в площині Z функцією $z = \omega(\zeta)$, де

$$\omega(\zeta) = c_1 \zeta + c_2 \zeta^2 + \dots + c_n \zeta^n, \quad c_1, \dots, c_n - \text{задані сталі.}$$

Тоді умову на межі області запишемо [1]

$$\varphi(\sigma) + \overline{\Omega(\sigma)} = f(\sigma) \quad \text{при } |\sigma| = 1, \quad (2)$$

де

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \varphi_1(\omega(\zeta)); \quad \Omega(\zeta) = \psi(\zeta) + \overline{\omega(1/\zeta)} \varphi'(\zeta) / \omega'(\zeta); \quad \psi(\zeta) = \psi_1(\omega(\zeta)); \\ \varphi'(\zeta) &= d\varphi/d\zeta; \quad f(\sigma) = f_1(\omega(\sigma)). \end{aligned} \quad (3)$$

На підставі (1) та (3) визначаємо, що введені функції матимуть такі особливості:

$$\varphi(\zeta) = \varphi_0(\zeta), \quad \Omega(\zeta) = \Omega_0(\zeta) + \overline{Q}(1/\zeta).$$

Тут

$$\varphi_0(\zeta) = -\sum_{j=1}^n P_j \ln(\zeta - \zeta_j); \quad \Omega_0(\zeta) = \sum_{j=1}^n \left[\alpha \bar{P}_j \ln(\zeta - \zeta_j) + \gamma_j P_j \frac{1}{\zeta - \zeta_j} \right];$$

$$\gamma_j = \frac{\overline{\omega(\zeta_j)} - \overline{\omega}(1/\zeta_j)}{\omega'(\zeta_j)}; \quad Q(\zeta) = Q_1\zeta + Q_2\zeta^2 + \dots + Q_n\zeta^n;$$

$Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ – невідомі сталі. У функціях $\varphi_0(\zeta)$, $\Omega_0(\zeta)$ враховуються особливості функцій $\varphi_1(z)$ в точках z_j ; поліном $Q(1/\zeta)$ введений з врахуванням полюса n -го порядку в точці $\zeta=0$ функції $\overline{\omega}(1/\zeta)$ (невідомі коефіцієнти полінома визначимо далі).

Функції $\varphi(\zeta)$, $\Omega(\zeta)$ зобразимо у вигляді

$$\varphi(\zeta) = \varphi_0(\zeta) + \varphi_*(\zeta), \quad \Omega(\zeta) = \Omega_0(\zeta) + \overline{Q}(1/\zeta) + \Omega_*(\zeta), \quad (4)$$

де $\varphi_*(\zeta), \Omega_*(\zeta)$ – аналітичні при $|\zeta| \leq 1$ функції. Після множення (2) і спряженої до неї рівності, на $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}$ та інтегрування вздовж дуги кола $|\sigma|=1$ з врахуванням (4), отримаємо

$$\varphi(\zeta) = U(\zeta) - Q(\zeta), \quad \Omega(\zeta) = V(\zeta) + \overline{Q}(1/\zeta). \quad (5)$$

Тут

$$U(\zeta) = \varphi_0(\zeta) - \overline{\Omega}_0(1/\zeta) + F_1(\zeta), \quad V(\zeta) = \Omega_0(\zeta) - \overline{\varphi}_0(1/\zeta) + F_2(\zeta),$$

$$F_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\sigma)d\sigma}{\sigma - \zeta}, \quad F_2(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{f}(\sigma)d\sigma}{\sigma - \zeta}; \quad (6)$$

γ – контур кола $|\sigma|=1$.

Довільні сталі, що виникають при інтегруванні, які не впливають на напружений стан, в (5) та (6) зафіксовані. Після перетворень із (6) знаходимо

$$U(\zeta) = U_0(\zeta) + \sum_{j=1}^n \overline{\gamma}_j \overline{P}_j \frac{\zeta_{j*}^2}{\zeta - \zeta_{j*}}; \quad V(\zeta) = V_0(\zeta) + \sum_{j=1}^n \gamma_j P_j \frac{1}{\zeta - \zeta_j}, \quad (7)$$

де

$$U_0(\zeta) = -\sum_{j=1}^n P_j \left[\ln(\zeta - \zeta_j) + \alpha \ln(\zeta - \zeta_{j*}) \right];$$

$$V_0(\zeta) = \sum_{j=1}^n \overline{P}_j \left[\ln(\zeta - \zeta_{j*}) + \alpha \ln(\zeta - \zeta_j) \right], \quad \zeta_{j*} = 1/\overline{\zeta}_j.$$

На підставі формул (3) та (5) знаходимо

$$\psi(\zeta) = \overline{Q}(1/\zeta) + \overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right) \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} (Q - U)' + V. \quad (8)$$

А. Переміщення та напруження визначають через введені функції за формулами

$$\begin{aligned} 2G(u - iv) &= \chi \overline{\varphi(\zeta)} - \Omega(\zeta) - A_1 \varphi'(\zeta) \omega'(\zeta), \\ \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 4 \operatorname{Re} \Phi(\zeta), \quad \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\tau_{xy} = 2F(\zeta), \end{aligned} \quad (13)$$

де

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta) &= \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}, \quad F(\zeta) = A_1(\zeta) \varphi''(\zeta) + B_1(\zeta) \Phi(\zeta) + \Omega_1, \quad \Omega_1(\zeta) = \frac{\Omega'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}, \\ A_1(\zeta) &= \frac{\overline{\omega(\zeta)} - \overline{\omega}(1/\zeta)}{[\omega'(\zeta)]^2}, \quad B_1(\zeta) = \frac{\overline{\omega'(1/\zeta)}}{\zeta^2 \omega'(\zeta)} - A(\zeta) \omega''(\zeta). \end{aligned}$$

Похідні від комплексних потенціалів мають вигляд

$$\begin{aligned} \varphi'(\zeta) &= U'(\zeta) - Q'(\zeta), \quad \varphi''(\zeta) = U''(\zeta) - Q''(\zeta), \\ \Omega'(\zeta) &= V'(\zeta) - \overline{Q}'(1/\zeta)/\zeta^2. \end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned} U'(\zeta) &= U'_0(\zeta) - \sum_{j=1}^n \overline{\gamma}_j \overline{P}_j \frac{\zeta_{j*}^2}{(\zeta - \zeta_{j*})^2}; \quad U''(\zeta) = U''_0 + \sum_{j=1}^n 2\overline{\gamma}_j \overline{P}_j \frac{\zeta_{j*}^2}{(\zeta - \zeta_{j*})^3}; \\ V'(\zeta) &= V'_0 - \sum_{j=1}^n \gamma_j P_j \frac{1}{(\zeta - \zeta_j)^2}; \quad V'_0(\zeta) = \sum_{j=1}^n \overline{P}_j \left[\frac{1}{\zeta - \zeta_{j*}} + \frac{\alpha}{\zeta - \zeta_j} \right]; \\ U'_0(\zeta) &= -\sum_{j=1}^n P_j \left[\frac{1}{\zeta - \zeta_j} + \frac{\alpha}{\zeta - \zeta_{j*}} \right]; \quad U''_0(\zeta) = \sum_{j=1}^n P_j \left[\frac{1}{(\zeta - \zeta_j)^2} + \frac{\alpha}{(\zeta - \zeta_{j*})^2} \right]. \end{aligned}$$

Б. Коефіцієнти розвинення в ряд функції U , які входять до правої частини системи рівнянь, визначають за формулами

$$U_n = \sum_{j=1}^n \left(\frac{P_j}{n} (\zeta_j^{-n} + \alpha \zeta_{j*}^{-n} - \overline{P}_j \overline{\gamma}_j \zeta_{j*}^{-n+1}) \right) + f_n(\zeta),$$

де f_n – коефіцієнт розвинення в ряд Тейлора функції $F_1(\zeta)$ в околі точки $\zeta=0$.

В. Визначимо коефіцієнти розвинення $b_1, \dots, b_n$. Для цього (11) запишемо у вигляді

$$\frac{\overline{c}_1}{\zeta} + \frac{\overline{c}_2}{\zeta^2} + \dots + \frac{\overline{c}_n}{\zeta^n} = (\overline{b}_n \zeta^n + \overline{b}_{n-1} \zeta^{n-1} + \dots + \overline{b}_0 + \sum_{k=1}^n \overline{b}_{-k} \zeta^{-k}) (c'_0 + c'_1 \zeta + \dots + c'_{n-1} \zeta^{n-1}),$$

де $c'_j = (j+1)c_{j+1}$. Перемноживши справа ряди і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях ζ , отримаємо рекурентні формули для знаходження коефіцієнтів

$$b_n = \frac{c_n}{\bar{c}_0}; b_{n-k} = \frac{c_{n-k}}{\bar{c}_0} - \frac{b_{n-k+1}c'_1 + \dots + b_n c'_k}{\bar{c}_0}, k = 1, \dots, n,$$

$$b_{n+k} = -\frac{b_{n-k+1}c'_1 + \dots + b_{2n-k-1}c'_{n-1}}{\bar{c}_0}, k = n+1, \dots$$

Перетворення побудованого розв'язку. Проведені розрахунки при достатньо великих n показали, що при зменшенні значень змінних ζ та ζ_j точність обчислених напружень і переміщень суттєво знижується. Це пов'язано з тим, що в наведений розв'язок входять величини, які визначають через поліноми від змінних $1/\zeta$ та $1/\zeta_j$, які можуть набувати великих значень. При обчисленнях відбувається втрата точності, оскільки виникає необхідність віднімання великих чисел. Тому наведений достатньо простий розв'язок може бути використаний тільки при невеликому значенні n (n -ступінь полінома ω) або в околі границі області за умови, що сили також розміщені близько границі.

Провівши перетворення наведених співвідношень так, щоб у розв'язок не входили вирази, які мають великі значення (процес проведення перетворень опускаємо у зв'язку з обмеженням тексту), запишемо похідні від знайдених функцій, які потрібні для знаходження напружень і переміщень

$$\Phi(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}; \Psi(\zeta) = \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}; \frac{d\Phi(\zeta)}{dz} = \frac{\varphi''(\zeta)\omega'(\zeta) - \varphi'(\zeta)\omega''(\zeta)}{(\omega'(\zeta))^3};$$

$$\varphi'(\zeta) = U'_0(\zeta) + \sum_{j=1}^n \bar{\Gamma}_j \bar{P}_j \zeta_j \cdot \frac{n\zeta - (n+1)\zeta_j}{(\zeta - \zeta_j)^2} \zeta^n - S'(\zeta),$$

$$\varphi''(\zeta) = U''_0(\zeta) + \sum_{j=1}^n \bar{\Gamma}_j \bar{P}_j \zeta_j \cdot \frac{n(n-1)\zeta^2 - 2(n^2-1)\zeta\zeta_j + n(n+1)\zeta_j^2}{(\zeta - \zeta_j)^2} \zeta^{n-1} - S''(\zeta),$$

$$\psi(\zeta) = \psi_A(\zeta) + \psi_B(\zeta),$$

$$\psi'_A(\zeta) = V'_0(\zeta) - \sum_{j=1}^n \frac{\bar{P}_j \bar{\Gamma}_j \zeta_j}{\omega'(\zeta)(\zeta - \zeta_j)^2} \left(\frac{\omega'_1(\zeta)\omega'(\zeta) - \omega_1(\zeta)\omega''(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \left[n\zeta - (n+1)\zeta_j \right] + \right. \\ \left. + \omega_1(\zeta) \frac{(n+2)\zeta_j - n\zeta}{\zeta - \zeta_j} \right);$$

$$\psi'_B(\zeta) = w'(\zeta)[S'(\zeta) - U'_0(\zeta)] + w(\zeta) \cdot [S''(\zeta) - U''_0(\zeta)] + \\ + S'_*(\zeta) \cdot \sum_{j=1}^n \left[\frac{\overline{\omega(\zeta_j)}}{\omega'(\zeta_j)} - w(\zeta_j) \right] \frac{P_j}{(\zeta - \zeta_j)^2} + \alpha P_j \frac{w(\zeta_j)}{(\zeta - \zeta_j)^2},$$

де

$$\omega_1(\zeta) = \zeta^n \bar{\omega}(1/\zeta) = \bar{c}_1 \zeta^{n-1} + \bar{c}_2 \zeta^{n-2} + \dots + \bar{c}_n;$$

$$\varphi(\zeta) = U_0(\zeta) + \sum_{j=1}^n \bar{\Gamma}_j \bar{P}_j \frac{\zeta_j^*}{\zeta - \zeta_j^*} \zeta^{n+1} - S(\zeta),$$

$$\Gamma_j = \gamma_j \cdot \zeta_j; \quad S(\zeta) = \sum_{j=1}^n \bar{\gamma}_j \bar{P}_j \zeta_j^{-k-1}; \quad w(\zeta) = \frac{\bar{\omega}(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)} - \left(\frac{\bar{b}_n}{\zeta^n} + \frac{\bar{b}_{n-1}}{\zeta^{n-1}} + \dots + \frac{\bar{b}_1}{\zeta} \right).$$

Використовуючи побудовані необхідні співвідношення, які підставляємо у формули напружень і переміщень, одержуємо розв'язки плоскої задачі теорії пружності.

-
1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М., 1966.

RESEARCH OF THE RESILIENT STATE OF PLATES ELEMENT OF CONSTRUCTION, THAT IS UNDER ACTION OF THE CONCENTRATED POWER FACTORS

Volodymyr Maksymovych¹, Ostap Dumanskiy²

¹Lutsk State Technical University,
Lvivska Str., 75, 43018 Lutsk, Ukraine

²National Forestry University of Ukraine,
General Chuprinka Str., 103, 79057 Lviv, Ukraine

The generalized solution of elastic-deformable state for a lamellar element which is weakened by curvilinear apertures and situated under action of concentrated force factors has been developed using analytical functions and conformal mapping apparatus.

Key words: plate, concentrated power factors, concentration of tensions.

Стаття надійшла до редколегії 07.09.2005
Прийнята до друку 22.11.2006

УДК 539.3

ПЛОСКА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ВЗАЄМОДІЇ НАХИЛЕНОГО ПРЯМОКУТНОГО ШТАМПА ТА ПРУЖНОГО ШАРУ В УТОЧНЕНОМУ ФОРМУЛЮВАННІ ЗА УМОВИ ФРИКЦІЙНОГО ТЕПЛОУТВОРЕННЯ

Петро КРАСНЮК

Львівська державна фінансова академія,
вул. Коперника, 36, 79000 Львів, Україна

Досліджено питання уточнення класичного формулювання плоскої контактної задачі взаємодії нахиленого прямокутного штампа та пружної основи. Показано, що розраховані переміщення контактної поверхні пружного тіла за класичної граничної умови не узгоджуються з формою поверхні штампа поза ділянкою взаємодії (відбувається ефект проникнення матеріалу основи в штамп), що вимагає зміни контактної умови.

Ключові слова: контактна задача, прямокутний штамп, пружна основа, фрикційне теплоутворення.

За класичного формулювання плоских контактних задач для прямокутного у плані штампа [1–5] відбувається використання наступної граничної умови на ділянці взаємодії (рис. 1) $u_y = -\delta - \alpha_0 x$, де u_y – нормальні переміщення, δ – осадка штампа, α_0 – кут повороту штампа як жорсткого цілого стосовно осі z внаслідок не центрально-симетричного прикладання притискної сили. Як свідчать числові розрахунки, тільки за центральносиметричного прикладання навантаження форма поверхні шару узгоджується з формою поверхні штампа.

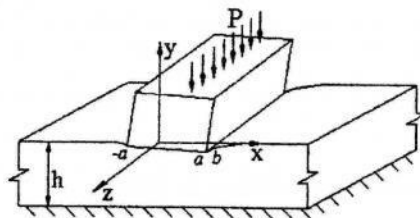


Рис. 1

У випадку прикладання сили з ексцентриситетом простежується проникнення матеріалу основи в штамп зі сторони прикладеної сили. Загалом правильність формулювання контактної задачі й особливо її граничних умов треба завжди перевіряти розрахунком переміщень. Ці обставини вимагають зміни контактної умови, тобто врахування при визначенні граничної умови на переміщення рівняння бічної поверхні жорсткого штампа.

Ми розглядаємо статичну термопружну контактну задачу для трибосистеми, що складається з пружного шару, защемленого по основі, по поверхні якого переміщується прямокутний в плані штамп, втиснутий з ексцентриситетом. Враховується теплоутворення від дії сил тертя, підпорядкованих закону Амонтона.

Вплив фрикційного теплоутворення при взаємодії штампа та пружного шару досліджували інші автори [6–9]. В цих працях розглядали задачі для

товстого шару, де вибирали перший член асимптотики регулярної частини ядра інтегрального рівняння ("метод великих λ " [3]) і застосовували умови на ділянці контакту у класичному формулюванні [1]. В цій же праці розглянемо контактну задачу для нахилоного штампа в уточненому формулюванні, а також дослідимо вплив фрикційного теплоутворення на розподіл контактного тиску за взаємодії штампа та шару скінченної товщини h .

Математичне формулювання задачі. Нехай жорсткий штамп прямокутної у перерізі форми шириною $2a$, втиснутий віднесеною до одиниці довжини і прикладеною з ексцентриситетом e силою P до пружного шару товщиною h , жорстко защемленого з основи (рис. 1). Ділянка ненавантаженого контакту між штампом і шаром описується нерівностями $|x| \leq a$; $|z| < \infty$, після прикладання навантаження контакт відбуватиметься на ділянці $-a \leq x \leq b$, коли $b > a$. Припускається, що штамп у напрямі осі z переміщується по поверхні шару з малою швидкістю v . За рахунок дії сил тертя τ_{yz} , що виникають на співдотичних поверхнях і підпорядкованих закону Амонтона ($\tau_{yz} = f \cdot \sigma_y$), в площині контакту відбувається теплоутворення, причому внаслідок термоізоляції штампа все тепло, згенероване на контакті, скеровують тільки у шар. Між нижньою поверхнею шару та основою нульової температури припускається теплообмін за законом Ньютона, а верхня поверхня шару поза ділянкою контакту вважається теплоізованою, оскільки, як було показано в [4, 8], вплив тепловіддачі з цієї поверхні незначно впливає на розподіл контактних напружень. Крім того, нехтуємо впливом дотичних напружень τ_{xz} на ділянці контакту.

Згадані припущення реалізують у системі плоску деформацію, тому в математичному плані задача зводиться до інтегрування системи диференціальних рівнянь теплопровідності та термопружності [4] за граничних і контактних умов

$$y = -h : \partial_y T = \gamma T; u_x = 0; u_y = 0, \quad (1)$$

$$y = 0 : -a \leq x \leq b : \partial_y T = f v \lambda^{-1} p(x); \tau_{yx} = 0;$$

$$u_y = \begin{cases} -\delta - \operatorname{tg}(\alpha_0)x; & |x| \leq a; \\ -\delta - \operatorname{tg}(\alpha_0)a - \operatorname{ctg}(\alpha_0)a + \operatorname{ctg}(\alpha_0)x; & a < x \leq b, \end{cases} \quad (2)$$

$$x > b, x < -a : \partial_y T = 0; \sigma_y = 0; \tau_{yx} = 0. \quad (3)$$

Умова для нормальних переміщень u_y в (2) отримана внаслідок перпендикулярності бічної поверхні штампа до основи, якщо врахувати скінченність кута повороту штампа α_0 . Якщо прийняти малість цієї величини, то контактну умову можна переписати у такому вигляді:

$$u_y = \begin{cases} -\delta - \alpha_0 x; & |x| \leq a; \\ -\delta - \alpha_0 a - a/\alpha_0 + x/\alpha_0; & a < x \leq b. \end{cases} \quad (4)$$

Замикають систему диференціальних рівнянь і граничних умов співвідношення рівноваги штамп як жорсткого цілого

$$\int_{-a}^b p(x) dx = P; \quad \int_{-a}^b xp(x) dx = e \cdot P \quad (5)$$

та умови теплового балансу [9]

$$f \nu \lambda^{-1} \int_{-a}^b p(x) dx = \gamma \int_{-\infty}^{\infty} T(x, -h) dx. \quad (6)$$

У наведених формулах: $p(x)$ – контактний тиск; T – температура; u_x, u_y – компоненти вектора переміщень; σ_y, τ_{yx} – компоненти тензора напружень; f – коефіцієнт тертя; λ – коефіцієнт теплопровідності; γ – коефіцієнт теплообміну між нижньою площиною шару та основою. Решту позначень описано вище.

Побудова розв'язку та аналіз числових результатів. Сформульовану задачу (1)–(3) та (5) з використанням інтегрального перетворення Фур'є за координатою x можна звести до розв'язку інтегрального рівняння стосовно контактного тиску $p(x)$ [4]

$$\begin{aligned} & \frac{2(1-\nu^2)}{E\pi} \int_{-a}^b p(t) \left[\Delta(x-t) - \frac{f \nu \alpha E}{2\lambda(1-\nu)} H(x-t) \right] dt = \\ & = \begin{cases} \delta + \operatorname{tg}(\alpha_0)x; & |x| \leq a; \\ \delta + \operatorname{tg}(\alpha_0)a + \operatorname{ctg}(\alpha_0)a - \operatorname{ctg}(\alpha_0)x; & a < x \leq b, \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

де з лівого боку у (7) є значення вертикальних термопружних переміщень на поверхні $y = 0$, взятих з від'ємним знаком; E – модуль Юнга; α, ν – відповідно, коефіцієнти лінійного теплового розширення та Пуассона,

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= \int_0^\infty \frac{1}{\xi} \frac{(3-4\nu)\operatorname{ch}(\xi h)\operatorname{sh}(\xi h) - \xi h}{\xi^2 h^2 - (1-2\nu)^2 \operatorname{sh}^2(\xi h) + 4(1-\nu)^2 \operatorname{ch}^2(\xi h)} \cos(\xi x) d\xi; \\ H(x) &= \int_0^\infty \frac{(\xi^2 h^2 + (3-4\nu)\operatorname{sh}^2(\xi h))(\xi \operatorname{sh}(\xi h) + \gamma \operatorname{ch}(\xi h)) +}{\xi^2 (\xi \operatorname{sh}(\xi h) + \gamma \operatorname{ch}(\xi h)) \times} \\ & \quad + 2(1-\nu)\xi(\xi h \operatorname{ch}(\xi h) - \gamma h \operatorname{sh}(\xi h) + \operatorname{sh}(\xi h))}{\times (\xi^2 h^2 - (1-2\nu)^2 \operatorname{sh}^2(\xi h) + 4(1-\nu)^2 \operatorname{ch}^2(\xi h))} \cos(\xi x) d\xi. \end{aligned}$$

Рівняння (7) разом з умовами рівноваги штамп (5), а також співвідношенням обмеженості контактних напружень $p(b) = 0$, коли висота штамп більша від значень $b-a$, дають повну систему рівнянь сформульованої проблеми.

