ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

ВИПУСК 66

Львів
Львівський національний університет імені Івана Франка
2006

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 66

Видається з 1965 року

Львівський національний університет
імені Івана Франка
2006

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. – 2006. – Випуск 66.– 262с.

Visnyk of the Lviv University. Series Mechanics and Mathematics. – 2006. – Vol. 66.– 262p.

Вісник містить статті з теорії крайових задач для диференціальних рівнянь, алгебри, топології, теорії функцій комплексного змінного, функціонального аналізу, теорії ймовірності та статистики, проблем математичного моделювання фізико-механічних процесів і механіки.

Для наукових працівників, аспірантів і студентів старших курсів.

The issue contains articles on theory of boundary value problems for differential equations, algebra, topology, complex analysis, functional analysis, probability theory and statistics, problems of mathematical modelling of physical and mechanical processes and mechanics.

For scientists, post graduates and students.

Адреса редакційної колегії:
Львівський національний університет
імені Івана Франка,
механіко-математичний факультет,
вул. Університетська, 1 79602 Львів
Україна тел. (0322) 74-11-07

Editorial address:
Ivan Franko National University
of Lviv
Mechanical and Mathematical department
Universytets'ka st. 1 UA-79602 Lviv,
Ukraine tel. +(38) (0322) 74-11-07

E-mail: diffeq@franko.lviv.ua

Редактор *Н. Плиса*

Друкується за ухвалою Вченої Ради
Львівського національного університету імені Івана Франка

ЗМІСТ

Артемович Орест, Ліщинський Іван. Про кільця скручених поліномів і кільця скручених формальних степеневих рядів 7

Бокало Микола, Кушнір Олена. Варіаційні нелінійні еліптичні нерівності вищих порядків зі змінними показниками нелінійності 20

Бугрій Микола. Про одну осьосиметричну динамічну задачу оптимізації термопружного стану товстостінного циліндра 35

Гринців Надія. Обернена задача для параболічного рівняння з виродженням в області з вільною межею 45

Жерновий Юрій. Дослідження стаціонарного процесу масового обслуговування для одноканальних систем з неоднорідними замовленнями 60

Зеліско Михайло, Шеремета Мирослав. Про асимптотичне поводження логарифмів максимуму модуля і максимального члена абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле 70

Ковтун Світлана. Узагальнення моделі Блека-Шоулса 75

Кшановський Іван. Одна екстремальна задача для мероморфних у проколотій площині функцій 88

Лавренюк Сергій, Оліскевич Маріанна. Мішана задача для ультрапараболічного рівняння з нелокальною дією 99

Лопушанський Андрій. Розв'язок крайової задачі для параболічного рівняння, збуреного псевдодиференціальним доданком 115

Микитюк Любов, Посіко Олена. Про апроксимацію і поводження залишку інтеграла Лапласа-Стільтьєса 128

Нитребич Зіновій. Про граничні переходи у задачах з локальними багатоточковими за часом умовами для рівнянь із частинними похідними 137

Пукач Петро. Вагові класи коректності розв'язку мішаної задачі для нелінійного рівняння типу коливань балки в необмеженій області 151

Сагайдак Роман. Визначення невідомих параметрів у старших коефіцієнтах двовимірного параболічного рівняння 166

Салдіна Наталія. Сильно вироджена обернена параболічна задача з загальною поведінкою коефіцієнтів 186

Шеремета Мирослав, Сумик Оксана. Про нижній R-порядок максимального члена цілого ряду Діріхле 203

Шеремета Зоряна, Шеремета Мирослав. Обмеженість l-індексу аналітичних функцій, зображених степеневими рядами 208

Шукель Оксана. Гіперсиметричні степені і асимптотично нульвимірні простори 214

Базилевич Лідія. Точки відкритості відображення проектування опуклих тіл сталої ширини 225

Фрідер Вікторія, Зарічний Михайло. Характеризація функторів G-симетричного степеня в грубій категорії 230
Кожан Роман. Відкрита комутативність функтора неперервних зверху ємностей 236
Лавренюк Сергій, Панат Оксана Мішана задача для слабко нелінійного гіперболічного рівняння в узагальнених просторах Лебега 243

CONTENT

Artemovych Orest, Lishchynskyi Ivan. On skew polynomial rings and skew formal power series rings . . . 7

Bokalo Mykola, Kushnir Olena. Variational nonlinear tlliptic inequalities of higher order with changeable exponents of nonlinearity . . . 20

Bugriy Mykola. On an axially-symmetric dynamic problems of optimization of the thermoelastic state of thick-walled cylinder . . . 35

Hryntsiv Nadiya. An inverse problem for a degenerate parabolic equation in a free boundary domaine . . . 45

Zernovyi Yuriy. Investigation of the statistical-equilibrium queueing process for single-server systems with different service time customers . . . 60

Zelisko Myhajlo, Sheremeta Myroslav. On asymptotic behaviour of logarithms of the maximum modulus and maximal term of Dirichlet series absolutely convergent in half-plane . . . 70

Kovtun Svitlana. Generalization of Black-Scholes model . . . 75

Kshanovskyy Ivan. An extremal problem for meromorphic functions in a punctured plane. . . . 88

Lavrenyuk Serhiy, Oliskevych Marianna. Mixed problem for an ultraparabolic equation with nonlocal source . . . 99

Lopushansky Andriy. The solution of the boundary value problem for parabolic equation with pseudodifferential term . . . 115

Mykytyuk Lyubov, Posiko Olena. On the approximation and behaviour of the remainder of Laplace-Stiltjes integral . . . 128

Nytrebych Zinoviy. The limit passage from the solutions of a multipoint problem for a partial differential equation to the solution of a multipoint problem with smaller count of knots . . . 137

Pukach Petro. The weight correctness classes of solution of mixed problem for nonlinear beam vibrations type equation in unbounded domain . . . 151

Sagaydak Roman. Determination of unknown parameters in major coefficients of two-dimensional parabolic equation . . . 166

Saldina Nataliya. A strongly degenerate inverse parabolic problem with general behaviour of the coefficients of the equation . . . 186

Sheremeta Myroslav, Sumyk Oksana. On the lower R-order of the maximal term of entire Dirichlet series . . . 203

Sheremeta Zoryna, Sheremeta Myroslav. Boundedness of l-index of analytic functions represented by power series . . . 208

Shukel Oksana. Hypersymmetric powers and asymptotically zero-dimensional spaces . . . 214

Bazylevych Lidiya. Openness points of the projection convex bodies of constant width . . . 225
Frider Victoriya, Zarichnyi Mykhajlo. Characterization of G-symmetric power functors in the coarse category . . . 230
Kozhan Roman. Open-multicommutativity of the functor of upper-continuous capacities . . . 236
Lavrenyuk Serhiy, Panat Oksana The mixed problem for a semilinear hyperbolic equation in generalized Lebesgue spaces . . . 243

УДК 512.544

ПРО КІЛЬЦЯ СКРУЧЕНИХ ПОЛІНОМІВ І КІЛЬЦЯ СКРУЧЕНИХ ФОРМАЛЬНИХ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ

Орест АРТЕМОВИЧ, Іван ЛІЩИНСЬКИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

Досліджуються диференціювання кілець поліномів (Лорана), кілець формальних степеневих рядів (Лорана), ліві дуо-кільця многочленів Лорана.

Ключові слова: диференціювання, кільце поліномів (Лорана), кільце формальних степеневих рядів (Лорана), ліве дуо-кільце.

0. Нехай $\sigma : R \to R$ – ендоморфізм кільця R, тобто $\sigma(a+b) = \sigma(a) + \sigma(b)$ і $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$ для будь-яких елементів $a, b \in R$. Як звичайно, відображення $\delta : R \to R$ називається σ-диференціюванням кільця R, якщо $\delta(x+y) = \delta(x)+\delta(y)$ та $\delta(xy) = \delta(x)y^{\sigma} + x\delta(y)$ для всіх $x, y \in R$. Якщо $\sigma = 1$ – тотожне відображення кільця R в себе, то замість терміна „1-диференціювання" будемо вживати коротший термін „диференціювання", а сукупність всіх диференціювань кільця R позначатимемо через $DerR$. Нехай $Z(R) = \{z \in R|\ za = az,\ \forall a \in R\}$ – центр кільця R. Як відомо (див., наприклад, [1, частина IV, §4, 3°], або [2, частина II, §7]), якщо $c \in Z(R)$, а $d_1, d_2 \in DerR$, то $cd_1, d_1 \pm d_2, d_1d_2 - d_2d_1 \in DerR$, тобто $DerR$ – $Z(R)$-алгебра Лі і лівий $Z(R)$-модуль.

Мета нашої праці – дослідити диференціювання кілець поліномів (Лорана) і кілець формальних степеневих рядів (Лорана) та дуо-кільця поліномів Лорана.

Надалі, якщо R – кільце, то $EndR$ – кільце його ендоморфізмів, $AutR$ – група його автоморфізмів, $Z_k = \{r \in R|ra^{\sigma^k} = ar$ для кожного $a \in R\}$ і $a^{\sigma} = \sigma(a)$ для $\sigma \in EndR$, $\circ$ – композиція (суперпозиція) відображень, $\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\bigcup\{0\}$, $\prod_{i\in S} M_i$ – прямий добуток $M_i (i \in S)$ і, зокрема, якщо $M_i \cong M$ для всіх $i \in S$, то цей прямий добуток позначатимемо через M^S. Нагадаємо також, якщо I – зліченна множина, то родина диференціювань $\delta = \{\delta_i | i \in I\}$ кільця R називається локально скінченною, якщо для кожного елемента $a \in R$ маємо $\delta_i(a) = 0$

майже для всіх індексів $i \in I$. Через $(DerR)^\infty$ позначимо сукупність всіх локально скінченних родин диференціювань кільця R. Нехай $\delta, \gamma \in (DerR)^\infty$, де $\delta = \{\delta_i | i \in I\}\gamma = \{\gamma_i | i \in I\}$. Якщо для $c \in Z(R)$ визначити $c\delta = \{c\delta_i | i \in I\}$, $\delta \pm \gamma = \{\delta_i \pm \gamma_i | i \in I\}$, $[\delta, \gamma] = \{\delta_i \gamma_i - \gamma_i \delta_i | i \in I\}$, то отримаємо, що $(DerR)^\infty$ – $Z(R)$-алгебра Лі і лівий $Z(R)$-модуль.

Всі інші поняття і факти можна знайти в [1], [2], [3], [4].

Надалі R – асоціативне кільце з одиницею.

1. Нас цікавлять диференціювання різних кілець поліномів і кілець формальних степеневих рядів. Наведемо деякі відомі приклади.

1. Кожен елемент $f(x_1, \ldots, x_n)$ кільця поліномів $R[x_1, \ldots, x_n]$ від n комутуючих змінних $x_1, \ldots, x_n$ над кільцем R є скінченною сумою вигляду

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum a_{i_1 \ldots i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n},$$

де $i_j \in \mathbb{N}_0,\ a_{i_1 \ldots i_n} \in R\ (j = 1, \ldots, n)$. Нехай $d \in DerR$. Тоді правило

$$d(f(x_1, \ldots, x_n)) = \sum d(a_{i_1 \ldots i_n}) x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$$

визначає диференціювання кільця поліномів $R[x_1, \ldots, x_n]$.

2. У кільці $R[x_1, \ldots, x_n]$ інше диференціювання $\frac{\partial}{\partial x_j}$ можна визначити за правилом

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum i_j a_{i_1 \ldots i_n} x_1^{i_1} \ldots x_{j-1}^{i_{j-1}} x_j^{i_j - 1} x_{j+1}^{i_{j+1}} \ldots x_n^{i_n}.$$

Це диференціювання $\frac{\partial}{\partial x_j}$ кільця $R[x_1, \ldots, x_n]$ називається частковим диференціюванням стосовно x_j. Серед його властивостей зазначимо, що $\frac{\partial x_s}{\partial x_j} = \delta_{sj}$ – функція Кронекера-Шекспіра (тобто $\delta_{sj} = \begin{cases} 0, \text{ якщо } s \neq j \\ 1, \text{ якщо } s = j \end{cases}$) та $\frac{\partial a}{\partial x_j} = 0$ для будь-якого $a \in R$ $(i, j = 1 \ldots n)$.

Твердження 1.1. ([1, частина IV, §4, 3°, твердження 9]). *Якщо $D \in DerR[x_1, \ldots, x_n]$, то*

$$D(f(x_1, \ldots, x_n)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} D(x_j)$$

для будь-якого полінома

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum a_{i_1 \ldots i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}.$$

3. У кільці $R[[x_1, \ldots, x_n]]$ формальних степеневих рядів від n комутуючих змінних $x_1, \ldots, x_n$, яке складається з нескінченних сум вигляду

$$u = \sum_{(\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{N}_0^n} a_{\nu_1 \ldots \nu_n} x_1^{\nu_1} \ldots x_n^{\nu_n},$$

де підсумовування ведеться за всіма n-ками $(\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{N}_0^n$, правило

$$D(u) = \sum_{(\nu_1,\ldots,\nu_n)\in\mathbb{N}_0^n} d(a_{\nu_1\ldots\nu_n}) x_1^{\nu_1} \ldots x_n^{\nu_n}$$

визначає диференціювання D цього кільця для будь-якого $d \in DerR$.

4. Кожне часткове диференціювання $\frac{\partial}{\partial x_j}$ кільця поліномів $R[x_1, \ldots, x_n]$ продовжується до часткового диференціювання кільця формальних степеневих рядів $R[[x_1, \ldots, x_n]]$ (яке позначатимемо тим самим символом $\frac{\partial}{\partial x_j}$) і, крім того,

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \sum_{(\nu_1,\ldots,\nu_n)\in\mathbb{N}_0^n} \nu_j a_{\nu_1\ldots\nu_n} x_1^{\nu_1} \ldots x_{j-1}^{\nu_{j-1}} x_j^{\nu_j - 1} x_{j+1}^{\nu_{j+1}} \ldots x_n^{\nu_n}.$$

Твердження 1.2. ([1, частина IV, §5, 8°, твердження 8]). *Якщо D – диференціювання кільця $R[[x_1, \ldots, x_n]]$, то*

$$D(u) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} D(x_j)$$

для будь-якого формального степеневого ряду

$$u = \sum_{(\nu_1,\ldots,\nu_n)\in\mathbb{N}_0^n} a_{\nu_1\ldots\nu_n} x_1^{\nu_1} \ldots x_n^{\nu_n}.$$

5. У будь-якому кільці R правило $\partial_a(x) = ax^\sigma - xa$ визначає σ-диференціювання кільця R, де $a \in R, \sigma \in EndR$, яке називається внутрішнім σ-диференціювання кільця R, породженим елементом a. Внутрішнє 1-диференціювання коротко називається внутрішнім диференціюванням. Диференціювання кільця R, яке не є внутрішнім, прийнято називати зовнішнім. Крім того, надалі $m(\partial) = a$ означає, що ∂ є внутрішнім диференціюванням, породженим елементом a (для ∂ елемент a може визначатися неоднозначно). Сукупність всіх внутрішніх σ -диференціювань кільця R позначатимемо через $IDer(R, \sigma)$.

Диференціюванням різних кілець присвячено чимало праць. В [5] описано диференціювання алгебр інцидентності. Диференціювання групових алгебр скінченно породжених нільпотентних груп без скруту та групових кілець періодичних груп вивчали відповідно в [6] і [7]. В [8] з'ясовано, що кожне диференціювання групового кільця $\mathbb{Z}G$ скінченної групи G над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$ є внутрішнім. Вивчали також диференціювання квазіматричних кілець [9-10] та деяких інших (див., наприклад, [11-14]). Особлива увага зосереджена на дослідженнях диференціювань кілець поліномів. Це пояснюється різними причинами. Можливо, однією з них є все ще відкрита відома проблема якобіана (детальніше див. [15]), яка також формулюється в термінах локально нільпотентних диференціювань. Серед праць присвячених диференціюванням кілець поліномів виділимо дослідження В.Д.Буркова [16], Д.Пассмана [17], А. Новіцкого [18] та ін.

У першій частині досліджуються диференціювання кільця поліномів $R[x_1, \ldots, x_n]$ і кільця формальних степеневих рядів $R[[x_1, \ldots, x_n]]$. Наступне твердження дещо розширює теорему 1 із [19]. Цей результат анонсовано в [23].

Твердження 1.3. *Нехай $R[x_1, \ldots, x_n]$ – кільце поліномів від n комутуючих змінних $x_1, \ldots, x_n$ над кільцем R. Тоді правильний ізоморфізм лівих $Z(R)$-модулів*

$$DerR[x_1, \ldots, x_n] \cong (DerR)^{\infty} \times Z(R)[x_1, \ldots, x_n]^n.$$

Доведення. 1. Нехай D – яке-небудь диференціювання кільця поліномів $R[x_1, \ldots, x_n]$. Тоді для кожного елемента $r \in R$ його похідна $D(r) \in R[x_1, \ldots, x_n]$. Оскільки $R[x_1, \ldots, x_n]$ – підкільце в кільці формальних степеневих рядів $R[[x_1, \ldots, x_n]]$, то формально $D(r)$ можна записати у вигляді степеневого ряду (в якому майже всі коефіцієнти є нульовими) так:

$$D(r) = \sum_{(i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}_0^n} \delta_{i_1 \ldots i_n}(r) x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n},$$

де $\delta_{i_1 \ldots i_n}(r) \in R$ для кожної n-ки $(i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Легко з'ясувати, що відображення $\delta : R \to R$, де $\delta(r) = \delta_{i_1 \ldots i_n}(r) \quad (r \in R)$, є диференціюванням кільця R і, як наслідок, родина диференціювань

$$\delta = \{\delta_{i_1 \ldots i_n} | (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}_0^n\} \tag{1}$$

кільця R є локально скінченною.

2. Тепер нехай $d_j = D(x_j)$, де $j = 1, \ldots, n$. Тоді

$$d_j = \sum a_{i_1 \ldots i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n} \tag{2}$$

– деякий поліном кільця $R[x_1, \ldots, x_n]$. Позаяк $ax_j = x_j a$ та $D(a)x_j = x_j D(a)$ для кожного $a \in R$, то $aD(x_j) = D(x_j)a$, а звідси

$$\sum a a_{i_1 \ldots i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n} = \sum a_{i_1 \ldots i_n} a x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}.$$

Оскільки a довільний елемент із R, то $a_{i_1 \ldots i_n} \in Z(R)$ для всіх коефіцієнтів полінома d_j. Це означає, що $d_j \in Z(R)[x_1, \ldots, x_n]$.

Підсумовуючи 1 та 2, легко зрозуміти, що відображення

$$\varphi : DerR[x_1, \ldots, x_n] \to (DerR)^{\infty} \times Z(R)[x_1, \ldots, x_n]^n,$$

де $\varphi(D) = (\delta, d_1, \ldots, d_n)$, δ – локально скінченна родина (1) диференціювань кільця R, а d_j – поліном (2), є ізоморфізмом лівих $Z(R)$-модулів. Твердження доведено.

Твердження 1.4. *Нехай $R[[x_1, \ldots, x_n]]$ – кільце формальних степеневих рядів від n комутуючих змінних $x_1, \ldots, x_n$ над кільцем R. Тоді справджується ізоморфізм лівих $Z(R)$-модулів*

$$DerR[[x_1, \ldots, x_n]] \cong (DerR)^{\infty} \times Z(R)[[x_1, \ldots, x_n]]^n.$$

Доведення аналогічне як і для твердження 1.3. Тільки родина δ (див.(1)) не обов'язково буде локально скінченною. Замість полінома d_j (див.(2)) матимемо формальний ряд

$$d_j = \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in\mathbb{N}_0^n} a_{i_1\dots i_n} x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n}.$$

Нагадаємо [20], якщо $DerA = \{0\}$, то кільце A називається диференційно тривіальним.

Наслідок 1.5. *Якщо A – диференційно тривіальне кільце, то*

$$DerA[x_1,\dots,x_n] \cong A[x_1,\dots,x_n]^n$$

та

$$DerA[[x_1,\dots,x_n]] \cong A[[x_1,\dots,x_n]]^n.$$

2. Нехай $\sigma \in EndR$, $\delta \in DerR$. Диференціювання кільця скручених поліномів ендоморфного типу $R[x,\sigma]$ і кільця скручених поліномів диференційного типу $R[x,\delta]$ вивчав В.Д.Бурков[15]. Ми розглянемо диференціювання кільця скручених формальних степеневих рядів ендоморфного типу

$$R[[x,\sigma]] = \left\{\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i |\ a_i \in R,\ i \in \mathbb{N}_0\right\}\ (\sigma \in EndR),$$

в якому множення індукується співвідношенням $xa = a^\sigma x$ для $a \in R$; та диференціювання кільця скручених формальних степеневих рядів диференційного типу

$$R[[x,\delta]] = \left\{\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i |\ a_i \in R,\ i \in \mathbb{N}_0\right\}\ (\delta \in DerR),$$

в якому множення індукується співвідношенням $xa = ax + \delta(a)$ для $a \in R$. Крім того, розглянемо диференціювання кільця поліномів Лорана

$$R[x,x^{-1},\sigma] = \left\{\sum_{i=-n}^{n} a_i x^i |\ a_i \in R,\ n \in \mathbb{N}_0,\ \text{де } i = -n,\dots,-1,0,1,\dots,n\right\}$$

і кільця формальних степеневих рядів Лорана

$$R[[x,x^{-1},\sigma]] = \left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i x^i |\ a_i \in R,\ i \in \mathbb{Z}\right\}\ (\sigma \in AutR),$$

в яких множення визначається співвідношенням $xa = a^\sigma x$ для всіх $a \in R$.

Наступний результат анонсовано в [21].

Твердження 2.1. *Нехай R – кільце, $\sigma \in AutR$. Кожному диференціюванню D кільця скручених формальних степеневих рядів $R[[x,\sigma]]$ взаємно однозначно відповідає пара (δ,d), родина $\delta = \{\delta_i | i \in \mathbb{N}_0\}$ і ряд $d = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in R[[x,\sigma]]$, які задовольняють умови:*

а) δ_i *–* σ^i*-диференціювання кільця* R $(i \in \mathbb{N}_0)$*;*

б) $d_0 a = a^\sigma d_0$*;*

в) $\delta_{k-1} - \sigma \circ \delta_{k-1} \circ \sigma^{-1}$ *– внутрішнє* σ^{k-1}*-диференціювання кільця* $R (k \in \mathbb{N})$*;*

г) $d_k - m(\delta_{k-1} - \sigma \circ \delta_{k-1} \circ \sigma^{-1}) \in Z_{k-1}$ $(k \in \mathbb{N})$.

Доведення. Нехай $D \in DerR[[x,\sigma]]$, де $\sigma \in AutR$. Тоді, як і в доведенні твердження 1.3,

$$D(r) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i(r) x^i \qquad (r \in R),$$

де $\delta = \{\delta_i | i \in \mathbb{N}_0\}$ – родина σ^k-диференціювань кільця R.

Нехай $d = D(x) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i x^i$. Продиференціювавши рівність $xa = a^\sigma x$, де $a \in R$, отримуємо

$$D(x)a + xD(a) = D(xa) = D(a^\sigma x) = D(a^\sigma)x + a^\sigma D(x),$$

звідки

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} d_i x^i\right) a + x \left(\sum_{i=0}^{\infty} \delta_i(a) x^i\right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \delta_i(a^\sigma) x^i\right) x + a^\sigma \left(\sum_{i=0}^{\infty} d_i x^i\right).$$

По-іншому це можна записати так:

$$\sum_{i=0}^{\infty} d_i a^{\sigma^i} x^i + \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i(a)^\sigma x^{i+1} = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i(a^\sigma) x^{i+1} + \sum_{i=0}^{\infty} a^\sigma d_i x^i$$

або

$$\begin{gathered} d_0 a = a^\sigma d_0, \\ d_1 a^\sigma + \delta_0(a)^\sigma = \delta_0(a^\sigma) + a^\sigma d_1, \\ d_2 a^{\sigma^2} + \delta_1(a)^\sigma = \delta_1(a^\sigma) + a^\sigma d_2, \\ \dots \\ d_n a^{\sigma^n} + \delta_{n-1}(a)^\sigma = \delta_{n-1}(a^\sigma) + a^\sigma d_n, \\ \dots \end{gathered}$$

Позначимо a^σ через c. Тоді для кожного $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$d_k c^{\sigma^{k-1}} + \left(\delta_{k-1}\left(c^{\sigma^{-1}}\right)\right)^\sigma = c d_k + \delta_{k-1}(c)$$

або

$$d_k c^{\sigma^{k-1}} - c d_k = \delta_{k-1}(c) - \delta_{k-1}\left(c^{\sigma^{-1}}\right)^\sigma,$$

тобто $\delta_{k-1} - \sigma \circ \delta_{k-1} \circ \sigma^{-1}$ – внутрішнє σ^{k-1}-диференціювання кільця R. Нехай $x = m(\delta_{k-1} - \sigma \circ \delta_{k-1} \circ \sigma^{-1})$. Якщо $(\delta_{k-1} - \sigma \circ \delta_{k-1} \circ \sigma^{-1})(c) = xc^{\sigma^{k-1}} - cx$, то отримуємо, що $(d_k - x)c^{\sigma^{k-1}} = c(d_k - x)$. Твердження доведено.

Твердження 2.2. *Нехай $R[x, x^{-1}, \sigma]$ – кільце поліномів Лорана від змінної x, $\sigma \in AutR$ і $xa = a^\sigma x$ для будь-якого $a \in R$. Кожному диференціюванню $D \in Der\ R[x, x^{-1}, \sigma]$ взаємно-однозначно відповідає пара (Σ, d), де родина $\Sigma = \{\delta_i |\ i \in \mathbb{Z}\}$ і поліном $d \in R[x, x^{-1}, \sigma]$ мають властивості:*

а) δ_i – σ^i-диференціювання кільця R;

б) Σ – локально скінченна родина диференціювань;

в) $\delta_i \circ \sigma = \sigma \circ \delta_i$ майже для всіх $i \in \mathbb{Z}$;

г) $\delta_i - \sigma \circ \delta_i \circ \sigma^{-1} \in IDer(R, \sigma^i)$ для всіх $i \in \mathbb{Z}$;

ґ) $d_k - m(\delta_{k-1} - \sigma \circ \delta_{k-1} \circ \sigma^{-1}) \in Z_{k-1}$ для довільного k $(-n \leqslant k \leqslant n)$.

Доведення. Нехай D – яке-небудь диференціювання кільця $R[x, x^{-1}, \sigma]$, $a \in R$. Оскільки $D(a) \in R[x, x^{-1}, \sigma]$, то запишемо $D(a)$ у вигляді формально степеневого ряду

$$D(a) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta_i(a) x^i,$$

де $\delta_i(a) \in R$ та $\delta_i(a) = 0$ для майже всіх індексів $i \in \mathbb{Z}$. Крім того, $D(x) \in R[x, x^{-1}, \sigma]$, а отже,

$$D(x) = d = \sum_{i=-n}^{n} d_i x^i$$

для певних елементів $d_i \in R$ $(i = -n, \ldots, 0, \ldots, n)$.

а) Позаяк $D \in Der\ R[x, x^{-1}, \sigma]$, то

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta_i(a+b) x^i = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta_i(a) x^i + \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta_i(b) x^i$$

та

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta_i(ab) x^i = \left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta_i(a) x^i \right) b + a \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta_i(b) x^i = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta_i(a) b^{\sigma^i} x^i + \sum_{i=-\infty}^{\infty} a\delta_i(b) x^i$$

для будь-яких $a, b \in R$.

б) Також родина Σ локально скінченна, оскільки $D(a)$ є поліномом Лорана, а тому майже всі його коефіцієнти дорівнюють нулеві.

в) Диференціюючи співвідношення $xa = a^\sigma x$, отримуємо $da + xD(a) = a^\sigma d + D(a^\sigma)x$ або

$$\left(\sum_{i=-n}^{n} d_i x^i \right) a + x \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta_i(a) x^i = a^\sigma \sum_{i=-n}^{n} d_i x^i + \left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta_i(a^\sigma) x^i \right) x.$$

Звідси легко випливає, що

$$(\delta_{k-1}(a))^{\sigma} = \delta_{k-1}(a^{\sigma}),\ k \leqslant -n-1 \text{ або } k \geqslant n+1, \tag{3}$$

$$d_k a^{\sigma^k} + (\delta_{k-1}(a))^{\sigma} = a^{\sigma} d_k + \delta_{k-1}(a^{\sigma}),\ -n \leqslant k \leqslant n. \tag{4}$$

Як бачимо, зі співвідношення (3) випливає умова (в).

г) Зробивши у співвідношеннях (3)-(4) заміну $c = a^{\sigma}$, отримаємо

$$(\delta_{k-1} - \sigma \circ \delta_{k-1} \circ \sigma^{-1})(c) = 0, \text{ де } k \leqslant -n-1 \text{ або } k \geqslant n+1,$$

$$(\delta_{k-1} - \sigma \circ \delta_{k-1} \circ \sigma^{-1})(c) = d_k c^{\sigma^{k-1}} - c d_k, \text{ де } -n \leqslant k \leqslant n, \tag{5}$$

а це означає, що $\delta_i - \sigma \circ \delta_i \circ \sigma^{-1} \in IDer(R, \sigma^i)$ для всіх індексів $i \in \mathbb{Z}$.

ґ) Із рівності (5) випливає, що d_k є одним з тих елементів, які породжують внутрішнє диференціювання $\delta_{k-1} - \sigma \circ \delta_{k-1} \circ \sigma^{-1}$ для $-n \leqslant k \leqslant n$. Отож, $d_k - m(\delta_{k-1} - \sigma \circ \delta_{k-1} \circ \sigma^{-1}) \in Z_{k-1}$ для довільного k, $-n \leqslant k \leqslant n$.

Отже, диференціюванню $D \in Der\ R[x, x^{-1}, \sigma]$ відповідає пара (Σ, d), яка задовольняє умови (а)-(ґ). Легко з'ясувати, що навпаки також правильно. Твердження доведено.

Твердження 2.3. *Нехай $R[[x, x^{-1}, \sigma]]$ – кільце формальних степеневих рядів Лорана від змінної x, $\sigma \in AutR$ і $xa = a^{\sigma}x$ для будь-якого $a \in R$. Кожному диференціюванню $D \in Der\ R[[x, x^{-1}, \sigma]]$ взаємно однозначно відповідає пара (Σ, d), де родина $\Sigma = \{\delta_i |\ i \in \mathbb{Z}\}$ і поліном $d \in R[x, x^{-1}, \sigma]$ мають такі властивості:*

а) δ_i – σ^i-диференціювання кільця R;

б) $\delta_i - \sigma \circ \delta_i \circ \sigma^{-1} \in IDer(R, \sigma^i)$ для всіх $i \in \mathbb{Z}$;

в) $d_k - m(\delta_{k-1} - \sigma \circ \delta_{k-1} \circ \sigma^{-1}) \in Z_{k-1}$ для довільного $k \in \mathbb{Z}$.

Доведення отримуємо тим самим способом, що й для кільця поліномів Лорана $R[x, x^{-1}, \sigma]$.

Твердження 2.4. *Кожному диференціюванню D кільця $R[[x, \delta]]$ скручених формальних степеневих рядів диференційного типу від одної змінної x взаємно однозначно відповідає пара (Δ, d), де $\Delta = \{\delta_i |\ i \in \mathbb{N}_0\}$ і ряд $d = \sum_{i=0}^{\infty} d_i x^i \in R[[x, \delta]]$ мають властивості:*

а) $\delta_i(rt) = \delta_i(r)t + r\delta_i(t) + \sum_{i=1}^{\infty} C_{i+j}^{j} \delta_{i+j}(r)\delta^j(t)$ для будь-яких $r, t \in R$ та $i \in \mathbb{N}_0$;

б) $d_i a + \delta(\delta_i(a)) + \sum_{j=0}^{\infty} C_{i+j}^{j} d_{i+j}\delta^j(a) = ad_i + \delta_i(\delta(a))$ для всіх $i \in \mathbb{N}_0$, $a \in R$.

Доведення. Нехай D – яке-небудь диференціювання кільця $R[[x, \delta]]$, $r, t \in R$. Тоді $D(r) \in R[[x, \delta]]$, тому

$$D(r) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i(r) x^i$$

для певної підмножини $\{\delta_i(r) |\ i \in \mathbb{N}_0\} \subseteq R$.

Нехай $i \in \mathbb{N}_0$. Тоді $\delta_i(r+t) = \delta_i(r) + \delta_i(t)$ та

$$\sum_{i=0}^{\infty} \delta_i(rt)x^i = D(rt) = D(r)t + rD(t) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \delta_i(r)x^i\right) t + r \left(\sum_{i=0}^{\infty} \delta_i(t)x^i\right). \quad (6)$$

Оскільки

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} \delta_i(r)x^i\right) t + r \left(\sum_{i=0}^{\infty} \delta_i(t)x^i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i(r) \sum_{j=0}^{i} C_i^j \delta^j(t)x^{i-j} + \sum_{i=0}^{\infty} r\delta_i(t)x^i,$$

то внаслідок (6) отримуємо

$$\delta_i(rt) = \delta_i(r)t + r\delta_i(t) + \sum_{i=1}^{\infty} C_{i+j}^j \delta_{i+j}(r)\delta^j(t)$$

для всіх $i \in \mathbb{N}_0$.

Нехай $d = D(x) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i x^i \in R[[x, \delta]]$. Продиференціювавши рівність $xa = ax + \delta(a) \quad (a \in R)$, маємо

$$D(x)a + xD(a) = D(xa) = D(ax + \delta(a)) = D(a)x + aD(x) + D(\delta(a)),$$

а звідси

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} d_i x^i\right) a + x \left(\sum_{i=0}^{\infty} \delta_i(a)x^i\right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \delta_i(a)x^i\right) x + a \left(\sum_{i=0}^{\infty} d_i x^i\right) + \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i(\delta(a))x^i,$$

тобто

$$\sum_{i=0}^{\infty} d_i \sum_{j=0}^{i} C_i^j \delta^j(a)x^{i-j} + \sum_{i=0}^{\infty} (\delta_i(a) + \delta(\delta_i(a)))x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i(a)x^{i+1} + \sum_{i=0}^{\infty} (ad_i + \delta_i(\delta(a)))x^i.$$

Прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів змінної x, отримуємо

$$d_i a + \delta(\delta_i(a)) + \sum_{j=0}^{\infty} C_{i+j}^j d_{i+j} \delta^j(a) = ad_i + \delta_i(\delta(a))$$

для всіх $i \in \mathbb{N}_0$. Твердження доведено.

3. У цій частині дослідимо, за яких умов кільце поліномів Лорана буде лівим (правим) дуо-кільцем. Нагадаємо, лівим (правим) дуо-кільцем називається кільце, в якому кожен лівий (правий) ідеал є двобічним.

Дуо-кільця скручених поліномів вивчав Г. Маркс [24], який показав, що кільце скручених поліномів $R[x, \sigma]$, де $\sigma \in AutR$, буде однобічним дуо-кільцем в тому і тільки в тому випадку, коли R – комутативне кільце і $\sigma = id_R$. Цим узагальнено один результат із [25]. Для кільця скручених поліномів Лорана правильний такий результат.

Теорема 3.1. *Нехай σ – автоморфізм кільця R і $A = R[x, x^{-1}, \sigma]$. Тоді A – ліве (відповідно праве) дуо-кільце в тому і тільки в тому випадку, коли R – комутативне кільце і $\sigma = id_R$ – тотожне відображення.*

Доведення. Наведемо доведення тільки для лівих дуо-кілець.

($\Rightarrow$) Нехай A – ліве дуо-кільце, тобто $fA \subseteq Af$ для будь-якого $f \in A$. Припустимо, що $\sigma \neq id_R$. Тоді існує такий елемент $a \in R$, що $\sigma(a) \neq a$. Для полінома $f(x) = 1 + ax + x^2 \in A$ отримуємо

$$(1 + ax + x^2)x = x + ax^2 + x^3 \in A(1 + ax + x^2),$$

тобто знайдеться поліном $\sum_{i=-m}^{m} a_i x^i \in A$, для якого

$$x + ax^2 + x^3 = \left(\sum_{i=-m}^{m} a_i x^i\right)(1 + ax + x^2),$$

або рівносильно

$$x + ax^2 + x^3 = \sum_{i=-m}^{m} a_i x^i + \sum_{i=-m}^{m} a_i \sigma^i(a) x^{i+1} + \sum_{i=-m}^{m} a_i x^{i+2}.$$

Звідси одержуємо систему рівнянь

$$\begin{gathered}
a_{-m} = 0,\\
a_{-m+1} + a_{-m}\sigma^{-m}(a) = 0,\\
a_{-m+2} + a_{-m+1}\sigma^{-m+1}(a) + a_{-m} = 0,\\
a_{-m+3} + a_{-m+2}\sigma^{-m+2}(a) + a_{-m+1} = 0,\\
\dots\\
a_0 + a_{-1}\sigma^{-1}(a) + a_{-2} = 0,\\
a_1 + a_0 a + a_{-1} = 1,\\
a_2 + a_1\sigma(a) + a_0 = a,\\
a_3 + a_2\sigma^2(a) + a_1 = 1,\\
a_4 + a_3\sigma^3(a) + a_2 = 0,\\
\dots\\
a_m + a_{m-1}\sigma^{m-1}(a) + a_{m-2} = 0,\\
a_m\sigma^m(a) + a_{m-1} = 0,\\
a_m = 0.
\end{gathered}$$

З неї випливає, що $a - \sigma(a) = 0$, а це суперечить припущенню. Отже, $\sigma = id_R$.

Нехай $a, b \in R$. Тоді $(x^{-1} + a + x)b \in A(x^{-1} + a + x)$, а це означає, що існує такий поліном $\sum_{i=-m}^{m} c_i x^i \in A$, що

$$bx^{-1} + ab + bx = \left(\sum_{i=-m}^{m} c_i x^i \right) (x^{-1} + a + x).$$

З останньої рівності отримуємо систему

$$\begin{gathered} c_{-m} = 0, \\ c_{-m+1} + c_{-m}\sigma^{-m}(a) = 0, \\ c_{-m+2} + c_{-m+1}\sigma^{-m+1}(a) + c_{-m} = 0, \\ c_{-m+3} + c_{-m+2}\sigma^{-m+2}(a) + c_{-m+1} = 0, \\ \dots \\ c_{-1} + c_{-2}\sigma^{-2}(a) + c_{-3} = 0, \\ c_0 + c_{-1}\sigma^{-1}(a) + c_{-2} = b, \\ c_1 + c_0 a + c_{-1} = ab, \\ c_2 + c_1\sigma(a) + c_0 = b, \\ a_3 + c_2\sigma^2(a) + c_1 = 0, \\ \dots \\ c_m + c_{m-1}\sigma^{m-1}(a) + c_{m-2} = 0, \\ c_m\sigma^m(a) + c_{m-1} = 0, \\ c_m = 0, \end{gathered}$$

з якої

$$c_{-m} = \cdots = c_{-1} = c_1 = \cdots = c_m = 0, \ c_0 = b, \ ba = ab,$$

що й треба було довести.

($\Leftarrow$) очевидно. Теорема доведена.

1. *Бурбаки Н.* Алгебра. Полиномы и поля. Упорядоченные группы.– М., 1965.

2. *Зарисский О., Самюэль П.* Коммутативная алгебра.– М., 1963. Т.1.

3. *McConnell J.C., Robson J.C.* Noncommutative Noetherian rings. Graduate Stud. in Math., 30. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

4. *Джекобсон Н.* Алгебры Ли.– М., 1964.

5. *Baclawski K.* Automorphisms and derivations of incidence algebras// Proc. Amer. Math. Soc.– 1972.– Vol. 36, N 2.– P.351-356.

6. *Smith M.K.* Derivation of group algebras of finitely generated, torsion-free, nilpotent group// Houston J. Math.– 1978.– Vol. 4, N 2.– P.277-288.

7. *Бурков В.Д.* Дифференцирования групповых колец// Рукоп. деп. ВИНИТИ, N 2120-79 Деп.– М., 1979.

8. *Spiegel E.* Derivations of integral group rings// Comm. Algebra.– 1994.– Vol. 22, N 8.– P.2955-2959.

9. *Murase I.* Derivations of quasi-matrix algebras// Scient. Papers Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo.– 1964.– Vol. 14, N 2.– P.157-164.

10. *Бурков В.Д.* Дифференцирования обобщенных квазиматричных колец// Мат. заметки.– 1978.– Том 24, N 1.– С.111-122.

11. *Djokovic D.Z.* Derivations and automorphisms of exterior algebras// Can. J. Math.– 1978.– Vol. 30, N 6.– P.1336-1344.

12. *Sprengelmeier C.* Derivationen and Automorphismen von Algebren, in denen die Gleichung $x^2 = 0$ nur trivial losbar ist// Manuscripta Math.– 1979.– Bd. 28, N 4.– S.431-436.

13. *Costa R.* On the derivations of dametic algebras for poliploidy with multiple alleles// Bol. Soc. Bras. Mat.– 1982.– Vol. 13, N 2.– P.69-81.

14. *Benkart G., Osborn J.M.* The derivation algebra of a real division algebra// Amer. J. Math.– 1984.– Vol. 103, N 6.– P.1135-1160.

15. *Nowicki A.* Polynomial derivations and their rings of constants.– N.Copernikus University, Toruń.– 1994.

16. *Бурков В.Д.* Дифференцирования колец многочленов// Вестник Москов. ун-та. Сер. мех.-мат.– 1981.– N 2.– С.51-52.

17. *Osborn J.M., Passman D.S.* Derivations of skew polynomial rings// J.Algebra.– 1995.– Vol.176.– P.417-448.

18. *Nowicki A.* Derivations of Ore extensions of the polynomial rings in one variable// Commun. Algebra.– 2004.– Vol.32, N 9.– P.3651-3672.

19. *Бурков В.Д.* Дифференцирования колец многочленов// Рук. деп. ВИНИТИ, N 1883-80 Деп.– М., 1980.

20. *Artemovych O.D.* Differentially trivial and rigid rings of finite rank// Period. Math. Hungarica.– 1998.– Vol. 36, N 1.– P.1-16.

21. *Артемович О.Д.* Диференціювання формальних степеневих рядів// В кн.: III Всеукраїнська наукова конференція „Нелінійні проблеми аналізу“. Тези доп.– Івано-Франківськ, 2003.– С.5.

22. *Hamaguchi N., Nakajima A.* Derivations of skew polynomial rings// Publ.Inst. Math. (Beograd).– 2002.– Vol. 72(88).– P.107-112.

23. *Lishchynsky I.I.* Derivations of polynomial rings and formal power series rings// В кн.: IX Белорусская математическая конференция: Тезисы докл., Ч. 2.– Гродно; 2004.– С.17-18.

24. *Marks G.* Duo ring and Ore extensions// J.Algebra.– 2004.– Vol. 280.– P.463-471.

25. *Hirano Y., Hong C.-Y., Kim J.-Y., Park J.K.* On strongly bounded rings and duo rings// Commun. Algebra.– 1995.– Vol.23, N 6.– P.2199-2214.

ON SKEW POLYNOMIAL RINGS AND SKEW FORMAL POWER SERIES RINGS

Orest Artemovych, Ivan Lishchynskyi

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

We study derivations of (Laurent) polynomial rings and (Laurent) formal power series rings. We prove that a Laurent polynomial ring $R[x, x^{-1}, \sigma]$ $(\sigma \in AutR)$ is left duo if and only if R is commutative and σ is trivial.

Key words: derivation, (Laurent) polynomial ring, skew (Laurent) formal power series ring, duo-ring.

Стаття надійшла до редколегії 08.06.2005

Прийнята до друку 02.11.2006

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2006. Вип.66. С.20–34 *Ser.Mech-Math.2006. Vol.66. P.20–34*

УДК 517.95

ВАРІАЦІЙНІ НЕЛІНІЙНІ ЕЛІПТИЧНІ НЕРІВНОСТІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ ЗІ ЗМІННИМИ ПОКАЗНИКАМИ НЕЛІНІЙНОСТІ

Микола БОКАЛО, Олена КУШНІР

Львівський національний унівеситет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

Знайдено класи коректності задач для нелінійних еліптичних нерівностей вищих порядків зі змінними показниками нелінійності, які розглядаються в необмежених областях. Елементи цих класів можуть мати довільну поведінку на нескінченності. Отримано оцінку розв'язків досліджуваних задач.

Ключові слова: варіаційні нелінійні еліптичні нерівності, узагальнені простори Лебега.

Вивчення нелінійних рівнянь і варіаційних нерівностей зі змінними показниками нелінійності в останні роки становить все більший інтерес. Це пов'язано з тим, що такі рівняння та нерівності знаходять своє застосування в багатьох прикладних задачах ([1]—[5]). Зокрема, велике технологічне значення мають електрореологічні речовини ([3]), властивості яких використовують у гідродинаміці та гідростатиці ([1],[4],[6]).

Варіаційні нерівності в обмежених областях досить добре вивчені ([7—12]). Гіперболічні та параболічні нелінійні варіаційні нерівності у необмежених за просторовими змінними областях розглядали багато авторів ([13]—[15]). Еліптичні нелінійні варіаційні нерівності з необмеженими областями їх задання досліджено в [16],[17] і з'ясовано, що для забезпечення єдиності розв'язку відповідної варіаційної нерівності необхідно накласти певні умови на його поведінку на нескінченності, а для існування розв'язку — умови на зростання вихідних даних на нескінченності ([18]). У [19] доведено єдиність розв'язку деякого класу нелінійних еліптичних систем зі змінними показниками нелінійності при довільній поведінці u та f при $|x| \to \infty$, а також визначено неперервну залежність узагальненого розв'язку розглянутої задачі від вихідних даних. Опираючись на [18], подібний результат отримано для певного класу варіаційних нерівностей вищих порядків (область задання — необмежена).

1. Основні позначення. Нехай n, m — які-небудь натуральні числа. Через $\mathbb{Z}_+^n$ позначатимемо множину мультиіндексів розмірності n, тобто множину, елементами якої є $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, де α_i — ціле невід'ємне число, $i = \overline{1,n}$. Приймемо $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ для $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ ($|\alpha|$ — довжина мультиіндексу α).

Нехай $\mathbb{L}$ - підмножина множини $\mathbb{N}$. Кажуть, що на множині $\{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n : |\alpha| \in \mathbb{L}\}$ введено лексикографічний порядок, якщо вважається, що $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ передує $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, де α, β - елементи заданої множини, коли або $|\alpha| < |\beta|$, або $|\alpha| = |\beta|$ і $\alpha_k > \beta_k$, де $k = \min\{j : \alpha_j \neq \beta_j\}$.

Всі функції, які тут розглядаються, дійснозначні. Якщо $v(z)$, $z \in \widetilde{D}$ — якась функція, то під $v|_D$ розумітиметься її звуження на множину $D \subset \widetilde{D}$.

Через $\mathbb{R}^n$ позначатиметься арифметичний простір впорядкованих наборів з n дійсних чисел, тобто лінійний простір, складений з елементів вигляду $x = (x_1, \dots, x_n)$, де $x_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$, з нормою $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$.

Нехай Ω — необмежена область в просторі $\mathbb{R}^n$ з кусково-гладкою межею $\Gamma \overset{\text{def}}{=} \partial\Omega$. Не зменшуючи загальності, припустимо, що $0 \in \Omega$. Для довільного $R > 0$ позначимо через Ω_R зв'язну компоненту множини $\Omega \cap \{x : |x| < R\}$ таку, що $0 \in \Omega_R$.

Приймемо $L_{q,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) = \big\{v(x),\, x \in \Omega : v|_{\Omega_R} \in L_q(\Omega_R) \quad \forall\, R > 0\big\}$, де $q \in [1, \infty]$. На просторі $L_{q,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ вводиться стандартна лінійна структура і сім'я півнорм: $\|\cdot\|_{L_q(\Omega_R)}$, $R > 0$, з якою він стає локально опуклим простором (якщо ототожнити функції, які дорівнюють майже всюди). Отож, збіжність послідовності елементів простору $L_{q,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ означає, що для кожного $R > 0$ послідовність звужень на Ω_R членів заданої послідовності є збіжною в $L_q(\Omega_R)$.

Для кожного $R > 0$ визначимо простір $H^m(\Omega_R)$ як замикання простору $C^m(\overline{\Omega}_R)$ (m раз неперервно диференційовних в Ω_R функцій, які разом з похідними до порядку m включно допускають неперервне продовження на $\overline{\Omega}_R$) за нормою $\|v\|_{H^m(\Omega_R)} \overset{\text{def}}{=} \Big(\int\limits_{\Omega_R} \sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} \big|D^\alpha v(x)\big|^2\, dx\Big)^{1/2}$, де $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$. Замикання простору $C_0^m(\Omega_R)$ (який складається з функцій простору $C^m(\overline{\Omega}_R)$, носії яких лежать в Ω_R) за нормою $H^m(\Omega_R)$ позначимо через $\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega_R)$.

На просторі $C^m(\overline{\Omega})$ введемо (див., наприклад, [8]) топологію лінійного опуклого простору за допомогою системи півнорм $\|\cdot\|_{H^m(\Omega_R)}$, $R > 0$. Замикання простору $C^m(\overline{\Omega})$ за введеною топологією (як підпростору простору $L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$) позначимо через $H^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$. Тут і далі $H^0_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \overset{\text{def}}{=} L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$. Очевидно, що послідовність $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ є збіжною до v в цьому просторі, якщо $\|v_k - v\|_{H^m(\Omega_R)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ для кожного $R > 0$. Зауважимо, що $v\big|_{\Omega_R} \in H^m(\Omega_R)$ для будь-якого $R > 0$, якщо $v \in H^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$.

Нехай $C_c^m(\overline{\Omega})$ – підпростір простору $C^m(\overline{\Omega})$, який складається з функцій, носії яких є компактами в $\overline{\Omega}$, а $C_0^m(\Omega)$ – підпростір простору $C_c^m(\overline{\Omega})$, елементами якого є фінітні функції, тобто функції, носії яких є компактами в Ω. Приймемо $C_c^{m,+}(\overline{\Omega}) \overset{\text{def}}{=} \{v \in C_c^m(\overline{\Omega}) : v \geqslant 0 \text{ на } \Omega\}$. Очевидно, що простір $C_c^m(\overline{\Omega})$ є щільним в

$H^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$. Позначимо через $\overset{\circ}{H}{}^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ замикання простору $C^m_0(\Omega)$ за топологією простору $H^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$. Підпростір простору $\overset{\circ}{H}{}^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, що складається з функцій, носії яких є компактами в $\overline{\Omega}$, позначатимемо через $\overset{\circ}{H}{}^m_c(\overline{\Omega})$. Під простором $H^m_{\Gamma_R}(\Omega_R)$ розумітимемо простір, який складається зі звужень елементів простору $\overset{\circ}{H}{}^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ на Ω_R, $R>0$.

Нехай $p\in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\Omega)$, причому $p(x)\geqslant 1$ для майже всіх $x\in\Omega$. На просторі $C(\overline{\Omega}_R)$, де $R>0$ – довільне число, введемо норму

$$\|v\|_{L_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_R)}\overset{\mathrm{def}}{=}\inf\{\lambda>0:\rho_{p,R}(v/\lambda)\leqslant 1\},\quad \text{де}\quad \rho_{p,R}(v)\overset{\mathrm{def}}{=}\int\limits_{\Omega_R}|v(x)|^{p(x)}\,dx.$$

Поповнення лінійного простору $C(\overline{\Omega}_R)$ за цією нормою позначимо через $L_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_R)$ (див. [20]). Множина $L_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_R)$ є лінійним підпростором простору $L_1(\Omega_R)$ і називається узагальненим простором Лебега. Позначимо через $L_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ замикання простору $C(\overline{\Omega})$ (неперервних на $\overline{\Omega}$ функцій) за топологією, породженою системою півнорм $\|\cdot\|_{L_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_R)}$, $R>0$, і нехай $L_{p(\,\cdot\,)}(\Omega)=\big\{v\in L_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}):\sup_{R>0}\|v\|_{L_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_R)}<\infty\big\}$.

2. Формулювання задачі і основних результатів. Нехай M – підмножина множини $\{0,1,\dots,m\}$ така, що $\{0,m\}\subset M$, а $M_0\overset{\mathrm{def}}{=}M\backslash\{0\}$. Позначимо через N_M – кількість мультиіндексів $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, довжини яких $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n$ є елементами множини M, а через $\mathbb{R}^{N_M}$ – множину векторів $\xi=(\xi_{\overline{0}},\dots,\xi_\alpha,\dots)$, компоненти яких дійсні числа, пронумеровані мультиіндексами розмірності n, які мають довжини з M і впорядковані лексикографічно. Тут і далі $\overline{0}$ – мультиіндекс, складений з нулів. Приймемо $|\xi|=\Big(\sum\limits_{|\alpha|\in M}|\xi_\alpha|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$, $\xi\in\mathbb{R}^{N_M}$.

Приймемо $\mathbb{P}\overset{\mathrm{def}}{=}\big\{p\in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}):\operatorname*{ess\,inf}\limits_{x\in\Omega}p(x)>1\big\}$. Якщо $p\in\mathbb{P}$, то через p^* позначатимемо функцію з $\mathbb{P}$ таку, що $\frac{1}{p(x)}+\frac{1}{p^*(x)}=1$ для м. в. $x\in\Omega$.

Нехай $p\in\mathbb{P}$. Під $\mathbb{A}_p$ розумітимемо множину, елементами якої є впорядковані набори $(a_{\overline{0}},\dots,a_\alpha,\dots)\equiv(a_\alpha)$ з N_M визначених на $\Omega\times\mathbb{R}^{N_M}$ дійснозначних функцій, які пронумеровані мультиіндексами з $\mathbb{Z}^n_+$, що мають довжини з M та впорядковані лексикографічно, і функції з будь-якого такого набору (a_α) задовольняють умови:

1) для кожного α ($|\alpha|\in M$) функція $a_\alpha(x,\xi)$, $(x,\xi)\in\Omega\times\mathbb{R}^{N_M}$, є каратеодорівською, тобто для майже всіх $x\in\Omega$ функція $a_\alpha(x,\cdot\,):\mathbb{R}^{N_M}\to\mathbb{R}$ неперервна і для всіх $\xi\in\mathbb{R}^{N_M}$ функція $a_\alpha(\cdot\,,\xi):\Omega\to\mathbb{R}$ є вимірною за Лебегом;

2) для майже всіх $x\in\Omega$ та будь-яких $\xi\in\mathbb{R}^{N_M}$ виконуються нерівності

$$|a_{\overline{0}}(x,\xi)|\leqslant h_{\overline{0}}(x)\left(|\xi_{\overline{0}}|^{p(x)-1}+|\xi|^{2/p^*(x)}\right)+g_{\overline{0}}(x),$$

$$|a_\alpha(x,\xi)|\leqslant h_\alpha(x)|\xi|+g_\alpha(x),\quad |\alpha|\in M_0,$$

де $h_\alpha\in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$,$|\alpha|\in M$, $g_{\overline{0}}\in L_{p^*(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $g_\alpha\in L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $|\alpha|\in M_0$.

Нехай $\mathbb{F}_p$ – множина, елементами якої є впорядковані набори $(f_{\overline{0}}, \ldots, f_\alpha, \ldots) \equiv (f_\alpha)$ з N_M визначених на Ω дійснозначних функцій, які пронумеровані так само, як елементи множини $\mathbb{A}_p$, і функції з будь-якого такого набору задовольняють умову

3) $f_{\overline{0}} \in L_{p^*(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $f_\alpha \in L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $\quad |\alpha| \in M_0$.

На $\mathbb{F}_p$ вводиться топологія локально опуклого простору за допомогою відповідної системи півнорм так, що $\mathbb{F}_p = L_{p^*(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \times L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \times \cdots \times L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$.

Позначимо

$$\mathbb{U}_p \stackrel{\mathrm{def}}{=} H^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \cap L_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), \qquad \mathring{\mathbb{U}}_p \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbb{U}_p \cap \mathring{H}^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}),$$

і введемо на $\mathbb{U}_p$ систему півнорм $\|\cdot\|_{H^m(\Omega_R)\cap L_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_R)}$, $R > 0$. Очевидно, що послідовність $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ збігається в $\mathbb{U}_p$, якщо для будь-якого $R > 0$ послідовність $\{v_k\big|_{\Omega_R}\}$ збігається в $H^m(\Omega_R) \cap L_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_R)$.

Приймемо $\varphi + \mathring{\mathbb{U}}_p \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\varphi + v : v \in \mathring{\mathbb{U}}_p\}$, де $\varphi \in \mathbb{U}_p$ — яка-небудь функція, і позначимо через $\mathbb{O}_{\varphi,p}$, де $p \in \mathbb{P}$, $\varphi \in \mathbb{U}_p$, множину опуклих замкнених підмножин множини $\varphi + \mathring{\mathbb{U}}_p$.

Нехай $\widetilde{\mathbb{P}} \subset \mathbb{P}$ і для $p \in \widetilde{\mathbb{P}}$ $\widetilde{\mathbb{A}}_p \subset \mathbb{A}_p$, $\widetilde{\mathbb{F}}_p \subset \mathbb{F}_p$, $\widetilde{\mathbb{U}}_p \subset \mathbb{U}_p$ та для $\varphi \in \widetilde{\mathbb{U}}_p$ $\widetilde{\mathbb{O}}_{\varphi,p} \subset \mathbb{O}_{\varphi,p}$. Задача, яку назвемо $\mathbf{VIH}(\widetilde{\mathbb{A}}_p, \widetilde{\mathbb{F}}_p, \widetilde{\mathbb{O}}_{\varphi,p} : p \in \widetilde{\mathbb{P}},\ \varphi \in \widetilde{\mathbb{U}}_p)$ (**V**ariational **I**nequality of **H**igher order) і будемо далі розглядати, є така: для кожних $p \in \widetilde{\mathbb{P}}$, $\varphi \in \widetilde{\mathbb{U}}_p$ і $(a_\alpha) \in \widetilde{\mathbb{A}}_p$, $(f_\alpha) \in \widetilde{\mathbb{F}}_p$, $K \in \widetilde{\mathbb{O}}_{\varphi,p}$ знайти множину $\mathbf{SVIH}((a_\alpha),(f_\alpha),K)$ функцій $u \in K$ (the set of **S**olutions of **V**ariational **I**nequality of **H**igher order), які задовольняють нерівність

$$\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x, \delta_M u) D^\alpha(w(v-u))\,dx \geqslant \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha(x) D^\alpha(w(v-u))\,dx \tag{1}$$

для довільних $w \in C_c^{m,+}(\overline{\Omega})$ і $v \in K$.

Тут і далі через $\delta_M u$ позначатимемо вектор, компонентами якого є похідні $D^\alpha u$ функції u порядків $|\alpha|$ з M, які впорядковуються так само, як компоненти векторів $\xi \in \mathbb{R}^{N_M}$.

Задача $\mathbf{VIH}(\widetilde{\mathbb{A}}_p, \widetilde{\mathbb{F}}_p, \widetilde{\mathbb{O}}_{\varphi,p} : p \in \widetilde{\mathbb{P}},\ \varphi \in \widetilde{\mathbb{U}}_p)$ називається *однозначною (розв'язною, однозначно розв'язною)*, якщо для будь-яких $p \in \widetilde{\mathbb{P}}$, $\varphi \in \widetilde{\mathbb{U}}_p$ і довільних $(a_\alpha) \in \widetilde{\mathbb{A}}_p$, $(f_\alpha) \in \widetilde{\mathbb{F}}_p$, $K \in \widetilde{\mathbb{O}}_{\varphi,p}$ множина $\mathbf{SVIH}((a_\alpha),(f_\alpha),K)$ містить *не більше* одного елемента (*хоча б один* елемент, *один і тільки один* елемент).

Нехай $\widetilde{\mathbb{A}}_p$, $\widetilde{\mathbb{F}}_p$ і елементи множини $\widetilde{\mathbb{O}}_{\varphi,p}$ для кожних $p \in \widetilde{\mathbb{P}}$, $\varphi \in \widetilde{\mathbb{U}}_p$ є топологічними просторами. Задача $\mathbf{VIH}(\widetilde{\mathbb{A}}_p, \widetilde{\mathbb{F}}_p, \widetilde{\mathbb{O}}_{\varphi,p} : p \in \widetilde{\mathbb{P}},\ \varphi \in \widetilde{\mathbb{U}}_p)$ — *коректна*, якщо вона є однозначно розв'язною і для кожних $p \in \widetilde{\mathbb{P}}$, $\varphi \in \widetilde{\mathbb{U}}_p$, довільної множини $K \in \widetilde{\mathbb{O}}_{\varphi,p}$ та будь-яких елементів $(a_\alpha), (f_\alpha)$ і послідовностей елементів $\{(a_{\alpha,k})\}_{k=1}^\infty$, $\{(f_{\alpha,k})\}_{k=1}^\infty$ відповідно з $\widetilde{\mathbb{A}}_p$ та $\widetilde{\mathbb{F}}_p$ таких, що $(a_{\alpha,k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} (a_\alpha)$ в $\widetilde{\mathbb{A}}_p$, $(f_{\alpha,k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} (f_{\alpha,k})$ в $\widetilde{\mathbb{F}}_p$, маємо $u_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u$ в K, де $u_k \in \mathbf{SVIH}((a_{\alpha,k}),(f_{\alpha,k}),K)$, $k \in \mathbb{N}$, $u \in \mathbf{SVIH}((a_\alpha),(f_\alpha),K)$.

Зрозуміло, що множини $\widetilde{\mathbb{P}}$ і $\widetilde{\mathbb{A}}_p$, $\widetilde{\mathbb{F}}_p$, $\widetilde{\mathbb{U}}_p$, $\widetilde{\mathbb{O}}_{\varphi,p}$ $(p \in \widetilde{\mathbb{P}},\ \varphi \in \widetilde{\mathbb{U}}_p)$, за яких задача $\mathbf{VIH}(\widetilde{\mathbb{A}}_p, \widetilde{\mathbb{F}}_p, \widetilde{\mathbb{O}}_{\varphi,p} : p \in \widetilde{\mathbb{P}},\ \varphi \in \widetilde{\mathbb{U}}_p)$ є розв'язною, однозначною чи коректною можуть бути різноманітними. Нас цікавитиме вибір $\mathbb{P}^* \subset \mathbb{P}$ і $\mathbb{A}_p^* \subset \mathbb{A}_p$, $\mathbb{F}_p^* \subset \mathbb{F}_p$, $\mathbb{U}_p^* \subset \mathbb{U}_p$, $\mathbb{O}_{\varphi,p}^* \subset \mathbb{O}_{\varphi,p}$ при $p \in \mathbb{P}^*$, $\varphi \in {\mathbb{U}_p}^*$ таких, щоби множини $\mathbb{F}_p^*$ і $K \in \mathbb{O}_{\varphi,p}^*$ ($p \in \mathbb{P}^*$, $\varphi \in \mathbb{U}_p^*$) складалися із функцій з довільною поведінкою при $|x| \to +\infty$ і задача $\mathbf{VIH}(\mathbb{A}_p^*, \mathbb{F}_p^*, \mathbb{O}_{\varphi,p}^* : p \in \mathbb{P}^*,\ \varphi \in \mathbb{U}_p^*)$ була коректною. Тобто, наша мета — отримати результати, аналогічні до результатів [18] і [19]. Враховуючи це, введемо $\mathbb{P}^*$ і $\mathbb{A}_p^*$, $\mathbb{F}_p^*$, $\mathbb{U}_p^*$, $\mathbb{O}_{\varphi,p}^*$ $(p \in \mathbb{P}^*, \varphi \in \mathbb{U}_p^*)$ так.

Нехай $\mathbb{P}^*$ — множина, яка складається з елементів $p \in \mathbb{P}$ таких, що

$$2 < p_0 \overset{\mathrm{def}}{=} \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} p(x)\,, \qquad p_1 \overset{\mathrm{def}}{=} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} p(x) < \infty.$$

Для кожного $p \in \mathbb{P}^*$ введемо множину $\mathbb{A}_p^*$ наборів функцій $(a_\alpha) \in \mathbb{A}_p$, які задовольняють додатково ще дві умови;

4) існують сталі $B_1 \geqslant 0$ і $B_2 > 0$ такі, що для кожного α, $|\alpha| \in M_0$, майже всіх $x \in \Omega$ і будь-яких ξ і η з $\mathbb{R}^{N_M}$ виконується нерівність

$$|a_\alpha(x,\xi) - a_\alpha(x,\eta)| \leqslant \Big(B_1|\xi_{\overline{0}} - \eta_{\overline{0}}|^2 + B_2 \sum_{|\alpha|\in M_0} |\xi_\alpha - \eta_\alpha|^2\Big)^{1/2}$$

(B_1 та B_2 залежать від (a_α));

5) існують (залежні від (a_α)) сталі $K_1 \geqslant 0$, $K_2 > 0$, $K_3 > 0$ такі, що для майже всіх $x \in \Omega$ та будь-яких ξ і η з $\mathbb{R}^{N_M}$ виконується нерівність

$$\sum_{|\alpha|\in M} (a_\alpha(x,\xi) - a_\alpha(x,\eta))(\xi_\alpha - \eta_\alpha) \geqslant$$

$$\geqslant K_1|\xi_{\overline{0}} - \eta_{\overline{0}}|^2 + K_2 \sum_{|\alpha|\in M_0} |\xi_\alpha - \eta_\alpha|^2 + K_3|\xi_{\overline{0}} - \eta_{\overline{0}}|^{p(x)};$$

якщо виконується одна з двох умов $B_1 > 0$ або $p_1 \geqslant \frac{2n}{n-2\mu}$, де $\mu = \min M_0$, то $K_1 > 0$ (зазначимо, що $\min M_0 \overset{\mathrm{def}}{=} \min\{i \in M_0\}$).

Скажемо, що послідовність $\big\{(a_{\alpha,k})\big\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{A}_p^*$ збіжна до (a_α) в $\mathbb{A}_p^*$, якщо елементи $(a_{\alpha,k})$, $k \in \mathbb{N}$, і елемент (a_α) задовольняють умови **4**) і **5**) з тими самими сталими B_1, B_2, K_1, K_2, K_3 і для кожного $R > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega_R} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^{N_M}} \bigg(\frac{|a_{\overline{0},k}(x,\xi) - a_{\overline{0}}(x,\xi)|}{|\xi_{\overline{0}}|^{p(x)-1} + |\xi|^{2/p^*(x)} + 1} +$$

$$+ \sum_{|\alpha|\in M_0} \frac{|a_{\alpha,k}(x,\xi) - a_\alpha(x,\xi)|}{|\xi| + 1} \bigg) = 0.$$

Теорема 1. *Задача* $\mathbf{VIH}(\mathbb{A}_p^*, \mathbb{F}_p, \mathbb{O}_{\varphi,p} : p \in \mathbb{P}^*,\ \varphi \in \mathbb{U}_p)$ *є однозначною і, якщо* $\mathbf{SVIH}((a_\alpha),\ (f_\alpha), K) \neq \varnothing$ *для деяких* $p \in \mathbb{P}^*$, $\varphi \in \mathbb{U}_p$ *і* $(a_\alpha) \in \mathbb{A}_p^*$, $(f_\alpha) \in \mathbb{F}_p$,

$K \in \mathbb{O}_{\varphi,p}$, *то для* $u \in \mathbf{SVIH}((a_\alpha),(f_\alpha),K)$ *і будь-яких* R_0, R, $0 < R_0 < R$, $R \geqslant 1$, *виконується нерівність*

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}} \Big[K_1|u(x)|^2 + \sum_{|\alpha|\in M_0} |D^\alpha u(x)|^2 + |u(x)|^{p(x)}\Big]\,d\,x \leqslant \left(\frac{R}{R-R_0}\right)^{\varkappa} \Big[C_1\, R^{n-\frac{2\mu q}{q-2}} +$$

$$+C_2 \int\limits_{\Omega_R} \Big\{ \Big| f_{\overline{0}}(x) - a_{\overline{0}}\big(x, \delta_M\varphi(x)\big)\Big|^{p^*(x)} + \sum_{|\alpha|\in M_0} \Big| f_\alpha(x) - a_\alpha\big(x,\delta_M\varphi(x)\big)\Big|^2 \Big\}\,d\,x\Big] +$$

$$+C_3 \int\limits_{\Omega_{R_0}} \Big\{K_1|\varphi(x)|^2 + \sum_{|\alpha|\in M_0} |D^\alpha\varphi(x)|^2 + |\varphi(x)|^{p(x)}\Big\}\,d\,x, \tag{2}$$

де $\mu = \min M_0$; $q = p_1$, *якщо* $K_1 = 0$, *і* $q \in (2;p_0] \cup \{p_1\}$ *при* $K_1 > 0$; $\varkappa > \max\Big\{\frac{2m\,p_0}{p_0-2}, \frac{2m\,q}{q-2}\Big\}$ *— довільне число;* C_1, C_2, C_3 *— деякі додатні сталі, які залежать тільки від* B_1, B_2, K_1, K_2, K_3 *(з умов* **4)** *і* **5)***),* $p_0, p_1, n, m, q, \varkappa$.

Введемо ще деякі позначення. Нехай $\mathbb{U}_p^*$ та $\mathbb{A}_p^{**}$ — підмножини множин $\mathbb{U}_p$ та $\mathbb{A}_p^*$ відповідно такі, що $a_\alpha(\cdot,\delta_M\varphi(\cdot)) \in H^{|\alpha|}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $|\alpha| \in M$, для довільної функції $\varphi \in \mathbb{U}_p^*$ та набору функцій $(a_\alpha) \in \mathbb{A}_p^{**}$.

Для довільних функцій $\varphi \in \mathbb{U}_p^*$ та $p \in \mathbb{P}^*$ через $\mathbb{O}^*_{\varphi,p}$ позначимо підмножину множини $\mathbb{O}_{\varphi,p}$, яка складається з одного елемента $K = \{v \in \ \varphi + \mathring{\mathbb{U}}_p : \ v \geqslant \varphi$ майже всюди на $\Omega\}$.

Позначимо через $\mathbb{F}^*$ підмножину $\mathbb{F}_p$, елементи якої (f_α) такі, що f_α належить $H^{|\alpha|}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, коли $|\alpha| \in M$.