Розв'язок задачі (7), (5) шукатимемо з використанням відомого підходу [4]. Врахувавши те, що ядро інтегрального рівняння (7) – функція $\varphi(x)$ має логарифмічну особливість [3], остаточний вираз для функції $p(x)$ вибирається у такому вигляді (де зроблено перехід до симетричного інтервалу $|x| \leq 1$, а функція контактного тиску подана у безрозмірному вигляді, для чого вона віднесена до величини P/h)

$$p(x) = \frac{Eh}{2P(1-\nu^2)\pi} (\operatorname{tg}(\alpha_0) + \operatorname{ctg}(\alpha_0)) \ln \left(\frac{1 - x\varepsilon + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\varepsilon^2}}{|x-\varepsilon|} \right) + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{2}{2n+1} \sum_{j=1}^n \psi_1(x_j)(1-x_j) \left(1 + \sum_{m=1}^{n-1} (U_m(x_j) + U_{m-1}(x_j)) \times \right. \quad (8)$$

$$\left. \times \frac{T_m(x) - T_{m+1}(x)}{1-x} \right),$$

де множником при $\sqrt{(1-x)/(1+x)}$ є інтерполяційний поліном Лагранжа степеня n [10] за поліномами $R_n(x) = (T_n(x) - T_{n+1}(x))/(1-x)$, ($x_j = \cos((2j/(2n+1))\pi)$, $j = 1, \dots, n$); $U_n(x)$ – поліноми Чебишева другого роду порядку n [11]. При логарифмі у формулі (8) наведено асимптотичне значення контактного тиску при x , прямуючому до $\varepsilon = ((3a-b)/(a+b))$. Як видно з наведених співвідношень, розрив нахилу дотичної до профілю всередині області контакту (точка $x = \varepsilon$) призводить до наявності логарифмічної особливості $p(x)$, що характерне для контактних задач втиснення в площину клина [5].

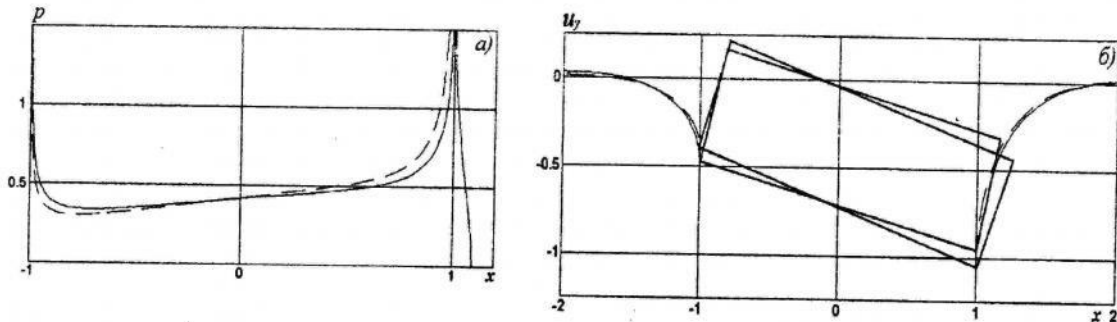


Рис. 2

На рис. 2, а та 2, б наведено розподіл контактної тиску та вигляд нормальних переміщень контактної поверхні шару $u_y(x, 0)$ пружної задачі, знайдені за класичного [1, 4] та уточненого формулювання. Штрихові криві відповідають класичному випадку (праця [4]), а суцільні – розв'язку в уточненому формулюванні (формула 8). Основні параметри мають такі значення: $a = 1,0$, $\nu = 0,3$, $e = 0,2$, $\nu = 0$ і $(Eh)/(2P(1-\nu^2)) = 0,25$. Треба зазначити, що у випадку класичного формулювання $\delta/h = 0,725$, $\alpha_0 = 0,325$, а за уточненого – $\delta/h = 0,715$, $\alpha_0 = 0,24$. Як бачимо, простежується незначна відмінність у величині осадки штампа та доволі суттєва – у значенні кута поворо-

ту a_0 , що пояснюється викривленням поверхні шару в напрямі, протилежному повороту.

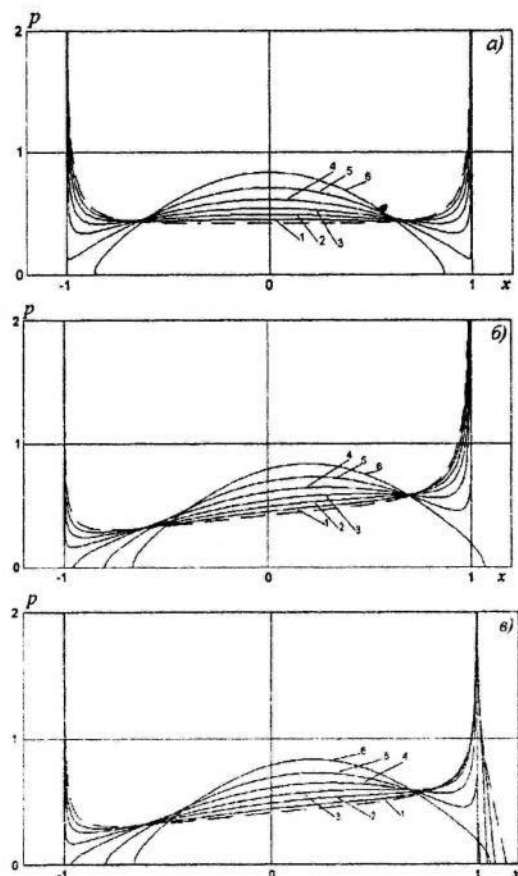


Рис. 3

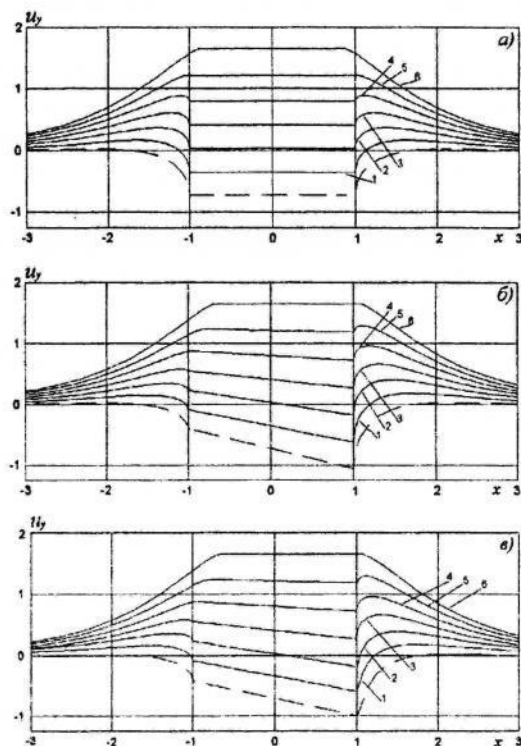


Рис. 4

На рис. 3 та 4 зображено графіки розподілу контактної тиску та форми поверхні $y = 0$ шару за умови врахування впливу фрикційного теплоутворення. Криві побудовано для різних значень параметра $\chi = (f\nu\alpha Eh)/(2\lambda(1-\nu))$, що, як було показано в [4], визначає інтенсивність теплоутворення. Індекси кривих цих рисунків відповідають таким значенням параметра χ : 0,25, 0,5, 0,75, 1,0, 1,25 і 1,5 (штрихові лінії – $\chi = 0$). На рис. 3, а побудовано, коли $e = 0$, б та в – при $e = 0,2$ відповідно за класичного та уточненого формулювання. Решта параметрів $a = 1,0$, $\nu = 0,3$ і $(Eh)/(2P(1-\nu^2)) = 0,25$. Зростання параметра χ спричиняє зменшення осадки штамп, причому настає такий момент, що рівновага штамп відбувається при від'ємних значеннях δ (рис. 3, а та 4, а). Контактний тиск зберігає кореневу особливість (з меншим, ніж за пружної взаємодії, коефіцієнтом при сингулярності) тільки за умови $a < a_*$. При $a \geq a_*$ штамп контактує зі шаром на проміжку $[-a_*, a_*]$, тобто простежується відрив штамп від основи на ділянці області контакту. Збільшення χ є причиною зменшення a_* , а за фіксованого χ ріст притисної сили P збільшує $|\delta|$, не впливаючи

на величину проміжку контакту. Тобто, можемо стверджувати, що для кожного значення χ критичне значення півширини ділянки контакту a_* є тією границею, за якою вплив теплових чинників компенсує дію силових. Якщо утискуване тіло почне взаємодіяти з основою вздовж проміжку $[-a_*, a_*]$, то прикладання сили з ексцентриситетом спричинить простий зсув штампа в напрямі дії сили (крива з індексом 6 на рис. 3, б і 4, б).

Числовий аналіз дає змогу стверджувати, що уточнення контактної умови за нецентральносиметричного втиснення штампа варто розглядати тільки за суто силовою взаємодією тіл або за невеликих значень параметра χ . З ростом інтенсивності теплоутворення відбувається зростання викривлення контактної поверхні у більш нагрітій зоні ділянки контакту, що розміщується зі сторони прикладеної сили та зменшення протидії матеріалу шару повороту штампа, що дає змогу практично знехтувати з логарифмічної особливості контактного тиску (криві з індексом 4 та 5 на рис. 3, б і 3, в та розглядати задачу у класичному формулюванні).

Отже, зробили уточнення класичного формулювання термопружної контактної задачі для нахилоного штампа, що було зумовлене неузгодженням форми поверхні утискуваного тіла поза ділянкою контакту з розрахованими переміщеннями контактної поверхні пружного тіла. Записано вирази для контактних напружень через інтерполяційні поліноми Лагранжа, коефіцієнти яких обчислюють з розв'язку системи лінійних алгебричних рівнянь. Показано, що існування розриву нахилу дотичної до профілю всередині ділянки взаємодії призводить до наявності логарифмічної особливості контактного тиску.

Дослідження впливу фрикційного теплоутворення дає підстави стверджувати існування для кожного значення параметра χ , що визначає інтенсивність теплоутворення, критичного значення півширини ділянки контакту, при якому вплив теплових чинників компенсує вплив силових. Тобто, якщо для заданого значення χ півширина штампа a є меншою від цього критичного значення a_* , то збільшення притискної сили спричиняє збільшення осадки штампа та зростання коефіцієнта сингулярності при кореневій особливості. Якщо ж $a > a_*$, то ріст P спричиняє значно більше викривлення контактної поверхні і штамп взаємодіє з поверхнею шару $y = 0$ на ділянці $[-a_*, a_*]$.

Уточнення контактної умови за нецентральносиметричного втиснення штампа вносить суттєві корективи у розподіл контактного тиску тільки за суто силової взаємодії тіл або за невеликих значень параметра χ . Ріст інтенсивності теплоутворення спричиняє вирівнювання штампа, що дає підстави знехтувати з логарифмічної особливості контактних напружень і, як наслідок, досліджувати взаємодію тіл у класичному формулюванні.

1. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. – М., 1949.
2. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М., 1980.

3. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные контактные задачи теории упругости. – М., 1974.
4. Краснюк П.П. Контактное взаимодействие жесткого штампа с упругим слоем при фрикционном теплообразовании // Прикладная механика. – 2000. – Т. 36. – № 1. – С. 130–138.
5. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М., 1989.
6. Ворович И.И., Пожарский Д.А., Чебанов М.И. Задача термоупругости о движущемся штампе при учете тепловыделения от трения // Прикл. матем. и механика. – 1994. – Т. 58. – Вып. 3. – С. 161–166.
7. Грилицкий Д.В., Паук В.И. Контактная задача для толстого шероховатого слоя с учетом изнашивания и теплообразования // Физ.-хим. механика материалов. – 1989. – Т. 25. – № 3. – С. 78–83.
8. Евтушенко А.А., Паук В.И. Нестационарная контактная задача для шероховатых тел при учете теплообразования от трения // Прикладная математика и механика. – 1996. – Т. 60. – Вып. 4. – С. 691–696.
9. Грилицкий Д.В. Система сингулярных интегральных уравнений для плоской контактной задачи термоупругости при стационарном тепловыделении на площадке контакта // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1984. – Вип. 22. – С. 29–34.
10. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. – М.; Л., 1949.
11. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган: Пер. с англ. – М., 1979.

**A FLAT CONTACT PROBLEM OF INTERACTION OF THE
INCLINED RECTANGULAR STAMP AND AN ELASTIC LAYER
IN THE SPECIFIED STATEMENT UNDER CONDITION
OF A FRICTIONAL HEAD GENERATION**

Peter Krasnyuk

*Lviv State Financial Academy,
Copernica Str., 3b, 79000 Lviv, Ukraine*

In work the problem of specification of classical statement of a flat contact problem about interaction of the inclined rectangular stamp and the elastic basis is investigated. It is shown, that the designed moving of a contact surface of an elastic body under a classical boundary condition are not connected to the form of a surface of a stamp outside of a site of interaction (the effect of penetration of a material of a basis in a stamp takes place) that demands change of a contact condition.

Key words: contact problem, rectangular stamp, elastic basis, frictional head generation.

Стаття надійшла до редколегії 16.12.2005

Прийнята до друку 22.11.2006

УДК 517.11

ПРО ГРАНИЧНЕ ЗНАЧЕННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО ПОДАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯННЯ КЛЕЙНА-ГОРДОНА

Віктор ОПАНАСОВИЧ, Микола СЛОБОДЯН

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна*

Введено інтегральне подання розв'язку рівняння Клейна-Гордона та доведено, що для цього справджується аналог формул Сохоцького-Племелі.

Ключові слова: рівняння Клейна-Гордона, інтегральне подання, комплексна змінна, аналог формул Сохоцького-Племелі.

До рівняння Клейна-Гордона зводяться розв'язки багатьох задач механіки, наприклад, задачі згину пластин з врахуванням уточнених теорій. Використання інтегрального подання цього рівняння дає змогу звести розв'язки задач до сингулярних інтегральних рівнянь, які можна розв'язати чисельно [2, 3].

У літературі, наприклад [1, 2], відоме інтегральне подання розв'язку рівняння Лапласа у двовимірному випадку – інтеграл типу Коші. Мета нашої праці – побудувати відповідне інтегральне подання для рівняння Клейна-Гордона та з'ясувати його властивості.

Допоміжні твердження. Функція $\omega(t)$ задовольняє на L умову Гельдера (умову H), якщо для кожних двох точок t_1 і t_2 лінії L комплексної площини C справджується нерівність

$$|\omega(t_2) - \omega(t_1)| \leq A \cdot |t_2 - t_1|^\mu, \quad A > 0, \quad 0 < \mu \leq 1,$$

де A і μ – відповідно стала і показник Гельдера.

Нехай L довільна гладка замкнена чи розімкнена крива, що не має точок перетину, з відповідним додатним напрямом обходу на ній.

Розглянемо функцію

$$U(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{WK_1(W)\omega(t)}{t-z} dt,$$

де $W = k \cdot |t - z|$, $z = x + iy$; i – уявна одиниця, $\omega(t)$ задовольняє умову Гельдера; $K_1(W)$ – функція Макдональда першого порядку, яку можна подати у вигляді

$$K_1(W) = \frac{1}{W} + \tilde{K}_1(W),$$

$$\tilde{K}_1(W) = \left(c - \frac{1}{2} + \ln \frac{W}{2}\right) \cdot \frac{W}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{2(n+1)} + c + \ln \frac{W}{2} \right] \times \\ \times \frac{1}{n!(n+1)!} \cdot \left(\frac{W}{2}\right)^{2n+1}, \quad \tilde{K}_1(0) = 0, \quad c - \text{ стала Ейлера.}$$

Правильні такі зауваження.

Зауваження 1. Функція $\tilde{K}_1(W)$ є обмеженою і неперервною на відрізку $[0, +\infty)$.

Зауваження 2. Функція $U(z)$ задовольняє рівняння Клейна-Гордона $\Delta U - k^2 U = 0$, де Δ – оператор Лапласа.

У цьому можна безпосередньо переконатися, якщо її підставити у це рівняння.

Зауваження 3. Якщо треба вивчити поведінку функції $U(z)$ поблизу деякої частини L_0 лінії L , то розіб'ємо інтеграл, що входить в $U(z)$, на суму двох інтегралів, один із яких взятий по частині L_1 , яка містить L_0 , причому $L_1 \subset L$, а другий – по $L_2 = L/L_1$, тобто функцію $U(z)$ розіб'ємо на дві функції $U_1(z)$ і $U_2(z)$, то функцію $U_2(z)$ можна неперервно продовжити на L_0 , тому потрібно дослідити тільки функцію $U_1(z)$.

Теорема. Якщо функція $\omega(t)$ задовольняє умову Гельдера на деякій гладкій частині лінії L , то функцію $U(z)$ можна неперервно продовжити зліва і справа на цю частину, за винятком, можливо, її кінців (якщо такі є), а для граничних значень функції справджуються залежності

$$U^{\pm}(t_0) = \pm \frac{1}{2} \omega(t_0) + \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{W_0 K_1(W_0) \omega(t)}{t - t_0} dt, \quad t_0 \in L,$$

де $W_0 = k \cdot |t - t_0|$; знак “+” відповідає граничному значенню функції $U(z)$ при $z \rightarrow t_0$ зліва від L , знак “–” – справа; інтеграл у правій частині розуміється у сенсі головного значення.

Доведення теореми.

Для доведення теореми скористаємося відповідним доведенням із монографії [1] для інтегралів типу Коші.

Врахувавши зауваження 3, достатньо розглянути випадок, коли L – гладка розімкнена дуга.

Дослідимо спочатку поведінку функцій

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{W \tilde{K}_1(W)}{t - z} \cdot [\omega(t) - \omega(t_0)] dt, \quad G(z) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{W \tilde{K}_1(W)}{t - z} dt,$$

при $z \rightarrow t_0$, де t_0 – довільна точка лінії L , за винятком її кінців.

Доведемо лему.

Лема. Нехай β_0 — довільний нетупий кут, тобто $0 < \beta_0 \leq \pi/2$, і нехай z наближається до $t_0 \in L$ так, що нетупий кут β між відрізком t_0z і дотичною до L в точці t_0 не менший β_0 . Тоді $F(z)$ ($G(z)$) рівномірно стосовно положення t_0 на L , прямує до границі

$$F(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{W_0 \tilde{K}_1(W_0)}{t - t_0} \cdot [\omega(t) - \omega(t_0)] dt, \quad \left(G(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{W_0 \tilde{K}_1(W_0)}{t - t_0} dt \right).$$

Доведення.

Доведемо лему для функції $F(z)$, так як доведення для функції $G(z)$ — аналогічне.

Отже, треба довести, що $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta^* > 0$, якщо $|z - t_0| < \delta^*$, то $|F(z) - F(t_0)| < \varepsilon$.

Зауважимо, що достатньо довести лему для функції

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_l \frac{W \tilde{K}_1(W)}{t - z} \cdot [\omega(t) - \omega(t_0)] dt,$$

де l — стандартна дуга лінії L , яка містить точку t_0 і яка відповідає стандартному радіусу

$R(\alpha_0)$, де $0 < \alpha_0 < \beta_0$ [1].

Розглянемо

$$\begin{aligned} f(z) - f(t_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_l \frac{\omega(t) - \omega(t_0)}{t - z} W \tilde{K}_1(W) dt - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_l \frac{\omega(t) - \omega(t_0)}{t - t_0} W_0 \tilde{K}_1(W_0) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\omega(t) - \omega(t_0)}{(t - z) \cdot (t - t_0)} \cdot [W \tilde{K}_1(W) \cdot (t - t_0) - W_0 \tilde{K}_1(W_0) \cdot (t - z)] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\omega(t) - \omega(t_0)}{(t - z) \cdot (t - t_0)} [k|t - z| \tilde{K}_1(W)(t - t_0) - k|t - t_0| \tilde{K}_1(W_0)(t - z)] dt. \end{aligned}$$

Опишемо з t_0 , як із центра, коло γ радіуса ρ . При досить малому ρ це коло перетне дугу l у двох точках t_1 і t_2 . Позначимо через $t_1 t_2$ частину l , яка міститься всередині кола γ , а через $l - t_1 t_2$ — іншу частину.

Тоді можемо записати

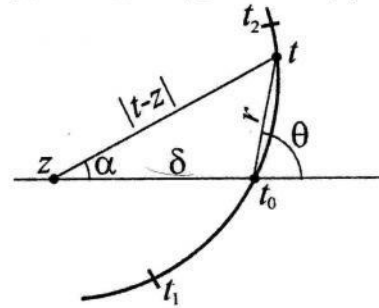


Рис. 1

$$f(z) - f(t_0) = J_1 + J_2, \quad (1)$$

де

$$J_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{t_1 t_2} \frac{\omega(t) - \omega(t_0)}{(t-z)(t-t_0)} [k|t-z|(t-t_0) \tilde{K}_1(W) - k|t-t_0|(t-z) \tilde{K}_1(W_0)] dt,$$

$$J_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{l-t_1 t_2} \frac{\omega(t) - \omega(t_0)}{(t-z)(t-t_0)} [k|t-z|(t-t_0) \tilde{K}_1(W) - k|t-t_0|(t-z) \tilde{K}_1(W_0)] dt.$$

Знайдемо

$$\begin{aligned} |J_1| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{t_1 t_2} \frac{\omega(t) - \omega(t_0)}{(t-z)(t-t_0)} \times \right. \\ &\quad \left. \times [k|t-z|(t-t_0) \tilde{K}_1(W) - k|t-t_0|(t-z) \tilde{K}_1(W_0)] dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{t_1 t_2} \frac{|\omega(t) - \omega(t_0)|}{|t-z| \cdot |t-t_0|} \cdot |k|t-z|(t-t_0) \tilde{K}_1(W) - k|t-t_0|(t-z) \tilde{K}_1(W_0)| |dt| \leq \\ &\leq \frac{k}{2\pi} \int_{t_1 t_2} \frac{A \cdot |t-t_0|^\mu}{|t-z| \cdot |t-t_0|} \cdot |t-z| \cdot |t-t_0| \cdot [|\tilde{K}_1(W)| + |\tilde{K}_1(W_0)|] K |dr| \leq \\ &\leq \frac{k \cdot A \cdot K}{2\pi} \int_{t_1 t_2} r^\mu \cdot [|\tilde{K}_1(W)| + |\tilde{K}_1(W_0)|] |dr| \leq \frac{k \cdot A \cdot K}{2\pi} \int_{t_1 t_2} r^\mu \cdot 2M |dr| \leq \\ &\leq \frac{k \cdot A \cdot K \cdot M}{\pi} \cdot \int_0^\rho r^\mu dr = \frac{k \cdot A \cdot K \cdot M}{\pi} \cdot \frac{\rho^{\mu+1}}{\mu+1}. \end{aligned}$$

Виберемо ρ настільки малим, щоб виконувалась нерівність

$$|J_1| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2)$$

Тепер розглянемо $|J_2|$

$$\begin{aligned} |J_2| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{l-t_1 t_2} \frac{\omega(t) - \omega(t_0)}{(t-z)(t-t_0)} \times \right. \\ &\quad \left. \times [k|t-z|(t-t_0) \tilde{K}_1(W) - k|t-t_0|(t-z) \tilde{K}_1(W_0)] dt \right| \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{l-t_1 t_2} \frac{|\omega(t) - \omega(t_0)|}{|t-z| \cdot |t-t_0|} \cdot |k|t-z|(t-t_0) \tilde{K}_1(W) - k|t-t_0|(t-z) \tilde{K}_1(W_0)| |dt|.$$

Оскільки $(t-t_0) = |t-t_0| \cdot e^{i \cdot \arg(t-t_0)}$, $(t-z) = |t-z| \cdot e^{i \cdot \arg(t-z)}$, то отримаємо

$$\begin{aligned} |J_2| &= \frac{k}{2\pi} \int_{l-t_1 t_2} \frac{|\omega(t) - \omega(t_0)|}{|t-z| \cdot |t-t_0|} \cdot |t-z| \cdot |t-t_0| \cdot |e^{i \cdot \arg(t-t_0)} \tilde{K}_1(W) - \\ &- e^{i \cdot \arg(t-z)} \tilde{K}_1(W_0)| |ds| = \frac{k}{2\pi} \int_{l-t_1 t_2} |\omega(t) - \omega(t_0)| \cdot |e^{i \cdot \arg(t-t_0)} \tilde{K}_1(W) - \\ &- e^{i \cdot \arg(t-z)} \tilde{K}_1(W_0) + e^{i \cdot \arg(t-t_0)} \tilde{K}_1(W_0) - e^{i \cdot \arg(t-t_0)} \tilde{K}_1(W_0)| |ds| \leq \\ &\leq \frac{k}{2\pi} \int_{l-t_1 t_2} |\omega(t) - \omega(t_0)| \cdot \left| \left[e^{i \cdot \arg(t-t_0)} (\tilde{K}_1(W) - \tilde{K}_1(W_0)) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left[(e^{i \cdot \arg(t-t_0)} - e^{i \cdot \arg(t-z)}) \tilde{K}_1(W_0) \right] \right| |ds| = \\ &= \frac{k}{2\pi} \int_{l-t_1 t_2} |\omega(t) - \omega(t_0)| \cdot |\tilde{K}_1(W) - \tilde{K}_1(W_0)| |ds| + \\ &+ \frac{k}{2\pi} \int_{l-t_1 t_2} |\omega(t) - \omega(t_0)| \cdot |\tilde{K}_1(W_0)| \cdot |e^{i \cdot \arg(t-t_0)} - e^{i \cdot \arg(t-z)}| |ds| \leq \\ &\leq \frac{k}{2\pi} \int_{l-t_1 t_2} |\omega(t) - \omega(t_0)| \cdot |\tilde{K}_1(W) - \tilde{K}_1(W_0)| |ds| + \\ &+ \frac{k \cdot M}{2\pi} \int_{l-t_1 t_2} |\omega(t) - \omega(t_0)| \cdot |e^{i \cdot \arg(t-t_0)} - e^{i \cdot \arg(t-z)}| |ds|. \end{aligned} \quad (3)$$

Оскільки

$$\int_{l-t_1 t_2} |\omega(t) - \omega(t_0)| |ds| \leq N, \text{ де } N > 0, N \in R,$$

і функція $\tilde{K}_1(W) = \tilde{K}_1(k \cdot |t-z|)$ — неперервна функція від z , тому $\forall \tilde{\varepsilon} > 0$
 $\exists \tilde{\delta} > 0 \quad \forall t, z, t_0 \in C$

$$|z - t_0| < \tilde{\delta} \Rightarrow |\tilde{K}_1(k \cdot |t-z|) - \tilde{K}_1(k \cdot |t-t_0|)| < \tilde{\varepsilon}.$$

Прийmemo $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2} \frac{\pi}{kN}$, тоді

$$\frac{k}{2\pi} \int_{l-t_1 t_2} |\omega(t) - \omega(t_0)| \cdot |\tilde{K}_1(W) - \tilde{K}_1(W_0)| |ds| < \frac{kN}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \frac{\pi}{kN} = \frac{\varepsilon}{4}. \quad (4)$$

Тепер розглянемо другий доданок в (1). Оскільки функція $e^{i \arg(t-z)}$ є неперервною функцією поза кругом γ , тоді $\forall \tilde{\varepsilon} > 0 \quad \exists \tilde{\delta} > 0$
 $\forall t \neq z, \quad t \neq t_0 \in C$

$$|z - t_0| < \tilde{\delta} \Rightarrow |e^{i \arg(t-t_0)} - e^{i \arg(t-z)}| < \tilde{\varepsilon}.$$

Варто пригадати, що поза кругом γ виконується $|t - t_0| \geq \rho > 0$,
 $|t - z| \geq \rho/2 > 0$.

Візьmemo $\tilde{\varepsilon} = \frac{\pi}{2k} \frac{\varepsilon}{NM}$, тоді $\forall t \in l - t_1 t_2$

$$\frac{k \cdot M}{2\pi} \int_{l-t_1 t_2} |\omega(t) - \omega(t_0)| \cdot |e^{i \arg(t-t_0)} - e^{i \arg(t-z)}| |ds| < \frac{kNM}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \frac{\varepsilon}{kN} \frac{1}{M} = \frac{\varepsilon}{4}. \quad (5)$$

Вибравши $\delta = \min(\tilde{\delta}, \tilde{\delta}, \rho)$ та врахувавши (4) і (5), матимемо

$$|J_2| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6)$$

Враховуючи (2) і (6), отримаємо

$$|f(z) - f(t_0)| \leq |J_1| + |J_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Лему доведено.

Продовжимо доведення теореми.

Функцію $U(z)$ можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} U(z) &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{i} \int_L \frac{W \tilde{K}_1(W) \omega(t)}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi} \frac{1}{i} \int_L \frac{\omega(t)}{t-z} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(t)}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{W \tilde{K}_1(W) (\omega(t) - \omega(t_0))}{t-z} dt + \frac{\omega(t_0)}{2\pi i} \int_L \frac{W \tilde{K}_1(W)}{t-z} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{i} \int_L \frac{\omega(t)}{t-z} dt + F(z) + \omega(t_0) G(z). \end{aligned} \quad (7)$$

Беручи до уваги доведену лему і те, що для інтеграла типу Коші правильні формули Сохоцького-Племелі, з (7) одержимо

$$U^{\pm}(t_0) = \pm \frac{\omega(t_0)}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{W_0 K_1(W_0) \omega(t)}{t - t_0} dt.$$

Отже, теорема доведена.

Зауважимо, що з доведеної теореми випливає співвідношення

$$U^+(t_0) - U^-(t_0) = \omega(t_0), \quad t_0 \in L,$$

$$U^+(t_0) + U^-(t_0) = 2U(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{W_0 K_1(W_0) \omega(t)}{t - t_0} dt, \quad t_0 \in L.$$

-
1. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. – М., 1968.
 2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. – М., 1977.
 3. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К., 1981.
 4. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшын А. Д. Распространение напряжений около трещин в пластинках и оболонках. – К., 1976.

ABOUT BOUNDARY VALUE OF INTEGRAL EXPRESSION OF KLEIN-GORDON'S EQUATION SOLUTION

Viktor Opanasovych, Mikola Slobodyan

*Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine*

Integral expression of Klein-Gordon's equation solution is present in this work and it is proved that the analogues of the Sohockiy-Plemeli's formulas are correct here.

Key words: Klein-Gordon's equation, integral expression, complex variable, analogue of the Sohockiy-Plemeli's formulas.

Стаття надійшла до редколегії 25.05.2005
Прийнята до друку 22.11.2006

УДК 539.3

ЦИЛІНДРИЧНИЙ ЗГИН ПРУЖНОГО ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОГО ШАРУ ПЕРІОДИЧНОЮ СИСТЕМОЮ ГЛАДКИХ ШТАМПІВ

Іван ПРОКОПИШИН, Дмитро ХЛЄБНІКОВ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

Розглянуто задачу про циліндричний згин трансверсально-ізотропного шару періодичною системою гладких штампів. На основі операторного розв'язку Лехніцького просторової задачі теорії пружності для трансверсально-ізотропного шару отримане інтегральне рівняння Фредгольма другого роду на контактний тиск. Розв'язок цього рівняння одержано методом заміни ядра виродженим у формі ряду Фур'є.

Ключові слова: трансверсально-ізотропний шар, контактна задача, метод виродженого ядра.

Періодична контактна задача про циліндричний згин ізотропного пружного шару жорсткими гладкими штампів ґрунтовно вивчена у праці [1]. Цю задачу розглядають для трансверсально-ізотропного шару. На основі операторного розв'язку С.Г. Лехніцького [3] задачі про пружну рівновагу трансверсально-ізотропного шару методами теорії інтегральних рівнянь записане інтегральне рівняння Фредгольма другого роду на контактний тиск. Його розв'язок отримали у формі ряду Фур'є методом заміни ядра виродженим.

Формулювання контактної задачі. Розглянемо нескінчений пружний трансверсально-ізотропний шар товщини $2h$, серединна поверхня якого паралельна до площини ізоtropії і лежить у площині Oxy . Шар перебуває в умовах плоскої деформації під дією періодичної системи циліндричних у напрямі Oy штампів, розташованих з постійним кроком $2l$ (рис. 1).

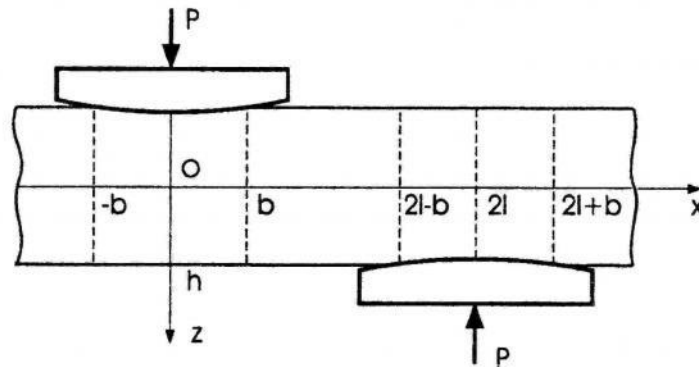


Рис. 1. Циліндричний згин шару періодичною системою штампів

Припустимо, що тертя між штампами і шаром немає, величина зони контакту $2b$ – наперед невідома.

Позначимо через u , w – переміщення точок шару в напрямі осей Ox та Oz відповідно.

Деформації в шарі визначаються співвідношеннями Коші

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (1)$$

а напруження – узагальненим законом Гука

$$\sigma_x = \frac{(1 - \nu_1\nu_2)E}{(1 + \nu)\mu_0} \varepsilon_x + \frac{\nu_1 E}{\mu_0} \varepsilon_z, \quad \tau_{xz} = 2G_1 \varepsilon_{xz}, \quad \sigma_z = \frac{\nu_1 E}{\mu_0} \varepsilon_x + \frac{(1 + \nu)E_1}{\mu_0} \varepsilon_z, \quad (2)$$

де E, ν – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона в площинах ізотропії; E_1, ν_1, G_1 – модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона і модуль зсуву у перпендикулярному напрямі, $\nu_2 = \frac{\nu_1 E}{E_1}$, $\mu_0 = (1 - \nu - 2\nu_1\nu_2)$.

Запишемо статичні та кінематичні крайові умови задачі

$$\begin{aligned} \sigma_z &= 0, \quad z = -h, \quad |x - 2l(2k + 1)| < 2l - b, \\ \sigma_z &= 0, \quad z = h, \quad |x - 4lk| < 2l - b, \\ \tau_{xz} &= 0, \quad z = \pm h; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} w &= f(x) + \Delta, \quad z = -h, \quad |x - 4lk| \leq b, \\ w &= -f(x - 2l) + \Delta, \quad z = h, \quad |x - 2l(2k + 1)| \leq b; \end{aligned} \quad (4)$$

де $f(x)$ – періодичне продовження функції, яка описує поверхню штампа на проміжку $|x| < l$; Δ – осадка штампа.

Розв'язок прямої задачі в рядах Фур'є. Розв'язок задачі про пружну рівновагу шару отримав в операторному вигляді С.Г. Лехніцький [3] символічним методом А.І. Лур'є.

Введемо позначення

$$s_0^2 = \frac{G}{G_1}, \quad \lambda = \frac{2}{1 - \nu}(s_0^2 - \nu_2), \quad \mu = \frac{E(1 - \nu_1\nu_2)}{E_1(1 - \nu^2)}, \quad H = E\nu_1 + G_1\mu_0,$$

$$\theta_i = \frac{2GG_1(1 - \nu_1\nu_2)}{H} + \frac{G_1E\nu_1}{H}s_i^2, \quad \gamma_i = \frac{2G(1 - \nu_1\nu_2)}{H} - \frac{G_1\mu_0}{H}s_i^2, \quad i = 1, 2,$$

де $d = \frac{(1 - \nu_1\nu_2)(s_1 + s_2)}{E_1s_1s_2}$; s_1^2, s_2^2 – корені рівняння $s^4 - \lambda s^2 + \mu = 0$;

$\partial = \frac{d}{dx}$ – оператор диференціювання за x .

Зазначимо, що з додатності енергії пружної деформації випливає умова $\mu > 0$ [4], для ізотропних матеріалів і багатьох природних трансверсально-ізотропних матеріалів виконується умова $\lambda > 0$.

Наведемо вирази для переміщень u , w в задачі про плоску деформацію шару під дією нормального навантаження $\sigma_z(x, \pm h)$

$$u = (s_1\theta_2 \cos s_1 z \partial \sin s_2 h \partial - s_2\theta_1 \cos s_2 z \partial \sin s_1 h \partial) \chi + (-s_1\theta_2 \sin s_1 z \partial \cos s_2 h \partial + s_2\theta_1 \sin s_2 z \partial \cos s_1 h \partial) \psi, \quad (5)$$

$$w = (-\gamma_1\theta_2 \sin s_1 z \partial \sin s_2 h \partial + \gamma_2\theta_1 \sin s_2 z \partial \sin s_1 h \partial) \chi + (-\gamma_1\theta_2 \cos s_1 z \partial \cos s_2 h \partial + \gamma_2\theta_1 \cos s_2 z \partial \cos s_1 h \partial) \psi, \quad (6)$$

де χ , ψ – функції напружень, які задовольняють рівняння

$$L^+(h^2\partial^2)\chi = p^+, \quad L^-(h^2\partial^2)\psi = p^-, \quad p^\pm(x) = \frac{1}{2}(\sigma_z(x, h) \pm \sigma_z(x, -h)), \quad (7)$$

$$L^\pm(h^2\partial^2) = \frac{1}{2}h\partial[(s_1 + s_2)\sin((s_1 - s_2)h\partial) \pm (s_1 - s_2)\sin((s_1 + s_2)h\partial)]. \quad (8)$$

Подано зовнішнє навантаження, яке відповідає вихідній контактній задачі, у формі рядів Фур'є

$$q(x) = -\sigma_z(x, -h) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k \cos \omega_k x, \quad (9)$$

$$q(x - 2l) = -\sigma_z(x, h) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k q_k \cos \omega_k x,$$

де q_k – коефіцієнти Фур'є

$$q_k = \frac{1}{2l} \int_{-b}^b q(x) \cos \omega_k x dx, \quad k \geq 1, \quad q_0 = \frac{1}{4l} \int_{-b}^b q(x) x dx, \quad \omega_k = \frac{k\pi}{2l}. \quad (10)$$

Тоді для правих частин рівнянь (7) отримаємо вирази

$$p^+ = -\sum_{k=0}^{\infty} q_{2k} \cos \omega_{2k} x, \quad p^- = -\sum_{k=0}^{\infty} q_{2k+1} \cos \omega_{2k+1} x,$$

а періодичні розв'язки цих рівнянь очевидно запишемо у вигляді рядів Фур'є

$$\chi = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_{2k}}{L^+(-\gamma_{2k}^2)} \cos \omega_{2k} x, \quad \psi = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{q_{2k+1}}{L^-(-\gamma_{2k+1}^2)} \cos \omega_{2k+1} x, \quad \gamma_k = \omega_k h. \quad (11)$$

Вирази для переміщень і напружень отримують на основі співвідношень (5)–(6) та (1), (2) безпосереднім диференціюванням функцій напружень (11).

Формулювання інтегрального рівняння на контактний тиск. Запишемо вираз для вертикального переміщення поверхні шару $z = -h$, виділивши в ньому повільно збіжну частину ряду

$$w(-h, \varphi) = \frac{ld}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{q_n}{n} \cos n\varphi + \frac{q_n}{n} C_n \cos n\varphi \right), \quad \varphi = \frac{\pi x}{2l}, \quad (12)$$

де для непарних $n = 2m - 1$

$$C_{2m-1} = \frac{s_1 \exp(-s_2 \gamma_{2m-1}) ch(s_1 \gamma_{2m-1}) - s_2 \exp(-s_1 \gamma_{2m-1}) ch(s_2 \gamma_{2m-1})}{s_1 ch(s_1 \gamma_{2m-1}) sh(s_2 \gamma_{2m-1}) - s_2 sh(s_1 \gamma_{2m-1}) ch(s_2 \gamma_{2m-1})},$$

а для парних n

$$C_{2m} = \frac{-s_1 \exp(-s_2 \gamma_{2m}) sh(s_1 \gamma_{2m}) + s_2 \exp(-s_1 \gamma_{2m}) sh(s_2 \gamma_{2m})}{s_1 ch(s_2 \gamma_{2m}) sh(s_1 \gamma_{2m}) - s_2 ch(s_1 \gamma_{2m}) sh(s_2 \gamma_{2m})}.$$

Випадок ізотропного матеріалу $s_1 = 1$, $s_2 = 1$ отримуємо граничним переходом $s_1 \rightarrow 1$, $s_2 \rightarrow 1$.

Після підстановки в (12) значень коефіцієнтів Фур'є (10) та перетворень, одержимо

$$w(x, -h) = \frac{ld}{\pi^2} \left[- \int_{-\theta}^{\theta} q(\tau) \ln \left| 2 \sin \frac{\varphi - \tau}{2} \right| d\tau + \int_{-\theta}^{\theta} q(\tau) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{n} \cos n\varphi \cos n\tau \right) d\tau \right], \quad (13)$$

де $\varphi = \frac{\pi x}{2l}$, $\theta = \frac{\pi b}{2l}$.

Для параболічного штампa з кривизною $1/R$ в точці $x = 0$ форма поверхні описується функцією $f(x) = -x^2/2R = -2l^2\varphi^2/\pi^2 R$, $|x| < l$. З умов контакту (4) отримуємо інтегральне рівняння Фредгольма першого роду для визначення безрозмірного контактного тиску $\bar{q}(\varphi) = R dq(\varphi)/l$

$$\int_{-\theta}^{\theta} \bar{q}(\tau) \ln \left| 2 \sin \frac{\varphi - \tau}{2} \right| d\tau = \int_{-\theta}^{\theta} \bar{q}(\tau) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{n} \cos n\varphi \cos n\tau \right) d\tau + \varphi^2 + \delta. \quad (14)$$

Рівняння (14) перетворимо до рівняння Фредгольма другого роду шляхом обертання інтеграла у правій частині рівності на основі розв'язку І.А. Штаєрмана інтегрального рівняння періодичної контактної задачі для півплощини [5]. Тоді отримаємо

$$\bar{q}(\varphi) + \frac{X(\varphi)}{\pi} \int_{-\theta}^{\theta} \bar{q}(\varphi_1) \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n \varpi_n(\varphi) \cos n\varphi_1 \right) d\varphi_1 = \frac{1}{\pi} b(\varphi), \quad (15)$$

де

$$\varpi_n(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{\sin n\varphi_0 d\varphi_0}{X(\varphi_0) \sin \frac{\varphi_0 - \varphi}{2}} = \sum_{k=0}^{n-1} P_k(\cos \theta) \cos(n - k - \frac{1}{2})\varphi, \quad (16)$$

$$b(\varphi) = \frac{X(\varphi)}{\pi} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{(\varphi_0 - \varphi) d\varphi_0}{X(\varphi_0) \sin \frac{\varphi_0 - \varphi}{2}}, \quad (17)$$

$X(\varphi) = \sqrt{2(\cos \varphi - \cos \theta)}$, $P_k(\cos \theta)$ – поліноми Лежандра.

Метод заміни ядра виродженням. Для наближеного розв'язку інтегрального рівняння (15) замінимо суму ряду в ядрі інтегрального рівняння скінченною сумою. Це приводить до рівняння з виродженим ядром

$$\bar{q}(\varphi) + \frac{X(\varphi)}{\pi} \sum_{k=1}^{2n} C_k \varpi_k(\varphi) \int_{-\theta}^{\theta} \bar{q}(\varphi_1) \cos n\varphi_1 d\varphi_1 = \frac{1}{\pi} b(\varphi). \quad (18)$$

Позначимо через Q_k коефіцієнти розвинення безрозмірного контактного тиску $\bar{q}$ в ряд Фур'є

$$Q_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\theta}^{\theta} \bar{q}(\varphi_1) \cos k\varphi_1 d\varphi_1 = \frac{Rd}{l} q_k, \quad k = 1, \dots, 2n.$$

Тепер виразимо контактний тиск $\bar{q}$ з рівняння (15) через коефіцієнти Q_k

$$\bar{q}(\varphi) = -X(\varphi) \sum_{k=1}^{2n} C_k Q_k \varpi_k(\varphi) + \frac{b(\varphi)}{\pi}. \quad (19)$$

Підставляючи вираз (19) знову в (18) і враховуючи лінійну незалежність функцій $\varpi_k(\varphi)$ (16), приходимо до такої системи лінійних алгебричних рівнянь для визначення невідомих Q_k

$$Q_k + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{2n} C_i Q_i \int_{-\theta}^{\theta} X(\alpha) \varpi_i(\alpha) \cos k\alpha d\alpha = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\theta}^{\theta} b(\alpha) \cos k\alpha d\alpha, \quad k = 1, \dots, 2n. \quad (20)$$

Навантаження, яке діє на штамп, визначається інтегруванням виразу для контактного тиску (19)

$$P = \frac{2l}{\pi} \int_{-\theta}^{\theta} q(\varphi) d\varphi = \frac{2l^2}{dR} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\theta}^{\theta} b(\varphi) d\varphi - \sum_{k=1}^{2n} C_k Q_k \int_{-\theta}^{\theta} X(\varphi) \varpi_k(\varphi) d\varphi \right]. \quad (21)$$

Чисельне дослідження задачі. Для обчислення інтеграла (17) з кореневою особливістю застосовували квадратурну формулу Меллера [2]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{f(\alpha) d\alpha}{X(\alpha)} = \frac{\pi}{m} \sum_{j=1}^m \frac{f(\alpha_j)}{\alpha_j} \cos \frac{\alpha_j}{2}, \quad \alpha_j = -2 \arcsin \left(\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{2j-1}{2m} \right), \quad j = \overline{1, m}. \quad (22)$$

Інтеграли, які входять у систему рівнянь (20) та вираз для зовнішнього навантаження (21), обчислювали методом Симпсона з автоматичним вибором кроку.

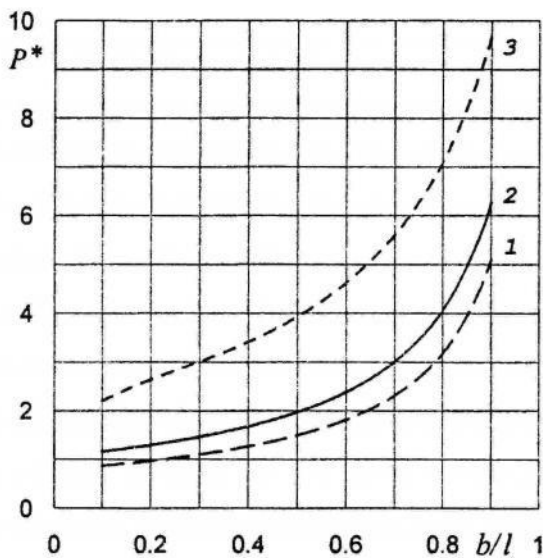


Рис. 2

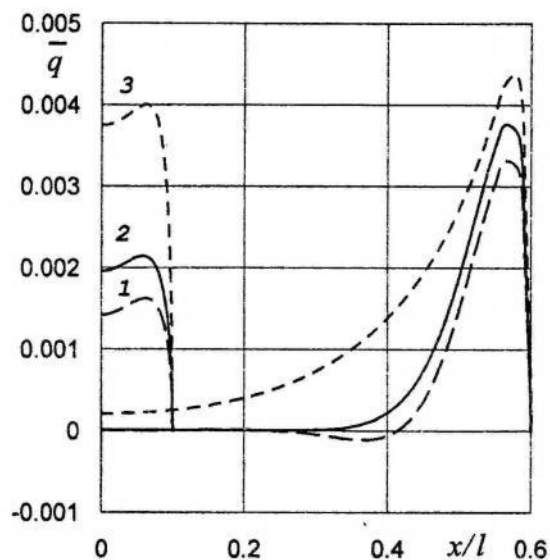


Рис. 3

Кількість членів ряду Фур'є та кількість точок інтегрування формули Меллера вибрали на основі порівняння розв'язку задачі для ізотропного випадку з розв'язком [1] для шару відносної товщини $l/h = 20$. Значення цих параметрів $2n = 100$ та $m = 60$ забезпечують три точні знаки для величини зовнішнього зусилля на штамп. Зазначимо, що розрахунок контактної тиску та зовнішнього зусилля безпосередньо за їхніми зображеннями рядами Фур'є дає у порівнянні з формулами (19) та (21) відносну похибку 4% – для максимуму контактної тиску та 1% – для зусилля на штамп.