Теорема 2. *Задача* $\mathbf{VIH}(\mathbb{A}_p^{**}, \mathbb{F}^*, \mathbb{O}^*_{\varphi,p} : p \in \mathbb{P}^*,\ \varphi \in \mathbb{U}_p^*)$ *є коректною.*

Зауваження 1. Коли $(a_\alpha) \in \mathbb{A}_p^{**}$, $(f_\alpha) \in \mathbb{F}^*$, $K \in \mathbb{O}^*_{\varphi,p}$, то для $u \in \mathbf{SVIH}((a_\alpha), (f_\alpha), K)$ правильна оцінка (2) з відповідними спрощеннями.

3. Допоміжні твердження. Важливою підставою для доведення теорем 1 і 2 є таке твердження.

Лема 1. *Нехай* $R_* \geqslant 1$, $p \in \mathbb{P}^*$, $\varphi \in \mathbb{U}_p$ *і* $(a_\alpha) \in \mathbb{A}_p^*$, $(f_{\alpha,1}), (f_{\alpha,2}) \in \mathbb{F}_p$, $K \in \mathbb{O}_{\varphi,p}$, $u_1, u_2 \in K$ *такі, що*

$$\int\limits_{\Omega_{R_*}} \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,\delta_M u_l)\ D^\alpha(w(v-u_l))\,d\,x \geqslant \int\limits_{\Omega_{R_*}} \sum_{|\alpha|\in M} f_{\alpha,l}(x)\ D^\alpha(w(v-u_l))\,d\,x \tag{3}$$

для довільних $l \in \{1,2\}$, $v \in K$, $w \in C_c^{m,+}(\overline{\Omega})$, $supp\ w \subset \overline{\Omega}_{R_*}$.

Тоді для будь-яких чисел $R_0 > 0$, $R \geqslant 1$, $R_0 < R \leqslant R_*$ *правильна нерівність*

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}} \Big[K_1|u^{1,2}(x)|^2 + \sum_{|\alpha|\in M_0} |D^\alpha u^{1,2}(x)|^2 + |u^{1,2}(x)|^{p(x)}\Big]\,d\,x \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{R}{R-R_0}\right)^{\varkappa} \Big[C_4 R^{n-\frac{2\mu q}{q-2}} + C_5 \int\limits_{\Omega_R} \Big\{|(f_{\overline{0},1} - f_{\overline{0},2})(x)|^{p^*(x)} +$$

$$+ \sum_{|\alpha|\in M_0} |(f_{\alpha,1} - f_{\alpha,2})(x)|^2\Big\}\, d\,x\Big], \tag{4}$$

де $u^{1,2} \overset{def}{=} u_1 - u_2$*; а* $\varkappa$*,* μ*,* q *— такі самі, як у формулюванні теореми 1;* C_4*,* C_5 *— деякі додатні сталі, які залежать тільки від* B_1, B_2, K_1, K_2, K_3 *(з умов* **4)** *і* **5)**), $p_0, p_1, n, m, q, \varkappa$.

Доведення. Виберемо і зафіксуємо які-небудь числа R_0, R за умови, що $0 < R_0 < R \leqslant R_*$, $R \geqslant 1$. Додавши інтегральні нерівності, отримані з (3) при $l = 1$ і $l = 2$, та прийнявши $v = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$, матимемо

$$\int\limits_{\Omega_{R_*}} \sum_{|\alpha|\in M} \Big(a_\alpha(x, \delta_M u_1) - a_\alpha(x, \delta_M u_2)\Big) D^\alpha (w\, u^{1,2})\, d\,x \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega_{R_*}} \sum_{|\alpha|\in M} \Big(f_{\alpha,1}(x) - f_{\alpha,2}(x)\Big) D^\alpha (w\, u^{1,2})\, d\,x,$$

де $w \in C_c^{m,+}(\overline{\Omega})$, $\operatorname{supp}\, w \subset \overline{\Omega}_{R_*}$.

Приймемо в цій нерівності $w = \zeta^\varkappa$ (див. [18]), де

$$\zeta(x) = \begin{cases} \frac{1}{R}(R^2 - |x|^2), & |x| < R, \\ 0, & |x| \geqslant R, \end{cases}$$

а $\varkappa > m$ — достатньо велике число. У результаті одержимо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_R} \sum_{|\alpha|\in M} (a_\alpha(x, \delta_M u_1) - a_\alpha(x, \delta_M u_2)) D^\alpha (u^{1,2}\, \zeta^\varkappa)\, d\,x \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega_R} \sum_{|\alpha|\in M} (f_{\alpha,1} - f_{\alpha,2}) D^\alpha (u^{1,2}\, \zeta^\varkappa)\, d\,x. \tag{5}$$

Тепер зауважимо таке. Нехай $v \in \overset{\circ}{H}{}^m_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $g_\alpha \in L_{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$ для деякого $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$, $0 < |\alpha| \leqslant m$. Очевидно, що

$$\int\limits_{\Omega} g_\alpha\, D^\alpha(v\, \zeta^\varkappa)\, d\,x = \int\limits_{\Omega} g_\alpha\, (D^\alpha v)\, \zeta^\varkappa\, d\,x + \int\limits_{\Omega} g_\alpha \Big(D^\alpha(v\, \zeta^\varkappa) - (D^\alpha v)\, \zeta^\varkappa\Big)\, d\,x. \tag{6}$$

З леми 3.1 праці [18] випливає, що

$$\int\limits_{\Omega} g_\alpha \Big(D^\alpha(v\, \zeta^\varkappa) - (D^\alpha v)\, \zeta^\varkappa\Big)\, d\,x \leqslant \varepsilon \int\limits_{\Omega} |g_\alpha|^2 \zeta^\varkappa\, d\,x + \varepsilon \int\limits_{\Omega} \Big(\sum_{|\beta|=|\alpha|} |D^\beta v|^2\Big)\, \zeta^\varkappa\; d\,x+$$

$$+\,C_\alpha(\varepsilon)\int\limits_{\Omega}|v|^2\,\zeta^{\varkappa-2|\alpha|}\,d\,x, \tag{7}$$

де $\varepsilon>0$ – довільне число, $C_\alpha(\varepsilon)>0$ – стала, яка від R не залежить.

Отож, з (5) на підставі (6) і (7) отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_R}\sum_{|\alpha|\in M}\Big(a_\alpha(x,\delta_M u_1)-a_\alpha(x,\delta_M u_2)\Big)(D^\alpha u^{1,2})\,\zeta^{\varkappa}\,d\,x\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon\int\limits_{\Omega_R}\sum_{|\alpha|\in M_0}\Big|a_\alpha(x,\delta_M u_1)-a_\alpha(x,\delta_M u_2)\Big|^2\zeta^{\varkappa}\,d\,x+$$

$$+\varepsilon\int\limits_{\Omega_R}\sum_{|\alpha|\in M_0}\Big|f_{\alpha,1}(x)-f_{\alpha,2}(x)\Big|^2\zeta^{\varkappa}\,d\,x+2\varepsilon\int\limits_{\Omega_R}\Big(\sum_{|\alpha|\in M_0}|D^\alpha u^{1,2}|^2\Big)\zeta^{\varkappa}\,d\,x+$$

$$+C_6(\varepsilon)\int\limits_{\Omega_R}|u^{1,2}|^2\Big(\sum_{i\in M_0}\zeta^{\varkappa-2i}\Big)\,d\,x+\int\limits_{\Omega_R}\sum_{|\alpha|\in M}(f_{\alpha,1}-f_{\alpha,2})(D^\alpha u^{1,2})\zeta^{\varkappa}\,d\,x, \tag{8}$$

де $\varepsilon>0$ — довільне число, $C_6(\varepsilon)>0$ – стала, яка від R не залежить.

Міркуючи далі аналогічно як при доведенні леми праці [16, с. 73], завершуємо доведення цього твердження.

Нехай $p\in\mathbb{P}^*$, $\varphi\in\mathbb{U}_p^*$ і $(a_\alpha)\in\mathbb{A}_p^{**}$, $K\in\mathbb{O}_{\varphi,p}^*$, $(f_\alpha)\in\mathbb{F}^*$, k — яке-небудь натуральне число. Під U_k розумітимемо простір $\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega_k)\cap L_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_k)$. Позначимо через U_k^* — спряжений до U_k простір, а через $\langle\cdot,\cdot\rangle_k$, $[\cdot,\cdot]_k$ — скалярні добутки відповідно на $U_k^*\times U_k$ і в $L_2(\Omega_k)$.

Визначимо оператор

$$L_k:U_k\longrightarrow U_k^*$$

за правилом

$$\langle L_k v,w\rangle_k\overset{\mathrm{def}}{=}\int\limits_{\Omega_k}\sum_{|\alpha|\in M}\Big[a_\alpha(x,\delta_M\varphi+\delta_M v)-a_\alpha(x,\delta_M\varphi)\Big]\,D^\alpha w\,d\,x,\quad v,w\in U_k.$$

Лема 2. *Оператор $L_k:U_k\longrightarrow U_k^*$ є обмеженим, коерцитивним, семінеперервним і строго монотонним.*

Доведення леми 2 проводимо подібно до випадку сталого показника нелінійності, використовуючи при цьому нерівності з твердження 1 праці [13].

Для будь-якого дійсного числа t приймемо

$$t^-=\begin{cases}-t, & \text{якщо}\quad t<0,\\ \;\;0, & \text{якщо}\quad t\geqslant 0.\end{cases}$$

Позначимо через $f_{\alpha,k}(\cdot)$ звуження $f_\alpha(\cdot) - a_\alpha(\cdot, \delta_M \varphi(\cdot))$ на Ω_k, $|\alpha| \in M$. Оскільки $(a_\alpha) \in \mathbb{A}_p^{**}$, $(f_\alpha) \in \mathbb{F}^*$, то функція

$$F_k = \sum_{|\alpha| \in M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_{\alpha,k}$$

належить простору $L_2(\Omega_k)$.

Лема 3. *Для кожного $l \in \mathbb{N}$ існує єдина функція $v^{k,l}$ з простору U_k така, що*

$$\langle L_k v^{k,l}, v\rangle_k - l[(v^{k,l})^-, v]_k = [F_k, v]_k \tag{9}$$

для будь-яких $v \in U_k$, причому послідовність $\{v^{k,l}\}_{l=1}^\infty$ є обмеженою в U_k, а послідовності $\{l(v^{k,l})^-\}_{l=1}^\infty$, $\{L_k v^{k,l}\}_{l=1}^\infty$ — обмеженими в $L_2(\Omega_k)$.

Доведення. Нехай $l \in \mathbb{N}$ — яке-небудь число. Розглянемо оператор $\mathcal{D}_{k,l} : U_k \longrightarrow U_k^*$, який діє за правилом

$$\langle \mathcal{D}_{k,l} v, \widetilde{v}\rangle_k \overset{\text{def}}{=} \langle L_k v, \widetilde{v}\rangle_k - l[v^-, \widetilde{v}]_k, \quad v, \widetilde{v} \in U_k.$$

Тоді тотожність (9) можна записати як операторне рівняння

$$\mathcal{D}_{k,l} v^{k,l} = F_k, \qquad v^{k,l} \in U_k. \tag{10}$$

Використовуючи лему 2, легко переконатися, що оператор $\mathcal{D}_{k,l}$ обмежений, семінеперервний, монотонний і коерцитивний. Враховуючи це, а також те, що простір U_k — рефлексивний і сепарабельний, на підставі теореми 2.1 монографії [7,Гл.2,§2], отримаємо існування розв'язку рівняння (10). Його єдиність випливає зі строгої монотонності оператора L_k.

Покажемо, що послідовність $\{v^{k,l}\}_{l=1}^\infty$ — обмежена в U_k. Прийнявши у (9) $v = v^{k,l}$, де $l \in \mathbb{N}$ — яке-небудь число, отримаємо

$$\langle L_k v^{k,l}, v^{k,l}\rangle_k + l\|(v^{k,l})^-\|^2_{L_2(\Omega_k)} = [F_k, v^{k,l}]_k. \tag{11}$$

З умови **5)** і того, що $(a_\alpha) \in \mathbb{A}_p^{**}$, випливає нерівність

$$\langle L_k v^{k,l}, v^{k,l}\rangle_k \geqslant \int_{\Omega_k} [K_1 |v^{k,l}(x)|^2 + K_2 \sum_{|\alpha| \in M_0} |D^\alpha v^{k,l}(x)|^2 + K_3 |v^{k,l}(x)|^{p(x)}]\, dx. \tag{12}$$

Використовуючи нерівності Фрідріхса, Коші-Буняковського і Юнга, одержимо

$$[F_k, v^{k,l}]_k \leqslant \varepsilon \int_{\Omega_k} \sum_{|\alpha| = \mu} |D^\alpha v^{k,l}|^2\, dx + C_7(\varepsilon) \|F_k\|^2_{L_2(\Omega_k)}, \tag{13}$$

де μ — яке-небудь число з M_0, $C_7 > 0$ — стала, яка не залежить від $v^{k,l}$, а $\varepsilon > 0$ — довільна стала.

З (11) — (13), вибравши значення ε досить малим та використавши нерівність Фрідріхса, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_k}\Big[|v^{k,l}(x)|^2+\sum_{|\alpha|\in M_0}|D^\alpha v^{k,l}(x)|^2+|v^{k,l}(x)|^{p(x)}\Big]\,d\,x\leqslant C_8\|F_k\|^2_{L_2(\Omega_k)},\tag{14}$$

де $C_8>0$ — стала, яка від l не залежить.

З (14) випливає обмеженість послідовності $\{v^{k,l}\}_{l=1}^\infty$ в U_k.

Тепер покажемо, що послідовність $\{l(v^{k,l})^-\}_{l=1}^\infty$ обмежена в $L_2(\Omega_k)$. Нехай $l\in\mathbb{N}$ — яке-небудь число. Оскільки $(v^{k,l})^-\in U_k$, то, прийнявши в (9) $v=(v^{k,l})^-$, одержимо

$$\langle L_k v^{k,l},(v^{k,l})^-\rangle_k-l\|(v^{k,l})^-\|^2_{L_2(\Omega_k)}=[F_k,(v^{k,l})^-]_k\,.\tag{15}$$

Враховуючи те, що на підставі оцінки (12) виконується нерівність

$$\langle L_k v^{k,l},(v^{k,l})^-\rangle_k=\int\limits_{\Omega_k}\sum_{|\alpha|\in M}\Big[a_\alpha(x,\delta_M\varphi+\delta_M v^{k,l})-a_\alpha(x,\delta_M\varphi)\Big]\,D^\alpha(v^{k,l})^-\;d\,x=$$

$$=-\int\limits_{\Omega^-_{k,l}}\sum_{|\alpha|\in M}\Big[a_\alpha(x,\delta_M\varphi+\delta_M v^{k,l})-a_\alpha(x,\delta_M\varphi)\Big]\,D^\alpha v^{k,l}\;d\,x\leqslant$$

$$\leqslant-\int\limits_{\Omega_k}\sum_{|\alpha|\in M}\Big[a_\alpha(x,\delta_M\varphi+\delta_M v^{k,l})-a_\alpha(x,\delta_M\varphi)\Big]\,D^\alpha v^{k,l}\;d\,x=$$

$$=-\langle L_k v^{k,l},v^{k,l}\rangle_k\leqslant 0,\tag{16}$$

де $\Omega^-_{k,l}$ — підмножина області Ω_k така, що $(v^{k,l})^-(x)\neq 0$ для майже всіх $x\in\Omega^-_{k,l}$, з (15), використовуючи нерівність Коші-Буняковського, одержимо

$$l\|(v^{k,l})^-\|^2_{L_2(\Omega_k)}=\langle L_k v^{k,l},(v^{k,l})^-\rangle_k-[F_k,(v^{k,l})^-]_k\leqslant\Big|[F_k,(v^{k,l})^-]_k\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\|F_k\|_{L_2(\Omega_k)}\|(v^{k,l})^-\|_{L_2(\Omega_k)}.\tag{17}$$

З (17) випливає обмеженість послідовності $\{l(v^{k,l})^-\}_{l=1}^\infty$ в $[L_2(\Omega_k)]^N$.

З (9), врахувавши (17), отримаємо

$$\langle L_k v^{k,l},v\rangle_k=l[(v^{k,l})^-,v]_k+[F_k,v]_k\leqslant 2\|F_k\|_{L_2(\Omega_k)}\|v\|_{L_2(\Omega_k)},\;\;v\in U_k,l\in\mathbb{N}.\tag{18}$$

Оскільки простір U_k — щільний в $L_2(\Omega_k)$, то з (18) випливає, що $L_k v^{k,l}\in L_2(\Omega_k)$ і $\|L_k v^{k,l}\|_{L_2(\Omega_k)}\leqslant 2\|F_k\|_{L_2(\Omega_k)}$, $l\in\mathbb{N}$, звідки маємо обмеженість послідовності $\{L_k v^{k,l}\}_{l=1}^\infty$ в $L_2(\Omega_k)$. Лему доведено.

4. Доведення основних результатів. *Доведення теореми 1.* Припустимо супротивне. Нехай для деяких $p\in\mathbb{P}^*$, $\varphi\in\mathbb{U}_p$ і $(a_\alpha)\in\mathbb{A}^*_p$, $(f_\alpha)\in\mathbb{F}_p$, $K\in\mathbb{O}_{\varphi,p}$

множина $\mathbf{SVIH}((a_\alpha),(f_\alpha),K)$ складається з більше як одного елемента. Міркуючи аналогічно, як при доведенні теореми з [16, с.79], отримаємо протиріччя з нашим припущенням.

Тепер зауважимо, що правильна нерівність

$$|a-b|^q \geqslant 2^{1-q}|a|^q - |b|^q \tag{19}$$

для будь-яких $a,b \in \mathbb{R}$ і $q \geqslant 1$. Справді, для $q=1$ ця нерівність очевидна. Нехай $q>1$. Використавши нерівність Гельдера, отримаємо $|a|^q = |a-b+b|^q \leqslant \big(|a-b| + |b|\big)^q \leqslant 2^{\,q-1}\big(|a-b|^q + |b|^q\big)$, звідки випливає (19).

Нехай $\mathbf{SVIH}((a_\alpha),(f_\alpha),K) \neq \emptyset$. На підставі леми 1, взявши $u_1(x)=u(x)$, $u_2(x)=\varphi(x)$, $f_{\alpha,1}(x)=f_\alpha(x)$, $f_{\alpha,2}(x)=a_\alpha\big(x,\delta_M\varphi(x)\big)$, $|\alpha|\in M$, $x\in\Omega$, одержимо нерівність, з якої, використавши оцінку (19), отримаємо (2). Теорему доведено.

Доведення теореми 2. Нехай $(a_\alpha)\in\mathbb{A}_p^{**}$, $(f_\alpha)\in\mathbb{F}^*$, $K\in\mathbb{O}_{\varphi,p}^*$ для деяких $p\in\mathbb{P}^*$, $\varphi\in\mathbb{U}_p^*$. Візьмемо довільне натуральне число k і зафіксуємо його. Побудуємо послідовність функцій $\{v^{k,l}\}_{l=1}^\infty$, про яку йдеться в лемі 3. За цією ж лемою для довільного $l\in\mathbb{N}$ маємо такі оцінки:

$$\|v^{k,l}\|_{U_k} \leqslant C_9(k), \quad l\|(v^{k,l})^-\|_{L_2(\Omega_k)} \leqslant C_{10}(k), \quad \|L_k v^{k,l}\|_{L_2(\Omega_k)} \leqslant C_{11}(k), \tag{20}$$

де $C_9(k), C_{10}(k), C_{11}(k) > 0$ — сталі, які від l не залежать.

З (20) випливає існування функцій $v^k\in U_k$, $\psi,\chi\in L_2(\Omega_k)$ та підпослідовностей відповідно послідовностей $\{v^{k,l}\}_{l=1}^\infty$, $\{l(v^{k,l})^-\}_{l=1}^\infty$ (за якими залишимо те саме позначення, що і позначення відповідних послідовностей) таких, що

$$v^{k,l} \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} v^k \ \text{ слабо в } U_k, \qquad \text{сильно в } L_2(\Omega_k), \quad \text{м. в. на } \Omega_k, \tag{21}$$

$$l(v^{k,l})^- \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} \psi \quad \text{слабо в } L_2(\Omega_k),$$

$$(v^{k,l})^- \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{сильно в } L_2(\Omega_k), \qquad \text{м.в. на } \Omega_k, \tag{22}$$

$$L_k v^{k,l} \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} \chi \quad \text{слабо в } \quad L_2(\Omega_k). \tag{23}$$

Взявши до уваги (21) і (23), отримаємо

$$[L_k v^{k,l}, v^{k,l}]_k \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} [\chi, v^k]_k\,. \tag{24}$$

Врахувавши (24), одержимо

$$\langle L_k v^{k,l}, v^{k,l}\rangle_k = [L_k v^{k,l}, v^{k,l}]_k \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} [\chi, v^k]_k = \langle \chi, v^k\rangle_k\,. \tag{25}$$

Доведемо, що

$$\chi = L_k v^k. \tag{26}$$

На підставі монотонності оператора L_k маємо

$$\langle L_k v^{k,l} - L_k v, v^{k,l} - v\rangle_k \geqslant 0 \qquad \forall v \in U_k, \tag{27}$$

тобто

$$\langle L_k v^{k,l}, v^{k,l}\rangle_k - \langle L_k v^{k,l}, v\rangle_k - \langle L_k v, v^{k,l} - v\rangle_k \geqslant 0 \qquad \forall v \in U_k. \tag{28}$$

Враховуючи, що $\langle L_k v^{k,l}, v\rangle_k = [L_k v^{k,l}, v]_k$, оскільки $L_k v^{k,l} \in L_2(\Omega_k)$, то з (28) отримаємо

$$\langle L_k v^{k,l}, v^{k,l}\rangle_k - [L_k v^{k,l}, v]_k - \langle L_k v, v^{k,l} - v\rangle_k \geqslant 0 \qquad \forall v \in U_k,\ \forall l \in \mathbb{N}. \tag{29}$$

Врахувавши співвідношення (21), (23) та (25), перейдемо в (29) до границі при $l \to \infty$. У результаті одержимо

$$\langle \chi, v^k\rangle_k - [\chi, v]_k - \langle L_k v, v^k - v\rangle_k \geqslant 0 \qquad \forall v \in U_k. \tag{30}$$

На підставі того, що $[\chi, v]_k = \langle \chi, v\rangle_k$, здобудемо

$$\langle \chi - L_k v, v^k - v\rangle_k \geqslant 0 \qquad \forall v \in U_k. \tag{31}$$

Взявши в (31) $v = v^k - \lambda w$, $\lambda > 0$, $w \in U_k$, матимемо

$$\lambda\langle \chi - L_k(v^k - \lambda w), w\rangle_k \geqslant 0 \qquad \forall w \in U_k,$$

звідки

$$\langle \chi - L_k(v^k - \lambda w), w\rangle_k \geqslant 0 \qquad \forall w \in U_k. \tag{32}$$

Спрямуємо в (32) λ до 0, врахувавши, що оператор L_k — семінеперервний. У результаті отримаємо $\langle \chi - L_k v^k, w\rangle_k \geqslant 0 \quad \forall w \in U_k$, звідки легко випливає (26).

Оскільки $L_k v^{k,l} \in L_2(\Omega_k)$, $l \in \mathbb{N}$, то (9) можна записати у вигляді

$$[L_k v^{k,l}, \widetilde{v}]_k - l[(v^{k,l})^-, \widetilde{v}]_k = [F_k, \widetilde{v}]_k \tag{33}$$

для будь-яких $\widetilde{v} \in L_2(\Omega_k)$.

Нехай $K_k \overset{\text{def}}{=} \{v \in U_k : v \geqslant 0 \text{ на } \Omega_k\}$. Приймемо в (33) $w(v - v^{k,l})$ замість $\widetilde{v}$, де $w \in C_c^{m,+}(\overline{\Omega})$, $v \in K_k$. У результаті, врахувавши, що $[(v)^- - (v^{k,l})^-, v - v^{k,l}]_k \leqslant 0$, отримаємо

$$[L_k v^{k,l}, w(v - v^{k,l})]_k \geqslant [F_k, w(v - v^{k,l})]_k \tag{34}$$

для будь-яких $v \in K_k$. Перейшовши в (34) до границі при $l \to \infty$, на підставі (21), (23), (24), (26), одержимо нерівність

$$[L_k v^k, w(v - v^k)]_k \geqslant [F_k, w(v - v^k)]_k \tag{35}$$

для будь-яких $v \in K_k$, $w \in C_c^{m,+}(\overline{\Omega})$.

Зауважимо, що на підставі (21) і (22) $v^k \geqslant 0$ м. в. на Ω_k, і довизначимо для кожного $k \in \mathbb{N}$ функцію v^k нулем на $\Omega \backslash \overline{\Omega}_k$, залишивши за цим продовженням позначення v^k. Введемо позначення $u^k \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varphi + v^k$. Очевидно, що $u^k \in K$.

Згідно з нерівністю (35), врахувавши означення L_k і F_k, маємо

$$\int\limits_{\Omega_k} \sum_{|\alpha| \in M} a_\alpha(x, \delta_M u^k) D^\alpha \Big(w(v - u^k) \Big)\, dx \geqslant \int\limits_{\Omega_k} \sum_{|\alpha| \in M} f_\alpha(x) D^\alpha \Big(w(v - u^k) \Big)\, dx \qquad (36)$$

для будь-яких $k > 1$, $v \in K_k$, $w \in C_c^{m,+}(\overline{\Omega})$, $\operatorname{supp} w \subset \overline{\Omega}_{k-1}$.

Тепер зауважимо, що для довільних натуральних чисел R, R_0, k і j таких, що $0 < R_0 < R$, $R \geqslant 1$, $k > R$, $j > R$, з леми 1 та нерівності (36) отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}} \Big(\sum_{|\alpha| \in M_0} |D^\alpha (u^k - u^j)(x)|^2 + |(u^k - u^j)(x)|^{p(x)} \Big)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant C_4 \left(\frac{R}{R - R_0} \right)^{\varkappa} R^{n - \frac{2\mu q}{q-2}}, \qquad (37)$$

де $C_4 > 0$, $\varkappa > 0$, $q > 2$ — сталі, які не залежать від k, j, R_0, R, причому значення q таке, що $n - 2\mu q/(q-2) < 0$ (його можна таким вибрати, враховуючи умови теореми).

Зафіксувавши довільно вибране R_0, перейдемо в (37) до границі при $R \to +\infty$. У результаті отримаємо, що звуження членів послідовності $\{u^k\}_{k=1}^{\infty}$ на Ω_{R_0} утворює фундаментальну послідовність в просторі $H^m(\Omega_{R_0}) \bigcap L_{p(\cdot)}(\Omega_{R_0})$. Позаяк R_0 — довільне, то існує функція $u \in K$ така, що

$$u^k \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} u \quad \text{в} \quad H^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \bigcap L_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\,. \qquad (38)$$

Міркуючи так як при доведенні теореми з [16, с. 78] і використовуючи нерівність (36), доводимо, що u є $\mathbf{SVIH}((a_\alpha), (f_\alpha), K)$.

Залишилось показати, що для множини $K \in \mathbb{O}^*_{\varphi,p}$ та будь-яких елементів (a_α), (f_α) і послідовностей елементів $\{(a_{\alpha,k})\}_{k=1}^{\infty}$, $\{(f_{\alpha,k})\}_{k=1}^{\infty}$ відповідно з $\mathbb{A}_p^{**}$ та $\mathbb{F}^*$ таких, що $(a_{\alpha,k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} (a_\alpha)$ в $\mathbb{A}_p^*$, $(f_{\alpha,k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} (f_\alpha)$ в $\mathbb{F}_p$, маємо $u^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u$ в $\mathbb{U}_p$, де $u \in \mathbf{SVIH}((a_\alpha), (f_\alpha), K)$, $u^k \in \mathbf{SVIH}((a_{\alpha,k}), (f_{\alpha,k}), K)$, $k \in \mathbb{N}$. Це теж робиться аналогічно як при доведенні теореми роботи [16, с. 80]. Теорему доведено.

---

1. *Winslow W. M.* Indyced Fibration of Suspentions // J. Appl. Phys.– 1949.– Vol.20.– P.1137-1140.

2. *Zhikov V. V.* Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory // Math. USSR. – 1987.– Vol.9.– P.33-66.

3. *Hasley T. C.* Electrorheological Fluids // Science. – 1992.– Vol. 258.– P.761-766.

4. *Růžička M.* Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory.– Springer. Berlin, 2000.

5. *Diening L.* Theorical and numerical results for electrorheological fluids// Ph. D. thesis, University of Frieburg. Germany, 2002.

6. *Pfeiffer C., Mavroidis C., Bar-Cohen Y. and Dolgin B.* Electrorheological fluid based force feedback device// Proceedings of the 1999 SPIE Telemanipulator and Telepresence Technologies VI Conference (Boston, MA) – 1999.– Vol.3840.– P.88-99.

7. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.– М., 1972.

8. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.– М., 1978.

9. *Simon L.* On uniqueness, regularity and stability of solutions of strongly nonlinear elliptic variational inequalities // Acta Math. Hungar.– 1990.– Vol.55.– №34.– P.379-392.

10. *Kovalevsky A., Nicolosi F.* Boundness of solutions of degenerate nonlinear elliptic variational inequalities // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.– 1999.– Vol.35. – №8.– P.987-999.

11. *Lin Zh.-H.* Elliptic hemivariational inequalities // Appl. Math. Lett.– 2003.– Vol.16.– №6.–P.871-876.

12. *Carl S., Le V. K. and Motreanu D.* Existence, comparison and compact ness results for quasilinear variational-hemivariational inequalities // Internetional Journal of Mathematics and Marhematical Sciences.– 2005.– Vol.3.– P.401-417.

13. *Бугрій О. М.* Параболічні варіаційні нерівності в узагальнених просторах Лебега // Наукові записки Вінницького держ. пед. ун-ту ім. М. Коцюбинського.– Серія фіз.–мат.– 2002.– Вип. 1.– С.310-321.

14. *Пукач П. Я.* Змішана задача в необмеженій області для слабко нелінійного гіперболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами// Мат. методи та фіз.-мех. поля.– 2004.– Т.47.– № 4.– С.149-154.

15. *Лавренюк С. П., Пукач П. Я.* Варіаційна гіперболічна нерівність у необмежених за просторовими змінними областях// Доп. НАН України.– 2006.– № 2.– С.30-35.

16. *Brezis H., Kinderlehrer D.* The Smoothness of solutions to nonlinear variational inequalities // Indiana Univ. Math. J. – 1974.– Vol.17.– P.831-844.

17. *Mustonen V.* Strongly nonlinear elliptic variational inequalities in unbounded domains // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Mathematica.– 1977.– Vol.3.– P.59-74.

18. *Bernis F.* Elliptic and parabolic semilinear problems without conditions at infinity// Arch. Ration. Mech. and Anal.– 1989.– Vol.106.– №3.– P.217-241.

19. *Бокало М. М., Кушнір О. В.* Про коректність крайових задач для квазілінійних еліптичних систем в необмежених областях // Математичні Студії.– 2005.– Т.24.– №1.– С.69-82.

20. *Kováčik O., Rákosník J.* On spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{1,p(x)}$// Czechosl. Math. J.– 1991.– Vol.41.– №4.– P.592-618.

VARIATIONAL NONLINEAR ELLIPTIC INEQUALITIES OF HIGHER ORDER WITH CHANGEABLE EXPONENTS OF NONLINEARITY

Mykola Bokalo, Olena Kushnir

Ivan Franco National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

The correctness classes to the problems for nonlinear elliptic inequalities of higher order with changeable exponents of nonlinearity given in unbounded domains has been established. The elements of these classes have no conditions on the behaviour at infinity. The estimation of solutions of the investigated problems has also been obtained.

Key words: variational nonlinear elliptic inequalities, general Lebesgue spaces.

Стаття надійшла до редколегії 02.06.2006

Прийнята до друку 02.11.2006

УДК 539.377

ПРО ОДНУ ОСЬОСИМЕТРИЧНУ ДИНАМІЧНУ ЗАДАЧУ ОПТИМІЗАЦІЇ ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ ТОВСТОСТІННОГО ЦИЛІНДРА

Микола БУГРІЙ

Львівський національний унівеситет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

Сформульовано математичне формулювання й описано схему розв'язування однієї динамічної задачі оптимізації термопружного стану товстостінного циліндра при його нестаціонарному силовому навантаженні та нагріві. За критерій оптимізації прийнято функціонал Лагранжа, а функції керування – інтенсивність поверхневого силового навантаження і температура. Функції керування задовольняють додаткові інтегральні умови моментного типу.

Ключові слова: товстостінний циліндр, динамічна задача оптимізації.

Сформульовано математичне формулювання й описано схему розв'язування однієї задачі оптимізації динамічної поведінки термопружного товстостінного циліндра, який знаходиться під дією нормального поверхневого силового навантаження та нестаціонарного нагріву, які за певних умов викликають оптимально низький рівень термопружного стану циліндра з врахуванням інерційності деформаційних форм руху. Задачі оптимізації такого типу в квазістатичному формулюванні розглянуто раніше [1 – 4].

Розглянемо вільний на краях ізотропний пустотілий циліндр сталої товщини $2h$, радіусом серединної поверхні R, довжиною $2z_0$. Віднесемо циліндр до просторової системи координат (z, φ, γ), нормально пов'язаної з його серединною поверхнею (S_0). Це означає, що недеформована поверхня (S_0) віднесена до ліній головних кривин, тобто координатні лінії z і φ збігаються з лініями головних кривин циліндричної поверхні (S_0) (координата z – це відстань точки вздовж твірної від початкового центрального поперечного перерізу $z = 0$; φ – кут між початковою і довільною меридіанною площинами), а координатні лінії γ направлені вздовж нормалей до поверхні

(S_0) (координата γ – це відстань від точки до поверхні (S_0)). Така система координат називається змішаною [5]. Надалі всі співвідношення термопружності, потрібні для математичного формулювання і опису схеми розв'язування задачі оптимізації запишемо в змішаній системі координат (z, φ, γ).

Нехай циліндр перебуває під дією нестаціонарних осьосиметричного температурного поля $t(z, \gamma, \tau)$ і зовнішнього нормального поверхневого силового навантаження

$$f(z,\gamma,\tau) = \begin{cases} f_{3\gamma}^{(+)}(z,\tau), & (\gamma = h,\ \ -z_0 < z < z_0,\ \ 0 < \tau < \tau_0), \\ f_{3\gamma}^{(-)}(z,\tau), & (\gamma = -h,\ \ -z_0 < z < z_0,\ \ 0 < \tau < \tau_0), \end{cases} \tag{1}$$

прикладеного на бічних поверхнях циліндра $\gamma = \pm h$. Тут $\tau \in [0, \tau_0]$ – часова координата.

У цьому випадку базові співвідношення для визначення осьосиметричного термопружного стану циліндра, записані через відмінні від нуля компоненти вектора переміщень $\vec{u}(z, \gamma, \tau)$ та температуру $t(z, \gamma, \tau)$ з врахуванням відповідних системі координат (z, φ, γ) значень коефіцієнтів першої квадратичної форми серединної поверхні (S_0), її головних кривин, а також коефіцієнтів Ляме [5, 6], охоплюватимуть:

співвідношення Коші

$$\begin{gathered} e_{zz}(z,\gamma,\tau) = \frac{\partial u_z}{\partial z},\ e_{\varphi\varphi}(z,\gamma,\tau) = \frac{u_\gamma}{R+\gamma},\ e_{\gamma\gamma}(z,\gamma,\tau) = \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma}, \\ e_{z\gamma}(z,\gamma,\tau) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial \gamma} + \frac{\partial u_\gamma}{\partial z}\right),\ e_{z\varphi}(z,\gamma,\tau) \equiv 0,\ e_{\gamma\varphi}(z,\gamma,\tau) \equiv 0; \end{gathered} \tag{2}$$

закон Гука

$$\begin{gathered} \sigma_{zz}(z,\gamma,\tau) = G\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{2\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} + \frac{u_\gamma}{(R+\gamma)}\right)\right] - \frac{\alpha_t E}{1-2\nu}t, \\ \sigma_{\varphi\varphi}(z,\gamma,\tau) = G\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{u_\gamma}{(R+\gamma)} + \frac{2\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right] - \frac{\alpha_t E}{1-2\nu}t, \\ \sigma_{\gamma\gamma}(z,\gamma,\tau) = G\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} + \frac{2\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_\gamma}{(R+\gamma)}\right)\right] - \frac{\alpha_t E}{1-2\nu}t, \\ \sigma_{\gamma z}(z,\gamma,\tau) = G\left(\frac{\partial u_z}{\partial \gamma} + \frac{\partial u_\gamma}{\partial z}\right),\ \sigma_{\gamma\varphi}(z,\gamma,\tau) \equiv 0,\ \sigma_{z\varphi}(z,\gamma,\tau) \equiv 0; \end{gathered} \tag{3}$$

рівняння руху

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{2(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} + \frac{u_\gamma}{R+\gamma}\right) + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left[\frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{\partial u_z}{\partial \gamma} + \frac{u_z}{R+\gamma}\right) + \right. \\ \left. + \frac{u_z}{(R+\gamma)^2}\right] = \frac{\alpha_t(1+\nu)}{1-\nu}\frac{\partial t}{\partial z} + \frac{\rho(1-2\nu)}{2G(1-\nu)}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial \tau^2} - F_z\right), \\ \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial z^2} + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \gamma} + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} + \frac{u_\gamma}{R+\gamma}\right) = \\ = \frac{2\alpha_t(1+\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial t}{\partial \gamma} + \frac{\rho}{G}\left(\frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial \tau^2} - F_\gamma\right) \end{gathered} \tag{4}$$

та рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial \gamma^2} + \frac{1}{(R+\gamma)}\frac{\partial t}{\partial \gamma} + \frac{Q}{\lambda} = \frac{1}{a_0}\frac{\partial t}{\partial \tau} \tag{5}$$

в області $(\Omega) = \{(z,\gamma,\tau) : -z_0 < z < z_0,\ -h < \gamma < h,\ 0 < \tau < \tau_0\}$, такі механічні

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u_z(\pm z_0,\gamma,\tau)}{\partial z} + \frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial u_\gamma(\pm z_0,\gamma,\tau)}{\partial \gamma} + \frac{u_\gamma(\pm z_0,\gamma,\tau)}{R+\gamma}\right) = \\
= \frac{\alpha_t(1+\nu)}{1-\nu} t(\pm z_0,\gamma,\tau), \\
\frac{\partial u_z(\pm z_0,\gamma,\tau)}{\partial \gamma} + \frac{\partial u_\gamma(\pm z_0,\gamma,\tau)}{\partial z} = 0,\ \ \frac{\partial u_z(z,\pm h,\tau)}{\partial \gamma} + \frac{\partial u_\gamma(z,\pm h,\tau)}{\partial z} = 0, \\
\frac{\partial u_\gamma(z,\pm h,\tau)}{\partial \gamma} + \frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial u_z(z,\pm h,\tau)}{\partial z} + \frac{u_\gamma(z,\pm h,\tau)}{R\pm h}\right) = \\
= \frac{\alpha_t(1+\nu)}{1-\nu} t(z,\pm h,\tau) + \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E(1-\nu)} f_{3\gamma}^{(\mp)}(z,\tau)
\end{gathered} \tag{6}$$

та теплові

$$\left[\frac{\partial t}{\partial \gamma} \pm H(t - t_\gamma^{(\pm)})\right]\Bigg|_{\gamma=\pm h} = 0, \quad \left[\frac{\partial t}{\partial z} \pm H(t - t_z^{(\pm)})\right]\Bigg|_{z=\pm z_0} = 0 \tag{7}$$

граничні умови на межі $\gamma = \pm h$, $z = \pm z_0$ області (Ω), а також початкові умови

$$\begin{gathered}
u_z(z,\gamma,0) = 0,\ \ \frac{\partial u_z(z,\gamma,0)}{\partial \tau} = 0, \\
u_\gamma(z,\gamma,0) = 0,\ \ \frac{\partial u_\gamma(z,\gamma,0)}{\partial \tau} = 0,
\end{gathered} \tag{8}$$

$$t(z,\gamma,0) = t_0(z,\gamma) \tag{9}$$

при $\tau = 0$.

Тут G – модуль зсуву; E – модуль пружності; ν – коефіцієнт Пуассона; α_t – коефіцієнт лінійного теплового розширення; λ – коефіцієнт теплопровідності; a_0 – коефіцієнт температуропровідності; H – відносний коефіцієнт тепловіддачі з поверхні циліндра; $u_z(z,\gamma,\tau)$, $u_\gamma(z,\gamma,\tau)$ – відмінні від нуля компоненти вектора переміщень; $f_{3\gamma}^{(\pm)}(z,\tau)$ – інтенсивність зовнішнього силового навантаження відповідно на поверхнях $\gamma = \pm h$ циліндра; $F_z(z,\gamma,\tau), F_\gamma(z,\gamma,\tau)$ – відмінні від нуля компоненти вектора об'ємних сил, віднесених до одиниці об'єму; $t_\gamma^{(\pm)}(z,\tau)$, $t_z^{(\pm)}(\gamma,\tau)$ – температура зовнішнього середовища на межі області (Ω); $t_0(z,\gamma)$ – початкова температура циліндра; $Q(z,\gamma,\tau)$ – питома густина розподілу внутрішніх джерел тепла в області циліндра; $e_{zz}(z,\gamma,\tau)$, $e_{\varphi\varphi}(z,\gamma,\tau)$, $e_{\gamma\gamma}(z,\gamma,\tau)$, $e_{z\gamma}(z,\gamma,\tau)$ і $\sigma_{zz}(z,\gamma,\tau)$, $\sigma_{\varphi\varphi}(z,\gamma,\tau)$, $\sigma_{\gamma\gamma}(z,\gamma,\tau)$, $\sigma_{z\gamma}(z,\gamma,\tau)$ – відмінні від нуля компоненти тензора деформацій і напружень відповідно.

Наведені співвідношення (2) – (9) допомагають однозначно [6] визначити температурне поле $t(z,\gamma,\tau)$ і відповідний термопружний стан циліндра з врахуванням інерційних ефектів деформаційних форм руху при заданих функціях $f_{3\gamma}^{(\pm)}$, F_z, F_γ, $t_\gamma^{(\pm)}$, $t_z^{(\pm)}$, t_0, Q. Якщо ці функції (або окремі з них) прийняти за функції керування термопружним станом циліндра, то ми приходимо до розгляду відповідних задач оптимізації.

Математичне формулювання задач оптимізації для термопружних (пружних) систем передбачає вибір критерію оптимізації та конкретизацію множини допустимих функцій і функцій керування [5].

За критерій оптимізації приймемо функціонал Лагранжа [7]

$$L[\vec{u},t] = 2\pi \int\limits_0^{\tau_0} \int\limits_{-h}^{h} \int\limits_{-z_0}^{z_0} \left\{ \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial \tau} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial \tau} \right)^2 \right] - W_0(\vec{u},t) \right\} (R+\gamma)\, dz\, d\gamma\, d\tau. \tag{10}$$

Тут

$$W_0(\vec{u},t) = \frac{1}{2E} \Big[\sigma_{zz}^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^2 + \sigma_{\gamma\gamma}^2 - 2\nu(\sigma_{zz}\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\varphi\varphi}\sigma_{\gamma\gamma} + \sigma_{\gamma\gamma}\sigma_{zz}) + \\ + 2(1+\nu)\sigma_{z\gamma}^2 \Big] -$$

питома енергія пружної деформації циліндра, де σ_{is}, $(i, s = z, \varphi, \gamma)$ – відмінні від нуля компоненти симетричного тензора напружень, виражені через переміщення u_z, u_γ і температуру t за допомогою співвідношення (3).

За функції керування в задачі оптимізації приймемо інтенсивність зовнішнього силового поверхневого навантаження $f_{3\gamma}^{(\pm)}(z,\tau)$ та температуру $t(z,\gamma,\tau)$.

Функції керування термопружним станом циліндра підпорядкуємо додатковим обмеженням інтегрального типу

$$\begin{gathered}
\int\limits_0^{\tau_0} \int\limits_{-z_0}^{z_0} f_{3\gamma}^{(+)}(z,\tau) P_m\left(\frac{z}{z_0}\right) \cos\left(\frac{\pi s \tau}{\tau_0}\right) dz\, d\tau = B_{ms}^{(1)}, \\
\int\limits_0^{\tau_0} \int\limits_{-z_0}^{z_0} f_{3\gamma}^{(+)}(z,\tau) P_r\left(\frac{z}{z_0}\right) \sin\left(\frac{\pi v \tau}{\tau_0}\right) dz\, d\tau = \tilde{B}_{rv}^{(1)}, \\
\int\limits_0^{\tau_0} \int\limits_{-z_0}^{z_0} f_{3\gamma}^{(-)}(z,\tau) P_n\left(\frac{z}{z_0}\right) \cos\left(\frac{\pi y \tau}{\tau_0}\right) dz\, d\tau = B_{ny}^{(2)}, \\
\int\limits_0^{\tau_0} \int\limits_{-z_0}^{z_0} f_{3\gamma}^{(-)}(z,\tau) P_j\left(\frac{z}{z_0}\right) \sin\left(\frac{\pi w \tau}{\tau_0}\right) dz\, d\tau = \tilde{B}_{jw}^{(2)}, \\
(m = \overline{0, m_0}),\ \ (s = \overline{0, s_0}),\ \ (r = \overline{0, r_0}),\ \ (v = \overline{1, v_0}), \\
(n = \overline{0, n_0}),\ \ (y = \overline{0, y_0}),\ \ (j = \overline{0, j_0}),\ \ (w = \overline{1, w_0});
\end{gathered} \tag{11}$$

$$\int\limits_0^{\tau_0} \int\limits_{-z_0}^{z_0} \int\limits_{-h}^{h} t(z,\gamma,\tau) P_k\left(\frac{\gamma}{h}\right) P_l\left(\frac{z}{z_0}\right) \cos\left(\frac{\pi \alpha \tau}{\tau_0}\right) (R+\gamma)\, d\gamma\, dz\, d\tau = T_{kl\alpha}^{(1)},$$

$$\int\limits_{0}^{\tau_0}\int\limits_{-z_0}^{z_0}\int\limits_{-h}^{h} t(z,\gamma,\tau)P_i\left(\frac{\gamma}{h}\right)P_q\left(\frac{z}{z_0}\right)\sin\left(\frac{\pi\beta\tau}{\tau_0}\right)(R+\gamma)\,d\gamma\,dz\,d\tau = T^{(2)}_{iq\beta},$$

$$(k=\overline{0,k_0}),\ \ (l=\overline{0,l_0}),\ \ (\alpha=\overline{0,\alpha_0})\ \ (i=\overline{0,i_0}),\ \ (q=\overline{0,q_0}),\ \ (\beta=\overline{1,\beta_0}), \tag{12}$$

де $B^{(1)}_{ms}$, $\tilde{B}^{(1)}_{rv}$, $B^{(2)}_{ny}$, $\tilde{B}^{(2)}_{jw}$, $T^{(1)}_{kl\alpha}$, $T^{(2)}_{iq\beta}$ — задані параметри; $P_v(\cdot)$ — поліноми Лежандра; числа $m_0, s_0, r_0, v_0, n_0, y_0, j_0, w_0, k_0, l_0, \alpha_0, i_0, q_0, \beta_0$ визначають кількість інтегральних обмежень (11), (12).

Зробимо декілька зауважень стосовно суті інтегральних обмежень (11), (12).

Співвідношення (11), (12) є узагальненими моментними характеристиками функцій керування $f^{(\pm)}_{3\gamma}(z,\tau)$ та $t(z,\gamma,\tau)$. За допомогою таких співвідношень можна задати значення головного вектора та головного момента поверхневих зусиль, середнє значення температури та температурний момент тощо.

Параметри $B^{(1)}_{ms}$, $\tilde{B}^{(1)}_{rv}$, $B^{(2)}_{ny}$, $\tilde{B}^{(2)}_{jw}$, $T^{(1)}_{kl\alpha}$, $T^{(2)}_{iq\beta}$ (або частина з них) можуть бути використані для того, щоб задовольнити конкректні умови локального силового навантаження (нагріву) у фіксованих перерізах циліндра. Методику розв'язування задач такого типу для тонкостінних оболонкових конструкцій розглянуто в [5].

Якщо функції $f^{(\pm)}_{3\gamma}(z,\tau)$ та $t(z,\gamma,\tau)$ вважати достатньо гладкими в замиканні області (Ω), то їх можна розвинути в рівномірно збіжні ряди Фур'є за ортонормованою системою поліномів Лежандра та тригонометричною системою. У цьому зв'язку довільні скінченні відрізки таких рядів будуть з певною точністю апроксимувати ці функції в замиканні області (Ω). Праві частини інтегральних обмежень (11), (12) фактично є коефіцієнтами таких рядів Фур'є для вибраних функцій керування. Якщо ці параметри визначати в процесі розв'язування задачі оптимізації, то можна отримати певні аналітичні наближені розв'язки цієї задачі.

У нашій праці праві частини інтегральних обмежень (11), (12) вважаються заданими і їхні значення використовують для обчислення сталих множників Лагранжа.

Допустимими функціями в задачі оптимізації будемо вважати функції $u_z(z,\gamma,\tau)$, $u_\gamma(z,\gamma,\tau)$, $t(z,\gamma,\tau)$, двічі неперервно диференційовні в області (Ω) і неперервно диференційовні на межі цієї області та функції $f^{(\pm)}_{3\gamma}(z,\tau)$, неперервні в замиканні області $(\Omega_1) = \{(z,\tau) : -z_0 < z < z_0,\ 0 < \tau < \tau_0\}$ за умови, що ці функції справджують рівняння руху (4), механічні граничні умови (6), початкові умови (8) та інтегральні умови (11), (12).

Тепер задачу оптимізації термопружного стану циліндра сформулюємо так: серед функцій $u_z(z,\gamma,\tau)$, $u_\gamma(z,\gamma,\tau)$, $t(z,\gamma,\tau)$, двічі неперервно диференційовних в області (Ω) і неперервно диференційовних на межі цієї області та функцій $f^{(\pm)}_{3\gamma}(z,\tau)$, неперервних у замиканні області (Ω_1), знайти екстремалі функціонала (10), які задовольняють умови (4), (6), (8), (11), (12).

Задачу на умовний екстремум розв'язуємо методами варіаційного числення з використанням множників Лагранжа [8].

Відшукання оптимальних розв'язків у цьому випадку зводиться до розв'язування задачі

$$\frac{\partial^2 u_z^*}{\partial z^2} + \frac{1}{2(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_\gamma^*}{\partial\gamma} + \frac{u_\gamma^*}{R+\gamma}\right) + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left[\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{\partial u_z^*}{\partial\gamma} + \frac{u_z^*}{R+\gamma}\right) +\right.$$

$$+\frac{u_z^*}{(R+\gamma)^2}\bigg]=\frac{\rho(1-2\nu)}{2G(1-\nu)}\frac{\partial^2 u_z^*}{\partial\tau^2},$$

$$\frac{\partial^2 u_\gamma^*}{\partial z^2}+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2 u_z^*}{\partial z\partial\gamma}+\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{\partial u_\gamma^*}{\partial\gamma}+\frac{u_\gamma^*}{R+\gamma}\right)=\frac{\rho}{G}\frac{\partial^2 u_\gamma^*}{\partial\tau^2}; \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}+\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial\gamma}+\frac{u_\gamma}{R+\gamma}\right)+\frac{3}{4}\bigg[\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{\partial u_z}{\partial\gamma}+\frac{u_z}{R+\gamma}\right)+$$
$$+\frac{u_z}{(R+\gamma)^2}\bigg]=\frac{3\rho(1+\nu)}{2E}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial\tau^2}-F_z\right)-\frac{1+\nu}{2(1-2\nu)}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u^*}{\partial z}+\frac{\partial u_\gamma^*}{\partial\gamma}+\right.$$
$$\left.+\frac{u_\gamma^*}{R+\gamma}\right)+\frac{1+\nu}{2E}\bigg[\Phi_{kl\alpha}^*P_k\left(\frac{\gamma}{h}\right)\frac{d}{dz}P_l\left(\frac{z}{z_0}\right)\cos\left(\frac{\pi\alpha\tau}{\tau_0}\right)+$$
$$+\tilde{\Phi}_{iq\beta}^*P_i\left(\frac{\gamma}{h}\right)\frac{d}{dz}P_q\left(\frac{z}{z_0}\right)\sin\left(\frac{\pi\beta\tau}{\tau_0}\right)\bigg],$$
$$\frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial z^2}+\frac{1}{3}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z\partial\gamma}+\frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial\gamma}+\frac{u_\gamma}{R+\gamma}\right)=$$
$$=\frac{\rho}{G}\left(\frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial\tau^2}-F_\gamma\right)-\frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{\partial u^*}{\partial z}+\frac{\partial u_\gamma^*}{\partial\gamma}+\frac{u_\gamma^*}{R+\gamma}\right)+$$
$$+\frac{2(1+\nu)}{3E}\bigg[\Phi_{kl\alpha}^*\frac{d}{d\gamma}P_k\left(\frac{\gamma}{h}\right)P_l\left(\frac{z}{z_0}\right)\cos\left(\frac{\pi\alpha\tau}{\tau_0}\right)+$$
$$+\tilde{\Phi}_{iq\beta}^*\frac{d}{d\gamma}P_i\left(\frac{\gamma}{h}\right)P_q\left(\frac{z}{z_0}\right)\sin\left(\frac{\pi\beta\tau}{\tau_0}\right)\bigg],$$
$$(k=\overline{0,k_0}),\ \ (l=\overline{0,l_0}),\ \ (\alpha=\overline{0,\alpha_0}),\ \ (i=\overline{0,i_0}),\ \ (q=\overline{0,q_0}),\ \ (\beta=\overline{1,\beta_0}); \tag{14}$$

$$\frac{\partial u_z^*(\pm z_0,\gamma,\tau)}{\partial z}+\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial u_\gamma^*(\pm z_0,\gamma,\tau)}{\partial\gamma}+\frac{u_\gamma^*(\pm z_0,\gamma,\tau)}{R+\gamma}\right)=0,$$
$$\frac{\partial u_z^*(\pm z_0,\gamma,\tau)}{\partial\gamma}+\frac{\partial u_\gamma^*(\pm z_0,\gamma,\tau)}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial u_z^*(z,\pm h,\tau)}{\partial\gamma}+\frac{\partial u_\gamma^*(z,\pm h,\tau)}{\partial z}=0,$$
$$u_\gamma^*(z,h,\tau)+Z_{ms}^{(1)*}P_m\left(\frac{z}{z_0}\right)\cos\left(\frac{\pi s\tau}{\tau_0}\right)+\tilde{Z}_{rv}^{(1)*}P_r\left(\frac{z}{z_0}\right)\sin\left(\frac{\pi v\tau}{\tau_0}\right)=0,$$
$$u_\gamma^*(z,-h,\tau)+Z_{ny}^{(2)*}P_n\left(\frac{z}{z_0}\right)\cos\left(\frac{\pi y\tau}{\tau_0}\right)+\tilde{Z}_{jw}^{(2)*}P_j\left(\frac{z}{z_0}\right)\sin\left(\frac{\pi w\tau}{\tau_0}\right)=0,$$
$$(m=\overline{0,m_0}),\ \ (s=\overline{0,s_0}),\ \ (r=\overline{0,r_0}),\ \ (v=\overline{1,v_0}),$$
$$(n=\overline{0,n_0}),\ \ (y=\overline{0,y_0}),\ \ (j=\overline{0,j_0}),\ \ (w=\overline{1,w_0}); \tag{15}$$

$$\frac{\partial u_z(\pm z_0,\gamma,\tau)}{\partial z}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\gamma(\pm z_0,\gamma,\tau)}{\partial\gamma}+\frac{u_\gamma(\pm z_0,\gamma,\tau)}{R+\gamma}\right)=$$
$$=\frac{\partial u_z^*(\pm z_0,\gamma,\tau)}{\partial z}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\gamma^*(\pm z_0,\gamma,\tau)}{\partial\gamma}+\frac{u_\gamma^*(\pm z_0,\gamma,\tau)}{R+\gamma}\right)+$$
$$+\frac{1+\nu}{2E}\left[(\pm1)^l\Phi_{kl\alpha}^*P_k\left(\frac{\gamma}{h}\right)\cos\left(\frac{\pi\alpha\tau}{\tau_0}\right)+(\pm1)^q\tilde{\Phi}_{iq\beta}^*P_i\left(\frac{\gamma}{h}\right)\sin\left(\frac{\pi\beta\tau}{\tau_0}\right)\right],$$
$$\frac{\partial u_z(\pm z_0,\gamma,\tau)}{\partial\gamma}+\frac{\partial u_\gamma(\pm z_0,\gamma,\tau)}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial u_z(z,\pm h,\tau)}{\partial\gamma}+\frac{\partial u_\gamma(z,\pm h,\tau)}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial u_\gamma(z,\pm h,\tau)}{\partial\gamma}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z(z,\pm h,\tau)}{\partial z}+\frac{u_\gamma(z,\pm h,\tau)}{R\pm h}\right)=$$
$$=\frac{\partial u^*_\gamma(z,\pm h,\tau)}{\partial\gamma}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^*_z(z,\pm h,\tau)}{\partial z}+\frac{u^*_\gamma(z,\pm h,\tau)}{R\pm h}\right)+$$
$$+\frac{1+\nu}{2E}\left[(\pm1)^k\Phi^*_{kl\alpha}P_l\left(\frac{z}{z_0}\right)\cos\left(\frac{\pi\alpha\tau}{\tau_0}\right)+(\pm1)^i\tilde{\Phi}^*_{iq\beta}P_q\left(\frac{z}{z_0}\right)\sin\left(\frac{\pi\beta\tau}{\tau_0}\right)\right],$$
$$(k=\overline{0,k_0}),\ \ (l=\overline{0,l_0}),\ \ (\alpha=\overline{0,\alpha_0}),\ \ (i=\overline{0,i_0}),\ \ (q=\overline{0,q_0}),\ \ (\beta=\overline{1,\beta_0});\tag{16}$$

$$u^*_z(z,\gamma,\tau_0)=0,\ \ \frac{\partial u^*_z(z,\gamma,\tau_0)}{\partial\tau}=\frac{\partial u_z(z,\gamma,\tau_0)}{\partial\tau},$$
$$u^*_\gamma(z,\gamma,\tau_0)=0,\ \ \frac{\partial u^*_\gamma(z,\gamma,\tau_0)}{\partial\tau}=\frac{\partial u_\gamma(z,\gamma,\tau_0)}{\partial\tau};\tag{17}$$

$$u_z(z,\gamma,0)=0,\ \ \frac{\partial u_z(z,\gamma,0)}{\partial\tau}=0,$$
$$u_\gamma(z,\gamma,0)=0,\ \ \frac{\partial u_\gamma(z,\gamma,0)}{\partial\tau}=0;\tag{18}$$

$$\int\limits_0^{\tau_0}\int\limits_{-z_0}^{z_0}\left[\frac{\partial u^*_\gamma(z,h,\tau)}{\partial\gamma}+\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial u^*_z(z,h,\tau)}{\partial z}+\frac{u^*_\gamma(z,h,\tau)}{(R+h)}\right)\right]\times$$
$$\times P_m\left(\frac{z}{z_0}\right)\cos\left(\frac{\pi s\tau}{\tau_0}\right)dz\,d\tau=\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)(R+h)}B^{(1)}_{ms},$$
$$\int\limits_0^{\tau_0}\int\limits_{-z_0}^{z_0}\left[\frac{\partial u^*_\gamma(z,h,\tau)}{\partial\gamma}+\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial u^*_z(z,h,\tau)}{\partial z}+\frac{u^*_\gamma(z,h,\tau)}{(R+h)}\right)\right]\times$$
$$\times P_r\left(\frac{z}{z_0}\right)\sin\left(\frac{\pi v\tau}{\tau_0}\right)dz\,d\tau=\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)(R+h)}\tilde{B}^{(1)}_{rv},$$
$$\int\limits_0^{\tau_0}\int\limits_{-z_0}^{z_0}\left[\frac{\partial u^*_\gamma(z,-h,\tau)}{\partial\gamma}+\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial u^*_z(z,-h,\tau)}{\partial z}+\frac{u^*_\gamma(z,-h,\tau)}{(R-h)}\right)\right]\times$$
$$\times P_n\left(\frac{z}{z_0}\right)\cos\left(\frac{\pi y\tau}{\tau_0}\right)dz\,d\tau=\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)(R-h)}B^{(2)}_{ny},$$
$$\int\limits_0^{\tau_0}\int\limits_{-z_0}^{z_0}\left[\frac{\partial u^*_\gamma(z,-h,\tau)}{\partial\gamma}+\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial u^*_z(z,-h,\tau)}{\partial z}+\frac{u^*_\gamma(z,-h,\tau)}{(R-h)}\right)\right]\times$$
$$\times P_j\left(\frac{z}{z_0}\right)\sin\left(\frac{\pi w\tau}{\tau_0}\right)dz\,d\tau=\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)(R-h)}\tilde{B}^{(2)}_{jw},$$
$$(m=\overline{0,m_0}),\ \ (s=\overline{0,s_0}),\ \ (r=\overline{0,r_0}),\ \ (v=\overline{1,v_0}),$$
$$(n=\overline{0,n_0}),\ \ (y=\overline{0,y_0}),\ \ (j=\overline{0,j_0}),\ \ (w=\overline{1,w_0});\tag{19}$$

$$\int\limits_0^{\tau_0}\int\limits_{-z_0}^{z_0}\int\limits_{-h}^{h}\left[\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u_\gamma}{\partial\gamma}+\frac{u_\gamma}{R+\gamma}-\frac{\partial u^*}{\partial z}-\frac{\partial u^*_\gamma}{\partial\gamma}-\frac{u^*_\gamma}{R+\gamma}+\right.$$

$$+\frac{1-2\nu}{E}\left(\Phi^*_{\omega dp}P_\omega\left(\frac{\gamma}{h}\right)P_d\left(\frac{z}{z_0}\right)\cos\left(\frac{\pi p\tau}{\tau_0}\right)+\right.$$
$$\left.\left.+\tilde{\Phi}^*_{f\kappa g}P_f\left(\frac{\gamma}{h}\right)P_\kappa\left(\frac{z}{z_0}\right)\sin\left(\frac{\pi g\tau}{\tau_0}\right)\right)\right]\times$$
$$\times P_k\left(\frac{\gamma}{h}\right)P_l\left(\frac{z}{z_0}\right)\cos\left(\frac{\pi\alpha\tau}{\tau_0}\right)(R+\gamma)\,d\gamma\,dz\,d\tau=3\alpha_t T^{(1)}_{kl\alpha},$$
$$\int\limits_0^{\tau_0}\int\limits_{-z_0}^{z_0}\int\limits_{-h}^{h}\left[\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u_\gamma}{\partial\gamma}+\frac{u_\gamma}{R+\gamma}-\frac{\partial u^*}{\partial z}-\frac{\partial u^*_\gamma}{\partial\gamma}-\frac{u^*_\gamma}{R+\gamma}+\right.$$
$$+\frac{1-2\nu}{E}\left(\Phi^*_{\omega dp}P_\omega\left(\frac{\gamma}{h}\right)P_d\left(\frac{z}{z_0}\right)\cos\left(\frac{\pi p\tau}{\tau_0}\right)+\right.$$
$$\left.\left.+\tilde{\Phi}^*_{f\kappa g}P_f\left(\frac{\gamma}{h}\right)P_\kappa\left(\frac{z}{z_0}\right)\sin\left(\frac{\pi g\tau}{\tau_0}\right)\right)\right]\times$$
$$\times P_i\left(\frac{\gamma}{h}\right)P_q\left(\frac{z}{z_0}\right)\sin\left(\frac{\pi\beta\tau}{\tau_0}\right)(R+\gamma)\,d\gamma\,dz\,d\tau=3\alpha_t T^{(2)}_{iq\beta},$$
$$(k,\omega=\overline{0,k_0}),\ \ (l,d=\overline{0,l_0}),\ \ (\alpha,p=\overline{0,\alpha_0}),$$
$$(i,f=\overline{0,i_0}),\ \ (q,\kappa=\overline{0,q_0}),\ \ (g,\beta=\overline{1,\beta_0}) \tag{20}$$

стосовно модифікованих множників Лагранжа $u^*_z(z,\gamma,\tau)$, $u^*_\gamma(z,\gamma,\tau)$, $Z^{(1)*}_{ms}$, $\tilde{Z}^{(1)*}_{rv}$, $Z^{(2)*}_{ny}$, $\tilde{Z}^{(2)*}_{jw}$, $\Phi^*_{kl\alpha}$, $\tilde{\Phi}^*_{iq\beta}$, $(m=\overline{0,m_0})$, $(s=\overline{0,s_0})$, $(r=\overline{0,r_0})$, $(v=\overline{1,v_0})$ $(n=\overline{0,n_0})$, $(y=\overline{0,y_0})$, $(j=\overline{0,j_0})$, $(w=\overline{1,w_0})$, $(k=\overline{0,k_0})$, $(l=\overline{0,l_0})$, $(\alpha=\overline{0,\alpha_0})$, $(i=\overline{0,i_0})$, $(q=\overline{0,q_0})$, $(\beta=\overline{1,\beta_0})$ та компонент вектора переміщень $u_z(z,\gamma,\tau)$, $u_\gamma(z,\gamma,\tau)$, через які виражається температура

$$t(z,\gamma,\tau)=\frac{1}{3\alpha_t}\left[\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u_\gamma}{\partial\gamma}+\frac{u_\gamma}{R+\gamma}-\frac{\partial u^*}{\partial z}-\frac{\partial u^*_\gamma}{\partial\gamma}-\frac{u^*_\gamma}{R+\gamma}+\right.$$
$$+\frac{1-2\nu}{E}\left(\Phi^*_{kl\alpha}P_k\left(\frac{\gamma}{h}\right)P_l\left(\frac{z}{z_0}\right)\cos\left(\frac{\pi\alpha\tau}{\tau_0}\right)+\right.$$
$$\left.\left.+\tilde{\Phi}^*_{iq\beta}P_i\left(\frac{\gamma}{h}\right)P_q\left(\frac{z}{z_0}\right)\sin\left(\frac{\pi\beta\tau}{\tau_0}\right)\right)\right],$$
$$(k=\overline{0,k_0}),\ \ (l=\overline{0,l_0}),\ \ (\alpha=\overline{0,\alpha_0}),\ \ (i=\overline{0,i_0}),\ \ (q=\overline{0,q_0}),\ \ (\beta=\overline{1,\beta_0}). \tag{21}$$

Зауважимо, що у співвідношеннях (14) – (16), (21) за індексами k, l, m, n, r, s, i, j, q, v, w, y, α, β, а у співвідношенні (20) – за індексами ω, d, p, f, κ, g, які повторюються, проводиться підсумовування.

Розв'язавши задачу (13) – (20), знайдемо функції $u^*_z(z,\gamma,\tau)$, $u^*_\gamma(z,\gamma,\tau)$, $u_z(z,\gamma,\tau)$, $u_\gamma(z,\gamma,\tau)$. Із співвідношення (21) визначаємо температуру $t(z,\gamma,\tau)$, зі співвідношень (2), (3) – оптимальний термопружний стан циліндра, а зі співвідношення (6) – відповідне йому оптимальне поверхневе силове навантаження. Крім того, використавши співвідношення (5), (7), (9), знайдемо функції $Q(z,\gamma,\tau)$, $t^{(\pm)}_\gamma(z,\tau)$, $t^{(\pm)}_z(\gamma,\tau)$, $t_0(z,\gamma)$, які характеризують умови нагріву циліндра, відповідні оптимальному температурному полю $t(z,\gamma,\tau)$, яке визначається співвідношенням (21).

Зауважимо, що задачі (13), (15), (17) та (14), (16), (18), які залежать від сталих множників Лагранжа $Z_{ms}^{(1)*}$, $\tilde{Z}_{rv}^{(1)*}$, $Z_{ny}^{(2)*}$, $\tilde{Z}_{jw}^{(2)*}$, $\Phi_{kl\alpha}^{*}$, $\tilde{\Phi}_{iq\beta}^{*}$, як від параметрів, за своєю структурою аналогічні крайовій задачі термопружності в переміщеннях, розв'язок якої, як відомо [6], існує і він єдиний у класі гладких функцій. У цьому зв'язку при кожному фіксованому векторі цих параметрів існує єдиний розв'язок задачі оптимізації, яку розглядаємо, і цей розв'язок в такому випадку можна побудувати в замкненій формі.

Справді, врахувавши загальний вигляд правих частин системи диференціальних рівнянь (14), граничних умов (15), (16) та інтегральні умови (19), (20), розв'язок системи рівнянь (13), (14) стосовно функцій $u_z^*(z,\gamma,\tau)$, $u_\gamma^*(z,\gamma,\tau)$ і $u_z(z,\gamma,\tau)$, $u_\gamma(z,\gamma,\tau)$ відповідно можна знайти у вигляді таких скінченних відрізків кратних рядів Фур'є:

$$u_z^*(z,\gamma,\tau)=\sum_{k=0}^{M}\Bigg[\varphi_{k0}^{(1)}(\gamma)P_k\left(\frac{z}{z_0}\right)+$$
$$+\sum_{s=1}^{M}\left(\varphi_{ks}^{(1)}(\gamma)\cos\left(\frac{\pi s\tau}{\tau_0}\right)+\psi_{ks}^{(1)}(\gamma)\sin\left(\frac{\pi s\tau}{\tau_0}\right)\right)P_k\left(\frac{z}{z_0}\right)\Bigg],$$
$$u_\gamma^*(z,\gamma,\tau)=\sum_{l=0}^{M}\Bigg[\varphi_{l0}^{(2)}(\gamma)P_l\left(\frac{z}{z_0}\right)+$$
$$+\sum_{s=1}^{M}\left(\varphi_{ls}^{(2)}(\gamma)\cos\left(\frac{\pi s\tau}{\tau_0}\right)+\psi_{ls}^{(2)}(\gamma)\sin\left(\frac{\pi s\tau}{\tau_0}\right)\right)P_l\left(\frac{z}{z_0}\right)\Bigg],\tag{22}$$

$$u_z(z,\gamma,\tau)=\sum_{m=0}^{M}\Bigg[\varphi_{m0}^{(3)}(\gamma)P_m\left(\frac{z}{z_0}\right)+$$
$$+\sum_{s=1}^{M}\left(\varphi_{ms}^{(3)}(\gamma)\cos\left(\frac{\pi s\tau}{\tau_0}\right)+\psi_{ms}^{(3)}(\gamma)\sin\left(\frac{\pi s\tau}{\tau_0}\right)\right)P_m\left(\frac{z}{z_0}\right)\Bigg],$$
$$u_\gamma(z,\gamma,\tau)=\sum_{n=0}^{M}\Bigg[\varphi_{n0}^{(4)}(\gamma)P_n\left(\frac{z}{z_0}\right)+$$
$$+\sum_{s=1}^{M}\left(\varphi_{ns}^{(4)}(\gamma)\cos\left(\frac{\pi s\tau}{\tau_0}\right)+\psi_{ns}^{(4)}(\gamma)\sin\left(\frac{\pi s\tau}{\tau_0}\right)\right)P_n\left(\frac{z}{z_0}\right)\Bigg].\tag{23}$$

Тут $\varphi_{y^*s}^{(w^*)}(\gamma)$, $\psi_{y^*s}^{(w^*)}(\gamma)$, $(w^*=\overline{1,4})$, $(y^*=k,l,m,n)$ – невідомі функції; $M=max\{m_0,n_0,l_0,q_0,s_0,r_0,j_0,v_0,w_0,y_0,\alpha_0,\beta_0\}-1$, а числа m_0, n_0, l_0, q_0, s_0, r_0, j_0 v_0, w_0, y_0, α_0, β_0 визначають кількість інтегральних обмежень (11), (12) в задачі оптимізації.