Розглянемо результати розв'язку задачі для шару відносної товщини $l/h = 20$ з параметрами матеріалу $\nu = 0,3$, $\nu_1 = 0,1$, $E/E_1 = 1$ для різних значень параметра анізотропії G/G_1 .

На рис. 2 показана залежність безрозмірного зусилля на штамп $P^* = 3lRdP/h^3$ від відносної півширини зони контакту b/l для значень параметра анізотропії $G/G_1 = 0,25, 1,0, 8,0$ (відповідно криві 1–3). На рис. 3 показаний розподіл контактного тиску для цих випадків для відносної півширини зони контакту $b/l = 0,1$ та $b/l = 0,6$.

1. Григорюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. – М., 1980.
2. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. – М., 1967.
3. Лехницкий С.Г. Упругое равновесие трансверсально-изотропного слоя и толстой плиты // Прикладная математика и механика. – 1962. – 26. – № 4. – С. 687–696.
4. Черных К.Ф. Введение в анизотропную упругость. – М., 1988.
5. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. – М., 1949.

CYLINDRICAL BENDING OF ELASTIC TRANSVERSALLY-ISOTROPIC LAYER BY PERIODICAL SYSTEM OF SMOOTH STAMPS

Ivan Prokopyshyn, Dmytro Khlebnikov

*Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine*

The problem of cylindrical bending of elastic transversally-isotropic layer by a periodic array of smooth stamps is considered. Fredholm second type integral equation for contact pressure is obtained on the base of Lehnitsky operational solution of the elasticity problem for transversally-isotropic layer. Solution of the equation is found in Fourier series form by the degenerate kernel method.

Key words: transversally-isotropic layer, contact problem, degenerate kernel method.

Стаття надійшла до редколегії 09.11.2005

Прийнята до друку 22.11.2006

УДК 539.375

УРАХУВАННЯ ВПЛИВУ ТЕРМІЧНОЇ ПРОВІДНОСТІ КОНТАКТУ В ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧАХ

Володимир ОНИШКЕВИЧ

Національний лісотехнічний університет України,
вул. Генерала Чупринки, 103, 79057 Львів, Україна

Розглянуто можливість врахування змінного термоопору на прикладі осесиметричної контактної задачі термопружності для циліндра та півпростору.

Ключові слова: термопружність, контактна задача, змінний термоопір.

Проблематика та її актуальність. Розмаїття чинників впливу на тепловий режим пари тертя зумовлює складність математичного моделювання цієї проблеми. Серед них важливе місце займають теплофізичні (теплопровідність, теплоємність, коефіцієнт лінійного розширення тіл тощо), і механічні (пружність, твердість контактуючих тіл тощо) фактори. Режимми тертя, зношування та тепловиділення визначають також характеристиками так званого третього тіла [1] – тонких приповерхневих і проміжкових шарів, фізико-механічні властивості яких відрізняються від властивостей взаємодіючих тіл, та мікрогеометрією поверхонь тіл у зоні контакту. В [2] формулювання контактних задач з теплоутворенням сформульована при ідеальному тепловому контакті. Термопружну контактну взаємодію тіл за наявності поверхневих теплофізичних неоднорідностей досліджували в [3]. При математичному моделюванні контактної термопружності з урахуванням тертя і тепловиділення в [4] пропонували використати узагальнені умови теплового контакту [5]

$$\begin{aligned} \lambda \Delta (t^{(1)} + t^{(2)}) + 2 \left(\lambda^{(1)} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial n} - \lambda^{(2)} \frac{\partial t^{(2)}}{\partial n} \right) &= c(t^{(1)} + t^{(2)}) - 2Q \\ \lambda \Delta (t^{(1)} - t^{(2)}) + 2 \left(\lambda^{(1)} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial n} + \lambda^{(2)} \frac{\partial t^{(2)}}{\partial n} \right) - 12h(t^{(1)} - t^{(2)}) &= c(t^{(1)} - t^{(2)}), \end{aligned} \quad (1)$$

де індексами "1" і "2" в дужках позначено величини, які належать відповідно до першого та другого тіл; n – нормаль до поверхні контактуючих тіл; λ – зведена теплопровідність; Δ – двовимірний оператор Лапласа; c – зведена теплоємність; h^{-1} – термоопір контакту.

Числовий аналіз стаціонарної осесиметричної задачі про тиск на півпростір скінченного штампа, що обертається, проведено в [4], зокрема показав, що нехтування коефіцієнтом λ незначно впливає на розподіл

температурних полів у тілах пари тертя. Помітний вплив на результати виявляє термічна провідність контакту h . Отже, для практичних розрахунків можна рекомендувати такі теплофізичні умови на ділянці контакту:

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial n} - \lambda^{(2)} \frac{\partial t^{(2)}}{\partial n} &= \frac{c}{2} (\dot{t}^{(1)} + \dot{t}^{(2)}) - Q \\ \lambda^{(1)} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial n} + \lambda^{(2)} \frac{\partial t^{(2)}}{\partial n} - 2h(t^{(1)} - t^{(2)}) &= \frac{c}{6} (t^{(1)} - t^{(2)}). \end{aligned} \quad (2)$$

Середня температура $\bar{T} = (t^{(1)} + t^{(2)})/2$ в ділянці контакту тіл, отримана при розв'язуванні задачі в [4], мало відрізняється від температури $t^{(1)} = t^{(2)}$ при ідеальному тепловому контакті тіл. Незначні відхилення середньої температури простежувались також і в розв'язках інших задач. Згідно з результатами, наведеними в [6], для знаходження значення h , яке зв'язує тепловий потік і різницю температур контакту $q = h \Delta t$, треба знати середню температуру. Тому розв'язок задачі з граничними умовами (2) при $h \rightarrow \infty$ можна розглядати як перший етап для знаходження конкретного значення термоопору.

Мета і методи її вирішення. Фактори, від яких залежить термоопір h^{-1} , як і весь процес теплоутворення, численні та складні. Щоб розраховувати термічну провідність контакту, крім середньої температури, є потрібно такі характеристики [1]:

- 1) механічні характеристики матеріалів пари тертя;
- 2) коефіцієнти теплопровідності $\lambda^{(1)}$ і $\lambda^{(2)}$ матеріалів поверхонь тіл;
- 3) параметри середовища, яке є в проміжках між тілами;
- 4) чистота обробки (середньоквадратичне значення жорсткості) поверхонь $\Delta l = l_1 + l_2$;
- 5) номінальний тиск P між тілами на площинці контакту;
- 6) номінальна площа S контакту;
- 7) твердість за Мейєром μ м'якшого тіла;
- 8) середня температура $\bar{T}$ контакту;
- 9) параметри середовища в проміжках між плямами фактичного контакту тіл;
- 10) випромінювальна здатність ε_1 і ε_2 поверхонь тіл;
- 11) середня довжина l_0 вільного пробігу молекул газу в щілинах при низьких тисках газу в проміжках.

Для зручності обчислення термічного опору пропонують [6] використовувати співвідношення

$$h = \lambda_T (U - 1)/l, \quad (3)$$

де U – корінь трансцендентного рівняння

$$U = 1 + \frac{B \cdot C}{K \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1 - 1/U}}{C - 1} \right)}, \quad (4)$$

а відповідні вхідні параметри B , C , K визначаються додатковими співвідношеннями.

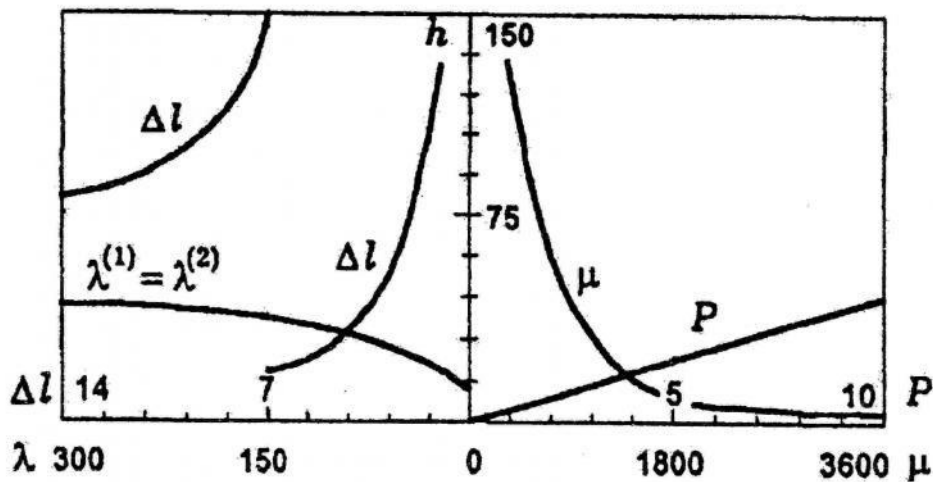


Рис. 1. Вплив вхідних параметрів на термічну провідність контакту

Проведений числовий аналіз допоміг побудувати графіки залежності коефіцієнта h термічної провідності контакту від вхідних параметрів (рис. 1): від тиску P між тілами на площинці контакту; від твердості за Мейєром μ ; від чистоти обробки поверхонь Δl ; від коефіцієнта теплопровідності матеріалів контактуючих тіл у випадку $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)}$.

Отже, контактна провідність не буде сталою величиною на ділянці контакту. Вважатимемо, що величина h є деякою функцією радіальної координати $h = h(r)$ і розглянемо проблему теплообміну та теплоутворення від тертя в конструкціях, що мають осьову симетрію.

Формулювання задачі. Нехай циліндричну колону з радіусом R і висотою H притиснуто до пружного півпростору постійною силою P . Тепловий контакт між тілами неідеальний із змінним термоопором h^{-1} . Вважається, що на незавантаженій поверхні півпростору, бічній поверхні циліндра і його верхньому торці (рис. 2) відбувається теплообмін із зовнішнім середовищем з коефіцієнтами теплообміну відповідно γ_H , γ_R , γ_0 . Враховано також, що зовнішнє середовище, яке прилягає до цих поверхонь, може мати різну температуру (відповідно t_H , t_R , t_0). Тоді

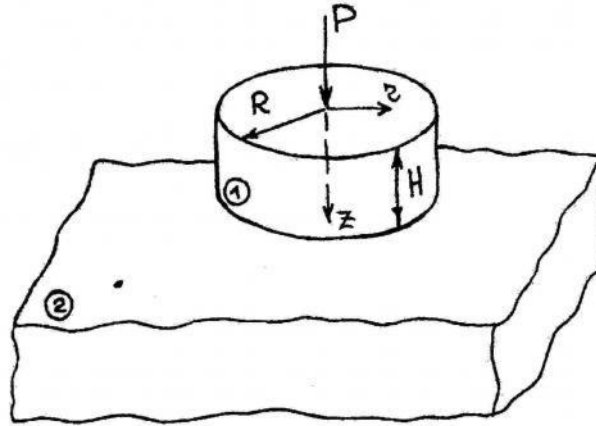


Рис. 2. Геометрія задачі

розв'язування задачі полягає в тому, щоб задовольнити рівняння термодпружності для півпростору та стаціонарної теплопровідності для обох тіл

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \frac{3\lambda + 2\mu}{\mu} \alpha \frac{\partial t^{(2)}}{\partial r} \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \frac{3\lambda + 2\mu}{\mu} \alpha \frac{\partial t^{(2)}}{\partial z} \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 t^{(i)}}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t^{(i)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 t^{(i)}}{\partial r^2} \quad (7)$$

за таких силових граничних умов:

$$u_z = f(r), \quad (0 \leq r < R, \quad z = H) \quad (8)$$

$$\sigma_z = 0, \quad (r > R, \quad z = H) \quad (9)$$

$$\tau_{rz} = 0, \quad (r < \infty, \quad z = H) \quad (10)$$

і за таких теплових граничних умов:

$$\frac{\partial t^{(1)}}{\partial z} = \gamma_0 (t^{(1)} - t_0), \quad (0 \leq r \leq R, \quad z = 0) \quad (11)$$

$$\frac{\partial t^{(1)}}{\partial r} = -\gamma_R (t^{(1)} - t_R), \quad (r = R, \quad 0 \leq z \leq H) \quad (12)$$

$$\lambda^{(1)} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial z} - \lambda^{(2)} \frac{\partial t^{(2)}}{\partial z} = h(r) \frac{t^{(2)} - t^{(1)}}{2}, \quad (0 \leq r < R, \quad z = H) \quad (13)$$

$$\frac{\partial t^{(2)}}{\partial z} = \gamma_H (t^{(2)} - t_H), \quad (r > R, \quad z = H), \quad (14)$$

де $\lambda^{(i)}$ ($i = 1, 2$) – коефіцієнти теплопровідності ($i = 1$ стосується циліндричного тіла, $i = 2$ – півпростору). Вертикальне переміщення $f(r)$ півпростору під циліндром зручно подати у вигляді $f(r) = f_1 + f_2(r)$, де f_1 – переміщення циліндра як жорсткого цілого, $f_2(r)$ – функція, що задає геометрію його нижнього торця. Замикає формулювання задачі умова рівноваги штамп

$$P = -2\pi \int_0^R r \sigma_{zz}(r, H) \, dr. \quad (15)$$

Розв'язок задачі. Застосовуючи інтегральне перетворення Ханкеля по радіальній координаті ρ (де $\rho = r/R$, $\zeta = z/H$) до рівнянь (5)–(7) і граничних умов (13), (14), використовуючи формулу обернення інтегрального перетворення Ханкеля, отримаємо систему парних інтегральних рівнянь типу

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \eta \left(\frac{\theta_1}{R^2} \eta^2 C_1(\eta) + \frac{R\theta_3}{\eta} C_2(\eta) \right) J_0(\eta\rho) \, d\eta &= R^2 f(\rho), \quad \rho \leq 1 \\ \frac{1}{R^2} \int_0^\infty \eta \left(\frac{\sigma_1}{R^3} \eta^3 C_1(\eta) + \sigma_3 C_2(\eta) \right) J_0(\eta\rho) \, d\eta &= 0, \quad \rho > 1 \\ \frac{\lambda^{(1)}}{H} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial \zeta} + \frac{\lambda^{(2)}}{R^3} \int_0^\infty \eta^2 C_2(\eta) J_0(\eta\rho) \, d\eta &= 0, \quad \rho \leq 1 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{\lambda^{(1)}}{H} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial \zeta} + h(\rho) t^{(1)} = \frac{1}{R^2} \int_0^\infty \left(h(\rho) + \frac{\lambda^{(2)}}{R} \eta \right) \eta C_2(\eta) J_0(\eta\rho) \, d\eta, \quad \rho \leq 1$$

$$\frac{1}{R^2} \int_0^\infty \eta \left(\gamma_H + \frac{\eta}{R} \right) C_2(\eta) J_0(\eta\rho) \, d\eta, \quad \rho > 1.$$

$$\text{Тут } \theta_1 = k \frac{k+1}{k-1}; \theta_3 = \frac{\Lambda k+1}{2k-1}; \sigma_1 = -\frac{2\mu k^2}{k-1}; \sigma_3 = -\frac{\mu \Lambda}{k-1}; \Lambda = -\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu} \alpha.$$

Представляючи контактні напруження у вигляді рядів $\sigma_z(\rho) = \sum_{n=1}^N a_n J_0(\lambda_n \rho)$ і вводячи невідомі функції $\chi(\rho) = b_0 + \sum_{n=1}^{N-1} b_n J_0(\lambda_n \rho)$, використовуючи формули обернення інтегрального перетворення Ханкеля, отримаємо вирази для функцій $C_1(\eta)$ та $C_2(\eta)$, підстановка яких в (16) дасть такі співвідношення:

$$\begin{aligned} & \frac{\theta_1}{\sigma_1} R \sum_{k=1}^N a_k \lambda_k J_1(\lambda_k) \int_0^\infty \frac{J_0(\eta) J_0(\eta \rho)}{\lambda_k^2 - \eta^2} d\eta + \left(\theta_3 - \frac{\sigma_3 \theta_1}{\sigma_1} \right) R^2 \left(b_0 \int_0^\infty \frac{J_1(\eta) J_0(\eta \rho)}{\eta(\eta + R\gamma_H)} d\eta + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k=1}^{N-1} b_k \lambda_k J_1(\lambda_k) \int_0^\infty \frac{1}{\eta + R\gamma_H} \frac{J_0(\eta) J_0(\eta \rho)}{\lambda_k^2 - \eta^2} d\eta \right) = f(\rho), \quad \rho \leq 1 \\ & \quad \lambda^{(2)} b_0 \int_0^\infty \frac{\eta}{\eta + R\gamma_H} J_1(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta + \\ & \quad + \lambda^{(2)} \sum_{k=1}^{N-1} b_k \lambda_k J_1(\lambda_k) \int_0^\infty \frac{\eta^2}{\eta + R\gamma_H} \frac{J_0(\eta) J_0(\eta \rho)}{\lambda_k^2 - \eta^2} d\eta + \frac{\lambda^{(1)}}{H} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial \zeta} = 0, \quad \rho \leq 1 \quad (17) \\ & \quad b_0 \int_0^\infty \frac{Rh(\rho) + \lambda^{(2)} \eta}{\eta + R\gamma_H} J_0(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta + \\ & \quad + \sum_{k=1}^{N-1} b_k \lambda_k J_1(\lambda_k) \int_0^\infty \frac{\eta(Rh(\rho) + \lambda^{(2)} \eta)}{\eta + R\gamma_H} \frac{J_0(\eta) J_0(\eta \rho)}{\lambda_k^2 - \eta^2} d\eta = \\ & \quad = \frac{\lambda^{(1)}}{H} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial \zeta} + h(\rho) t^{(1)}, \quad \rho \leq 1, \end{aligned}$$

де λ_k – нулі функції Бесселя $J_0(\lambda_k) = 0$, $k = \overline{1, N}$. Задовольняючи співвідношення (17) та граничні умови (11) в ряді рівновіддалених точок $\rho_k = (k-1)/(N-1)$, $k = \overline{1, N}$, отримано систему $4N$ алгебричних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів a_i , b_i , d_i , через які визначаються шукані функції $u_z(\rho, \zeta)$, $t^{(i)}(\rho, \zeta)$, $q^{(i)}(\rho, \zeta)$, $i = \overline{1, 2}$. Розподіл контактних напружень і вертикальні пружні переміщення півпростору є для притискаючої сили P , яка визначається з умови рівноваги штамп

$P = 2\pi R^2 \sum_{n=1}^N a_n J_1(\lambda_n) / \lambda_n$. Остаточні аналітичні вирази мають вигляд

$$t^{(1)}(\rho_i; \zeta) = \sum_{j=1}^{2N} t_{i,j}(\zeta) \mathcal{A}_j - H^2 R^{-1} C(2/\Delta\rho + 1) t^*;$$

$$\begin{aligned}
 q^{(1)}(\rho, \varsigma) &= \frac{\lambda^{(1)}}{H} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial \varsigma} \quad (i = 1, \dots, N); \\
 t^{(2)}(\rho, \varsigma) &= R b_0 \int_0^\infty \Lambda_K^*(\eta) \exp(-\eta H(\varsigma - 1)/R) d\eta + \\
 &+ R \sum_{j=1}^{N-1} b_n \lambda_n J_1(\lambda_n) \int_0^\infty \frac{\eta \Lambda_{nk}(\eta)}{\eta + R \gamma_H} \exp(\eta H(\varsigma - 1)/R) d\eta \\
 q^{(2)}(\rho, \varsigma) &= \lambda b_0 \int_0^\infty \eta^{-1} \Lambda_K^* \exp(-\eta H(\varsigma - 1)/R) d\eta + \\
 &+ R \lambda^{(2)} \sum_{j=1}^{N-1} b_n \lambda_n j_1(\lambda_n) \int_0^\infty \frac{\eta^2 \Lambda_{nk}(\eta)}{\eta + R \gamma_H} \exp(-\eta H(\varsigma - 1)/R) d\eta,
 \end{aligned} \tag{18}$$

де $\Lambda_{jk}(\eta) = \frac{J_0(\eta) J_0(\eta \rho_k)}{\lambda_j^2 - \eta^2}$; $\Lambda_K^*(\eta) = \frac{J_1(\eta) J_0(\eta \rho_k)}{\eta + R \gamma_H}$.

Результати та їхній аналіз. Задачу прораховано при лінійній зміні термоопору на ділянці контакту. Початковий (крива 1) і остаточний (крива 2) розподіл контактних напружень зображено на рис. 3. При збільшенні притискаючої сили площа контакту збільшується. Явища нещільного контакту немає при $P \geq 13,4$ МН. Зміна температури основи штампа (крива 1) і межі пружної основи (крива 2) в цьому випадку зображена на рис. 4.

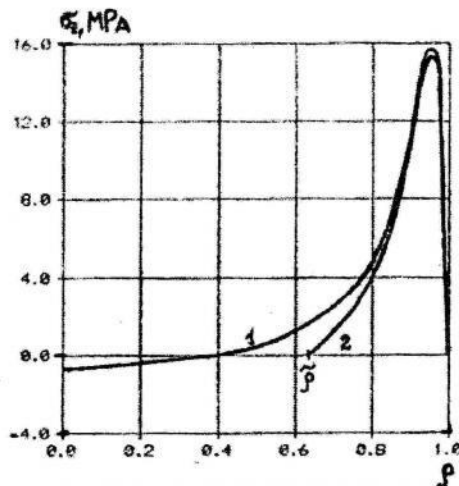


Рис. 3. Розподіл контактних напружень

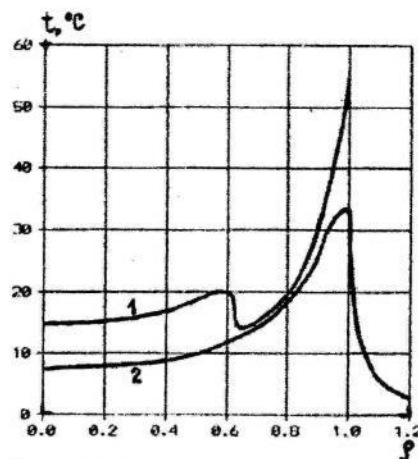


Рис. 4. Зміна температури основи штампа та межі пружної основи

Проводити аналіз впливу закруглення кромки штампа на числові результати. Для цього розбиття інтервалу $(0;1)$ подвоювалось, а ділянка з закругленням зменшувалася вдвоє. Контактні напруження та температура на плоскій ділянці штампа змінилися незначно.