Підставляючи вирази (22), (23) в рівняння (13), (14) відповідно, отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь Ейлера стосовно невідомих функцій $\varphi_{y^*s}^{(w^*)}(\gamma)$, $\psi_{y^*s}^{(w^*)}(\gamma)$, $(w^*=\overline{1,4})$, $(y^*=k,l,m,n)$. Набір довільних сталих, які одержуємо при розв'язуванні цієї системи, а також сукупність множників Лагранжа $Z_{ms}^{(1)*}$, $\tilde{Z}_{rv}^{(1)*}$, $Z_{ny}^{(2)*}$, $\tilde{Z}_{jw}^{(2)*}$, $\Phi_{kl\alpha}^{*}$, $\tilde{\Phi}_{iq\beta}^{*}$, $(m=\overline{0,m_0})$, $(s=\overline{0,s_0})$, $(r=\overline{0,r_0})$, $(v=\overline{1,v_0})$, $(n=\overline{0,n_0})$, $(y=\overline{0,y_0})$, $(j=\overline{0,j_0})$, $(w=\overline{1,w_0})$, $(k=\overline{0,k_0})$, $(l=\overline{0,l_0})$, $(\alpha=\overline{0,\alpha_0})$, $(i=\overline{0,i_0})$, $(q=\overline{0,q_0})$, $(\beta=\overline{1,\beta_0})$, дають змогу задовольнити граничні умови

(15), (16), початкові умови (17), (18), інтегральні умови (19) на бічних поверхнях циліндра, а також інтегральні умови (20) в області (Ω).

1. *Бурак Я.Й., Бугрій М.І.* Оптимізація напружень в пустотілому циліндрі при силовому навантаженні //Доп. НАН України.– 1997.– N9.– С. 58-61.
2. *Бугрій М.І.* Оптимізація схем силового навантаження та нагріву товстостінних термопружних оболонок // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.– 1997.– Вип. 47.– С. 102-106.
3. *Бугрій М.І.* Оптимізація осесиметричного напружено-деформованого стану товстостінних циліндричних оболонок // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.– 1996.– Вип. 45.– С. 162-168.
4. *Бугрій М.І.* Про один метод побудови оптимальних розв'язків осесиметричних задач оптимізації термопружного стану циліндричних оболонок // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.– 1997.– Вип. 48.– С. 128-135.
5. *Григолюк Э.И., Подстригач Я.С., Бурак Я.И.* Оптимизация нагрева оболочек и пластин.– К., 1979.
6. *Подстригач Я.С., Швец Р.Н.* Термоупругость тонких оболочек.– К., 1978.
7. *Бердичевский В.Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды.– М., 1983.
8. *Буслаев В.С.* Вариационное исчисление.– Л., 1980.

ON AN AXIALLY-SYMMETRIC DYNAMIC PROBLEMS OF OPTIMIZATION OF THE THERMOELASTIC STATE OF THICK-WALLED CYLINDER

Mykola Bugriy

Ivan Franco National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

Thermoelastic state of the thick-walled cylinder at their non-stationary force loading and heating is considered. The mathematical formulation and the scheme of a solution of optimization dynamic problems are proposed. The Lagrange functional is taken as the criterion of the optimization. The intensities of forse loading and temperature are the governing functions in the optimization problem. These functions are subordinated to additional integral restrictions of the moment type.

Key words: thick-walled cylinder, optimization dynamic problems.

Стаття надійшла до редколегії 26.05.2004

Прийнята до друку 02.11.2006

УДК 517.95

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ВИРОДЖЕННЯМ В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ

Надія ГРИНЦІВ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

В області з вільною межею визначено умови існування і єдиності розв'язку оберненої задачі визначення невідомого коефіцієнта при старшій похідній у параболічному рівнянні зі слабким виродженням, який прямує до нуля при $t \to 0$ як степенева функція t^β, $0 < \beta < 1$.

Ключові слова: обернена задача з виродженням, вільна межа, параболічне рівняння.

Мета нашої праці – в області з невідомою рухомою частиною межі дослідити обернену задачу для параболічного рівняння з невідомим коефіцієнтом, який у початковий момент часу перетворюється в нуль як степенева функція $t^\beta, 0 < \beta < 1$. Подібну задачу в області зі сталими межами досліджено в [1]. Випадок без виродження, коли невідомий коефіцієнт строго додатний для всіх $t \in [0, T]$ в області з вільною межею, вивчено в [2]. Для кожної задачі визначено умови існування та єдиності розв'язку. Обернені задачі з виродженням для рівнянь еліптичного та гіперболічного типів в області зі сталими межами вивчали в [3, 4], а обернена задача з вільною межею для параболічного рівняння без виродження - в [5].

1. Формулювання задачі. В області $\Omega_T = \{(x,t) : 0 < x < h(t), 0 < t < T\}$ з невідомою межею $x = h(t)$ розглядаємо обернену задачу визначення коефіцієнта $a(t) > 0$, $t \in (0, T]$ в рівнянні

$$u_t = a(t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant h(0), \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u(0,t)=\mu_1(t),\ u(h(t),t)=\mu_2(t),\qquad 0\leqslant t\leqslant T \tag{3}$$

та умовами перевизначення

$$a(t)u_x(0,t)=\mu_3(t),\qquad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{4}$$

$$\int\limits_0^{h(t)} u(x,t)dx=\mu_4(t),\qquad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{5}$$

Вводячи нові змінні $y=\dfrac{x}{h(t)}, t=t$, зведемо задачу (1)-(5) до оберненої стосовно невідомих $(a(t),h(t),v(y,t))$, де $v(y,t)=u(yh(t),t)$, в області зі сталими межами $Q_T = \{(y,t):0<y<1,0<t<T\}$:

$$v_t=\frac{a(t)}{h^2(t)}v_{yy}+\frac{b(yh(t),t)+yh'(t)}{h(t)}v_y+c(yh(t),t)v+f(yh(t),t),\qquad (y,t)\in Q_T, \tag{6}$$

$$v(y,0)=\varphi(yh(0)),\qquad 0\leqslant y\leqslant 1, \tag{7}$$

$$v(0,t)=\mu_1(t),\ v(1,t)=\mu_2(t),\qquad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{8}$$

$$\frac{a(t)}{h(t)}v_y(0,t)=\mu_3(t),\qquad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{9}$$

$$h(t)\int\limits_0^1 v(y,t)dy=\mu_4(t),\qquad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{10}$$

Означення 1. *Розв'язком задачі (6)-(10) назвемо трійку функцій* $(a(t),h(t),v(y,t))\in C[0,T]\times C^1[0,T]\times C^{2,1}(Q_T)\cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, *де* $a(t)>0, t\in(0,T]$, *існує скінченна границя* $\lim\limits_{t\to+0}a(t)t^{-\beta}>0$, $0<\beta<1$, $h(t)>0, t\in[0,T]$, *що задовольняє умови (6)-(10).*

2. Існування розв'язку задачі (6)-(10).

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються умови:*

A1) $\varphi\in C[0,\infty)$, $\varphi(x)\geqslant\varphi_0>0$, $x\in[0,\infty)$, $\mu_i\in C^1[0,T]$, $\mu_i(t)>0$, $t\in[0,T]$, $i=1,2,4$, $b,c,f\in C([0,\infty)\times[0,T])$, $f(x,t)\geqslant 0$, $(x,t)\in[0,\infty)\times\times[0,T]$, $\mu_3\in C[0,T]$, $\mu_3(t)>0$, $t\in(0,T]$, $\exists\lim\limits_{t\to+0}\mu_3(t)t^{-\beta}=M>0$;

A2) $\varphi \in C^1[0,h_0]$, $\varphi'(x) > 0$, $x \in [0,h_0]$, $b \in C^{1,0}([0,H_1] \times [0,T])$, $f, c \in H^{\alpha,0}([0,H_1] \times [0,T])$, $\alpha \in (0,1)$,

де $h_0 = h(0)$ *– розв'язок рівняння* $\int\limits_0^{h_0} \varphi(x)dx = \mu_4(0)$,

$H_1 = C_1 \max\limits_{[0,T]} \mu_4(t) \left(\min\{\min\limits_{[0,h_0]} \varphi(x), \min\limits_{[0,T]} \mu_1(t), \min\limits_{[0,T]} \mu_2(t)\} \right)^{-1}, C_1 = const > 0;$

A3) $\varphi(0) = \mu_1(0)$, $\varphi(h_0) = \mu_2(0)$.

Тоді можна зазначити таке число $T_0 :\ 0 < T_0 \leqslant T$*, яке визначається вихідними даними, що розв'язок задачі (6)-(10) існує при* $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant T_0$.

Доведення. Згідно з умовою (A1) теореми та умовами (2), (5), існує єдине значення $h(0) = h_0 > 0$, яке задовольняє рівняння

$$\int\limits_0^{h_0} \varphi(x)dx = \mu_4(0).$$

Використовуючи принцип максимуму [6, с.25] для розв'язку задачі (6)-(8), отримуємо

$$v(y,t) \geqslant C_1 \min\{\min_{[0,h_0]} \varphi(x), \min_{[0,T]} \mu_1(t), \min_{[0,T]} \mu_2(t)\} \equiv M_0 > 0, \qquad (y,t) \in \overline{Q}_T,$$

звідки з врахуванням (10) матимемо

$$h(t) \leqslant \frac{\max\limits_{[0,T]} \mu_4(t)}{M_0} \equiv H_1 < \infty, \qquad t \in [0,T].$$

Оцінимо функцію $v(y,t)$ зверху. Для цього знову використаємо принцип максимуму

$$v(y,t) \leqslant C_2 \max\{\max_{[0,h_0]} \varphi(x), \max_{[0,T]} \mu_1(t), \max_{[0,T]} \mu_2(t), \max_{[0,H_1]\times[0,T]} f(x,t)\} \equiv$$
$$\equiv M_1 < \infty,\ (y,t) \in \overline{Q}_T$$

і згідно з (10) маємо

$$h(t) \geqslant \frac{\max\limits_{[0,T]} \mu_4(t)}{M_1} \equiv H_0 > 0, \qquad t \in [0,T].$$

Отож,

$$0 < M_0 \leqslant v(y,t) \leqslant M_1 < \infty, \qquad (y,t) \in \overline{Q}_T, \tag{11}$$

$$0 < H_0 \leqslant h(t) \leqslant H_1 < \infty, \qquad t \in [0,T]. \tag{12}$$

Позначимо $\omega(y,t) = v_y(y,t)$, $p(t) = h'(t)$. Пряма задача (6)-(8) у випадку довільних неперервних на $[0,T]$ функцій $a(t), h(t), p(t)$ еквівалентна такій системі інтегральних рівнянь:

$$\begin{aligned} v(y,t) &= v_0(y,t) + \int_0^t \int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\bigg(\frac{b(\eta h(\tau),\tau)+\eta p(\tau)}{h(\tau)}\omega(\eta,\tau) + \\ &+ c(\eta h(\tau),\tau) v(\eta,\tau)\bigg) d\eta d\tau, \qquad (y,t) \in \overline{Q}_T, \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \omega(y,t) &= v_{0y}(y,t) + \int_0^t \int_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)\bigg(\frac{b(\eta h(\tau),\tau)+\eta p(\tau)}{h(\tau)}\omega(\eta,\tau) + \\ &+ c(\eta h(\tau),\tau) v(\eta,\tau)\bigg) d\eta d\tau, \qquad (y,t) \in \overline{Q}_T, \end{aligned} \tag{14}$$

де

$$\begin{aligned} v_0(y,t) &= \int_0^1 G_1(y,t,\eta,0)\,\varphi(\eta h_0) d\eta + \int_0^t G_{1\eta}(y,t,0,\tau)\,\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}\mu_1(\tau)\,d\tau - \\ &- \int_0^t G_{1\eta}(y,t,1,\tau)\,\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}\mu_2(\tau) d\tau + \int_0^t \int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\, f(\eta h(\tau),\tau) d\eta d\tau, \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} v_{0y}(y,t) &= h_0 \int_0^1 G_2(y,t,\eta,0)\,\varphi'(\eta h_0) d\eta - \int_0^t G_2(y,t,0,\tau)\,\mu_1'(\tau)\,d\tau + \\ &+ \int_0^t G_2(y,t,1,\tau)\,\mu_2'(\tau)\,d\tau + \int_0^t \int_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)\, f(\eta h(\tau),\tau)\,d\eta\,d\tau, \end{aligned} \tag{16}$$

$$G_k(y,t,\eta,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bigg(\exp\bigg(-\frac{(y-\eta+2n)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\bigg) +$$

$$+(-1)^k \exp\bigg(-\frac{(y+\eta+2n)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\bigg)\bigg), \qquad \theta(t) = \int_0^t \frac{a(\tau)}{h^2(\tau)} d\tau, \qquad k = 1,2.$$

Зрозуміло, що $G_k(y,t,\eta,\tau), k = 1,2$ – функція Гріна відповідно першої та другої крайової задачі для рівняння

$$v_t = \frac{a(t)}{h^2(t)} v_{yy}.$$

З умови (9) знаходимо

$$a(t)\omega(0,t) = \mu_3(t)h(t), \qquad t \in [0,T], \tag{17}$$

а з умови (10)

$$h(t) = \frac{\mu_4(t)}{\int\limits_0^1 v(y,t)dy}, \qquad t \in [0,T]. \tag{18}$$

Продиференціюємо умову (10) за часом. Враховуючи умови теореми, з одержаної рівності отримуємо

$$p(t) = \Bigg(\mu_4'(t) - \frac{a(t)}{h(t)}(\omega(1,t)-\omega(0,t)) + b(0,t)\mu_1(t) - b(h(t),t)\mu_2(t) + \int\limits_0^1 b_y(yh(t),t) \times$$
$$\times v(y,t)dy - h(t)\int\limits_0^1 (c(yh(t),t)v(y,t) + f(yh(t),t))dy\Bigg)\mu_2^{-1}(t), \; t \in [0,T]. \tag{19}$$

Отож, задачу (6)-(10) зведено до системи рівнянь (13), (14), (17)-(19) з невідомими $(a(t),h(t),p(t),v(y,t),\omega(y,t))$. Задача (6)-(10) та згадана система еквівалентні в тому сенсі: якщо трійка функцій $(a(t),h(t),v(y,t))$ є розв'язком задачі (6)-(10) у сенсі наведеного вище означення, то $(a(t),h(t),p(t),v(y,t),\omega(y,t))$ — неперервний розв'язок системи (13), (14), (17)-(19). Правильним є і обернене твердження: якщо $(a(t),h(t),p(t),v(y,t),\omega(y,t))$ — неперервний розв'язок системи (13), (14), (17)-(19), то функції $(a(t),h(t),v(y,t))$ є розв'язком задачі (6)-(10). Для цього достатньо довести, що ці функції належать класу $C[0,T]\times C^1[0,T]\times C^{2,1}(Q_T)\cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$ і задовольняють умови (6)-(10).

Отже, нехай $(a(t),h(t),p(t),v(y,t),\omega(y,t)) \in (C[0,T])^3 \times (C(\overline{Q}_T))^2$ є розв'язком системи (13), (14), (17)-(19). Припущення теореми дають змогу продиференціювати рівність (13) за y. Праві частини отриманої рівності і рівності (14) збігаються, тому $\omega(y,t) = v_y(y,t)$. На підставі (13) робимо висновок, що $v(y,t)$ має потрібну гладкість, задовольняє рівняння

$$v_t = \frac{a(t)}{h^2(t)}v_{yy} + \frac{b(yh(t),t)+yp(t)}{h(t)}v_y + c(yh(t),t)v + f(yh(t),t) \tag{20}$$

й умови (7), (8) для довільних неперервних на $[0,T]$ функцій $a(t),h(t),p(t)$.

Оскільки $v(y,t) \in C^{2,1}(Q_T)\cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$ і $\mu_4(t) \in C^1[0,T]$, то $h(t) \in C^1[0,T]$. Продиференціюємо рівність (18) за t, використовуючи рівняння (20). Одержимо

$$p(t)\left(\mu_2(t) - \frac{\mu_4(t)}{h(t)}\right) = \mu_4'(t) - \frac{a(t)(v_y(1,t)-v_y(0,t))}{h(t)} - b(h(t),t)\mu_2(t) + b(0,t)\mu_1(t) +$$
$$+ \int\limits_0^1 b_y(yh(t),t)v(y,t)dy - h(t)\int\limits_0^1 (c(yh(t),t)v(y,t) + f(yh(t),t))dy - \frac{h'(t)\mu_4(t)}{h(t)}.$$

Віднімаючи від останньої рівності рівність (19), отримаємо

$$\frac{\mu_4(t)}{h(t)}(p(t)-h'(t))=0,$$

звідки, враховуючи умови теореми, маємо $h'(t)=p(t)$. Використовуючи це в рівнянні (20), приходимо до рівняння (6). Умова (17) еквівалентна умові (9), умова (18) — умові (10).

Для доведення існування розв'язку системи рівнянь (13), (14), (17)-(19) застосуємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Для цього спочатку з'ясуємо апріорні оцінки розв'язків системи.

Розглянемо рівняння (14). Оскільки $\int\limits_0^1 G_2(y,t,\eta,0)d\eta=1$, то згідно з умовою (A2) теореми матимемо додатність першого доданка (16), всі інші доданки (14) та (16) при $t\to 0$ прямують до нуля. Отож, існує таке число $t_1 : 0<t_1\leqslant T$, яке визначається нерівністю

$$\frac{h_0}{2}\int\limits_0^1 G_2(y,t,\eta,0)\,\varphi'(\eta h_0)d\eta \geqslant \int\limits_0^t G_2(y,t,0,\tau)\,\mu_1'(\tau)\,d\tau-\int\limits_0^t G_2(y,t,1,\tau)\,\mu_2'(\tau)\,d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)\,f(\eta h(\tau),\tau)\,d\eta\,d\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)\bigg(\frac{b(\eta h(\tau),\tau)+\eta p(\tau)}{h(\tau)}\omega(\eta,\tau)+$$

$$+c(\eta h(\tau),\tau)v(\eta,\tau)\bigg)d\eta d\tau.$$

Тоді з (14) отримуємо оцінку $\omega(y,t)$ знизу

$$\omega(y,t)\geqslant\frac{1}{2}\min_{[0,1]}\varphi'(yh_0)\equiv M_2>0,\qquad t\in[0,t_1]. \tag{21}$$

З (17), враховуючи (12) та умову (A1) теореми, знаходимо

$$a(t)\leqslant\frac{H_1\mu_3(t)}{M_2}\leqslant A_1t^{\beta},\qquad A_1>0,\qquad t\in[0,t_1]. \tag{22}$$

Позначимо $W(t)=\max\limits_{y\in[0,1]}|\omega(y,t)|$. Використовуючи рівняння (19), отримуємо

$$|p(t)|\leqslant C_3+C_4a(t)W(t),\qquad t\in[0,T]. \tag{23}$$

Враховуючи (23) та оцінки функції Гріна

$$G_2(y,t,\eta,\tau)\leqslant C_5\bigg(1+\frac{1}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\bigg),\qquad \int\limits_0^1|G_{1y}(y,t,\eta,\tau)|d\eta\leqslant\frac{C_6}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}},$$

з (14) та (16), одержуємо

$$W(t) \leqslant C_7 + C_8 \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} + C_9 \int_0^t \frac{W(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} d\tau + C_{10} \int_0^t \frac{a(\tau)W^2(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} d\tau. \quad (24)$$

Враховуючи нерівність

$$\frac{1}{a(t)} \leqslant \frac{W(t)}{\mu_3(t)},$$

для першого інтеграла правої частини нерівності (24) отримаємо

$$\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \leqslant \int_0^t \frac{a(\tau)W(\tau)d\tau}{\mu_3(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}.$$

Аналогічно

$$\int_0^t \frac{W(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \leqslant \int_0^t \frac{a(\tau)W^2(\tau)d\tau}{\mu_3(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}.$$

Позначимо $W_1(t) = W(t) + 1$. Тоді нерівність (24) можна переписати у вигляді

$$W_1(t) \leqslant C_{11} + C_{12} \int_0^t \frac{a(\tau)W_1^2(\tau)d\tau}{\mu_3(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}. \quad (25)$$

Піднесемо обидві частини нерівності (25) до квадрата, використовуючи нерівності Коші та Коші-Буняковського

$$W_1^2(t) \leqslant 2C_{11}^2 + 2C_{12}^2 \int_0^t \frac{W_1^4(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \int_0^t \frac{a^2(\tau)d\tau}{\mu_3^2(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}. \quad (26)$$

Розглянемо інтеграл $J_1 = \int_0^t \frac{a^2(\tau)d\tau}{\mu_3^2(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}$. Враховуючи (22) та вигляд функції $\theta(t)$, знаходимо

$$\theta(t) \leqslant \frac{A_1}{H_0^2(1+\beta)} t^{1+\beta}$$

або

$$t \geqslant (\theta(t))^{\frac{1}{1+\beta}} \left(\frac{H_0^2(1+\beta)}{A_1} \right)^{\frac{1}{1+\beta}}.$$

Тоді, використовуючи умову (A1) теореми і оцінку (22), одержуємо

$$J_1 \leqslant C_{13} \int_0^t \frac{a(\tau)d\tau}{\tau^\beta \sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \leqslant \int_0^t \frac{a(\tau)d\tau}{\theta(\tau)^{\frac{\beta}{1+\beta}} \sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}.$$

Після заміни змінних $z = \dfrac{\theta(\tau)}{\theta(t)}$ отримуємо

$$J_1 \leqslant C_{14}(\theta(t))^{\frac{1-\beta}{2(1+\beta)}} \int\limits_0^1 \frac{dz}{z^{\frac{\beta}{1+\beta}}\sqrt{1-z}} \leqslant C_{15}. \tag{27}$$

Враховуючи (27) в нерівності (26), знаходимо

$$W_1^2(t) \leqslant C_{16} + C_{17} \int\limits_0^t \frac{W_1^4(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}.$$

В останній нерівності змінимо t на σ і, домноживши на $\dfrac{a(\sigma)}{\mu_3(\sigma)\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}}$, проінтегруємо її по σ від 0 до t. Використовуючи (27) та рівність

$$\int\limits_\tau^t \frac{a(\sigma)d\sigma}{\sqrt{(\theta(t)-\theta(\sigma))(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}} = \pi,$$

з отриманої нерівності матимемо

$$\int\limits_0^t \frac{a(\sigma)W_1^2(\sigma)}{\mu_3(\sigma)\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}}d\sigma \leqslant C_{18} + C_{19} \int\limits_0^t \frac{W_1^4(\tau)}{\tau^\beta}d\tau.$$

Підставляючи останню нерівність в (25), одержуємо

$$W_1(t) \leqslant C_{20} + C_{21} \int\limits_0^t \frac{W_1^4(\tau)}{\tau^\beta}d\tau.$$

Позначимо $H(t) = C_{20} + C_{21} \int\limits_0^t \dfrac{W_1^4(\tau)}{\tau^\beta}d\tau$. Тоді

$$H'(t) = C_{21}\frac{W_1^4(t)}{t^\beta} \leqslant C_{21}\frac{H^4(t)}{t^\beta}.$$

Проінтегрувавши, з цієї нерівності знаходимо

$$H(t) \leqslant \frac{C_{20}\sqrt[3]{(1-\beta)}}{\sqrt[3]{1-\beta-3C_{20}^3C_{21}t^{1-\beta}}} \leqslant M_3, \qquad t \in [0, t_2],$$

де число $t_2 : 0 < t_2 \leqslant T$ задовольняє умову

$$1-\beta-3C_{20}^3C_{21}t_2^{1-\beta} > 0.$$

Повертаючись до введених позначень, отримуємо

$$|\omega(y,t)| \leqslant M_3, \qquad t \in [0,t_2],\ y \in [0,1]. \tag{28}$$

Остання нерівність дає змогу оцінити $a(t)$ знизу

$$a(t) \geqslant \frac{H_0\mu_3(t)}{M_3} \geqslant A_0 t^\beta, \qquad A_0 > 0, \quad t \in [0,t_2]. \tag{29}$$

Використовуючи (28), (29), з (23), одержуємо

$$|p(t)| \leqslant M_4, \qquad t \in [0,t_2]. \tag{30}$$

Отож, оцінки розв'язків системи (13), (14), (17)-(19) з'ясовано.

Доведемо існування границі $\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{a(t)}{t^\beta} > 0$. З умов теореми випливає, що

$$\lim_{t\to+0} v_y(0,t) = \lim_{t\to+0} h_0 \int\limits_0^1 G_2(0,t,\eta,0)\varphi'(\eta h_0)d\eta = h_0\varphi'(0).$$

Тоді

$$\lim_{t\to+0}\frac{a(t)}{t^\beta} = \lim_{t\to+0}\frac{\mu_3(t)h(t)}{t^\beta v_y(0,t)} = \frac{M}{\varphi'(0)} > 0.$$

Подамо систему (13), (14), (17)-(19) у вигляді операторного рівняння $w = Pw$, де $w = (a(t),h(t),p(t),v(y,t),\omega(y,t))$, а оператор P визначається правими частинами рівнянь (13), (14), (17)-(19). Через N позначимо множину $N = \{(a(t),h(t),p(t),v(y,t),\omega(y,t)) \in (C[0,T_0])^3 \times (C(\overline{Q}_{T_0}))^2 : 0 < A_0 \leqslant \dfrac{a(t)}{t^\beta} \leqslant A_1 < \infty, 0 < H_0 \leqslant h(t) \leqslant H_1 < \infty,\ |p(t)| \leqslant M_4 < \infty,\ 0 < M_0 \leqslant v(y,t) \leqslant M_1 < \infty,\ |\omega(y,t)| \leqslant M_3 < \infty\}$, де $T_0 = \min\{t_1,t_2\}$. Визначені оцінки дають право стверджувати, що множина N опукла і замкнена, а оператор P переводить її в себе. Те, що оператор P цілком неперервний, доводиться аналогічно як в [1] і [7]. Тоді згідно з теоремою Шаудера існує розв'язок системи рівнянь (13), (14), (17)-(19), а, отже, і розв'язок задачі (6)-(10) при $t \in [0,T_0],\ y \in [0,1]$.

3. Єдиність розв'язку задачі (6)-(10).

Теорема 2. *Припустимо, що виконуються умови:*

B1) $b,c,f \in C^{1.0}([0,\infty)\times[0,T]),\ \varphi \in C^2[0,h_0],\ \mu_i \in C^1[0,T],\ i=1,2;$

B2) $\varphi(x) \geqslant \varphi_0 > 0, \quad x \in [0,\infty), \quad \mu_4(t) > 0, \quad t \in [0,T];$

B3) $\mu_2(t) \neq 0,\ t \in [0,T], \quad \dfrac{\mu_3(t)}{t^\beta} \neq 0,\ t \in [0,T].$

Тоді розв'язок задачі (6)-(10) єдиний.

Доведення. Припустимо, що існує два розв'язки $(a_i(t),h_i(t),v_i(y,t)),\ i=1,2$ задачі (6)-(10). Позначимо

$$r_i(t) = \frac{a_i(t)}{h_i^2(t)},\ q_i(t) = \frac{h_i'(t)}{h_i(t)}, \quad i=1,2, \tag{31}$$

$$r(t) = r_1(t) - r_2(t),\ q(t) = q_1(t) - q_2(t),\ v(y,t) = v_1(y,t) - v_2(y,t). \qquad (32)$$

Зазначені різниці задовольняють рівняння

$$\begin{aligned} v_t \ &= \ r_2(t)v_{yy} + \left(\frac{b(yh_2(t),t)}{h_2(t)} + yq_2(t)\right)v_y + c(yh_2(t),t)v + r(t)v_{1yy} + \\ &+\left(\frac{b(yh_1(t),t) - b(yh_2(t),t)}{h_1(t)} + b(yh_2(t),t)\left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)}\right) + yq(t)\right)v_{1y} + \\ &+(c(yh_1(t),t) - c(yh_2(t),t))v_1 + f(yh_1(t),t) - f(yh_2(t),t),\ (y,t) \in Q_T \qquad (33) \end{aligned}$$

та умови

$$v(y,0) = 0,\ y \in [0,1], \quad v(0,t) = v(1,t) = 0,\ t \in [0,T], \qquad (34)$$

$$r(t)v_{1y}(0,t) + r_2(t)v_y(0,t) = \mu_3(t)\left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)}\right), \qquad t \in [0,T], \qquad (35)$$

$$\int\limits_0^1 v(y,t)dy = \mu_4(t)\left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)}\right), \qquad t \in [0,T]. \qquad (36)$$

За допомогою функції Гріна $G_1^*(y,t,\eta,\tau)$ для рівняння

$$v_t = \frac{a_2(t)}{h_2^2(t)}v_{yy} + \left(\frac{b(yh_2(t),y)}{h_2(t)} + yq_2(t)\right)v_y + c(yh_2(t),t)v$$

розв'язок задачі (33), (34) подамо у вигляді

$$\begin{aligned} v(y,t) \ &= \ \int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_1^*(y,t,\eta,\tau)\Bigg(r(\tau)v_{1\eta\eta} + \bigg(\frac{b(\eta h_1(\tau),\tau) - b(\eta h_2(\tau),\tau)}{h_1(\tau)} + b(\eta h_2(\tau),\tau) \times \\ &\times\left(\frac{1}{h_1(\tau)} - \frac{1}{h_2(\tau)}\right) + \eta q(\tau)\bigg)v_{1\eta} + (c(\eta h_1(\tau),\tau) - c(\eta h_2(\tau),\tau))v_1 + \\ &+f(\eta h_1(\tau),\tau) - f(\eta h_2(\tau),\tau)\Bigg)d\eta d\tau, \qquad (y,t) \in \overline{Q}_T. \qquad (37) \end{aligned}$$

Позначимо $\omega_i(y,t) = v_{iy}(y,t),\ i = 1,2, \quad \omega(y,t) = v_y(y,t)$. Продиференціювавши (37) за y, отримаємо

$$\begin{aligned} \omega(y,t) \ &= \ \int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{1y}^*(y,t,\eta,\tau)\Bigg(r(\tau)v_{1\eta\eta} + \bigg(\frac{b(\eta h_1(\tau),\tau) - b(\eta h_2(\tau),\tau)}{h_1(\tau)} + b(\eta h_2(\tau),\tau) \times \\ &\times\left(\frac{1}{h_1(\tau)} - \frac{1}{h_2(\tau)}\right) + \eta q(\tau)\bigg)v_{1\eta} + (c(\eta h_1(\tau),\tau) - c(\eta h_2(\tau),\tau))v_1 + \\ &+f(\eta h_1(\tau),\tau) - f(\eta h_2(\tau),\tau)\Bigg)d\eta d\tau, \qquad (y,t) \in \overline{Q}_T. \qquad (38) \end{aligned}$$

Знайдемо оцінку функції $v_{1yy}(y,t)$. Позначимо через $G_k^{(1)}(y,t,\eta,\tau)$, $k=1,2$ функції Гріна для рівняння

$$v_{1t}=\frac{a_1(t)}{h_1^2(t)}v_{1yy}$$

з крайовими умовами відповідно першого та другого роду. Тоді розв'язок $v_1(y,t)$ задачі (6)-(8) подамо у вигляді (15). Використовуючи властивості функції Гріна, знаходимо

$$\begin{aligned} v_{1yy}(y,t) \quad = \quad & h_0^2\int\limits_0^1 G_1^{(1)}(y,t,\eta,0)\,\varphi''(\eta h_0)d\eta+\int\limits_0^t G_{1\eta}^{(1)}(y,t,0,\tau)\biggl(\mu_1'(\tau)-f(0,\tau)-\\ & -\frac{b(0,\tau)}{h_1(\tau)}\omega_1(0,\tau)-c(0,\tau)\mu_1(\tau)\biggr)d\tau-\int\limits_0^t G_{1\eta}^{(1)}(y,t,1,\tau)\biggl(\mu_2'(\tau)-\\ & -f(h_1(\tau),\tau)-\frac{b(h_1(\tau),\tau)+p_1(\tau)}{h_1(\tau)}\omega_1(1,\tau)-c(h_1(\tau),\tau)\mu_2(\tau)\biggr)d\tau-\\ & -\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{1\eta}^{(1)}(y,t,\eta,\tau)\biggl(h_1(\tau)f_\eta(\eta h_1(\tau),\tau)+\frac{h_1(\tau)b_\eta(\eta h_1(\tau),\tau)+p_1(\tau)}{h_1(\tau)}\times\\ & \times\omega_1(\eta,\tau)+h_1(\tau)c_\eta(\eta h_1(\tau),\tau)v_1(\eta,\tau)+c(\eta h_1(\tau),\tau)\omega_1(\eta,\tau)\biggr)d\eta d\tau-\\ & -\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{1\eta}^{(1)}(y,t,\eta,\tau)\left(\frac{b(\eta h_1(\tau),\tau)}{h_1(\tau)}+\frac{\eta p_1(\tau)}{h_1(\tau)}\right)v_{1\eta\eta}(\eta,\tau)d\eta d\tau=\sum_{i=1}^4 I_i-\\ & -\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{1\eta}^{(1)}(y,t,\eta,\tau)\,\frac{b(\eta h_1(\tau),\tau)+\eta p_1(\tau)}{h_1(\tau)}v_{1\eta\eta}(\eta,\tau)d\eta d\tau,\ (y,t)\in Q_T. \end{aligned} \tag{39}$$

Оцінимо кожен з доданків інтегрального рівняння (39). Оскільки $G_1^{(1)}(y,t,\eta,0)<$ $<G_2^{(1)}(y,t,\eta,0)$, то для I_1 отримуємо

$$|I_1|\leqslant h_0^2\max_{y\in[0,1]}|\varphi''(yh_0)|\int\limits_0^1 G_2^{(1)}(y,t,\eta,0)d\eta\leqslant C_{22}.$$

Оцінимо I_2, використовуючи вигляд функції $G_{1\eta}(y,t,\eta,\tau)$

$$|I_2|\leqslant C_{23}\int\limits_0^t|G_{1\eta}^{(1)}(y,t,0,\tau)|d\tau\leqslant C_{24}t^{-\frac{3\beta+1}{2}}\int\limits_0^1 z^{-\frac{2}{3}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|y+2n|\exp\biggl(-\frac{C_{25}(y+2n)^2}{t^{1+\beta}z}\biggr)dz.$$

Після заміни змінних $\sigma=\sqrt{\dfrac{C_{25}}{t^{1+\beta}z}}(y+2n)$, використовуючи вигляд інтеграла ймовірності та його властивості, отримуємо

$$|I_2| \leqslant \frac{C_{26}}{t^{\beta}}.$$

Аналогічно $|I_3| \leqslant \dfrac{C_{27}}{t^{\beta}}$. Для I_4 запишемо

$$|I_4| \leqslant C_{28} \int\limits_0^t \int\limits_0^1 |G_{1\eta}^{(1)}(y,t,\eta,\tau)| d\eta d\tau \leqslant C_{29} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta_1(t) - \theta_1(\tau)}} \leqslant C_{30} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}}} \leqslant$$

$$\leqslant C_{31} t^{\frac{1-\beta}{2}}.$$

Отже,

$$\sum_{i=1}^{4} |I_i| \leqslant \frac{C_{32}}{t^{\beta}}. \tag{40}$$

З оцінки для I_4 випливає, що ядро інтегрального рівняння (39) має інтегровну особливість. Тоді, враховуючи (40), отримуємо таку оцінку для функції $v_{1yy}(y,t)$

$$|v_{1yy}(y,t)| \leqslant \frac{C_{33}}{t^{\beta}}. \tag{41}$$

Згідно з умовою $(B3)$ теореми $v_{1y}(0,t) \neq 0, \ t \in [0,T]$. Тоді з умови (35) знаходимо

$$r(t) v_{1y}(0,t) = -r_2(t) v_y(0,t) + \mu_3(t) \left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)} \right), \qquad t \in [0,T]. \tag{42}$$

Оскільки $(a_i(t), h_i(t), v_i(y,t)), \quad i = 1,2$ – розв'язки задачі (6)-(10), то для $q_i(t), \ i = 1,2$ правильні рівності

$$q_i(t)\mu_2(t) = \frac{\mu_4'(t)}{h_i(t)} - r_i(t)(\omega_i(1,t) - \omega_i(0,t)) - \frac{1}{h_i(t)} \int\limits_0^1 b(yh_i(t),t)\omega_i(y,t)dy - \int\limits_0^1 (c(yh_i(t),t) \times$$

$$\times v_i(y,t) + f(yh_i(t),t))dy, \ i = 1,2.$$

Віднявши їх, приходимо до рівняння

$$\mu_2(t)q(t) = \mu_4'(t)\left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)}\right) - r(t)(\omega_1(1,t) - \omega_1(0,t)) - r_2(t)(\omega(1,t) - \omega(0,t)) -$$
$$-\left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)}\right)\int_0^1 b(yh_1(t),t)\omega_1(y,t)dy - \frac{1}{h_2(t)}\int_0^1 \Big((b(yh_1(t),t) -$$
$$-b(yh_2(t),t))\omega_1(y,t) + b(yh_2(t),t)\omega(y,t)\Big)dy - \int_0^1 ((c(yh_1(t),t) -$$
$$-c(yh_2(t),t))v_1(y,t) + c(yh_2(t),t)v(y,t))dy + \int_0^1 (f(yh_1(t),t) -$$
$$-f(yh_2(t),t))dy, \quad t \in [0,T]. \tag{43}$$

Виразимо $h_i(t)$, $i = 1,2$ через $q_i(t)$, $i = 1,2$. Для цього скористаємося позначенням (31)

$$h_i(t) = h_i(0)\exp\left(\int_0^t q_i(\tau)d\tau\right), \qquad i = 1,2.$$

Згідно з умовою $(B2)$ теореми $h_1(0) = h_2(0) = h_0$. Тоді, використовуючи рівність

$$e^x - e^y = (x-y)\int_0^1 e^{y+\tau(x-y)}d\tau,$$

отримуємо

$$h_1(t) - h_2(t) = h_0\int_0^1 q(\tau)d\tau\int_0^1 \exp\left(\int_0^t (\sigma q(\tau) + q_2(\tau))d\tau\right)d\sigma. \tag{44}$$

$$\frac{1}{h_1^k(t)} - \frac{1}{h_2^k(t)} = -\frac{k}{h_0^k}\int_0^1 q(\tau)d\tau\int_0^1 \exp\left(-k\int_0^t (\sigma q(\tau) + q_2(\tau))d\tau\right)d\sigma, \quad k = 1,2. \tag{45}$$

Припущення $(B1)$ теореми забезпечує правильність перетворення

$$f(yh_1(t),t) - f(yh_2(t),t) = y(h_1(t) - h_2(t))\int_0^1 f_x(y(h_2(t) + \sigma(h_1(t) - h_2(t))),t)d\sigma. \tag{46}$$

Аналогічні перетворення виконуються для функцій $b(y,t)$ та $c(y,t)$.

Підставивши (37), (38), (44)-(46) в (42), (43), отримаємо систему однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду стосовно невідомих $r(t), q(t)$ з ядрами, що мають інтегровні особливості. З єдиності розв'язку таких систем одержуємо

$$r(t) \equiv 0, \quad q(t) \equiv 0, \ t \in [0, T],$$

або згідно з (31), (32)

$$a_1(t) \equiv a_2(t), \quad h_1(t) \equiv h_2(t), \quad t \in [0, T].$$

Використовуючи це в задачі (33), (34), знаходимо

$$v_1(y, t) \equiv v_2(y, t), \quad (y, t) \in \overline{Q}_T,$$

що й завершує доведення теореми.

---

1. *Салдіна Н.* Обернена задача для параболічного рівняння з виродженням // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.– мат.– 2005.– Вип. 64.– С. 245-257.

2. *Іванчов М.І.* Обернена задача з вільною межею для рівняння теплопровідності // Укр. мат. журн.– 2003.– 55, №7.– С. 901-910.

3. *Гаджиев М. М.* Обратная задача для вырождающегося эллиптического уравнения // Применение методов функц. анал. в уравнениях мат. физ.– Новосибирск, 1987.– С. 66-71.

4. *Елдесбаев Т.* Об одной обратной задаче для вырождающегося гиперболического уравнения второго порядка // Известия АН КазССР. Серия физ.-мат.– 1987.– №3.– С. 27-29.

5. *Lorenzi L.* An identification problem for a one-phase Stefan problem // J. Inv. Ill-Posed Problems.– 2001.– Vol. 9, №6.– P. 1-27.

6. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.– М., 1967.

7. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type.– Lviv: VNTL Publishers, 2003.

AN INVERSE PROBLEM FOR A DEGENERATE PARABOLIC EQUATION IN A FREE BOUNDARY DOMAIN

Nadiya Hryntsiv

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

In a free boundary domain we establish conditions of the existence and uniqueness of a solution of inverse problem for a weakly degenerate parabolic equation with unknown time-dependent coefficient at the higher-order derivative which vanishes at the initial moment as a power $t^{\beta}, 0 < \beta < 1$.

Key words: inverse problem with degeneration, free bondary, parabolic equation.

Стаття надійшла до редколегії 19.06.2006

Прийнята до друку 02.11.2006

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2006. Вип.66. С.60–69 *Ser.Mech-Math.2006. Vol.66. P.60–69*

УДК 519.212

ДОСЛІДЖЕННЯ СТАЦІОНАРНОГО ПРОЦЕСУ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ ДЛЯ ОДНОКАНАЛЬНИХ СИСТЕМ З НЕОДНОРІДНИМИ ЗАМОВЛЕННЯМИ

Юрій ЖЕРНОВИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

Для систем масового обслуговування G/G/1/0 і M/G/1/m з неоднорідними замовленнями визначено умови існування та ймовірності станів граничного стаціонарного процесу.

Ключові слова: одноканальна система масового обслуговування, неоднорідні замовлення, граничний стаціонарний процес, розподіл імовірностей.

1. Існування граничного стаціонарного процесу для марковських систем масового обслуговування (СМО), які функціонують за схемою „загибелі-розмноження“, випливає з ергодичності відповідного марковського процесу [1, 2]. Опираючись на теорію марковських процесів з дискретними станами і неперервним часом, для класичних СМО з відмовами, СМО з чергою та деяких модифікацій цих систем, починаючи від досліджень А. К. Ерланга [3], були отримані формули для стаціонарних імовірностей станів у припущенні показникового розподілу часу між моментами надходження замовлень і часу обслуговування. Для СМО з відмовами Б. А. Севастьянов [4] довів придатність цих формул для довільного розподілу часу обслуговування. Середню кількість замовлень у черзі для одноканальної СМО з необмеженою чергою у випадку найпростішого потоку замовлень і довільного часу обслуговування можна знайти за формулою Полячека-Хінчина [5]. Для такої СМО з рекурентним потоком замовлень існують лише наближені оцінки середньої довжини черги і середнього часу перебування у черзі. Для СМО M/G/1/m вдалося визначити [6] ймовірності станів граничного стаціонарного процесу.

Задача про обслуговування неоднорідних замовлень розглянута (див. [6, розд. 4]) лише для СМО з найпростішими потоками у такому формулюванні: на вхід СМО надходять два незалежні потоки замовлень з показниковим розподілом часу між сусідніми подіями потоків з параметрами λ_1 і λ_2 відповідно. Час обслуговування для кожного типу замовлень також показниковий відповідно з параметрами μ_1 і μ_2.

Дослідження ергодичних властивостей систем масового обслуговування з непуассонівськими потоками у переважній більшості випадків не вдається провести за допомогою теорії марковських процесів. Одним з шляхів вирішення цієї проблеми може бути детальний аналіз процесів масового обслуговування на великому проміжку часу. У цій праці з'ясовано умови існування граничного стаціонарного процесу і визначено стаціонарні ймовірності станів для СМО G/G/1/0 та M/G/1/m з неоднорідними замовленнями. Формулювання задачі про неоднорідні замовленння відрізняється від розглянутого в [6] і дає змогу розглядати n типів замовлень з різними розподілами часу обслуговування.

2. Одноканальна СМО з відмовами. У класичній СМО з відмовами замовлення, які прибувають у момент зайнятості всіх каналів, отримують відмову, покидають систему і не повертаються.

Розглянемо одноканальну СМО з відмовами і неоднорідними замовленнями. Припустимо, що на вхід системи надходить стаціонарний ординарний потік замовлень з довільно розподіленим часом T_λ між сусідніми подіями потоку. Серед замовлень, які потрапили на обслуговування, розрізнятимемо n типів замовлень. Нехай α_i $(i=\overline{1,n})$ — ймовірність того, що замовлення, яке надійшло на обслуговування, є замовленням i-го типу з часом обслуговування T_{μ_i} (довільно розподілена випадкова величина). Припустимо, що $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=1$, а випадкові величини T_λ і T_{μ_i} $(i=\overline{1,n})$ мають скінченні математичні сподівання $m_\lambda = M(T_\lambda)$, $m_{\mu_i}=M(T_{\mu_i})$ $(i=\overline{1,n})$.

Проаналізуємо роботу системи на дуже великому проміжку часу T. За початок відліку часу приймемо момент надходження першого замовлення і зупинимо відлік часу в момент завершення обслуговування чергового замовлення.

Процес функціонування системи є чергуванням випадкових проміжків часу тривалістю T_{μ_i} (з якимось одним $i=\overline{1,n}$) і T_{0i} з тим самим i (час від моменту завершення обслуговування чергового замовлення типу i до моменту прибуття наступного). Якщо N — кількість замовлень, що надійшли в систему за час T, $N_{\text{обс}}$ — кількість обслужених замовлень за цей час, то виконується наближена рівність

$$T \approx (N-1)m_\lambda + \tilde{m}_\mu \approx \sum_{i=1}^{n}\alpha_i N_{\text{обс}}(m_{\mu_i}+m_{0i}) - m_{0j}, \qquad (1)$$

де $m_{0i}=M(T_{0i})$, j — тип останнього обслуженого замовлення, $\tilde{m}_\mu$ — час від моменту надходження останнього замовлення до завершення часу T. Якщо останнє замовлення, що надійшло за час T, встигло пройти обслуговування, то в (1) треба прийняти $\tilde{m}_\mu = m_{\mu_j}$.

Рівність (1) виконується тим точніше, чим триваліший проміжок часу T розглядається (чим більше N). Виразивши з (1) відношення $N_{\text{обс}}/N$ і перейшовши до границі при $N\to\infty$, визначимо ймовірність обслуговування замовлення, що надійшло в систему,

$$P_{\text{обс}} = \lim_{N\to\infty} \frac{N_{\text{обс}}}{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{m_\lambda + \dfrac{\tilde{m}_\mu + m_{0j} - m_\lambda}{N}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i (m_{\mu_i} + m_{0i})} = \frac{m_\lambda}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i (m_{\mu_i} + m_{0i})}. \qquad (2)$$

Отриманий результат не зміниться, якщо за початок чи кінець проміжка часу T взяти будь-який інший момент функціонування системи, тому одержана формула для ймовірності обслуговування відповідає граничному стаціонарному процесу для одноканальної СМО з відмовами. Вигляд правої частини (2) дає підстави стверджувати, що **умовою існування граничного стаціонарного процесу є існування скінченних математичних сподівань випадкових величин** T_λ**,** T_{μ_i} **і** T_{0i} $(i = \overline{1,n}\,)$.

Пронумеруємо стани системи, які відповідають граничному стаціонарному процесу, відповідно до кількості замовлень у системі: s_0 — система вільна, s_1 — в системі є одне замовлення, s_{1i} — в системі є одне замовлення i-го типу. Оскільки для стаціонарного процесу ймовірність перебування системи в певному стані дорівнює середньому відносному часу перебування системи у цьому стані, то для ймовірностей станів граничного стаціонарного процесу з (1) отримаємо формули

$$\begin{gathered} p_0 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i m_{0i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i (m_{\mu_i} + m_{0i})} = \frac{P_{\text{обс}}}{m_\lambda} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_{0i}, \\ p_1 = \frac{P_{\text{обс}}}{m_\lambda} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_{\mu_i}, \qquad p_{1i} = \frac{P_{\text{обс}}}{m_\lambda} \alpha_i m_{\mu_i} \quad (i = \overline{1,n}\,), \end{gathered} \qquad (3)$$

де p_j, p_{1i} — стаціонарна ймовірність перебування системи в стані s_j $(\,j = 0, 1\,)$, s_{1i} $(i = \overline{1,n}\,)$ відповідно.

Перейдемо до аналізу випадкової величин T_{0i} $(i = \overline{1,n}\,)$. Оскільки для всіх $i = \overline{1,n}$ проміжки часу T_λ і T_{μ_i} починаються одночасно, то тривалість часу T_{0i} залежить від кількості замовлень, що надійшли в систему за час обслуговування одного замовлення T_{μ_i}. Маємо $T_{0i} = T_\lambda - T_{\mu_i}$, якщо за час T_{μ_i} не надійшло жодного замовлення (подія A_{1i}); $T_{0i} = T_\lambda + T_\lambda - T_{\mu_i}$, якщо за час T_{μ_i} надійшло одне замовлення (подія A_{2i}); $T_{0i} = T_\lambda + T_\lambda + T_\lambda - T_{\mu_i}$, якщо за час T_{μ_i} надійшло два замовлення (подія A_{3i}) і так далі. Ймовірності подій A_{ki} $(\,k = 1, 2, \dots)$ відповідно дорівнюють

$$\begin{gathered} P(A_{1i}) = q_{1i} = P\{T_{\mu_i} < T_\lambda\}; \quad P(A_{2i}) = q_{2i} = P\{T_\lambda \leqslant T_{\mu_i} < T_\lambda + T_\lambda\}; \\ P(A_{3i}) = q_{3i} = P\{T_\lambda + T_\lambda \leqslant T_{\mu_i} < T_\lambda + T_\lambda + T_\lambda\}, \ \dots \quad (i = \overline{1,n}\,). \end{gathered}$$

Визначимо математичне сподівання випадкової величини T_{0i}: $M(T_{0i}) = m_\lambda - m_{\mu_i}$ з імовірністю q_{1i}; $M(T_{0i}) = 2m_\lambda - m_{\mu_i}$ з імовірністю q_{2i}; $M(T_{0i}) = 3m_\lambda - m_{\mu_i}$ з імовірністю q_{3i} і так далі. Математичне сподівання m_{0i} можемо обчислити за формулою повного математичного сподівання

$$m_{0i} = \sum_{k=1}^{\infty} (k m_\lambda - m_{\mu_i}) q_{ki} = m_\lambda \sum_{k=1}^{\infty} k q_{ki} - m_{\mu_i} \quad (i = \overline{1,n}\,).$$

Тут враховано, що $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q_{ki} = 1$, оскільки події A_{ki} $(k = 1, 2, \dots)$ утворюють повну групу попарно несумісних подій.

Підсумуємо викладені міркування.

Теорема. *Якщо потік замовлень і потоки обслуговувань є стаціонарними ординарними потоками зі скінченними математичними сподіваннями інтервалів часу між сусідніми подіями $M(T_\lambda) = m_\lambda$, $M(T_{\mu_i}) = m_{\mu_i}$ $(i = \overline{1,n})$ і збігаються числові ряди*

$$
\begin{gathered}
S_{qi} = \sum_{k=1}^{\infty} k q_{ki} \qquad (i = \overline{1,n}) \\
q_{ki} = P\{\underbrace{T_\lambda + \ldots + T_\lambda}_{(k-1)\ \text{доданків}} \leqslant T_{\mu_i} < \underbrace{T_\lambda + \ldots + T_\lambda}_{k\ \text{доданків}}\}, \quad (k = 1, 2, \dots, \quad i = \overline{1,n}),
\end{gathered} \tag{5}
$$

то для одноканальної СМО з відмовами і неоднорідними замовленнями існує граничний стаціонарний процес, для якого ймовірність обслуговування і ймовірності станів системи визначаються за формулами:

$$
\begin{gathered}
P_{\text{обс}} = \frac{m_\lambda}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i (m_{\mu_i} + m_{0i})} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i S_{qi}}, \qquad p_0 = \frac{P_{\text{обс}}}{m_\lambda} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_{0i}, \\
p_1 = \frac{P_{\text{обс}}}{m_\lambda} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_{\mu_i}, \qquad p_{1i} = \frac{P_{\text{обс}}}{m_\lambda} \alpha_i m_{\mu_i} \quad (i = \overline{1,n}), \\
m_{0i} = m_\lambda S_{qi} - m_{\mu_i} \qquad (i = \overline{1,n}).
\end{gathered} \tag{6}
$$

Оскільки $S_{qi} = M(X_i) + 1$ $(i = \overline{1,n})$, де X_i — кількість замовлень, що надійшли у систему за час T_{μ_i}, то збіжність i-го ряду (5) означає, що середня кількість замовлень, що надходять у систему за час обслуговування одного замовлення i-го типу T_{μ_i} $(i = \overline{1,n})$, є скінченною.

Якщо в формулах (6) прийняти $\alpha_j = 1$, $\alpha_i = 0$ $(i = \overline{1,n},\ i \neq j)$, то отримаємо розподіл імовірностей, що відповідає граничному стаціонарному процесу для СМО G/G/1/0 з однотипними замовленнями.

Наведемо результати обчислення сум рядів (5) і ймовірностей (6) для деяких типових розподілів випадкових величин T_λ і T_{μ_i} $(i = \overline{1,n})$.

Приклад 2.1. *Випадкові величини T_λ і T_{μ_i} $(i = \overline{1,n})$ розподілені за законами Ерланга другого порядку з параметрами λ і μ_i $(i = \overline{1,n})$ відповідно.*

Маємо

$$S_{q_i} = \mu_i^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\big(2k\lambda + (2k-1)(\lambda+\mu_i)\big)\lambda^{2k-2}}{(\lambda+\mu_i)^{2k+1}} =$$

$$= \frac{(\lambda+\mu_i)(4\lambda^2+3\lambda\mu_i+\mu_i^2)}{\mu(2\lambda+\mu_i)^2} \qquad (i=\overline{1,n});$$

$$P_{\text{обс}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i(\lambda+\mu_i)(4\lambda^2+3\lambda\mu_i+\mu_i^2)}{\mu_i(2\lambda+\mu_i)^2}\right)^{-1}, \ p_1 = \frac{\lambda \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\alpha_i}{\mu_i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\alpha_i(\lambda+\mu_i)(4\lambda^2+3\lambda\mu_i+\mu_i^2)}{\mu_i(2\lambda+\mu_i)^2}},$$

$$p_0 = 1 - p_1; \qquad p_{1i} = \frac{\lambda\alpha_i}{\mu_i \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\alpha_k(\lambda+\mu_k)(4\lambda^2+3\lambda\mu_k+\mu_k^2)}{\mu_k(2\lambda+\mu_k)^2}} \quad (i=\overline{1,n}).$$

Приклад 2.2. *Час T_λ розподілений за законом Ерланга другого порядку з параметром λ, потоки обслуговувань регулярні ($T_{\mu_i} = T_i = const,\ i=\overline{1,n}$).*

$$S_{q_i} = e^{-\lambda T_i} \sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{(\lambda T_i)^{2k-2}}{(2k-2)!} + \frac{(\lambda T_i)^{2k-1}}{(2k-1)!}\right) = \frac{1}{4}\big(3 + 2\lambda T_i + e^{-2\lambda T_i}\big) \quad (i=\overline{1,n});$$

$$P_{\text{обс}} = \frac{4}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\big(3+2\lambda T_i + e^{-2\lambda T_i}\big)}, \qquad p_1 = \frac{2\lambda \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i T_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\big(3+2\lambda T_i + e^{-2\lambda T_i}\big)},$$

$$p_0 = 1 - p_1; \qquad p_{1i} = \frac{2\lambda\alpha_i T_i}{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k\big(3+2\lambda T_k + e^{-2\lambda T_k}\big)} \quad (i=\overline{1,n}).$$

Приклад 2.3. *Потік замовлень регулярний ($T_\lambda = T = const$), потоки обслуговувань найпростіші ($T_{\mu_i} = 1/\mu_i,\ i=\overline{1,n}$).*

$$S_{q_i} = \sum_{k=1}^{\infty} k\big(e^{-(k-1)\mu_i T} - e^{-k\mu_i T}\big) = \frac{1}{1-e^{-\mu_i T}} \qquad (i=\overline{1,n});$$

$$P_{\text{обс}} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\alpha_i}{1-e^{-\mu_i T}}}; \qquad p_1 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\alpha_i}{\mu_i}}{T\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\alpha_i}{1-e^{-\mu_i T}}}, \qquad p_0 = 1 - p_1;$$

$$p_{1i} = \frac{\alpha_i}{\mu_i T \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\alpha_k}{1-e^{-\mu_k T}}} \qquad (i=\overline{1,n}).$$

3. Одноканальна СМО з обмеженою кількістю місць у черзі. Розглянемо СМО M/G/1/m з найпростішим потоком замовлень ($M(T_\lambda) = m_\lambda = 1/\lambda$), в якій кількість місць у черзі не може перевищувати числа m. Як і раніше, розрізнятимемо n типів замовлень з часом обслуговування, який дорівнює відповідно T_{μ_i} $(i=\overline{1,n})$ для замовлення i-го типу; α_i $(i=\overline{1,n})$ — ймовірність того, що замовлення, яке надійшло на обслуговування, є замовленням i-го типу. Припустимо, що $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=1$, і випадкові величини T_{μ_i} $(i=\overline{1,n})$ мають скінченні математичні сподівання $m_{\mu_i}=M(T_{\mu_i})$ $(i=\overline{1,n})$.

Введемо нумерацію станів системи: станові s_i $(i=\overline{0,\,m+1})$ відповідає наявність у системі i замовлень.

Нехай N_k — кількість замовлень, які залишаються в системі в той момент, коли k-е обслужене замовлення, завершивши обслуговування, покидає систему. Тоді подія $\{N_k=j\}$ означає, що k-е обслужене замовлення, покидаючи систему, миттєво переводить її до стану s_j. За формулою повної ймовірності $P\{N_k=j\}=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i P\{N_{ki}=j\}$, де N_{ki} – кількість замовлень, які перебувають у системі в той момент, коли k-е обслужене замовлення, яке є замовленням i-го типу, завершивши обслуговування, покидає систему.

Знову, використовуючи формулу повної ймовірності, можемо записати

$$\begin{gathered}P\{N_{k+1,\,i}=j\}=\sum_{s=0}^{m}P\{N_{k+1,\,i}=j\,|\,N_k=s\}P\{N_k=s\},\\ j=\overline{0,\,m-1};\quad k=1,\,2,\ldots;\quad i=\overline{1,\,n}.\end{gathered}\tag{7}$$

Перехідні ймовірності $P\{N_{k+1,\,i}=j\,|\,N_k=s\}$ не залежать від номера обслуженого замовлення k, а визначаються з врахуванням кількості замовлень, які надходять у систему за час обслуговування одного замовлення i-го типу T_{μ_i}

$$p_{jsi}=P\{N_{k+1,\,i}=j\,|\,N_k=s\}=\begin{cases}\pi_{ji}, & s=0;\\ \pi_{j-s+1,\,i}, & s=\overline{1,\,j+1};\\ 0, & s>j+1,\end{cases}$$

де π_{ji} — ймовірність того, що в найпростішому потоці інтенсивності λ за час T_{μ_i} відбудеться j подій. Якщо T_{μ_i} — неперервна випадкова величина, то

$$\pi_{ji}=\int\limits_0^{\infty}\frac{(\lambda t)^j}{j!}e^{-\lambda t}p_i(t)\,dt\qquad(j=\overline{0,\,m},\quad i=\overline{1,\,n}).$$

Тут $p_i(t)$ — щільність розподілу ймовірностей випадкової величини T_{μ_i}.

Для СМО M/G/1/m з однотипними замовленнями існування граничного стаціонарного процесу випливає з ергодичної теореми для однорідного ланцюга Маркова зі скінченною множиною станів (див. [7, с. 61] або [8, с. 67]). Оскільки час обслуговування одного замовлення має довільний розподіл, то моменти зміни станів процесу, що описує еволюцію системи, вибирають так, щоб цей процес володів марковською властивістю. Для цього достатньо за моменти зміни станів вибрати саме ті моменти, коли чергове обслужене замовлення покидає систему, а в саму множину станів включити всілякі можливі значення числа j ($j = \overline{0,\, m}$) — кількості замовлень, що залишаються в системі в момент завершення обслуговування замовлення [2, с. 98]. Для системи з неоднорідними замовленнями однорідність аналогічно побудованого ланцюга Маркова збережеться, оскільки перехідні ймовірності для нього, використавши формулу повної ймовірності, можна записати у вигляді

$$p_{js} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_{jsi} \qquad (j,\, s = \overline{0,\, m}).$$

Отже, існують границі

$$\Pi_{ji} = \lim_{k\to\infty} P\{\, N_{k,\,i} = j\,\}, \quad \Pi^*_{ji} = \lim_{k\to\infty} P\{\, N_k = j\,\} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Pi_{ji} \quad (j = \overline{0,\, m}),$$

і для граничного стаціонарного процесу обслуговування співвідношення (7) набувають вигляду

$$\Pi_{ji} = \pi_{ji}\, \Pi^*_0 + \sum_{k=1}^{j} \pi_{j-k+1,\, i}\, \Pi^*_k + \pi_{0i}\, \Pi^*_{j+1} \quad (j = \overline{0,\, m-1}, \quad i = \overline{1,\, n}). \tag{8}$$

Просумуємо рівняння (8) за i, домноживши кожне i-е рівняння на α_i ($i = \overline{1,\, n}$). Матимемо

$$\Pi^*_j = \pi_j\, \Pi^*_0 + \sum_{k=1}^{j} \pi_{j-k+1}\, \Pi^*_k + \pi_0\, \Pi^*_{j+1} \qquad (j = \overline{0,\, m-1}),$$

де $\pi_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \pi_{ji}$ ($j = \overline{0,\, m-1}$). Звідси отримаємо рекурентні співвідношення, які дають змогу послідовно визначати Π^*_j — стаціонарні ймовірності події $\{$обслужене замовлення, покидаючи систему, миттєво переводить її до стану $s_j\,\}$

$$\Pi^*_{j+1} = \pi_0^{-1}\left(\Pi^*_j - \pi_j\, \Pi^*_0 - \sum_{k=1}^{j} \pi_{j-k+1}\, \Pi^*_k\right) \qquad (j = \overline{0,\, m-1}\,); \tag{9}$$

$$\sum_{j=0}^{m} \Pi^*_j = 1. \tag{10}$$

Зокрема, для $m = 1,\, 2$ з (9), (10) отримаємо

$$\Pi^*_0 = \pi_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \pi_{0i}, \qquad \Pi^*_1 = 1 - \pi_0 \qquad (m = 1\,);$$

$$\Pi^*_0 = \frac{\pi_0^2}{1-\pi_1}, \qquad \Pi^*_1 = \frac{\pi_0(1-\pi_0)}{1-\pi_1}, \qquad \Pi^*_2 = \frac{1-\pi_0-\pi_1}{1-\pi_1} \qquad (m = 2\,).$$

Для граничного стаціонарного процесу обслуговування позначимо через p_j ($j = \overline{0,\, m+1}$) ймовірність перебування системи в стані s_j. Опираючись на теорему [6, с. 187], яка поширюється на всі процеси, що відбуваються за схемою „загибелі–розмноження", і враховуючи, що потік замовлень найпростіший, можемо стверджувати, що розподіл імовірностей Π_j^* ($j = \overline{0,\, m}$) збігається з розподілом імовірностей p_j, за умови, що $j \leq m$. Це означає, що для $j \leq m$ імовірності p_j є розв'язками системи рівнянь (9), але без умови (10), тобто

$$p_j = c\Pi_j^* \qquad (j = \overline{0,\, m}), \tag{11}$$

де c – додатна стала, яку треба знайти.

Враховуючи, що система одноканальна, а потік замовлень найпростіший, математичне сподівання кількості зайнятих каналів (середню кількість зайнятих каналів) можемо визначити у вигляді

$$\overline{k} = 1 - p_0 = \lambda m_\mu (1 - p_{m+1}), \qquad m_\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_{\mu_i},$$

звідки

$$p_{m+1} = \frac{\lambda m_\mu - (1 - p_0)}{\lambda m_\mu}. \tag{12}$$

Підставивши (11) і (12) в ліву частину рівності $\sum\limits_{j=0}^{m+1} p_j = 1$ і використавши (10), одержимо

$$c \sum_{j=0}^{m} \Pi_j^* + \frac{1}{\lambda m_\mu}(c\Pi_0^* - 1 + \lambda m_\mu) = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{\lambda m_\mu \sum\limits_{j=0}^{m} \Pi_j^* + \Pi_0^*} = \frac{1}{\lambda m_\mu + \Pi_0^*}\,.$$

Отже, можемо записати остаточні формули для стаціонарного розподілу ймовірностей станів системи, а також для деяких показників ефективності цієї СМО:

$$\begin{gathered} p_j = \frac{\Pi_j^*}{\lambda m_\mu + \Pi_0^*} \quad (j = \overline{0,\, m}), \quad p_{m+1} = 1 - \frac{1 - p_0}{\lambda m_\mu} = \frac{\lambda m_\mu + \Pi_0^* - 1}{\lambda m_\mu + \Pi_0^*}; \\ P_{\text{обс}} = 1 - p_{m+1} = \frac{1}{\lambda m_\mu + \Pi_0^*}; \qquad \overline{k} = 1 - p_0 = \frac{\lambda m_\mu}{\lambda m_\mu + \Pi_0^*}, \end{gathered} \tag{13}$$

де $P_{\text{обс}}$ – стаціонарна ймовірність обслуговування для замовлення, що надійшло в систему.

Прийнявши $\alpha_j = 1$, $\alpha_i = 0$ ($i = \overline{1, n}$, $i \neq j$), з формул (13) як частковий випадок одержимо розподіл імовірностей [6, с. 237], що відповідає граничному стаціонарному процесу для СМО M/G/1/m з однотипними замовленнями.

Використовуючи знайдені ймовірності p_j ($j = \overline{0,\, m+1}$), можна обчислити середню кількість замовлень у черзі $\overline{r} = \sum\limits_{j=2}^{m+1} (j-1)p_j$, а у випадку $m = 1$, коли $\Pi_0^* = \pi_0$

і

$$\overline{r} = p_2 = \frac{\lambda m_\mu + \pi_0 - 1}{\lambda m_\mu + \Pi_0^*} = \frac{m_\mu - \dfrac{1-\pi_0}{\lambda}}{m_\mu + \dfrac{\Pi_0^*}{\lambda}},$$

можна знайти і середній час перебування замовлення у черзі

$$\overline{t}_r = m_\mu - \frac{1-\pi_0}{\lambda}\,.$$

Приклад 3.1. *Розглянемо СМО M/G/1/1 з замовленнями n типів: з імовірністю α_i ($i = \overline{1,n}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$) замовлення, що потрапило на обслуговування, є замовленням i-го типу, і для нього час обслуговування T_{μ_i} — випадкова величина, рівномірно розподілена на проміжку (a_i, b_i) ($i = \overline{1,n}$).*

Маємо

$$m_{\mu_i} = \frac{a_i + b_i}{2}, \quad m_\mu = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (a_i + b_i); \qquad \Pi_0^* = \pi_0 = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i (e^{-\lambda a_i} - e^{-\lambda b_i})}{b_i - a_i},$$

$$\Pi_1^* = 1 - \pi_0; \qquad p_0 = \frac{\dfrac{1}{\lambda}\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\alpha_i (e^{-\lambda a_i} - e^{-\lambda b_i})}{b_i - a_i}}{\dfrac{\lambda}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i (a_i + b_i) + \dfrac{1}{\lambda}\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\alpha_i (e^{-\lambda a_i} - e^{-\lambda b_i})}{b_i - a_i}};$$

$$p_1 = \frac{1 - \dfrac{1}{\lambda}\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\alpha_i (e^{-\lambda a_i} - e^{-\lambda b_i})}{b_i - a_i}}{\dfrac{\lambda}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i (a_i + b_i) + \dfrac{1}{\lambda}\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\alpha_i (e^{-\lambda a_i} - e^{-\lambda b_i})}{b_i - a_i}};$$

$$P_{\text{обс}} = \frac{1}{\dfrac{\lambda}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i (a_i + b_i) + \dfrac{1}{\lambda}\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\alpha_i (e^{-\lambda a_i} - e^{-\lambda b_i})}{b_i - a_i}}; \qquad p_2 = \overline{r} = 1 - P_{\text{обс}};$$

$$\overline{t}_r = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (a_i + b_i) - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i (e^{-\lambda a_i} - e^{-\lambda b_i})}{b_i - a_i}\,.$$

Правильність отриманих у цій праці формул для ймовірностей граничного стаціонарного процесу обслуговування підтверджена результатами числових експериментів на імітаційних моделях, проведених за допомогою комп'ютерної системи GPSS World.

1. *Хинчин А. Я.* Работы по математической теории массового обслуживания.– М., 1963.

2. *Ивченко Г. И., Каштанов В. А., Коваленко И. Н.* Теория массового обслуживания.– М., 1982.

3. *Brockmeyer E., Halström H. L., Jensen A.* The life and works of A. K. Erlang // Danish Acad. Tech. Sci.– 1948.– Trans. 2.– P. 1–277.

4. *Севастьянов Б. А.* Эргодическая теорема для марковских процессов и ее применение к телефонным системам с отказами // Теория вероятн. и ее прилож.– 1957.– Т. 2.– №2.– С. 106–116.

5. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Прикладные задачи теории вероятностей.– М., 1983.

6. *Cooper R. B.* Introduction to queueing theory.– New York, 1981.

7. *Овчаров Л. А.* Прикладные задачи теории массового обслуживания.– М., 1969.

8. *Жерновий Ю. В.* Марковські моделі масового обслуговування.– Львів, 2004.

INVESTIGATION OF THE STATISTICAL-EQUILIBRIUM QUEUEING PROCESS FOR SINGLE-SERVER SYSTEMS WITH DIFFERENT SERVICE TIME CUSTOMERS

Yuriy Zernovyi

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

The statistical-equilibrium state existence conditions and probabilities distribution for the G/G/1/0 and M/G/1/m queueing systems with different service time customers are obtained.

Key words: single-server queueing systems, customers with different service time, statistical-equilibrium state, probabilities distribution.

Стаття надійшла до редколегії 18.04.2006

Прийнята до друку 02.11.2006

УДК 517.537.72

ПРО АСИМПТОТИЧНЕ ПОВОДЖЕННЯ ЛОГАРИФМІВ МАКСИМУМУ МОДУЛЯ І МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА АБСОЛЮТНО ЗБІЖНОГО У ПІВПЛОЩИНІ РЯДУ ДІРІХЛЕ

Михайло ЗЕЛІСКО, Мирослав ШЕРЕМЕТА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

Нехай Φ – додатна, неперервно диференційовна на $(-\infty, 0)$ функція така, що $\Phi'(\sigma) \uparrow +\infty$ і $|\sigma|\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma) \nearrow +\infty$ при $\sigma \uparrow 0$, а φ – функція, обернена до Φ'. Для ряду Діріхле $F(s) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}$ з нульовою абсцисою абсолютної збіжності приймемо $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$ і $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp(\sigma, F) : n \geqslant \geqslant 0\}, \sigma < 0$. Доведено, що за умови $\varlimsup\limits_{t\to+\infty} |\varphi(\lambda_n)|/|\Phi^{-1}(\ln n)| < 1$ співвідношення $\ln \mu(\sigma, F) \leqslant \Phi(\sigma(1 + o(1)))$ і $\ln M(\sigma, F) \leqslant \Phi(\sigma(1 + o(1)))$ при $\sigma \uparrow 0$ є рівносильними.

Ключові слова: абсолютно збіжні у півплощині ряди Діріхле, максимум модуля, максимальний член.

Нехай $\Lambda = (\lambda_n)$ – зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел, а $S(\Lambda; 0)$ – клас рядів Діріхле

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

з нульовою абсцисою абсолютної збіжності. Для $\sigma < 0$ приймемо $M(\sigma, F) = = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$, і нехай $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp(\sigma, F) : n \geqslant 0\}$ – максимальний член ряду (1). Через $\Omega(0)$ позначимо клас додатних необмежених на $(-\infty, 0)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' додатна, неперервно диференційовна і зростає до $+\infty$ на $(-\infty, 0)$. Для $\Phi \in \Omega(0)$ нехай φ – функція, обернена до Φ', а $\Psi(\sigma) = \sigma - \Phi(\sigma)/\Phi'(\sigma)$ – функція, асоційована з Φ за Ньютоном. Тоді [1] функція

Ψ неперервно диференційована і зростає до 0 на $(-\infty, 0)$, а функція φ неперервно диференційовна і зростає до 0 на $(0, +\infty)$. Звідси випливає, що й обернена до Ψ функція Ψ^{-1} також зростає до 0 на $(-\infty, 0)$. В [2] доведено таке: якщо $\Phi \in \Omega(0)$ така, що $\Phi(\sigma)/\Phi'(\sigma) \nearrow +\infty$ і $\ln \Phi'(\sigma) = o(\Phi(\sigma))$ при $\sigma_0 \geqslant \sigma \uparrow 0$, то для того, щоб для кожної функції $F \in S(\Lambda; 0)$ співвідношення $\ln \mu(\sigma, F) \leqslant (1 + o(1))\Phi(\sigma)$ і $\ln M(\sigma, F) \leqslant (1 + o(1))\Phi(\sigma)$ при $\sigma \uparrow 0$ були рівносильними, необхідно і достатньо, щоб $\ln n(t) = o(\Phi(\Psi(\varphi(t))))$ при $t \to +\infty$, де $n(t) = \sum_{\lambda_n \leqslant t} 1$ – лічильна функція послідовності Λ.

Зазначимо умову на Λ, за якої є рівносильними співвідношення

$$\ln \mu(\sigma, F) \leqslant \Phi((1 + o(1))\sigma), \quad \sigma \uparrow 0 \tag{2}$$

і

$$\ln M(\sigma, F) \leqslant \Phi((1 + o(1))\sigma), \quad \sigma \uparrow 0. \tag{3}$$

Зауважимо, що для цілих рядів Діріхле подібна задача розв'язана в [2]. Зауважимо також таке: якщо $|\sigma|\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma) = O(1)$, $\sigma \uparrow 0$, то $\Phi((1 + o(1))\sigma) = (1 + o(1))\Phi(\sigma)$, $\sigma \uparrow 0$, тобто задача зводиться до задачі, розв'язаної в [3], тому надалі вважатимемо, що $|\sigma|\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma) \nearrow +\infty$, $\sigma \uparrow 0$.

Нарешті, зауважимо, що нерівність Коші $\mu(\sigma, F) \leqslant M(\sigma, F)$ свідчить про те, що з (3) випливає (2) для будь-якого ряду Діріхле. Отже, залишається дослідити умови на Λ, за яких з (2) випливає (3).

Для цього через $S^*(\Lambda; 0)$ позначимо клас формальних рядів Діріхле (1) таких, що $|a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} \to 0$, $n \to \infty$, для кожного $\sigma < 0$, тобто максимальний член такого ряду існує для кожного $\sigma < 0$, але абсциса абсолютної збіжності може бути < 0. Будемо говорити, що такий ряд належить до класу $S^*_{\mu,\Phi}(\Lambda; 0)$, якщо виконується співвідношення (2). Зрештою, через $S_{M,\Phi}(\Lambda; 0)$ позначимо клас абсолютно збіжних в $\{s : \mathrm{Re} s < 0\}$ рядів Діріхле (1), для яких виконується співвідношення (3).

Теорема. *Нехай функція* $\Phi \in \Omega(0)$ *така, що функція* $|\sigma|\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma) \nearrow +\infty$ *при* $\sigma \uparrow 0$. *Для того щоб* $S^*_{\mu,\Phi}(\Lambda; 0) \subset S_{M,\Phi}(\Lambda; 0)$, *достатньо, щоб*

$$\varlimsup_{t \to +\infty} |\varphi(t)|/|\Phi^{-1}(\ln n(t))| < 1, \tag{4}$$

і якщо, додатково, $\ln \Phi'(\sigma) = o(\Phi(\sigma))$ *при* $\sigma \uparrow 0$, *то необхідно, щоб*

$$\varlimsup_{t \to +\infty} |\varphi(t)|/|\Phi^{-1}(\ln n(t))| \leqslant 1. \tag{5}$$

Доведення. Передусім зауважимо, що з умови $|\sigma|\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma) \nearrow +\infty (\sigma \uparrow 0)$ випливає, що $\Psi(\sigma) \sim \sigma$ при $\sigma \uparrow 0$ і $\{\sigma(\Phi'(\sigma))^2 - (\Phi'(\sigma) + \sigma\Phi''(\sigma))\Phi(\sigma)\}/(\Phi'(\sigma))^2 \geqslant 0$, тобто $|\sigma|\Phi''(\sigma/\Phi'(\sigma)) \geqslant |\sigma|\Phi'(\sigma/\Phi(\sigma))$, $\sigma \uparrow 0$. Звідси $x\varphi'(x)/|\varphi(x)| \to 0$, $x \to +\infty$, тобто $|\varphi(x)|$ – повільно спадна функція.

Доведемо спочатку достатність умови (4). Для цього використаємо таке твердження [1]: для того щоб $\ln \mu(\sigma, F) \leqslant \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \geqslant \sigma_*$, необхідно і достатньо, щоб $\ln |a_n| \leqslant -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всіх $n \geqslant n_*$. Оскільки $\ln \mu(\sigma, F) \leqslant \Phi(\sigma/(1 + \varepsilon))$ для кожного $\varepsilon > 0$ і всіх $\sigma \in [\sigma_*(\varepsilon), 0)$, то за цим твердженням маємо $\ln |a_n| \leqslant$

$\leqslant -(1+\varepsilon)\lambda_n\Psi(\varphi((1+\varepsilon)\lambda_n)) \leqslant (1+\varepsilon)^2\lambda_n|\varphi(\lambda_n)|$ для всіх $n \geqslant n_*(\varepsilon)$. Позначимо $N(\sigma) = \min\{n : \lambda_n \geqslant \Phi'(\sigma(1+\varepsilon)^{-3})\}$. Тоді $n_*(\varepsilon) \leqslant N(\sigma)$ для всіх, досить близьких до 0 значень $\sigma < 0$ і з огляду на незростання $|\varphi|$, отримуємо

$$\begin{aligned} M(\sigma,F) &\leqslant \sum_{\lambda_n \leqslant \lambda_{N(\sigma)}} |a_n|\exp\{\sigma\lambda_n\} + \sum_{\lambda_n > \lambda_{N(\sigma)}} |a_n|\exp\{\sigma\lambda_n\} \leqslant \\ &\leqslant (N(\sigma)+1)\mu(\sigma,F) + \sum_{\lambda_n > \lambda_{N(\sigma)}} \exp\{(1+\varepsilon)^2\lambda_n|\varphi(\lambda_n)| - |\sigma|\lambda_n\} = \\ &= (N(\sigma)+1)\mu(\sigma,F) + \sum_{\lambda_n > \lambda_{N(\sigma)}} \exp\Big\{(1+\varepsilon)^2\lambda_n|\varphi(\lambda_n)|\Big(1 - \frac{|\sigma|(1+\varepsilon)^{-2}}{|\varphi(\lambda_n)|}\Big)\Big\} \leqslant \\ &\leqslant (N(\sigma)+1)\mu(\sigma,F) + \sum_{\lambda_n > \lambda_{N(\sigma)}} \exp\Big\{(1+\varepsilon)^2\lambda_n|\varphi(\lambda_n)|\Big(1 - \frac{|\sigma|(1+\varepsilon)^{-2}}{|\varphi(\lambda_{N(\sigma)})|}\Big)\Big\} \leqslant \\ &\leqslant (N(\sigma)+1)\mu(\sigma,F) + \sum_{\lambda_n > \lambda_{N(\sigma)}} \exp\{-\varepsilon(1+\varepsilon)^2\lambda_n|\varphi(\lambda_n)|\} \qquad (6) \end{aligned}$$

З умови (4) випливає існування числа $q \in (0,1)$ такого, що для всіх досить великих $t > 0$ виконується $\ln n(t) \leqslant \Phi(\varphi(t)/q) \leqslant \Phi(\varphi(t))$, тобто $\ln n(t) = o(t|\varphi(t)|)$, $t \to +\infty$. Звідси випливає, що ряд $\sum\limits_{n\leqslant 0} \exp\{-\varepsilon(1+\varepsilon)^2\lambda_n|\varphi(\lambda_n)|\}$ збіжний, тому з (6) отримуємо нерівність $M(\sigma,F) \leqslant (N(\sigma)+1)\mu(\sigma,F) + o(1)$, $\sigma \uparrow 0$, тобто

$$\ln M(\sigma,F) \leqslant \ln(N(\sigma)-1) + \ln\mu(\sigma,F) + o(1), \quad \sigma \to +\infty. \qquad (7)$$

З означення $N(\sigma)$ випливає, що $\lambda_{N(\sigma)-1} \leqslant \Phi'((1+\varepsilon)^{-3}\sigma)$, тобто $\ln(N(\sigma)-1) \leqslant$ $\leqslant \ln n(\Phi'((1+\varepsilon)^{-3}\sigma)) \leqslant \Phi((1+\varepsilon)^{-3}\sigma/q)$ для деякого $q \in (0,1)$ і всіх $t \geqslant t_0(q)$.

Якщо тільки число $(1+\varepsilon)^2 q \leqslant 1$, то з (7) для всіх досить близьких до 0 значень $\sigma < 0$ маємо $\ln M(\sigma,F) \leqslant 3\Phi(\sigma/(1+\varepsilon)) \leqslant \Phi(\sigma/(1+2\varepsilon))$, бо для деякого $\xi = \xi(\sigma) \in (\sigma/(1+\varepsilon), \sigma/(1+2\varepsilon))$ виконується

$$\ln\Phi\Big(\frac{\sigma}{1+2\varepsilon}\Big) - \ln\Phi\Big(\frac{\sigma}{1+\varepsilon}\Big) \geqslant \frac{\Phi'(\xi)}{\Phi(\xi)}\frac{\varepsilon|\sigma|}{(1+\varepsilon)(1+2\varepsilon)} \geqslant \frac{\varepsilon|\xi|\Phi'(\xi)}{(1+\varepsilon)\Phi(\xi)} \to +\infty, \quad \sigma \to +\infty.$$

Завдяки довільності ε, достатність умови (4) доведено.

Перейдемо до доведення необхідності умови (5). Припустимо, що вона не виконується. Тоді $\varlimsup\limits_{t\to+\infty} |\Psi(\varphi(t))|/|\Phi^{-1}(\ln n(t))| > 1$. Тому існує $q > 1$ таке, що $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} (\ln n)/\Phi(\Psi(\varphi(\lambda))/q) > 1$, бо $\Phi(\sigma/q_1) = o(\Phi(\sigma/q_2))$, $\sigma \uparrow 0$, якщо $q_1 < q_2$. В [3] доведено таке: якщо (μ_n) – зростаюча до $+\infty$ послідовність додатних чисел і $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} (\ln n)/\mu_n > 1$, то існує підпослідовність (μ_k^*) послідовності (μ_n) така, що $k \leqslant \exp\{\mu_k^*\} + 1$ для всіх $k \in \mathbb{N}$ і $k_j \geqslant \exp\{\mu_k^*\}$ для деякої зростаючої до $+\infty$ послідовності (k_j). Тому існує підпослідовність (λ_k^*) послідовності (λ_n) така, що $k \leqslant \exp\{\Phi(\Psi(\varphi(\lambda_k^*))/q)\} + 1$ для всіх $k \in \mathbb{N}$ і $k_j \geqslant \exp\{\Phi(\Psi(\varphi(\lambda_{k_j}^*))/q)\}$ для деякої зростаючої до $+\infty$ послідовності (k_j).

Приймемо $a_n = 0$, якщо $\lambda_n \neq \lambda_k^*$, і $a_n = a_k^*$, якщо $\lambda_n = \lambda_k^*$, де $a_k^* = \exp\{-\lambda_k^* \Psi(\varphi(\lambda_k^*))\}$.

Для ряду Діріхле (1) з такими коефіцієнтами за наведеним при доведенні достатності умови (4) твердженням з [1] маємо $\ln \mu(\sigma, F) \leqslant \Phi(\sigma)$, тобто (2) виконується.

Нехай $m_j = [k_j - \sqrt{k_j}\,] + 2$. Тоді

$$\begin{aligned} \lambda_{m_j}^* &\geqslant \Phi'(\Psi^{-1}(q\Phi^{-1}(\ln(m_j - 1)))) \geqslant \Phi'(\Psi^{-1}(q\Phi^{-1}(\ln(k_j - \sqrt{k_j})))) = \\ &= \Phi'(\Psi^{-1}(q\Phi^{-1}(\ln k_j)))- \\ &-\{\Phi'(\Psi^{-1}(q\Phi^{-1}(\ln k_j))) - \Phi'(\Psi^{-1}(q\Phi^{-1}(\ln(k_j - \sqrt{k_j}))))\} \geqslant \lambda_{k_j}^* - \delta_j, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \delta_j &= \frac{q\Phi''(\Psi^{-1}(q\Phi^{-1}(\xi_j)))}{\Psi'(\Psi^{-1}(q\Phi^{-1}(\xi_j)))\Phi'(\Phi^{-1}(\xi_j))} \ln \frac{k_j}{k_j - \sqrt{k_j}} = \\ &= \frac{q\{\Phi'(\Psi^{-1}(q\Phi^{-1}(\xi_j)))\}^2}{\Phi'(\Phi^{-1}(\xi_j))\Phi(\Psi^{-1}(q\Phi^{-1}(\xi_j)))}, \quad \ln(k_j - \sqrt{k_j}) \leqslant \xi_j \leqslant \ln k_j, \end{aligned}$$

а $\varepsilon_j \to 0$, $j \to +\infty$.

Приймемо, нарешті, $\sigma_j = \varphi(\lambda_{m_j}^*)$. Тоді

$$\begin{aligned} &\sum_{k=m_j}^{k_j} a_k^* \exp\{\sigma_j \lambda_k^*\} \geqslant \sum_{k=m_j}^{k_j} \exp\{-\lambda_k^* \Psi(\varphi(\lambda_k^*)) + \sigma_j \lambda_k^*\} \geqslant \\ &\geqslant \sum_{k=m_j}^{k_j} \exp\{-\lambda_{m_j}^* \Psi(\varphi(\lambda_{m_j}^*)) + \sigma_j \lambda_{k_j}^*\} \geqslant \\ &\geqslant (m_j - k_j + 1) \exp\{-\lambda_{m_j}^* \Psi(\varphi(\lambda_{m_j}^*)) + \sigma_j \lambda_{m_j}^* + \delta_j \sigma_j\} \geqslant \\ &\geqslant \sqrt{k_j}\, \exp\{\Phi(\sigma_j) + \delta_j \varphi(\lambda_{m_j}^*)\} \end{aligned}$$

і, якщо такий ряд збіжний для всіх $\sigma < 0$, тобто $M(\sigma, F)$ існує для таких σ, то

$$\begin{aligned} \ln M(\sigma_j, F) &\geqslant \frac{1}{2} \ln k_j + \Phi(\sigma_j) + \delta_j \varphi(\lambda_{m_j}^*) + o(1) \geqslant \\ &\geqslant \frac{1}{2} \Phi(\Psi(\sigma_j)/q) + \Phi(\sigma_j) \delta_j \varphi(\lambda_{m_j}^*) + o(1), \quad j \to \infty. \end{aligned}$$

Оскільки $\Psi(\sigma) \sim \sigma\,(\sigma \uparrow 0)$, то, завдяки умові $\ln \Phi'(\sigma) = o(\Phi(\sigma))$, $(\sigma \uparrow 0)$, для всіх досить великих j маємо

$$\begin{aligned} &\delta_j |\varphi(\lambda_{m_j}^*)| \leqslant \delta_j \leqslant \frac{(\Phi'(\Psi^{-1}(q\phi^{-1}(\xi_j))))^2}{\sqrt{k_j}} \leqslant \frac{(\Phi'(\Psi^{-1}(q\phi^{-1}(\ln k_j))))^2}{\sqrt{k_j}} = \\ &= \exp\Big\{2 \ln \Phi'(\Psi^{-1}(q\Phi^{-1}(\ln k_j))) - \frac{1}{2} \ln k_j\Big\} \leqslant \exp\Big\{2 \ln \Phi'(\Phi^{-1}(\ln k_j))) - \frac{1}{2} \ln k_j\Big\} \leqslant \\ &\leqslant \exp\Big\{o(\ln k_j) - \frac{1}{2} \ln k_j\Big\} \to 0, \quad j \to \infty. \end{aligned}$$

Тому $\ln M(\sigma_j, F) \geqslant \Phi(\Psi(\sigma_j)/q)/2 = \Phi((1 + o(1))\sigma_j/q)$, $j \to \infty$. Отже, якщо умова (5) не виконується, то існує ряд Діріхле з класу $S_{\mu,\Phi}^*(\Lambda, 0)$, який не належить до класу $S_{M,\Phi}(\Lambda, 0)$. Теорему повністю доведено.

1. *Шеремета М.Н., Федыняк С.И.* О пролизводной ряда Дирихле // Сиб. матем. журн.– 1998.– Т. 39, №1.– С. 206-223.
2. *Зеліско М., Шеремета М.* Про асимптотичне поводження максимуму модуля і максимального члена цілого ряду Діріхле // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.– 2004.– Вип. 63.– С. 88-92.
3. *Шеремета М.Н.* О максимуме модуля и максимальном члене ряда Дирихле // Матем. заметки.– 2003.– Т. 73, №3.– С. 437-443.
4. *Sumyk O.M., Sheremeta M.M.* On connection between the growth of maximum modulus and maximal term of entire Dirichlet series in term of m-member asymptotics // Matem. studii – 2003.– Vol. 19. №1.– P. 83-88.

ON ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF LOGARITHMS OF THE MAXIMUM MODULUS AND MAXIMAL TERM OF DIRICHLET SERIES ABSOLUTELY CONVERGENT IN HALF-PLANE

Myhajlo Zelisko, Myroslav Sheremeta

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

Let Φ be a positive smooth function on $(-\infty, 0)$ such that $|\sigma|\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma)\nearrow+\infty$ and $\Phi'(\sigma)\uparrow+\infty$ as $\sigma\uparrow 0$, and φ be the inverse function to Φ'. For Dirichlet series $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}$ with null abscissa of absolute convergence we put $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma+it)| : t \in \mathbb{R}\}$ and $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp(\sigma\lambda_n) : n \geqslant 0\}$, $\sigma < 0$. It is proved that if $\varlimsup\limits_{n\to\infty} |\varphi(\lambda_n)|/|\Phi^{-1}(\ln n)| < 1$, then the relations $\ln \mu(\sigma, F) \leqslant \Phi((1+o(1))\sigma)$ and $\ln M(\sigma, F) \leqslant \Phi((1+o(1))\sigma)$ as $\sigma \to +\infty$ are equivalent.

Key words: Dirichlet series absolutely convergent in half-plane, maximum modulus, maximal term.

Стаття надійшла до редколегії 09.06.2005

Прийнята до друку 02.11.2006

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ | VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 2006. Вип.66. С.75–87 | Ser.Mech-Math.2006. Vol.66. P.75–87

УДК 519.9

УЗАГАЛЬНЕННЯ МОДЕЛІ БЛЕКА-ШОУЛСА

Світлана КОВТУН

Інститут теоретичної фізики ім. Боголюбова НАН України,
вул. Метрологічна, 14б, 03680 Київ, Україна

Запропоновано узагальнення моделі Блека-Шоулса шляхом додання в експоненту одностороннього $\frac{1}{2}$-стійкого процесу Леві. Для цієї моделі доведено існування мінімального геджу, знайдено явні формули для портфеля інвестора, що відповідає мінімальному геджу, для еволюції капіталу інвестора та ціни опціона. Внаслідок існування мінімального геджу така ціна буде справедливою.

Ключові слова: опціон, мінімальний гедж, справедлива ціна опціону, випадкові процеси з незалежними приростами.

1. На сьогодні модель Блека-Шоулса [1] є найуживанішою для знаходження справедливої ціни опціону та мінімального геджу. Проте накопичені статистичні дані дають підстави вважати, що опис ціни базового ризикового активу (акції) геометричним броунівським рухом не є адекватним [2]. Емпірична щільність розподілу ціни акції суттєво відрізняється від відповідного теоретичного логнормального розподілу, зокрема має так звані важкі хвости. Теоретичні результати, які дає модель Блека-Шоулса, занижують ціну опціонів.

М.С. Гончар [3] створив новий метод, особливістю якого є конструктивний підхід (на відміну від результатів Крамкова [4]), завдяки якому для широкого класу процесів отримують явні формули для ціни опціону, мінімального геджа та відповідного капіталу інвестора. Застосування цього методу до моделі Блека-Шоулса [1] дає відомі результати [5].

У цій праці пропонуємо моделювати динаміку цін акції однорідним випадковим процесом S_t з незалежними приростами, вибіркові траєкторії якого є розривними. Щільність одновимірного розподілу процесу S_t спадає за степеневим законом, який має „важкі хвости“. Ціна неризикового активу B_t еволюціонує невипадково, зі сталою ставкою відсотків. На такому (B, S)-ринку методом М.С. Гончара для певного класу зобов'язань для опціонів європейського типу буде побудовано мінімальний гедж, знайдено величину відповідного капіталу та ціну опціону. Наявність мінімального геджа дає підставу стверджувати, що знайдена ціна буде справедливою.

2. Опис моделі фондового ринку. Розглядаємо еволюцію активів, яка відбувається неперервно з часом на скінченому часовому інтервалі $[0, T)$. Нехай неризиковий актив еволюціонує за законом

$$B_t = B_0 e^{rt},\ t \in [0, T), \tag{1}$$

де B_t — капітал на банківському рахунку в момент часу t; r — банківська відсоткова ставка. Невизначеність в цій моделі (B, S)-ринку задається ймовірнісним простором $\{\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1\}$. Ціну ризикового активу будемо моделювати випадковим процесом

$$S_t(\omega) = S_0 e^{rt} e^{t\left(sqrt2\delta - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma W_t(\omega) - \delta\zeta_t(\omega)} = S_0 e^{rt} e^{t\left(\sqrt{2\delta} - \frac{\sigma^2}{2}\right) - \xi_t(\omega)}. \tag{2}$$

Тут S_t — ціна ризикового активу в момент часу t; $\delta > 0$, $\sigma > 0$ — деякі параметри, що визначаються для кожного ризикового активу окремо і в цій праці вважаються заданими; процес

$$\xi_t = -\sigma W_t + \delta\zeta_t \tag{3}$$

є сумою незалежних процесів броунівського руху W_t та одностороннього $\frac{1}{2}$-стійкого процесу Леві ζ_t. Для ζ_t правильна властивість

$$E_1 e^{-a\zeta_t} = e^{-\sqrt{2a}t},\ a > 0, \tag{4}$$

де E_1 — математичне сподівання в просторі $\{\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1\}$. З (4) випливає, що $\{\frac{S_t}{B_t}, \mathcal{F}^\xi,\ t > 0\}$ – мартингал. Отже, (B, S)-ринок безарбітражний. Нехай виплати по опціону задаються функцією

$$f_T(\omega) = f(S_T(\omega)),\ \omega \in \Omega_1.$$

Під геджем π розуміється динамічна самофінансовна стратегія інвестора, яка описується послідовністю пар $\{\gamma_t^\pi, \beta_t^\pi\}_{t\in[0,T]}$, (де γ_t^π — кількість акцій в портфелі, а β_t^π — кількість неризикового активу; $\{\gamma_t^\pi, \beta_t^\pi\}$ ще називають портфелем), така, що величина капіталу в момент T виконання опціону задовольняє нерівність

$$X_T^\pi = \gamma_T^\pi S_T + \beta_T^\pi B_T \geqslant f(S_T).$$

Тут $f(S_T)$ — величина зобов'язання. Мінімальним геджем π^* будемо називати динамічну самофінансовну стратегію інвестора, яка породить такий капітал $X_T^{\pi^*}$ в момент T виконання опціону, що майже напевно $X_T^{\pi^*} \leqslant X_T^\pi$ для будь-якого іншого геджу π.

Мета нашої праці — побудувати теорію контрактів з опціонами для опціонів Європейського типу. Скористаємося методом М.С. Гончара, викладеним у [3]. Для цього спочатку дамо конструкцію допоміжного ймовірнісного простору.

Всі позначення в цій статті вибрано так, щоб вони відповідали позначенням у монографії [3], на твердження якої далі будуть посилання.

3. Конструкція ймовірнісного простору спеціального вигляду. Нехай задано деяке розбиття $\{\alpha\} = \{a_i^\alpha\}_{i=1}^{k(\alpha)+1}$ часового відрізка $[0,T)$, $0 = a_1^\alpha < a_2^\alpha < \ldots < a_{k(\alpha)+1}^\alpha = T$. Розглянемо сім'ю просторів елементарних подій $\Omega_i = [0,T)$, борелівських σ-алгебр на них $\mathcal{F}_i^0 = \mathcal{B}([a_i^\alpha, a_{i+1}^\alpha))$ та для кожного $i = \overline{1,k(\alpha)}$ — потік σ-підалгебр $\mathcal{F}_i^0$:

$$\mathcal{F}_i^{0,t} = \begin{cases} \{\emptyset, [0,T)\}, & 0 \leqslant t \leqslant a_i^\alpha, \\ \mathcal{B}([a_i^\alpha, t]), & a_i^\alpha \leqslant t \leqslant a_{i+1}^\alpha, \\ \bigvee\limits_{t \in [a_i^\alpha, a_{i+1}^\alpha)} \mathcal{B}([a_i^\alpha, t]) = \mathcal{F}_i^0, & a_{i+1}^\alpha \leqslant t \leqslant T. \end{cases}$$

Означимо новий простір $\Omega_\alpha = \prod\limits_{i=1}^{k(\alpha)} \Omega_i$ як прямий добуток відповідних компонент та $\mathcal{F}_\alpha^0 = \sigma\Big(\prod\limits_{i=1}^{k(\alpha)} \mathcal{F}_i^0\Big)$, $\mathcal{F}_\alpha^{0,\alpha} = \sigma\Big(\prod\limits_{i=1}^{k(\alpha)} \mathcal{F}_i^{0,t}\Big)$ — мінімальні σ-алгебри, породжені прямими добутками. Міра на вимірному просторі $\{\Omega_\alpha, \mathcal{F}_\alpha^0\}$ задається на множинах вигляду $A_1 \times \ldots \times A_{k(\alpha)}$, $A_i \in \mathcal{F}_i^0$, а потім продовжується до деякої міри P_α на $\mathcal{F}_\alpha^0$ за теоремою Іонеску-Тулчі.

$$P_\alpha(A_1 \times \ldots \times A_{k(\alpha)}) =$$
$$= \int\limits_{A_1} \ldots \int\limits_{A_{k(\alpha)}} F_1^\alpha(d\omega_1^\alpha) F_2^\alpha(d\omega_2^\alpha | \{\omega_\alpha\}_1) \times \ldots \times F_{k(\alpha)}(d\omega_{k(\alpha)}^\alpha | \{\omega_\alpha\}_{k(\alpha)-1}),$$

$$F_i^\alpha(\omega_i^\alpha | \{\omega_\alpha\}_{i-1}) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant \omega_i^\alpha \leqslant a_i^\alpha, \{\omega_\alpha\}_{i-1} \in \Omega^{i-1}, \\ \phi_i^\alpha(\omega_i^\alpha | \{\omega_\alpha\}_{i-1}), & a_i^\alpha < \omega_i^\alpha < a_{i+1}^\alpha, \{\omega_\alpha\}_{i-1} \in \Omega^{i-1}, \\ 1, & a_{i+1}^\alpha \leqslant \omega_i^\alpha < T, \{\omega_\alpha\}_{i-1} \in \Omega^{i-1}, \end{cases}$$

$i = \overline{1,k(\alpha)}$, де $\{\omega_\alpha\}_i = \{\omega_1^\alpha, \ldots, \omega_i^\alpha\}$, $\phi_i^\alpha(\omega_i^\alpha | \{\omega_\alpha\}_{i-1}) \in [0,1)$, є неперервною справа, неспадною, вимірною (з вимірного простору $\{\Omega^{i-1}, \mathcal{F}_{i-1}^0\}$ у вимірний простір $\{[0,1], \mathcal{B}([0,1])\}$) функцією змінної ω_i^α на $[a_i^\alpha, a_{i+1}^\alpha)$ за кожного фіксованого $\{\omega_\alpha\}_{i-1} \in \Omega^{i-1}$, причому $\phi_i^\alpha(a_i^\alpha | \{\omega_\alpha\}_{i-1}) = 0$.

Задамо ізометрію R між множиною випадкових величин на ймовірнісному просторі $\{\Omega_\alpha, \mathcal{F}_\alpha^0, P_\alpha\}$ і підмножиною випадкових величин на ймовірнісному просторі $\{\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1\}$, на якому задано деякий випадковий процес η_t. Нехай $f(\omega_1^\alpha, \ldots, \omega_{k(\alpha)}^\alpha)$ — деяке вимірне відображення ймовірнісного простору $\{\Omega_\alpha, \mathcal{F}_\alpha^0, P_\alpha\}$ у вимірний простір $\{\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. Визначимо

$$Rf(\omega_1^\alpha, \ldots, \omega_{k(\alpha)}^\alpha) = f_1(\omega) =$$
$$= f\Big(g_{[a_1^\alpha, a_2^\alpha)}\left(\eta_{a_2^\alpha}(\omega) - \eta_{a_1^\alpha}(\omega)\right), \ldots, g_{[a_{k(\alpha)}^\alpha, a_{k(\alpha)+1}^\alpha)}\left(\eta_{a_{k(\alpha)+1}^\alpha}(\omega) - \eta_{a_{k(\alpha)}^\alpha}(\omega)\right)\Big), \qquad (5)$$

де функція $g_{[a_i^\alpha, a_{i+1}^\alpha)}(\omega_i^\alpha)$ — неперервне монотонно зростаюче і взаємно однозначне відображення множини значень випадкового процесу η_t на множину $[a_i^\alpha, a_{i+1}^\alpha)$. Функцію, обернену до $g_{[a_i^\alpha, a_{i+1}^\alpha)}(\omega_i^\alpha)$, позначатимемо $g_{[a_i^\alpha, a_{i+1}^\alpha)}^{-1}(\omega_i^\alpha)$. Для будь-якої обмеженої борелівської функції $\varphi(x)$, заданої на $\mathbb{R}$, правильна рівність (E_α — математичне сподівання у просторі $\{\Omega_\alpha, \mathcal{F}_\alpha^0, P_\alpha\}$)

$$E_\alpha \varphi(f(\omega_1^\alpha, \ldots, \omega_{k(\alpha)}^\alpha)) = E_1 \varphi(f_1(\omega)).$$

3. Основні результати.

Теорема 1. *Нехай еволюція безризикового активу відбувається за законом (1), еволюція ціни ризикового активу задається узагальненою моделлю Блека-Шоулса (2) на деякому ймовірнісному просторі* $\{\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1\}$.

Нехай на ймовірнісному просторі $\{\Omega_\alpha, \mathcal{F}^0_\alpha, P_\alpha\}$, *що відповідає деякому розбиттю* $\{\alpha\} = \{a^\alpha_i\}_{i=1}^{k(\alpha)+1}$ *часового інтервалу* $[0,T)$, *і побудований за сім'єю функцій розподілу* $(i = \overline{1, k(\alpha)})$

$$\phi^\alpha_i(\omega^\alpha_i) = \frac{\sqrt{\Delta^\alpha_i \delta}}{2\pi\sigma} \int\limits_{-g^{-1}_{[a^\alpha_i, a^\alpha_{i+1})}(\omega^\alpha_i)}^{\infty} \int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{(y+q)^2}{2\Delta^\alpha_i \sigma^2} - \frac{(\Delta^\alpha_i)^2 \delta}{2q\sigma}} \frac{1}{\sqrt{q^3}}\, dq\, dy,\ \ \omega^\alpha_i \in [a^\alpha_i, a^\alpha_{i+1}),$$

$$g^{-1}_{[a^\alpha_i, a^\alpha_{i+1})}(\omega^\alpha_i) = \sigma \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2\omega^\alpha_i - a^\alpha_i - a^\alpha_{i+1}}{a^\alpha_{i+1} - a^\alpha_i}\right) + \delta \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\omega^\alpha_i - a^\alpha_i}{a^\alpha_{i+1} - a^\alpha_i}\right),$$

еволюція ризикового активу відбувається за законом

$$S^*_t(\{\alpha, \omega_\alpha\}) = e^{rt} S_0 E_\alpha \{e^{T(\sqrt{2\delta} - \frac{\sigma^2}{2}) - \xi^*_T} | \mathcal{F}^{0,\alpha}_t\}, \tag{6}$$

де

$$\xi^*_t = -\sum_{i=1}^m g^{-1}_{[a^\alpha_i, a^\alpha_{i+1})}(\omega^\alpha_i),\ \ m = \max\{i, a^\alpha_{i+1} \leqslant t\}\ \omega^\alpha_i \in [a^\alpha_i, a^\alpha_{i+1}). \tag{7}$$

Існує перетворення R *ймовірнісного простору* $\{\Omega_\alpha, \mathcal{F}^0_\alpha, P_\alpha\}$ *у ймовірнісний простір* $\{\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1\}$, *яке задається (5) таке, що для довільного наперед заданого* $\varepsilon > 0$ *існує* $\delta > 0$, *для якого за умови* $\Delta_\alpha = \max\limits_i |a^\alpha_{i+1} - a^\alpha_i| < \delta$ *справджується*

$$\sup_{t \in [0,T]} E_1 [S_t(\omega) - R S^*_t(\{\alpha, \omega_\alpha\})]^2 < \varepsilon. \tag{8}$$

Якщо функція $f(x)$, *яка задає виплати в момент* T *виконання опціону*

$$f_T(\{\alpha, \omega_\alpha\}) = f(S^*_T(\{\alpha, \omega_\alpha\})) = f(S_0 e^{rT} e^{T(\sqrt{2\delta} - \frac{\sigma^2}{2}) - \xi^*_T})$$

задовольняє умову

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant C|x_1 - x_2|,\ \ 0 < C < \infty,\ \ x_1,\ x_2 \in \mathbb{R},$$

то для еволюції $S^*_t(\{\alpha, \omega_\alpha\})$ *на ймовірнісному просторі* $\{\Omega_\alpha, \mathcal{F}^0_\alpha, P_\alpha\}$ *існує мінімальний гедж* π^*_t; *еволюція капіталу інвестора* $X^*_t(\{\alpha, \omega_\alpha\})$, *справедлива ціна опціону* $X^*_0(\alpha)$ *і самофінансовна стратегія* $\{\beta^*_t(\{\alpha, \omega_\alpha\}),\ \gamma^*_t(\{\alpha, \omega_\alpha\})\}$, *які відповідають* π^*_t, *задаються формулами*

$$X^*_t(\{\alpha, \omega_\alpha\}) = e^{r(t-T)} E_\alpha \{f(S^*_T(\{\alpha, \omega_\alpha\})) | \mathcal{F}^{0,\alpha}_t\}, \tag{9}$$

$$X^*_0(\alpha) = e^{-rT} E_\alpha f(S^*_T(\{\alpha, \omega_\alpha\})), \tag{10}$$

$$\gamma^*_t(\{\alpha, \omega_\alpha\}) = \psi_{k(\alpha)}(t | \{\omega_\alpha\}_{k(\alpha)}), \tag{11}$$

$$\beta_t^*(\{\alpha,\omega_\alpha\}) = \frac{X_t^*(\{\alpha,\omega_\alpha\}) - \gamma_t^*(\{\alpha,\omega_\alpha\})S_t^*(\{\alpha,\omega_\alpha\})}{B(t)}, \tag{12}$$

де $$\psi_{k(\alpha)}(t|\{\omega_\alpha\}_{k(\alpha)}) = \sum_{i=1}^{k(\alpha)} \chi_{[a_i^\alpha,\ a_{i+1}^\alpha)}(t)\frac{\varphi_i^{\alpha,f}(t|\{\omega_\alpha\}_{i-1})}{\varphi_i^{0,\alpha}(t|\{\omega_\alpha\}_{i-1})},$$

$$\varphi_i^{0,\alpha}(t|\{\omega_\alpha\}_{i-1}) = \frac{S_0}{B_0}[g_i^\alpha(\{\omega_\alpha\}_{i-1},t) - \frac{1}{1-\phi_i^\alpha(t)}\int\limits_{(t,\ a_{i+1}^\alpha)} g_i^\alpha(\{\omega_\alpha\}_{i-1},x)\phi_i^\alpha(dx)],$$

$$\varphi_i^{\alpha,f}(t|\{\omega_\alpha\}_{i-1}) = \bar{\phi}_i^\alpha(\{\omega_\alpha\}_{i-1},t) - \frac{1}{1-\phi_i^\alpha(t)}\int\limits_{(t,\ a_{i+1}^\alpha)} \bar{\phi}_i^\alpha(\{\omega_\alpha\}_{i-1},x)\phi_i^\alpha(dx),$$

$$\bar{\phi}_i^\alpha(\{\omega_\alpha\}_i) = \frac{1}{B_0e^{rT}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\big(B_0e^{rT}g_i^\alpha(\{\omega_\alpha\}_i)e^{(T-a_{i+1}^\alpha)\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)-y}\big)F_{(T-a_{i+1}^\alpha)}(dy),$$

$$g_i^\alpha(\{\omega_\alpha\}_i) = \frac{S_0}{B_0}e^{a_{i+1}^\alpha\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)-\xi^*_{a_{i+1}^\alpha}}.$$

На ймовірнісному просторі $\{\Omega_1,\mathcal{F}_1,P_1\}$ *для еволюції ціни ризикового активу* $\bar{S}_t(\omega) = RS_t^*(\{\alpha,\omega_\alpha\})$ *існує мінімальний гедж, який може бути поданий у формі*

$$\bar{\beta}_t(\omega) = R\beta_t^*(\{\alpha,\omega_\alpha\}), \qquad \bar{\gamma}_t(\omega) = R\gamma_t^*(\{\alpha,\omega_\alpha\}), \tag{13}$$

еволюція капіталу інвестора та справедлива ціна контракту з опціоном задаються відповідно формулами

$$\bar{X}_t(\omega) = RX_t^*(\{\alpha,\omega_\alpha\}), \qquad \bar{X}_0(\omega) = RX_0^*(\{\alpha,\omega_\alpha\}). \tag{14}$$

В $L_1(\Omega_1,\mathcal{F}_1)$ *існують границі*

$$\lim_{\Delta_\alpha\to 0} RX^*_{c_i^\alpha}(\{\alpha,\omega_\alpha\}) = X_t^{\pi^*}(\omega), \qquad \lim_{\Delta_\alpha\to 0} RX_0^*(\alpha) = X_0,$$

$$\lim_{\Delta_\alpha\to 0} R\gamma^*_{c_i^\alpha}(\{\alpha,\omega_\alpha\})\} = \gamma_t^{\pi^*}(\omega),$$

де c_i^α *– точка з* $[a_i^\alpha, a_{i+1}^\alpha)$ *така, що* $g^{-1}_{[a_i^\alpha,a_{i+1}^\alpha)}(c_i^\alpha) = 0$, *для яких правильні формули*

$$X_t^{\pi^*}(\omega) = e^{r(t-T)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\big(e^{r(T-t)}S_t(\omega)e^{(T-t)\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)-y}\big)F_{(T-t)}(dy),$$

$$X_0 = e^{-rT}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\big(e^{rT}S_0e^{T\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)-y}\big)F_T(dy). \tag{15}$$

$$\gamma_t^{\pi^*}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f'\big(e^{r(T-t)}S_t(\omega)e^{(T-t)\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)-y}\big)e^{(T-t)\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)-y}F_{(T-t)}(dy),$$

$$F_t(dy) = \frac{\sqrt{t\delta}}{2\pi\sigma}\int\limits_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{(q-y)^2}{2t\sigma^2} - \frac{t^2\delta}{2\sigma q}\right\}\frac{1}{\sqrt{q^3}}\,dq\,dy.$$

$$\beta_t^{\pi^*}(\omega) = \frac{X_t^{\pi^*}(\omega) - S_t(\omega)\gamma_t^{\pi^*}(\omega)}{B_t}.$$

Ці формули відповідають опціону, для якого еволюція базового ризикового активу задається узагальненою моделлю Блека-Шоулса, причому $X_t^{\pi^*}(\omega)$ задає еволюцію капіталу інвестора, X_0 — ціну контракту з опціоном, а $\{\gamma_t^{\pi^*}(\omega), \beta_t^{\pi^*}(\omega)\}$ — самофінансовну стратегію інвестора, що відповідає мінімальному геджу. Існування мінімального геджа дає право стверджувати, що знайдена ціна опціону є справедливою.

Доведення. Процеси W_t та ζ_t є однорідними з незалежними приростами, тому повністю описуються своїми одновимірними функціями розподілу. Одновимірна функція розподілу $F_t(x) = P_1(\xi_t \leqslant x)$ процесу (3), за допомогою якої будується міра на просторі $\{\Omega_\alpha, \mathcal{F}_\alpha, P_\alpha\}$, є згорткою одновимірних функцій розподілу $F_t^W(x) = P_1(-\sigma W_t \leqslant x)$ та $F_t^\zeta(x) = = P_1(\delta\zeta_t \leqslant x)$ незалежних процесів $-\sigma W_t$ та $\delta\zeta_t$ відповідно. Заміною змінних зводимо $F_t(x)$ до вигляду, зручного для обчислень

$$F_t(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_t^W(x-z)F_t^\zeta(dz) = \frac{\sqrt{t\delta}}{2\pi\sigma}\int\limits_{-x}^{\infty}\int\limits_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{(y+q)^2}{2t\sigma^2} - \frac{t^2\delta}{2q\sigma}\right\}\frac{1}{\sqrt{q^3}}\,dq\,dy.$$

У нас є початковий ймовірнісний простір $\{\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1\}$ та випадковий процес ξ_t, функцією якого є еволюція ризикового активу. За ймовірнісними характеристиками цього процесу та функцією $g^{-1}_{[a_i^\alpha, a_{i+1}^\alpha)}(\omega_i^\alpha)$ будується ймовірнісний простір $\{\Omega_\alpha, \mathcal{F}_\alpha, P_\alpha\}$ і на цьому новому ймовірнісному просторі будується випадковий процес $\xi_t^*(\{\omega_\alpha\}_{k(\alpha)})$ за формулою (7). Вибір функції $g^{-1}_{[a_i^\alpha, a_{i+1}^\alpha)}(\omega_i^\alpha)$ однозначно визначає цей процес і простір $\{\Omega_\alpha, \mathcal{F}_\alpha^0, P_\alpha\}$. Зауважимо, що цей вибір не принциповий, важливо, щоб виконувалися умови, наведені при означенні ізометрії.

Застосувавши теорему 12.7.1 з [3, с. 778] для $S_t^*(\{\alpha, \omega_\alpha\})$ з простору $\{\Omega_\alpha, \mathcal{F}_\alpha, P_\alpha\}$, побудованого в теоремі 1, та неризикового активу, що еволюціонує за (1), отримаємо твердження (8), формули для обчислення справедливої ціни контракту з опціоном $X_0(\alpha)$ (10), вирази для еволюції капіталу інвестора $X_t^*(\{\alpha, \omega_\alpha\})$ (9) та самофінансовної стратегії $\{\beta_t^*(\{\alpha, \omega_\alpha\}), \gamma_t^*(\{\alpha, \omega_\alpha\})\}$, яка відповідає мінімальному геджу π_t^* – (12) та (11) відповідно.

Враховуючи введену ізометрію, одержуємо, що для випадкового процесу $\bar{S}_t(\omega) = RS_t(\{\alpha, \omega_\alpha\})$, який описує еволюцію ризикового активу на ймовірнісному просторі $\{\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1\}$, існує мінімальний гедж, а відповідний йому капітал і портфель інвестора подаються формулами (13), (14). Щоб отримати результати для закону $S_t(\omega)$, спрямуємо діаметр розбиття $\Delta_\alpha = \max\limits_i \Delta_i^\alpha = \max\limits_i |a_{i+1}^\alpha - a_i^\alpha|$ до нуля.

Тепер знайдемо явний вигляд формул, про які йдеться. Позначимо

$$\gamma^f_{c_i^\alpha} = \frac{R\varphi_i^{\alpha,f}(c_i^\alpha|\{\omega_\alpha\}_{i-1})}{R\varphi_i^{0,\alpha}(c_i^\alpha|\{\omega_\alpha\}_{i-1})}.$$

Правильна така лема, доведення якої винесене в додаток.

Лема 1. *1. Для* $f(x) = x^n$ *в* $L_1(\Omega_1, P_1)$ *існує границя*

$$\lim_{\Delta_\alpha \to 0} \gamma_{c_i^\alpha}^{x^n} = [e^{r(T-t)}S_t]^{n-1} n \int_{-\infty}^{\infty} e^{n(T-t)\left(\sqrt{2\delta} - \frac{\sigma^2}{2}\right) - yn} F_{(T-t)}(dy).$$

2. Для будь-якого полінома $P_m(x) = \sum_{n=0}^{m} c_n x^n$ *в* $L_1(\Omega_1, P_1)$ *існує границя*

$$\lim_{\Delta_i^\alpha \to 0} \gamma_{c_i^\alpha}^{P_m} = \int_{-\infty}^{\infty} P_m'\left(e^{r(T-t)} S_t e^{(T-t)\left(\sqrt{2\delta} - \frac{\sigma^2}{2}\right) - y}\right) e^{(T-t)\left(\sqrt{2\delta} - \frac{\sigma^2}{2}\right) - y} F_{(T-t)}(dy).$$

3. Для неперервно-диференційовної функції $f(x)$*, яка задовольняє умови*

$$\exists l \in \mathbb{Z}, l \geqslant 0 : \frac{f'(x)}{(1+x^2)^l} \to 0, |x| \to \infty, \tag{16}$$

в $L_1(\Omega_1, P_1)$ *існує границя*

$$\gamma_t(\omega) = \lim_{\Delta_\alpha \to 0} \gamma_{c_i^\alpha}^{f} = \int_{-\infty}^{\infty} f'\left(e^{r(T-t)} S_t(\omega) e^{(T-t)\left(\sqrt{2\delta} - \frac{\sigma^2}{2}\right) - y}\right) e^{(T-t)\left(\sqrt{2\delta} - \frac{\sigma^2}{2}\right) - y} F_{(T-t)}(dy).$$

Отримаємо формулу для капіталу інвестора та справедливої ціни контракту з опціоном. Позаяк функція платежу має вигляд

$$f\left(S_T^*(\{\alpha, \omega_\alpha\})\right) = f\left(e^{rT} S_0 e^{T\left(\sqrt{2\delta} - \frac{\sigma^2}{2}\right) - \xi_T^*}\right),$$

то капітал інвестора $X_t^*(\{\alpha, \omega_\alpha\})$ на $\{\Omega_\alpha, \mathcal{F}_\alpha^0, P_\alpha\}$, задається формулою (9). Для $t \in [a_i^\alpha, a_{i+1}^\alpha)$ одержимо

$$X_t^*(\{\alpha, \omega_\alpha\}) = e^{r(t-T)} E_\alpha \Big\{ E_\alpha \big\{ f\big(e^{rT} S_0 e^{T\left(\sqrt{2\delta} - \frac{\sigma^2}{2}\right) - \xi_T^*}\big) | \mathcal{F}^{0,\alpha}_{a_{i+1}^\alpha} \big\} | \mathcal{F}_t^{0,\alpha} \Big\},$$

$$E_\alpha \big\{ f\big(e^{rT} S_0 \exp\{T\big(\sqrt{2\delta} - \frac{\sigma^2}{2}\big) - \xi_T^*\}\big) | \mathcal{F}^{0,\alpha}_{a_{i+1}^\alpha} \big\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f\Big(e^{rT} S_0 \exp\{T\big(\sqrt{2\delta} - \frac{\sigma^2}{2}\big) - \xi^*_{a_{i+1}^\alpha} - y\}\Big) F_{(T - a_{i+1}^\alpha)}(dy) = \hat{g}(\{\omega_\alpha\}_i).$$

Нехай
$$X_t^*(\{\alpha, \omega_\alpha\}) = \sum_{i=1}^{k(\alpha)} \chi_{[a_i^\alpha, a_{i+1}^\alpha)}(t) X_t^{*,i}(\{\omega_\alpha\}_i),$$

де
$$X_t^{*,i}(\{\omega_\alpha\}_i) = e^{r(t-T)} [\hat{g}(\{\omega_\alpha\}_i) \chi_{[a_i^\alpha,\ t]}(\omega_i^\alpha) +$$

$$+ \frac{1}{1 - \phi_i^\alpha(t)} \int_t^{a_{i+1}^\alpha} \hat{g}(\{\omega_\alpha\}_{i-1}, y_1) \phi_i^\alpha(dy_1) \chi_{(t,\ a_{i+1}^\alpha)}(\omega_i^\alpha)].$$

Тому $\quad X^{*,i}_{c^\alpha_i}(\{\omega_\alpha\}_i)=e^{r(c^\alpha_i-T)}\Big[\chi_{[a^\alpha_i,c^\alpha_i]}(\omega^\alpha_i)E_\alpha\big\{f\big(S^*_T(\{\alpha,\omega_\alpha\})\big)\big|\mathcal{F}^{0,\alpha}_{a^\alpha_{i+1}}\big\}+$

$$+\chi_{(c^\alpha_i,a^\alpha_{i+1})}(\omega^\alpha_i)E_\alpha\big\{f\big(S^*_T(\{\alpha,\omega_\alpha\})\big)\big|\mathcal{F}^{0,\alpha}_{a^\alpha_i}\big\}\Big].$$

Існує границя $RX^{*,i}_{c^\alpha_i}(\{\omega_\alpha\}_i)$ в метриці $L_1(\Omega_1,P_1)$ і вона обчислюється за формулою

$$X_t(\omega)=\lim_{\Delta_\alpha\to0}RX^{*,i}_{c^\alpha_i}(\{\omega_\alpha\}_i)=e^{r(t-T)}\int_{-\infty}^{\infty}f\Big(e^{rT}S_0e^{T\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)-\xi_t-y}\Big)F_{(T-t)}(dy)=$$

$$=e^{r(t-T)}\int_{-\infty}^{\infty}f\Big(e^{r(T-t)}S_t(\omega)e^{(T-t)\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)-y}\Big)F_{(T-t)}(dy).$$

Для справедливої ціни контракту з опціоном отримуємо формулу (15) з попередньої при $t=0$. Теорему доведено.

3. Додаток. Доведення Леми 1.

Зауважимо, що

$$\varphi^{0,\alpha}_i(t|\{\omega_\alpha\}_{i-1})=g^\alpha_{i-1}(\{\omega_\alpha\}_{i-1})[e^{\Delta^\alpha_i\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)-g^{-1}_{[a^\alpha_i,a^\alpha_{i+1})}(t)}-$$

$$-\frac{1}{1-\phi^\alpha_i(t)}\int_t^{a^\alpha_{i+1}}e^{\Delta^\alpha_i\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)-g^{-1}_{[a^\alpha_i,a^\alpha_{i+1})}(y)}\phi^\alpha_i(dy)],$$

$$\bar\phi^\alpha_i(\{\omega_\alpha\}_i)=\frac{1}{B_0e^{rT}}\int_{-\infty}^{\infty}f\Big(S_0e^{rT}\exp\big\{T\big(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\big)-\xi^*_{a^\alpha_{i+1}}-y\big\}\Big)F_{(T-a^\alpha_{i+1})}(dy)=$$

$$=\frac{1}{B_0e^{rT}}\int_{-\infty}^{\infty}f\Big(B_0e^{rT}g^\alpha_i(\{\omega_\alpha\}_i)\exp\big\{(T-a^\alpha_{i+1})\big(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\big)-y\big\}\Big)F_{(T-a^\alpha_{i+1})}(dy).$$

$$\varphi^{\alpha,f}_i(t|\{\omega_\alpha\}_{i-1})=\frac{1}{B_0e^{rT}}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[f\big(K_i(y,t,\{\omega_\alpha\}_{i-1})\big)-$$

$$-\frac{1}{1-\phi^\alpha_i(t)}\int_t^{a^\alpha_{i+1}}f\big(K_i(y,y_1,\{\omega_\alpha\}_{i-1})\big)\phi^\alpha_i(dy_1)\Big]F_{(T-a^\alpha_{i+1})}(dy),$$

де $\quad K_i(y,t,\{\omega_\alpha\}_{i-1})=$

$$=B_0e^{rT}g^\alpha_{i-1}(\{\omega_\alpha\}_{i-1})e^{\Delta^\alpha_i\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)-g^{-1}_{[a^\alpha_i,a^\alpha_{i+1})}(t)}e^{(T-a^\alpha_{i+1})\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)-y}.$$

Спочатку з'ясуємо пункт 1. Нехай $f(x)=x^n$. Тоді

$$\varphi^{\alpha,x^n}_i(s|\{\omega_\alpha\}_{i-1})=\frac{1}{B_0e^{rT}}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\big(K_i(y,t,\{\omega_\alpha\}_{i-1})\big)^n-$$

$$-\frac{1}{1-\phi_i^\alpha(t)}\int\limits_t^{a_{i+1}^\alpha}\left(K_i(y,y_1,\{\omega_\alpha\}_{i-1})\right)^n\phi_i^\alpha(dy_1)\Big]F_{(T-a_{i+1}^\alpha)}(dy)=$$

$$=\left(B_0e^{rT}\right)^{n-1}\left(g_{i-1}^\alpha(\{\omega_\alpha\}_{i-1})e^{(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2})(T-a_{i+1}^\alpha)}\right)^n\times$$

$$\times\Big[e^{(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2})n\Delta_i^\alpha-ng^{-1}_{[a_i^\alpha,a_{i+1}^\alpha)}(s)}-\frac{1}{1-\phi_i^\alpha(s)}\int\limits_s^{a_{i+1}^\alpha}e^{(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2})n\Delta_i^\alpha-ng^{-1}_{[a_i^\alpha,a_{i+1}^\alpha)}(y_1)}\phi_i^\alpha(dy_1)\Big]\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-ny}F_{(T-a_{i+1}^\alpha)}(dy).$$

Позначимо

$$A_n(s,[a_i^\alpha,a_{i+1}^\alpha))=e^{(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2})n\Delta_i^\alpha-ng^{-1}_{[a_i^\alpha,a_{i+1}^\alpha)}(s)}-$$

$$-\frac{1}{1-\phi_i^\alpha(s)}\int\limits_s^{a_{i+1}^\alpha}e^{(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2})n\Delta_i^\alpha-ng^{-1}_{[a_i^\alpha,a_{i+1}^\alpha)}(y_1)}\phi_i^\alpha(dy_1),$$

З урахуванням позначень, одержимо

$$\frac{\varphi_i^{\alpha,x^n}(s|\{\omega_\alpha\}_{i-1})}{\varphi_i^{0,\alpha}(s|\{\omega_\alpha\}_{i-1})}=\left(B_0e^{rT}g_{i-1}^\alpha(\{\omega_\alpha\}_{i-1})\right)^{n-1}e^{(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2})n(T-a_{i+1}^\alpha)}\times$$

$$\times\frac{A_n(s,[a_i^\alpha,a_{i+1}^\alpha))}{A_1(s,[a_i^\alpha,a_{i+1}^\alpha))}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-ny}F_{(T-a_{i+1}^\alpha)}(dy).$$

Прийнявши $s=c_i^\alpha$, де c_i^α — така точка, що $g^{-1}_{[a_i^\alpha,a_{i+1}^\alpha)}(c_i^\alpha)=0$, отримаємо

$$\frac{R\varphi_i^{\alpha,x^n}(c_i^\alpha|\{\omega_\alpha\}_{i-1})}{R\varphi_i^{0,\alpha}(c_i^\alpha|\{\omega_\alpha\}_{i-1})}=\left(B_0e^{rT}Rg_{i-1}^\alpha(\{\omega_\alpha\}_{i-1})\right)^{n-1}e^{(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2})n(T-a_{i+1}^\alpha)}\times$$

$$\times\frac{A_n(c_i^\alpha,[a_i^\alpha,a_{i+1}^\alpha))}{A_1(c_i^\alpha,[a_i^\alpha,a_{i+1}^\alpha))}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-ny}F_{(T-a_{i+1}^\alpha)}(dy).$$

$$Rg_{i-1}^\alpha(\{\omega_\alpha\}_i)=\frac{S_0}{B_0}e^{a_i^\alpha\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)-\xi_{a_i^\alpha}}.$$

Одержимо

$$\lim_{\Delta_\alpha\to0}\frac{A_n(c_i^\alpha,[a_i^\alpha,a_{i+1}^\alpha))}{A_1(c_i^\alpha,[a_i^\alpha,a_{i+1}^\alpha))}=\lim_{\Delta_\alpha\to0}e^{(n-1)\Delta_i^\alpha(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2})}\cdot\frac{\int_0^\infty[1-e^{-ny}]F_{\Delta_i^\alpha}(dy)}{\int_0^\infty[1-e^{-y}]F_{\Delta_i^\alpha}(dy)}=n.$$

Внаслідок стохастичної неперервності процесу ξ_t отримаємо такі границі за ймовірністю:

$$\lim_{\Delta_i^\alpha \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ny} F_{(T-a_{i+1}^\alpha)}(dy) = \lim_{\Delta_i^\alpha \to 0} E_1\{e^{-n\xi_{(T-a_{i+1}^\alpha)}}\} =$$

$$= E_1\{e^{-n\xi_{(T-t)}}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ny} F_{(T-t)}(dy),$$

$$\lim_{\Delta_\alpha \to 0} Rg_{i-1}^\alpha(\{\omega_\alpha\}_i) = \frac{S_0}{B_0} e^{a_i^\alpha\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)-\xi_t}.$$

Отже,
$$\lim_{\Delta_\alpha \to 0} \gamma_{c_i^\alpha}^{x^n} = [e^{r(T-t)}S_t]^{n-1} n \int_{-\infty}^{\infty} e^{n(T-t)\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)-yn} F_{T-t}(dy)$$

за ймовірністю. Ця границя буде і у $L_1(\Omega_1, P_1)$, оскільки $\gamma_{c_i^\alpha}^{x^n}$ рівномірно інтегровні.

Пункт 2 є наслідком 1. Переходимо до доведення третього пункту. Введемо позначення

$$D_i(y, y_1, \tau, c_\alpha^i, \{\omega_\alpha\}_{i-1}) =$$
$$= K_i(y, c_i^\alpha, \{\omega_\alpha\}_{i-1}) + \tau[K_i(y, y_1, \{\omega_\alpha\}_{i-1}) - K_i(y, c_i^\alpha, \{\omega_\alpha\}_{i-1})].$$

З урахуванням цього, отримаємо

$$\varphi_i^{\alpha,f}(c_i^\alpha|\{\omega_\alpha\}_{i-1}) = \frac{-1}{B_0 e^{rT}(1-\phi_i^\alpha(c_i^\alpha))} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{c_i^\alpha}^{a_{i+1}^\alpha} \int_0^1 f'\big(D_i(y, y_1, \tau, c_\alpha^i, \{\omega_\alpha\}_{i-1})\big) \times$$
$$\times [K_i(y, y_1, \{\omega_\alpha\}_{i-1}) - K_i(y, c_i^\alpha, \{\omega_\alpha\}_{i-1})] d\tau \phi_i^\alpha(dy_1) F_{(T-a_{i+1}^\alpha)}(dy).$$

Завдяки умові (16) існують число $0 < c < \infty$ та послідовність поліномів $P_n(x)$ такі, що $\forall a > 0 \sup\limits_{x\in[-a,a]} |f'(x) - P_n'(x)| \to 0, n \to \infty$, $|f'(x)| \leqslant c(1+x^2)^l$, $|P_n'(x)| \leqslant c(1+x^2)^l$, $x \in [-a, a]$. Позначимо O_m - множину реалізацій процесу ξ_t таку, що $O_m = \big\{\omega \in \Omega_1, \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T} |\xi_t| \leqslant m\big\}, m \in \mathbb{N}$, $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} O_m = \Omega_0 \subseteq \Omega_1$, $P_1(\Omega_0) = 1$. Оцінимо на множині O_m вираз

$$\frac{|R\varphi_i^{\alpha,f}(c_i^\alpha|\{\omega_\alpha\}_{i-1}) - R\varphi_i^{\alpha,P_n}(c_i^\alpha|\{\omega_\alpha\}_{i-1})|}{|R\varphi_i^{0,\alpha}(c_i^\alpha|\{\omega_\alpha\}_{i-1})|}.$$

Згадаємо, що

$$\varphi_i^{0,\alpha}(c_i^\alpha|\{\omega_\alpha\}_{i-1}) = g_{i-1}^\alpha(\{\omega_\alpha\}_{i-1}) \frac{e^{\Delta_i^\alpha\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)}}{1-\phi_i^\alpha(c_i^\alpha)} \int_{c_i^\alpha}^{a_{i+1}^\alpha} (1 - e^{-g^{-1}_{[a_i^\alpha, a_{i+1}^\alpha)}(x)}) \phi_i^\alpha(dx),$$

тоді

$$\int_{c_i^\alpha}^{a_{i+1}^\alpha} \big| - K_i(y, c_i^\alpha, \{\omega_\alpha\}_{i-1}) + K_i(y, y_1, \{\omega_\alpha\}_{i-1})\big| \phi_i^\alpha(dy_1) \frac{B_0 e^{rT} g_{i-1}^\alpha(\{\omega_\alpha\}_{i-1})}{1-\phi_i^\alpha(c_i^\alpha)} \times$$

$$\times\, e^{\Delta_i^\alpha\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)} e^{(T-a_{i+1}^\alpha)\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)-y} \int\limits_{c_i^\alpha}^{a_{i+1}^\alpha} \left| -1+e^{-g^{-1}_{[a_i^\alpha,a_{i+1}^\alpha)}(y_1)} \right| \phi_i^\alpha(dy_1) =$$

$$= \frac{B_0 e^{rT} e^{(T-a_{i+1}^\alpha)\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)-y}}{1-\phi_i^\alpha(c_i^\alpha)} \left| \varphi_i^{0,\alpha}(c_i^\alpha|\{\omega_\alpha\}_{i-1}) \right|.$$

Позначимо $H_n(x) = |f'(x) - P_n'(x)|$ і розглянемо вираз

$$RI_1^d(c_i^\alpha,\{\omega_\alpha\}_{i-1}) = \frac{1}{B_0 e^{rT}} \int\limits_{-\infty}^{-d} \int\limits_{c_i^\alpha}^{a_{i+1}^\alpha} \int\limits_0^1 RH_n\big(D_i(y,y_1,\tau,c_i^\alpha,\{\omega_\alpha\}_{i-1})\big) \times$$
$$\times\, |RK_i(y,c_i^\alpha,\{\omega_\alpha\}_{i-1}) - RK_i(y,y_1,\{\omega_\alpha\}_{i-1})| d\tau \phi_i^\alpha(dy_1) F_{(T-a_{i+1}^\alpha)}(dy).$$

На множині O_m та для $y_1 \in [c_i^\alpha, a_{i+1}^\alpha)$ виконується оцінка

$$0 \leqslant RD_i\big(y,y_1,\tau,c_i^\alpha,\{\omega_\alpha\}_{i-1}\big) = e^{rT} S_0 e^{T\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)-\xi^*_{a_i^\alpha}-y} \times$$
$$\times \left(1+\tau\big(-1+e^{-g^{-1}_{[a_i^\alpha,a_{i+1}^\alpha)}(y_1)}\big)\right) \leqslant e^{rT} S_0 e^{T\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)+m-y}.$$

Тому

$$RH_n\big(D_i(y,y_1,\tau,c_i^\alpha,\{\omega_\alpha\}_{i-1})\big) \leqslant 2c(1+v_m e^{-2y})^l,$$

де $v_m = \left[S_0 e^{rT} e^{T\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)+m}\right]^2$.
Для $RI_1^d(c_i^\alpha,\{\omega_\alpha\}_{i-1})$ правильна оцінка

$$RI_1^d(c_i^\alpha,\{\omega_\alpha\}_{i-1}) \leqslant \frac{2ce^{(T-a_{i+1}^\alpha)\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)}}{1-\phi_i^\alpha(c_i^\alpha)} \times$$
$$\times \int\limits_{-\infty}^{-d} e^{-y}(1+v_m e^{-2y})^l F_{(T-a_{i+1}^\alpha)}(dy) \left| R\varphi_i^{0,\alpha}(c_i^\alpha,\{\omega_\alpha\}_{i-1}) \right|.$$

Для наперед заданого $\varepsilon > 0$ виберемо $d > 0$ таким, щоб

$$\frac{2ce^{(T-a_{i+1}^\alpha)\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)}}{1-\phi_i^\alpha(c_i^\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{-d} e^{-y}(1+v_m e^{-2y})^l F_{(T-a_{i+1}^\alpha)}(dy) < \varepsilon,$$

тоді $RI_1^d(c_i^\alpha,\{\omega_\alpha\}_{i-1}) \leqslant \varepsilon \left| R\varphi_i^{0,\alpha}(c_i^\alpha,\{\omega_\alpha\}_{i-1}) \right|$.
Тепер оцінимо $RI_2^d(c_i^\alpha,\{\omega_\alpha\}_{i-1})$.

$$RI_2^d(c_i^\alpha,\{\omega_\alpha\}_{i-1}) = \frac{1}{B_0 e^{rT}} \int\limits_{-d}^{\infty} \int\limits_{c_i^\alpha}^{a_{i+1}^\alpha} \int\limits_0^1 RH_n\big(D_i(y,y_1,\tau,c_i^\alpha,\{\omega_\alpha\}_{i-1})\big) \times$$
$$\times \left| RK_i(y,c_i^\alpha,\{\omega_\alpha\}_{i-1}) - RK_i(y,y_1,\{\omega_\alpha\}_{i-1}) \right| d\tau \phi_i^\alpha(dy_1) F_{(T-a_{i+1}^\alpha)}(dy).$$

На множині O_m та для $y_1 \in [c_i^\alpha, a_{i+1}^\alpha), y \in [-d, \infty)$ виконується оцінка

$$0 \leqslant RD_i(y, y_1, \tau, c_i^\alpha, \{\omega_\alpha\}_{i-1}) \leqslant e^{rT} S_0 e^{T\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)+m+d} = l_m.$$

Виберемо ціле число $N_0(\varepsilon)$ таким, щоб виконувалась нерівність $\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant l_m} H_n(x) < \varepsilon_1$, $n \geqslant N_0(\varepsilon_1)$, де $\varepsilon_1 = \dfrac{1-\phi_i^\alpha(c_i^\alpha)}{e^d e^{(T-a_{i+1}^\alpha)\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)}}$. Матимемо

$$RI_2^d(c_i^\alpha, \{\omega_\alpha\}_{i-1}) \leqslant \frac{\varepsilon}{1-\phi_i^\alpha(c_i^\alpha)} \int\limits_{-d}^{\infty} e^{(T-a_{i+1}^\alpha)\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)} e^{-y} F_{(T-a_{i+1}^\alpha)}(dy) \times$$

$$\times \left|R\varphi_i^{0,\alpha}(c_i^\alpha|\{\omega_\alpha\}_{i-1})\right| \leqslant \varepsilon_1 \frac{e^d e^{(T-a_{i+1}^\alpha)\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)}}{1-\phi_i^\alpha(c_i^\alpha)} \left|R\varphi_i^{0,\alpha}(c_i^\alpha|\{\omega_\alpha\}_{i-1})\right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \left|R\varphi_i^{0,\alpha}(c_i^\alpha|\{\omega_\alpha\}_{i-1})\right|.$$

Отже, $\exists N_0(\varepsilon, m)$ таке, що для $n > N_0(\varepsilon, n)$

$$\frac{\left|R\varphi_i^{\alpha,f}(c_i^\alpha|\{\omega_\alpha\}_{i-1}) - R\varphi_i^{\alpha,P_n}(c_i^\alpha|\{\omega_\alpha\}_{i-1})\right|}{\left|R\varphi_i^{0,\alpha}(c_i^\alpha|\{\omega_\alpha\}_{i-1})\right|} \leqslant 2\varepsilon.$$

На множині O_m справджується нерівність

$$e^{r(T-t)} S_t(\omega) e^{(T-t)\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)} \leqslant S_0 e^{rT} e^{T\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)+m}.$$

Тому $\int\limits_{-\infty}^{\infty} H_n(e^{r(T-t)} S_t(\omega) e^{(T-t)\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)-y}) e^{(T-t)\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)-y} F_{(T-t)}(dy) \leqslant$

$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{-d} e^{(T-t)\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)-y} 2c(1+v_m e^{-2\sigma y})^l F_{(T-t)}(dy) +$$

$$+\varepsilon \int\limits_{-d}^{\infty} e^{(T-t)\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)-y} F_{(T-t)}(dy) \leqslant \varepsilon + c\varepsilon,$$

якщо d вибрати досить великим, а $n > N_0(\varepsilon, m)$. Внаслідок довільності m і того, що $P_1\left(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} O_m\right) = 1$, отримуємо твердження Леми 1.