1. *Левицький В.П., Онишкевич В.М.* Дослідження впливу властивостей "третього тіла" на теплоутворення від тертя // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – Вип. 42. – №1. – С. 82–86.
2. *Коровчинский М.В.* Плоская контактная задача термоупругости при стационарном тепловыделении на поверхности соприкосновения // Контактная прочность машиностроительных материалов. – М., 1964. – С. 2–27.
3. *Швец Р.Н., Мартыняк Р.М.* Термоупругое контактное взаимодействие тел при наличии поверхностных теплофизических неоднородностей // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1988. – Вып. 27. – С. 23–28.
4. *Гриліцький Д.В., Баран В.П.* Про постановку контактних задач термопружності з урахуванням теплоутворення при неідеальному тепловому контакті тіл // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1987. – Вип. 27. – С. 10–13.
5. *Подстригач Я.С.* Температурное поле в системе твердых тел, сопряженных с помощью промежуточного слоя // Инж.-физ. журн. – 1963. – 6. – № 10. – С. 129–136.
6. *Veziroglu T.N.* Correlation of thermal contact conductance experimental results // Prog. Astro. Aero. – 1967. – 20. – P. 1–12.
7. *Левицький В.П., Новосад В.П.* Взаємодія штампа, що обертається, з півпростором при частковому зчепленні в зоні контакту // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1997. – Т. 33. – № 2. – С. 55–61.
8. *Онишкевич В., Новосад В.* Задачі про взаємодію осесиметричних термопружних тіл зі змінною ділянкою контакту // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 57. – С. 110–114.

CONSIDERATION OF VARIABLE THERMAL RESISTANCE IN SOME AXIALLY SYMMETRICAL PROBLEMS

Volodymyr Onyshkevych

*National Forestry University of Ukraine,
General Chuprinka Str., 103, 79057 Lviv, Ukraine*

Possibility of consideration of variable thermal resistance in contact problems is investigated. The effective approach to solving of the problems is observed.

Key words: contact problem, variable thermal resistance.

Стаття надійшла до редколегії 18.07.2005
Прийнята до друку 22.11.2006

УДК 539.3: 538.3: 536.21: 518.12: 517.96

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ДЕФОРМУВАННЯ ЕЛЕКТРОПРОВІДНИХ ТІЛ ЗА УМОВ ЇХНЬОЇ ВИСОКОЧАСТОТНОЇ ТЕРМООБРОБКИ

Богдан ДРОБЕНКО

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 36, 79053 Львів, Україна*

Запропоновано методику чисельного моделювання електромагнітних, теплових і механічних процесів в електропровідних тілах, яка ґрунтується на методі скінченних елементів, за умов дії зовнішніх електромагнітних полів при врахуванні температурної залежності всіх характеристик матеріалу тіла і пружно-пластичного деформування.

Ключові слова: термомеханіка, зв'язані поля, метод скінченних елементів, індукційне нагрівання.

Електромагнітні поля (ЕМП) широко використовують у сучасних технологіях обробки електропровідних твердих тіл з метою підвищення параметрів їхньої міцності та надійності. Для побудови раціональних режимів такої обробки виникає практична потреба у створенні ефективних методик моделювання термомеханічних процесів в електропровідних тілах за умов дії зовнішніх ЕМП.

У більшості сучасних праць з математичного моделювання процесів високочастотної термообробки тіл опускається механічний фактор і розглядається лише зв'язана задача електродинаміки й теплопровідності, або наявні поля вважаються незв'язаними і задача термомеханіки розв'язується в пружному наближенні.

У працях [1-3] з використанням теорії неізотермічної термопружно-пластичності розроблена математична модель дослідження взаємодії процесів електропровідності, теплопровідності й деформування у термочутливих твердих тілах залежно від електропровідності їхнього матеріалу, здатності до намагнічування та поляризації. Показано, що неврахування залежності електро-, теплофізичних і механічних властивостей матеріалів від температури й пружно-пластичного характеру деформування таких тіл приводить до кількісних і якісних відмінностей в отриманих результатах. Мета нашої праці – запропонувати загальну методику чисельного розв'язування задач запропонованої математичної моделі.

Формулювання задачі. Розглянемо електропровідне деформівне тіло $V \in E^3$ (з неперервною за Ліпшицем межею S) під впливом ЕМП, яке

збуджує розподілена у скінченній підобласті зовнішнього середовища система струмів з густиною $\mathbf{j}^{(0)}(\mathbf{r}, t)$, де $\mathbf{r}$ радіус-вектор точки. Прийmemo, що електромагнітне й температурне поля при рівняннях стану

$$\mathbf{D}^{(0)} = \varepsilon_0 \mathbf{E}^{(0)}, \quad \mathbf{D}^{(1)} = \mathbf{D}_*^{(1)}(\mathbf{E}^{(1)}, T), \quad \mathbf{B}^{(0)} = \mu_0 \mathbf{H}^{(0)}, \quad \mathbf{B}^{(1)} = \mathbf{B}_*^{(1)}(\mathbf{H}^{(1)}, T),$$

$$\mathbf{j}^{(1)} = \gamma(T) \mathbf{E}^{(1)} \quad (1)$$

описуються такою системою рівнянь [2, 3]:

$$\operatorname{rot}(\mu_0^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{E}^{(0)}) + \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}^{(0)}}{\partial t^2} = -\frac{\partial \mathbf{j}^{(0)}}{\partial t}; \quad (2)$$

$$\mathbf{H}^{(0)} = -\mu_0^{-1} \int_0^t \operatorname{rot} \mathbf{E}^{(0)} dt', \quad \mathbf{r} \in E^3 \setminus \Omega; \quad (3)$$

$$\operatorname{rot}([\mu_*]^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{E}^{(1)}) + \frac{\partial \gamma}{\partial t} \mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{F}_q \frac{\partial \mathbf{E}^{(1)}}{\partial t} + [\varepsilon_*] \frac{\partial^2 \mathbf{E}^{(1)}}{\partial t^2} = \mathbf{F}_p; \quad (4)$$

$$\mathbf{H}^{(1)} = -\int_0^t [\mu_*]^{-1} \left(\operatorname{rot} \mathbf{E}^{(1)} + \frac{\partial \mathbf{B}_*^{(1)}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \right) dt'; \quad (5)$$

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T) + Q, \quad \mathbf{r} \in V, \quad t \in [0, \tau_*], \quad (6)$$

де $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ – вектори напруженостей та індукцій електричного і магнітного полів; ε_0 , μ_0 – діелектрична та магнітна проникності вакууму;

$\gamma = \gamma(T)$ – коефіцієнт електропровідності тіла; $\mathbf{D}_*^{(1)}(\mathbf{E}^{(1)}, T)$, $\mathbf{B}_*^{(1)}(\mathbf{H}^{(1)}, T)$ – функції, які задають зв'язок між векторами індукцій та напруженостей відповідно електричного і магнітного полів в тілі; $c = c(T)$ – об'ємна теплоємність; $\vec{\nabla} = (\nabla_1, \nabla_2, \nabla_3)$ – оператор Гамільтона; $\lambda = \lambda(T)$ – коефіцієнт теплопровідності; Q – наявні джерела тепла; величини з індексом $m=0$ належать до зовнішнього середовища, а з індексом $m=1$ – до області тіла;

$$[\varepsilon_*] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial D_*^{(1)} i}{\partial E_j^{(1)}};$$

$$[\mu_*] = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{bmatrix}, \mu_{ij} = \frac{\partial B_*^{(1)}}{\partial H_j^{(1)}}, i, j = 1 \div 3;$$

$$\mathbf{F}_q = \mathbf{F}_q(\mathbf{E}^{(1)}, T) = \gamma \mathbf{I} + 2\mathbf{D}_{*ET} \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{D}_{*EE} \frac{\partial \mathbf{E}^{(1)}}{\partial t}; \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{D}_{*ET} = \left[\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial T} \right]; \mathbf{D}_{*EE} = \left[\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial E_j^{(1)}} \right];$$

$$\mathbf{F}_p(\mathbf{E}^{(1)}, \mathbf{H}^{(1)}, T) = -\frac{\partial^2 \mathbf{D}_*^{(1)}}{\partial T^2} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)^2 - \frac{\partial \mathbf{D}_*^{(1)}}{\partial T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \text{rot} \left(\mu^{-1} \frac{\partial \mathbf{B}_*^{(1)}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \right).$$

Прийmemo, що в початковий момент часу ЕМП у тілі й середовищі немає, заданий початковий розподіл $T(\mathbf{r}, 0) = T_0(\mathbf{r})$ температури в тілі, а на межі S розділу тіла й середовища виконуються умови [2]

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}^{(1)} - \mathbf{E}^{(0)}) = 0; \quad (7)$$

$$\mathbf{n} \times \left([\mu_*]^{-1} \text{rot} \mathbf{E}^{(1)} - \mu_0^{-1} \text{rot} \mathbf{E}^{(0)} \right) = 0; \quad (8)$$

$$\lambda(T) \vec{\nabla} T \mathbf{n} + \beta(T)(T - T_c) = 0, \quad (9)$$

де β – коефіцієнт тепловіддачі; $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ – вектор зовнішньої нормалі до поверхні S ; T_c – температура середовища. На нескінченості виконується умова [9]

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r |\mathbf{E}^{(0)}| = \text{const}. \quad (10)$$

Для опису пружно-пластичного стану тіла використаємо співвідношення неізотермічного термопружно-пластичного течіння [8] відповідно до яких процес деформування розглядається покроково.

Прирости напружень за крок навантаження задають у вигляді

$$d\sigma_{ij} = G_{ijkl}^{t+dt} (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^T - d\varepsilon_{kl}^p) + dG_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^T - \varepsilon_{kl}^p). \quad (11)$$

Тут G_{ijkl}^{t+dt} , dG_{ijkl} – відповідно, значення компонент тензора пружних модулів у кінці кроку навантаження та їхніх приростів на цьому кроці; ε_{kl} , ε_{kl}^T , ε_{kl}^p – компоненти тензорів повних, температурних і пластичних деформацій на початку кроку.

Для визначення приростів пластичних деформацій використовуємо асоційований закон пластичного течіння про розвиток пластичних деформацій за нормаллю до поверхні течіння

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\chi \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (12)$$

а прирости температурних деформацій обчислюємо як

$$d\varepsilon_{ij}^T = \delta_{ij}(\alpha^{t+dt}dT + (\alpha^{t+dt} - \alpha^t)(T - T_0)), \quad (13)$$

де δ_{ij} – символ Кронекера; α – коефіцієнт температурного розширення.

З урахуванням залежностей (11)–(13) співвідношення між приростами напружень і деформацій мають вигляд [8]

$$\begin{aligned} d\sigma_{ij} = & \left(G_{ijmn}^{t+dt} - \frac{G_{ijvw}^{t+dt} \frac{\partial \Phi^t}{\partial \sigma_{vw}} \frac{\partial \Phi^t}{\partial \sigma_{kl}} G_{klmn}^{t+dt}}{\frac{2}{3} H^t \frac{\partial \Phi^t}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial \Phi^t}{\partial \sigma_{pq}} + G_{pqrs}^{t+dt} \frac{\partial \Phi^t}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial \Phi^t}{\partial \sigma_{rs}}} \right) (d\varepsilon_{mn} - d\varepsilon_{mn}^T) + \\ & + \left(dG_{ijmn} - \frac{G_{ijvw}^{t+dt} \frac{\partial \Phi^t}{\partial \sigma_{vw}} \frac{\partial \Phi^t}{\partial \sigma_{kl}} dG_{klmn}}{\frac{2}{3} H^t \frac{\partial \Phi^t}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial \Phi^t}{\partial \sigma_{pq}} + G_{pqrs}^{t+dt} \frac{\partial \Phi^t}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial \Phi^t}{\partial \sigma_{rs}}} \right) \left(\varepsilon_{mn}^t - \varepsilon_{mn}^p - \varepsilon_{mn}^T \right) + \\ & + \frac{\sqrt{\frac{2}{3} \frac{\partial \Phi^t}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial \Phi^t}{\partial \sigma_{kl}} D_{ijmn}^{t+dt} \frac{\partial \Phi^t}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial \bar{\sigma}_i^t}{\partial T}}}{\frac{2}{3} H^t \frac{\partial \Phi^t}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial \Phi^t}{\partial \sigma_{pq}} + D_{pqrs}^{t+dt} \frac{\partial \Phi^t}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial \Phi^t}{\partial \sigma_{rs}}} dT, \end{aligned}$$

чи в матрично-векторній формі

$$\{d\sigma\} = [C]^{t+\Delta t} (\{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon_T\}) + [dC](\{\varepsilon\}^t - \{\varepsilon_T\}^t - \{\varepsilon_p\}^t) + \{Z\}dT. \quad (14)$$

Тут функція Φ задає поверхню течіння залежно від нагромаджених пластичних деформацій і температури (за критерій виникнення пластичних деформацій вибрана умова Мізеса [1]); H^t – кут нахилу кривої “напруження σ_i – пластична деформація $\bar{\varepsilon}_i^p$ ”; компоненти тензорів деформацій і напружень об’єднані у вектори

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{23}\}^T; \{\sigma\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}\}^T$$

(індекс “ T ” означає операцію транспонування).

Доповнимо (14) геометричними співвідношеннями, які приймемо лінійними

$$\{\varepsilon\} = [A]u, \quad (15)$$

та рівняннями рівноваги [11]

$$[A]^T \{\sigma\} - F = 0, \quad r \in V \quad (16)$$

при відомих граничних умовах

$$[A_n]^T \{\sigma\} = p, \quad r \in S_\sigma; \quad u = u_0, \quad r \in S_u; \quad S_\sigma \cap S_u = \emptyset; \quad S_\sigma \cup S_u = \partial V, \quad (17)$$

де F , p , u – вектори пондеромоторних сил, силового навантаження, заданого на поверхні S_σ , і переміщень, заданих на поверхні S_u ; $[A]$ і $[A_n]$ – матриці геометричних співвідношень теорії пружності і напрямних косинусів до поверхні.

Отож, задача про визначення електромагнітного, температурного та механічного полів у тілі за умов дії зовнішнього ЕМП полягає у розв'язуванні зв'язаної задачі електродинаміки й теплопровідності (2)–(10) і задачі неізотермічної термопружно-пластичності (14)–(17).

Методика розв'язування задачі. Розв'язок сформульованої задачі знаходимо в два етапи. На першому розв'язуємо зв'язану задачу електродинаміки й теплопровідності (2)–(10).

Замінімо нескінченний простір деякою скінченною областю Ω ($V \subset \Omega$), яка обмежена достатньо віддаленою від тіла і заданих струмів поверхнею S' .

Розв'язки задач електродинаміки й теплопровідності шукаємо у просторах [4] $H(\text{rot}, \Omega) = \{E \in (L^2(\Omega))^3, \text{rot} E \in (L^2(\Omega))^3\}$ та $H^1(V) = \{T \in L^2(V), \vec{\nabla} T \in L^2(V)\}$.

З використанням стандартної процедури методу зважених нев'язок вихідні співвідношення для чисельного розв'язування цієї задачі мають вигляд [2]

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(((\mu')^{-1} \text{rot} E) \cdot (\text{rot} w) + \left(\gamma_t E + F_q' \frac{\partial E}{\partial t} + \varepsilon' \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - F_p' \right) w \right) dv = \\ = 0 \quad \forall w \in H(\text{rot}, \Omega), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\int_V \left(c \frac{\partial T}{\partial t} w_0 + \lambda \vec{\nabla} T \cdot \vec{\nabla} w_0 - Q w_0 \right) dv + \int_S \beta (T - T_s) w_0 ds = 0 \quad \forall w_0 \in H^1(\Omega). \quad (19)$$

Вони доповнюються рівнянням (3) при граничних умовах (7), (10) (умови (8), (9) враховані при побудові співвідношень (18) і (19)). Тут

$$\mu' = [\mu_*]; \quad \varepsilon' = [\varepsilon_*]; \quad \gamma_t = \frac{\partial \gamma}{\partial t}; \quad \mathbf{F}'_q = \mathbf{F}_q; \quad \mathbf{F}'_p = 0 \quad \forall \mathbf{r} \in V;$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(0)}; \quad \mu' = \mu_0; \quad \varepsilon' = \varepsilon_0; \quad \gamma_t = 0; \quad \mathbf{F}'_q = 0; \quad \mathbf{F}'_p = -\frac{\partial \mathbf{j}^{(0)}}{\partial t} \quad \forall \mathbf{r} \in \Omega \setminus V.$$

Проведемо стандартну скінченно-елементну дискретизацію [11] отриманих співвідношень за просторовими змінними. Поділимо область Ω на елементи так, щоб межа розділу тіла й середовища потрапила на границі відповідних елементів. Введемо на кожному елементі апроксимації функцій T , $\mathbf{E}$, w_0 , $\mathbf{w}$ через значення цих функцій у вузлах елемента

$$T = [N]_1 \{T_h\}^{\text{el}}; \quad \mathbf{E} = [N]_3 \{E_h\}^{\text{el}}, \quad w_0 = [N]_1 \{w_h^0\}^{\text{el}}, \quad \mathbf{w} = [N]_3 \{w_h\}^{\text{el}}, \quad (20)$$

де

$$[N]_1 = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_n]; \quad [N]_3 = \begin{bmatrix} N'_1 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 & \dots & N'_{n'} & 0 & 0 \\ 0 & N'_1 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & \dots & 0 & N'_{n'} & 0 \\ 0 & 0 & N'_1 & 0 & 0 & N'_2 & \dots & 0 & 0 & N'_{n'} \end{bmatrix}$$

матриці функцій форми [11]; n – кількість вузлів (загалом функції форми для задач теплопровідності й електродинаміки належать до різних функціональних просторів, тому можуть бути різними, як і кількість вузлів у відповідних елементах).

Після підстановки (20) у співвідношення (18), (19) і (3) отримуємо таку систему диференціальних рівнянь стосовно невідомих значень напруженостей електричного $\{E_h\}$ поля та температури $\{T_h\}$ у вузлах скінченно-елементного поділу

$$[M_2] \{\ddot{E}_h(t)\} + [M_1] \{\dot{E}_h(t)\} + [M_0] \{E_h(t)\} = \{f_E\},$$

$$\{E_h(0)\} = 0, \quad \{\dot{E}_h(0)\} = 0; \quad (21)$$

$$[L_1] \{\dot{T}_h(t)\} + [L_0] \{T_h(t)\} = \{f_T\}, \quad \{T_h(0)\} = \{T_h^0\}. \quad (22)$$

Матрично-векторні характеристики у (21)–(22) одержуємо шляхом підсумовування відповідних характеристик окремих елементів.

Отриману задачу Коші (21), (22) розв'язуємо за допомогою сім'ї простих однокрокових багатопараметричних алгоритмів Зінкевича–Вуда [12].

Визначені на першому етапі температура та пондеромоторні сили є вхідними для розрахунку напруженого стану тіла. Відповідно до теорії течіння процес пластичного деформування тіла розглядається покроково. Вихідні скінченно-елементні співвідношення термопружно-пластичності в переміщеннях на черговому кроці навантаження одержуємо після підстановки геометричних (15) і фізичних (14) співвідношень у рівняння

рівноваги (16) та застосування стандартної процедури методу зважених нев'язок. З введенням скінченно-елементних апроксимацій для приростів переміщень, рівняння рівноваги в приростах переміщень набувають остаточного вигляду [1]

$$[K_{ep}]\{dq\} = \{dF\} + \{dP\} + \{dR\}, \quad (23)$$

де $\{dq\}$ – глобальний вектор приростів вузлових переміщень; матрично-векторні характеристики у співвідношенні (23) отримуємо через підсумовування відповідних характеристик окремих елементів, які визначають за формулами

$$[K_{ep}^{(el)}] = \int_{V^{el}} [N]^T [A]^T [C]^{t_j + \Delta t_j} [A] [N] dv; \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \{dP\}^{(el)} = & - \int_{V^{el}} [N]^T [A]^T \left([dC] (\{\varepsilon\}^{t_j} - \{\varepsilon_T\}^{t_j} - \{\varepsilon_p\}^{t_j}) + \{z\} dT \right) dv + \\ & + \int_{S_\sigma^{el}} [N]^T \{dp\} ds; \end{aligned} \quad (25)$$

$$\{dR^{(el)}\} = \int_{V^{el}} [N]^T [A]^T [C]^{t_j + \Delta t_j} \{d\varepsilon_T\} dv; \quad \{dF^{(el)}\} = \int_{V^{el}} [N]^T \{dF\} dv. \quad (26)$$

Рівняння (23) розв'язуємо методом змінних параметрів жорсткості [11].

Як приклад розглянемо індукційне нагрівання зубчастого колеса з метою гартування його поверхневого шару. Для отримання якісної оцінки ЕМП, температури і залишкових напружень в колесі задачу розв'яжемо для двовірного випадку (пружно-пластичний аналіз проведемо в рамках моделі плоского напруженого стану).

Тепловиділення і пондеромоторні сили визначають за формулами

$$Q = \gamma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}; \quad \mathbf{F} = \mu \gamma \mathbf{E} \times \mathbf{H}.$$

Вільне від силового навантаження колесо (рис. 1, а; з умов симетрії розглядається лише сектор, який охоплює половину зуба і впадини) нагрівається струмом

$$j^{(0)}(x, y, t) = (0, 0, J_0 \cdot \delta(x - X_i) \cdot \delta(y - Y_i) \cdot (1 - e^{-\eta t}) \cdot \sin \omega t),$$

де (X_i, Y_i) – декартові координати провідників, по яких паралельно до осі z тече струм; $\delta(x)$ – дельта-функція; ω – частота; величина η характеризує швидкість виходу на усталений режим. На осі симетрії GF ставиться умова $u_x = 0$, а на лінії ВН – умова циклічної симетрії $u_{x'} = 0$ (x' – координата, перпендикулярна до ВН).

Коли температура біля основи зуба (у точці D, див. рис. 1, а) досягає температури T_g , струм вимикається, і колесо остигає через теплообмін із середовищем.

Зубчасте колесо виготовлене з феромагнітного матеріалу – конструкційної сталі С 30 з вмістом вуглецю 0,3%, характеристики якої відомі [5–7, 10].