4.Висновки. Для узагальненої моделі Блека-Шоулса для опціонів європейського типу з широким класом вимог вперше отримано формули для інвестиційного портфеля інвестора, що відповідає мінімальному геджу, для еволюції капіталу інвестора та справедливої ціни опціону. Щоб застосувати модель на практиці, треба оцінити значення параметрів δ та σ з історичних даних про ціни акції.

1. *Black F., Scholes M.* The pricing of options and corporate liabilities // J. Political Economy.– 1973.– Vol.81.– P.637-657.

2. *Mittnik S., Rachev S.* Stable distributions for assets returns//Appl. Math. Lett.– 1989.– Vol.2.– №3.– P.301-304.

3. *Гончар М.С.* Фондовий ринок і економічний ріст.– К., 2001.

4. *Kramkov D.* Optional decomposition of supermartingales and hedging contingent claims in incomplete security markets// Prob. Theory Relat. Fields.– 1996.– Vol.105.– P.459-479.

5. *Гончар М.С., Ковтун С.А.* Застосування випадкових процесів з незалежними приростами до теорії контрактів з опціонами// Вісник Київського Національного Університету ім.Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки.– 2001.– Випуск №**5**.– С.38-43.

GENERALISATION OF BLACK-SCHOLES MODEL

Svitlana Kovtun

Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of Kyiv
Metrolohichna str., 14b, 03680 Kyiv, Ukraine

Generalisation of Black-Scholes model by adding in exponent one-side $\frac{1}{2}$-stable Levy process is proposed. The existanse of minimal hege is prooved for such a model. The explicite formulae for investment portfolio that corresponds to the minimal hege, for capital evolution an the option price are given. As the minimal hege exists the option price is fair.

Key words: option, minimal hege, option fair value, random processes with independent increments.

Стаття надійшла до редколегії 17.07.2005

Прийнята до друку 02.11.2006

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2006. Вип.66. С.88–98 *Ser.Mech-Math.2006. Vol.66. P.88–98*

УДК 517.53

ОДНА ЕКСТРЕМАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ МЕРОМОРФНИХ У ПРОКОЛОТІЙ ПЛОЩИНІ ФУНКЦІЙ

Іван КШАНОВСЬКИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

Одержано оцінку знизу величини

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{N_0(r,f)+N_0(r,1/f)}{T_0(r,f)}$$

для певного класу мероморфних у проколотій площині функцій.

Ключові слова: мероморфна функція, характеристика Неванлінни, дефект функції, коефіцієнти Фур'є.

Позначення та формулювання основних результатів. Нехай f – мероморфна в проколотій площині $A=\mathbb{C}\backslash\{0\}$ функція, $n_0(t,f)$ – кількість полюсів функції f в $\{z: 1/t<|z|\leqslant t\}$. Позначимо

$$N_0(r,f)=\int\limits_1^r \frac{n_0(t,f)}{t}dt, \qquad m(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log^+|f(re^{i\theta})|d\theta,$$

$$m_0(r,f)=m(r,f)+m(1/r,f)-2m(1,f), \quad r\geqslant 1.$$

Означення 1. ([1]) *Функція*

$$T_0(r,f)=m_0(r,f)+N_0(r,f), \quad r\geqslant 1$$

називається характеристикою Неванлінни функції f в A.

В [1] доведено, що характеристика $T_0(r,f)$ - невід'ємна, неперервна, неспадна, опукла стосовно $\log r$ на $[1,+\infty)$ функція.
Порядком мероморфної в A функції f будемо називати величину

$$\rho[f]=\limsup_{r\to\infty}\frac{T_0(r,f)}{\log r}.$$

Через $c_k(t,f)$ позначимо коефіцієнти Фур'є $\log|f(te^{i\theta})|$ ([2]),

$$c_k(t,f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}e^{-ik\theta}\log|f(te^{i\theta})|d\theta,\quad k\in\mathbb{Z},\quad 0<t<\infty,$$

а також

$$m_q(r,f)=\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\ln|f(re^{i\theta})|\right|^q d\theta\right\}^{1/q},\quad q\geqslant 1.$$

Для мероморфної в A функції f приймемо

$$\varkappa_0(f)=\limsup_{r\to\infty}\frac{N_0(r,f)+N_0(r,1/f)}{T_0(r,f)}.$$

Якщо функція f аналітична в A, то $\varkappa_0(f)=1-\delta_0(0,f)$, де

$$\delta_0(a,f)\overset{def}{=}1-\limsup_{r\to\infty}\frac{N_0(r,\frac{1}{f-a})}{T_0(r,f)}$$

- дефект функції f в точці a ([3]). Точна оцінка знизу величини

$$\varkappa(f)=\limsup_{r\to\infty}\frac{N(r,f)+N(r,1/f)}{T(r,f)}$$

у випадку, коли f - мероморфна в $\mathbb{C}$ функція порядку $\rho<1$ одержана в [4], (див. також [5]). Проте задача про знаходження найкращої оцінки знизу величин $\varkappa_0(f)$ та $\varkappa(f)$ для мероморфних в A і $\mathbb{C}$ функцій скінченного порядку $\rho>1$ залишається відкритою. Найкраща з відомих на сьогодні оцінок величини $\varkappa(f)$ для мероморфних в $\mathbb{C}$ функцій отримали в [6], ([7]) з допомогою точної оцінки знизу величини

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{N(r,f)+N(r,1/f)}{m_2(r,f)}.$$

Мета нашої праці — отримати оцінку величини $\varkappa_0(f)$ для певного класу мероморфних в A функцій з допомогою такої теореми.

Теорема 1. *Нехай f – мероморфна в A функція порядку ρ, $0<\rho<\infty$, $f(z)=f(1/z), z\in A$. Тоді*

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{N_0(r,f)+N_0(r,1/f)}{m_2(r,f)+m_2(r,1/f)}\geqslant\frac{|\sin\pi\rho|}{\pi\rho}\left\{\frac{2}{1+\frac{\sin 2\pi\rho}{2\pi\rho}}\right\}^{1/2},\tag{1}$$

причому ця нерівність точна, тобто для деякої мероморфної в A функції порядку ρ в (1) виконується рівність.

Наслідок 1. *Нехай f – мероморфна в A функція порядку ρ така, що $f(z) = f(1/z)$ для всіх $z \in A$. Тоді*

$$\varkappa_0(f) \geqslant 0,9 \frac{|\sin \pi\rho|}{\rho + 1}. \tag{2}$$

Допоміжні твердження та результати. Нехай f – мероморфна в проколотій площині $A = \mathbb{C} \backslash \{0\}$ функція. Через $Z(f) = \{a_\nu\}$, $W(f) = \{b_\mu\}$ позначимо послідовності нулів і полюсів функції f відповідно і приймемо

$$z_\nu = \begin{cases} a_\nu \,, & \text{якщо} \quad |a_\nu| > 1, \\ \dfrac{1}{a_\nu} \,, & \text{якщо} \quad |a_\nu| \leqslant 1. \end{cases} \qquad w_\mu = \begin{cases} b_\mu \,, & \text{якщо} \quad |b_\mu| > 1, \\ \dfrac{1}{b_\mu} \,, & \text{якщо} \quad |b_\mu| \leqslant 1. \end{cases}$$

Лема А. ([8]) *Нехай f – аналітична в A функція без нулів. Тоді для будь-якого замкненого шляху γ в A такого, що проходить через точку $z_0 = 1$, існує $k \in \mathbb{Z}$, що для функції $g(z) = z^{-k} f(z)$ виконується*

$$\int\limits_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)} dz = 0.$$

Теорема А. ([2]) *Нехай f – відмінна від тотожного нуля, мероморфна в $\{z : 1/R_0 < |z| < R_0\}, R_0 \leqslant \infty$, функція, $Z(f) = \{a_\nu\}$, $W(f) = \{b_\mu\}$. Нехай $\{\alpha_k\}$ визначаються з рівностей $k\alpha_k = \beta_{k-1}$, $k \neq 0$, де $\dfrac{f'(z)}{f(z)} = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k z^k + \sum\limits_{|a_\nu|=1} \dfrac{1}{z - a_\nu} - \sum\limits_{|b_\mu|=1} \dfrac{1}{z - b_\mu}$ - розвинення логарифмічної похідної функції f в деякому околі одиничного кола. Тоді*

$$\begin{aligned}
&c_0(1/r, f) + c_0(r, f) - 2c_0(1, f) = N_0(r, 1/f) - N_0(r, f), \\
&c_k(r, f) = \frac{1}{2}(\alpha_k r^k + \bar{\alpha}_{-k} r^{-k}) + \frac{1}{2k} \sum_{1 < |a_\nu| \leqslant r} \left(\left(\frac{r}{a_\nu} \right)^k - \left(\frac{\bar{a}_\nu}{r} \right)^k \right) - \\
&\qquad - \sum_{1 < |b_\mu| \leqslant r} \left(\left(\frac{r}{b_\mu} \right)^k - \left(\frac{\bar{b}_\mu}{r} \right)^k \right), \\
&c_k(1/r, f) = \frac{1}{2}(\alpha_k r^{-k} + \bar{\alpha}_{-k} r^k) + \frac{1}{2k} \sum_{1/r \leqslant |a_\nu| \leqslant 1} \left((r\bar{a}_\nu)^k - \left(\frac{1}{r a_\nu} \right)^k \right) - \\
&\qquad - \frac{1}{2k} \sum_{1/r \leqslant |b_\mu| \leqslant 1} \left((r\bar{b}_\mu)^k - \left(\frac{1}{r b_\mu} \right)^k \right),
\end{aligned} \tag{3}$$

де $k \neq 0$, $1 < r < R_0$.

Родом послідовності $\{z_j\}$ називатимемо найменше невід'ємне ціле число p таке, що

$$\sum_j |z_j|^{-p-1} < +\infty.$$

Елементарний множник Веєрштрасса визначається так: $E(z,0) = 1 - z$,

$$E(z,p) = (1-z)\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + ... + \frac{z^p}{p}\right), \quad p \in \mathbb{N}.$$

Лема 1. *Нехай $g(z)$ – аналітична в A функція без нулів і*

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{T_0(r,f)}{r^\lambda} = 0$$

для деякого λ. Тоді

$$g(z) = z^m \exp(z^{-\eta} P(z)),$$

де $m \in \mathbb{Z}$, $\eta \in \mathbb{Z}_+, P(z)$- поліном, $\deg P(z) = 2\eta$ *і* $\eta \leqslant \lambda$.

Доведення. Лема А гарантує існування такого $m \in \mathbb{Z}$, що в A визначена однозначна гілка $\log g(z)$, де $g(z) = z^{-m} f(z)$. Справді, нехай $z_0 = 1$, і вважаємо $\log g(z_0)$ визначеним. Приймемо

$$\log g(z) = \log g(z_0) + \int\limits_{z_0}^{z} \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)} d\zeta,$$

де інтеграл обчислюється вздовж шляху, що з'єднує z_0 і z в A. Розглянемо розвинення $\log g(z)$ в ряд Лорана

$$\log g(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k z^k.$$

Нехай $z = re^{i\theta},\ r \geqslant 1$. Тоді

$$\log|g(z)| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Re}(c_k z^k) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(c_k z^k + \bar{c}_k \bar{z}^k) =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(c_k r^k + \bar{c}_{-k} r^{-k}) e^{ik\theta}, \quad r \geqslant 1,$$

$$\frac{1}{2}(c_k r^k + \bar{c}_{-k} r^{-k}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log|g(re^{i\theta})| e^{-ik\theta} d\theta, \quad r \geqslant 1, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Оскільки

$$|\log|g(z)|| \leqslant |\log|f(z)|| + |m||\log|z||$$

і

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\log|f(re^{i\theta})||d\theta+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\log|f\left(\frac{1}{r}e^{i\theta}\right)|\right|d\theta\leqslant$$

$$\leqslant 2T_0(r,f)+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\log|f(e^{i\theta})||d\theta,$$

то з (4) випливає, що

$$c_kr^k+\bar{c}_{-k}r^{-k}=O(r^\lambda),\quad r\to\infty,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Звідки $c_k=0,\ k>\lambda$. Проводячи аналогічні викладдення для $z=\frac{1}{r}e^{i\theta}$, отримаємо, що $c_k=0,\ k<-\lambda$. Отже, $c_k=0,\ |k|>\lambda$, тому,

$$\log g(z)=\sum_{|k|\leqslant\eta}c_kz^k=z^{-\eta}\sum_{|k|\leqslant\eta}c_kz^{k+\eta}=z^{-\eta}P(z),\quad \eta\leqslant\lambda,$$

що й завершує доведення леми.

Теорема 2. *Нехай f – мероморфна в A функція, $Z(f)=\{a_\nu\}$, $W(f)=\{b_\mu\}$, p_1 і p_2 - роди послідовностей $\{z_\nu\}$ і $\{w_\mu\}$ відповідно. Тоді*

$$f(z)=z^m\exp(z^{-\eta}P(z))\frac{\prod\limits_{|a_\nu|\leqslant1}E\left(\frac{a_\nu}{z},p_1\right)\prod\limits_{|a_\nu|>1}E\left(\frac{z}{a_\nu},p_1\right)}{\prod\limits_{|b_\mu|\leqslant1}E\left(\frac{b_\mu}{z},p_2\right)\prod\limits_{|b_\mu|>1}E\left(\frac{z}{b_\mu},p_2\right)},\tag{5}$$

де $m\in\mathbb{Z}$, $\eta\in\mathbb{Z}_+$, $P(z)$ - поліном, $\deg P(z)=2\eta$ і $\eta\leqslant\rho[f]$.

Доведення. Позначимо множники в чисельнику (5) через $\pi_1(\frac{1}{z}),\pi_2(z)$, а в знаменнику через $\pi_3(\frac{1}{z}),\pi_4(z)$. Оскільки $N_0(r,f)\leqslant T_0(r,f)$ і $N_0(r,1/f)\leqslant T_0(r,f)$, то порядки $N_0(r,f)$ і $N_0(r,1/f)$ не перевищують ρ. За теоремою Бореля [5, с.79] порядки $\pi_j(\zeta),j=1,2,3,4$ також не перевищують ρ. Розглянемо функцію

$$g(z)=\frac{f(z)\pi_3(\frac{1}{z}))\pi_4(z)}{\pi_1(\frac{1}{z})\pi_2(z)}.$$

Функція $g(z)$ задовольняє умови леми 1, застосування якої завершує доведення теореми.

Лема 2. *Якщо f – мероморфна функція порядку ρ в A, $Z(f)=\{a_\nu\}$, $W(f)=\{b_\mu\}$, то коефіцієнти Фур'є функції f при $k>\rho$ мають вигляд*

$$c_k(r,f)=\frac{1}{2}\bar{\alpha}_{-k}r^{-k}-$$

$$-\frac{1}{2k}\left\{\sum_{|a_\nu|>r}\left(\frac{r}{a_\nu}\right)^k-\sum_{|b_\mu|>r}\left(\frac{r}{b_\mu}\right)^k+\sum_{1<|a_\nu|\leqslant r}\left(\frac{\bar{a}_\nu}{r}\right)^k-\sum_{1<|b_\mu|\leqslant r}\left(\frac{\bar{b}_\mu}{r}\right)^k\right\},$$

$$c_k\left(\frac{1}{r}, f\right) = \frac{1}{2}\alpha_k r^{-k} -$$
$$- \frac{1}{2k}\left\{\sum_{|a_\nu|<1/r}(r\bar{a}_\nu)^k - \sum_{|b_\mu|<1/r}(r\bar{b}_\mu)^k + \sum_{1/r\leqslant|a_\nu|\leqslant 1}\left(\frac{1}{ra_\nu}\right)^k - \sum_{1/r\leqslant|b_\mu|\leqslant 1}\left(\frac{1}{rb_\mu}\right)^k\right\}, \tag{6}$$

де $k \neq 0$, $1 < r < \infty$.

Доведення. Для стислості проведемо доведення тільки для $c_k(r, f)$. З (3) одержимо

$$\begin{gathered} r^k\left|\alpha_k + \frac{1}{k}\sum_{1<|a_\nu|\leqslant r}\left(\frac{1}{a_\nu}\right)^k - \frac{1}{k}\sum_{1<|b_\mu|\leqslant r}\left(\frac{1}{b_\mu}\right)^k\right| \leqslant \\ \leqslant 2|c_k(r,f)| + \left|\frac{1}{k}\sum_{1<|a_\nu|\leqslant r}\left(\frac{\bar{a}_\nu}{r}\right)^k - \frac{1}{k}\sum_{1<|b_\mu|\leqslant r}\left(\frac{\bar{b}_\mu}{r}\right)^k\right| + |\bar{\alpha}_{-k}|r^{-k}. \end{gathered} \tag{7}$$

Оскільки

$$\begin{gathered} \left|\frac{1}{k}\sum_{1<|a_\nu|\leqslant r}\left(\frac{\bar{a}_\nu}{r}\right)^k - \frac{1}{k}\sum_{1<|a_\nu|\leqslant r}\left(\frac{\bar{b}_\mu}{r}\right)^k\right| \leqslant \frac{1}{k}\left(n_0(r,f) + n_0(r,1/f)\right) \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{k}\left(\int_r^{er}\frac{n_0(t,f)}{t}dt + \int_r^{er}\frac{n_0(t,1/f)}{t}dt\right) \leqslant \frac{1}{k}\left(N_0(er,f) + N_0(er,1/f)\right) \end{gathered}$$

і

$$|c_k(r,f)| + |c_k(1/r,f)| \leqslant 2T_0(r,f) + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|\log|f(e^{i\theta})||d\theta,$$

то, поділивши (7) на r^k і переходячи до границі при $r \to \infty$, знаходимо

$$\alpha_k = \frac{1}{k}\left(\sum_{1<|b_\mu|<\infty}\left(\frac{1}{b_\mu}\right)^k - \sum_{1<|a_\nu|<\infty}\left(\frac{1}{a_\nu}\right)^k\right).$$

Підставляючи α_k в (3), отримаємо (6). Лему доведено.

Лема 3. *Нехай порядок* ρ *мероморфної в* A *функції* f *не є цілим числом. Тоді порядок функції* $N_0(r, f) + N_0(r, 1/f)$ *дорівнює* ρ.

Доведення. З теореми 2

$$\pi(z) \stackrel{def}{=} \frac{\prod\limits_{|a_\nu|\leqslant 1}E\left(\frac{a_\nu}{z}, p_1\right)\prod\limits_{|a_\nu|>1}E\left(\frac{z}{a_\nu}, p_1\right)}{\prod\limits_{|b_\mu|\leqslant 1}E\left(\frac{b_\mu}{z}, p_2\right)\prod\limits_{|b_\mu|>1}E\left(\frac{z}{b_\mu}, p_2\right)} = z^{-m}\exp(-z^{-\eta}P(z))f(z).$$

Оскільки $\rho[\exp(-z^{-\eta}P(z))] \leqslant \eta < \rho$, то $\rho[\pi(z)] = \max\{\rho[f(z)], \rho[\exp(-z^{-\eta}P(z))]\} = \rho$. З іншого боку, за теоремою Бореля і з рівності $T_0(r, \varphi(z)) = T_0(r, \varphi(1/z))$ отримуємо

$$\rho = \rho[\pi(z)] \leqslant \max\{\rho[n_0(r, f)], \rho[n_0(r, 1/f)]\} = \rho[N_0(r, f) + N_0(r, 1/f)] \leqslant \rho.$$

Звідси $\rho[N_0(r, f) + N_0(r, 1/f)] = \rho$.

Доведення теореми 1. Позначимо $N_0(r) = N_0(r, f) + N_0(r, 1/f)$, $[\rho] = q$, $X = \{x_j\} = \{|z_\nu|\} \bigcup \{|w_\mu|\}$, $\gamma_k = \alpha_k + \alpha_{-k}$, де α_k визначаються з теореми A. Достатньо розглянути випадок, коли ρ не ціле, оскільки при цілому ρ права частина (1) тривіальна. Зауважимо, що $\max(p_1, p_2) \leqslant q$, де p_1 і p_2 - роди послідовностей $\{z_\nu\}$ і $\{w_\mu\}$ відповідно. Розглянемо цілу функцію

$$F(z) = P(z) \prod_j E\left(\frac{z}{x_j}, q\right),$$

де $P(z) \equiv 1$, якщо $q = 0$, і

$$P(z) = \sum_{i=1}^{q} |\gamma_i| z^i,$$

якщо $q \geqslant 1$. Коефіцієнти Фур'є функції $\log |F|$ ([9, с.75], [6]),

$$c_0(r, F) = N(r, \frac{1}{F}) = N_0(r, f) + N_0(r, \frac{1}{f}), \quad r > 1,$$

$$c_k(r, F) = \frac{1}{2}|\gamma_k| r^k + \frac{1}{2k} \sum_{x_j \leqslant r} \left(\left(\frac{r}{x_j}\right)^k - \left(\frac{x_j}{r}\right)^k \right), \quad r > 1, \quad 1 \leqslant k \leqslant q, \tag{8}$$

$$c_k(r, F) = -\frac{1}{2k} \sum_{x_j > r} \left(\frac{r}{x_j}\right)^k - \frac{1}{2k} \sum_{x_j \leqslant r} \left(\frac{x_j}{r}\right)^k, \quad r > 1, \quad k > q. \tag{9}$$

Позначимо $g(z) = f(z) f(1/z)$. Оскільки $c_k(r, g) = c_k(r, f) + \bar{c}_k(1/r, f)$, то з (3) і (6) знаходимо

$$\begin{gathered} c_k(r, g) = \frac{1}{2}\bar{\gamma}_k r^{-k} - \\ -\frac{1}{2k}\left\{ \sum_{|a_\nu| > r} \left(\frac{r}{a_\nu}\right)^k - \sum_{|b_\mu| > r} \left(\frac{r}{b_\mu}\right)^k + \sum_{1 < |a_\nu| \leqslant r} \left(\frac{\bar{a}_\nu}{r}\right)^k - \sum_{1 < |b_\mu| \leqslant r} \left(\frac{\bar{b}_\mu}{r}\right)^k \right\} - \\ -\frac{1}{2k}\left\{ \sum_{|a_\nu| < 1/r} (r a_\nu)^k - \sum_{|b_\mu| < 1/r} (r b_\mu)^k + \sum_{1/r \leqslant |a_\nu| \leqslant 1} \left(\frac{1}{r \bar{a}_\nu}\right)^k - \sum_{1/r \leqslant |b_\mu| \leqslant 1} \left(\frac{1}{r \bar{b}_\mu}\right)^k \right\}, \end{gathered}$$

$k \geqslant q+1$, а для $1 \leqslant k \leqslant q$,

$$c_k(r,g) = \frac{1}{2}\gamma_k r^k + \frac{1}{2}\bar{\gamma}_k r^{-k} +$$
$$+\frac{1}{2k}\left\{\sum_{1<|a_\nu|\leqslant r}\left(\left(\frac{r}{a_\nu}\right)^k - \left(\frac{\bar{a}_\nu}{r}\right)^k\right) - \sum_{1<|b_\mu|\leqslant r}\left(\left(\frac{r}{b_\mu}\right)^k - \left(\frac{\bar{b}_\mu}{r}\right)^k\right) +\right.$$
$$\left. + \sum_{1/r\leqslant|a_\nu|\leqslant 1}\left((ra_\nu)^k - \left(\frac{1}{r\bar{a}_\nu}\right)^k\right) - \sum_{1/r\leqslant|b_\mu|\leqslant 1}\left((rb_\mu)^k - \left(\frac{1}{r\bar{b}_\mu}\right)^k\right)\right\}.$$

Звідси

$$|c_k(r,g)| \leqslant |c_k(r,F)| + \frac{|\gamma_k|}{2r^k} \leqslant |c_k(r,F)| + \frac{\gamma^*}{k}, \quad k \geqslant q+1,$$

де

$$\gamma^* = \frac{1}{2}\sum_{x_j\in X}\left(\frac{1}{x_j}\right)^{q+1}.$$

Крім того, оскільки $\left|a - \frac{1}{\bar{a}}\right| = |a| - \frac{1}{|a|}$, якщо $|a| \geqslant 1$, то

$$|c_k(r,g)| \leqslant |c_k(r,F)| + \frac{|\gamma_k|}{2r^k} \leqslant |c_k(r,F)| + \frac{|\gamma_k|}{2}, \quad 1 \leqslant k \leqslant q,$$

і, отже,

$$m_2(r,g) \leqslant m_2(r,F) + C, \quad r > 1.$$

Інтегруючи частинами в (8) і (9), знаходимо, що для $k \geqslant q+1$

$$|c_k(r,F)| = \frac{k}{2}\left\{\int_1^r \left(\frac{t}{r}\right)^k \frac{N_0(t)}{t}dt + \int_r^\infty \left(\frac{r}{t}\right)^k \frac{N_0(t)}{t}dt\right\} - N_0(r), \tag{10}$$

а для $1 \leqslant k \leqslant q$ $(q \neq 0)$,

$$0 \leqslant c_k(r,F) = \frac{1}{2}|\gamma_k|r^k + \frac{k}{2}\int_1^r \left(\left(\frac{r}{t}\right)^k - \left(\frac{t}{r}\right)^k\right)\frac{N_0(t)}{t}dt + N_0(r). \tag{11}$$

Оскільки ρ не ціле, то за лемою 3 порядок $N_0(r)$ дорівнює ρ. За лемою про піки Пойа для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує послідовність $\{t_n\}, t_n \to \infty$ така, що

$$N_0(t) \leqslant \left(\frac{t}{t_n}\right)^{\rho-\varepsilon} N_0(t_n), \quad 0 \leqslant t \leqslant t_n,$$

$$N_0(t) \leqslant \left(\frac{t}{t_n}\right)^{\rho+\varepsilon} N_0(t_n), \quad t_n \leqslant t < \infty. \tag{12}$$

Використовуючи (12) в формулах (10) і (11), одержимо

$$|c_k(t_n, F)| \leqslant N_0(t_n)\left\{\frac{k(k-\varepsilon)}{(k-\varepsilon)^2-\rho^2}-1\right\}, \quad k \geqslant q+1,$$

і

$$|c_k(t_n, F)| \leqslant N_0(t_n)\left\{\frac{k^2}{(\rho-\varepsilon)^2-k^2}-1\right\}+\frac{1}{2}|\gamma_k| t_n^k, \quad 1 \leqslant k \leqslant q.$$

Зауважимо, що з (12) випливає, зокрема, $t_n^q = o(N_0(t_n))$, $n \to \infty$. Враховуючи це зауваження і довільність ε, знаходимо

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{|c_k(t_n, g)|}{N_0(t_n)} \leqslant \limsup_{n\to\infty}\frac{|c_k(t_n, F)|}{N_0(t_n)} \leqslant \frac{\rho^2}{|k^2-\rho^2|}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

З огляду на рівність Парсеваля

$$\{m_2(r, F)\}^2 = N_0^2(r) + 2\sum_{k=1}^{\infty}|c_k(r, F)|^2$$

отримуємо нерівність (див. [6])

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{m_2(r, g)}{N_0(r)} \leqslant \left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\rho^4}{(\rho^2-k^2)^2}\right\}^{1/2} = \frac{\pi\rho}{\sqrt{2}|\sin\pi\rho|}\left(1+\frac{\sin 2\pi\rho}{2\pi\rho}\right)^{1/2}.$$

З іншого боку, оскільки $c_k(1/r, g) = \bar{c}_k(r, g)$, то $m_2(1/r, g) = m_2(r, g)$. Крім того, $m_2(r, g) = 2m_2(r, f)$, звідки остаточно отримуємо

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{m_2(r, f)+m_2(r, 1/f)}{N_0(r, f)+N_0(r, 1/f)} \leqslant \frac{\pi\rho}{\sqrt{2}|\sin\pi\rho|}\left(1+\frac{\sin 2\pi\rho}{2\pi\rho}\right)^{1/2}.$$

В [6] побудовано приклад цілої функції f_0 з додатними нулями порядку ρ, де ρ не ціле , для якої

$$N(t, 1/f_0) = \frac{1}{\rho}t^\rho + o(t^\rho), \quad t \to \infty,$$

$$\lim_{r\to\infty}\left\{\frac{m_2(r, f_0)}{N(r, 1/f_0)}\right\}^2 = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^4}{(\rho^2-k^2)^2}.$$

Розглянемо функцію $g_0(z) = f_0(z)f_0(\frac{1}{z})$. Оскільки

$$N_0(r, 1/g_0) = 2N_0(r, 1/f_0), \qquad r > 1,$$

$$N_0(r, 1/f_0) = N(r, 1/f_0) + N(1/r, 1/f_0) - 2N(1, 1/f_0), \qquad r > 1,$$

$$N_0(r, 1/g_0) - 2m(1, f) \leqslant T_0(r, g_0) \leqslant 2T_0(r, f_0), \qquad r > 1,$$

то порядок функції g_0 дорівнює ρ. З леми 2, враховуючи, що f_0 - ціла функція, отримуємо

$$c_k(1/r,f) = \frac{1}{2}\alpha_k r^{-k} - \frac{r^{-k}}{2k} \sum_{1/r\leqslant|a_\nu|\leqslant 1} \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^k, \quad r>r_0.$$

Звідси

$$|c_k(1/r,f)| \leqslant \frac{1}{2}|\alpha_k| r^{-k} + \frac{1}{2}\frac{n}{k}\left(\frac{r_0}{r}\right)^k \leqslant \frac{\gamma^*}{k} + \frac{n}{2k}, \quad r>r_0,$$

де n - кількість нулів функції f_0 в крузі $\{z : |z| \leqslant 1\}$. Тому $m_2(1/r,f_0) \leqslant const$. Звідси, враховуючи, що $c_k(r,g_0) = c_k(r,f_0) + \bar{c}_k(1/r,f_0)$, отримаємо

$$\lim_{r\to\infty} \frac{m_2(r,g_0)+m_2(1/r,g_0)}{N_0(r,1/g_0)} = \lim_{r\to\infty} \frac{2m_2(r,g_0)}{2N_0(r,1/f_0)} =$$
$$= \lim_{r\to\infty} \frac{m_2(r,g_0)}{N(r,1/f_0)+N(1/r,1/f_0)-2N(1,1/f_0)} = \lim_{r\to\infty} \frac{m_2(r,g_0)}{N(r,1/f_0)} = \lim_{r\to\infty} \frac{m_2(r,f_0)}{N(r,1/f_0)},$$

тобто оцінка (1) точна. Теорему 1 доведено.

Доведення наслідку. Враховуючи монотонність $m_q(r,f)$ за q і рівність Йенсена для кільця ([1]), маємо

$$m_2(r,f)+m_2(1/r,f) \geqslant m_1(r,f)+m_1(1/r,f) = 2T_0(r,f)-N_0(r,f)-N_0(r,\frac{1}{f})+2m_1(1,f).$$

Тому

$$\frac{\varkappa_0(f)}{2-\varkappa_0(f)} = \limsup_{r\to\infty} \frac{N_0(r,f)+N_0(r,1/f)}{2T_0(r,f)-N_0(r,f)-N_0(r,1/f)} \geqslant$$
$$\geqslant \limsup_{r\to\infty} \frac{N_0(r,f)+N_0(r,1/f)}{m_2(r,f)+m_2(1/r,f)-2m_1(r,f)}.$$

Враховуючи (1), приходимо до нерівності

$$\frac{\varkappa_0(f)}{2-\varkappa_0(f)} \geqslant \frac{|\sin\pi\rho|}{\pi\rho}\left\{\frac{2}{1+\frac{\sin 2\pi\rho}{2\pi\rho}}\right\}^{1/2}. \tag{13}$$

Використовуючи елементарні оцінки (див., наприклад, [7], с.64), отримаємо (2) з (13).

1. *Khrystiyanyn A., Kondratyuk A.* On the Nevanlinna Theory for meromorphic functions on annuli. I, Matematychni Studii 23 (2005), 19-30.

2. *Khrystiyanyn A.Ya., Kondratyuk A.A.* Holomorphic functions of finite λ-type in punctured planes International Conferense „Analysis and related topics“, Lviv, November 17-20, 2005, Book of abstracts. - P.50.

3. *Khrystiyanyn A., Kondratyuk A.* On the Nevanlinna Theory for meromorphic functions on annuli. II, Matematychni Studii 24 (2005), 57-68.

4. *Edrei A., Fuchs W.H.J,* The deficiens of meromorphic functions of order less than one, Duke Math.J.– 1960.– Vol.27.– P.233-249.

5. *Гольдберг А.А., Островский И.В.* Распределение значений мероморфных функций.– М., 1970.

6. *Miles J.B., Shea D.F,* An extremal problem in value distribution theory, Quart. J. Math, Oxford.– 1973.– Vol.24.– P.377-383.

7. *Кондратюк А.А.* Ряды Фурье и мероморфные функции.– Львов, 1988.

8. *Kshanovskyy I.* An analog of Poisson-Jensen formula for annuli, Matematychni Studii 24 (2005), 147-158.

9. *Rubel L.A.* Entire and meromorphic functions.– New York: Springer, 1996.

AN EXTREMAL PROBLEM FOR MEROMORPHIC FUNCTIONS IN A PUNCTURED PLANE.

Ivan Kshanovskyy

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

We obtain an estimate of

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{N_0(r,f)+N_0(r,1/f)}{T_0(r,f)}$$

for some class of meromorphic functions in a punctured plane.

Key words: meromorphic function, Nevanlinna characteristic, deficiency of the function, Fourier coefficients.

Стаття надійшла до редколегії 24.05.2006

Прийнята до друку 02.11.2006

УДК 517.95

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З НЕЛОКАЛЬНОЮ ДІЄЮ

Сергій ЛАВРЕНЮК, Маріанна ОЛІСКЕВИЧ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

Одержано певні умови існування та єдиності розв'язку мішаної задачі для рівняння

$$u_t+\sum_{i=1}^{m}a_i(x,y,t)u_{y_i}-\sum_{i,j=1}^{n}(a_i(x,y,t)u_{x_i})_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x,y,t)u_{x_i}+$$

$$+b_0(x,y,t,u)+\int\limits_0^t a_0(x,y,\xi,u)d\xi=f_0(x,y,t)-\sum_{i=1}^{n}f_{i,x_i}(x,y,t)$$

у необмеженій області за змінними x.

Ключові слова: ультрапараболічне рівняння.

Ультрапараболічні рівняння почали досліджувати ще в першій половині XX ст. Рівняння такого типу, які іноді називають параболічними з багатьма часами, виникли як математична модель броунівського руху фізичної системи з n ступенями вільності. До таких рівнянь належить, зокрема, рівняння Колмогорова [1], яке багаторазово узагальнювали і досліджували різні автори (див. бібліографію в [2]). Зазначимо, що найдетальніші результати для лінійних ультрапараболічних рівнянь одержали Ейдельман С. Д., Івасишен С. Д. та їхні учні (див., наприклад, [2 – 5]). Окремі результати для нелінійних ультрапараболічних рівнянь в необмежених областях отримано в [6 – 11].

У цій праці в необмеженій області розглянуто мішану задачу для нелінійного ультрапараболічного рівняння з нелокальним доданком, яке, зокрема, містить невідому функцію зі степенем $p\in(1,2]$. Гіперболічна частина цього рівняння містить перші похідні за групою $m+1$ $(m \geq 1)$ незалежних змінних.

Нехай Ω_x – необмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\Omega_x \subset C^1$; Ω_y – обмежена область в $\mathbb{R}^m$ з межею $\partial\Omega_y \subset C^1$; $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y$; $Q_\tau = \Omega \times (0,\tau)$, $0 < \tau \leq T$; $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$; $\Omega_\tau = Q_T \cap \{t = \tau\}$. В області Q_T розглянемо рівняння

$$A(u) \equiv u_t + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,y,t)u_{y_i} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,y,t)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,y,t)u_{x_i} +$$

$$+ b_0(x,y,t,u) + \int_0^t a_0(x,y,\xi,u)d\xi = f_0(x,y,t) - \sum_{i=1}^{n} f_{i,x_i}(x,y,t) \qquad (1)$$

з початковою умовою

$$u(x,y,0) = u_0(x,y)\,, \quad (x,y) \in \Omega\,. \qquad (2)$$

Для спрощення викладення припускатимемо, що $\Omega_x^R = \{x \in \Omega_x \,:\, |x| < R\}$ регулярна в сенсі Кальдерона [12, с.45] для всіх $R > R_0 > 0$. Нехай $\Omega^R = \Omega_x^R \times \Omega_y$; $Q_\tau^R = \Omega^R \times (0,\tau)$, $\tau \in (0,T]$; $\Omega_\tau^R = Q_T^R \cap \{t = \tau\}$; $S_\tau^R = \partial\Omega^R \times (0,\tau)$.

Введемо простір

$$L_{loc}^{\sigma}(\overline{\Omega}) = \left\{u \,:\, u \in L^{\sigma}(\Omega^R)\,,\ \forall\, R > R_0\right\},\ \ \sigma = 2 \text{ або } \sigma = +\infty.$$

Припускатимемо, що для рівняння (1) виконуються такі умови:

(A) : $a_i \in C(\overline{Q}_T)$, $a_{i,y_i} \in L^\infty(Q_T)$, $i = 1,...,m$; $a_{ij}, a_{ij,y_k} \in L^\infty((0,T);L^\infty(\overline{\Omega}))$, $i,j = 1,...,n$, $k = 1,...,m$; $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)\xi_i\xi_j \geq A_0|\xi|^2$, $A_0 > 0$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$ і майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$; $\operatorname*{ess\,sup}\limits_{Q_T^R} \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2(x,y,t) \leq \alpha_0 R^{2\vartheta}$ $\forall R > R_0$, $\vartheta \in [0,1)$; функції $a_0(\cdot,\cdot,\cdot,\eta)$, $a_{0,y_i}(\cdot,\cdot,\cdot,\eta)$, $a_{0,\eta}(\cdot,\cdot,\cdot,\eta)$ вимірні в Q_T для всіх $\eta \in \mathbb{R}$; функція $a_0(x,y,t,\cdot)$ неперервна на $\mathbb{R}$ для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$;

$$\begin{aligned}
|\,a_0(x,y,t,\eta_1) - a_0(x,y,t,\eta_2)| \,&\leq\, A|\eta_1 - \eta_2|\,,\\
|\,a_{0,y_i}(x,y,t,\eta)| \,&\leq\, \alpha_1\,|\eta|\,, \qquad i = 1,...,m\,,\\
|\,a_{0,\eta}(x,y,t,\eta)| \,&\leq\, \alpha_1\,,
\end{aligned}$$

для всіх $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$ і майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$, де A, α_0, α_1 – додатні сталі;

(B) : $b_i, b_{i,y_i} \in L^\infty(Q_T)$, $\quad i = 1,...,n, j = 1,...,m$; функції $b_0(\cdot,\cdot,\cdot,\eta)$, $b_{0,y_i}(\cdot,\cdot,\cdot,\eta)$, $b_{0,\eta}(\cdot,\cdot,\cdot,\eta)$ вимірні в Q_T для всіх $\eta \in \mathbb{R}$; функція $b_0(x,y,t,\cdot)$ неперервна в $\mathbb{R}$ майже для всіх $(x,y,t) \in Q_T$;

$$\begin{aligned}
&(\,b_0(x,y,t,\eta_1) - b_0(x,y,t,\eta_2))(\eta_1 - \eta_2) \geq 0\,,\\
&|\,b_0(x,y,t,\eta)| \,\leq\, B_0|\eta|^{p-1}\,,\\
&|\,b_{0,y_i}(x,y,t,\eta)| \,\leq\, B_0|\eta|^{p-1}\,, \quad i = 1,...,m\,,\\
&|\,b_{0,\eta}(x,y,t,\eta)| \,\leq\, B_0
\end{aligned}$$

майже для всіх $(x, y, t) \in Q_T$ і для всіх $\eta \in \mathbb{R}$, де B_0 – додатна стала, $1 < p \leq 2$.

Позначимо через S_T^1 множину тих точок поверхні $\Omega_x \times \partial\Omega_y \times (0, T)$, для яких виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^{m} a_i(x, y, t) \cos(\nu, y_i) < 0\,,$$

де ν – зовнішня нормаль до S_T, а через S_T^2 – множину точок поверхні $\Omega_x \times \partial\Omega_y \times (0, T)$, для яких

$$\sum_{i=1}^{m} a_i(x, y, t) \cos(\nu, y_i) \geq 0\,.$$

Говоритимемо, що для рівняння (1) виконується умова **(S)**, якщо $S_T^{(1)} = \Omega_x \times \Gamma_1 \times (0, T)$, $S_T^{(2)} = \Omega_x \times \Gamma_2 \times (0, T)$, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega_y$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

Крім початкової умови (2), задамо для рівняння (1) крайові умови вигляду

$$u|_{S_T^{(1)}} = 0\,, \quad u|_{\partial\Omega_x \times \Omega_y \times (0,T)} = 0\,. \tag{3}$$

Нехай $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$, $\Phi(\eta) = 1$ при $\eta \leq 0$, $\Phi(\eta) = 0$ при $\eta \geq 1$, і $0 \leq \Phi(\eta) \leq 1$ при $\eta \in \mathbb{R}$.

Нехай

$$h_R(x) = \Phi\left(\frac{|x| - R}{\varkappa}\right), \quad \text{де } \varkappa > 0\,,$$

$$\omega_R(x) = [h_R(x)]^\gamma\,, \quad \gamma > 2\,.$$

Тоді $\omega_R(x) = 1$ при $|x| \leq R$, $\omega_R(x) = 0$ при $|x| \geq R + \varkappa$, $0 \leq \omega_R(x) \leq 1$ при $x \in \mathbb{R}^m$,

$$|\omega_{R,x_i}(x)| \leq \frac{d}{\varkappa}\,[h_R(x)]^{\gamma - 1}\,, \quad x \in \mathbb{R}^n\,, \quad i = 1, ..., m, \quad d = \mathrm{const} > 0\,.$$

Введемо простори

$$H_{loc}^{1,0}(\overline{\Omega}) = \left\{u \,:\, u,\, u_{x_i} \in L_{loc}^2(\Omega),\, i = 1, ..., n\,,\, u|_{\partial\Omega_x \times \Omega_y} = 0\right\}\,;$$

$$\begin{aligned} H_{loc}^{1,1}(\overline{\Omega}) = \big\{u \,:\, & u,\, u_{x_i},\, u_{y_j} \in L_{loc}^2(\overline{\Omega}),\, i = 1, ..., n, j = 1, ..., m\,, \\ & u|_{\Omega_x \times \Gamma_1} = 0\,,\, u|_{\partial\Omega_x \times \Omega_y} = 0\big\}\,. \end{aligned}$$

Вважатимемо, що права частина (1) і початкова функція в (2) задовольняє умову **(F)**, якщо

$f_i, f_{i,y_j} \in L^2\left((0, T); L_{loc}^2(\overline{\Omega})\right)$, $f_i|_{S_T^{(1)}} = 0$, $i = 0, 1, ..., n$, $j = 1, ..., m$; $u_0, u_{0,y_i} \in L_{loc}^2(\overline{\Omega})$, $i = 1, ..., m$; $u_0|_{\Omega_x \times \Gamma_1} = 0$.

Означення 1. *Функцію u з простору $C([0,T]; L^2_{loc}(\overline{\Omega})) \cap L^2((0,T); H^{1,0}_{loc}(\overline{\Omega}))$ називатимемо узагальненим розв'язком задачі (1) – (3), якщо вона є границею у цьому просторі послідовності функцій $\{u^k\}$ таких, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція $u^k \in C([0,T]; L^2_{loc}(\overline{\Omega})) \cap L^2((0,T); H^{1,1}_{loc}(\overline{\Omega}))$ і задовольняє рівність*

$$\int\limits_{\Omega_\tau} u^k v\,dxdy + \int\limits_{Q_\tau} \Bigg[-u^k v_t + \sum_{i=1}^m a_i(x,y,t) u^k_{y_i} v + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,y,t) u^k_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x,t) u^k_{x_i} v +$$
$$+ b_0(x,y,t,u^k)v + \int\limits_0^t a_0(x,y,\xi,u^k)\,d\xi\, v \Bigg]\, dxdydt =$$
$$= \int\limits_{\Omega_0} u^k_0 v\,dxdy + \int\limits_{Q_\tau} \left[f^k_0 v + \sum_{i=1}^n f^k_i v_{x_i} \right] dxdydt \tag{4}$$

для всіх $\tau \in (0,T]$ і всіх $v \in C^([0,T]; C^2_0(\Omega))$ таких, що $\operatorname{supp} v \subset \Omega^k$ для всіх $t \in [0,T]$ і для кожного $k \in \mathbb{N}$, де $u^k_0 \to u_0$ у просторі $L^2_{loc}(\overline{\Omega})$, $f^k_i \to f_i$, $i = 0,1,...,n$ у просторі $L^2\left((0,T); L^2_{loc}(\overline{\Omega})\right)$, причому u^k_0, f^k_i задовольняють умову **(F)**.

Розглянемо допоміжну задачу. Нехай $R > R_0 + 1$ – довільне фіксоване число. В області Q^R_T розглянемо рівняння

$$A(u) = f^R_0(x,y,t) - \sum_{i=1}^n f^R_{i,x_i}(x,y,t) \tag{5}$$

з початковою умовою

$$u(x,y,0) = u^R_0(x,y)\,, \quad (x,y) \in \Omega^R \tag{6}$$

і крайовими умовами

$$u|_{S^{(1)}_T \cap S^R_T} = 0\,, \quad u|_{\partial\Omega^R_x \times \Omega_y \times (0,T)} = 0\,, \tag{7}$$

де

$$f^R_0(x,y,t) = \begin{cases} f_0(x,y,t), & (x,y,t) \in Q^R_T, \\ 0, & (x,y,t) \in Q_T \setminus Q^R_T, \end{cases}$$

$f^R_i(x,y,t) = f_i(x,y,t)\chi_R(x)$, $i = 1,...,n$, $u^R_0(x,y) = u_0(x,y)\chi_R(x)$, $\chi_R \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $\chi_R(x) = 1$ при $|x| \le R-1$, $\chi_R(x) = 0$ при $|x| \ge R$, $0 \le \chi_R(x) \le 1$ при $x \in \mathbb{R}$.

Нехай

$$H^{1,1}_{\Gamma_1}(\Omega^R) = \{u : u, u_{y_j}, u_{x_i} \in L^2(\Omega^R),\ i = 1,...,n,\ j = 1,...,m\,,$$
$$u|_{\Omega^R_x \times \Gamma_1} = 0\,,\ u|_{\partial\Omega^R_x \times \Omega_y} = 0\Big\}\,,$$

$$H^{1,0,1}_0(Q^R_T) = \{u : u, u_t, u_{x_i} \in L^2(\Omega^R)\,,\ i = 1,...,n\,,\ u|_{\partial\Omega^R_x \times \Omega_y \times (0,T)} = 0\}\,.$$

Означення 2. *Функцію u з простору $C([0,T];L^2(\Omega^R)) \cap L^2((0,T);H^{1,1}_{\Gamma_1}(\Omega^R))$ називатимемо узагальненим розв'язком задачі (5) – (7), якщо вона задовольняє інтегральну рівність*

$$\int\limits_{\Omega^R_\tau} uv\,dxdy + \int\limits_{Q^R_\tau}\Bigg[-uv_t + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,y,t)u_{y_i}v + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)u_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)u_{x_i}v+$$
$$+b_0(x,y,t,u)v + \int\limits_0^t a_0(x,y,\xi,u)vd\xi - f_0^R(x,y,t)v - \sum_{i=1}^{n} f_i^R(x,y,t)v_{x_i}\Bigg]\,dxdydt =$$
$$= \int\limits_{\Omega^R_0} u_0^R v\,dxdy \tag{8}$$

для довільного $\tau \in (0,T]$ і довільної функції $v \in H_0^{1,0,1}(Q^R_T)$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* **(A)**, **(B)**, **(S)**, **(F)**. *Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок u задачі (5) – (7).*

Доведення цієї теореми можна провести аналогічно до доведення теореми 1 [11], тому його наводити не будемо.

Зауваження 1. Нехай u – узагальнений розв'язок задачі (5) – (7). Тоді (в сенсі розподілів) з (8) випливає рівність

$$u_t = -\sum_{i=1}^{m} a_i u_{y_i} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}u_{x_i})_{x_j} - \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} - b_0(x,y,t,u) - \int\limits_0^t a_0(x,y,\xi,u)d\xi + f_0 - \sum_{i=1}^{n} f_{i,x_i}\,.$$

Тому $u_t \in L^2((0,T);(H^{1,1}_{\Gamma_1}(\Omega^R))^*)$ і на підставі теореми 1.17 [12, с.177] правильна формула інтегрування частинами

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} < u_t, u > dt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_2}} |u|^2\,dxdy - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_1}} |u|^2\,dxdy\,, \quad \forall\, t_1, t_2 \in [0,T],\ t_1 < t_2\,,$$

де $< \cdot,\cdot >$ позначає скалярний добуток між просторами $L^2((0,T);(H^{1,1}_{\Gamma_1}(\Omega^R))^*)$ та $L^2((0,T);H^{1,1}_{\Gamma_1}(\Omega^R))$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* **(A)**, **(B)**, **(S)** *і, крім того,*
$f_i \in L^2((0,T);L^2_{loc}(\overline{\Omega}))$, $i = 0,1...,n$, $u_0 \in L^2_{loc}(\overline{\Omega})$,

$$\int\limits_{\Omega^R} u_0^2(x,y)dx\,dy + \int\limits_{Q^R_T}\sum_{i=0}^{n} f_i^2(x,,t)dx\,dy\,dt \le a\exp(bR^{1-\vartheta}) \quad \forall R > R_0, \tag{9}$$

де a, b – деякі додатні сталі. Тоді існує таке $T_0 \le T$, що задача (1) – (3) має узагальнений розв'язок в області Q_{T_0}.

Доведення. Нехай $\{f_i^k\}, \{u_0^k\}$, $i = 0, 1, ..., n$ такі послідовності функцій, що кожний елемент цих послідовностей задовольняє умову **(F)** і

$$||f_i^k - f_i||_{L^2((0,T);L^2(\Omega^R))} \to 0\,, \quad i = 0, 1, ..., n\ \ , ||u_0^k - u_0||_{L^2(\Omega^R)} \to 0$$

для кожного $R > R_0$ при $k \to \infty$. На підставі теореми 1 для довільного $R > R_0 + 1$ існує узагальнений розв'язок задачі в області Q_T^R для рівняння

$$A(u) = f_0^{k,R} - \sum_{i=1}^{n} f_{i,x_i}^{k,R} \tag{10}$$

з початковою умовою

$$u(x, y, 0) = u_0^{k,R}(x, y)\,, \quad (x, y) \in \Omega^R \tag{11}$$

і крайовими умовами (7).

Нехай $R = R(k) = 2^k > R_0 + 1$. Продовжимо узагальнений розв'язок задачі (10), (11), (7) нулем на область $Q_T \setminus Q_T^{R(k)}$ і позначимо його через u^k. Тоді матимемо послідовність функцій $\{u^k\}$, кожна з яких є узагальненим розв'язком задачі в області $Q_T^{R(k)}$ для рівняння

$$A(u) = f_0^{k,R(k)} - \sum_{i=1}^{n} f_{i,x_i}^{k,R(k)} \tag{12}$$

з початковою умовою

$$u(x, y, 0) = u_0^{k,R(k)}(x, y)\,, \quad (x, y) \in \Omega^{R(k)} \tag{13}$$

і крайовими умовами (7).

Нехай $2^l > R_0+1$. Підставимо функції u^k і u^l в інтегральну рівність (4), віднімемо їх і приймемо, що $v = u^{k,l}\,\omega_R$, де $u^{k,l} = u^k - u^l$, а R деяке фіксоване число таке, що $R > R_0 + 1$ і $R < \min\{R(k); R(l)\}$. Враховуючи зауваження 1, одержимо рівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |u^{k,l}|^2 \omega_R\, dxdy + \int\limits_{Q_\tau} \Big[\sum_{i=1}^{m} a_i(x, y, t) u_{y_i}^{k,l} u^{k,l}\,\omega_R + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, y, t) u_{x_i}^{k,l}\,(u^{k,l}\omega_R)_{x_j} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} b_i(x, t) u_{x_i}^{k,l} u^{k,l}\,\omega_R + (b_0(x, y, t, u^k) - b_0(x, y, t, u^l)) u^{k,l}\,\omega_R +$$
$$+ \int\limits_0^t (a_0(x, y, \xi, u^k) - a_0(x, y, \xi, u^l)) d\xi\; u^{k,l}\,\omega_R\Big]\, dxdydt =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} |u_0^{k,R(k)} - u_0^{l,R(l)}|\,\omega_R\, dxdy + \int\limits_{Q_\tau} \Big[(f_0^{k,R(k)} - f_0^{l,R(l)})\, u^{k,l}\,\omega_R +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(f_i^{k,R(k)}-f_i^{l,R(l)})(u^{k,l}\omega_R)_{x_i}\Big]dxdydt,$$

правильну для всіх $\tau\in[0,T]$.

На підставі умови **(A)**

$$J_1\equiv\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{m}a_i(x,y,t)\,u_{y_i}^{k,l}u^{k,l}\,\omega_R(x)\,dxdydt=\frac{1}{2}\int\limits_{S_\tau^2}\sum_{i=1}^{n}a_i(x,y,t)\,|u^{k,l}|^2\,\omega_R(x)\cos(\nu,y_i)\,dS-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{m}a_{i,y_i}(x,y,t)|u^{k,l}|^2\,\omega_R(x)\,dxdydt\geq-\frac{A_1}{2}\int\limits_{Q_\tau}|u^{k,l}|^2\,\omega_R(x)\,dxdydt\,,$$

де

$$A_1=m\left(\max_{i=1,\dots,m}\operatorname*{ess\,sup}_{Q_T}|a_{i,y_i}(x,y,t)|\right)\;;$$

$$J_2\equiv\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,y,t)\,u_{x_i}^{k,l}\,u_{x_j}^{k,l}\,\omega_R(x)\,dxdydt\geq A_0\int\limits_{Q_\tau}|\nabla_x u^{k,l}|^2\,\omega_R(x)\,dxdydt\,;$$

$$J_3\equiv\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,y,t)\,u_{x_i}^{k,l}\,u^{k,l}\,(\omega_R(x))_{x_j}\,dxdydt\geq$$

$$\geq-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left[\delta_1|\nabla_x u^{k,l}|^2\,\omega_R(x)+\frac{\alpha_0 n\gamma^2 d^2 R^{2\vartheta}}{\delta_1\varkappa^2}(h_R)^{\gamma-2}\right]dxdydt\,,\;\;\delta_1>0;$$

$$J_4\equiv\int\limits_{Q_\tau}\int\limits_{0}^{t}(a_0(x,y,\xi,u^k)-a_0(x,y,\xi,u^l))\,d\xi\;\;u^{k,l}\,\omega_R(x)\,dxdydt\geq$$

$$\geq-A\int\limits_{Q_\tau}\int\limits_{0}^{t}|u^{k,l}(x,y,\xi)|\,d\xi\;|u^{k,l}|\,\omega_R(x)\,dxdydt\geq$$

$$\geq-A\,T\int\limits_{Q_\tau}|u^{k,l}|^2\,\omega_R(x)\,dxdydt\,.$$

Згідно з умовою **(B)**

$$J_5\equiv\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}b_i(x,t)\,u_{x_i}^{k,l}\,u^{k,l}\,\omega_R(x)\,dxdydt\geq-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left[\delta_1\,|\nabla u^{k,l}|^2+\frac{B_1}{\delta_1}\,|u^{k,l}|^2\right]\,\omega_R(x)\,dxdydt,$$

де

$$B_1=\operatorname*{ess\,sup}_{Q_T}\sum_{i=1}^{n}b_i^2(x,y,t)\,;$$

$$J_6 \equiv \int\limits_{Q_\tau} (b_0(x,y,t,u^k) - b_0(x,y,t,u^l))\, u^{k,l}\, \omega_R(x)\, dxdydt \geq 0\,.$$

Зазначимо, що

$$|u_0^{k,R(k)} - u_0^{l,R(l)}| \leq |u_0^{k,R(k)} - u_0| + |u_0 - u_0^{l,R(l)}|\,.$$

Тому

$$|u_0^{k,R(k)} - u_0^{l,R(l)}|^2 \leq 2(|u_0^{k,R(k)} - u_0|^2 + |u_0 - u_0^{l,R(l)}|^2)$$

і

$$J_7 \equiv \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} |u_0^{k,R(k)} - u_0^{l,R(l)}|^2\, \omega_R(x)\, dxdydt \leq$$
$$\leq \int\limits_{\Omega_0} \Big[|u_0^{k,R(k)} - u_0|^2 + |u_0^{l,R(l)} - u_0|^2\Big]\, \omega_R(x)\, dxdy\,.$$

Далі

$$J_8 \equiv \int\limits_{Q_\tau} (f_0^{k,R(k)} - f_0^{l,R(l)})\, u^{k,l}\, \omega_R(x)\, dxdydt =$$
$$= \int\limits_{Q_\tau} \Big[(f_0^{k,R(k)} - f_0)\, u^{k,l}\, \omega_R(x) + (f_0 - f_0^{l,R(l)})\, u^{k,l}\, \omega_R(x)\Big]\, dxdydt \leq$$
$$\leq \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} \Big[(f_0^{k,R(k)} - f_0)^2 + (f_0^{l,R(l)} - f_0)^2\Big]\, \omega_R(x)\, dxdydt + \int\limits_{Q_\tau} |u^{k,l}|^2\, \omega_R(x)\, dxdydt\,;$$

$$J_9 \equiv \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} (f_i^{k,R(k)} - f_i^{l,R(l)})\, u_{x_i}^{k,l}\, \omega_R(x)\, dxdydt =$$
$$= \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} \Big[(f_i^{k,R(k)} - f_i)\, u_{x_i}^{k,l}\, \omega_R(x) + (f_i - f_i^{l,R(l)})\, u_{x_i}^{k,l}\, \omega_R(x)\Big]\, dxdydt \leq$$
$$\leq \delta_1 \int\limits_{Q_\tau} |\nabla_x u^{k,l}|^2\, \omega_R(x)\, dxdydt +$$
$$+ \frac{1}{2\delta_1}\int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} \Big[(f_i^{k,R(k)} - f_i)^2\, \omega_R(x) + (f_i^{l,R(l)} - f_i)^2\, \omega_R(x)\Big]\, dxdydt\,;$$

$$J_{10} \equiv \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} (f_i^{k,R(k)} - f_i^{l,R(l)})\, u^{k,l}\, (\omega_R(x))_{x_i}\, dxdydt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left[\frac{R^{-2\vartheta}}{\delta_2}\sum_{i=1}^{n}(f_i^{k,R(k)}-f_i^{l,R(l)})^2\,\omega_R(x)+\right.$$
$$\left.+\frac{\delta_2 n d^2\gamma^2 R^{2\vartheta}}{\varkappa^2}|u^{k,l}|^2\,(h_R(x))^{\gamma-2}\right]dxdydt\,.$$

Враховуючи оцінки інтегралів $J_1 - J_{10}$, з (13) одержимо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau}|u^{k,l}|^2\,\omega_R(x)\,dxdy+(2A_0-4\delta_1)\int\limits_{Q_\tau}|\nabla_x u^{k,l}|^2\,\omega_R(x)\,dxdydt\leq$$
$$\leq\left(A_1+2AT+2+\frac{B_1}{\delta_1}\right)\int\limits_{Q_\tau}|u^{k,l}|^2\,\omega_R(x)\,dxdydt+F(\tau)\,, \qquad (14)$$

де

$$F(\tau)=\left(\frac{\alpha_0}{\delta_1}+\delta_2\right)\frac{nd^2\gamma^2R^{2\vartheta}}{\varkappa^2}\int\limits_{Q_\tau}|u^{k,l}|^2\,(h_R(x))^{\gamma-2}\,dxdydt+$$
$$+2\int\limits_{\Omega_0}(|u_0^{k,R(k)}-u_0|^2+|u_0^{l,R(l)}-u_0|^2)\,\omega_R(x)\,dxdy+$$
$$+2\int\limits_{Q_\tau}\left[(f_0^{k,R(k)}-f_0)^2+(f_0^{l,R(l)}-f_0)^2+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{2}{\delta_2}+\frac{1}{\delta_1}\right)\sum_{i=1}^{n}\left((f_i^{k,R(k)}-f_i)^2+(f_i^{l,R(l)}-f_i)^2\right)\right]\omega_R(x)\,dxdydt\,,$$

$\tau\in(0,T]$.

Виберемо $\delta_1 = A_0/4$, $\delta_2 = \alpha_0/\delta_1$. Використовуючи лему Гронуолла - Белмана, легко одержати нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau}|u^{k,l}|^2\,\omega_R(x)\,dxdy+\int\limits_{Q_\tau}\left(|\nabla_x u^{k,l}|^2+|u^{k,l}|^2\right)\,\omega_R(x)\,dxdydt\leq$$
$$\leq M_1\left[\frac{(R+\varkappa)^{2\vartheta}}{\varkappa^2}\int\limits_{Q_\tau}|u^{k,l}|^2\,(h_R(x))^{\gamma-2}\,dxdydt+F_R(\tau)\right],\quad \tau\in[0,T]\,, \qquad (15)$$

де стала M_1 визначається коефіцієнтами рівняння (1) і числом T, причому $M_1\to 0$ при $T\to 0$, а

$$F_R(\tau)=2\int\limits_{\Omega_0}(|u_0^{k,R(k)}-u_0|^2+|u_0^{l,R(l)}-u_0|^2)\,\omega_R(x)\,dxdy+$$
$$+2\int\limits_{Q_\tau}\left[(f_0^{k,R(k)}-f_0)^2+(f_0^{l,R(l)}-f_0)^2+\right.$$

$$+\Big(\frac{2}{\delta_2}+\frac{1}{\delta_1}\Big)\sum_{i=1}^{n}\Big((f_i^{k,R(k)}-f_i)^2+(f_i^{l,R(l)}-f_i)^2\Big)\Big]\,\omega_R(x)\,dxdydt.$$

На підставі умови (9) існує таке $s_0\in\mathbb{N}$, що для всіх $s>s_0$ правильні нерівності

$$\int\limits_{\Omega^R}|u_0^s(x,y)|^2dxdy+\int\limits_{Q_T^R}\sum_{i=0}^{n}|f_i^s(x,y,t)|^2dxdydt\le 2a\exp(bR^{1-\vartheta}),\tag{16}$$

$$\int\limits_{\Omega^R}|u_0^s(x,y-u_0(x,y))|^2dxdy+\int\limits_{Q_T^R}\sum_{i=0}^{n}|f_i^s(x,y,t)-f_i(x,y,t)|^2dxdydt\le \exp(-q+bR^{1-\vartheta}),\tag{17}$$

де q – натуральне число.

З (15) зокрема, одержимо, що

$$\int\limits_{Q_\tau^{R(k)}}\left|u^{k+3,k+2}\right|^2\,dxdydt\le\frac{M_1(R(k)+\varkappa)^{2\vartheta}}{\varkappa^2}\int\limits_{Q_\tau^{R(k+1)}}\left|u^{k+3,k+2}\right|^2\,dxdydt+M_1\,F_{R(k+1)}(\tau)\tag{18}$$

при $\varkappa=2^k$.

Поділимо відрізок $[R(k),R(k)+\varkappa]$ на q частин. Виберемо $q=\lambda[2^{k(1-\vartheta)}]$, де λ таке натуральне число, що $\lambda^2M_12^{\vartheta}\le e^{-1}$, $[\,\cdot\,]$ – ціла частина числа.

Тоді аналогічно як в [13] з (18) одержуємо оцінку

$$\int\limits_{Q_\tau^{R(k)}}\left|u^{k+3,k+2}\right|^2\,dxdydt\le e^{-q}\int\limits_{Q_\tau^{R(k+1)}}\left|u^{k+3,k+2}\right|^2\,dxdydt+\frac{M_1\,e}{e-1}\,F_{R(k+1)}\,.\tag{19}$$

Оскільки

$$\left|f_i^{k+3,R(k+3)}-f_i^{k+2,R(k+2)}\right|^2\le 2\left(\left|f_i^{k+3,R(k+3)}-f_i\right|^2+\left|f_i^{k+2,R(k+2)}-f_i\right|^2\right),$$

$i=0,1,...,n$,

$$\left|u_0^{k+3,R(k+3)}-u_0^{k+2,R(k+2)}\right|^2\le 2\left(\left|u_0^{k+3,R(k+3)}-u_0\right|^2+\left|u_0^{k+2,R(k+2)}-u_0\right|^2\right),$$

то на підставі (17)

$$F_{R(k+1)}(\tau)\le 2\exp\{-q+b\,(R(k+1))^{1-\vartheta}\}\,.$$

Отже, з (19) випливає нерівність

$$\int\limits_{Q_\tau^{R(k)}}\left|u^{k+3,k+2}\right|^2\,dxdydt\le$$

$$\leq e^{-q} \int\limits_{Q_\tau^{R(k+1)}} \left|u^{k+3,k+2}\right|^2 dxdydt + M_2 \exp\{-q + b\,(R(k+1))^{1-\vartheta}\}\,. \tag{20}$$

Використовуючи (4) при $v = u^k\, e^{-\rho t}$, $\rho > 0$, отримаємо рівність

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau^{R(k)}} \left|u^k\right|^2 e^{-\rho\tau}\, dxdy + \int\limits_{Q_\tau^{R(k)}} \left[\frac{1}{2}\,\rho\, \left|u^k\right|^2 + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,y,t) u^k_{y_i} u^k + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t) u^k_{x_i}\, u^k_{x_j} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,y,t) u^k_{x_i} u^k + b_0(x,y,t,u^k) u^k + \int\limits_0^t a_0(x,y,\xi,u^k) d\xi u^k \right] e^{-\rho t}\, dxdydt =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0^{R(k)}} \left|u_0^{k,R(k)}\right|^2 dxdy + \int\limits_{Q_\tau^{R(k)}} \left[f_0^{k,R(k)}\, u^k + \sum_{i=1}^{n} f_i^{k,R(k)} u^k_{x_i} \right] e^{-\rho t}\, dxdydt\,, \tag{21}$$

де $\tau \in (0,T]$.

На підставі умов **(A)**, **(B)**, **(S)** з (21) легко одержати оцінку

$$\int\limits_{\Omega_\tau^{R(k)}} \left|u^k\right|^2 dxdy + \int\limits_{Q_\tau^{R(k)}} \left[\left|u^k\right|^2 + \left|\nabla_x u^k\right|^2\right] dxdydt \leq$$

$$\leq M_3 \left[\int\limits_{\Omega_0^{R(k)}} \left|u_0^{k,R(k)}\right|^2 dxdy + \int\limits_{Q_\tau^{R(k)}} \sum_{i=0}^{n} \left|f_i^{k,R(k)}\right|^2 dxdydt \right]. \tag{22}$$

Враховуючи (16), з (22) отримаємо, що

$$\int\limits_{Q_\tau^{R(k)}} \left|u^k\right|^2 dxdydt \leq\; 2\, a\, M_3 \exp\{b\,(R(k))^{1-\vartheta}\}\,. \tag{23}$$

Оскільки

$$\left|u^{k+3,k+2}\right|^2 \leq 2\, \left(\left|u^{k+3}\right|^2 + \left|u^{k+2}\right|^2\right)\,,$$

то з (19), (23) випливає оцінка

$$\int\limits_{Q_\tau^{R(k+1)}} \left|u^{k+3,k+2}\right|^2 dxdydt \leq 4a\, M_3 \exp\left\{-q + b\,(R(k+4))^{1-\vartheta}\right\} +$$

$$+ M_2 \exp\left\{-q + b\,(R(k+2))^{1-\vartheta}\right\} \leq M_4 \exp\left\{-q + b\,(R(k+4))^{1-\vartheta}\right\}\,. \tag{24}$$

Тому існує таке $T_0 \leq T$, що для всіх $\tau \in [0,T_0]$ число λ можна вибрати так, щоб $\lambda > b 2^{4(1-\vartheta)}$. Тоді праву частину (24) можна оцінити так:

$$\exp\left\{-q + b\,(R(k+4))^{1-\vartheta}\right\} \leq \exp\{-[2^{k(1-\vartheta)}]\,\alpha_0\}\,,$$

де $\alpha_0 = \lambda - b2^{4(1-\vartheta)}$.

Нехай $R_1 > R_0 + 1$ – довільне фіксоване число, $R(k) > R_1$.

З (24) випливає оцінка

$$||u^{k+3,k+2}||_{C([0,T_0];L^2(\Omega^{R_1}))} + ||u^{k+3,k+2}||_{L^2((0,T_0);V(\Omega^{R_1}))} \leq M_5 \exp\{-\alpha_0\, 2^{(k-1)(1-\vartheta)}\},$$

$$V(\Omega^{R_1}) = \left\{u \,:\, u, u_{x_i} \in L^2(\Omega^{R_1}),\, u|_{(\partial\Omega_x \cap \partial\Omega_x^{R_1})\times\Omega_y} = 0\right\}.$$

Тоді

$$\begin{aligned}&||u^{k+l+2} - u^{k+2}||_{C([0,T_0];L^2(\Omega^{R_1}))} + ||u^{k+l+2} - u^{k+2}||_{L^2((0,T_0);V(\Omega^{R_1}))} \leq \\ &\quad \leq \sum_{i=0}^{l-1} ||u^{k+i+3} - u^{k+i+2}||_{C([0,T_0];L^2(\Omega^{R_1}))} + ||u^{k+i+3} - u^{k+i+2}||_{L^2((0,T_0);V(\Omega^{R_1}))} \leq \\ &\quad \leq M_5 \sum_{i=0}^{\infty} \exp\{-\alpha_0\, 2^{2(k+i)+1}\} \leq M_6 \exp\{-\alpha_0\, 2^{(k-1)(1-\vartheta)}\},\end{aligned} \tag{25}$$

де M_6 не залежить від k, l. Враховуючи (15) і (25), легко показати, що послідовність $\{u^k\}$ фундаментальна у просторі $C([0,T_0];L^2(\Omega^{R_1})) \cap L^2((0,T_0);V(\Omega^{R_1}))$. На підставі довільності R_1, одержуємо, що $u^k \to u$ у просторі $C([0,T_0];L^2_{loc}(\overline{\Omega})) \cap L^2((0,T_0);H^{1,0}_{loc}(\overline{\Omega}))$, тобто u – узагальнений розв'язок задачі (1) – (3). Теорему доведено.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* **(A)**, **(B)**, **(S)**, $f_i \in L^2\left((0,T);L^2_{loc}(\overline{\Omega})\right)$, $u_0 \in L^2_{loc}(\overline{\Omega})$, $i = 0,1,...,n$. *Тоді задача (1) – (3) не може мати більше одного узагальненого розв'язку в класі функцій таких, що*

$$\int_{Q_T^R} |u|^2\, dxdydt \leq a \exp\left\{bR^{1-\vartheta}\right\}, \tag{26}$$

$\forall R > R_0 + 1$, *де* a, b *– додатні сталі.*

Доведення. Нехай існують два узагальнені розв'язки u^1 і u^2 задачі (1)– (3). Задамо довільне фіксоване число $R_1 > R_0 + 1$ і як завгодно мале число $\varepsilon > 0$. Нехай $R(l) = 2^l > R_1$, $l \in \mathbb{N}$.

Згідно з означенням узагальненого розв'язку існують послідовності $\{u^{i,k}\}$ такі, що $u^{i,k} \to u^i$ у просторі $C([0,T];L^2_{loc}(\overline{\Omega})) \cap L^2((0,T);H^{1,0}_{loc}(\overline{\Omega}))$, причому $u^{i,k}$ задовольняє (4) з правими частинами $f_j^{i,k}$ і початковими функціями $u_0^{i,k}$, де $f_j^{i,k}$, $u_0^{i,k}$ задовольняють умову **(F)**, $f_j^{i,k} \to f_j$ у просторі $L^2((0,t_0);L^2_{loc}(\overline{\Omega}))$, $u_0^{i,k} \to u_0$ у просторі $L^2_{loc}(\overline{\Omega})$ при $k \to \infty$, $i = 1,2$, $j = 0,1,...,n$. Цілком аналогічно як (15) одержимо нерівність

$$\int\limits_{Q_\tau} \left|u^{2,k} - u^{1,k}\right|^2 \omega_R(x)\, dxdydt \le$$
$$\le \frac{M_1(R+\varkappa)^{2\vartheta}}{\varkappa^2} \int\limits_{Q_\tau} \left|u^{2,k} - u^{1,k}\right|^2 \,[h_R(x)]^{\gamma-2}\, dxdydt + M_2\, F(R,\tau)\,, \tag{27}$$

де функція $\omega_R(x)$ і сталі M_1, M_2, $\varkappa$ визначені при доведенні теореми 2, $R = R(l)$, а

$$F(R,\tau) = \int\limits_{\Omega_0} \left|u_0^{2,k} - u_0^{1,k}\right|^2 \omega_R(x)\, dxdydt + \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=0}^{n} \left|f_i^{2,k} - f_i^{1,k}\right|^2 \omega_R(x)\, dxdydt\,.$$

Виберемо $q = \lambda\,[2^{l(1-\vartheta)}]$, $\varkappa = 2^l$, де $\lambda^2\, M_1 2^\vartheta < e^{-1}$, λ – деяке натуральне число.

Оскільки

$$F(R,\tau) \le 2 \int\limits_{\Omega_0^{R(l+1)}} \left(\left|u_0^{2,k} - u_0\right|^2 + \left|u_0^{1,k} - u_0\right|^2 \right) dxdy +$$
$$+\, 2 \int\limits_{Q_\tau^{R(l+1)}} \sum_{i=0}^{n} \left(\left|f_i^{2,k} - f_i\right|^2 + \left|f_i^{1,k} - f_i\right|^2 \right) dxdydt\,,$$

то враховуючи збіжності послідовностей $\{f_j^{i,k}\}$, $\{u_0^{i,k}\}$, $i = 1, 2$, $j = 0, 1, ..., n$, можемо зазначити таке $k_0(l)$, що

$$F(R,\tau) < e^{-q}$$

для всіх $k > k_0(l)$.

Тоді з (27) аналогічно як при доведенні теореми 2 одержимо оцінку

$$\int\limits_{Q_\tau^{R(l)}} \left|u^{2,k} - u^{1,k}\right|^2 dxdydt \le e^{-q} \int\limits_{Q_\tau^{R(l+1)}} \left|u^{2,k} - u^{1,k}\right|^2 dxdydt + e^{-q} \tag{28}$$

для $l \ge l_0(M_2)$.

Оскільки $u^{i,k} \to u^i$ у $L^2_{loc}(\overline{\Omega})$, то існує таке $k_1(l,\varepsilon) \in \mathbb{N}$, $k_1 \ge k_0$, що

$$\int\limits_{Q_\tau^{R(l+1)}} \left|u^{i,k} - u^i\right|^2 dxdydt \le \frac{\varepsilon}{16}\,, \quad i = 1, 2 \tag{29}$$

для всіх $k > k_1(l,\varepsilon)$.

Враховуючи те, що

$$\left|u^{2,k} - u^{1,k}\right|^2 \le 3\, \left(\left|u^{2,k} - u^2\right|^2 + \left|u^{1,k} - u^1\right|^2 + 2\, \left|u^1\right|^2 + 2\, \left|u^2\right|^2 \right)$$

і умову (26), з (28) одержимо оцінку

$$\int\limits_{Q_\tau^{R(l)}} \left|u^{2,k}-u^{1,k}\right|^2 dxdydt \le e^{-q}\left(\frac{3\,\varepsilon}{8}+4a\,\exp\left\{b\,(R(l+1))^{(1-\vartheta)}\right\}+1\right)\le \tag{30}$$

$$\le (2+4a)\,\exp\left\{-q+b\,(R(l+1))^{(1-\vartheta)}\right\}$$

при $k>k_1(l,\varepsilon)$. Аналогічно як при доведенні теореми 2 можемо стверджувати про існування такого $T_0\le T$, що $-q+b\,[R(l+1)]^{(1-\vartheta)}<-[2^{l(1-\vartheta)}]\alpha_0$, $\alpha_0>0$ для всіх $\tau\in[0,T_0]$.

Тоді з (30) випливає оцінка

$$\int\limits_{Q_{T_0}^{R(l)}} \left|u^{2,k}-u^{1,k}\right|^2 dxdydt \le (2+4a)\,\exp\left\{-\alpha_0\,[2^{l(1-\vartheta)}]\right\}.$$

Отже, існує таке $l_1\in\mathbb{N}$, $l_1\ge l_0$, що

$$\int\limits_{Q_{T_0}^{R_1}} \left|u^{2,k}-u^{1,k}\right|^2 dxdydt < \frac{\varepsilon}{16} \tag{31}$$

для всіх $l>l_1$ і $k>k_1(l,\varepsilon)$.

Оскільки

$$\left|u^2-u^1\right|^2\le 3\left(\left|u^2-u^{2,k}\right|^2+\left|u^1-u^{1,k}\right|^2+\left|u^{2,k}-u^{1,k}\right|^2\right),$$

то на підставі (29), (31)

$$\int\limits_{Q_{T_0}^{R_1}} \left|u^2-u^1\right|^2 dxdydt<\varepsilon\,,$$

тобто, враховуючи довільність ε, $u^2(x,y,t)=u^1(x,y,t)$ майже всюди в $Q_{T_0}^{R_1}$. Оскільки R_1 – довільне число, то $u^2(x,y,t)=u^1(x,y,t)$ майже всюди в Q_{T_0}. Якщо $T_0<T$, то за скінченну кількість кроків доводимо єдиність у всій області Q_T. Теорему доведено.

1. *Kolmogorov A.N.* Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung)// Ann. Math.– 1934.– Vol. 35.– P. 116-117.

2. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type.– Birkhäuser Verlag.– 2004.

3. *Дронь В.С., Івасишен С.Д.* Про коректну розв'язність задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова// Укр. матем. вісник.– 2004.– № 1.– С.61-68.

4. *Возняк О.Г., Івасишен С.Д.* Фундаментальні розв'язки задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь та їх застосування // Доп. НАН України.– 1996.– № 10.– С. 11-16.

5. *Эйдельман С.Д., Малицкая А.П.* О фундаментальных решениях и стабилизации решения задачи Коши для одного класса вырождающихся параболических уравнений //Дифференциальные уравнения.– 1975.– **11**, № 7.– С.1316-1331.

6. *Polidoro S.* On the regularity of solutions to a nonlinear ultraparabolic equation arising in mathematical finance// Nonlinear Analysis.– 2001.– Vol. 47.– P.491-502.

7. *Lanconelli E., Pascucci A., Polidoro S.* Linear and nonlinear ultraparabolic equations of Kolmogorov type arising in diffusion theory and in finance // Nonlinear problems in mathematical physics and related topics II. In honour of Proff. O.A. Ladyzhenskaya.– New York, NY: Kluwer Academic Publishers. Int. Math. Ser., N.Y. 2.– 2002.– P.243-265.

8. *Барабаш Г.М., Лавренюк С. П., Процах Н. П.* Мішана задача для напівлінійного ультрапараболічного рівняння // Мат. методи і фіз.-мех. поля.– 2002.– № 4.– Т.45.– С.27-34.

9. *Lascialfari F., Morbidelli D.* A boundary value problem for a class of quasilinear ultraparabolic equations // Commun. Part. Diff. Equat.– 1998.– **23**, № 5,6.– P.847-868.

10. *Гузіль Н. І., Лавренюк С. П.* Мішана задача для напівлінійної ультрапараболічної системи в необмеженій області// Доп. НАН України.– 2005.– N 5.– С.11-16.

11. *Гузіль Наталія.* Задача без початкових умов для системи ультрапараболічних рівнянь// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат.– 2004.– Вип.63.– С.59-76.

12. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.– М., 1978.

13. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Метод введения параметра для исследования эволюционных уравнений// Успехи матем. наук.– 1978.– Т.33.– Вып. 5.– С.7-72.

MIXED PROBLEM FOR AN ULTRAPARABOLIC EQUATION WITH NONLOCAL SOURCE

Serhiy Lavrenyuk, Marianna Oliskevych

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

In the article there is obtained some conditions of the existence and uniqueness of a solution for an ultraparabolic equation

$$u_t + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,y,t)u_{y_i} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_i(x,y,t)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,y,t)u_{x_i} +$$

$$+b_0(x,y,t,u) + \int_0^t a_0(x,y,\xi,u)d\xi = f_0(x,y,t) - \sum_{i=1}^{n} f_{i,x_i}(x,y,t)$$

in an unbounded domain with respect to the spaces variables x.

Key words: ultraparabolic equation.

Стаття надійшла до редколегії 29.03.2006

Прийнята до друку 02.11.2006

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 2006. Вип.66. С.115–127 Ser.Mech-Math.2006. Vol.66. P.115–127

УДК 517.95

РОЗВ'ЯЗОК КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ, ЗБУРЕНОГО ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМ ДОДАНКОМ

Андрій ЛОПУШАНСЬКИЙ

Інститут прикладних проблем математики і механіки ім. Я.С. Підстригача АН України,
вул. Наукова, 3а, 79060 Львів, Україна

Визначено розв'язність нормальної крайової задачі для параболічного диференціального рівняння з псевдодиференціальним доданком. Знайдено точну оцінку наближення її розв'язку за допомогою скінчених ітерацій функції Гріна незбуреної параболічної крайової задачі.

Ключові слова: параболічне рівняння, псевдодиференціальний оператор, наближення розв'язку.

У статті [1] доведено існування розв'язку крайової задачі для параболічного рівняння, збуреного довільним (не обов'язково диференціальним) оператором на правильному проміжному просторі банахової пари секторіального оператора задачі та його області визначення, побудовано наближення розв'язку за допомогою ітерацій резольвенти оператора незбуреної параболічної крайової задачі. Побудова наближень ґрунтується на аналітичній залежності розв'язку від збурюючого оператора. Як з'ясовано в [1], такі наближення мають точні оцінки збіжності.

У цій праці, використовуючи результати [2,3], одержуємо наближення розв'язку абстрактної задачі Коші для збуреного параболічного рівняння без обмежень на норму збурюючого оператора. Наведено застосування для розв'язку загальної крайової задачі для параболічного диференціального рівняння з псевдодиференціальним доданком. З'ясовано, що наближення розв'язку можуть бути виражені через ітерації функції Гріна незбуреної параболічної крайової задачі.

1. Формулювання задачі. Існування та єдиність її розв'язку . В обмеженій області $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ класу C^∞ розглядаємо сильно еліптичний лінійний оператор

$$L(x,D) = \sum_{|\gamma|\le 2m} a_\gamma(x) D^{\gamma},$$

тобто такий, що $\mathrm{Re}\, a(x,\xi) = \mathrm{Re} \sum\limits_{|\gamma|=2m} a_\gamma(x)\xi^{\gamma} > 0$ при $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n) \in \mathrm{R}^n\backslash\{0\}$ та $x = (x_1,\dots,x_n) \in \overline{\Omega}$ і вважаємо функції $a_\gamma(x)$ обмеженими, а при $|\gamma| = 2m$ неперервними в $\overline{\Omega}$.

Нехай $\theta \in (0,1)$, L_1 – псевдодиференціальний оператор із символом $[a_1(x,\xi)]^\theta$, де $\mathrm{Re}\, a_1(x,\xi) = \mathrm{Re} \sum\limits_{|\alpha|\le 2m} a_{1\alpha}(x)(-i\xi)^\alpha > 0$ при $\xi \in \mathrm{R}^n\backslash\{0\}$ та $x \in \overline{\Omega}$, $a_{1\alpha} \in L_\infty(\Omega)$ і функції $a_{1\alpha}(\xi)$ при $|\alpha| = 2m$ неперервні в $\overline{\Omega}$, $\quad L_1 v = F^{-1}_{x\to\xi}[[a_1(x,\xi)]^\theta F_{\xi\to z}]v$.

Нехай на межі $S = \partial\Omega$ визначено оператори

$$B_j(x,D) = \sum_{|\gamma|\le k_j} b_{j,\gamma}(x) D^{\gamma}, \qquad b_{j,\gamma} \in C^{2m-k_j}(\partial\Omega), \quad j = 1,\dots,m$$

і система $\{B_j(x,D)\}_{j=1}^m$ нормальна (див., напр., [4]).

Розглянемо замкнений оператор

$$(Av)(x) = L(x,D)\, v(x),$$

заданий у просторі $V_0 = L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$ на щільному підпросторі

$$V_1 = D(A) = W^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega) := \Big\{ v \in W^{2m}_p(\Omega) :\ B_j(x,D)v\,|_{\partial\Omega} = 0;\ j = \overline{1,m} \Big\}.$$

Тут $W^{2m}_p(\Omega)$ — простір Соболєва, підпростір $W^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)$ замкнений в $W^{2m}_p(\Omega)$ і наділений його нормою. На щільному в $L_p(\Omega)$ підпросторі

$$V_\theta = H^{2m\theta}_{p,\{B_j\}}(\Omega) := \Big\{ v \in H^{2m\theta}_p(\Omega) :\ B_j(\xi,D)v_{\,|\,\partial\Omega} = 0;\ j = \overline{1,m} \Big\}$$

з нормою простору беселевих потенціалів $H^{2m\theta}_p(\Omega)$ порядку $2m\theta$ задамо замкнений в $L_p(\Omega)$ оператор

$$X :\ H^{2m\theta}_{p,\{B_j\}}(\Omega) \longrightarrow L_p(\Omega), \quad Xu = L_1 u \quad \forall u \in H^{2m\theta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)$$

(зауважимо, що підпростір $H^{2m\theta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)$ замкнений в $H^{2m\theta}_p(\Omega)$).

Відомо (див. результати Сілі [4,5]) таке: якщо для нормальної системи $\{B_j(x,D)\}_{j=1}^m$ виконуються нерівності

$$k_j < 2m\theta - 1/p \qquad \forall j = 1,\dots,m, \tag{1}$$

то реалізується ізоморфізм банахових просторів

$$H^{2m\theta}_{p,\{B_j\}}(\Omega) \simeq \big[L_p(\Omega), W^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\big]_\theta,$$

де справа проміжний простір з показником θ, породжений методом комплексної інтерполяції пари $V = \{L_p(\Omega), W^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\}$. Зауважимо, що $H^{2m\theta}_{p,\{B_j\}}(\Omega) = \mathcal{D}(J^\theta)$ є областю визначення дробового степеня оператора

$$J = \left[E_{10} - (-\Delta)^{1/2}\right]^{2m} : W^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega) \longrightarrow L_p(\Omega)$$

(див. [4], 2.5.3). Це дає змогу до оператора A застосувати результати [2,3] про інтерполяцію дробовими степенями операторів.

Нехай $f \in C\big([0,T]; W^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\big)$, $g \in W^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)$. Розглядаємо крайову задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + L_1 u + f(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0,T], \tag{2}$$

$$B_j u \,|_S = 0, \quad j = 1, \ldots, m, \quad u(x,0) = g(x), \quad x \in \Omega,$$

яку можна записати у вигляді абстрактної задачі Коші

$$\frac{dv(x,t)}{dt} = \big(A + X\big)\, v(x,t) + f(x,t), \qquad v(x,0) = g(x). \tag{3}$$

Зафіксуємо деякий кут $\omega_0 \in (\pi/2, \pi)$ і зіставимо йому в комплексній площині $\mathbb{C}$ замкнений сектор з виколотою точкою $\{0\}$ і його замикання, відповідно

$$\Lambda_0 := \bigcup \left\{re^{i\omega} : r > 0, \, \omega \in [-\omega_0, \omega_0]\right\} \qquad \text{і} \qquad \Lambda := \Lambda_0 \bigcup \{0\}.$$

Для довільного числа $a > 0$ позначаємо $\Lambda_{-a} := \Lambda \setminus \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le a\}$.

Нехай над полем $\mathbb{C}$ задано пару банахових просторів $\big(V_0, \|\cdot\|_0\big)$ та $\big(V_1, \|\cdot\|_1\big)$ з неперервним і щільним вкладенням $E_{10} : V_1 \to V_0$.

Через $\mathcal{A}$ позначаємо клас таких операторів $A : V_1 \longmapsto V_0$, резольвента яких $\big(\lambda E_{10} - A\big)^{-1}$ є визначеною та рівномірно обмеженою за нормою $\mathcal{L}(V_0; V_1)$ стосовно всіх чисел $\lambda \in \Lambda$, тобто

$$\mathcal{A} := \Big\{A \in \mathcal{L}(V_1; V_0) : \sup_{\lambda \in \Lambda} \big\|\big(\lambda E_{10} - A\big)^{-1}\big\|_{\mathcal{L}(V_0;V_1)} = K(A) < \infty\Big\}.$$

Зазначимо, що для довільного оператора A класу $\mathcal{A}$ існує обернений $A^{-1} \in \mathcal{L}(V_0, V_1)$. Кожен з операторів $A \in \mathcal{A}$ можемо трактувати як необмежений лінійний оператор над банаховим простором V_0 із щільною областю визначення $V_1 = D(A)$. Далі позначаємо через

$$\varrho\,(A) := \{\lambda : \, (\lambda E_{10} - A)^{-1} \in \mathcal{L}(V_0; V_1)\} \quad \text{і} \quad \sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \varrho\,(A)$$

відповідно резольвентну множину і спектр оператора A.

Оператори класу $\mathcal{A}$ будемо називати *секторіальними операторами від'ємного типу* $r(A) := \sup\left\{ \operatorname{Re} \lambda : \, \lambda \in \sigma(A)\right\}$ над простором V_0.

Резольвентою оператора A далі називаємо операторнозначну функцію $\varrho\,(A) \ni \lambda \longmapsto \big(\lambda E_{10} - A\big)^{-1} \in \mathcal{L}(V_0; V_1)$. Використовуватимемо результати і позначення [6]. Звичайно ж резольвентою називають операторнозначну функцію вигляду

$R(\lambda, A) := E_{10}\big(\lambda E_{10} - A\big)^{-1} \in \mathcal{L}(V_0)$, очевидно, також визначену для всіх чисел $\lambda \in \varrho(A)$. У наших позначеннях під обмеженим оберненим до оператора A розуміється оператор $E_{10}A^{-1} \in \mathcal{L}(V_0)$.

Оскільки лінійні оператори, які мають непорожню резольвентну множину, є замкненими [7], то клас $\mathcal{A}$ складається з замкнених операторів над простором V_0. Тому для будь-якого оператора A із цього класу спектр $\sigma(A)$ замкнений, а резольвентна множина $\varrho(A)$ є відкритою на комплексній площині $\mathbb{C}$. До того ж функція $R(\lambda, A)$ аналітична в $\varrho(A)$. Правильне включення $\sigma(A) \subset \mathbb{C} \setminus \Lambda$, де множина справа відкрита. З огляду на замкненість спектра звідси випливає, що тип $r(A)$ довільного оператора A класу $\mathcal{A}$ є насправді числом від'ємним. Крім того, завжди існує таке залежне від оператора A число a, що $0 < a < -r(A)$, $\Lambda_a \subset \varrho(A)$.

Загалом (див. [8]) лінійний оператор A над банаховим простором V_0 називають секторіальним, якщо існують такі сталі $\omega_0 \in (\pi/2, \pi)$, $\beta \in \mathbb{R}$ та $C > 0$, що $\beta + \Lambda_0 \subset \varrho(A)$, $\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(V_0)} \le \frac{C}{|\lambda-\beta|}$ при $\lambda \in \beta + \Lambda_0$. Отже, довільний секторіальний оператор лінійною заміною зводиться до оператора класу $\mathcal{A}$.

Припущення (A). Нехай щодо оператора $L(x, D)$ для будь-якого кута $\omega \in [-\omega_0, \omega_0]$, де $\omega_0 \in \big(\pi/2, \pi\big)$, виконуються умови Агмона $a(x, \xi) \ne e^{i\omega}$ для будь-якого $\omega \in [-\omega_0, \omega_0]$; для ненульового вектора μ_x, дотичного в точці $x \in \partial\Omega$, та нормального до S у цій точці вектора ν_x кожний поліном $\mathbb{C} \ni z \to a(x, \mu_x + z\,\nu_x) - \lambda$, де $\lambda \in l_\omega = \{re^{i\omega} : r > 0\}$, має рівно m коренів $z_1(\lambda, \mu_x), \ldots, z_m(\lambda, \mu_x)$ з додатною уявною частиною, при цьому поліноми $\{b_j\,(x,\, \mu_x + z\,\nu_x)\}_{j=1}^m$ лінійно незалежні за модулем $\prod\limits_{j=1}^{m} [z - z_j(\lambda, \mu_x)]$; виконуються нерівності (1).

Згідно з [2,3] за припущення (A) існує таке число $\beta \in \mathbb{R}$, що сектор Λ_a належить резольвентній множині $\rho(A + \beta E_{10})$ оператора $A + \beta E_{10}$ і

$$\begin{aligned} &\sup_{\lambda \in \Lambda_a} \big\|E_{1\theta}((\lambda - \beta)E_{10} - A)^{-1}\big\|_{\mathcal{L}\left(L_p(\Omega), B^{2m\theta}_{p,q,\{B_j\}}(\Omega)\right)} := K_a < \infty, \\ &\sup_{\lambda \in \Lambda_a} \big\|\lambda R(\lambda, A + \beta E_{10})\big\|_{\mathcal{L}\left(L_p(\Omega)\right)} := C_a < \infty; \end{aligned} \tag{4}$$

а якщо для оператора X виконується умова

$$\sup_{\lambda \in \Lambda_a} \big\|XR(\lambda, A + \beta E_{10} + XE_{1\theta})\big\|_{\mathcal{L}\left(L_p(\Omega)\right)} := \delta < 1, \tag{5}$$

то сектор Λ_a лежить у резольвентній множині $\varrho(A + XE_{1\theta} + \beta E_{10})$ оператора $A + XE_{1\theta} + \beta E_{10}$ і правильна нерівність

$$\sup_{\lambda \in \Lambda_1} \big\|\lambda R(\lambda, A + \beta E_{10} + XE_{1\theta})\big\|_{\mathcal{L}\left(L_p(\Omega)\right)} \le \frac{C_a}{1 - \delta}, \tag{6}$$

оператори $A_1 = A + \beta E_{10}$ та $A_1 + X\,|_{W^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)}$ належать класу $\mathcal{A}$. З результатів [2] випливає така теорема.

Теорема 1. *За припущення* (A) *при* $f \in C\big([0, T]; W^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\big)$, $g \in W^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)$ *існує единий розв'язок* $u \in C\big([0, T]; W^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\big) \bigcap C^1\big([0, T]; L_p(\Omega)\big)$ *задачі (2).*

2. Наближення розв'язку абстрактної задачі Коші. Числу $a>0$ та числу $c:\ \pi/2<\omega_0-c<\pi$ поставимо у відповідність відкриті комплексні області

$$\Lambda^c := \mathbb{C}\setminus[\{l_\omega:\,\omega\in[-\omega_0+c,\,\omega_0-c]\}\cup\{0\}],$$

$$\Lambda^c_a := \mathbb{C}\setminus\left[\Big\{l_\omega:\,\omega\in\big[-\omega_0+c,\,\omega_0-c\big]\Big\}\bigcup\Big\{\lambda:\,|\lambda|\le a\Big\}\right],$$

$$\Lambda^c_{-a} := \mathbb{C}\setminus[\{l_\omega:\,\omega\in\big[-\omega_0+c,\,\omega_0-c\big]\}\setminus\{\lambda:\,|\lambda|\le a\}],$$

де, як і вище, кут $\omega_0:\ \pi/2<\omega_0<\pi$ визначає сектор $\Lambda:=\big\{l_\omega:\,\omega\in[-\omega_0,\,\omega_0]\big\}\bigcup\big\{0\big\}$. Очевидно, що $\mathbb{C}\setminus\Lambda\subset\Lambda^c$, $\mathbb{C}\setminus\Lambda_a\subset\Lambda^c_a$, $\mathbb{C}\setminus\Lambda_{-a}\subset\Lambda^c_{-a}$, при $c=0$ правильні рівності $\Lambda^0=\mathbb{C}\setminus\Lambda$, $\Lambda^0_a=\mathbb{C}\setminus\Lambda_a$, $\Lambda^0_{-a}=\mathbb{C}\setminus\Lambda_{-a}$.

Зафіксуємо далі строго додатне $c:\ \pi/2<\omega_0-c<\pi$. Розглядаємо алгебру $\mathcal{H}(\Lambda^c_{-a})$ та алгебру $\mathcal{H}(\Lambda^c_a)$ функцій, голоморфних відповідно в Λ^c_{-a}, Λ^c_{-a} та неперервних на замиканні області з нормою $\|\varphi\|_{-a}:=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_a^{+\infty}M_\varphi(r)\frac{dr}{r}+\sup_{\lambda\in\Lambda^c_{-a}}\big|\varphi(\lambda)\big|$ (відповідно $\|\varphi\|_{-a}:=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_a^{+\infty}M_\varphi(r)\frac{dr}{r}+\sup_{\lambda\in\Lambda^c_a}\big|\varphi(\lambda)\big|$). Величина $m_{-a}(\varphi):=\sup\limits_{\lambda\in\Lambda^c_{-a}}\big|\varphi(\lambda)\big|$ є рівномірною нормою в алгебрі всіх аналітичних функцій в області Λ^c_{-a} та неперервних на замиканні $\overline{\Lambda^c_{-a}}$, при цьому такою, що $m_{-a}(\varphi)\le\|\varphi\|_{-a}$ для всіх $\varphi\in\mathcal{H}(\Lambda^c_{-a})$. Отже, якщо φ_n — фундаментальна послідовність в $\mathcal{H}(\Lambda^c_{-a})$ стосовно норми $\|\cdot\|_{-a}$, то вона фундаментальна стосовно норми m_{-a}. А тому її границя $\varphi\overset{\|\cdot\|_{-a}}{=}\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n\overset{m_{-a}}{=}\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n$ також буде функцією аналітичною в області Λ^c_{-a} та неперервною на її замиканні $\overline{\Lambda^c_{-a}}$, причому такою, що $\|\varphi\|_{-a}<\infty$. Тобто, алгебра $\mathcal{H}(\Lambda^c_{-a})$ — банахова.

Індуктивна границя банахових алгебр $\mathcal{H}(\Lambda^c_0):=\bigcup\limits_{a>0}\mathcal{H}(\Lambda^c_{-a})$, взята за числами $a>0$ з достатньо малого околу нуля, є топологічною алгеброю і складається з функцій, голоморфних в кожній з областей Λ^c_{-a} та неперервних в замиканнях $\overline{\Lambda^c_{-a}}$ (які містять деякий окіл точки $\big\{0\big\}$). Як видно з побудови, правильним є включення $\mathcal{H}(\Lambda^c_0)\subset\mathcal{H}(\Lambda^c):=\bigcap\limits_{a>0}\mathcal{H}(\Lambda^c_{-a})$.

Розглянемо контур $\Gamma_{a,\omega}:=\Gamma^+_{a,\omega}\bigcup\Gamma^-_{a,\omega}\bigcup\Gamma^0_a$, де числа $\omega:\ \omega_0-c\le\omega\le\omega_0$ та $a>0$ фіксовані і взято

$$\Gamma^+_{a,\omega}:=\big\{re^{i\omega}:\,r\ge a\big\},\quad \Gamma^-_{a,\omega}:=\big\{re^{-i\omega}:\,r\ge a\big\},\quad \Gamma^0_a:=\big\{ae^{i\tau}:\,\tau\in\big[\omega,2\pi-\omega\big]\big\}.$$

Нехай A – замкнений лінійний секторіальний оператор від'ємного типу у комплексному банаховому просторі $(V_0,\|\cdot\|_0)$ зі щільною областю визначення V_1, тобто $A\in\mathcal{A}$. Згідно з [4] для $\varphi\in\mathcal{H}(\Lambda^c)$ (отже, для $\varphi\in\mathcal{H}(\Lambda^c_0)$) існує такий контур $\Gamma_{a,\omega}\subset\varrho(A)$, що для довільного числа $t>0$ формула

$$\varphi(tA):=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{a,\omega}}\varphi(t\lambda)\,R(\lambda,A)\,d\lambda, \tag{7}$$

яка не залежить від вибору в контурі числа a і кута ω, однозначно визначає гомоморфізм

$$\mathcal{H}(\Lambda^c) \ni \varphi(t\lambda) \longmapsto \varphi(tA) \in H\big(\mathcal{A}\big) \tag{8}$$

алгебри скалярних аналітичних функцій на комутативну алгебру $\mathcal{L}(V_0) \bigcap \mathcal{L}(V_1)$-значних функцій операторного аргументу

$$H\big(\mathcal{A}\big) := \Big\{\mathcal{A} \ni tA \longmapsto \varphi(tA) \in \mathcal{L}(V_0) \bigcap \mathcal{L}(V_1) : \varphi \in \mathcal{H}(\Lambda^c)\Big\}$$

з „поточково“ визначеними алгебричними операціями множення $\varphi(A) \cdot \psi(A) = (\varphi \cdot \psi)(A)$ та додавання і множення на скаляри $\alpha\varphi(A) + \beta\psi(A) = (\alpha\varphi + \beta\psi)(A)$ для всіх функцій φ, ψ, скалярів $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ і операторів $A \in \mathcal{A}$. Гомоморфізм (8) неперервний у такому сенсі: якщо в алгебрі $\mathcal{H}(\Lambda^c)$ послідовність функцій φ_n має границю $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n \overset{\mathcal{H}(\Lambda^c)}{=} \varphi$, то для будь-якого оператора $A \in \mathcal{A}$ маємо $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(A) \overset{\mathcal{L}(V_j)}{=} \varphi(A)$ за нормою алгебри $\mathcal{L}(V_j)$, $j = 0, 1$ для всіх операторів $A \in \mathcal{A}$.

Далі пару комплексних банахових просторів V_0 і V_1 з неперервним і щільним вкладенням $E_{10} : V_1 \longmapsto V_0$ будемо скорочено позначати однією літерою $V := (V_0, V_1)$. Сукупність усіх таких обмежених лінійних операторів $T : V_0 \to V_0$, що $T(V_1) \subset V_1$ утворює банахову алгебру $\mathcal{L}(V)$ — обмежених лінійних операторів над банаховою парою V стосовно рівномірної операторної норми $\big\|T\big\|_{\mathcal{L}(V)} := \max\limits_{j=0,1} \big\|T\big\|_{\mathcal{L}(V_j)}$, де $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(V_j)}$ рівномірна норма в алгебрі $\mathcal{L}(V_j)$ – обмежених лінійних операторів над банаховим простором V_j та $j = 0\,, 1$. Зауважимо, що скінченність норми $\big\|T\big\|_{\mathcal{L}(V_1)}$ випливає з неперервності вкладення E_{10} та теореми про замкнений графік.

Означення 1. *Проміжним простором банахової (інтерполяційної) пари* (V_0, V_1) *називається такий банахів простір* X, *що* $V_0 \cap V_1 \subset X \subset V_0 \cup V_1$.

Зауважимо, що $V_1 \subset X \subset V_0$ для проміжного простору X, якщо V_1 щільно вкладений у V_0, і всі вкладення неперервні.

Означення 2. *Правильним проміжним простором для банахової пари* (V_0, V_1) *називається проміжний простір* U *цієї пари, для якого виконується одна з умов:*

1) $U = V_1$;

2) для довільного $\epsilon > 0$ *існує така стала* $C_\epsilon > 0$, *що* $||x||_U \le \epsilon||x||_{V_1} + C_\epsilon||x||_{V_0}$.

Прикладом U є інтерполяційний простір з показником $\theta \in (0, 1)$ для пари (V_0, V_1) (див. [3]).

З [2] випливає таке: якщо U — правильний проміжний простір пари V, то для кожного оператора $A \in \mathcal{A}$ існує таке число $\delta(A) > 0$, що для будь-якого оператора $X \in \mathcal{L}(U, V_0)$ з нормою $\|X\|_{\mathcal{L}(U,V_0)} < \delta(A)$ виконується $A + X\,|_{V_1} \in \mathcal{A}$. Звідси, зокрема, при $\varphi \in H(\mathcal{A})$

$$\varphi(A + X) - \varphi(A) \in H\big(\mathcal{A}\big), \qquad X \in \mathcal{L}(U, V_0) : \|X\|_{\mathcal{L}(U,V_0)} < \delta(A).$$

Цей факт дає змогу запровадити узагальнення похідної для функцій операторного аргументу $\varphi(A) \in H\big(\mathcal{A}\big)$ (див. [2]) та визначити оператори диференціювання [9].

Нехай далі $U = V_\theta$ —інтерполяційний простір для пари (V_0, V_1) – область визначення оператора $(-J)^\theta$ (зокрема $V_\theta = H^{2m\theta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)$). Це правильний проміжний простір банахової пари $\{V_0; V_1\}$ (див. [3]), причому тоді $V_1 \subset V_\theta \subset V_0$.

Диференціюванням у напрямі заданого оператора $X \in \mathcal{L}(U; V_0)$ називаємо [2,9] визначений на алгебрі $H(\mathcal{A})$ лінійний оператор вигляду

$$D_X : H(\mathcal{A}) \ni \varphi(A) \longmapsto \varphi'(A)\big[X\big] \in \mathcal{L}(V_0), \qquad \forall\, A \in \mathcal{A}.$$

Цілі степені диференціювання в напрямі $X \in \mathcal{L}(U; V_0)$ також визначаємо на алгебрі $H(\mathcal{A})$ як лінійні оператори вигляду

$$D^k_X : H(\mathcal{A}) \ni \varphi(A) \longmapsto \varphi^{(k)}(A)\big[\underbrace{X, \dots, X}_{k}\big] \in \mathcal{L}(V_0), \quad \forall\, A \in \mathcal{A}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Лінійність операторів диференціювання D^k_X випливає зі способу їх визначення. Ці оператори володіють додатковою властивістю інваріантності стосовно операції множення в алгебрі $H(\mathcal{A})$ [9].

Враховуючи властивість неперервності гомоморфізму з алгебри аналітичних функцій $\mathcal{H}(\Lambda^c)$ на алгебру операторних функцій $H(\mathcal{A})$, кажемо, що послідовність $\varphi_n(A) \in H(\mathcal{A})$ збігається в алгебрі $H(\mathcal{A})$ до функції $\varphi(A) \in H(\mathcal{A})$, якщо для кожного оператора $A \in \mathcal{A}$ за нормою операторної алгебри $\mathcal{L}(V_0)$ виконується $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(A) = \varphi(A)$. Це є „поточкова“ збіжність операторних функцій в їх області визначення.

Із результатів [2,9] випливає таке: якщо U — правильний проміжний простір банахової пари V та $\varphi(A) \in H(\mathcal{A})$, то для будь-яких операторів $A \in \mathcal{A}$ та $X \in \mathcal{L}(U; V_0)$ існує таке додатне число $\delta_{A,X}$, що за нормою $\mathcal{L}(V_0)$

$$\varphi(A + tX) \overset{\mathcal{L}(V_0)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k_{tX}}{k!}\, \varphi(A), \qquad \forall\, t \le \delta_{A,X}\,, \tag{9}$$

причому збіжність ряду абсолютна та рівномірна за числами $t\,:\; 0 \le t \le \delta_{A,X}$. Визначена рядом (9) над алгеброю $H(\mathcal{A})$ експонента

$$e^{D_{tX}} :\, \big[0, \delta_{A,X}\big] \ni t \longmapsto e^{D_{tX}}\, \varphi(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k_{tX}}{k!}\, \varphi(A)$$

володіє півгруповою властивістю $e^{D_{(t+s)X}} = e^{D_{tX}}\, e^{D_{sX}}$ для всіх $t, s, t+s \in \big[0, \delta_{A,X}\big]$, та правильне зображення

$$D^k_X e^{tA}[X, \dots, X] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{a,\omega}} e^{t\lambda} E_{10}(\lambda E_{10} - A)^{-1} \sum_{n=0}^{k-1} [X E_{1\theta}(\lambda E_{10} - A)^{-1}]^k d\lambda,$$

де $E_{1\theta}\colon V_1 \longrightarrow V_\theta$ –оператор вкладення. Для довільного $X \in \mathcal{L}(V_\theta, V_0)$ з довільною нормою $\|X\|$

$$A+X\in\mathcal{A}\quad \text{i}\quad \Lambda\subset\varrho(A+X)\cap\varrho(A)\qquad (\text{див.}[2]).$$

Введемо позначення

$$G_{l-1}=\sum_{k=0}^{l-1}e^{tD_X^k}=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{l-1}\int_{\Gamma_{a,\omega}}e^{t\lambda}E_{10}(\lambda E_{10}-A)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}[XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)^{-1}]^k d\lambda,$$

$$u_l(t)=G_{l-1}(t,X)g+\int_0^t G_{l-1}(t-\tau,X)f(\tau)d\tau,\ l=1,2,\ldots. \tag{10}$$

Теорема 2. *Нехай $A\in\mathcal{A}$, $D(A)=V_1$, V_θ - проміжний простір з показником $\theta\in(0,1)$ банахової пари (V_0,V_1), $X\in\mathcal{L}(V_\theta,V_0)$, $f(t)\in C([0,T],V_1)$, $g\in V_1$, $u(t)$– розв'язок задачі*

$$\frac{du}{dt}=(A+X)u+f(t),\qquad u(0)=g. \tag{11}$$

Існує така додатна стала $C=C(A,X)$, що правильна оцінка

$$\sup_{t\in[0,T]}||u(t)-u_l(t)||_{V_0}\le\frac{C}{2^{l-1}}[||g||_{V_0}+\int_0^T||f(t)||_{V_0}dt],\quad l=1,2,\ldots. \tag{12}$$

Доведення. Згідно з [2] для всіх $f\in C([0,T],V_1)$, $g\in C^1([0,T],V_0)$ існує єдиний розв'язок $u\in C((0,T],V_1)\cap C^1((0,T),V_0)$ задачі (11). Його можна подати у вигляді

$$v(t)=e^{t(A+XE_{1\theta})}g+\int_0^t e^{(t-\tau)(A+XE_{1\theta})}f(\tau)\,d\tau, \tag{13}$$

де півгрупа має зображення

$$e^{t(A+XE_{1\theta})}=\int_{\Gamma_{a,\omega}}e^{t\lambda}E_{10}(\lambda E_{10}-A-XE_{1\theta})^{-1}\,d\lambda$$

та $\Gamma_{a,\omega}\in\varrho(A+XE_{1\theta})$. З тотожності

$$(\lambda E_{10}-(A+XE_{1\theta}))^{-1}=(\lambda E_{10}-A)^{-1}[E_{00}-XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)^{-1}]^{-1}, \tag{14}$$

де $E_{00}\colon V_0\longrightarrow V_0$ – тотожне відображення, одержуємо

$$\begin{aligned}(\lambda E_{10}-(A+XE_{1\theta}))^{-1}\quad &=\sum_{k=0}^{l-1}(\lambda E_{10}-A)^{-1}[XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)^{-1}]^k+\\ &+\sum_{k=l}^{\infty}(\lambda E_{10}-A)^{-1}[XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)^{-1}]^k.\end{aligned}$$

Остання сума після заміни індексу підсумовування набуває вигляду

$$\sum_{k=l}^{\infty}(\lambda E_{10}-A)^{-1}[XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)^{-1}]^{k}=\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda E_{10}-A)^{-1}[XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)^{-1}]^{k+l}=$$
$$=[E_{00}-XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)^{-1}]^{-1}[XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)^{-1}]^{l}.$$

Застосовуючи формулу (14) знову, матимемо

$$\begin{aligned}(\lambda E_{10}-(A+XE_{1\theta}))^{-1} &=\sum_{k=0}^{l-1}(\lambda E_{10}-A)^{-1}[XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)^{-1}]^{k}+\\ &+(\lambda E_{10}-(A+XE_{1\theta}))^{-1}[XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)^{-1}]^{l}.\end{aligned}\tag{15}$$

Застосовуючи до цієї тотожності інтеграл $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma_{a,\omega}}e^{t\lambda}\ldots d\lambda$, одержуємо

$$\begin{aligned}&\left\|[e^{t(A+XE_{1\theta})}-G_{l-1}(t,X)]g\right\|_{V_0}=\\ &=\left\|\Big[\int_{\Gamma_{a,\omega}}\frac{e^{t\lambda}}{2\pi i}E_{10}[\lambda E_{10}-(A+XE_{1\theta})]^{-1}\big[XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)^{-1}\big]^{l}d\lambda\Big]\,g\right\|_{V_0}.\end{aligned}\tag{16}$$

Записуємо

$$E_{10}[\lambda E_{10}-(A+XE_{1\theta})]^{-1}=[E_{10}(\lambda E_{10}-A)^{-1}][E_{00}-XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)^{-1}]^{-1}=$$
$$=E_{10}(\lambda E_{10}-A)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}[XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)^{-1}]^{k}.$$

За умови

$$||XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)^{-1}||\le\delta,\tag{17}$$

враховуючи незалежність зображення півгрупи від вибору параметра a в контурі інтегрування, подібно до [1] одержуємо

$$\begin{aligned}&\|E_{10}[\lambda E_{10}-A-XE_{1\theta}]^{-1}\|_{L(V_0)}\le\\ &\quad\le\|E_{10}(\lambda E_{10}-A)^{-1}\|_{L(V_0)}\textstyle\sum_{j=0}^{\infty}\|XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)^{-1}\|^{j}_{L(V_0)}\le\\ &\qquad\le C_0K_a(A)\textstyle\sum_{j=0}^{\infty}\delta^{j}=\frac{C_0K_a(A)}{1-\delta},\end{aligned}$$

де $C_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\cos\omega}^{\infty}\frac{e^{-s}}{s}ds+\frac{\pi-\omega}{\pi}$, $\quad K_a(A)=\sup\limits_{\lambda\in\Lambda_a}\left\|\lambda E_{10}\big(\lambda E_{10}-A\big)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(V_0)}$.

Тому оцінюємо праву частину (16) як $\dfrac{C_0K_a(A)}{1-\delta}\delta^{l}||g||_{V_0}$. Отже,

$$\left\|[e^{t(A+XE_{1\theta})}-G_{l-1}(t,X)]g\right\|_{V_0}\le\frac{C_0K_a(A)\delta^{l}}{1-\delta}||g||_{V_0}.\tag{18}$$

З неперервності вкладення $V_1 \subset V_0$ випливає існування інтеграла $\int\limits_0^t ||f(t)||_{V_0} dt$. Тому

$$\Big\| \int_0^t [e^{t-\tau}(A + XE_{1\theta}) - G_{l-1}(t-\tau, X)] f(\tau) d\tau \Big\|_{V_0} \le \frac{C_0 K_a(A)\delta^l}{1-\delta} \int_0^t \|f(\tau)\|_{V_0} d\tau. \quad (19)$$

Залишається показати виконання умови (17). При $D(X) = V_\theta$ в [2] доведено нерівність

$$\|(\lambda E_{10} - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(V_0, V_\theta)} \le \frac{C'}{|\lambda|^{1-\theta}}, \qquad \forall\, \lambda \in \Lambda_0,$$

звідки при $\lambda \in \Gamma_{a,\omega}$

$$\|XE_{1\theta}(\lambda E_{10} - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(V_0)} \le$$

$$\le \|X\|_{\mathcal{L}(V_\theta, V_1)} \cdot \|(\lambda E_{10} - A)^{-1}\|_{L(V_0)} \le \tfrac{C'}{|\lambda|^{1-\theta}} \|X\|_{\mathcal{L}(V_\theta, V_1)} \le \tfrac{C' ||X||_{\mathcal{L}(V_\theta, V_1)}}{a^{1-\theta}}.$$

Вибираючи $a^{1-\theta} = 2C'||X||_{\mathcal{L}(V_\theta, V_1)}$, одержуємо

$$||XE_{1\theta}(\lambda E_{10} - A)^{-1}||_{\mathcal{L}(V_0)} \le \frac{1}{2}, \qquad \forall\, X \in \mathcal{L}(V_\theta, V_0).$$

Отож, у (18), (19) можна взяти $\delta = \frac{1}{2}$. Позначаємо $C = C(A, X) = C_0 K_a(A)$ при вибраному вище a. Теорему доведено.

3. Наближення розв'язку крайової задачі. Розглянемо задачу (2). Використовуючи властивості оператора диференціювання, формулу (13) розв'язку задачі Коші (3) (а отже, й задачі (2)) можна подати у вигляді збіжного в V_0 ряду

$$v(t) = G(t, X)g + \int_0^t G(t-\tau, X) f(\tau) d\tau, \quad (20)$$

де

$$G(t, X) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Lambda} e^{t\lambda} E_{10}(\lambda E_{10} - A)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} [XE_{1\theta}(\lambda E_{10} - A)^{-1}]^k d\lambda. \quad (21)$$

У [10] з'ясовано існування та властивості функції Гріна $\Gamma(x, y, t)$ відповідної (2) незбуреної параболічної крайової задачі.

Теорема 3. *Нехай виконується припущення* (A), $u(x, t)$ *– розв'язок задачі (2) при* $f \in C\Big([0, T]; W^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\Big)$, $g \in W^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)$,

$$u_l(x, t) = \int_\Omega \sum_{k=0}^{l-1} \Gamma_k(x, y, t) g(y) dy + \int_0^t \int_\Omega \sum_{k=0}^{l-1} \Gamma_k(x, y, t-\tau) f(y, \tau) dy d\tau, \; l = 1, 2, \ldots, \quad (22)$$

де $\Gamma_0(x, y, t) = \Gamma(x, y, t)$, $\Gamma_k(x, y, t) = \displaystyle\int_0^t \int_\Omega \Gamma_{k-1}(x, z, t-\tau) L_{1z} \Gamma(z, y, \tau)\, dz\, d\tau$, $k = 1, 2, \ldots$. *Тоді існує така додатна стала* C, *що*

$$\sup_{t \in [0,T]} \big\|u(t) - u_l(t)\big\|_{L_p(\Omega)} \le \frac{C}{2^{l-1}} \Big[\|g\|_{L_p(\Omega)} + \int_0^T \|f(t)\|_{L_p(\Omega)} dt\Big], \; l = 1, 2, \ldots. \quad (23)$$

Доведення. Враховуючи, що задачу (2) можна записати у вигляді абстрактної задачі Коші (11), оцінку (23) одержуємо з теореми 2. Залишається показати, що наближення (10) можна записати у вигляді (22).

Розв'язок задачі (11) при $f = 0$ має вигляд

$$u = e^{At} g = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda-\beta} e^{\lambda t} E_{10} (\lambda E_{10} - A)^{-1} g \, d\lambda. \tag{24}$$

Зауважимо, що згідно з [10] розв'язок відповідної (2) незбуреної параболічної крайової задачі

$$u(x,t) = \int_\Omega \Gamma(x,y,t) g(y) \, dy, \tag{25}$$

а також $E_{10}(\lambda E_{10} - A)^{-1} g(x) = \displaystyle\int_\Omega \tilde{G}_\lambda(x,y) g(y) \, dy$, де $\tilde{G}_\lambda(x,y)$ – функція Гріна незбуреної еліптичної крайової задачі

$$\lambda u - Lu = 0, \quad x \in \Omega, \qquad B_j u \,|_S = 0, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Відомо [10], що $\tilde{G}_\lambda(x,y) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda\tau} \Gamma(x,y,\tau) \, d\tau$. Отже,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda-\beta} e^{\lambda t} E_{10} (\lambda E_{10} - A)^{-1} g \, d\lambda = \int_\Omega \Gamma(x,y,t) g(y) \, dy. \tag{26}$$

Виконуючи перетворення

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda-\beta} e^{\lambda t} E_{10} (\lambda E_{10} - A)^{-1} g \, d\lambda = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda-\beta} e^{\lambda t} \int_\Omega \Big(\int_0^\infty e^{-\lambda\tau} \Gamma(x,y,\tau) \, d\tau \Big) g(y) \, dy \, d\lambda = \\
&= \int_\Omega \Big[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda-\beta} \Big(\int_0^\infty e^{\lambda(t-\tau)} \Gamma(x,y,\tau) d\tau \Big) d\lambda \Big] g(y) \, dy = \\
&= \int_\Omega \Big[\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Lambda-\beta} \Big(\int_0^t e^{\lambda\tau} \Gamma(x,y,t-\tau) d\tau \Big) d\lambda \Big] g(y) \, dy
\end{aligned}$$

та враховуючи (24), (26), для всіх $x, y \in \Omega$, $t \in [0,T]$, одержуємо

$$\Gamma(x,y,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda-\beta} \tilde{G}_\lambda(x,y) \, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda-\beta} \Big(\int_0^t e^{\lambda\tau} \Gamma(x,y,t-\tau) \, d\tau \Big) \, d\lambda. \tag{27}$$

Формула (26) набуває вигляду

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda-\beta} e^{\lambda t} E_{10} (\lambda E_{10} - A)^{-1} g \, d\lambda = \int_\Omega \Big(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda-\beta} e^{\lambda t} \tilde{G}_\lambda(x,y) \, d\lambda \Big) g(y) \, dy. \tag{28}$$

Використовуючи формули (27), (26), матимемо

$$\Big[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda-\beta} e^{\lambda t}E_{10}(\lambda E_{10}-A)^{-1}XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)^{-1}g\,d\lambda\Big] =$$
$$= \int_\Omega \Big[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda-\beta} e^{\lambda t}\tilde{G}_\lambda(x,y)XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)^{-1}g(y)d\lambda\Big]dy =$$
$$= \int_\Omega \Big[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda-\beta}\Big(\int_0^t e^{\lambda\tau}\Gamma(x,z,t-\tau)d\tau\Big)XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)^{-1}g(z)d\lambda\Big]dz =$$
$$= \int_\Omega \Big[\int_0^t \Gamma(x,z,t-\tau)X_zE_{1\theta}\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda-\beta} e^{\lambda\tau}(\lambda E_{10}-A)^{-1}g(z)\Big)d\lambda)d\tau\Big]dz =$$

$$= \int_\Omega \Big[\int_0^t d\tau\Gamma(x,z,t-\tau)L_{1z}\int_\Omega \Gamma(x,z,\tau)g(y)dy\Big]dz =$$
$$= \int_\Omega \Big[\int_0^t d\tau\int_\Omega \Gamma(x,z,t-\tau)L_{1z}\Gamma(x,z,\tau)dz\Big]g(y)dy = \int_\Omega \Gamma_1(x,y,t)g(y)dy,$$

де $\Gamma_1(x,y,t) = \displaystyle\int_0^t\int_\Omega \Gamma(x,z,t-s)\Gamma(z,y,s)dzds.$

Припускаючи за індукцією, що

$$\Big[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda-\beta} e^{\lambda t}(\lambda E_{10}-A)^{-1}(XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)^{-1})^k g\,d\lambda\Big](x) = \int_\Omega \Gamma_k(x,y,t)g(y)dy,$$

знаходимо

$$\Big[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda} e^{\lambda t}(\lambda E_{10}-A)^{-1}(XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)^{-1})^{k+1} g\,d\lambda\Big](x) =$$
$$= \Big[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda-\beta} e^{\lambda t}(\lambda E_{10}-A)^{-1}(XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A))^k XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)g\,d\lambda\Big](x) =$$
$$= \int_\Omega \Big[\int_0^t \Gamma_k(x,z,t-s)X_zE_{1\theta}\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda-\beta} e^{\lambda t}(\lambda E_{10}-A)^{-1}d\lambda\Big)ds)g\Big](z)dz =$$
$$= \int_\Omega \Big[\int_0^t \Gamma_k(x,z,t-s)L_{1z}\Big(\int_\Omega \Gamma(z,y,s)g(y)dy\Big)ds\Big]dz =$$
$$= \int_\Omega \Big[\int_0^t ds\int_\Omega \Gamma_k(x,z,t-s)L_{1z}\Gamma(z,y,s)dz\Big]g(y)dy = \int_\Omega \Gamma_{k+1}(x,y,t)g(y)dy.$$

Теорему доведено.

---

1. *Лопушанський А.О.* Інтерполяційні оцінки аналітичних наближень розв'язків збурених параболічних змішаних задач//Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.– 2000.– Вип. 56.– С. 123-128.

2. *Лопушанський А.О.* Сильно неперервні півгрупи збурень абстрактних параболічних рівнянь// Мат. методи та фіз.-мех. поля.– 1999.– Т.42, №3.– С.75-82.

3. *Лопушанський А.О.* Розв'язність неоднорідної задачі Коші для абстрактних параболічних рівнянь в комплексних інтерполяційних шкалах// Науковий вісник Чернівецького ун-ту.– Вип. 191-192. Математика.– С.89-94.

4. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные уравнения.– М., 1980.

5. *Seeley R.* Interpolation in L_p with boundary condition// Studia Math.– Vol. 44.– 1972.– P.47-66.

6. *Клемент Ф., Хейманс Х., Ангенент С., ван Дуйн К., де Пахтер Б.* Однопараметрические полугруппы.– М., 1992.

7. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы.– М., 1967. Т.2.

8. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений.– М., 1985.

9. *Лопушанський А.* Диференціювання аналітичних функцій від секторіальних операторів за некомутативними напрямками//Мат. методи і фіз.-мех. поля.– 1997.– Т.40, N 4.– С.70-74.

10. *Ивасишен С.Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач.– К., 1990.

THE SOLUTION OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR PARABOLIC EQUATION WITH PSEUDODIFFERENTIAL TERM

Andriy Lopushansky

Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NASU
Naukova Str., 3a, 79060 Lviv, Ukraine

The solvability of the boundary value problem for parabolic equation with pseudodifferential term is established. The exact estimates of its solution's approximation by means finite iterations of Green's function is founded.

Key words: parabolic equation, pseudodifferential operator, solution's approximation.

Стаття надійшла до редколегії 07.04.2006

Прийнята до друку 02.11.2006

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 2006. Вип.66. С.128–136 Ser.Mech-Math.2006. Vol.66. P.128–136

УДК 517.5

ПРО АПРОКСИМАЦІЮ І ПОВОДЖЕННЯ ЗАЛИШКУ ІНТЕГРАЛА ЛАПЛАСА-СТІЛЬТЬЄСА

Любов МИКИТЮК, Олена ПОСІКО

Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

Досліджено апроксимацію і асимптотичне поводження залишку інтеграла $\int\limits_0^\infty f(x)\exp\{sx\}dF(x)$, де функція f додатна й обмежена на кожному скінченному проміжку, а функція F невід'ємна, неспадна, необмежена і неперервна справа на $[0,+\infty)$.

Ключові слова: інтеграл Лапласа-Стільтьєса, залишок інтеграла Лапласа-Стільтьєса.

1. Нехай V - клас функцій F, невід'ємних, неспадних, необмежених і неперервних справа на $[0;+\infty)$. Позначимо через $W(F)$ клас функцій f, невід'ємних на $[0;+\infty)$, обмежених на кожному скінченному проміжку і таких, що інтеграл Лебега-Стільтьєса $\int\limits_0^\tau f(x)\exp\{sx\}dF(x)$ існує для всіх $s=\sigma+it$ і $\tau\in[0;+\infty)$. Інтеграл

$$I(s)=\int\limits_0^\infty f(x)\exp\{sx\}dF(x) \tag{1.1}$$

називається інтегралом Лапласа-Стільтьєса. Якщо (λ_n) – зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел ($\lambda_0=0$), $F(x)=n(x)$, де $n(t)=\sum\limits_{\lambda_n\le t}1$ – лічильна функція цієї послідовності, f – така невід'ємна на $[0,+\infty)$ функція, що

$f(\lambda_n) = a_n \geq 0$ для всіх $n \geq 0$, то

$$D(s) := I(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\} \tag{1.2}$$

є рядом Діріхле з невід'ємними показниками та коефіцієнтами.

Для $\sigma < \sigma_a$, де σ_a - абсциса абсолютної збіжності ряду (1.2), приймемо $E_n(\sigma) = E_n(D,\sigma) = \inf\limits_{P\in\Pi_k(\lambda)}\{\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |D(\sigma+it) - P(\sigma+it)|\}$, де $\Pi_k(\lambda)$ - клас експоненціальних поліномів вигляду $\sum\limits_{n=1}^{k} a_n \exp\{s\lambda_n\}$.

Число $\sigma_a \in (-\infty, +\infty)$ називатимемо абсцисою абсолютної збіжності інтеграла (1.1), якщо він абсолютно збіжний для $\sigma < \sigma_a$ і абсолютно розбіжний для $\sigma > \sigma_a$. Якщо інтеграл (1.1) абсолютно збіжний для кожного $\sigma < +\infty$, то приймаємо $\sigma_a = +\infty$. Якщо інтеграл (1.1) абсолютно розбіжний для кожного $\sigma > -\infty$, то приймаємо $\sigma_a = -\infty$.

Нехай абсциса абсолютної збіжності $I(s)$ становить $\sigma_a = 0$. Для $\sigma < 0$ приймемо

$$E_\tau(\sigma) = E_\tau(I,\sigma) = \inf_{\omega\in W(F)} \left\{ \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| I(\sigma+it) - \int_0^\tau \omega(x)\exp\{(\sigma+it)x\}dF(x) \right| \right\}.$$

Позначимо через $R_\tau(\sigma) = R_\tau(I,\sigma) = \int\limits_\tau^\infty f(x)\exp\{\sigma x\}dF(x)$ залишок інтеграла Лапласа-Стільтьєса (1.1).

В [1] для рядів Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності отримано такі оцінки $E_n(\sigma)$:

$$|a_{n+1}|\exp\{\sigma\lambda_{n+1}\} \leq E_n(\sigma) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|\exp\{\sigma\lambda_k\}. \tag{1.3}$$

У [2,3] зазначено зв'язок між асимптотичними поводженнями залишку $R_n(\sigma) = R_n(D,\sigma) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k\exp\{\sigma\lambda_k\}$ ряду Діріхле (1.2) та його коефіцієнтів a_n, звідки, з огляду на (1.3), отримано зв'язок між асимптотичними поводженнями $E_n(\sigma)$ і a_n.

Мета нашої праці — отримати аналоги результатів з [1,2,3] для інтегралів Лапласа-Стільтьєса, зокрема, отримання оцінок $E_\tau(\sigma)$ зверху і знизу, а також зв'язку між асимптотичними поводженнями $E_\tau(\sigma)$ та функцією $f(x)$.

2. Оцінки $E_\tau(\sigma)$ зверху і знизу.

Теорема 1. *Для всіх $\sigma < 0$ і для всіх точок $x > \tau$ виконується нерівність*

$$E_\tau(\sigma) \geq c(x)f(x)\exp\{\sigma x\}, \tag{2.1}$$

де $c(x) = F(x) - F(x-0)$.

Доведення. Якщо x не є точкою стрибка функції $F(x)$, то нерівність (2.1) очевидна.

Нехай $x = x_0$ — точка стрибка. Приймемо $I_M(s) = \int\limits_0^M f(x)\exp\{sx\}dF(x)$, $M > x_0$. Тоді для будь-якого інтеграла $\int\limits_0^\tau \omega(x)\exp\{sx\}dF(x)$ $(\omega \in W(F))$ і для всіх $M > \tau$ отримуємо

$$I_M(\sigma+it) - \int\limits_0^\tau \omega(x)\exp\{(\sigma+it)x\}dF(x) = \int\limits_0^M \varphi(x)\exp\{itx\}dF(x),$$

де

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x)\exp\{\sigma x\},\ x > \tau, \\ (f(x)-\omega(x))\exp\{\sigma x\},\ 0 \le x \le \tau. \end{cases}$$

Зауважимо, що функція $\varphi(x)$ обмежена на кожному скінченному проміжку. Нехай $\varepsilon > 0$ таке, що $(x_0-\varepsilon;\, x_0+\varepsilon) \subset (0; M)$. Приймемо

$$\Omega_{\varepsilon,M} = [0;M] \setminus (x_0-\varepsilon;\, x_0+\varepsilon),\ \ F_0(x) = F(x) - c(x_0)\,H(x-x_0),$$

де $H(x) = \begin{cases} 1,\ x \ge 0, \\ 0,\ x < 0. \end{cases}$

Тоді

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^M \varphi(x)\exp\{itx\}dF(x) = \\ &= \int\limits_{\Omega_{\varepsilon,M}} \varphi(x)\exp\{itx\}dF(x) + \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \varphi(x)\exp\{itx\}dF(x) = \\ &= \int\limits_{\Omega_{\varepsilon,M}} \varphi(x)\exp\{itx\}dF(x) + c(x_0)\varphi(x_0)\exp\{itx_0\} + \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \varphi(x)\exp\{itx\}dF_0(x). \end{aligned} \tag{2.2}$$

З побудови функції $F_0(x)$ випливає, що $F_0(x)$ не має стрибка в точці x_0, тому

$$\begin{aligned} &\left| \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \varphi(x)\exp\{itx\}dF_0(x) \right| \le \\ &\le \sup_{(x_0-\varepsilon;\, x_0+\varepsilon)} \{|\varphi(x)\exp\{itx\}|\}(F_0(x_0+\varepsilon+0) - F_0(x_0-\varepsilon-0)) = o(1),\ \varepsilon \to +0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Враховуючи (2.2) і (2.3), а також теорему Фубіні отримуємо

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left\{\int_{0}^{M}\varphi(x)\exp\{itx\}dF(x)\right\}\exp\{-itx_0\}dt = \\
&= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left\{\int_{\Omega_{\varepsilon,M}}\varphi(x)\exp\{itx\}dF(x)\right\}\exp\{-itx_0\}dt + \\
&+ \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}c(x_0)\varphi(x_0)\exp\{itx_0\}\exp\{-itx_0\}dt + o(1) = \qquad (2.4)\\
&= \int_{\Omega_{\varepsilon,M}}\varphi(x)\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\exp\{it(x-x_0)\}dt\right\}dF(x) + c(x_0)\varphi(x_0) + o(1) = \\
&= \int_{\Omega_{\varepsilon,M}}\varphi(x)\frac{\sin T(x-x_0)}{T(x-x_0)}dF(x) + c(x_0)\varphi(x_0) + o(1).
\end{aligned}
$$

Зауважимо, що $\varphi(x)\,\dfrac{\sin T(x-x_0)}{T(x-x_0)} \Longrightarrow 0$ при $T\to\infty$ на множині $\Omega_{\varepsilon,M}$. Тоді, спрямовуючи $\varepsilon\to 0$, з (2.4) одержуємо

$$
\begin{aligned}
&\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left\{\int_{0}^{M}\varphi(x)\exp\{itx\}dF(x)\right\}\exp\{-itx_0\}dt = \\
&= c(x_0)\varphi(x_0) = c(x_0)f(x_0)\exp\{\sigma x_0\}, \quad x_o > \tau.
\end{aligned}
$$

Звідси

$$
\begin{aligned}
&|c(x_0)f(x_0)\exp\{\sigma x_o\}| = \left|\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left\{\int_{0}^{M}\varphi(x)\exp\{itx\}dF(x)\right\}\exp\{-itx_0\}dt\right| \le \\
&\le \sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\int_{0}^{M}\varphi(x)\exp\{itx\}dF(x)\right| = \sup_{t\in\mathbb{R}}\left|I_M(\sigma+it) - \int_{0}^{\tau}\omega(x)\exp\{(\sigma+it)x\}dF(x)\right|.
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Оскільки $\sigma < 0$, то

$$|I_M(\sigma+it) - I(\sigma+it)| = \left| \int\limits_0^M f(x)\exp\{(\sigma+it)x\}dF(x) - \int\limits_0^\infty f(x)\exp\{(\sigma+it)x\}dF(x) \right| \le$$

$$\le \int\limits_M^\infty f(x)\exp\{\sigma x\}dF(x) = o(1),\ M\to\infty.$$

Тому

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| I_M(\sigma+it) - \int\limits_0^\tau \omega(x)\exp\{(\sigma+it)x\}dF(x) \right| \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| I(\sigma+it) - \int\limits_0^\tau \omega(x)\exp\{(\sigma+it)x\}dF(x) \right|,\ M\to\infty.$$

З (2.5) маємо

$$c(x_0)f(x_0)\exp\{\sigma x_0\} \le \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| I(\sigma+it) - \int\limits_0^\tau \omega(x)\exp\{(\sigma+it)x\}dF(x) \right|$$

для кожного інтеграла $\int\limits_0^\tau \omega(x)\exp\{sx\}dF(x)$, $x_0 > \tau$, а звідси випливає нерівність (2.1). Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Для всіх $\sigma < 0$ виконується нерівність*

$$E_\tau(\sigma) \le R_\tau(\sigma).$$

Доведення.

$$E_\tau(\sigma) \le \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| I(\sigma+it) - \int\limits_0^\tau f(x)\exp\{(\sigma+it)x\}dF(x) \right| \le$$

$$\le \sup_{t\in\mathbb{R}} \left\{ \int\limits_\tau^\infty f(x)\exp\{\sigma x\}dF(x) \right\} = R_\tau(\sigma).$$

Теорему 2 доведено.

З теореми 2 випливає, що дослідження асимптотичного поводження $E_\tau(\sigma)$ зводиться до дослідження асимптотичного поводження $R_\tau(\sigma)$.

3. Асимптотичне поводження залишку $R_\tau(\sigma)$. Як і в [4] приймемо

$$\mu(\sigma) = \sup\{f(x)\exp\{\sigma x\} : x \geq 0\},\ \sigma \in \mathbb{R}.$$

Тоді або $\mu(\sigma) < +\infty$ для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$, або $\mu(\sigma) = +\infty$ для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$, або існує число σ_μ таке, що $\mu(\sigma) < +\infty$ для всіх $\sigma < \sigma_\mu$ і $\mu(\sigma) = +\infty$ для всіх $\sigma > \sigma_\mu$.

Як і в [5] для $\sigma_\mu = A$ через $\Omega(A)$ позначимо клас додатних необмежених на $(-\infty, A)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' є неперервною, додатною і зростаючою до $+\infty$ на $(-\infty, A)$ функцією. Для $\Phi \in \Omega(A)$ нехай φ – функція, обернена до Φ', а $\Psi(\sigma) = \sigma - \Phi(\sigma)/\Phi'(\sigma)$ – функція, асоційована з Φ за Ньютоном.

Ми розглядатимемо лише випадки $\sigma_\mu = 0$ і $\sigma_\mu = +\infty$.