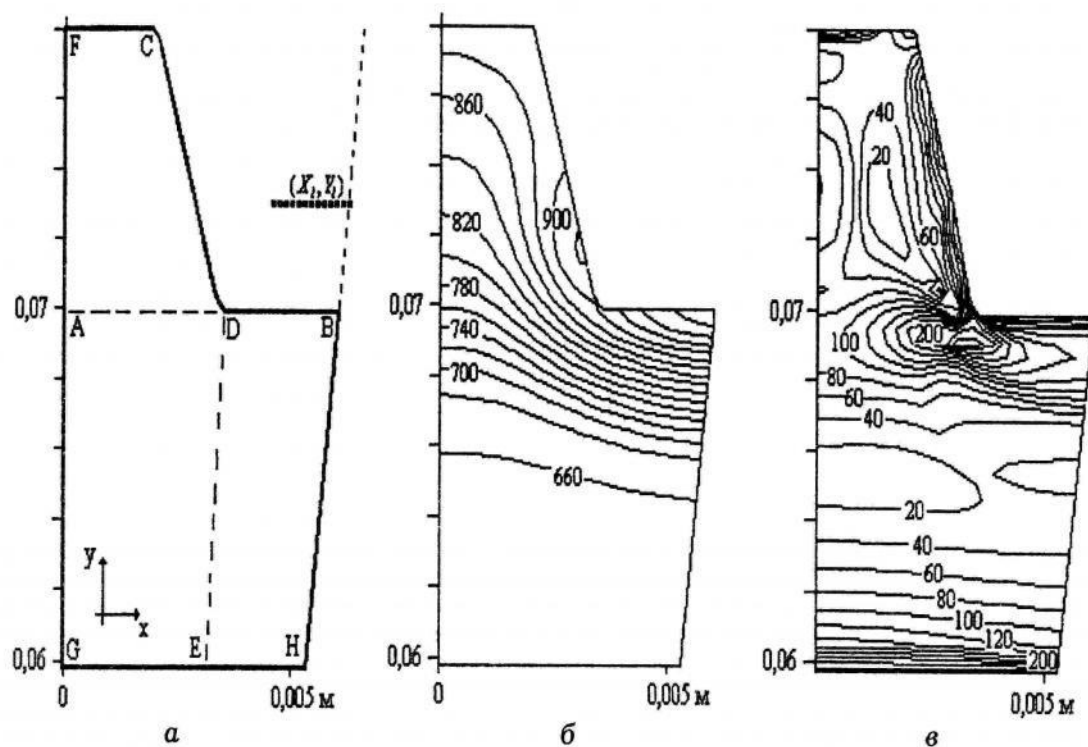


Рис. 1. Конфігурація області (а), розподіл температури (б) і залишкових напружень (в)

У процесі чисельного моделювання електромагнітних, теплових і механічних полів у колесі використовувались ізопараметричні біквадратичні скінченні елементи [11], оскільки в цьому випадку вектор напруженості електричного поля має лише одну ненульову складову E_φ , і розв'язок задачі електродинаміки шукається в класі функцій з простору $H^1(\Omega)$. Розрахунки проводили для параметрів $T_s = 20^\circ\text{C}$; $T_g = 900^\circ\text{C}$; $\beta = 13 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ град})$.

Чисельне моделювання допомогло визначити таке розташування індуктора (координати провідників, по яких тече струм) і відповідний режим термообробки, які забезпечують досить рівномірне прогрівання поверхні впадини колеса і робочої поверхні зуба (за рахунок сильного відведення тепла від впадини у масивну частину колеса в більшості випадків зуб прогрівався до набагато вищих температур).

На рис. 1, б показано розподіл температури в колесі в момент вимкнення індуктора, розташованого на відстані 0,0015 м від впадини (див. рис. 3, а). При цьому $T_0 = 650^\circ\text{C}$; $\omega = 440 \text{ кГц}$; $J_0 = 4 \text{ МА}$.

На рис. 1, в показано розподіл інтенсивності залишкових напружень після повного охолодження колеса шляхом теплообміну з зовнішнім середовищем з коефіцієнтом тепловіддачі $\beta = 10^4 \text{ Вт/(м}^2 \text{ град)}$. В околі точки D виникає зона стискальних залишкових напружень, про величину яких можна судити з рис. 2.

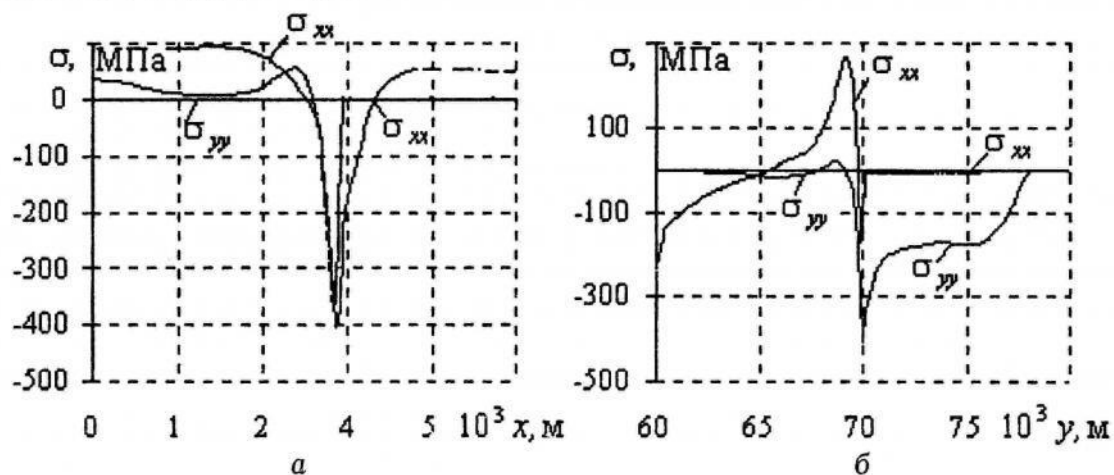


Рис. 2. Залишкові напруження на лініях ADB (а) та EDC (б)

Запропонована методика чисельного моделювання термомеханічних процесів в електропровідних тілах за умов дії зовнішніх ЕМП дає змогу адекватніше прогнозувати реальну поведінку матеріалів у широкому температурному діапазоні і враховувати її при автоматизації процесу високотемпературної індукційної обробки, зокрема допомагає отримати оцінку залишкових напружень, яка є вихідною при розробці режимів експлуатації виробів. Наявність створеного програмного забезпечення надає змогу промодельовувати поведінку виробів з електропровідних матеріалів за умов їхньої високочастотної термообробки і визначити раціональні значення параметрів технологічних процесів виготовлення виробів.

1. Гачкевич О.Р., Дробенко Б.Д. Фізико-механічні процеси у феромагнетних тілах під час індукційної обробки // Фізико-хім. механіка матеріалів. – 2004. – № 2. – С. 29–35.
2. Гачкевич О.Р., Дробенко Б.Д. Математичне моделювання індукційного нагріву електропровідних тіл // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикладної математики та інформатики. – 2004.
3. Гачкевич О.Р., Дробенко Б.Д., Казарян К.Б. Математичне моделювання термомеханічних процесів в осесиметричних електропровідних тілах за електромагнітних навантажень // Машинознавство. – 2003. – № 4. – С. 3–7.
4. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. – М., 1980.

5. Преображенский А.А. Магнитные материалы и элементы. – М., 1976.
6. Сосуды и трубопроводы высокого давления. Справочник / Под ред. Хисматулина Е.Р. – М., 1990.
7. Таблицы физических величин. Справочник / Под ред. акад. И.К. Кикоина. – М., 1976.
8. Allen D.H., Heisler W.E. A theory for analysis of thermoplastic materials // *Computers & Structures*. – 1981. – Vol. 13. – P. 129–135.
9. Gaczekiewicz A., Kasperski Z. Modele i metody matematyczne w zagadnieniach brzegowych termo-mechaniki ciał przewodzących – Opole: OW, Politechnika Opolska, 1999.
10. Turowski J. *Elektrodynamika techniczna*. Warszawa, 1993.
11. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *Finite Element Method: Vol. 1. The Basis*. – London: Butterworth Heinemann, 2000.
12. Zienkiewicz O.C., Wood W.L., Nine N.W. A unified set of single step algorithm. Part 1: general formulation and applications // *International Journal for Numerical Method in Engineering*. – 1984. – Vol. 20. – P. 1529–1552.

SIMULATION OF DEFORMATION PROCESS OF ELECTRICALLY CONDUCTIVE SOLIDS SUBJECTED TO ELECTROMAGNETIC FIELD

Bogdan Drobenko

*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
Naukova Str., 3b, 79053 Lviv, Ukraine*

The mathematical model and the computer simulation method of mechanical, temperature and electromagnetic processes which occur in electrically conductive solids subjected to the high temperature induction heating is proposed. The model takes into account a temperature dependence of all material coefficients. To predict stress-strain state of the solid a nonisothermal plasticity equations are used.

Key words: thermomechanics, coupled fields, finite element methods, high temperature induction heating.

Стаття надійшла до редколегії 27.09.2005
Прийнята до друку 22.11.2006

УДК 539.3

ОСЕСИМЕТРИЧНА НЕСТАЦІОНАРНА ЗАДАЧА ДЛЯ СУЦІЛЬНОГО СКІНЧЕНОГО ЦИЛІНДРА, ЗЧЕПЛЕНОГО З ЖОРСТКОЮ ОСНОВОЮ

Наталія ВАЙСФЕЛЬД

Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова,
вул. Дворянська, 2, 65026 Одеса, Україна

Запропоновано чисельно-аналітичний розв'язок задачі про визначення пружного стану скінченного пружного циліндра, який перебуває під дією ударного навантаження. Розв'язання ґрунтується на використанні дискретизації рівнянь руху за часом і наступним застосуванням методу інтегральних перетворень. Одержану одомірну векторну крайову задачу розв'язують за допомогою побудови матричної функції Гріна.

Ключові слова: нестационарна задача, пружний циліндр, ударне навантаження, жорстка основа.

Розв'язок задачі про осесиметричні коливання пружного циліндра скінченної довжини вперше, мабуть, наведено у працях [2], [5]. Задачі дифракції хвиль на тілах, що обмежені круговими циліндричними поверхнями, були досліджені також у [3]. Задачі нестационарного деформування скінчених циліндрів розв'язували у [9], [10], де задачі шляхом застосування інтегрального перетворення Лапласа за часом були зведені до чисельного розв'язання інтегральних рівнянь Вольтерра першого роду. Щоб уникнути застосування перетворення Лапласа у [4], [7], запропоновано підходи, які ґрунтуються на дискретизації задачі за часом: у [7] запропоновано спеціальну формулу з використанням скінчених різниць по часу, в [4] – пропонується заміна другої похідної по часу різницевою формулою. В [4] задача про нестационарне осесиметричне деформування скінченного циліндра розв'язується у припущенні, що на циліндричній поверхні виконано умови першої основної задачі теорії пружності.

Формулювання задачі. Суцільний круговий скінчений циліндр $0 \leq r \leq a$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq z \leq l$ в момент часу $t = 0$ піддається впливу нестационарного динамічного навантаження $P(r)H(t)$, де $P(r)$ – нормальне розподілене навантаження. Нижній торець циліндра зчеплений з абсолютно твердою підставою. На циліндричній поверхні виконано умови ковзного защемлення. Дві ненульові компоненти вектора зміщень $u = u_r(r, z, t)$, $w = u_z(r, z, t)$ задовольняють рівнянням руху

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u(r, z, t)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u(r, z, t)}{\mu_* \partial z^2} - \frac{u(r, z, t)}{r^2} + \frac{\mu_0}{\mu_*} \frac{\partial^2 w(r, z, t)}{\partial r \partial z} = \frac{1}{\mu_* c^2} \frac{\partial^2 u(r, z, t)}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w(r, z, t)}{\partial r} \right) + \frac{\mu_* \partial^2 w(r, z, t)}{\partial z^2} + \frac{\mu_0}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u(r, z, t)}{\partial r} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w(r, z, t)}{\partial t^2}$$

при крайових умовах

$$u(r, z, t) \Big|_{r=a} = 0, \quad \tau_{rz}(r, z, t) \Big|_{r=a} = 0 \quad (2)$$

$$u(r, z, t) \Big|_{z=0} = 0, \quad w(r, z, t) \Big|_{z=0} = 0 \quad (3)$$

$$\tau_{rz}(r, z, t) \Big|_{z=l} = 0, \quad \sigma(r, z, t) \Big|_{z=l} = -p(r)H(t) \quad (4)$$

$\mu_0 = (1 - 2\mu)^{-1}$, $\mu_* = 2(1 - \mu)\mu_0$, μ – коефіцієнт Пуассона. При нульових початкових умовах треба визначити хвильове поле усередині циліндра.

Побудова розв'язку задачі. Зробимо заміну других похідних, які входять у рівняння руху (1), згідно з формулою

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{f_j}{h^2} - \frac{2f_{j-1}}{h^2} + \frac{f_{j-2}}{h^2}, \quad j = \overline{2, N}, \quad f_j = f(r, z, jh), \quad (5)$$

де $h = \frac{T}{N}$ – крок, з яким розбивається часовий проміжок $[0, T]$, протягом якого досліджується хвильове поле усередині циліндра. Після цього застосуємо до отриманих дискретизованих рівнянь (1) інтегральне перетворення Ханкеля за змінною r за такою схемою. До першого рівняння з (1) застосуємо перетворення

$$u_\alpha(z, t) = \int_0^a r J_1(\alpha r) u(r, z, t) dr, \quad (6)$$

до другого – перетворення

$$w_\alpha(z, t) = \int_0^a r J_0(\alpha r) w(r, z, t) dr, \quad (7)$$

де параметр перетворення $\alpha = \alpha_i$ – корені трансцендентного рівняння

$$J_1(a\alpha_i) = 0. \quad (8)$$

Після використання інтегрального перетворення та різницевої формули (5) рівняння руху (1) набудуть вигляду

$$\frac{d^2 u_{\alpha_j}(z)}{dz^2} - \alpha_i^2 \mu_* u_{\alpha_j}(z) - \frac{u_{\alpha_j}(z)}{q^2} - \alpha_i \mu_0 \frac{dw_{\alpha_j}(z)}{dz} = \frac{1}{q^2} (u_{\alpha_{j-2}}(z) - 2u_{\alpha_{j-1}}(z)) \quad (9)$$

$$\frac{d^2 w_{\alpha j}(z)}{dz^2} - \frac{\alpha_i^2}{\mu_*} w_{\alpha j}(z) - \frac{w_{\alpha j}(z)}{\mu_* q^2} - \frac{\alpha_i \mu_0}{\mu_*} \frac{dw_{\alpha j}(z)}{dz} = \frac{1}{\mu_* q^2} (w_{\alpha j-2}(z) - 2w_{\alpha j-1}(z)),$$

$j = \overline{2, N}$, $q^2 = (ch)^2$, $u_{\alpha 0}(z) = w_{\alpha 0}(z) = 0$ за допомогою нульових початкових умов. Запишемо крайові умови (3), (4) у дискретизованій за часом формі та переформулюємо їх у термінах зсувів. Застосуємо до перших рівностей з (3), (4) інтегральне перетворення (6), до других – перетворення (7) та отримаємо крайові умови у просторі трансформант

$$u_{\alpha j}(0) = 0, \quad w_{\alpha j}(0) = 0 \quad (10)$$

$$\mu_0 \mu \alpha_i u_{\alpha j}(l) + (1 - \mu) \frac{dw_{\alpha j}(l)}{dz} = -p_{\alpha} - \alpha_i w_{\alpha j}(l) + \frac{dw_{\alpha j}(l)}{dz} = 0. \quad (11)$$

Щоб сформулювати у просторі трансформант векторну крайову задачу, розглядають вектор

$$y_{\alpha j}(z) = \begin{pmatrix} u_{\alpha j}(z) \\ w_{\alpha j}(z) \end{pmatrix} \text{ і } F_{\alpha j}(z) = \frac{1}{q^2} \begin{pmatrix} u_{\alpha j-2}(z) - 2u_{\alpha j-1}(z) \\ \mu_*^{-1} (w_{\alpha j-2}(z) - 2w_{\alpha j-1}(z)) \end{pmatrix}, \quad \gamma_{\alpha j}^0(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{\alpha j}^1(z) = \begin{pmatrix} -p_{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ і матриці } Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu_*^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \mu_*^2 + \frac{\mu_*}{\alpha_i^2 q^2} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{1}{\alpha_i^2 q^2} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} \mu_0 \mu \alpha_i & 0 \\ 0 & -\alpha_i \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & (1 - \mu) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отримаємо таку векторну крайову задачу у просторі трансформант:

$$\begin{cases} L[y_{\alpha j}(z)] = F_{\alpha j}(z), \\ U_i[y_{\alpha j}(z)] = \gamma_{\alpha j}^i, \quad i = 0, 1. \end{cases} \quad (12)$$

Для розв'язання отриманої векторної задачі (12) побудуємо матричну функцію Гріна за схемою, що наведена у [6]

$$G(z, \xi) = \Phi(z, \xi) - \sum_{i=0}^1 \Psi_i(z) U_i[\Phi(z, \xi)], \quad (13)$$

де фундаментальна матриця задачі побудована раніше у [4]. Базисна матрична система розв'язків повинна задовольняти матричну задачу

$$\begin{cases} L[\Psi_i(z)] = 0, \\ U_i[\Psi_j(z)] = \delta_{ij} I, \quad i = 0, 1, \end{cases} \quad (14)$$

де δ_{ij} – символ Кронекера. Як показано у [6], її отримаємо через побудову фундаментальної матричної системи розв'язків $Y_i(z)$, $i = 0, 1$

$$\Psi_i(z) = Y_0(z)A_i + Y_1(z)B_i, i = 0, 1. \quad (15)$$

Тут матриці $Y_i(z)$ визначені у [4], а невідомі матриці-константи визначають з крайових умов (12) за формулами

$$A_0 = -U_1^{-1}[Y_0(z)]U_1[Y_1(z)]L_0^{-1}, B_0 = L_0^{-1} \quad (16)$$

$$A_1 = -U_0^{-1}[Y_0(z)]U_0[Y_1(z)]L_1^{-1}, B_1 = L_1^{-1},$$

$$L_1 = -U_1[Y_0(z)]U_0^{-1}[Y_0(z)]U_0[Y_1(z)] + U_1[Y_1(z)].$$

Побудувавши за формулою (13) матричну функцію Гріна, розв'язок векторної задачі одержимо за співвідношенням [6]

$$y_{\alpha j}(z) = \int_0^l G(z, \xi) F_{\alpha j}(\xi) d\xi + \Psi_{2j}(z) \gamma_{\alpha j}^2. \quad (17)$$

До елементів вектора (17) застосуємо відповідні обернені перетворення Ханкеля [8]

$$u_j(r, z) = \sum_{i=0}^{\infty} J_1(\alpha_i r) \left(\int_0^l G^{00}(z, \zeta) F_{\alpha j}^0(\zeta) + G^{01}(z, \xi) F_{\alpha j}^1(\xi) d\xi - \Psi_{2\alpha}^{00}(z) p_{\alpha} \right), \quad (18)$$

$$w_j(r, z) = \sum_{i=0}^{\infty} J_0(\alpha_i r) \left(\int_0^l G^{10}(z, \zeta) F_{\alpha j}^0(\zeta) + G^{11}(z, \xi) F_{\alpha j}^1(\xi) d\xi - \Psi_{2\alpha}^{10}(z) p_{\alpha} \right).$$

Отримана формула (18) є рекурентною, тобто для визначення величини осідання в j -й момент часу варто знати значення в $j-1$ і $j-2$ моменти часу. За рахунок початкових умов визначають значення зсувів і осідання в 0-й і 1-й моменти часу, починаючи з моменту часу $j=2$ починається рекурентна процедура обчислення величини зміщень за формулою (18).

Сформульована задача (1)–(4) припускає побудову простішого розв'язку. Для цього припустимо, що $u(r, z, t) \equiv 0$, а зміщення $w(r, z, t) = w(z, t)$ не залежать від радіус-координати. При таких припущеннях задача розв'язується так:

$$\frac{\partial^2 w(z, t)}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu_* c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad z \in [0; l], \quad w(0, t) = 0 \quad \frac{\partial w(l, t)}{\partial z} = \frac{P_c H(t)}{(1 - \mu) \mu_0}, \quad (19)$$

де P_c – осереднене навантаження $P_c = a^{-1} \int_0^a P(r) dr$, що відповідає форму-

люванню задачі, коли пружний циліндр замінюється стрижнем кругового перерізу, для якого виконується припущення плоских перерізів. Застосуємо до рівняння з (19) перетворення Лапласа за часом, врахувавши крайові умови, розв'язок в просторі трансформант набуде вигляду

$$w_s(z) = P_c sh \frac{sz}{c\sqrt{\mu_*}} \left(s^2 ch \frac{sl}{c\sqrt{\mu_*}} \mu_0 (1 - \mu) \right)^{-1}, \quad (20)$$

оригінал цього виразу обчислюють за таблицями [1].

Чисельні розрахунки. Проведено порівняння значень зміщень та напружень, отриманих за двома підходами: за допомогою матричної функції Гріна та за елементарним розв'язком. На рис. 1 показано значення величини $\sigma_r^*(r, z, t) = \sigma_r(r, z, t)/a$ залежно від безрозмірного часу $t^* = ct/a$ для сталюого циліндра, до верхнього торця якого прикладене

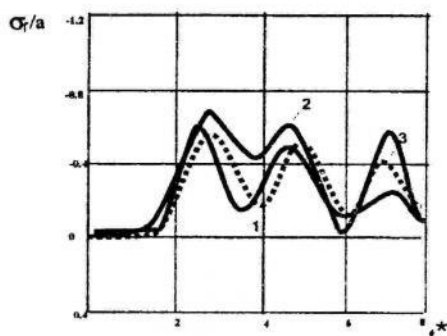


Рис. 1

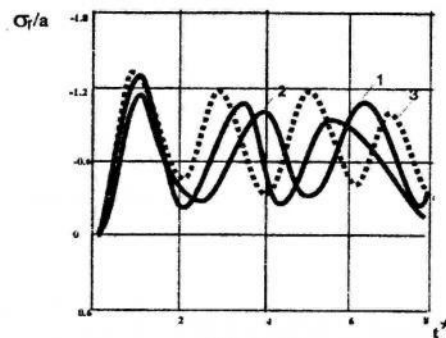


Рис. 2

навантаження $r^2 H(t)$. Крива 1 відповідає значенню $r = a/2$, крива 2 – $r = 3a/4$ для $z = l/3$, крива 3 отримана за елементарним розв'язком для $z = l/3$. Як видно з графіків, найбільша різниця результатів за двома підходами тим більша, чим ближче точка розташована до циліндричної поверхні. На рис. 2 криві 1, 2 відповідають значенням $r = a/2$ та $r = 3a/4$ відповідно при $z = 3l/4$, криву 3 – одержали за елементарним розв'язком. Помітно, що з наближенням до верхнього торця, де прикладене навантаження, різниця стає суттєвою також і для точок, які розташовані неподалік циліндричної поверхні. Формулювання задачі правильне, якщо значення напружень σ_r від'ємні, тобто напруження стискуючі вздовж циліндра. Розрахунок показав, що при невеликих значеннях часу, менше 8, це має місце; пізніше значення стають додатними.

1. Отриманий ефективний наближений розв'язок задачі про напружений стан скінченного циліндра під дією нестационарного осесиметричного навантаження.

2. Проведено порівняння чисельних розрахунків з результатами, одержаними за елементарним розв'язком, визначено, при яких параметрах циліндра ці два розв'язки збігаються та коли настає суттєве розходження результатів.

3. З'ясовано, при яких значеннях часу при такому формулюванні задачі може бути застосований запропонований підхід.

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. – М., 1969. – Т. 1.
2. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Осесимметричные колебания упругого цилиндра конечной длины // Акустический журнал. – 1978. – 6. – № 24. – С. 861–866.
3. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко В.А. Дифракция упругих волн. – К., 1978.
4. Вайсфельд Н.Д. Определение волнового поля внутри полого упругого цилиндра под действием осесимметричной нестационарной нагрузки // Акустический журнал. – 2003. – 6. – № 3.
5. Мелешко В.В. Осесимметричные колебания упругого цилиндра конечной длины // Динамика и прочность машин. – 1979. – Вып. 29. – С. 82–86.
6. Попов Г.Я., Абдыманапов С.А., Ефимов В.В. Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач. – Алматы, 1999.
7. Саврук М., Матвісів О. Про розв'язування динамічних антиплоских задач механіки руйнування для тіл з тріщинами // Мат. проблеми механіки неоднорідних структур. – Львів. – 2003. – С. 252–254.
8. Снеддон И. Преобразование Фурье. – М., 1955.
9. Янютин Е.Г., Дзюбак Л.П. Нестационарные деформационные процессы в многослойном цилиндре // Прикладная механика. – 1999. – 35. – № 8. – С.10–17.
10. Янютин Е.Г., Янчевский И.В. Импульсные воздействия на упругодеформируемые элементы конструкций. – Х., 2001.

THE AXYSYMMETRICAL NON-STATIONARY PROBLEM FOR THE SOLID FINITE CYLINDER, ADHESIONED WITH THE RIGID BASIS

Nataliya Vaysfel'd

*Odessa National I. I. Mechnikov University,
Dvoryanskaya Str., 2, 65026 Odessa, Ukraine*

The numeric-analytical solution on the problem of the stress state estimation of the continuous finite elastic cylinder, which is under the influence of shock loading, is proposed. The solving is based on the movement equation discretization on time and the following application of the integral transforms method. The one-dimensional vector boundary problem is received. It is solved with the help of Green matrix function construction.

Key words: non-stationary problem, elastic cylinder, shock loading, rigid basis.

Стаття надійшла до редколегії 14.10.2005

Прийнята до друку 22.11.2006

УДК 539.3

ЗНАХОДЖЕННЯ ПЛОСКОГО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ПРЯМОКУТНОЇ ПЛАСТИНИ МЕТОДОМ ІНТЕГРАЛЬНИХ МОМЕНТІВ

Віктор РЕВЕНКО

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3б, 79053 Львів, Україна*

Виділено зовнішнє однорідне несамозрівноважене навантаження, для якого записано функцію напружень. Самозрівноважений напружений стан, який залишився, подано у вигляді ряду за спеціально побудованими сен-венанівськими функціями. Коефіцієнти ряду знаходять із умови мінімуму інтеграла квадрата відхилення розв'язку від заданих граничних умов на сторонах пластини. Розв'язано бігармонічне рівняння і знайдено напружений стан прямокутної пластини. Пояснено принцип Сен-Венана.

Ключові слова: однорідне навантаження, бігармонічне рівняння, принцип Сен-Венана.

Плоска статична задача теорії пружності для тонкої прямокутної пластини сталої товщини h , яка займає в плані прямокутну область $D = \{(x, y) \in [0, a] \times [-b, b]\}$ у випадку ізотропного матеріалу за відсутності масових сил, зводиться до розв'язання бігармонічного рівняння

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi(x, y) = 0, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (1)$$

де $\Phi(x, y)$ – функція напружень [1–3]. На контурі L прямокутника D задані граничні умови в напруженнях

$$\sigma_n(x, y)|_L = \sigma_L|_L, \quad \tau_n(x, y)|_L = \tau_L|_L, \quad (2)$$

де зовнішні нормальні та дотичні навантаження σ_L , τ_L є кусково-неперервними функціями та інтегрованими в квадраті на контурі прямокутника L . Проблема знаходження напружено-деформованого стану (НДС) прямокутної пластини відома з середини XIX ст., проте вона й досі залишається науково і практично важливою та актуальною задачею [2–6]. В [4] наведено огляд літератури. В праці [6] побудовано систему ортогональних функцій, яка дає підстави задовольнити граничні умови на краях пластини, для деяких часткових навантажень. В [2, 3] зазначено, що основним математичним підходом при дослідженні цієї проблеми є метод розділення змінних. Застосовуючи цей метод, широко використовують два підходи, які

ґрунтуються на ідеях Г. Ламе та пов'язані з ідеями задачі Штурма-Ліувілля.

В статті детальніше розвинуто другий підхід [див. 5]. Запропоновано розділення зовнішнього навантаження на основну (несамозрівноважену) та "збурену" (самозрівноважену) частини. Для незсамозрівноваженого щодо однієї сторони пластини зовнішнього навантаження знайдено функцію напружень у вигляді полінома. Напружений стан від самозрівноваженого навантаження внаслідок симетрії задачі розділено на дві частини і подано у вигляді ряду за спеціально побудованими сен-венанівськими функціями.

Знаходження розв'язку методом розділення змінних. Нормальні та дотичні напруження виразимо [1] у вигляді

$$\sigma_x = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Phi(x, y), \quad \sigma_y = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi(x, y), \quad \tau_{xy} = \tau = -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Phi(x, y). \quad (3)$$

Позначимо вершини прямокутника римськими цифрами проти годинникової стрілки, починаючи із вершини (a, b) . Сторони між першою і четвертою, другою і першою вершиною позначимо арабськими цифрами 1, 2, 3, 4.

Розподілені нормальні та дотичні навантаження σ_L , τ_L створюють на сторонах пластини відповідні нормальні T_j та дотичні Q_j зусилля і моменти M_j , $j = \overline{1, 4}$, які задовольняють рівняння рівноваги. Пошук бігармонічної функції напружень $\Phi(x, y)$, що задовольняє граничні умови (2), зведемо до послідовності таких задач. Для визначеності приймемо, що дотичні напруження в кутових точках дорівнюють нулю. Довільні зовнішні навантаження, які діють по сторонах 1, 3 внаслідок симетрії, можна розділити на два стани: а) парні стосовно змінної y нормальні напруження, непарні – дотичні напруження; б) навпаки непарні – нормальні, парні – дотичні напруження. Надалі розглядатимемо випадок а), де на підставі симетрії виконується $Q_1 = Q_3 = 0$, $M_1 = M_3 = 0$. Вісім силових факторів, які залишилися зв'язані трьома рівняннями рівноваги. Поліноміальна функція напружень, яка створює ці силові фактори, виглядає

$$\begin{aligned} \Phi_0(x, y) = & \frac{T_4}{2ha} x^2 + \frac{T_3}{4hb} y^2 + \frac{T_1 - T_3}{4ha^3b} [y^2(3ax^2 - 2x^3) + 2b^2(x - \frac{a}{2})^3] + \\ & + \frac{2M_4}{ha^3} (x - \frac{a}{2})^3 + \frac{M_2 - M_4}{ha^3b} [(x - \frac{a}{2})^2 - \frac{3}{4}a^2](x - \frac{a}{2})(y + b). \end{aligned} \quad (4)$$

Безпосереднім обчисленням перевіряється, що $\Phi_0(x, y)$ задовольняє бігармонічне рівняння і створює задані узагальнені силові зусилля по сторонах пластини. Якщо підставити функцію (4) в вирази напружень (3), то знайдемо розподілені на контурі прямокутної пластини зусилля, які відповідають основному напруженому стану. Після виділення цих зусиль із граничних умов (2) залишиться самозрівноважене або "збурене" щодо

кожної сторони пластини зовнішнє навантаження. Це зовнішнє навантаження розглянемо як суму двох частин А і Б

А) на горизонтальних сторонах $y = \pm b$ прямокутної пластини немає зовнішніх навантажень

$$\sigma_y(x, \pm b) = 0, \quad \tau(x, \pm b) = 0, \quad x \in [0, a], \quad (5)$$

а на бокових сторонах $x = 0$, $x = a$ діють граничні навантаження (2);

Б) навпаки, на бокових сторонах прямокутної пластини немає зовнішніх навантажень, на горизонтальних сторонах діють граничні навантаження (2). Враховуючи ідентичність задач А і Б, надалі шукатимемо розв'язок самозрівноваженої задачі А. Зовнішні навантаження в цій задачі також поділимо на дві частини: 1) НДС від самозрівноважених зусиль, прикладених на лівій стороні

$$\sigma_x(0, y) = \sigma_1(y), \quad \tau(0, y) = \tau_1(y), \quad \sigma_x(a, y) = 0, \quad \tau(a, y) = 0; \quad (6)$$

2) НДС від самозрівноважених зусиль, прикладених на правій стороні пластини

$$\sigma_x(a, y) = \sigma_2(y), \quad \tau(a, y) = \tau_2(y), \quad \sigma_x(0, y) = 0, \quad \tau(0, y) = 0, \quad (7)$$

де $\sigma_1(y)$, $\tau_1(y) \in L_2[-b, b]$ (відповідно $\sigma_2(y)$, $\tau_2(y) \in L_2[-b, b]$) відомі зовнішні навантаження, які задовольняють коректні фізичні умови

$$\int_{-b}^b \sigma_j(y) dy = 0, \quad \int_{-b}^b \tau_j(y) dy = 0, \quad \tau_j(\pm b) = 0, \quad |\sigma_j(y)| < \infty, \quad |\tau_j(y)| < \infty. \quad (8)$$

Згідно з експериментом і відповідно до принципу Сен-Венана "збурений" напружений стан швидко загасає при віддалені від самозрівноважено навантаженої сторони пластини, отже, щоб його описати, треба використовувати функції напружень, які швидко загасають.

Означення 1. Називатимемо бігармонічну функцію напружень сен-венанівською, якщо виражені через неї нормальні та дотичні напруження створюють на кожній стороні прямокутника нульові інтегральні нормальну T_n і зсувну Q_n сили, та нульовий згинний момент M_n , вона загасає при віддалені від однієї "базової" сторони прямокутника. Переформулюємо принцип Сен-Венана: "Збурений" напружений стан пластини описується сен-венанівськими функціями.

Означення 2. Якщо функція напружень задовольняє нульові граничні умови (5), то її будемо називати власною функцією крайової задачі в напруженнях.

Спочатку припустимо, що пластина за змінною x достатньо "довга", тобто така, що зовнішні "збурені" зусилля, прикладені до сторони пластини ($x = 0$), практично не спричиняють появи "збуреного" НДС біля протилежної сторони. В цьому випадку виконується $a \gg b$. Бігармонічна функція, яка задовольняє крайові умови (5), має подання

$$\Phi(x, \beta y) = \operatorname{Re}\{[b \cos(\beta y) + a \sin(\beta y) + y(g \cos(\beta y) + c \sin(\beta y))]\exp(-\beta x)\}, \quad (9)$$

де $\operatorname{Re} \beta > 0$, a, g, c, b – невідомі комплексні коефіцієнти, а власні безрозмірні спектральні значення $z = b\beta$ знаходять як нулі трансцендентної функції [5, 9]

$$F(z) \equiv \sin(2z) + 2z, \quad (10)$$

де $z = b\beta$.

Теорема 1. Функція $F(z)$ має зліченну кількість нулів $z_k = b\beta_k$ $k = 0, 1, 2, \dots$.

Доведення. Використовуючи означення порядку функції [див. 10], можна показати, що функція $F(z)$ є цілою функцією порядку 1. Прийнемо $z = \sqrt{\zeta}$. Функція $F(\sqrt{\zeta})/\sqrt{\zeta}$ стосовно комплексної змінної ζ є функцією порядку $\frac{1}{2}$. З теореми 5 [10, с. 268] випливає доведення.

Всі корені рівняння (10) (крім $z_0 = 0$) – комплексно-спряжені. Наведемо асимптотичні значення коренів рівняння (1)

$$\operatorname{Re} z_k \approx \frac{A_k}{4} - \frac{\ln A_k}{A_k} + O\left(\frac{\ln A_k}{A_k}\right)^2, \quad \operatorname{Im} z_k \approx \frac{\ln A_k}{2} + \frac{\ln^2 A_k}{A_k^2} - 2\frac{\ln A_k}{A_k^2}, \quad k \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Тут $A_k = \pi(4k - 1)$.

Розмістимо корені z_k , а отже, і β_k в порядку зростання їхніх дійсних частин. Введемо безрозмірну змінну γ , $y = b\gamma$. Після підстановки функції напружень (9) у граничні умови (5) і використання рівняння (10), знайдемо явний вигляд власних функцій

$$\Phi_k(x, z_k \gamma) = \operatorname{Re}\{bg_k \varphi_k(\gamma) \exp(-\beta_k x)\}, \quad (12)$$

де $\varphi_k(\gamma) = \gamma \sin(z_k \gamma) - tg(z_k) \cos(z_k \gamma)$; g_k – довільний комплексний коефіцієнт.

Підставимо власні функції (12) в напруження (3) й одержимо

$$\sigma_y(x, \gamma) = \operatorname{Re}\{bg_k \beta_k^2 \varphi_k(\gamma) \exp(-\beta_k x)\}, \quad \sigma_x(x, \gamma) = \operatorname{Re}\{bg_k \beta_k^2 \chi_k(\gamma) \exp(-\beta_k x)\},$$

$$\tau(x, \gamma) = \operatorname{Re}\{bg_k \beta_k^2 \psi_k(\gamma) \exp(-\beta_k x)\}. \quad (13)$$

Тут

$$\chi_k(\gamma) = \left[\frac{1}{z_k} - ctg(z_k)\right] \cos(z_k \gamma) - \gamma \sin(z_k \gamma),$$

$$\psi_k(\gamma) = \gamma \cos(z_k \gamma) - ctg(z_k) \sin(z_k \gamma).$$

Легко перевірити такі залежності $\psi'_k(\gamma) = z_k \chi_k(\gamma)$, $\psi_k(1) = \psi_k(-1) = 0$.

Теорема 2. Кожна власна функція напружень (12) є сен-венанівською.

Доведення. Теорему доведемо безпосереднім обчисленням. Врахувавши значення $\sigma_x(x, \gamma)$ (13), знайдемо інтегральне зусилля T_x , яке діє в довільному перерізі, паралельному боковій стороні пластини

$$T_x = hb \int_{-1}^1 \sigma_x(x, \gamma) d\gamma = hb \operatorname{Re} \{ g_k \beta_k [\psi_k(1) - \psi_k(-1)] \exp(-\beta_k x) \} = 0.$$

Внаслідок парності напружень $\sigma_x(x, \gamma)$ одержимо $M_x = 0$, а внаслідок непарності дотичних напружень $\tau(x, \gamma)$ одержимо $Q_x = 0$. Отже, на вертикальних сторонах пластини умови виконуються. На горизонтальних сторонах сен-венанівська умова виконується внаслідок умов (5). Власні функції експоненціально загасають при віддалені від вертикальної сторони прямокутника. Теорему доведено.

Теорема 3. Система функцій $\{1, \chi_k(\gamma), \psi_k(\gamma)\}$, $k = 1, 2, \dots$ є повною в комплексному крузі $|\gamma| \leq 1$ в класі аналітичних функцій.

Доведення. Оскільки $\chi_k(\gamma)$, $\psi_k(\gamma)$ – цілі функції порядку $\rho = 1$, а для послідовності нулів $z_k = b\beta_k$ згідно з [4] виконується умова

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\|z_k\|} \leq e,$$

і, крім того, $\operatorname{Re} z_1 < \pi$, то доведення теореми 3 випливає з твердження теореми 18 [11, с. 283].

Розрахунок НДС “довгої” пластини (задача “розтягу-стиску”). Наведемо перші 6 коренів рівняння (8) [3]

$$z_1 = 2,106196 + 1,125364i, \quad z_2 = 5,356268 + 1,551574i,$$

$$z_3 = 8,536668 + 1,775543i, \quad z_4 = 11,69918 + 1,929404i,$$

$$z_5 = 14,85406 + 2,046851i, \quad z_6 = 18,00493 + 2,141890i,$$

де i – уявна одиниця. Для знаходження коренів $k > 6$ можна використати асимптотичну формулу (9).

Функція напружень для знаходження “збуреного” НДС має вигляд

$$\Phi(x, \gamma) = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \{ b g_k \varphi_k(\gamma) \exp(-\beta_k x) \}. \quad (14)$$

Невідомий комплексний коефіцієнт g_k має дві незалежні невідомі – дійсну й уявну частину, що дає змогу задовольнити одночасно дві граничні умови. Врахувавши числові значення коренів z_k , бачимо, що функція напружень (14) швидко спадає при зростанні змінної x , відповідно спадає і НДС, який вона описує. Чим більший номер власної функції, тим скоріше

вона спадає при віддаленні від лівої вертикальної сторони пластини. Наприклад, функція Φ_1 зменшується більше ніж у 100 разів на відстані $x \geq 2,2b$, а $\Phi_2 - x \geq 0,85b$. Отже, при $a > 2,2b$ пластину можна розглядати як "довгу". Таке швидке спадання НДС пояснює принцип Сен-Венана.

Використавши співвідношення (13), (14), подамо перші дві граничні умови (6) у вигляді

$$\sigma_1(b\gamma) = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re}\{(x_k + iy_k)\chi_k(\gamma)\}, \quad \tau_1(b\gamma) = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re}\{(x_k + iy_k)\psi_k(\gamma)\}, \quad (15)$$

де $x_k + iy_k = c_k = \frac{z_k^2 g_k}{b}$; x_k, y_k – дійсна й уявна частини комплексного коефіцієнта c_k . Дві останні граничні умови (6) виконуються, оскільки пластина вважається "довгою".

Мінімізація інтеграла квадрата відхилення розв'язку від заданих граничних умов. Для знаходження невідомих коефіцієнтів g_k модифікуємо метод інтегральних моментів [7]. Обмежимося у співвідношеннях (15) скінченною кількістю N членів ряду. Оскільки окремі члени ряду (13) є розв'язками бігармонічного рівняння, то для знаходження невідомих коефіцієнтів достатньо використати умову мінімуму граничного відхилення знайденого розв'язку від зовнішніх навантажень (6) на границі пластини. Зазначимо, що граничні умови на горизонтальних сторонах пластини задовольняються тотожно. Мірою наближення обрізаного розв'язку до точного є інтеграл квадратичного відхилення обрізаних напружень (15) від заданих зовнішніх навантажень (6) на бокових сторонах

$$\begin{aligned} \Phi\{x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N\} = \int_0^1 \left\{ \left[\sum_{k=1}^N \operatorname{Re}[x_k \chi_{rk}(\gamma) - y_k \chi_{yk}(\gamma)] - \sigma_1(b\gamma) \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[\sum_{k=1}^N \operatorname{Re}[x_k \psi_{rk}(\gamma) - y_k \psi_{yk}(\gamma)] - \tau_1(b\gamma) \right]^2 \right\} d\gamma. \end{aligned} \quad (16)$$

Тут $\chi_{rk}(\gamma), \psi_{rk}(\gamma)$ і $\chi_{yk}(\gamma), \psi_{yk}(\gamma)$ відповідно дійсна й уявна частини функцій $\chi_k(\gamma), \psi_k(\gamma)$. Невідомі коефіцієнти x_k і y_k $k = \overline{1, N}$ визначимо з умови мінімуму функціонала (16). Для цього знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial \Phi\{x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N\}}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial \Phi\{x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N\}}{\partial y_j}, \quad j = \overline{1, N} \quad \text{і прирівняємо їх}$$

до нуля. Після громіздких обчислень інтегралів одержимо систему $2N$ лінійних рівнянь для визначення $2N$ невідомих x_k, y_k

$$\sum_{k=1}^N \{x_k B_{k,j}^1 - y_k B_{k,j}^2\} = \int_0^1 [\sigma_1(\gamma) \chi_{rj}(\gamma) + \tau_1(\gamma) \psi_{rj}(\gamma)] d\gamma, \quad j = \overline{1, N},$$

$$\sum_{k=1}^N \{x_k B_{k,j}^3 - y_k B_{k,j}^4\} = \int_0^1 [\sigma_1(\gamma) \chi_{yj}(\gamma) + \tau_1(\gamma) \psi_{yj}(\gamma)] d\gamma, \quad j = \overline{1, N}, \quad (17)$$

де

$$B_{k,j}^1 = \operatorname{Re}(N_{k,j}), \quad B_{k,j}^2 = \operatorname{Im}(N_{k,j}), \quad N_{k,j} = P_1(k, j) + Q_1(k, j), \quad B_{k,j}^3 = B_{j,k}^2,$$

$$B_{k,j}^4 = \operatorname{Re}(A_{k,j}), \quad A_{k,j} = P_2(k, j) + Q_2(k, j), \quad 2P_m(k, j) =$$

$$= D(z_k, \bar{z}_j) - (-1)^m D(z_k, z_j), \quad 2Q_m(k, j) = M(z_k, \bar{z}_j) - (-1)^m M(z_k, z_j), \quad m = 1, 2.$$

Функції $M(z, w)$, $D(z, w)$ для значень аргументів $z \neq w$ знаходять за формулами

$$M(z, w) = m(z)m(w)F_{1,1}(z, w) - m(z)G(w, z) - m(w)G(z, w) + F_{0,3}(z, w),$$

$$D(z, w) = n(z)n(w)F_{0,1}(z, w) - n(z)G(z, w) - n(w)G(w, z) + F_{1,3}(z, w).$$

Тут

$$F_{0,1}(z, w) = W(z, w)[z \sin(z) \cos(w) - w \sin(w) \cos(z)], \quad n(z) = \frac{1}{z} - \operatorname{ctg}(z),$$

$$G(z, w) = W(z, w)[z \sin(z) \sin(w) + w \cos(w) \cos(z)] +$$

$$+ W^2(z, w)[(z^2 + w^2) \cos(z) \sin(w) - 2zw \cos(w) \sin(z)], \quad W(z, w) = \frac{1}{z^2 - w^2},$$

$$F_{0,3}(z, w) = F_{0,1}(z, w) + \frac{\cos(z+w)}{(z+w)^2} + \frac{\cos(z-w)}{(z-w)^2} - \frac{\sin(z+w)}{(z+w)^3} - \frac{\sin(z-w)}{(z-w)^3},$$

$$F_{1,3}(z, w) = F_{1,1}(z, w) - \frac{\cos(z+w)}{(z+w)^2} + \frac{\cos(z-w)}{(z-w)^2} + \frac{\sin(z+w)}{(z+w)^3} - \frac{\sin(z-w)}{(z-w)^3},$$

$$F_{1,1}(z, w) = W(z, w)[w \sin(z) \cos(w) - z \sin(w) \cos(z)], \quad m(z) = \operatorname{ctg}(z).$$

Коефіцієнти $D(z_k, z_k)$, $M(z_k, z_k)$ відповідно дорівнюють

$$D(z_k, z_k) = \frac{3}{2} \operatorname{ctg}^2(z_k) + \frac{7}{6}, \quad M(z_k, z_k) = -\frac{1}{3} - \frac{\operatorname{ctg}(z_k)}{2z_k}.$$

Розв'яжемо систему лінійних рівнянь (16) чисельно і знайдемо дійсні коефіцієнти x_k , y_k , а отже, і комплексні коефіцієнти g_k , $k = 1, 2, \dots, N$. Далі за поданнями (1), (14) знайдемо НДС пластини.

Розрахунок “збуреного” НДС “короткої” $a \leq 2,2b$ пластини (задача “розтягу-стиску”). В цьому випадку зовнішні “збурені” зусилля, прикладені до вертикальної лівої сторони пластини, спричиняють появу “збуреного” НДС біля протилежної сторони. Функцію напружень, яка описує “збурений” НДС, зручно подати у вигляді

$$\Phi(x, \gamma) = b^2 \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re}\{[g_k \exp(-\beta_k x) + q_k \exp(\beta_k(x-a))]\varphi_k(\gamma)\},$$

де g_k , q_k невідомі комплексні коефіцієнти. Розроблений в п. 2 метод дає змогу визначити НДС пластини в цьому випадку, але в зв'язку з обмеженням об'ємом статті необхідні розрахунки не наводимо.

1. Плоский НДС пластини поділяється на два напружені стани: основний, який описується поліноміальною функцією напружень; “збурений” – описується сен-венанівськими функціями. Для того щоб розділення граничних умов на дві частини було коректним, кожна з виділених частин повинна задовольняти інтегральні (умови рівноваги) та локальні (рівність дотичних напружень у кутових точках) умови.

2. Знайдено подання “збуреного” напруженого стану у вигляді ряду. Показано, що кожна компонента цього ряду – сен-венанівська. Запропонований алгоритм можна використати для розрахунку задачі згину прямокутної пластини.