Теорема 3. *Нехай $F \in V$, $\sigma_\mu = 0$ і $\Phi \in \Omega(0)$. Якщо $\ln \mu(\sigma) \leq \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \in [\sigma_0, 0)$ і $\ln F(x) = o(x|\Psi(\varphi(x))|)$ при $x \to +\infty$, то для $\sigma \in [\sigma_0, 0)$*

$$\ln (R_\tau(\sigma)e^{|\sigma|\tau}) \leq (1 + o(1))\tau|\Psi(\varphi(\tau))|, \quad \tau \to +\infty.$$

Доведення. Оскільки $\ln \mu(\sigma) \leq \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \in [\sigma_0, 0)$, то $\ln f(x) \leq \Phi(\sigma) - \sigma x$ для всіх $x \geq x_0$ і $\sigma \in [\sigma_0, 0)$. Звідси для $\sigma = \varphi(x)$ отримуємо

$$\ln f(x) \leq \Phi(\varphi(x)) - x\varphi(x) = -x\left(\varphi(x) - \frac{\Phi(\varphi(x))}{\Phi'(\varphi(x))}\right) = -x\Psi(\varphi(x)),\ x \geq x_0.$$

Тому

$$\begin{aligned} R_\tau(\sigma) &\leq \int_\tau^\infty \exp\{-x\Psi(\varphi(x)) + \sigma x\} dF(x) \leq \\ &\leq \int_\tau^\infty F(x)\exp\{-x\Psi(\varphi(x)) + \sigma x\}(\varphi(x) + |\sigma|)dx \leq \\ &\leq |\sigma| \int_\tau^\infty F(x)\exp\{-x\Psi(\varphi(x)) + \sigma x\}dx \leq \\ &\leq |\sigma| \int_\tau^\infty \exp\{(1+\varepsilon)x|\Psi(\varphi(x))| - |\sigma|x\}dx, \quad \tau \geq \tau_0(\varepsilon). \end{aligned}$$

За правилом Лопіталя одержуємо

$$\lim_{\tau\to+\infty} \frac{\int_\tau^\infty \exp\{-(1+\varepsilon)x\Psi(\varphi(x)) - |\sigma|x\}dx}{\exp\{-(1+\varepsilon)\tau\Psi(\varphi(\tau)) - |\sigma|\tau\}} = \lim_{\tau\to+\infty} \frac{1}{(1+\varepsilon)\varphi(\tau) + |\sigma|} = \frac{1}{|\sigma|}.$$

Отже,

$$\ln (R_\tau(\sigma)e^{|\sigma|\tau}) \leq (1 + 2\varepsilon)\tau|\Psi(\varphi(\tau))|, \quad \tau \geq \tau_1(\varepsilon).$$

З огляду на довільність ε, теорему 3 доведено.

Теорема 4. *Нехай* $F \in V$, $\sigma_\mu = +\infty$ *і* $\Phi \in \Omega(+\infty)$. *Якщо* $\ln \mu(\sigma) \leq \Phi(\sigma)$ *для всіх* $\sigma \geq \sigma_0 \geq 0$ *і* $\ln F(x) = o(x\Psi(\varphi(x)))$, $x \to +\infty$, *то для* $\sigma \geq \sigma_0$

$$\ln R_\tau(\sigma) \leq -(1 + o(1))\tau\Psi(\varphi(\tau)), \quad \tau \to +\infty.$$

Доведення. Як і у доведенні теореми 3, отримуємо

$$\begin{aligned} R_\tau(\sigma) &\leq \int_\tau^\infty F(x)\exp\{-x\Psi(\varphi(x)) + \sigma x\}(\varphi(x) - \sigma)dx \leq \\ &\leq \int_\tau^\infty F(x)\exp\{-x\Psi(\varphi(x)) + \sigma x\}\varphi(x)dx \leq \\ &\leq \int_\tau^\infty \exp\{-(1-\varepsilon)x\Psi(\varphi(x))\}\varphi(x)dx = \\ &= \frac{1 + o(1)}{1 - \varepsilon}\exp\{-(1-\varepsilon)\tau\Psi(\varphi(\tau))\}, \quad \tau \to +\infty, \end{aligned}$$

тоді

$$\ln R_\tau(\sigma) \leq -(1 - 2\varepsilon)\tau\Psi(\varphi(\tau)), \quad \tau \geq \tau_0(\varepsilon).$$

З огляду на довільність ε, теорему 4 доведено.

Позначимо

$$\Delta F(\tau) = \int_{[\tau,\, \tau+1)} dF(x).$$

Теорема 5. *Нехай* $F \in V$, $\sigma_\mu = 0$, $f(x) \to +\infty$ $(x \to +\infty)$ *і для довільного* $a \in [0, 1)$

$$\ln f(x + a) - \ln f(x) \to 0, \quad x \to +\infty. \tag{3.1}$$

Тоді для всіх $\sigma < 0$

$$\varlimsup_{\tau \to +\infty} \frac{\ln (R_\tau(\sigma)e^{|\sigma|\tau})}{\ln f(\tau)} = 1 + \varlimsup_{\tau \to +\infty} \frac{\ln \Delta F(\tau)}{\ln f(\tau)}. \tag{3.2}$$

Доведення. Оскільки $\sigma < 0$, то

$$R_\tau(\sigma) \geq \int_{[\tau,\, \tau+1)} f(x)e^{\sigma x}dF(x) \geq e^{\sigma(\tau+1)} \inf_{[\tau,\, \tau+1)} f(x)\Delta F(\tau)$$

і з огляду на (3.1)

$$\ln (R_\tau(\sigma)e^{|\sigma|\tau}) \geq \sigma + o(1) + \ln f(\tau) + \ln \Delta F(\tau), \quad \tau \to +\infty,$$

звідки

$$\varlimsup_{\tau\to+\infty}\frac{\ln\left(R_\tau(\sigma)e^{|\sigma|\tau}\right)}{\ln\, f(\tau)}\geq 1+\varlimsup_{\tau\to+\infty}\frac{\ln\,\Delta F(\tau)}{\ln\, f(\tau)}. \tag{3.3}$$

З іншого боку,

$$R_\tau(\sigma)e^{|\sigma|\tau}=\sum_{k=0}^{\infty}e^{|\sigma|\tau}\int\limits_{[\tau+k,\,\tau+k+1)}f(x)e^{\sigma x}dF(x)\leq\sum_{k=0}^{\infty}\sup_{[\tau+k,\,\tau+k+1)}f(x)\Delta F(\tau+k)e^{\sigma k}. \tag{3.4}$$

З (3.1) випливає, що для кожного $\varepsilon>0$ і всіх $\tau\geq\tau_0(\varepsilon)$

$$\sup_{[\tau+k,\,\tau+k+1)}\ln\, f(x)\leq\ln\, f(\tau+k)+\varepsilon\leq\ln\, f(\tau)+(k+1)\varepsilon.$$

Якщо

$$h:=\varlimsup_{\tau\to+\infty}\frac{\ln\,\Delta F(\tau)}{\ln\, f(\tau)}<+\infty,$$

то $\ln\,\Delta F(\tau)\leq h_1\ln\, f(\tau)$ для всіх $h_1>h$ і для всіх $\tau\geq\tau_0(h_1)$. Тому з (3.4) отримуємо

$$R_\tau(\sigma)e^{|\sigma|\tau}\leq\sum_{k=0}^{\infty}e^{\varepsilon}f(\tau+k)f(\tau+k)^{h_1}e^{\sigma k}\leq e^{\varepsilon}\sum_{k=0}^{\infty}f(\tau)^{1+h_1}e^{(1+h_1)k\varepsilon}e^{\sigma k}\leq$$
$$\leq e^{\varepsilon}f(\tau)^{1+h_1}\sum_{k=0}^{\infty}e^{((1+h_1)\varepsilon-|\sigma|)k}=\frac{e^{\varepsilon}f(\tau)^{1+h_1}}{1-e^{(1+h_1)\varepsilon-|\sigma|}}$$

за умови $(1+h_1)\varepsilon<|\sigma|$, звідки з огляду на довільність ε і h_1 одержуємо нерівність

$$\varlimsup_{\tau\to+\infty}\frac{\ln\left(R_\tau(\sigma)e^{|\sigma|\tau}\right)}{\ln\, f(\tau)}\leq 1+h, \tag{3.5}$$

яка є очевидною, якщо $h=+\infty$. З (3.3) і (3.5) маємо (3.2). Теорему 5 доведено.

Зауваження 1. З теорем 1, 2 і 5 випливає, що за умов (3.1) і $f(x)\to+\infty$ $(x\to+\infty)$, для всіх $\sigma<0$ виконуються нерівності

$$1+\varlimsup_{\tau\to+\infty}\frac{\ln\, c(\tau)}{\ln\, f(\tau)}\leq\varlimsup_{\tau\to+\infty}\frac{\ln\left(E_\tau(\sigma)e^{|\sigma|\tau}\right)}{\ln\, f(\tau)}\leq 1+\varlimsup_{\tau\to+\infty}\frac{\ln\,\Delta F(\tau)}{\ln\, f(\tau)}.$$

---

1. *Микитюк Л.Я., Шеремета М.М.* До апроксимації рядів Діріхле експоненціальними многочленами // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.– 1999.– Вип. 53.– С.35-39.

2. *L.Ya. Mykytyuk, M.M. Sheremeta,* On the remainder of Dirichlet series // Матем. студії.– 2003.– Т.19, N 1.– С. 55-60.

3. *Микитюк Л.Я., Шеремета М.М.* Про асимптотичну поведінку залишку абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле // Укр. матем. журн.– 2003.– Т.55, N 3.– С. 379-388.

4. *Посіко О.С., Скасків О.Б., Шеремета М.М.* Оцінки інтегралу Лапласа-Стільтьєса //Матем. студії.– 2004.– Т.21, N 2.– С. 179-186.

5. *Шеремета М.М.* Цілі ряди Діріхле.– К., 1993.

ON THE APPROXIMATION AND BEHAVIOUR OF THE REMAINDER OF LAPLACE-STILTJES INTEGRAL

Lyubov Mykytyuk, Olena Posiko

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

Approximation and behaviour of the remainder of the integral $\int\limits_0^\infty f(x)\exp\{sx\}dF(x)$ are investigated, where the function f is positive and bounded on each finite interval and function F is nonnegative nondecreasing unbounded and continuous on the right on $[0,+\infty)$.

Key words: Laplace-Stiltjes integral, remainder of Laplace-Stiltjes integral.

Стаття надійшла до редколегії 05.05.2005

Прийнята до друку 02.11.2006

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2006. Вип.66. С.137–150 *Ser.Mech-Math.2006. Vol.66. P.137–150*

УДК 517.95

ПРО ГРАНИЧНІ ПЕРЕХОДИ У ЗАДАЧАХ З ЛОКАЛЬНИМИ БАГАТОТОЧКОВИМИ ЗА ЧАСОМ УМОВАМИ ДЛЯ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

Зіновій НИТРЕБИЧ

Національний університет „Львівська політехніка“,
вул. С. Бандери, 12, 79013 Львів, Україна

Запропоновано формули граничного переходу, які дають змогу при рівномірному прямуванні відстані між деякими вузлами до нуля за розв'язком диференціального рівняння з частинними похідними n-го порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними з залежними від часу коефіцієнтами з локальними багатоточковими умовами за часом побудувати розв'язок цього ж рівняння, що задовольняє локальні багатоточкові умови в менше, ніж n кратних часових вузлах. Для побудови розв'язків багатоточкових задач використано диференціально-символьний метод.

Ключові слова: багатоточкові задачі, граничні переходи, диференціально-символьний метод.

1. Дослідженню задач з локальними та нелокальними за часом багатоточковими умовами для диференціальних рівнянь із частинними похідними в останні роки присвячено чимало праць (див. [1, 2, 3, 4, 5] та бібліографію в них). Ці задачі мають безпосередню фізичну інтерпретацію і загалом є некоректними крайовими задачами, хоча й існують коректні формулювання таких задач [6]. Незважаючи на принципову відмінність між задачею Коші та задачею з локальними багатоточковими умовами за часом для того самого диференціального рівняння з частинними похідними, все ж існує процедура граничного переходу від розв'язку багатоточкової задачі до розв'язку задачі Коші при прямуванні усіх часових вузлів до одного (крайнього лівого) вузла [7, 8].

Цікавим є також питання про можливість граничного переходу від розв'язку багатоточкової задачі для диференціального рівняння з частинними похідними порядку n за часом з локальними багатоточковими умовами в n простих часових вузлах до розв'язку цього ж рівняння, що задовольняє локальні багатоточкові умови в менше, ніж n кратних часових вузлах, при прямуванні відстані між деякими вузлами до нуля. Мета нашої праці — описати такий граничний перехід, а, отже, довести, що розв'язок задачі з локальними багатоточковими умовами в кратних часових вузлах можна одержати із "простішої" багатоточкової задачі з локальними багатоточковими умовами в простих вузлах. Розв'язки задач будемо будувати за допомогою диференціально-символьного методу [9].

2. Основні результати. Розглянемо таку багатоточкову задачу в шарі $t \in (t_1, t_n)$, $x \in \mathbb{R}^s$:

$$L_n\left(t, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) U(t, x) \equiv \frac{\partial^n U}{\partial t^n} + \sum_{k=1}^{n} A_k\left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial^{n-k} U}{\partial t^{n-k}} = 0, \tag{1}$$

$$U(t_k, x) = \varphi_k(x), \quad k = \overline{1, n}, \tag{2}$$

де $-\infty < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < +\infty$, $n \geq 3$, $n, s \in \mathbb{N}$, $A_k\left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, $k = \overline{1, n}$, – довільні диференціальні вирази з неперервно залежними від t коефіцієнтами, символами яких для фіксованого t є цілі аналітичні функції $A_j(t, \nu)$, $j = \overline{1, n}$, $\nu \in \mathbb{R}^s$.

Серед вузлів $t_1, t_2, \ldots, t_n$ виберемо p вузлів $t_1^*, t_2^*, \ldots, t_p^*$, де $1 < p < n$, вважаючи їх впорядкованими за зростанням. Ці вузли надалі називатимемо нерухомими, а решта вузлів, відмінних від нерухомих, – рухомими. Для зручності спочатку вважаємо, що t_1 – нерухомий вузол, тобто $t_1 = t_1^*$.

Введемо такі позначення: n_k – кількість рухомих і нерухомих вузлів, що належать до $[t_k^*, t_{k+1}^*)$, де $k = \overline{1, p-1}$; n_p – кількість вузлів, які не менші за t_p^*. Зрозуміло, що $n_1, n_2, \ldots, n_p \in \mathbb{N}$, причому $n_1 + n_2 + \ldots + n_p = n$.

Приклад 1. Якщо серед вузлів t_1, t_2, t_3, t_4 взяти за нерухомі вузли $t_1^* = t_1$, $t_2^* = t_3$, то $p = 2$, $n_1 = 2$, $n_2 = 2$. □

Приймемо

$$\begin{gathered}
t_k - t_1^* = \xi_{1, k-1}, \quad k = \overline{1, n_1}, \\
t_{n_1+k} - t_2^* = \xi_{2, k-1}, \quad k = \overline{1, n_2}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
t_{n_1+n_2+\ldots+n_{p-1}+k} - t_p^* = \xi_{p, k-1}, \quad k = \overline{1, n_p}.
\end{gathered}$$

Тоді сукупність вузлів $t_1, t_2, \ldots, t_n$ можна записати у вигляді

$$\begin{gathered}
t_1^* + \xi_{1,0} h,\ t_1^* + \xi_{1,1} h,\ t_1^* + \xi_{1,2} h, \ldots, t_1^* + \xi_{1, n_1 - 1} h, \\
t_2^* + \xi_{2,0} h,\ t_2^* + \xi_{2,1} h,\ t_2^* + \xi_{2,2} h, \ldots, t_2^* + \xi_{2, n_2 - 1} h, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
t_p^* + \xi_{p,0} h,\ t_p^* + \xi_{p,1} h,\ t_p^* + \xi_{p,2} h, \ldots, t_p^* + \xi_{p, n_p - 1} h,
\end{gathered} \tag{3}$$

де $h = 1$.

Для прикладу 1 сукупність вузлів t_1, t_2, t_3, t_4 запишемо так: t_1^*, $t_1^* + \xi_{1,1} h$, t_2^*, $t_2^* + \xi_{2,1} h$, де $\xi_{1,1} = t_2 - t_1^*$, $\xi_{2,1} = t_4 - t_2^*$, $h = 1$.

Отже, ми реалізували ситуацію, за якої при $h = 1$ маємо усі рухомі та нерухомі вузли в сукупності (3), а при $h = 0$ маємо лише нерухомі вузли t_1^*, $t_2^*, \ldots, t_p^*$. Надалі вважатимемо, що $h \in [0; 1]$.

Після відповідного перепозначення функцій $\varphi_j(x)$, $j = \overline{1, n}$, запишемо такі багатоточкові умови:

$$U(t_k^* + \xi_{k,m} h,\ x) = \varphi_{k,m}(x), \quad m = \overline{0, n_k - 1},\ \ k = \overline{1, p},\ \ h \in [0;\, 1]. \tag{4}$$

Умови (2) є частковим випадком при $h = 1$ умов (4).

Розглянемо також умови з кратними вузлами

$$\frac{\partial^{j-1} U}{\partial t^{j-1}}(t_k^*,\ x) = \psi_{k,j-1}(x), \quad j = \overline{1, n_k},\ \ k = \overline{1, p}\,. \tag{5}$$

Зазначимо процедуру граничного переходу, яка при $h \to 0$ дає змогу на підставі розв'язку задачі (1), (4) одержати розв'язок задачі (1), (5).

Із виразу $L_n\big(t, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\big)$ заміною $\frac{\partial}{\partial t}$ на $\frac{d}{dt}$ та $\frac{\partial}{\partial x}$ на вектор-параметр $\nu \in \mathbb{R}^s$ утворимо диференціальний вираз $L_n\big(t, \frac{d}{dt}, \nu\big)$ і розглянемо звичайне диференціальне рівняння

$$L_n\left(t, \frac{d}{dt}, \nu\right) T = 0. \tag{6}$$

Розглянемо три системи

$$\Big\{T_j(t, \nu)\Big\}_{j=\overline{1,n}}, \tag{7}$$

$$\Big\{\widetilde{T}_{mi}(t, \nu)\Big\}_{i=\overline{1,n_m},\ m=\overline{1,p}}, \tag{8}$$

$$\Big\{\widehat{T}_{mi}(t, \nu, h)\Big\}_{i=\overline{1,n_m},\ m=\overline{1,p}} \tag{9}$$

розв'язків рівняння (6), що задовольняють відповідно такі початкові та багатоточкові умови

$$\frac{d^{k-1} T_j}{dt^{k-1}}(t_1^*,\ \nu) = \delta_{kj}, \quad k, j = \overline{1, n}, \tag{10}$$

$$\frac{d^{j-1} \widetilde{T}_{mi}}{dt^{j-1}}(t_k^*,\ \nu) = \delta_{km}\delta_{ij}, \quad i = \overline{1, n_m},\ \ j = \overline{1, n_k},\ \ k, m = \overline{1, p}\,, \tag{11}$$

$$\widehat{T}_{mi}(t_k^* + \xi_{k,j-1} h, \nu, h) = \delta_{km}\delta_{ij},\ \ i = \overline{1, n_m},\ \ j = \overline{1, n_k},\ \ k, m = \overline{1, p}\,, \tag{12}$$

де δ_{kj} – символ Кронекера.

Система (7) – це нормальна фундаментальна система розв'язків рівняння (6), вона існує для довільного $\nu \in \mathbb{C}^s$ і визначається однозначно.

Стосовно систем (8) і (9) можуть виконуватись такі випадки:

а) системи не існують для жодного значення $\nu \in \mathbb{C}^s$ та жодної пари $(\nu, h) \in \mathbb{C}^s \times \mathbb{R}_+$;

б) системи існують для усіх або деяких значень $\nu \in \mathbb{C}^s$ та для усіх або для деяких пар $(\nu,\, h) \in \mathbb{C}^s \times \mathbb{R}_+$ відповідно.

Надалі випадок а) виключаємо з розгляду або, іншими словами, робимо припущення про невиродженість задач (1), (4) та (1), (5).

Лема 1. *Для існування систем* (9) *та* (8) *необхідно і достатньо, щоб* $\widehat{\Delta}(\nu, h) \neq 0$ *і* $\widetilde{\Delta}(\nu) \neq 0$ *відповідно, де* $\widehat{\Delta}(\nu, h)$ *– визначник матриці,* j*-рядком* ($j = \overline{1, n}$) *якої є значення* $T_j(t, \nu)$ *у вузлах* (3),

$$\widetilde{\Delta}(\nu) = \begin{vmatrix} T_1(t_1^*,\nu) & T_1'(t_1^*,\nu) & \ldots & T_1^{(n_1-1)}(t_1^*,\nu) & T_1(t_2^*,\nu) & \ldots & T_1^{(n_p-1)}(t_p^*,\nu) \\ T_2(t_1^*,\nu) & T_2'(t_1^*,\nu) & \ldots & T_2^{(n_1-1)}(t_1^*,\nu) & T_2(t_2^*,\nu) & \ldots & T_2^{(n_p-1)}(t_p^*,\nu) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ T_n(t_1^*,\nu) & T_n'(t_1^*,\nu) & \ldots & T_n^{(n_1-1)}(t_1^*,\nu) & T_n(t_2^*,\nu) & \ldots & T_n^{(n_p-1)}(t_p^*,\nu) \end{vmatrix}.$$

Доведення. Необхідність. Подамо елементи системи (9) у вигляді лінійної комбінації елементів нормальної фундаментальної системи розв'язків рівняння (6)

$$\widehat{T}_{mk}(t,\, \nu,\, h) = \sum_{i=1}^{n} c_{mki}(\nu,\, h)\, T_i(t,\, \nu), \quad k = \overline{1, n_m}, \;\; m = \overline{1, p}\,, \tag{13}$$

де $c_{mki}(\nu, h)$ – невідомі функції, залежні від ν та параметра h.

Співвідношення (13) запишемо у вигляді матричного рівняння

$$\widehat{T}(t, \nu, h) = C(\nu, h) T(t, \nu), \tag{14}$$

в якому

$$\widehat{T}(t,\, \nu,\, h) = \begin{pmatrix} \widehat{T}_{11}(t,\, \nu,\, h) \\ \widehat{T}_{12}(t,\, \nu,\, h) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \widehat{T}_{1n_1}(t,\, \nu,\, h) \\ \widehat{T}_{21}(t,\, \nu,\, h) \\ \widehat{T}_{22}(t,\, \nu,\, h) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \widehat{T}_{2n_2}(t,\, \nu,\, h) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \widehat{T}_{p1}(t,\, \nu,\, h) \\ \widehat{T}_{p2}(t,\, \nu,\, h) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \widehat{T}_{pn_p}(t,\, \nu,\, h) \end{pmatrix}, \quad T(t, \nu) = \begin{pmatrix} T_1(t,\nu) \\ T_2(t,\nu) \\ \cdots\cdots \\ T_n(t,\nu) \end{pmatrix},$$

$$C(\nu, h) = \begin{pmatrix} C_1(\nu, h) \\ C_2(\nu, h) \\ \cdots\cdots \\ C_p(\nu, h) \end{pmatrix}, \;\; C_m(\nu, h) = \|c_{mki}\|\,, \;\; k = \overline{1, n_m}, \; m = \overline{1, p}, \; i = \overline{1, n}.$$

Підставляючи в (13) чи (14) послідовно кожен із n вузлів (3) і використовуючи умови (12), одержимо матричне рівняння

$$E_n = C(\nu, h)\,\overset{\circ}{T}(\nu,\, h), \tag{15}$$

де $\overset{\circ}{T}(\nu,\, h)$ – матриця порядку n, j-рядком ($j = \overline{1, n}$) якої є значення $T_j(t, \nu)$ у вузлах (3). Рівняння (15) розв'язне, якщо $\det \overset{\circ}{T}(\nu,\, h) \equiv \widehat{\Delta}(\nu, h) \neq 0$. За виконання цієї умови знаходимо

$$C(\nu, h) = \overset{\circ}{T}{}^{-1}(\nu,\, h) = \frac{1}{\widehat{\Delta}(\nu, h)}\,\overset{\circ}{T}{}^{\vee}(\nu,\, h),$$

де $\overset{\circ}{T}{}^{\vee}(\nu,\, h)$ – приєднана матриця для $\overset{\circ}{T}(\nu,\, h)$.

З рівняння (15) отримуємо

$$\widehat{T}(t, \nu, h) = \frac{1}{\widehat{\Delta}(\nu, h)}\,\overset{\circ}{T}{}^{\vee}(\nu,\, h) T(t, \nu). \tag{16}$$

Якщо тепер аналогічно шукати елементи системи (8) у вигляді лінійної комбінації нормальної фундаментальної системи розв'язків (7), тобто

$$\widetilde{T}_{mk}(t, \nu) = \sum_{i=1}^{n} d_{mki}(\nu) T_i(t, \nu), \quad k = \overline{1, n_m}, \quad m = \overline{1, p}\,, \tag{17}$$

де $d_{mki}(\nu)$ – невідомі функції, то, використовуючи умови (11), одержимо матричне рівняння

$$E_n = \begin{pmatrix} D_1(\nu) \\ D_2(\nu) \\ \cdots\cdots \\ D_p(\nu) \end{pmatrix} \overline{T}, \tag{18}$$

в якому $D_m(\nu) = \|d_{mki}(\nu)\|\,$, $k = \overline{1, n_m}\,$, $m = \overline{1, p}\,$, $i = \overline{1, n}\,$, $\overline{T}$ – матриця порядку n, j-рядком ($j = \overline{1, n}$) якої є $T_j(t_1^*, \nu)$, $T_j'(t_1^*, \nu)$, $\ldots$, $T_j^{(n_1-1)}(t_1^*, \nu)$, $T_j(t_2^*, \nu)$, $T_j'(t_2^*, \nu)$, $\ldots$, $T_j^{(n_2-1)}(t_2^*, \nu)$, $\ldots$, $T_j(t_p^*, \nu)$, $T_j'(t_p^*, \nu)$, $\ldots$, $T_j^{(n_p-1)}(t_p^*, \nu)$.

Матричне рівняння (18) однозначно розв'язне, якщо $\det \overline{T} \equiv \widetilde{\Delta}(\nu) \neq 0$.

Достатність. Припустимо, що $\widehat{\Delta}(\nu, h) \neq 0$ і $\widetilde{\Delta}(\nu) \neq 0$ відповідно. Побудуємо системи (8) та (9) за формулами (16) та (17), в яких $d_{mki}(\nu)$ – розв'язки матричного рівняння (18). Тоді елементи так побудованих систем є розв'язками звичайного диференціального рівняння (6) і задовольнятимуть умови (12) та (11) відповідно. □

Зауваження 1. Системи (8) та (9) є системами лінійно незалежних розв'язків рівняння (6), якщо $\widehat{\Delta}(\nu, h) \neq 0$ і $\widetilde{\Delta}(\nu) \neq 0$ відповідно.

Лема 2. *Для малих значень h виконується співвідношення*

$$\widehat{\Delta}(\nu,\, h) = h^{\theta} \prod_{m=1}^{p} \left(\prod_{k=1}^{n_m-1} \frac{\xi_{m,\,k}^{k}}{k!} \right) \widetilde{\Delta}(\nu) + o(h^{\theta}), \tag{19}$$

де $\theta = \frac{1}{2}\left[n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_p^2 - n\right]$, $o(h^\theta)$ *– нескінченно мала величина порівняно з* h^θ *при* $h \to 0$.

Доведення. Розвинемо функції

$$T_j(t_k^* + \xi_{k,1}h, \nu),\ T_j(t_k^* + \xi_{k,2}h, \nu), \ldots, T_j(t_k^* + \xi_{k,n_k-1}h, \nu)$$

в ряди Тейлора в околі точок (t_k^*, ν), $j = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,p}$. Виконуючи елементарні перетворення у визначнику $\widehat{\Delta}(\nu, h)$ над стовпцями, одержимо визначник матриці, j-рядком ($j = \overline{1,n}$) якої є

$$T_j(t_1^*, \nu),\ \xi_{1,1}hT_j'(t_1^*, \nu),\ \ldots, \frac{(\xi_{1,n_1-1}h)^{n_1-1}}{(n_1-1)!}T_{_j}^{(n_1-1)}(t_1^*, \nu),$$

$$T_j(t_2^*, \nu),\ \xi_{2,1}hT_j'(t_2^*, \nu), \ldots, \frac{(\xi_{2,n_2-1}h)^{n_2-1}}{(n_2-1)!}T_{_j}^{(n_2-1)}(t_2^*, \nu), \ldots,$$

$$T_j(t_p^*),\ \xi_{p,1}hT_j'(t_p^*), \ldots, \frac{(\xi_{p,n_p-1}h)^{n_p-1}}{(n_p-1)!}T_{_j}^{(n_p-1)}(t_p^*, \nu).$$

Звідси одержуємо рівність (19), в якій

$$\Theta = 1 + 2 + \ldots + n_1 - 1 + 1 + 2 + \ldots + n_2 - 1 + \ldots + 1 + 2 + \ldots + n_p - 1 =$$
$$= \frac{1 + n_1 - 1}{2}(n_1 - 1) + \frac{1 + n_2 - 1}{2}(n_2 - 1) + \ldots + \frac{1 + n_p - 1}{2}(n_p - 1) =$$
$$= \frac{1}{2}\left[n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_p^2 - n\right].$$

□

Лема 3. *Нехай* $\widehat{\Delta}(\nu, h) \neq 0$ *і* $\widetilde{\Delta}(\nu) \neq 0$, *тоді між елементами систем* (8) *та* (9) *виконуються співвідношення*

$$\widetilde{T}_{mi}(t,\, \nu) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_k} \widetilde{T}_{mi}(t_k^* + \xi_{k,\,j-1}h,\, \nu)\widehat{T}_{kj}(t,\, \nu,\, h),\ \ i = \overline{1, n_m}\,,\ m = \overline{1,p}\,. \tag{20}$$

Доведення. Відповідно до зауваження 1 зобразимо елементи системи (8) у вигляді лінійної комбінації елементів системи (9)

$$\widetilde{T}_{mi}(t,\, \nu) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_k} g_{kjmi}(\nu,\, h)\widehat{T}_{kj}(t,\, \nu,\, h), \quad i = \overline{1, n_m},\ m = \overline{1,p}\,, \tag{21}$$

де $g_{kjmi}(\nu,\, h)$ – невідомі функції, залежні від ν і параметра h.

Приймаючи в (21) замість t послідовно кожен із вузлів (3) і використовуючи умови (12), одержимо співвідношення (20). □

Розглянемо тепер вирази $\widetilde{T}_{mi}(t_k^* + \xi_{k,\,j-1}h,\, \nu)$. Розвиваючи ці вирази в ряди Тейлора в околі точки $(t_k^*,\, \nu)$ і використовуючи умови (11), маємо

$$\widetilde{T}_{mi}(t_k^*,\, \nu) = \delta_{mk}\delta_{i1},$$

$$\widetilde{T}_{mi}(t_k^* + \xi_{k,\,j-1}h,\, \nu) = \frac{(\xi_{k,\,j-1}h)^{i-1}}{(i-1)!}\delta_{mk}\delta_{ij} + o(h^{n_k-1}), \tag{22}$$
$$i = \overline{1, n_m},\ j = \overline{2, n_k},\ m, k = \overline{1, p}.$$

Співвідношення (20) з урахуванням (22) у матричному вигляді можна зобразити так:

$$\widetilde{T}(t,\, \nu) = \left(\Lambda(h) + \widetilde{\Lambda}(h)\right)\widehat{T}(t,\, \nu,\, h)\,, \tag{23}$$

де

$$\widetilde{T}(t,\, \nu) = \begin{pmatrix} \widetilde{T}_{11}(t,\, \nu) \\ \widetilde{T}_{12}(t,\, \nu) \\ \cdots\cdots \\ \widetilde{T}_{1n_1}(t,\, \nu) \\ \widetilde{T}_{21}(t,\, \nu) \\ \widetilde{T}_{22}(t,\, \nu) \\ \cdots\cdots \\ \widetilde{T}_{2n_2}(t,\, \nu) \\ \cdots\cdots \\ \widetilde{T}_{p1}(t,\, \nu) \\ \widetilde{T}_{p2}(t,\, \nu) \\ \cdots\cdots \\ \widetilde{T}_{pn_p}(t,\, \nu) \end{pmatrix},$$

$$\Lambda(h) = \begin{pmatrix} \Lambda_1(h) & O & \dots & O \\ O & \Lambda_2(h) & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & \Lambda_p(h) \end{pmatrix}, \tag{24}$$

$$\Lambda_k(h) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \xi_{k,\,1}h & \dots & \xi_{k,\,n_k-1}h \\ 0 & \frac{(\xi_{k,\,1}h)^2}{2!} & \dots & \frac{(\xi_{k,\,n_k-1}h)^2}{2!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{(\xi_{k,\,1}h)^{n_k-1}}{(n_k-1)!} & \dots & \frac{(\xi_{k,\,n_k-1}h)^{n_k-1}}{(n_k-1)!} \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1, p},$$

O – матриці з нульовими елементами відповідних розмірів, $\widetilde{\Lambda}(h)$ – матриця, в якої рядки з номерами $1, n_1+1, n_1+n_2+1, \ldots, n_1+n_2+\ldots+n_{p-1}+1$ складаються лише з нулів, а рядки з 2-го до n_1 містять величини $o(h^{n_1-1})$, з n_1+2-го до n_1+n_2 містять величини $o(h^{n_2-1})$ і т.д., останні n_p-1 рядків містять величини $o(h^{n_p-1})$.

Лема 4. *Правильною є така рівність*

$$\lim_{h\to 0}\Lambda(h)\widehat{T}(t,\nu,h) = \widetilde{T}(t,\nu). \tag{25}$$

Доведення. З урахуванням (16) рівність (23) можна записати у вигляді

$$\widetilde{T}(t,\nu) = \frac{1}{\widehat{\Delta}(\nu,h)}\left(\Lambda(h) + \widetilde{\Lambda}(h)\right)\overset{\circ}{T}{}^{\vee}(\nu,\, h)T(t,\nu).$$

Обчислення засвідчують, що матриця $\widetilde{\Lambda}(h)\overset{\circ}{T}{}^{\vee}(\nu,\,h)$ складається з нульових елементів або нескінченно малих величин вищого, ніж Θ, порядку. Звідси згідно з лемою 2 маємо

$$\lim_{h\to 0}\frac{\widetilde{\Lambda}(h)\overset{\circ}{T}{}^{\vee}(\nu,\,h)}{\widehat{\Delta}(\nu,h)}=0,$$

тому виконується рівність (25). □

Теорема 1. *Нехай* $\widehat{\Delta}(\nu,h)\not\equiv 0$ *і* $\widetilde{\Delta}(\nu)\not\equiv 0$. *Тоді формальні розв'язки задач* (1), (5) *та* (1), (4) *можна визначити за формулами*

$$U(t,\,x)=\sum_{m=1}^{p}\sum_{i=1}^{n_m}\psi_{m,\,i-1}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\widetilde{T}_{mi}(t,\,\nu)\exp[\nu\cdot x]\right\}\Big|_{\nu=\mathbf{0}}, \tag{26}$$

$$U(t,\,x,\,\varphi_{10},\,\varphi_{11},\ldots,\varphi_{p,\,n_p-1})=$$
$$=\sum_{m=1}^{p}\sum_{i=1}^{n_m}\varphi_{m,\,i-1}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\widehat{T}_{mi}(t,\,\nu,\,h)\exp[\nu\cdot x]\right\}\Big|_{\nu=\mathbf{0}}, \tag{27}$$

де $\mathbf{0}=(\overbrace{0,\,0,\ldots,0}^{s})$, $\nu\cdot x=\sum\limits_{i=1}^{s}\nu_i x_i$, *причому у розв'язку задачі* (1), (4) *враховано його залежність від* $\varphi_{10}(x),\ \varphi_{11}(x),\ \ldots,\ \varphi_{p,n_p-1}(x)$.

Доведення. Покажемо спочатку, що функція (26) формально задовольняє рівняння (1)

$$L_n\left(t,\,\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)U(t,\,x)=$$
$$=L_n\left(t,\,\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\sum_{m=1}^{p}\sum_{i=1}^{n_m}\psi_{m,\,i-1}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\widetilde{T}_{mi}(t,\,\nu)\exp[\nu\cdot x]\right\}\Big|_{\nu=\mathbf{0}}\right]=$$
$$=\sum_{m=1}^{p}\sum_{i=1}^{n_m}\psi_{m,\,i-1}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left[L_n\left(t,\,\frac{\partial}{\partial t},\,\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{\widetilde{T}_{mi}(t,\,\nu)\exp[\nu\cdot x]\right\}\right]\Big|_{\nu=\mathbf{0}}=$$
$$=\sum_{m=1}^{p}\sum_{i=1}^{n_m}\psi_{m,\,i-1}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\exp[\nu\cdot x]L_n\left(t,\,\frac{d}{dt},\,\nu\right)\widetilde{T}_{mi}(t,\,\nu)\right\}\Big|_{\nu=\mathbf{0}}=0.$$

Крім того, функція (26) задовольняє умови (5). Справді, для $j=\overline{1,n_k}$, $k=\overline{1,p}$ маємо

$$\frac{\partial^{j-1}U}{\partial t^{j-1}}(t_k^*,\,x)=\sum_{m=1}^{p}\sum_{i=1}^{n_m}\psi_{m,\,i-1}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\exp[\nu\cdot x]\frac{d^{j-1}\widetilde{T}_{mi}}{dt^{j-1}}(t_k^*,\,\nu)\right\}\Big|_{\nu=\mathbf{0}}=$$
$$=\sum_{m=1}^{p}\sum_{i=1}^{n_m}\psi_{m,\,i-1}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\exp[\nu\cdot x]\delta_{km}\delta_{ij}\right\}\Big|_{\nu=\mathbf{0}}=$$

$$= \psi_{k,\,j-1}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\Big\{\exp[\nu\cdot x]\Big\}\Big|_{\nu=\mathbf{0}} = \psi_{k,\,j-1}(x)\Big\{\exp[\nu\cdot x]\Big\}\Big|_{\nu=\mathbf{0}} = \psi_{k,\,j-1}(x).$$

Цілком аналогічно доводиться, що формула (27) формально визначає розв'язок задачі (1), (4). □

Зауважимо, що у формулах (26) і (27) диференціальні вирази $\psi_{m,\,i-1}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)$ та $\varphi_{m,\,i-1}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)$ утворюються заміною x на $\frac{\partial}{\partial\nu}$ в аналітичних функціях $\psi_{m,\,i-1}(x)$ та $\varphi_{m,\,i-1}(x)$. Крім того, можна виділити певні класи аналітичних функцій, в яких зазначені формальні розв'язки задач є фактичними (див., наприклад, [10]).

Розглянемо матрицю, яка утворюється домноженням елементів першого рядка матриці (24) на $\psi_{10}(x)$, елементів другого рядка матриці (24) на $\psi_{11}(x)$ і т.д., елементів n_1-го рядка матриці (24) на $\psi_{1,\,n_1-1}(x)$ і т.д., та елементів останнього рядка матриці (24) на $\psi_{p,\,n_p-1}(x)$. Рядки утвореної матриці позначимо через $\lambda_1(h),\ \lambda_2(h), \ldots, \lambda_n(h)$.

Теорема 2. *Формальний розв'язок задачі* (1), (5) *можна одержати на підставі розв'язку* (27) *задачі* (1), (4) *за допомогою такої формули граничного переходу:*

$$U(t,\,x) = \lim_{h\to 0}\sum_{k=1}^{n} U\big(t,\,x,\,\lambda_k(h)\big) \tag{28}$$

або

$$U(t,\,x) = \lim_{h\to 0} U\Big(t,\,x,\,\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(h)\Big).$$

Доведення. Обчислимо границю при $h\to 0$ першого доданка у рівності (28)

$$\lim_{h\to 0} U(t,\,x,\,\lambda_1(h)) = \lim_{h\to 0} U(t,\,x,\,\overbrace{\psi_{10},\,\psi_{10},\ldots,\psi_{10}}^{n_1},\,0,\,0,\ldots,0) =$$

$$= \lim_{h\to 0}\sum_{i=1}^{n_1}\psi_{10}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\Big\{\widehat{T}_{1i}(t,\,\nu,\,h)\exp[\nu\cdot x]\Big\}\Big|_{\nu=\mathbf{0}} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\psi_{10}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\sum_{i=1}^{n_1}\widehat{T}_{1i}(t,\,\nu,\,h)\exp[\nu\cdot x]\right\}\Bigg|_{\nu=\mathbf{0}}.$$

З першого рівняння матричної рівності (25) одержуємо

$$\lim_{h\to 0}\sum_{i=1}^{n_1}\widehat{T}_{1i}(t,\,\nu,\,h) = \widetilde{T}_{11}(t,\,\nu).$$

Отже, маємо

$$\lim_{h\to 0} U(t,\,x,\,\lambda_1(h)) = \psi_{10}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\Big\{\widetilde{T}_{11}(t,\,\nu)\exp[\nu\cdot x]\Big\}\Big|_{\nu=\mathbf{0}}.$$

Обчислюючи аналогічно решту $n-1$ границь і використовуючи відповідні рівняння матричної рівності (25), одержимо формулу (26) розв'язку задачі (1), (4). $\square$

У запропонованому підході за нерухомий вузол було прийнято крайній лівий вузол $t_1^* = t_1$. Якщо ж вузол t_1 є рухомим, то сукупність вузлів $t_1,\, t_2, \ldots, t_n$ можна подати у вигляді, аналогічному до (3)

$$
\begin{gathered}
t_1^* - \xi_{0,\,\widetilde{n}_0} h,\ t_1^* - \xi_{0,\,\widetilde{n}_0-1} h, \ldots, t_1^* - \xi_{0,\,1} h,\\
t_1^* + \xi_{1,\,0} h,\ t_1^* + \xi_{1,\,1} h,\ t_1^* + \xi_{1,\,2} h, \ldots, t_1^* + \xi_{1,\,\widetilde{n}_1-1} h,\\
t_2^* + \xi_{2,\,0} h,\ t_2^* + \xi_{2,\,1} h,\ t_2^* + \xi_{2,\,2} h, \ldots,\ t_2^* + \xi_{2,\,n_2-1} h,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
t_p^* + \xi_{p,\,0} h,\ \ t_p^* + \xi_{p,\,1} h,\ \ t_p^* + \xi_{p,\,2} h,\ \ldots,\ \ t_p^* + \xi_{p,\,n_p-1} h,
\end{gathered}
\tag{29}
$$

де $\widetilde{n}_0, \widetilde{n}_1, n_2, \ldots, n_p \in \mathbb{N}$, $\widetilde{n}_0 + \widetilde{n}_1 = n_1$, причому $n_1 + n_2 + \ldots + n_p = n$, $\xi_{0,\,\widetilde{n}_0}, \xi_{0,\,\widetilde{n}_0-1}, \ldots, \xi_{p,\,n_p-1}$ – певні додатні числа, $\xi_{1,\,0} = \xi_{2,\,0} = \ldots = \xi_{p,\,0} = 0$, $h = 1$.

Розглянемо багатоточкові умови у простих вузлах (29):

$$
\begin{gathered}
U(t_1^* - \xi_{0,\,\widetilde{n}_0-k+1} h,\, x) = \varphi_{0k}(x), \quad k = \overline{1, \widetilde{n}_0},\\
U(t_1^* + \xi_{1,\,j} h,\, x) = \varphi_{1j}(x), \quad j = \overline{0, \widetilde{n}_1 - 1},\\
U(t_k^* + \xi_{k,\,j} h,\, x) = \varphi_{kj}(x), \quad k = \overline{2, p},\ j = \overline{0, n_k - 1},
\end{gathered}
\tag{30}
$$

а також такі багатоточкові умови у кратних вузлах

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^{\widetilde{n}_0-k+1} U}{\partial t^{\widetilde{n}_0-k+1}}(t_1^*,\, x) = \psi_{0k}(x), \quad k = \overline{1, \widetilde{n}_0},\\
U(t_1^*,\, x) = \psi_{10}(x),\\
\frac{\partial^{\widetilde{n}_0+j} U}{\partial t^{\widetilde{n}_0+j}}(t_1^*,\, x) = \psi_{1j}(x), \quad j = \overline{1, \widetilde{n}_1 - 1},\\
\frac{\partial^{j} U}{\partial t^{j}}(t_k^*,\, x) = \psi_{kj}(x), \quad j = \overline{0, n_k - 1},\ k = \overline{2, p}\,.
\end{gathered}
\tag{31}
$$

Нехай $U(t, x, \varphi_{0,1}, \varphi_{0,2},\ \ldots,\ \varphi_{0,\widetilde{n}_0}, \varphi_{1,0},\ \ldots,\ \varphi_{1,\widetilde{n}_1-1}, \varphi_{2,0},\ \ldots,\ \varphi_{2,n_2-1},\ \ldots,\ \varphi_{p,0},\ \ldots,\ \varphi_{p,n_p-1})$ – розв'язок задачі (1), (30). Тоді розв'язок задачі (1), (31) можна одержати за розв'язком задачі (1), (30) за формулою (28), де $\lambda_k(h) - k$-ий рядок ($k = \overline{1, n}$) матриці, яка утворюється як і вище добутками функцій $\psi_{0,1},\, \psi_{0,2},\, \ldots,\, \psi_{0,\,\widetilde{n}_0},\, \psi_{1,0},\, \ldots, \psi_{1,\,\widetilde{n}_1-1},\, \psi_{2,0}, \ldots,\, \psi_{p,\,n_p-1}$ на відповідні рядки матриці $\Lambda(h)$, в якій $\Lambda_2, \Lambda_3, \ldots, \Lambda_p$ – ті самі блоки, що і в матриці (24), а Λ_1 у випадку $\widetilde{n}_1 > 1$ є матрицею вигляду

$$
\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \ldots & \Lambda_{1,\widetilde{n}_0} & \Lambda_{1,\widetilde{n}_0+1} & \Lambda_{1,\widetilde{n}_0+2} & \ldots & \Lambda_{1,\widetilde{n}_0+\widetilde{n}_1} \end{pmatrix},
$$

в якій

$$\Lambda_{11} = \begin{pmatrix} \frac{(-\xi_{0,\,\widetilde{n}_0}h)^{\widetilde{n}_0}}{\widetilde{n}_0!} \\ \cdots\cdots \\ \frac{(-\xi_{0,\,\widetilde{n}_0}h)^2}{2!} \\ -\xi_{0,\,\widetilde{n}_0}h \\ 1 \\ \frac{(-\xi_{0,\,\widetilde{n}_0}h)^{\widetilde{n}_0+1}}{(\widetilde{n}_0+1)!} \\ \cdots\cdots \\ \frac{(-\xi_{0,\,\widetilde{n}_0}h)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \end{pmatrix}, \ \Lambda_{12} = \begin{pmatrix} \frac{(-\xi_{0,\,\widetilde{n}_0-1}h)^{\widetilde{n}_0}}{\widetilde{n}_0!} \\ \cdots\cdots \\ \frac{(-\xi_{0,\,\widetilde{n}_0-1}h)^2}{2!} \\ -\xi_{0,\,\widetilde{n}_0-1}h \\ 1 \\ \frac{(-\xi_{0,\,\widetilde{n}_0-1}h)^{\widetilde{n}_0+1}}{(\widetilde{n}_0+1)!} \\ \cdots\cdots \\ \frac{(-\xi_{0,\,\widetilde{n}_0-1}h)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \end{pmatrix}, \ldots,$$

$$\Lambda_{1,\,\widetilde{n}_0} = \begin{pmatrix} \frac{(-\xi_{0,\,1}h)^{\widetilde{n}_0}}{\widetilde{n}_0!} \\ \cdots\cdots \\ \frac{(-\xi_{0,\,1}h)^2}{2!} \\ -\xi_{0,\,1}h \\ 1 \\ \frac{(-\xi_{0,\,1}h)^{\widetilde{n}_0+1}}{(\widetilde{n}_0+1)!} \\ \cdots\cdots \\ \frac{(-\xi_{0,\,1}h)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \end{pmatrix}, \qquad \Lambda_{1,\,\widetilde{n}_0+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_{1,\,\widetilde{n}_0+2} = \begin{pmatrix} \frac{(-\xi_{1,1}h)^{\widetilde{n}_0}}{\widetilde{n}_0!} \\ \cdots\cdots \\ \frac{(-\xi_{1,1}h)^2}{2!} \\ -\xi_{1,1}h \\ 1 \\ \frac{(-\xi_{1,1}h)^{\widetilde{n}_0+1}}{(\widetilde{n}_0+1)!} \\ \cdots\cdots \\ \frac{(-\xi_{1,1}h)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \end{pmatrix}, \ldots, \Lambda_{1,\,\widetilde{n}_0+\widetilde{n}_1} = \begin{pmatrix} \frac{(-\xi_{1,\,\widetilde{n}_1-1}h)^{\widetilde{n}_0}}{\widetilde{n}_0!} \\ \cdots\cdots \\ \frac{(-\xi_{1,\,\widetilde{n}_1-1}h)^2}{2!} \\ -\xi_{1,\,\widetilde{n}_1-1}h \\ 1 \\ \frac{(-\xi_{1,\,\widetilde{n}_1-1}h)^{\widetilde{n}_0+1}}{(\widetilde{n}_0+1)!} \\ \cdots\cdots \\ \frac{(-\xi_{1,\,\widetilde{n}_1-1}h)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \end{pmatrix},$$

а у випадку $\widetilde{n}_1 = 1$ матриця Λ_1 є такою:

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \frac{(-\xi_{0,\,\widetilde{n}_0}h)^{\widetilde{n}_0}}{\widetilde{n}_0!} & \frac{(-\xi_{0,\,\widetilde{n}_0-1}h)^{\widetilde{n}_0}}{\widetilde{n}_0!} & \ldots & \frac{(-\xi_{0,\,1}h)^{\widetilde{n}_0}}{\widetilde{n}_0!} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{(-\xi_{0,\,\widetilde{n}_0}h)^1}{1!} & \frac{(-\xi_{0,\,\widetilde{n}_0-1}h)^1}{1!} & \ldots & \frac{(-\xi_{0,\,1}h)^1}{1!} & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Зауваження 2. Якщо в задачі (1), (4) $n > 2$ і $p = 2$, то зазначена у теоремі 2 формула граничного переходу дає змогу одержати розв'язок задачі типу Діріхле у шарі $(t_1^*,\, t_2^*) \times \mathbb{R}^s$.

Приклад 2. Розглянемо невироджену задачу (1), (2) у випадку $n = 4$

$$L_4\left(t,\, \frac{\partial}{\partial t},\, \frac{\partial}{\partial x}\right) U(t,\, x) = 0, \quad t \in (t_1,\, t_4),\ x \in \mathbb{R}^s, \tag{32}$$

$$U(t_k,\, x) = \varphi_k(x), \quad k = 1, 2, 3, 4, \tag{33}$$

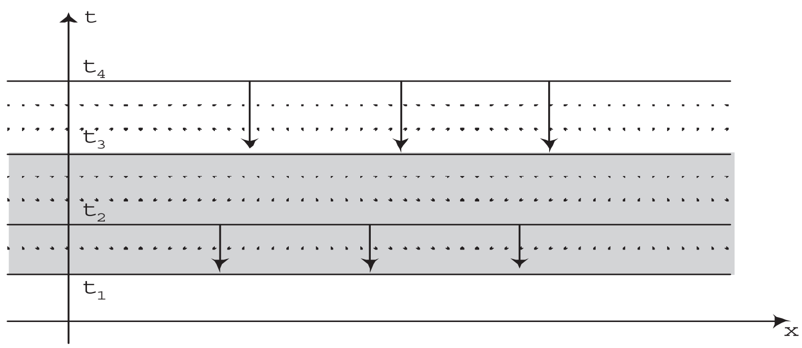
де $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$.

Нехай $U(t,\, x,\, \varphi_1,\, \varphi_2,\, \varphi_3,\, \varphi_4)$ – розв'язок задачі (32), (33). Запишемо формулу граничного переходу від цього розв'язку до розв'язку задачі типу Діріхле для рівняння (32). Розглянемо лише одну з можливих задач типу Діріхле в області $(t_1,\, t_3) \times \mathbb{R}^s$ для рівняння (32) з умовами

$$U(t_1,\, x) = \psi_1(x),\ \frac{\partial U}{\partial t}(t_1,\, x) = \psi_2(x),\, U(t_3,\, x) = \psi_3(x),\ \frac{\partial U}{\partial t}(t_3,\, x) = \psi_4(x). \tag{34}$$

Для виконання граничного переходу від розв'язку задачі (32), (33) до розв'язку задачі (32), (34) візьмемо t_1 і t_3 за нерухомі вузли, а t_2, t_4 – за рухомі. Тоді згідно з прикладом 1 $p = 2$, $n_1 = 2$, $n_2 = 2$. Вузли t_1, t_2, t_3, t_4 запишемо у вигляді t_1, $t_1 + \xi_{1,1}h$, t_3, $t_3 + \xi_{2,1}h$, де $t_2 - t_1 = \xi_{1,1}$, $t_4 - t_3 = \xi_{2,1}$, $h = 1$. Матриця $\Lambda(h)$ та схема граничного переходу матимуть вигляд

$$\Lambda(h) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{1,1}h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_{2,1}h \end{pmatrix}.$$



Розв'язок задачі (32), (34) згідно з теоремою 2 можна знайти за розв'язком задачі (32), (33), використовуючи таку формулу граничного переходу:

$$U(t,\, x) = \lim_{h \to 0} U(t,\, x,\, \psi_1,\, \psi_1 + \xi_{1,1}h\psi_2,\, \psi_3,\, \psi_3 + \xi_{2,1}h\psi_4).$$

3. Висновки. Отримані у цій праці результати дають змогу на підставі розв'язку диференціального рівняння з частинними похідними скінченного порядку за часом та нескінченного порядку включно за просторовими змінними з залежними від часу коефіцієнтами, що задовольняє локальні багатоточкові за часом умови (з простими вузлами інтерполяції), будувати розв'язок задачі для цього самого рівняння з багатоточковими умовами в меншій кількості кратних вузлів у результаті зазначеного граничного переходу при рівномірному прямуванні відстані між вузлами інтерполяції до нуля.

1. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными.– К., 1984.

2. *Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними.– К., 2002.

3. *Борок В.М.* Классы единственности решения краевой задачи в бесконечном слое для систем линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Мат. сб.– 1969.– **79**, №2.– С. 293-304.

4. *Віленць І.Л.* Класи єдиності розв'язку загальної крайової задачі в шарі для систем лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних // ДАН УРСР.– Сер. А.– 1974.– №3.– С. 195-197.

5. *Макаров А.А.* О необходимых и достаточных условиях разрешимости краевой задачи в слое для систем дифференциальных уравнений с частными производными // Дифференциальн уравнения.– 1981.– **17**, №2.– С. 320-324.

6. *Каленюк П.И., Баранецкий Я.Е., Нитребич З.Н.* Обобщенный метод разделения переменных.– К., 1993.

7. *Нитребич З.М.* Про граничний перехід від розв'язку багатоточкової задачі до розв'язку задачі Коші // Вісн. Львів. ун-ту.– Сер. мех.-мат.– 1999.– Вип. 54.– С.125-131.

8. *Нитребич З.М.* Граничний перехід від розв'язку багатоточкової задачі до розв'язку задачі Коші для неоднорідного рівняння із частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля.– 2000.– **43**, №3.– С.64-70.

9. *Каленюк П.І., Нитребич З.М.* Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально–символьний метод.– Львів, 2002.

10. *Нитребич З.М.* Крайова задача в безмежній смузі // Мат. методи та фіз.-мех. поля.– 1994.– №37.– С.16-21.

THE LIMIT PASSAGE FROM THE SOLUTIONS OF A MULTIPOINT PROBLEM FOR A PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION TO THE SOLUTION OF A MULTIPOINT PROBLEM WITH SMALLER COUNT OF KNOTS

Zinoviy Nytrebych

Lviv Polytechnic National University,
Bandery Str., 12, 79013 Lviv, Ukraine

We propose the scheme of the limit passage to the which allows, by the solution of a partial differential equation of the n-th order in time and, generally, infinite order in spatial variables with dependent on time coefficients, with local multipoint conditions with respect to time, to construct a solution of the same equation with smaller than n count of multiple time knots as the distance between knots tends to zero. To construct the problem solutions, we make use of the differential-symbol method.

Key words: multipoint problems, limit passages, differential-symbol method.

Стаття надійшла до редколегії 14.04.2006

Прийнята до друку 02.11.2006

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2006. Вип.66. С.151–165 *Ser.Mech-Math.2006. Vol.66. P.151–165*

УДК 517.95

ВАГОВІ КЛАСИ КОРЕКТНОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ТИПУ КОЛИВАНЬ БАЛКИ В НЕОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ

Петро ПУКАЧ

Національний університет „Львівська політехніка“,
вул. С. Бандери, 12, 79013 Львів, Україна

Досліджено першу мішану задачу для слабко нелінійного рівняння п'ятого порядку в обмеженій за часовою та необмеженій за просторовими змінними області. Розглянуте рівняння узагальнює рівняння $u_{tt} + au_{txxxx} + bu_{xxxx} + |u_t|^{p-2}u_t = f$, $p > 2$, яке вивчають в теорії пружності. Отримано умови існування єдиного узагальненого розв'язку. Класи існування та єдиності — вагові соболєвські простори функцій.

Ключові слова: нелінійне рівняння коливань балки, метод Гальоркіна.

Досліджено першу мішану задачу для слабко нелінійного рівняння

$$u_{tt} + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} (-1)^{|\alpha|} D^{\beta}\left(a_{\alpha\beta}(x,t)D^{\alpha}u_t\right) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} (-1)^{|\alpha|} D^{\beta}\left(b_{\alpha\beta}(x,t)D^{\alpha}u\right) +$$
$$+ \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant 2} c_{\alpha}(x,t)D^{\alpha}u + g(x,u_t) = f(x,t), \qquad (1)$$

де $D^{\alpha} = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial {x_1}^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\partial {x_n}^{\alpha_n}}$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$, $\alpha_i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $i = 1, ..., n$, в необмеженій за просторовими змінними області. Рівняння та системи вигляду (1) вивчають у теорії пружності [1]. Рівняння (1) узагальнює модель коливання балки у середовищі з опором. Зокрема, у праці [1] досліджено існування слабких розв'язків мішаних задач в обмеженій області для деякої системи лінійних рівнянь з частинними похідними, одна з невідомих функцій у якій описує вертикальне зміщення балки.

Відповідне рівняння такої системи є частинним випадком рівняння вигляду (1) за умов $n = 1$, $a_{\alpha\beta} = 0$, $b_{\alpha\beta} = 0$, $0 \leqslant |\alpha| = |\beta| \leqslant 1$, $c_\alpha = 0$, $1 \leqslant |\alpha| \leqslant 2$, $g = 0$. Крайові умови різного вигляду описують різноманітні механічні моделі, які вивчають у теорії пружності. Задача динамічного в'язкопружного тертя зі зношуванням вперше розглянута в праці [2], в [3] досліджено динамічний контакт між балкою та рухомою поверхнею, термопружний контакт вивчено в [4].

Задачі для лінійних і нелінійних еволюційних рівнянь та систем з частинними похідними першого та другого порядку за часовою змінною у необмежених областях розглядали у багатьох працях (див., наприклад, [5–20]). Деякі результати існування єдиного розв'язку задач у цих працях отримані в припущенні певної якісної поведінки розв'язку, початкових даних та правої частини рівняння (системи) на нескінченності, інші результати – без таких припущень. У [21] вивчено мішану задачу для слабко нелінійної системи гіперболічних рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними. Праця [22] присвячена дослідженню першої мішаної задачі для слабко нелінійного гіперболічного рівняння другого порядку в необмеженій за просторовими змінними області.

У цій праці класи коректності розв'язку мішаної задачі є певними ваговими соболєвськими просторами функцій, які описують якісну поведінку розв'язку на нескінченності, яка залежить від правої частини рівняння та початкових даних задачі.

Формулювання задачі. Означення узагальненого розв'язку.

В області $Q_T = \Omega \times (0, T)$, де $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $0 < T < \infty$, розглядаємо для рівняння (1) мішану задачу з початковими умовами

$$u|_{t=0} = u_0(x), \tag{2}$$

$$u_t|_{t=0} = u_1(x) \tag{3}$$

та крайовими умовами

$$u|_{S_T} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{S_T} = 0, \tag{4}$$

$S_T = \partial\Omega \times (0, T)$ – бічна поверхня області Q_T, ν – одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні $\partial\Omega$.

Припускаємо, що Ω – необмежена область з межею $\partial\Omega$ класу C^1, $\Omega^R = \Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| < R\}$ – зв'язна множина для довільного $R > 1$ з регулярною за Кальдероном [23, с. 45] межею $\partial\Omega^R$. Зауважимо, зокрема, що опукла область Ω задовольняє усі зазначені умови [23, с.46, заув. 1.11]. Позначимо $Q_\tau = \Omega \times (0, \tau)$, $Q_\tau^R = \Omega^R \times (0, \tau)$ для довільних $\tau \in (0, T]$, $R > 1$.

Розглядаємо функцію ψ з такими властивостями:

(Ψ) функція $\psi \in C^2(\mathbb{R})$ – монотонна при $\xi \to +\infty$, $\psi : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $|\psi'(\xi)| \leqslant M_1\psi(\xi)$, $|\psi''(\xi)| \leqslant M_2\psi(\xi)$, де M_1, M_2 – додатні сталі.

Зауваження. Прикладами функції ψ можуть бути, зокрема, $\psi(\xi)=(1+\xi)^\alpha$, $\alpha = \text{const}$, $\psi(\xi)=e^{\beta\xi}$, $\beta = \text{const}$ тощо.

Використовуємо простори з ваговою функцією ψ

$$L^{r,\psi}(\Omega) = \Big\{u : \int\limits_\Omega |u|^r \psi(|x|) dx < +\infty\Big\}, \quad r \in (1, +\infty),$$

$$\|u\|_{L^{r,\psi}(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |u|^r \psi(|x|) dx \right)^{1/r},$$

$H_0^{2,\psi}(\Omega)$ – замикання простору нескінченно диференційовних в області $\overline{\Omega}$ функцій з компактним носієм за нормою $\|u\|_{H_0^{2,\psi}(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} \sum\limits_{|\alpha|\leqslant 2} |D^\alpha u|^2 \psi(|x|) dx \right)^{\frac{1}{2}}$, $H^{4,\psi}(\Omega)$ – замикання простору нескінченно диференційовних в області $\overline{\Omega}$ функцій за нормою $\|u\|_{H^{4,\psi}(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} \sum\limits_{|\alpha|\leqslant 4} |D^\alpha u|^2 \psi(|x|) dx \right)^{\frac{1}{2}}$. Позначимо далі $V = H_0^{2,\psi}(\Omega) \cap H^{4,\psi}(\Omega)$.

Стосовно коефіцієнтів, правої частини рівняння (1) та початкових даних припускаємо виконання таких умов.

A. Функції $a_{\alpha\beta}$, $a_{\alpha\beta,t}$ ($|\alpha| = |\beta| \leqslant 2$), $D^2 a_{\alpha\beta}(|\alpha| = |\beta| = 2)$, $D^1 a_{\alpha\beta}(|\alpha|=|\beta|=1)$ належать до простору $L^\infty(Q_T)$, причому

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(x,t)\xi_\alpha\xi_\beta \geq a_{0,2} \sum_{|\alpha|=2} |\xi_\alpha|^2$$

для довільних дійсних чисел $\xi_\alpha, |\alpha| = 2$, та для майже всіх $(x,t) \in Q_T$, де $a_{0,2} =$ const>0; $a_{\alpha\beta}(x,t) = a_{\beta\alpha}(x,t)$ для майже всіх $(x,t) \in Q_T$, $1 \leqslant |\alpha| = |\beta| \leqslant 2$.

B. Функції $b_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta,t}$ ($|\alpha| = |\beta| \leqslant 2$), $D^2 b_{\alpha\beta}$ ($|\alpha| = |\beta| = 2$), $D^1 b_{\alpha\beta}$ ($|\alpha| = |\beta| = 1$) належать до $L^\infty(Q_T)$, причому

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=2} b_{\alpha\beta}(x,t)\xi_\alpha\xi_\beta \geq b_{0,2} \sum_{|\alpha|=2} |\xi_\alpha|^2$$

для довільних дійсних чисел ξ_α, $|\alpha| = 2$, та для майже всіх $(x,t) \in Q_T$, де $b_{0,2} =$ const > 0; $b_{\alpha\beta}(x,t) = b_{\beta\alpha}(x,t)$ для майже всіх $(x,t) \in Q_T$, $1 \leqslant |\alpha| = |\beta| \leqslant 2$.

C. Функції c_α, $c_{\alpha,t}$ належать до $L^\infty(Q_T)$, $1 \leqslant |\alpha| \leqslant 2$.

G. Функція $g(x,\eta)$ – вимірна за x, неперервна за η, причому для довільних $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ та для майже всіх $x \in \Omega$: $(g(x,\xi) - g(x,\eta))(\xi - \eta) \geq g_0 |\xi - \eta|^p$, $|g(x,\eta)| \leq g_1 |\eta|^{p-1}$, де g_0, g_1 – додатні сталі, $p > 2$; функція g_ξ – неперервна за змінною ξ для майже всіх $x \in \Omega$.

F. $f \in L^{p'}((0,T); L^{p',\psi}(\Omega))$, $p' = p/(p-1)$; $f_t \in L^2((0,T); L^{2,\psi}(\Omega))$.

U. $u_0 \in H_0^{2,\psi}(\Omega) \cap H^{4,\psi}(\Omega)$, $u_1 \in H_0^{2,\psi}(\Omega) \cap H^{4,\psi}(\Omega) \cap L^{2p-2,\psi}(\Omega)$.

Означення. *Узагальненим розв'язком задачі (1) – (4) називаємо функцію* $u \in C([0,T]; H_0^{2,\psi}(\Omega))$ *таку, що* $u_t \in C\Big([0,T]; \Big(H_0^{2,\psi}(\Omega) \cap L^{p,\psi}(\Omega)\Big)^*\Big) \cap L^2\Big((0,T); H_0^{2,\psi}(\Omega)\Big) \cap L^p\Big((0,T); L^{p,\psi}(\Omega)\Big)$, *яка задовольняє умову (2) та інтегральну тотожність*

$$\int\limits_{Q_\tau} \Big[-u_t v_t \psi(|x|) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} (a_{\alpha\beta}(x,t) D^\alpha u_t + b_{\alpha\beta}(x,t) D^\alpha u)\, D^\beta(v\psi(|x|)) \Big] dxdt +$$

$$+ \int\limits_{Q_\tau} \Big[\sum_{|\alpha|=1} c_\alpha(x,t) D^\alpha u v \psi(|x|) + g(x,u_t) v\psi(|x|) - f(x,t) v\psi(|x|) \Big] dxdt +$$

$$+\int\limits_{\Omega} u_t(x,\tau)v(x,\tau)\psi(|x|)dx - \int\limits_{\Omega} u_1(x)v(x,0)\psi(|x|)dx = 0 \qquad (5)$$

для довільного $\tau \in (0,T]$ *та для довільної функції* $v \in L^2((0,T);H_0^{2,\psi}(\Omega))\cap L^p((0,T);L^{p,\psi}(\Omega))$ *такої, що* $v_t \in L^2((0,T);L^{2,\psi}(\Omega))$.

Теорема існування та єдиності.

Теорема. *Нехай виконуються умови* (Ψ)*), (A), (B), (C), (G), (F), (U). Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок* u *задачі* (1) – (4) *в області* Q_T*, для якого*

$$\int\limits_{\Omega}\Big[\,|u_t(x,\tau)|^2 + \sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha u(x,\tau)|^2\Big]\psi(|x|)dx + \int\limits_{Q_\tau}\Big[\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha u_t|^2 + |u_t|^p\,\psi(|x|)\Big]dxdt \le$$

$$\le C_0\left(\|f\|^{p'}_{L^{p'}((0,T);L^{p',\psi}(\Omega))} + \|u_0\|^2_{H_0^{2,\psi}(\Omega)} + \|u_1\|^2_{L^{2,\psi}(\Omega)}\right) \qquad (6)$$

для довільного $\tau \in (0,T]$*, де* C_0 *– додатна стала, яка залежить від* n*,* p*,* ψ *та коефіцієнтів* $a_{\alpha\beta}$*,* $b_{\alpha\beta}$ *(*$|\alpha| = |\beta| \leqslant 2$*),* c_α *(*$1 \leqslant |\alpha| \leqslant 2$*),* g *рівняння* (1).