3. Показано таке: якщо $a > 2,2b$, то таку пластину можна розглядати як “довгу”, що суттєво спрощує розрахунок. Запропоновані в статті методики розрахунку можна розвинути і використати при розв'язуванні змішаних крайових задач теорії пружності.

-
1. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М., 1975.
 2. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. – К., 1978.
 3. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. Пространственные задачи теории упругости и пластичности // Равновесие упругих тел канонической формы. – К., 1985. – Т. 3.
 4. Meleshko V.V. Selected topics in history of the two-dimensional biharmonic problem // Appl. Mech. Rev. – January 2003. – Vol. 56. – No 1. – P. 33–85.
 5. Прокопов В.К. Однородные решения теории упругости и их приложение к теории тонких пластинок. – Труды II Всесоюз. съезда по

- теорет. и прикл. механике. Механика твердого тела. – М., 1966. – С. 253–260.
6. Визак В.М., Токовий Ю.В. Построение элементарных решений плоской задачи теории упругости для прямоугольной области // Прикладная механика. – 2002. – Т. 38. – № 7. – С. 79–87.
 7. Ревенко В.П. Спектральна задача осесиметричної теорії пружності // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2003. – Вип. 61. – С. 249–258.
 8. Стеклов В.А. Основные задачи математической физики. – М., 1983.
 9. Космодамианский А.С., Шалдырван В.А. Толстые многосвязные пластины. – К., 1978.
 10. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Дальнейшее построение теории. – М., 1968. – Т. 2.
 11. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. – М., 1956.

CONSTRUCTION OF SOLUTION TO PLANE PROBLEM OF ELASTICITY THEORY FOR RECTANGULAR PLATE BY INTEGRAL MOMENT METHOD

Viktor Revenko

*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
Naukova Str., 3b, 79053 Lviv, Ukraine*

The external homogeneous nonself-balanced loading, for which the stress function is written, is derived. The self-balanced stress state is presented in the form of a series in the specially constructed St. Venant functions. The series coefficients are defined from the condition of integrals minimum of solution deviation quadratic from the given boundary conditions on the plate sides. A biharmonic equation is solved and the stress-strain state of rectangular plate is defined. The Saint-Venant principle is verified.

Key words: homogeneous loading, biharmonic equation, Saint-Venant principle.

Стаття надійшла до редколегії 25.10.2005
Прийнята до друку 22.11.2006

УДК 539.3

ФРИКЦІЙНА ТЕРМОПРУЖНА НЕСТІЙКІСТЬ У КОНТАКТНИХ ЗАДАЧАХ

Юрій ПИР'ЄВ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

Наведено результати математичного моделювання термопружної нестійкості у системі рухомого тіла з ущільнювачем, яке до нього дотискається пружиною. Приймається, що в області контакту відбувається термічний опір, який є нелінійною функцією контактного тиску. Визначено критичну швидкості у системі.

Ключові слова: контактна задача, тертя, термопружна нестійкість.

При високошвидкісному контакті тіл можливе виникнення нестійкості контактних параметрів, що призводить до погіршення або відмови роботи трибоз'єднання. Під фрикційною термопружною нестійкістю розуміється необмежене зростання в часі характеристик контакту (контактної температури, контактного тиску), при перевищенні швидкості ковзання певного критичного значення [1–7].

У більшості праць, пов'язаних з цією проблематикою [7], контактуючі тіла дотискаються силою. Для одновимірних задач це приводить до постійного контактного тиску в ділянці контакту. У працях [2–6] розглянуто контактні задачі, в яких задано зближення тіл. Для одновимірних задач це приводить до невідомого контактного тиску в ділянці контакту і задача теорії пружності і теплопровідності зв'язані через граничні умови. Праця присвячена вивченню механізму появи фрикційної термопружної нестійкості [3] у системі, яка моделює фрикційний контакт рухомого тіла з ущільнювачем, яке до нього дотискається пружиною. Приймається, що в ділянці контакту відбувається термічний опір, який є нелінійною функцією контактного тиску.

Мета нашої праці – визначити критичну швидкість у системі, яка складається з рухомого з постійною швидкістю жорсткого шару і термопружного шару, який дотискається пружиною.

Формулювання задачі. Розглянемо модель термопружного контакту двох

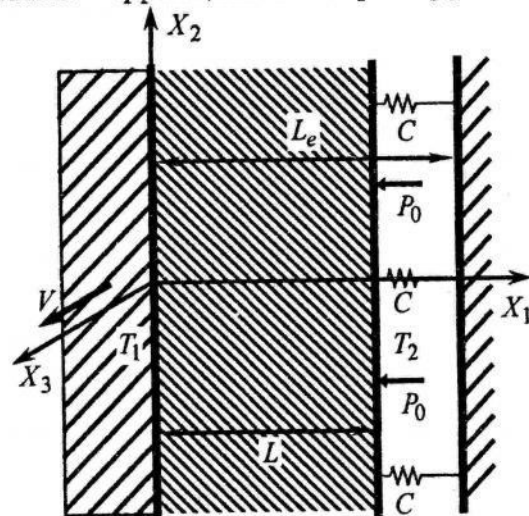


Рис. 1

плоско-паралельних шарів (рис. 1). Приймаємо, що лівий шар абсолютно тверде й ідеально провідне тіло, що рухається зі сталою швидкістю V вздовж осі X_3 декартової системи координат X_1, X_2, X_3 по поверхні закріпленого правого шару товщини L . Унаслідок дії сили тертя F_{fr} на поверхні контакту $X_1 = 0$ відбувається теплоутворення. Сума інтенсивностей фрикційних теплових потоків, спрямованих у шари, дорівнює питомій потужності сил тертя. Приймаємо, що на неконтактуючу поверхню правого шару $X_1 = L$ діє тиск $P_0 h_3(X_2, t)$, зумовлений навколишнім середовищем з температурою $T_2^w(X_2, t) = T_2^0 h_2(X_2, t)$ і розподілене навантаження зумовлене пружинами з жорсткістю C . Між контактуючими шарами йде теплообмін за законом Ньютона з термічним опором $R(P)$, який залежить від контактного тиску. Температура лівого шару відома і дорівнює $T_1^w(X_2, t) = T_1^0 h_1(X_2, t)$.

Приймаємо, що згідно з законом Амонтона $F_{fr} = f P(t)$, де f – коефіцієнт тертя; $P(t)$ – контактний тиск. Треба визначити температуру $T(X_1, X_2, t)$, переміщення $U_n(X_1, X_2, t)$ і напруження $\sigma_{nm}(X_1, X_2, t)$, $n, m = 1, 2, 3$.

Задача зводиться до розв'язування системи диференціальних рівнянь квазістаціонарної незв'язаної термопружності

$$2(1 - \nu) \frac{\partial^2 U_n(X_1, X_2, t)}{\partial X_n^2} + (1 - 2\nu) \frac{\partial^2 U_n(X_1, X_2, t)}{\partial X_m^2} + \frac{\partial^2 U_m(X_1, X_2, t)}{\partial X_n \partial X_m} =$$

$$= 2\alpha(1 + \nu) \frac{\partial T(X_1, X_2, t)}{\partial X_n}, \quad n, m = 1, 2, \quad n \neq m, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 U_3(X_1, X_2, t)}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 U_3(X_1, X_2, t)}{\partial X_2^2} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 T(X_1, X_2, t)}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 T(X_1, X_2, t)}{\partial X_2^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial T(X_1, X_2, t)}{\partial t}, \quad (3)$$

за таких умов:

механічних крайових

$$U_1(0, X_2, t) = 0, \quad \sigma_{12}(0, X_2, t) = 0, \quad \sigma_{13} = fP(X_2, t), \quad (4)$$

$$\sigma_{11}(L, X_2, t) + CU_1(L, X_2, t) = -(P_0 + P_1)h_3(X_2, t),$$

$$\sigma_{12}(L, X_2, t) = 0, \quad U_3(L, X_2, t) = 0 \quad (5)$$

теплових крайових

$$-K \frac{\partial T(0, X_2, t)}{\partial X_1} + \frac{T(0, X_2, t) - T_1^w}{R(P)} = fVP(X_2, t), \quad (6)$$

$$T(L, X_2, t) = T_2^w \quad (7)$$

і нульових початкових, де $P(X_2, t) = -\sigma_{11}(0, X_2, t)$, $L_1 = L_e - L$, $P_1 = C(L_0 - L_1)$, L_0 – довжина не стиснутих пружин.

Напруження у правому шарі обчислюємо за формулами

$$\sigma_{11}(X_1, X_2, t) = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\frac{\partial U_1(X_1, X_2, t)}{\partial X_1} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial U_2(X_1, X_2, t)}{\partial X_2} - \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} T(X_1, X_2, t) \right] \quad (8)$$

$$\sigma_{12}(X_1, X_2, t) = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{\partial U_1(X_1, X_2, t)}{\partial X_2} + \frac{\partial U_2(X_1, X_2, t)}{\partial X_1} \right] \quad (9)$$

$$\sigma_{13}(X_1, X_2, t) = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{\partial U_3(X_1, X_2, t)}{\partial X_1} \right] \quad (10)$$

У формулах (1)-(10) E – модуль Юнга, ν , K , k , α – коефіцієнти Пуассона, теплопровідності, температуропровідності, лінійного температурного розширення.

Побудова розв'язку задачі. Розглядувана задача (1)-(7) є нелінійною за рахунок умови (6). Для навантаження $h_n(x_2, \tau) = \text{Re}[e^{i\xi x_2} H(\tau)]$ ($H(\tau)$ – функція Гевісайда) розв'язок задачі шукаємо у безрозмірному вигляді

$$p(x_2, \tau) = \text{Re}[p(\xi, \tau)e^{i\xi x_2}], \quad \theta(x_1, x_2, \tau) = \text{Re}[\theta(x_1, \xi, \tau)e^{i\xi x_2}],$$

$$\sigma_{nm}(x_1, x_2, \tau) = \text{Re}[\sigma_{nm}(x_1, \xi, \tau)e^{i\xi x_2}], \quad u_n(x_1, x_2, \tau) = \text{Re}[u_n(x_1, \xi, \tau)e^{i\xi x_2}].$$

Стационарний розв'язок задачі для однорідно розподіленого навантаження вздовж осі x_2 визначаємо згідно з означеннями

$$p_{st} = \lim_{\substack{\tau \rightarrow \infty \\ \xi \rightarrow 0}} [p(\xi, \tau)e^{i\xi x_2}], \quad \theta_{st}(x_1) = \lim_{\substack{\tau \rightarrow \infty \\ \xi \rightarrow 0}} [\theta(x_1, \xi, \tau)e^{i\xi x_2}],$$

$$\sigma_{nm}^{st}(x_1) = \lim_{\substack{\tau \rightarrow \infty \\ \xi \rightarrow 0}} [\sigma_{nm}(x_1, \xi, \tau)e^{i\xi x_2}], \quad u_n^{st}(x_1) = \lim_{\substack{\tau \rightarrow \infty \\ \xi \rightarrow 0}} [u_n(x_1, \xi, \tau)e^{i\xi x_2}].$$

Використовуючи властивості перетворення Лапласа, безрозмірні стаціонарний контактний тиск і стаціонарну температуру знаходимо за формулами

$$p_{st} = \frac{p_0 + p_1 + c_p J \frac{\theta_1^0 + \theta_2^0 + 2\theta_2^0 \tilde{R}_0}{2(1 + \tilde{R}_0)}}{(1 - \Omega/\Omega_{cr})(1 + c_p)}, \quad J = \frac{\tilde{E} \tilde{\alpha} (1 - 2\nu) T_*}{(1 - \nu) P_*}, \quad (11)$$

$$\theta_{st}(x_1) = \theta_{st}(0) + x_1 (\theta_2^0 - \theta_{st}(0)), \quad \theta_{st}(0) = \frac{\theta_1^0 + \theta_2^0 \tilde{R}_0 + \Omega p_{st} \tilde{R}_0}{1 + \tilde{R}_0}, \quad (12)$$

$$\Omega_{cr} = \frac{2(1 + 1/\tilde{R}_0)(1 + 1/c_p)}{J}, \quad c_p = \frac{CL}{P_*}, \quad \tilde{R}_0 = \tilde{R}(p_{st}) = \tilde{R}(P_* p_{st}). \quad (13)$$

Введено такі безрозмірні величини:

$$\tau = \frac{t}{t_*}, \quad x_n = \frac{X_n}{L}, \quad u_n = \frac{U_n}{L}, \quad \theta = \frac{T}{T_*}, \quad \theta_n^w = \frac{T_n^w}{T_*}, \quad \theta_n^0 = \frac{T_n^0}{T_*}, \quad \sigma_{nm} = \frac{\sigma_{nm}}{P_*},$$

$$p = \frac{P}{P_*}, \quad p_0 = \frac{P_0}{P_*}, \quad p_1 = \frac{P_1}{P_*}, \quad \Omega = \frac{P_* R_* f V}{T_*}, \quad \tilde{R} = \frac{R}{R_*}, \quad \tilde{R}(p) = \tilde{R}(P_* p), \quad n, m = 1, 2$$

і характерні параметри

$$\tilde{E} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{\alpha(1 + \nu)}{1 - \nu}, \quad t_* = \frac{L^2}{k}, \quad R_* = \frac{L}{K}, \quad P_* = \frac{E}{1 - \nu^2}.$$

Показано, що умовою виникнення фрикційної термопружної нестійкості у випадку однорідного збурення ($\xi = 0$) є нерівність $\Omega > \Omega_{cr}$.

У випадку дії неоднорідного навантаження проведено аналіз поведінки збурень стаціонарних розв'язків. Розглянуто навантаження $h_m(x_2, \tau) = 1 + h_m^*(x_2, \tau)$. Розв'язок шукали у вигляді

$$\theta(x_1, x_2, \tau) = \theta_{st}(x_1) + \theta^*(x_1, x_2, \tau), \quad p(x_2, \tau) = p_{st} + p^*(x_2, \tau),$$

$$u_n(x_1, x_2, \tau) = u_n^{st}(x_1) + u_n^*(x_1, x_2, \tau), \quad \sigma_{12}(x_1, x_2, \tau) = \sigma_{12}^*(x_1, x_2, \tau)$$

де $|h_n^*| \ll 1$, $|\theta^*| \ll 1$, $|u_n^*| \ll 1$, $|\sigma_{nm}^*| \ll 1$.

Характеристичне рівняння лінеризованої задачі отримано у вигляді

$$\Delta(\xi, s) = \tilde{R}_0 + D_1(\xi, s)Q_1 + D_2(\xi, s) = 0, \quad (14)$$

де

$$Q_1 = J \left[\Omega \tilde{R}_0 \left(1 + \frac{p_{st}}{1 + \tilde{R}_0} \frac{\tilde{R}_0'}{\tilde{R}_0} \right) + (\theta_2^0 - \theta_1^0) \frac{\tilde{R}_0'}{1 + \tilde{R}_0} \right], \quad \tilde{R}_0' = \frac{d\tilde{R}(p)}{dp} \Big|_{p=p_{st}},$$

$$D_1(\xi, s) = \{ \xi^2 (Th - Si \quad (Si \quad Ch + 1)/(Ch \quad F)) - 2c_p Si (Co \quad Ch - 1)/(Ch \quad F) \} / s,$$

$$D_2(\xi, s) = Th, \quad Ch = \operatorname{ch} S, \quad Co = \operatorname{ch} \xi, \quad F = 1 + Co \quad Si + 2c_p Si^2,$$

$$Th = S^{-1} \operatorname{th} S, \quad Sh = S^{-1} \operatorname{sh} S, \quad S = \sqrt{\xi^2 + s}, \quad Si = \xi^{-1} \operatorname{sh} \xi.$$

Для критичних значень параметрів задачі з умови, що корені рівняння з найбільшою дійсною частиною є на уявній осі, отримано, використовуючи параметричні залежності $\omega \in (0, \infty)$,

$$Q_1 = -\frac{\operatorname{Im} D_2(\xi, i\omega)}{\operatorname{Im} D_1(\xi, i\omega)}, \quad \tilde{R}_0 = \operatorname{Re} D_1(\xi, i\omega) \frac{\operatorname{Im} D_2(\xi, i\omega)}{\operatorname{Im} D_2(\xi, i\omega)} - \operatorname{Re} D_2(\xi, i\omega), \quad (15)$$

а з умови, що корінь є нульовим, одержимо співвідношення

$$\frac{Q_1}{1 + \tilde{R}_0} = \frac{2(Si - Co)F}{Si \quad F - Si - Co} \left(\frac{1}{1 + \tilde{R}_0} \right) + \frac{2Co \quad F}{Si \quad F - Si - Co}. \quad (16)$$

Залежність критичного значення $Q_1/(1 + \tilde{R}_0)$ від параметра $1/(1 + \tilde{R}_0)$ показана на рис. 2 для різних значень безрозмірних параметрів ξ і c_p . Суцільні прямі відповідають безрозмірній жорсткості $c_p = 0,1$, штрихові прямі – $c_p = 1$, пунктирно штрихові – $c_p = 5$. Прямий 1 відповідає випадковому $\xi = 0,1$, прямі 2 – $\xi = 1$, прямі 3 – $\xi = 5$.

Отже, числові результати засвідчили, що (а) критичні значення визначаються тільки умовою (16), (б) для значень параметрів моделі, яким відповідають точки наведених на рис. 2 кривих, відбувається фрикційна термопружна нестійкість. Збільшення параметра ξ (зменшення довжини збурення $\lambda = 2\pi/\xi$) для малої жорсткості пружин призводить до зменшення критичного значення параметра $Q_1/(1 + \tilde{R}_0)$ (наприклад до зменшення швидкості ковзання V). Для великої жорсткості пружин картина змінюється.

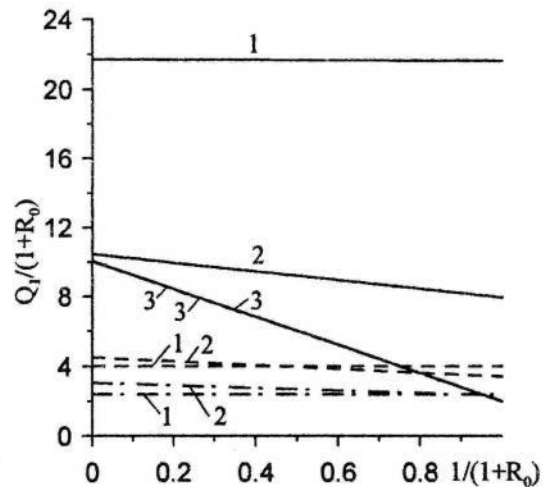


Рис. 2

1. Александров В.М., Аннакулова Г.К. Контактная задача термоупругости с учетом износа и тепловыделения от трения // Трение и износ. – 1990. – Т. 11. – № 1. – С. 24–28.

2. Пыр'єв Ю.А. Динамическая модель термоупругого контакта в условиях фрикционного нагрева и ограниченности теплового расширения // Трение и износ. – 1994. – Т. 15. – № 6. – С. 941–948.
3. Пыр'єв Ю.А., Грилицкий Д.В., Мокрик Р.И. Нестационарное температурное поле и термоупругое состояние двухслойного полого цилиндра при фрикционном контакте // Прикладная механика. – 1995. – Т. 31. – №1. – С. 44–50.
4. Пыр'єв Ю. А., Грилицкий Д. В. Нестационарная задача фрикционного контакта для цилиндра с учетом тепловыделения и износа // Прикл. матем. и техн. физика. – 1996. – Т. 37. – № 6. – С. 99–104.
5. Пыр'єв Ю.А., Мандзик Ю.И. Анализ устойчивости термоупругого контакта в трибосистеме типа радиальных уплотнений цилиндра // Трение и износ. – 1996. – Т. 17. – № 5. – С. 621–628.
6. Пир'єв Ю.О. Деякі проблеми термопружної нестійкості в рухомих трибосистемах // Машинознавство. – 1999. – № 9 (27). – С. 15–19.
7. Barber J.R. Thermoelasticity and contact // J. Thermal Stresses. – 1999. – Vol. 22. – P. 513–525.

FRictional THERMOELASTIC INSTABILITY IN CONTACT PROBLEM

Yurij Pyryev

*Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine*

A friction pair model consisted of a moving body and a seal pressed by springs is analysed. Interaction of non-stationary heat generation with thermoelastic instability, when one of the contacting bodies is moving, is studied in more detail.

Key words: contact problem, friction, thermoelastic instability.

Стаття надійшла до редколегії 25.08.2005
Прийнята до друку 22.11.2006

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

1. Стаття повинна містити результати нових досліджень автора з повним їхнім доведенням. Не доцільно робити великі огляди вже опублікованих результатів. Робити посилання на неопубліковані праці не можна.

2. Текст статті набирають на комп'ютері українською мовою. До редакційної колегії потрібно подавати:

два примірники статті з підписом автора (співавторів) на останній сторінці;
резюме та ключові слова українською й англійською мовами, ім'я, прізвище автора та назву статті англійською мовою (резюме повинно передавати зміст основних результатів статті, а не лише повторювати її назву);

електронний варіант статті та резюме на дискеті 3,5" (редколегія повертає авторів дискету; тексти можна надіслати за адресою *diffegfranko.lviv.ua*);

довідка про автора (співавторів), у якій треба зазначити ім'я, по батькові та прізвище автора, місце роботи, посаду, домашню адресу, телефон та електронну адресу.

Оптимальний обсяг статті до 12 сторінок. Розмір шрифтів 10pt, висота сторінки – \vsize 19.0 true cm, ширина – \hsize 13.5 true cm. На першій сторінці потрібно зазначити номер УДК.

3. Вимоги до набору:

текст статті створювати у версії LaTeX; кодування кирилических шрифтів „Кирилиця (Windows)“ (кодова сторінка 1251);

номери формул ставити з правого боку; нумерувати лише формули, на які є посилання;

у посиланнях на теорему з монографії зазначити сторінку, на якій вона описана.

4. Рисунки до статті подавати у графічному форматі BMP чи PCX. Назва рисунка чи його номер не входять у зображення, їх потрібно створювати засобами TeX'у. Вибираючи розмір графічного зображення, належить врахувати, що воно буде надруковане на принтері з роздільною здатністю 600 dpi.

5. Літературу подавати загальним списком у порядку посилань на джерела в тексті статті.

Зразки бібліографічного опису книги, статті, препринту, дисертації, депонованого рукопису, тез доповідей конференцій (з'їздів та ін.) у працях:

1. *Грабович А.І.* Назва. – К., 1985.

2. *Кравчук О.М.* Назва// Мат. сб.–1985.–Т. 2. – В2.– С.4–20.

3. *Михайленко Г.Д.* Назва.– М., 1993.– 9 с. (Препринт/НАН України. ІППММ; N80.1).

4. *Коваленко О. В.* Назва: Автореф. дис... канд. фіз.-мат. наук. – К., 1977.

5. *Сенів С.М.* Назва.– К., 1992.– 17 с. – Деп. в ДНТБ України, В2020-1995.

6. *Муравський В.К.* Назва // Нелінійні диференціальні рівняння: Тези доп. Київ, 27 серпня – 2 вересня 1994 р. – К., 1994.– С. 540–551.

Збірник наукових праць

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 65

Видається з 1965 р.

Підп. до друку 22.11.2006. Формат 70×100/16. Папір друк.
Умовн. друк. арк. 19,9. Обл.-вид. арк. 22,6. Тираж 200 прим.
Зам. 29 Друк на різогр.

Видавничий центр Львівського національного університету
імені Івана Франка. 79000 Львів, вул. Дорошенка, 41.