Доведення. Існування. Виберемо послідовність областей $\{\Omega^k\}$, $k = 2,3,....$ Позначимо далі $S_T^k = \partial\Omega^k \times (0,T)$, $f^k(x,t) = \begin{cases} f(x,t), \ |x| \le k, \\ 0, \ |x| > k, \end{cases}$ $u_0^k(x) = u_0(x)\xi_k(x)$, $u_1^k(x) = u_1(x)\xi_k(x)$, причому $\xi_k \in C^4(\mathbb{R}^n)$, $\xi_k(x) = \begin{cases} 1, \ |x| \le k-1, \\ 0, \ |x| > k, \end{cases}$ $0 \le \xi_k(x) \le 1$. Зрозуміло, що $u_0^k \to u_0$ сильно в $H_0^{2,\psi}(\Omega)$, $u_1^k \to u_1$ сильно в $L^{2,\psi}(\Omega)$ при $k \to \infty$. Розглянемо в Q_T^k $(k = 2,3,...)$ мішану задачу

$$u_{tt} + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}(-1)^{|\alpha|}D^\beta\left(a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u_t\right) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}(-1)^{|\alpha|}D^\beta\left(b_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u\right) +$$

$$+\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant 2} c_\alpha(x,t)D^\alpha u + g(x,u_t) = f^k(x,t), \qquad (7)$$

$$u|_{t=0} = u_0^k(x), \qquad (8)$$

$$u_t|_{t=0} = u_1^k(x), \qquad (9)$$

$$u|_{S_T^k} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{S_T^k} = 0. \qquad (10)$$

На підставі результатів [24] можна стверджувати, що в Q_T^k існує узагальнений розв'язок u^k задачі (7)–(10) такий, що $u^k \in C([0,T];H_0^2(\Omega^k))$, $u_t^k \in C\left([0,T];L^2(\Omega^k)\right)\cap L^\infty\left((0,T);H_0^2\left(\Omega^k\right)\right)\cap L^p\left(Q_T^k\right)$, $u_{tt}^k \in L^\infty\left((0,T);L^2(\Omega^k)\right)\cap L^2\left((0,T);H_0^2\left(\Omega^k\right)\right)$. Розглянемо тепер послідовність задач вигляду (7)–(10) для $k = 2$, $k = 3$,..., довизначивши u^k нулем на $Q_T \backslash Q_T^k$. Отримаємо послідовність розв'язків задачі (1)–(4) в Q_T, яку для зручності знову позначимо $\{u^k\}$. Приймемо $v = u_t^k$ та $f = f^k$ в інтегральній рівності (5). Використовуючи умови теореми та результати [24], отримаємо

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|u_t^k(x,\tau)|^2\psi(|x|)dx + \int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u_t^k D^\beta\left(u_t^k\psi(|x|)\right)dxdt +$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\Big[\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} b_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u^k D^\beta\left(u_t^k\psi(|x|)\right)+\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant 2} c_\alpha(x,t)D^\alpha u^k u_t^k\psi(|x|)\Big]dxdt+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\left(g(x,u_t^k)u_t^k-f^k u_t^k\right)\psi(|x|)dxdt-\frac{1}{2}\int\limits_\Omega |u_1^k(x)|^2\psi(|x|)dx=0. \qquad (11)$$

Для наступних перетворень використаємо формулу Лейбніца похідної добутку функції багатьох змінних

$$D^\lambda(f_1f_2)=\sum_{\lambda^1\leqslant\lambda}\begin{pmatrix}\lambda\\ \lambda^1\end{pmatrix}D^{\lambda^1}f_1D^{\lambda-\lambda^1}f_2,\quad \begin{pmatrix}\lambda\\ \lambda^1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_1^1\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}\lambda_n\\ \lambda_n^1\end{pmatrix},$$

причому підсумовування ведеться за всіма мультиіндексами $\lambda^1=(\lambda_1^1,...,\lambda_n^1)$ такими, що $0\leqslant\lambda_i^1\leqslant\lambda_i$ для всіх $i=1,...,n$. Отож, одержимо з рівності (11)

$$\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u_t^k D^\beta\left(u_t^k\psi(|x|)\right)dxdt=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u_t^k D^\beta u_t^k\psi(|x|)dxdt+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}\ \sum_{|\sigma|=1,\ \sigma<\beta}\begin{pmatrix}\beta\\ \sigma\end{pmatrix}a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u_t^k D^\sigma u_t^k D^{\beta-\sigma}\psi(|x|)dxdt\ +$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u_t^k u_t^k D^\beta\psi(|x|)dxdt=\mathcal{I}_1+\mathcal{I}_2+\mathcal{I}_3.$$

Інтеграл $\mathcal{I}_1$ оцінимо так:

$$\mathcal{I}_1\geq a_{0,2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=2}\left|D^\alpha u_t^k\right|^2\psi(|x|)dxdt.$$

Для оцінки інтеграла $\mathcal{I}_2$ використаємо нерівність

$$\int\limits_\Omega\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha w|^2\,\psi(|x|)dx\leqslant\delta_0\int\limits_\Omega\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha w|^2\,\psi(|x|)dx+C(\delta_0)\int\limits_\Omega|w|^2\psi(|x|)dx, \qquad (12)$$

$\delta_0>0$, $C(\delta_0)>0$, правильну для довільної функції $w\in H_0^{2,\psi}(\Omega)$. Доведемо нерівність (12), записавши очевидну рівність

$$\int\limits_\Omega\Delta ww\psi(|x|)dx=\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n w_{x_ix_i}w\psi(|x|)dx=\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n\left(w_{x_i}w\psi(|x|)\right)_{x_i}dx-\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n w_{x_i}^2\psi(|x|)dx-$$

$$-\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n w_{x_i}w\psi_{x_i}(|x|)dx=-\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n w_{x_i}^2\psi(|x|)dx\ -\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n w_{x_i}w\psi_{x_i}(|x|)dx.$$

Далі за нерівністю Коші одержимо

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=1}|D^{\alpha}w|^{2}\,\psi(|x|)dx=-\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=2}D^{\alpha}ww\psi(|x|)dx-\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=1}D^{\alpha}wwD^{\alpha}\psi(|x|)dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\delta}{2}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=2}|D^{\alpha}w|^{2}\,\psi(|x|)dx+\frac{1}{2\delta}\int\limits_{\Omega}|w|^{2}\,\psi(|x|)dx+\frac{a}{2}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=1}|D^{\alpha}w|^{2}\,\psi(|x|)dx\,+$$

$$+\,M(a)\int\limits_{\Omega}|w|^{2}\,\psi(|x|)dx,$$

де $\delta>0$, $a\leqslant 1$, $M(a)>0$. З цієї нерівності легко отримати (12).

Використовуючи (12), маємо

$$\mathcal{I}_2\leqslant C_1\delta_1\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=2}\left|D^{\alpha}u_t^k\right|^{2}\psi(|x|)dxdt+C_2\int\limits_{Q_\tau}|u_t^k|^2\psi(|x|)dxdt.$$

Крім того,

$$\mathcal{I}_3\leq C_3\delta_2\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=2}\left|D^{\alpha}u_t^k\right|^{2}\psi(|x|)dxdt\,+\,C_4\int\limits_{Q_\tau}\left|u_t^k\right|^{2}\psi(|x|)dxdt.$$

В останніх двох оцінках δ_1, δ_2 – довільні додатні сталі, стала $C_1>0$ залежить від $a_2=\max\limits_{|\alpha|=|\beta|=2}\ \operatorname*{esssup}\limits_{(x,t)\in Q_T}|a_{\alpha\beta}(x,t)|$, M_1, n, стала $C_2>0$ залежить від a_2, M_1, δ_1, стала $C_3>0$ залежить від a_2, M_2, n, стала $C_4>0$ залежить від a_2, δ_2, M_2.

Перетворимо далі

$$\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}b_{\alpha\beta}(x,t)D^{\alpha}u^kD^{\beta}\left(u_t^k\psi(|x|)\right)dxdt=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}b_{\alpha\beta}(x,t)D^{\alpha}u^kD^{\beta}u_t^k\psi(|x|)dxdt\,+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}\ \sum_{|\sigma|=1,\ \sigma<\beta}\begin{pmatrix}\beta\\ \sigma\end{pmatrix}b_{\alpha\beta}(x,t)D^{\alpha}u^kD^{\sigma}u_t^kD^{\beta-\sigma}\psi(|x|)dxdt\,+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}b_{\alpha\beta}(x,t)D^{\alpha}u^ku_t^kD^{\beta}\psi(|x|)dxdt=\mathcal{I}_4+\mathcal{I}_5+\mathcal{I}_6.$$

Оцінимо інтеграли $\mathcal{I}_4$, $\mathcal{I}_5$, $\mathcal{I}_6$.

$$\mathcal{I}_4=\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}\left(b_{\alpha\beta}(x,t)D^{\alpha}u^kD^{\beta}u^k\psi(|x|)\right)_t dxdt\,-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}b_{\alpha\beta,t}(x,t)D^{\alpha}u^kD^{\beta}u^k\psi(|x|)dxdt\geqslant\frac{b_{0,2}}{2}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=2}\left|D^{\alpha}u^k(x,\tau)\right|^{2}\psi(|x|)dx\,-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2} b_{\alpha\beta}(x,0)D^{\alpha}u_0^k D^{\beta}u_0^k\psi(|x|)dx - C_5\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=2}\left|D^{\alpha}u^k\right|^2\psi(|x|)dxdt,$$

C_5 – деяка додатна стала, що залежить від $\max\limits_{|\alpha|=|\beta|=2}\operatorname*{esssup}\limits_{x\in Q_T}|b_{\alpha\beta,t}(x,t)|$, n;

$$\mathcal{I}_5 \le C_6\delta_3\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=2}\left|D^{\alpha}u_t^k\right|^2\psi(|x|)dxdt + C_7\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=2}\left|D^{\alpha}u^k\right|^2\psi(|x|)dxdt +$$
$$+ C_8\int\limits_{Q_\tau}\left|u_t^k\right|^2\psi(|x|)dxdt,$$

δ_3 – довільна додатна стала, C_6, C_7, C_8 – деякі додатні сталі, що залежать від $b_2 = \max\limits_{|\alpha|=|\beta|=2}\operatorname*{esssup}\limits_{x\in Q_T}|b_{\alpha\beta}(x,t)|$, M_1, n;

$$\mathcal{I}_6 \le C_9\int\limits_{Q_\tau}\left|u_t^k\right|^2\psi(|x|)dxdt + C_{10}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=2}\left|D^{\alpha}u^k\right|^2\psi(|x|)dxdt,$$

C_9 – деяка додатна стала, що залежить від b_2, M_2, C_{10} – деяка додатна стала, що залежить від b_2, n, ψ. Крім того,

$$\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=2} c_{\alpha}(x,t)D^{\alpha}u^N u_t^N\psi(|x|)dxdt \leqslant \frac{c_2 n}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=2}\left|D^{\alpha}u^N\right|^2\psi(|x|)dxdt +$$
$$+\frac{c_2}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left|u_t^N\right|^2\psi(|x|)dxdt, \quad c_2 = \max_{|\alpha|=2}\operatorname*{esssup}_{(x,t)\in Q_T}|c_{\alpha}(x,t)|.$$

Аналогічно до отриманих перетворень і оцінок одержимо

$$\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1} a_{\alpha\beta}(x,t)D^{\alpha}u_t^k D^{\beta}\left(u_t^k\psi(|x|)\right)dxdt = \int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1} a_{\alpha\beta}(x,t)D^{\alpha}u_t^k D^{\beta}u_t^k\psi(|x|)dxdt +$$
$$+\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1} a_{\alpha\beta}(x,t)D^{\alpha}u_t^k u_t^k D^{\beta}\psi(|x|)dxdt = \mathcal{I}_7 + \mathcal{I}_8;$$

$$\mathcal{I}_7 \leqslant C_{11}\delta_4\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=2}\left|D^{\alpha}u_t^k\right|^2\psi(|x|)dxdt + C_{12}\int\limits_{Q_\tau}\left|u_t^k\right|^2\psi(|x|)dxdt,$$
$$\mathcal{I}_8 \le C_{13}\delta_5\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=2}\left|D^{\alpha}u_t^k\right|^2\psi(|x|)dxdt + C_{14}\int\limits_{Q_\tau}\left|u_t^k\right|^2\psi(|x|)dxdt,$$

δ_4, δ_5 – довільні додатні сталі, $C_{11} > 0$ залежить від $a_1 = \max\limits_{|\alpha|=|\beta|=1}\operatorname*{esssup}\limits_{x\in Q_T}|a_{\alpha\beta}(x,t)|$, n, $C_{13} > 0$ залежить від a_1, ψ, n, $C_{12} > 0$ залежить від a_1, δ_4, ψ, $C_{14} > 0$ залежить від a_1, δ_5, M_1. Крім того, отримаємо

$$\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1} b_{\alpha\beta}(x,t)D^{\alpha}u^k D^{\beta}\left(u_t^k\psi(|x|)\right)dxdt = \int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1} b_{\alpha\beta}(x,t)D^{\alpha}u^k D^{\beta}u_t^k\psi(|x|)dxdt +$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1} b_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u^k u_t^k D^\beta\psi(|x|)dxdt=\mathcal{I}_9+\mathcal{I}_{10};$$

$$\mathcal{I}_9=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1} b_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u_t^k D^\alpha\Big[u_0^k(x)+\int\limits_0^t u_t^k(x,\tau)d\tau\Big]\psi(|x|)dxdt\leqslant$$

$$\leqslant C_{15}(b_1,T,n)\delta_6\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=2}\left|D^\alpha u_t^k\right|^2\psi(|x|)dxdt+C_{16}(b_1,T,\delta_6)\int\limits_{Q_\tau}|u_t^k|^2\psi(|x|)dxdt+$$
$$+C_{17}(b_1,\delta_6)\int\limits_\Omega\sum_{|\alpha|=1}\left|D^\alpha u_0^k\right|^2\psi(|x|)dx,$$

$b_1=\max\limits_{|\alpha|=|\beta|=1}\operatorname*{esssup}\limits_{(x,t)\in Q_T}|b_{\alpha\beta}(x,t)|$, $\delta_6>0$ – довільна стала, $C_{15}>0$, $C_{16}>0$, $C_{17}>0$;

$$\mathcal{I}_{10}=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1} b_{\alpha\beta}(x,t)u_t^k D^\alpha\Big[u_0^k(x)+\int\limits_0^t u_t^k(x,\tau)d\tau\Big]D^\beta\psi(|x|)dxdt\leqslant$$

$$\leqslant C_{18}(b_1,M_1,T)\delta_7\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=2}\left|D^\alpha u_t^k\right|^2\psi(|x|)dxdt+C_{19}(b_1,M_1,\delta_7,T)\int\limits_{Q_\tau}\left|u_t^k\right|^2\psi(|x|)dx+$$
$$+C_{20}(b_1,M_1,\delta_7)\int\limits_\Omega\sum_{|\alpha|=1}\left|D^\alpha u_0^k\right|^2\psi(|x|)dx,$$

δ_7 – довільна додатна стала, $C_{18}>0$, $C_{19}>0$, $C_{20}>0$.

Завершимо оцінювання інтегралів рівності (11)

$$\int\limits_{Q_\tau}a_{00}\left|u_t^k\right|^2\psi(|x|)dxdt\leqslant a_0\int\limits_{Q_\tau}\left|u_t^k\right|^2\psi(|x|)dxdt,\quad a_0=\operatorname*{esssup}\limits_{(x,t)\in Q_T}|a_{00}(x,t)|;$$

$$\int\limits_{Q_\tau}b_{00}(x,t)u^k u_t^k\psi(|x|)dxdt=\int\limits_{Q_\tau}b_{00}(x,t)\Big[u_0^k(x)+\int\limits_0^t u_t^k(x,\tau)d\tau\Big]u_t^k\psi(|x|)dxdt\leqslant$$

$$\leqslant b_0\Big(T+\frac{1}{2}\Big)\int\limits_{Q_\tau}\left|u_t^k\right|^2\psi(|x|)dxdt+\frac{b_0T}{2}\int\limits_\Omega\left|u_0^k\right|^2\psi(|x|)dx,\quad b_0=\operatorname*{esssup}\limits_{(x,t)\in Q_T}|b_{00}(x,t)|;$$

$$\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=1}c_\alpha(x,t)D^\alpha u^k u_t^k\psi(|x|)dxdt=$$

$$=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=1}c_\alpha(x,t)D^\alpha\Big[u_0^k(x)+\int\limits_0^t u_t^k(x,\tau)d\tau\Big]u_t^k\psi(|x|)dxdt\leqslant$$

$$\leqslant C_{21}(c_1,n,T)\delta_8 \int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=2} \left|D^\alpha u_t^k\right|^2 \psi(|x|)dxdt + C_{22}(c_1,\delta_8,T)\int\limits_{Q_\tau} \left|u_t^k\right|^2 \psi(|x|)dx +$$
$$+ C_{23}(c_1,\delta_8)\int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|=1} \left|D^\alpha u_0^k(x)\right|^2 \psi(|x|)dx,$$

δ_8 – довільна додатна стала, $c_1 = \max\limits_{|\alpha|=1} \operatorname*{esssup}\limits_{(x,t)\in Q_T} |c_\alpha(x,t)|$, $C_{21}>0$, $C_{22}>0$, $C_{23}>0$;

$$\int\limits_{Q_\tau} g(x,u_t^k)u_t^k\psi(|x|)dxdt \geq g_0 \int\limits_{Q_\tau} \left|u_t^k\right|^p \psi(|x|)dxdt;$$

$$\int\limits_{Q_\tau} f^k u_t^k \psi(|x|)dxdt \leq \delta_9 \int\limits_{Q_\tau} \left|u_t^k\right|^p \psi(|x|)dxdt + C_{24}\int\limits_{Q_\tau} \left|f^k\right|^{p'} \psi(|x|)dxdt,$$

δ_9 – довільна додатна стала, C_{24} – деяка додатна стала, що залежить від δ_9, p.

Враховуючи наведені оцінки, з рівності (11) отримаємо

$$\int\limits_{\Omega} \left|u_t^k(x,\tau)\right|^2 \psi(|x|)dx + 2\big(a_{0,2} - C_1\delta_1 - C_3\delta_2 - C_6\delta_3 - C_{11}\delta_4 - C_{13}\delta_5 - C_{15}\delta_6 - C_{18}\delta_7 -$$
$$- C_{21}\delta_8\big)\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=2} \left|D^\alpha u_t^k\right|^2\psi(|x|)dxdt + b_{0,2}\int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|=2} \left|D^\alpha u^k(x,\tau)\right|^2\psi(|x|)dx +$$
$$+2\,(g_0-\delta_9)\int\limits_{Q_\tau} \left|u_t^k\right|^p \psi(|x|)dxdt \leq 2\big(C_2 + C_4 + C_8 + C_9 + \frac{c_2}{2} +$$
$$+ C_{12} + C_{14} + C_{16} + C_{19} + a_0 + b_0\big(T+\frac{1}{2}\big) + C_{22}\big)\int\limits_{Q_\tau} \left|u_t^k\right|^2 \psi(|x|)dxdt +$$
$$+ 2\left(C_5 + C_7 + C_{10} + \frac{c_2 n}{2}\right)\int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=2} \left|D^\alpha u^k\right|^2\psi(|x|)dxdt + 2C_{24}\int\limits_{Q_\tau} \left|f^k\right|^{p'} \psi(|x|)dxdt +$$
$$+ 2\big(C_{17} + C_{20} + C_{23}\big)\int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|=1} \left|D^\alpha u_0^k\right|^2 \psi(|x|)dx + b_0T\int\limits_{\Omega} \left|u_0^k\right|^2 \psi(|x|)dx +$$
$$+ \int\limits_{\Omega} |u_1^k|^2\psi(|x|)dx + \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} b_{\alpha\beta}(x,0)D^\alpha u_0^k(x)D^\beta u_0^k(x)\psi(|x|)dx.$$

Якщо позначимо $y(\tau) = \int\limits_{\Omega} \Big[\left|u_t^k(x,\tau)\right|^2 + \sum\limits_{|\alpha|=2} \left|D^\alpha u^k(x,\tau)\right|^2\Big]\psi(|x|dx$, то отримаємо оцінку $y(\tau) \leqslant C_{25} + C_{26}\int\limits_0^\tau y(t)dt$, де C_{25}, C_{26} – деякі додатні сталі, що не залежать від

u^k. Тоді на підставі леми Гронуола, вибравши належно достатньо малі сталі $\delta_1 - \delta_9$, робимо висновок, що

$$\int\limits_{\Omega} \Big[\big|u_t^k(x,\tau)\big|^2 + \sum_{|\alpha|=2} \big|D^\alpha u^k(x,\tau)\big|^2 \Big] \psi(|x|)dx +$$

$$+ \int\limits_{Q_\tau} \Big[\big|u_t^k\big|^p + \sum_{|\alpha|=2} \big|D^\alpha u_t^k\big|^2 \Big] \psi(|x|)dxdt \leqslant C_{27} \tag{13}$$

для всіх $0 < \tau \leq T$, C_{27} – додатна стала, яка не залежить від k. З нерівності (13) випливає існування підпослідовності $\{u^{k_s}\} \subset \{u^k\}$ такої, що

$$u^{k_s} \to u \quad * - \text{слабко в} \quad L^\infty((0,T); H_0^{2,\psi}(\Omega)),$$

$$u_t^{k_s} \to u_t \quad * - \text{слабко в} \quad L^\infty((0,T); L^{2,\psi}(\Omega)),$$

$$u_t^{k_s} \to u_t \quad \text{слабко в} \quad L^2((0,T); H_0^{2,\psi}(\Omega)) \cap L^p((0,T); L^{p,\psi}(\Omega))$$

при $k_s \to \infty$. Використовуючи [25, с.20, лема 1.2], маємо $u \in C\left([0,T]; H_0^2(\Omega)\right)$. Міркуючи подібно до [25, с.234], отримаємо також, що $u_t \in C\left([0,T]; (H_0^{2,\psi}(\Omega) \cap L^{p,\psi}(\Omega))^*\right)$. Оскільки $u^{k_s}(\cdot,0) \to u(\cdot,0)$ слабко в $H_0^{2,\psi}(\Omega)$, $u_0^{k_s} \to u_0$ сильно в $H_0^{2,\psi}(\Omega)$, то $u(x,0) = u_0(x)$, $x \in \Omega$. Аналогічно до [25, с.236] показуємо також, що $u_t(x,0) = u_1(x)$, $x \in \Omega$. Зауважимо, що для довільного $k \in \mathbb{N}$

$$\big\|u_t^k\big\|_{L^p((0,T);L^{p,\psi}(\Omega))} \leq C_{28}, \quad C_{28} = \text{const} > 0. \tag{14}$$

З нерівності (14), врахувавши умову (**G**), легко отримати, що

$$\int\limits_{Q_T} \big|g(x,u_t^k)\big|^{p'} dxdt \leq C_{29}, \quad C_{29} > 0. \tag{15}$$

З нерівностей (14)–(15) робимо висновок (переходячи у разі потреби до підпослідовностей), що $g(x,u_t^k) \to z$ слабко в $L^{p'}((0;T); L^{p',\psi}(\Omega))$. Подібно до [25, с. 236–237] покажемо, що $z = g(x,u_t)$. З рівності (11) легко одержимо

$$\int\limits_{\Omega} |u_t^k(x,\tau)|^2 \psi(|x|)dx + 2\int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta}(x,t) D^\alpha u_t^k D^\beta \left(u_t^k \psi(|x|)\right) dxdt +$$

$$+ 2\int\limits_{Q_\tau} \Big[\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} b_{\alpha\beta}(x,t) D^\alpha u^k D^\beta \left(u_t^k \psi(|x|)\right) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant 2} c_\alpha(x,t) D^\alpha u^k u_t^k \psi(|x|) \Big] dxdt +$$

$$+ 2\int\limits_{Q_\tau} \left(g(x,u_t^k)u_t^k - f^k u_t^k\right) \psi(|x|)dxdt - \int\limits_{\Omega} |u_1^k(x)|^2 \psi(|x|)dx = 0. \tag{16}$$

На підставі збіжностей, отриманих для послідовності $\{u^k\}$ вище, з (16) маємо

$$\int\limits_{\Omega} |u_t(x,T)|^2\psi(|x|)dx + 2\int\limits_{Q_T} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u_t D^\beta\left(u_t\psi(|x|)\right)dxdt +$$

$$+ 2\int\limits_{Q_T}\Big[\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} b_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u D^\beta\left(u_t\psi(|x|)\right) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant 2} c_\alpha(x,t)D^\alpha u u_t\psi(|x|)\Big]dxdt +$$

$$+ 2\int\limits_{Q_T}(z-f)\,u_t\psi(|x|)dxdt - \int\limits_{\Omega}|u_1(x)|^2\psi(|x|)dx = 0. \tag{17}$$

Наша мета — отримати оцінку

$$\int\limits_{Q_T}(z-g(x,v))\,(u_t-v)\,\psi(|x|)dxdt \geq 0 \tag{18}$$

для довільної функції $v \in L^p((0,T);L^{p,\psi}(\Omega))$. Для цього розглянемо

$$0 \leq I_k = \int\limits_{Q_T}\left(g(x,u_t^k)-g(x,v)\right)\left(u_t^k-v\right)\psi(|x|)dxdt = \int\limits_{Q_T} g(x,u_t^k)u_t^k\psi(|x|)dxdt -$$

$$- \int\limits_{Q_T} g(x,u_t^k)v\psi(|x|)dxdt - \int\limits_{Q_T} g(x,v)\left(u_t^k-v\right)\psi(|x|)dxdt.$$

Використовуючи (16), одержимо

$$\int\limits_{Q_T} g(x,u_t^k)u_t^k\psi(|x|)dxdt = \int\limits_{Q_T} f^k u_t^k\psi(|x|)dxdt - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|u_t^k(x,T)|^2\psi(|x|)dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|u_1^k(x)|^2\psi(|x|)dx - \int\limits_{Q_T}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u_t^k D^\beta(u_t^k\psi|x|)dxdt -$$

$$- \int\limits_{Q_T}\Big[\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} b_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u^k D^\beta\left(u_t^k\psi(|x|)\right) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant 2} c_\alpha(x,t)D^\alpha u^k u_t^k\psi(|x|)\Big]dxdt.$$

Тому можна стверджувати, що

$$0 \leq I_k = \int\limits_{Q_T} f^k u_t^k\psi(|x|)dxdt -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|u_t^k(x,T)|^2\psi(|x|)dx - \int\limits_{Q_T}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u_t^k D^\beta(u_t^k\psi(|x|))dxdt -$$

$$- \int\limits_{Q_T}\Big[\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} b_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u^k D^\beta(u_t^k\psi(|x|)) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant 2} c_\alpha(x,t)D^\alpha u^k u_t^k\psi(|x|)\Big]dxdt +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|u_1^k(x)|^2\psi(|x|)dx-\int\limits_{Q_T}g(x,u_t^k)v\psi(|x|)dxdt-\int\limits_{Q_T}g(x,v)\left(u_t^k-v\right)\psi(|x|)dxdt.$$

Звідси [23, с.20, лема 5.3] одержимо

$$0\le\limsup I_k=\int\limits_{Q_T}fu_t\psi(|x|)dxdt-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|u_t(x,T)|^2\psi(|x|)dx-\int\limits_{Q_T}zv\psi(|x|)dxdt-$$
$$-\int\limits_{Q_T}g(x,v)\left(u_t-v\right)\psi(|x|)dxdt-\int\limits_{Q_T}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}a_{\alpha\beta}(x,t)D^{\alpha}u_tD^{\beta}(u_t\psi(|x|))dxdt-$$
$$-\int\limits_{Q_T}\Big[\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}b_{\alpha\beta}(x,t)D^{\alpha}uD^{\beta}(u_t\psi(|x|))+\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant 2}c_{\alpha}(x,t)D^{\alpha}uu_t\psi(|x|)\Big]dxdt+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|u_1(x)|^2\psi(|x|)dx. \tag{19}$$

Додавши (17) та (19), отримаємо нерівність (18). Прийнявши в нерівності (18) $v=u_t-\lambda\chi$, $\lambda>0$, $\chi\in L^p((0,T);L^{p,\psi}(\Omega))$ – довільна функція, робимо висновок, що $\lambda\int\limits_{Q_T}(z-g(x,u_t-\lambda\chi))\,\chi\psi(|x|)dxdt\ \ge\ 0$, звідки $\int\limits_{Q_T}(z-g(x,u_t))\,\chi\psi(|x|)dxdt\ \ge\ 0$ при $\lambda\to+\ 0$. Отже, $z=g(x,u_t)$, тобто $g(x,u_t^k)\to g(x,u_t)$ слабко в $L^{p'}((0,T);L^{p',\psi}(\Omega))$. При цьому u задовольняє інтегральну тотожність (5), виконуються умови (2), (4). Отож, u – узагальнений розв'язок задачі (1) – (4) в Q_T. Правильність оцінки (6) доводиться так само, як отримано нерівність (13).

Єдиність. Якщо u^1 та u^2 – два довільних розв'язки задачі (1) – (4), то аналогічно до (6) можна одержати оцінку

$$\int\limits_{\Omega}\Big[\left|u_t^1(x,\tau)-u_t^2(x,\tau)\right|^2+\sum_{|\alpha|=2}\left|D^{\alpha}\left(u^1(x,\tau)-u^2(x,\tau)\right)\right|^2\Big]\psi(|x|)dx+$$
$$+\int\limits_{Q_\tau}\Big[\sum_{|\alpha|=2}\left|D^{\alpha}\left(u_t^1-u_t^2\right)\right|^2+\left|u_t^1-u_t^2\right|^p\Big]\psi(|x|)dxdt\ \le 0$$

для всіх $0<\tau\le T$. Отже, $u^1=u^2$ майже скрізь в Q_T. Теорему доведено.

Висновки. У цій праці доповнено результати, отримані при дослідженні мішаної задачі для нелінійного гіперболічного рівняння в необмеженій області, викладені в [22], на випадок еволюційного рівняння, яке узагальнює відоме рівняння теорії пружності. Вивчення крайових задач для згаданого рівняння є сучасною та актуальною проблемою [1–4]. Продовженням описаних досліджень може бути знаходження класів коректності розв'язку мішаної задачі для рівняння типу (1) з нелінійними доданками вищого порядку у вагових соболєвських просторах та в просторах локально інтегровних функцій.

1. *Gu R.J., Kuttler K.L., Shillor M.* Frictional wear of a thermoelastic beam// J. Math. Anal. And Appl.– **242.**– 2000.– P. 212-236.

2. *Strömberg N., Johansson L., Klarbring A.* Derivation and analysis of a generalized standard model for a contact friction and wear// Internat. J. Solids Structures – **13.**– 1996.– P. 1817-1836.

3. *Andrews K.T., Shillor M., Wright S.* On the dynamic vibrations of an elastic beam in frictional contact with a rigid obstacle// J. Elasticity – **42.**– 1996.– P.1-30.

4. *Martins J.A.C., Oden J.T.* Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with normal and friction interface laws// Nonlin. Anal.– **11.**– 1987.– P.407-428.

5. *Слепцова И.П., Шишков А.Е.* Смешанная задача для уравнения распространения возмущений в вязких средах в неограниченных областях// Докл. АН УССР.– Сер.А.– 1988, № 11.– С.28-31.

6. *Шишков А.Е., Слепцова И.П.* Существование растущих на бесконечности обобщенных решений смешанной задачи для некоторых эволюционных уравнений// Доп. АН УРСР.– Сер.А.– 1989, № 12.– С.20-23.

7. *Шишков А.Е., Слепцова И.П.* Классы единственности и разрешимости смешанных задач для некоторых эволюционных уравнений в неограниченных областях// Сиб. мат. журн.– 1991.– **32**.– С.166-178.

8. *Слепцова И.П., Шишков А.Е.* Принцип Фрагмена–Линделефа для некоторых квазилинейных эволюционных уравнений второго порядка// Укр. мат. журн.– **57**.– 2005, № 2.– С.239-249.

9. *D'Ancona P., Manfrin R.* A class of locally solvable semilinear equations of weakly hyperbolic type// Ann. Mat. Pura Appl.– **168**.– 1995.– P.355-372.

10. *Agre K., Rammaha M.A.* Global solutions to boundary value problems for a nonlinear wave equation in high space dimensions// Diff. And Integr. Equat.– **14**.– 2001.– P.1315-1331.

11. *Georgiev V., Todorova G.* Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and sourse terms// J. Diff. Equat.– **109**.– 1994.– P.295-308.

12. *Dragieva N.A.* A hyperbolic equation with two space variables with strong nonlinearity// Godishnik Vish. Uchebn. Zaved. Prilozhna Mat.– **23**.– 1987, № 4.– P.95-106.

13. *Carpio A.* Existence of global solutions to some nonlinear dissipative wave equations// J. Math. Pures Appl. – **73**.– 1994, № 5.– P.471-488.

14. *Vittilaro E.* Global nonexistence theorems for a class of evolution equation with dissipation// Arch. Ration. Mech. Anal.– **149**.– 1999, № 2.– P.155-182.

15. *Levine H.A., Park S.R., Serrin J.* Global existence and global nonexistence of solutions of the Cauchy problem for a nonlinearly damped wave equations// J. Math. Anal. And Appl.– **228.**– 1998.– P.181-205.

16. *Pecher H.*Sharp existence results for self – similar solutions of semilinear wave equations// Nonlin. Diff. Equat. And Appl.– **7**.– 2000.– P.323-341.

17. *Todorova G., Yordanov B.* Critical exponent for a nonlinear wave equations with damping// J. Diff. Equat.– **174**. – 2001.– P.464-489.

18. *Ohta M.* Blowup for systems of semilinear wave equations in low space dimensions // J. Math. Anal. And Appl.– **240.**– 1999.– P.340-360.

19. *Majdoub M.* Qulitative study of the critical wave equation with a subcritical perturbation// J. Math. Anal. And Appl.– **301.**– 2005.– P.354-365.

20. *Ryo Ikehata* Two dimensional exterior mixed problem for semilinear damped equation// J. Math. Anal. And Appl.– **301.**– 2005.– P.366-377.

21. *Лавренюк С.П., Оліскевич М.О.* Метод Гальоркіна для гіперболічних систем першого порядку з двома незалежними змінними// Укр. мат. журн.– **54**.– 2002, № 10.– С.1356-1370.

22. *Пукач П.Я.* Змішана задача в необмеженій області для слабко нелінійного гіперболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.–мех. поля – **47**.– 2004, № 4.– С.149-154.

23. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.– М., 1978.

24. *Пукач П.Я.* Мішана задача для нелінійного рівняння типу коливань балки п'ятого порядку в обмеженій області// Вісн. Нац. ун–ту „ Львівська політехніка". Сер. фіз.-мат. науки.– 2006 *(в друці)*.

25. *Лионс Ж.–Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.– М., 2002.

THE WEIGHT CORRECTNESS CLASSES OF SOLUTION OF MIXED PROBLEM FOR NONLINEAR BEAM VIBRATIONS TYPE EQUATION IN UNBOUNDED DOMAIN

Petro Pukach

National University „Lviv Polytechnica“,
Bandery Str., 12, 79013 Lviv, Ukraine

The paper is devoted to investigation of the first mixed problem for nonlinear equation of the fifth order in domain bounded with respect to time variable and unbounded with respect to space variables. Described equation generalizes the equation $u_{tt} + au_{txxxx} + bu_{xxxx} + |u_t|^{p-2}u_t = f$, $p > 2$, which is studied in elasticity theory. The conditions of the existence of unique generalized solution have been obtained. The classes of the existence and uniqueness are weight Sobolev spaces of functions.

Key words: nonlinear equation of beam vibrations, Galerkin method.

Стаття надійшла до редколегії 11.11.2005

Прийнята до друку 02.11.2006

УДК 517.95

ВИЗНАЧЕННЯ НЕВІДОМИХ ПАРАМЕТРІВ У СТАРШИХ КОЕФІЦІЄНТАХ ДВОВИМІРНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Роман САГАЙДАК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

Одержано умови існування та єдиності розв'язку оберненої задачі, що полягає в знаходженні старших коефіцієнтів двовимірного параболічного рівняння у випадку, коли вони є добутком двох функцій різних аргументів.

Ключові слова: обернена задача, параболічне рівняння.

На цьому етапі розвитку математичної науки задача визначення старших коефіцієнтів, що залежать від усіх незалежних змінних, у параболічному рівнянні загального вигляду залишається не розв'язаною. Зроблено спроби досліджувати подібні задачі у випадку простішої структури коефіцієнтів або неповного рівняння. В [1] визначено умови існування та єдиності розв'язку оберненої задачі визначення залежного лише від часу старшого коефіцієнта багатовимірного ізотропного рівняння теплопровідності в зв'язній області $\Omega \subset R^n$ з гладкою межею $\partial\Omega$. Подібна задача для рівняння теплопровідності, але в прямокутнику, досліджена в [2], а в [3] – з молодшими членами в рівнянні. Обернена задача для анізотропного рівняння теплопровідності досліджена в [4].

Ми припускаємо, що старші коефіцієнти рівняння залежать від часової і від однієї з просторових змінних. Залежність від просторових змінних вважається відомою. Така сама задача, але з іншими крайовими умовами та умовами перевизначення розглянута в [5]. Одновимірна задача з аналогічною структурою старшого коефіцієнта досліджена в [6].

1. В області $\Omega_T = \{(x,y,t) : 0 < x < h, 0 < y < l, 0 < t < T\}$ розглянемо обернену задачу визначення трійки функцій $(a_1(t), a_2(t), u(x,y,t)) \in C[0,T] \times C[0,T] \times C^{2,1}(\overline{\Omega}_T), a_i(t) > 0, t \in [0,T], i = 1,2$, що задовольняють рівняння

$$u_t = a_1(t)b_1(x)u_{xx} + a_2(t)b_2(y)u_{yy} + c_1(x,y,t)u_x + c_2(x,y,t)u_y + c_3(x,y,t)u + f(x,y,t),$$

$$(x,y,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

початкову умову

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in [0,h] \times [0,l], \tag{2}$$

крайові умови

$$u_x(0,y,t) = \mu_1(y,t), \quad u_x(h,y,t) = \mu_2(y,t), \quad (y,t) \in [0,l] \times [0,T], \tag{3}$$

$$u_y(x,0,t) = \mu_3(x,t), \quad u_y(x,l,t) = \mu_4(x,t), \quad (x,t) \in [0,h] \times [0,T], \tag{4}$$

та умови перевизначення

$$u(0,0,t) = \nu_1(t), \quad u(h,0,t) = \nu_2(t), \quad t \in [0,T]. \tag{5}$$

Стосовно вихідних даних задачі будемо припускати виконання таких умов:

$(A1)$ $\varphi \in C^2(\overline{D})$, де $D = (0,h) \times (0,l)$, $\mu_i \in C^{2,1}([0,l] \times [0,T]), i = 1,2, \mu_i \in C^{2,1}([0,h] \times [0,T]), i = 3,4, \nu_i \in C^1[0,T], i = 1,2, b_1 \in C^2[0,h], b_2 \in C^2[0,l], f \in C^{2,2,0}(\overline{\Omega}_T), c_i \in C^{1,1,0}(\overline{\Omega}_T), i = 1,2,3$;

$(A2)$ $S_1(t) \equiv \nu_1'(t) - c_1(0,0,t)\mu_1(0,t) - c_2(0,0,t)\mu_3(0,t) - c_3(0,0,t)\nu_1(t) - f(0,0,t) \geqslant 0$, $S_2(t) \equiv \nu_2'(t) - c_1(h,0,t)\mu_2(0,t) - c_2(h,0,t)\mu_3(h,t) - c_3(h,0,t)\nu_2(t) - f(h,0,t) \geqslant 0$, $b_1(0)S_2(t) - b_1(h)S_1(t) > 0$, $S_1(t) - S_2(t) > 0$, $t \in [0,T]$, $b_1(x) > 0$, $x \in [0,h]$, $b_2(y) > 0$, $y \in [0,l]$, $b_1(0) - b_1(h) > 0$, $\varphi_{xx}(x,y) > 0$, $\varphi_{yy}(x,y) > 0$, $(x,y) \in [0,h] \times [0,l]$, $\varphi_{xx}(\beta_1^{-1}(\zeta),y) - \varphi_{xx}(\beta_1^{-1}(H-\zeta),y) \geqslant 0$, $\varphi_{yy}(\beta_1^{-1}(\zeta),y) - \varphi_{yy}(\beta_1^{-1}(H-\zeta),y) \leqslant 0$, $(\zeta,y) \in [0,H/2] \times [0,l]$, де $\beta_k(s) = \int\limits_0^s \frac{d\sigma}{\sqrt{b_k(\sigma)}}$, $k = 1,2$, $H = \beta_1(h)$;

$(A3)$ $\varphi_x(0,y) = \mu_1(y,0), \varphi_x(h,y) = \mu_2(y,0), \varphi_y(x,0) = \mu_3(x,0), \varphi_y(x,l) = \mu_4(x,0)$, $\mu_{1y}(0,t) = \mu_{3x}(0,t)$, $\mu_{2y}(0,t) = \mu_{3x}(h,t)$, $\mu_{1y}(l,t) = \mu_{4x}(0,t)$, $\mu_{2y}(l,t) = \mu_{4x}(h,t)$, $\nu_1(0) = \varphi(0,0)$, $\nu_2(0) = \varphi(h,0)$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* $(A1)$–$(A3)$. *Тоді задача (1)–(5) має розв'язок в області* $\overline{\Omega}_{T_0}$, *де* $T_0,\ 0 < T_0 \leqslant T$, *визначається вихідними даними задачі.*

Доведення. Припустивши, що функції $a_i(t)$, $i = 1,2$ відомі, обернену задачу (1)–(5) зведемо до системи рівнянь стосовно функцій $a_1(t)$, $a_2(t)$, $u(x,y,t)$ та похідних від функції $u(x,y,t)$ до другого порядку включно.

Пряма задача (1)–(4) еквівалентна такому інтегро-диференціальному рівнянню:

$$u(x,y,t) = u_0(x,y,t) + \int\limits_0^t \int\limits_0^l \int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)((c_1(\xi,\eta,\tau) - \frac{1}{2}a_1(\tau)b_1'(\xi))u_\xi +$$

$$+ (c_2(\xi,\eta,\tau) - \frac{1}{2}a_2(\tau)b_2'(\eta))u_\eta + c_3(\xi,\eta,\tau)u)d\xi d\eta d\tau, \quad (x,y,t) \in \overline{\Omega}_T, \tag{6}$$

де $u_0(x,y,t)$ є розв'язком рівняння

$$u_{0t}=a_1(t)b_1(x)u_{0xx}+a_2(t)b_2(y)u_{0yy}+\frac{1}{2}a_1(t)b_1^{'}(x)u_{0x}+\frac{1}{2}a_2(t)b_2^{'}(y)u_{0y}+f(x,y,t),$$

$$(x,y,t)\in\Omega_T, \tag{7}$$

який задовольняє умови (2)–(4).

Легко бачити, що

$$\begin{aligned} u_0(x,y,t)=&\int_0^l\int_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta-\\ &-b_1(0)\int_0^t\int_0^l G_{22}(x,y,t,0,\eta,\tau)a_1(\tau)\mu_1(\eta,\tau)d\eta d\tau+\\ &+b_1(h)\int_0^t\int_0^l G_{22}(x,y,t,h,\eta,\tau)a_1(\tau)\mu_2(\eta,\tau)d\eta d\tau-\\ &-b_2(0)\int_0^t\int_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,0,\tau)a_2(\tau)\mu_3(\xi,\tau)d\xi d\tau+\\ &+b_2(l)\int_0^t\int_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,l,\tau)a_2(\tau)\mu_4(\xi,\tau)d\xi d\tau+\\ &+\int_0^t\int_0^l\int_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau, \end{aligned} \tag{8}$$

де

$$G_{ij}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)=\frac{1}{4\pi\sqrt{(\alpha_1(t)-\alpha_1(\tau))(\alpha_2(t)-\alpha_2(\tau))b_1(\xi)b_2(\eta)}}\times$$

$$\times\sum_{n,m=-\infty}^{+\infty}\left(\exp\left(-\frac{(\beta_1(x)-\beta_1(\xi)+2nH)^2}{4(\alpha_1(t)-\alpha_1(\tau))}\right)+(-1)^i\exp\left(-\frac{(\beta_1(x)+\beta_1(\xi)+2nH)^2}{4(\alpha_1(t)-\alpha_1(\tau))}\right)\right)\times$$

$$\times\left(\exp\left(-\frac{(\beta_2(y)-\beta_2(\eta)+2mL)^2}{4(\alpha_2(t)-\alpha_2(\tau))}\right)+(-1)^j\exp\left(-\frac{(\beta_2(y)+\beta_2(\eta)+2mL)^2}{4(\alpha_2(t)-\alpha_2(\tau))}\right)\right),$$

$i,j=1,2,$

$$\alpha_k(t)=\int_0^t a_k(\tau)d\tau,\ L=\beta_2(l).$$

Продиференціювавши рівність (6) за змінними x та y і ввівши позначення $u_x = u_1, u_y = u_2$, отримаємо

$$u_1(x,y,t) = u_{0x}(x,y,t) + \int\limits_0^t \int\limits_0^l \int\limits_0^h G_{22x}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)((c_1(\xi,\eta,\tau) - \frac{1}{2}a_1(\tau)b_1^{'}(\xi))u_1 +$$

$$+(c_2(\xi,\eta,\tau) - \frac{1}{2}a_2(\tau)b_2^{'}(\eta))u_2 + c_3(\xi,\eta,\tau)u)d\xi d\eta d\tau, \quad (x,y,t) \in \overline{\Omega}_T, \tag{9}$$

$$u_2(x,y,t) = u_{0y}(x,y,t) + \int\limits_0^t \int\limits_0^l \int\limits_0^h G_{22y}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)((c_1(\xi,\eta,\tau) - \frac{1}{2}a_1(\tau)b_1^{'}(\xi))u_1 +$$

$$+(c_2(\xi,\eta,\tau) - \frac{1}{2}a_2(\tau)b_2^{'}(\eta))u_2 + c_3(\xi,\eta,\tau)u)d\xi d\eta d\tau, \quad (x,y,t) \in \overline{\Omega}_T. \tag{10}$$

З врахуванням введених позначень (6) набере вигляду

$$u(x,y,t) = u_0(x,y,t) + \int\limits_0^t \int\limits_0^l \int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)((c_1(\xi,\eta,\tau) - \frac{1}{2}a_1(\tau)b_1^{'}(\xi))u_1 +$$

$$+(c_2(\xi,\eta,\tau) - \frac{1}{2}a_2(\tau)b_2^{'}(\eta))u_2 + c_3(\xi,\eta,\tau)u)d\xi d\eta d\tau, \quad (x,y,t) \in \overline{\Omega}_T. \tag{11}$$

Використовуючи співвідношення

$$\frac{\partial}{\partial x}G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,\tau) = -\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\sqrt{b_1(\xi)}}{\sqrt{b_1(x)}}G_{12}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,\tau) = -\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\sqrt{b_2(\eta)}}{\sqrt{b_2(y)}}G_{21}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\right),$$

$$a_1(\tau)\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\sqrt{b_1(\xi)}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\sqrt{b_1(\xi)}G_{ij}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\right)\right) +$$

$$+a_2(\tau)\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\sqrt{b_2(\eta)}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\sqrt{b_2(\eta)}G_{ij}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\right)\right) = -\frac{\partial}{\partial \tau}G_{ij}(x,y,t,\xi,\eta,\tau), \tag{12}$$

знайдемо похідні від функції $u_0(x,y,t)$ за просторовими змінними

$$u_{0x}(x,y,t) = \frac{1}{\sqrt{b_1(x)}}\left(\int\limits_0^l \int\limits_0^h \sqrt{b_1(\xi)}G_{12}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi_\xi(\xi,\eta)d\xi d\eta + \right.$$

$$+b_1(0)\int\limits_0^t \int\limits_0^l \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\sqrt{b_1(\xi)}G_{12}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\right)\Big|_{\xi=0} a_1(\tau)\mu_1(\eta,\tau)d\eta d\tau -$$

$$-b_1(h)\int_0^t\int_0^l \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sqrt{b_1(\xi)}G_{12}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\right)\Big|_{\xi=h} a_1(\tau)\mu_2(\eta,\tau)d\eta d\tau-$$

$$b_2(0)\int_0^t\int_0^h \sqrt{b_1(\xi)}\times G_{12}(x,y,t,\xi,0,\tau)a_2(\tau)\mu_{3\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+b_2(l)\int_0^t\int_0^h \sqrt{b_1(\xi)}G_{12}(x,y,t,\xi,l,\tau)a_2(\tau)\mu_{4\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^l\int_0^h \sqrt{b_1(\xi)}G_{12}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f_\xi(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau\Bigg), \qquad (13)$$

$$u_{0y}(x,y,t)=\frac{1}{\sqrt{b_2(y)}}\Bigg(\int_0^l\int_0^h \sqrt{b_2(\eta)}G_{21}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi_\eta(\xi,\eta)d\xi d\eta-$$

$$-b_1(0)\int_0^t\int_0^l \sqrt{b_2(\eta)}G_{21}(x,y,t,0,\eta,\tau)a_1(\tau)\mu_{1\eta}(\eta,\tau)d\eta d\tau+b_1(h)\int_0^t\int_0^l \sqrt{b_2(\eta)}\times$$

$$\times G_{21}(x,y,t,h,\eta,\tau)a_1(\tau)\mu_{2\eta}(\eta,\tau)d\eta d\tau+b_2(0)\int_0^t\int_0^h \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sqrt{b_2(\eta)}G_{21}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\right)\Big|_{\eta=0}\times$$

$$\times a_2(\tau)\mu_3(\xi,\tau)d\xi d\tau-b_2(l)\int_0^t\int_0^h \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sqrt{b_2(\eta)}G_{21}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\right)\Big|_{\eta=l} a_2(\tau)\mu_4(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^l\int_0^h \sqrt{b_2(\eta)}G_{21}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f_\eta(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau\Bigg). \qquad (14)$$

Так само знайдемо похідні u_{0xx} та u_{0yy}

$$u_{0xx}(x,y,t)=-\frac{b_1'(x)}{2b_1(x)}u_{0x}(x,y,t)+$$

$$+\frac{1}{b_1(x)}\Bigg(\int_0^l\int_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,0)\left(b_1(\xi)\varphi_{\xi\xi}(\xi,\eta)+\frac{b_1'(\xi)}{2}\varphi_\xi(\xi,\eta)\right)d\xi d\eta-$$

$$-b_1(0)\int_0^t\int_0^l G_{22}(x,y,t,0,\eta,\tau)\Big(\mu_{1\tau}(\eta,\tau)-f_\xi(0,\eta,\tau)-(b_2(\eta)\mu_{1\eta\eta}(\eta,\tau)+$$

$$+\frac{b_2'(\eta)}{2}\mu_{1\eta}(\eta,\tau)\Big)\,a_2(\tau)\Big)d\eta d\tau+b_1(h)\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{22}(x,y,t,h,\eta,\tau)\Big(\mu_{2\tau}(\eta,\tau)-f_\xi(h,\eta,\tau)-$$

$$-\left(b_2(\eta)\mu_{2\eta\eta}(\eta,\tau)+\ +\frac{b_2'(\eta)}{2}\mu_{2\eta}(\eta,\tau)\right)a_2(\tau)\Big)\,d\eta d\tau-$$

$$-b_2(0)\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,0,\tau)a_2(\tau)\left(b_1(\xi)\mu_{3\xi\xi}(\xi,\eta)+\frac{b_1'(\xi)}{2}\ \mu_{3\xi}(\xi,\tau)\right)d\xi d\tau\ +$$

$$+b_2(l)\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,l,\tau)a_2(\tau)\left(b_1(\xi)\mu_{4\xi\xi}(\xi,\eta)+\frac{b_1'(\xi)}{2}\mu_{4\xi}(\xi,\tau)\right)d\xi d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\left(b_1(\xi)f_{\xi\xi}(\xi,\eta,\tau)+\frac{b_1'(\xi)}{2}f_\xi(\xi,\eta,\tau)\right)d\xi d\eta d\tau\Bigg), \qquad (15)$$

$$u_{0yy}(x,y,t)=-\frac{b_2'(y)}{2b_2(y)}u_{0y}(x,y,t)+$$

$$+\frac{1}{b_2(y)}\Bigg(\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,0)\left(b_2(\eta)\varphi_{\eta\eta}(\xi,\eta)+\frac{b_2'(\eta)}{2}\varphi_\eta(\xi,\eta)\right)d\xi d\eta-$$

$$-b_1(0)\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{22}(x,y,t,0,\eta,\tau)a_1(\tau)\left(b_2(\eta)\mu_{1\eta\eta}(\eta,\tau)+\frac{b_2'(\eta)}{2}\mu_{1\eta}(\eta,\tau)\right)d\eta d\tau+$$

$$+b_1(h)\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{22}(x,y,t,h,\eta,\tau)a_1(\tau)\left(b_2(\eta)\mu_{2\eta\eta}(\eta,\tau)+\frac{b_2'(\eta)}{2}\mu_{2\eta}(\eta,\tau)\right)d\eta d\tau-$$

$$-b_2(0)\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,0,\tau)\Big(\mu_{3\tau}(\xi,\tau)-f_\eta(\xi,0,\tau)-\Big(b_1(\xi)\mu_{3\xi\xi}(\xi,\tau)+$$

$$+\frac{b_1'(\xi)}{2}\mu_{3\xi}(\xi,\tau)\Big)a_1(\tau)\Big)d\xi d\tau+b_2(l)\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,l,\tau)\Big(\mu_{4\tau}(\xi,\tau)-f_\eta(\xi,l,\tau)-$$

$$-\left(b_1(\xi)\mu_{4\xi\xi}(\xi,\tau)+\frac{b_1'(\xi)}{2}\mu_{4\xi}(\xi,\tau)\right)a_1(\tau)\Big)d\xi d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\left(b_2(\eta)f_{\eta\eta}(\xi,\eta,\tau)+\frac{b_2'(\eta)}{2}f_\eta(\xi,\eta,\tau)\right)d\xi d\eta d\tau\Bigg). \qquad (16)$$

Позначимо $u_{xx}=u_3, u_{yy}=u_4, u_{xy}=u_5$. Використовуючи (12), з (9), (10) з'ясовуємо, що

$$u_3(x,y,t)=u_{0xx}(x,y,t)+\frac{1}{\sqrt{b_1(x)}}\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{12x}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\sqrt{b_1(\xi)}\times$$
$$\times\Bigg(\bigg(c_{1\xi}(\xi,\eta,\tau)+c_3(\xi,\eta,\tau)-\frac{a_1(\tau)}{2}b_1''(\xi)\bigg)u_1+c_{2\xi}(\xi,\eta,\tau)u_2+$$
$$+\bigg(c_1(\xi,\eta,\tau)-\frac{a_1(\tau)}{2}b_1'(\xi)\bigg)u_3+$$
$$+\bigg(c_2(\xi,\eta,\tau)-\frac{a_2(\tau)}{2}b_2'(\eta)\bigg)u_5+c_{3\xi}(\xi,\eta,\tau)u\Bigg)d\xi d\eta d\tau,\quad (x,y,t)\in\overline{\Omega}_T, \tag{17}$$

$$u_4(x,y,t)=u_{0yy}(x,y,t)+\frac{1}{\sqrt{b_2(y)}}\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{21y}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\sqrt{b_2(\eta)}\times$$
$$\times\Bigg(c_{1\eta}(\xi,\eta,\tau)u_1+\bigg(c_{2\eta}(\xi,\eta,\tau)+c_3(\xi,\eta,\tau)-\frac{a_2(\tau)}{2}b_2''(\eta)\bigg)u_2+$$
$$+\bigg(c_2(\xi,\eta,\tau)-\frac{a_2(\tau)}{2}b_2'(\eta)\bigg)u_4+$$
$$+\bigg(c_1(\xi,\eta,\tau)-\frac{a_1(\tau)}{2}b_1'(\xi)\bigg)u_5+c_{3\eta}(\xi,\eta,\tau)u\Bigg)d\xi d\eta d\tau,\quad (x,y,t)\in\overline{\Omega}_T. \tag{18}$$

Для знаходження мішаної похідної u_{xy} тимчасово припустимо, що коефіцієнти c_i, $i=\overline{1,3}$ достатньо гладкі. Продиференціюємо рівняння (1) та умову (2) за x і за y, умову (3) за y, а умову (4) за x. В отриманій задачі використаємо позначення $u_{xy}=u_5$. Записуючи її розв'язок за допомогою функції Гріна та інтегруючи частинами доданки, що містять похідні від функції $u_5(x,y,t)$ та другі похідні від функцій $c_i(x,y,t)$, $i=\overline{1,3}$, отримаємо

$$u_5(x,y,t)=\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi_{\xi\eta}(\xi,\eta)d\xi d\eta+\sqrt{b_1(0)}\int\limits_0^t\int\limits_0^l\frac{\partial}{\partial\xi}\bigg(G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\times$$
$$\times\sqrt{b_1(\xi)}\bigg)\Big|_{\xi=0}a_1(\tau)\mu_{1\eta}(\eta,\tau)d\eta d\tau-\sqrt{b_1(h)}\int\limits_0^t\int\limits_0^l\frac{\partial}{\partial\xi}\bigg(\sqrt{b_1(\xi)}G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\bigg)\Big|_{\xi=h}\times$$
$$\times a_1(\tau)\mu_{2\eta}(\eta,\tau)d\eta d\tau+\sqrt{b_2(0)}\int\limits_0^t\int\limits_0^h\frac{\partial}{\partial\eta}\bigg(\sqrt{b_2(\eta)}G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\bigg)\Big|_{\eta=0}a_2(\tau)\times$$
$$\times\mu_{3\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau--\sqrt{b_2(l)}\int\limits_0^t\int\limits_0^h\frac{\partial}{\partial\eta}\bigg(\sqrt{b_2(\eta)}G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\bigg)\Big|_{\eta=l}a_2(\tau)\mu_{4\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^l\int_0^h G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)(a_1(\tau)b_1''(\xi)+a_2(\tau)b_2''(\eta))u_5d\xi d\eta d\tau-$$

$$-\int_0^t\int_0^l\int_0^h\Bigg(G_{11\xi}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\Bigg(\Bigg(c_1(\xi,\eta,\tau)+\frac{1}{2}a(\tau)b_1'(\xi)\Bigg)u_5+c_3(\xi,\eta,\tau)u_2+c_{1\eta}(\xi,\eta,\tau)u_1+$$

$$+c_{3\eta}(\xi,\eta,\tau)u+f_\eta(\xi,\eta,\tau)\Bigg)+$$

$$+G_{11\eta}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\Bigg(\Bigg(c_2(\xi,\eta,\tau)+\frac{1}{2}a(\tau)b_2'(\eta)\Bigg)u_5+c_{2\xi}(\xi,\eta,\tau)u_2\Bigg)\Bigg)d\xi d\eta d\tau. \qquad (19)$$

З (19) видно, що ніяких додаткових припущень на гладкість коефіцієнтів рівняння (1) не потрібно.

Виведемо з (5) рівняння для знаходження функцій $a_1(t)$ та $a_2(t)$. Спочатку приймемо в (1) $x=0$, $y=0$. Тоді

$$u_t(0,0,t)=a_1(t)b_1(0)u_3(0,0,t)+a_2(t)b_2(0)u_4(0,0,t)+c_1(0,0,t)u_1(0,0,t)+$$

$$+c_2(0,0,t)u_2(0,0,t)+c_3(0,0,t)u(0,0,t)+f(0,0,t).$$

Продиференціювавши перше співвідношення в (5), матимемо

$$u_t(0,0,t)=\nu_1'(t).$$

Прирівнявши праві частини двох останніх рівностей і врахувавши крайові умови (3), (4) та умову перевизначення (5), одержуємо

$$a_1(t)b_1(0)u_3(0,0,t)+a_2(t)b_2(0)u_4(0,0,t)+c_1(0,0,t)\mu_1(0,t)+c_2(0,0,t)\mu_3(0,t)+$$

$$+c_3(0,0,t)\nu_1(t)+f(0,0,t)=\nu_1'(t), \quad t\in[0,T]. \qquad (20)$$

Співвідношення

$$a_1(t)b_1(h)u_3(h,0,t)+a_2(t)b_2(0)u_4(h,0,t)+c_1(h,0,t)\mu_2(0,t)+c_2(h,0,t)\mu_3(h,t)+$$

$$+c_3(h,0,t)\nu_2(t)+f(h,0,t)=\nu_2'(t), \quad t\in[0,T], \qquad (21)$$

знаходиться так само.

Розв'язуючи систему (20), (21) стосовно невідомих функцій $a_1(t)$ та $a_2(t)$, приходимо до такої системи:

$$a_1(t)S_3(t)=S_1(t)u_4(h,0,t)-S_2(t)u_4(0,0,t), \quad t\in[0,T], \qquad (22)$$

$$a_2(t)b_2(0)S_3(t)=S_2(t)b_1(0)u_3(0,0,t)-S_1(t)b_1(h)u_3(h,0,t), \quad t\in[0,T], \qquad (23)$$

де $S_3(t)=b_1(0)u_3(0,0,t)u_4(h,0,t)-b_1(h)u_3(h,0,t)u_4(0,0,t)$.

Визначимо оцінку функції $S_3(t)$ знизу. Зобразимо її так:

$$S_3(t)=(b_1(0)-b_1(h))u_3(h,0,t)u_4(h,0,t)+b_1(0)u_4(h,0,t)(u_3(0,0,t)-u_3(h,0,t))+$$

$$+b_1(h)u_3(h,0,t)(u_4(h,0,t)-u_4(0,0,t)),\quad t\in[0,T], \tag{24}$$

і покажемо, що в (24) перший доданок додатний, інші – невід'ємні на деякому ненульовому часовому проміжку.

З умови (A2) та (13)–(16) випливає, що при $t=0$ в (17), (18) є лише додатні доданки, а всі інші обертаються в нуль. Тому

$$u_3(x,y,0)=\frac{1}{b_1(x)}\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{22}(x,y,0,\xi,\eta,0)b_1(\xi)\varphi_{\xi\xi}(\xi,\eta)d\xi d\eta=\varphi_{xx}(x,y),\quad (x,y)\in\overline{D}, \tag{25}$$

$$u_4(x,y,0)=\frac{1}{b_2(y)}\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{22}(x,y,0,\xi,\eta,0)b_2(\eta)\varphi_{\eta\eta}(\xi,\eta)d\xi d\eta=\varphi_{yy}(x,y),\quad (x,y)\in\overline{D}. \tag{26}$$

Отже, існує $T_1, 0<T_1\leqslant T$ таке, що правильні оцінки

$$u_3(x,y,t)\geqslant\frac{1}{2}\min\varphi_{xx}(x,y)=C_1>0,\quad (x,y)\in\overline{D}, t\in[0,T_1], \tag{27}$$

$$u_4(x,y,t)\geqslant\frac{1}{2}\min\varphi_{yy}(x,y)=C_2>0,\quad (x,y)\in\overline{D}, t\in[0,T_1]. \tag{28}$$

Використавши (25), запишемо $u_3(x,0,t)$ в такому вигляді:

$$u_3(x,0,t)=\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{22}(x,0,t,\xi,\eta,0)\varphi_{\xi\xi}(\xi,\eta)d\xi d\eta+$$

$$+\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{22}(x,0,t,\xi,\eta,0)\frac{b_1(\xi)-b_1(x)}{b_1(x)}\varphi_{\xi\xi}(\xi,\eta)d\xi d\eta+O(t), \tag{29}$$

де на основі теореми 1 [7, с. 15] другий доданок в (29) прямує до нуля, коли $t\to 0$. Розглянемо різницю

$$u_3(0,0,t)-u_3(h,0,t)=\int\limits_0^l\int\limits_0^h\left(G_{22}(0,0,t,\xi,\eta,0)-G_{22}(h,0,t,\xi,\eta,0)\right)\varphi_{\xi\xi}(\xi,\eta)d\xi d\eta+O(t)=$$

$$=\frac{1}{\pi\sqrt{\alpha_1(t)\alpha_2(t)}}\int\limits_0^l\frac{1}{\sqrt{b_2(\eta)}}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{(\beta_2(\eta)+2mL)^2}{4\alpha_2(t)}\right)d\eta\times$$

$$\times\int\limits_0^h\frac{\varphi_{\xi\xi}(\xi,\eta)}{\sqrt{b_1(\xi)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{(\beta_1(\xi)+nH)^2}{4\alpha_1(t)}\right)d\xi+O(t), \tag{30}$$

де в інтегралі за змінною ξ проведемо заміну змінних $\beta_1(\xi) = \zeta$ і розіб'ємо його на два: від 0 до $H/2$ і від $H/2$ до H. В інтегралі від $H/2$ до H зробимо заміну $H - \zeta = s$. Після нескладних перетворень матимемо

$$u_3(0,0,t) - u_3(h,0,t) = \frac{1}{\pi\sqrt{\alpha_1(t)\alpha_2(t)}} \int\limits_0^l \frac{1}{\sqrt{b_2(\eta)}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(\beta_2(\eta)+2mL)^2}{4\alpha_2(t)}\right) d\eta \times$$

$$\times \int\limits_0^{\frac{H}{2}} \left(\varphi_{\xi\xi}(\beta_1^{-1}(\zeta),\eta) - \varphi_{\xi\xi}(\beta_1^{-1}(H-\zeta),\eta)\right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{(\zeta+nH)^2}{4\alpha_1(t)}\right) d\zeta + O(t). \tag{31}$$

Врахувавши (A2), з (31) випливає існування такого T_2, $0 < T_2 \leqslant T$, що правильна оцінка

$$u_3(0,0,t) - u_3(h,0,t) \geqslant 0, \quad t \in [0, T_2]. \tag{32}$$

Так само знаходимо аналогічне співвідношення для різниці других похідних за змінною y:

$$u_4(0,0,t) - u_4(h,0,t) \leqslant 0, \quad t \in [0, T_3]. \tag{33}$$

Враховуючи (27), (28) та (32), (33), з (24) отримуємо оцінку

$$S_3(t) \geqslant \frac{(b_1(0) - b_1(h))}{4} C_1 C_2 > 0, \quad t \in [0, T_4], \tag{34}$$

де $T_4 = \min\limits_{i=\overline{1,3}} T_i$.

Тоді на основі (34) з (22), (23) визначаємо систему для знаходження невідомих функцій $a_k(t), k = 1, 2$

$$a_1(t) = \frac{S_1(t)u_4(h,0,t) - S_2(t)u_4(0,0,t)}{S_3(t)}, \quad t \in [0, T_4], \tag{35}$$

$$a_2(t) = \frac{S_2(t)b_1(0)u_3(0,0,t) - S_1(t)b_1(h)u_3(h,0,t)}{b_2(0)S_3(t)}, \quad t \in [0, T_4]. \tag{36}$$

Отож, задача (1)-(5) зведена до системи рівнянь (9)-(11), (17)-(19), (35), (36) і розв'язок цієї задачі та функції $u_1 = u_x(x,y,t), u_2 = u_y(x,y,t), u_3 = u_{xx}(x,y,t), u_4 = u_{yy}(x,y,t), u_5 = u_{xy}(x,y,t)$ задовольняють цю систему. З іншого боку, якщо $(a_1(t), a_2(t), u, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) \in (C[0,T]^2 \times (C(\overline{\Omega}_{T_4})^6), a(t) > 0, t \in [0, T_4])$ – розв'язок цієї системи, то, використовуючи властивість єдиності розв'язку систем інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду, легко визначити, що $u_1 = u_x, u_2 = u_y, u_3 = u_{xx}, u_4 = u_{yy}, u_5 = u_{xy}$ і функція $u(x,y,t)$ є розв'язком рівняння (6). На основі властивостей об'ємних потенціалів [7], визначаємо, що $u \in C^{2,1}(\overline{\Omega}_{T_4})$ і є розв'язком задачі (1)-(4). Виконання умов (5) випливає з рівностей (35), (36).

Отже, вихідна задача і система рівнянь (9)-(11), (17)-(19), (35), (36) еквівалентні при $(x,y) \in \overline{D}, t \in [0, T_4]$.

Для доведення існування розв'язку отриманої системи використаємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора [8]. Передусім з'ясуємо апріорні оцінки розв'язків цієї системи.

Оскільки

$$a_1(t) = \frac{S_1(t)(u_4(h,0,t) - u_4(0,0,t))}{S_3(t)} + \frac{(S_1(t) - S_2(t))u_4(0,0,t)}{S_3(t)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{S_1(t)}{b_1(h)u_3(h,0,t)} + \frac{S_1(t) - S_2(t)}{(b_1(0) - b_1(h))u_3(h,0,t)} = \frac{b_1(0)S_1(t) - b_1(h)S_2(t)}{b_1(h)(b_1(0) - b_1(h))u_3(h,0,t)}, \ t \in [0, T_4],$$

де в другому доданку $S_3(t)$ записано в такому вигляді:

$$S_3(t) = (b_1(0) - b_1(h))u_3(h,0,t)u_4(0,0,t) + b_1(0)u_4(0,0,t)(u_3(0,0,t) - \\ - u_3(h,0,t)) + b_1(0)u_3(0,0,t)(u_4(h,0,t) - u_4(0,0,t)).$$

Використавши (27), з попередньої нерівності одержимо оцінку $a(t)$ зверху

$$a_1(t) \leqslant \frac{\max\limits_{t\in[0,T]} (b_1(0)S_1(t) - b_1(h)S_2(t))}{C_1 b_2(h)(b_1(0) - b_1(h))} = C_3 < \infty, \quad t \in [0, T_4]. \tag{37}$$

Таким самим способом визначаємо, що

$$a_2(t) \leqslant C_4 < \infty, \quad t \in [0, T_4]. \tag{38}$$

Для оцінки $a_i(t)$, $i = 1, 2$ знизу попередньо оцінимо $|u(x,y,t)|$, $|u_k(x,y,t)|$, $k = \overline{1,5}$, зверху.

Зі співвідношення (11), з врахуванням (37), (38) знаходимо, що

$$U_0(t) \leqslant C_5 + C_6 \int\limits_0^t (U_0(\tau) + U_1(\tau) + U_2(\tau))\, d\tau, \quad t \in [0, T_4], \tag{39}$$

де $U_0(t) = \max\limits_{(x,y)\in\overline{D}} |u(x,y,t)|, U_k(t) = \max\limits_{(x,y)\in\overline{D}} |u_k(x,y,t)|, k = \overline{1,5}$.

Так само з (9), (10) отримуємо

$$U_1(t) \leqslant C_7 + C_8 \int\limits_0^t \frac{U_0(\tau) + U_1(\tau) + U_2(\tau)}{\sqrt{\alpha_1(t) - \alpha_1(\tau)}} d\tau, \quad t \in [0, T_4], \tag{40}$$

$$U_2(t) \leqslant C_9 + C_{10} \int\limits_0^t \frac{U_0(\tau) + U_1(\tau) + U_2(\tau)}{\sqrt{\alpha_2(t) - \alpha_2(\tau)}} d\tau, \quad t \in [0, T_4]. \tag{41}$$

Тоді з (17)-(19) випливає, що

$$U_3(t) \leqslant C_{11} + C_{12} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\alpha_1(t) - \alpha_1(\tau)}} +$$

$$+C_{13}\int\limits_0^t \frac{U_0(\tau)+U_1(\tau)+U_2(\tau)+U_3(\tau)+U_5(\tau)}{\sqrt{\alpha_1(t)-\alpha_1(\tau)}}d\tau, \quad t\in[0,T_4], \tag{42}$$

$$U_4(t)\leqslant C_{14}+C_{15}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\alpha_2(t)-\alpha_2(\tau)}}+$$

$$+C_{16}\int\limits_0^t \frac{U_0(\tau)+U_1(\tau)+U_2(\tau)+U_4(\tau)+U_5(\tau)}{\sqrt{\alpha_2(t)-\alpha_2(\tau)}}d\tau, \quad t\in[0,T_4], \tag{43}$$

$$U_5(t)\leqslant C_{17}+C_{18}\int\limits_0^t U_5(\tau)d\tau+C_{19}\int\limits_0^t \frac{(U_0(\tau)+U_1(\tau)+U_2(\tau)+U_5(\tau))d\tau}{\sqrt{\alpha_1(t)-\alpha_1(\tau)}}+$$

$$+C_{20}\int\limits_0^t \frac{U_2(\tau)+U_5(\tau)}{\sqrt{\alpha_2(t)-\alpha_2(\tau)}}d\tau, \quad t\in[0,T_4]. \tag{44}$$

Позначимо $\sum\limits_{i=0}^{5}U_i(t)=U(t)$. Додавши (39)-(44), з'ясовуємо, що справджується нерівність

$$U(t)\leqslant C_{21}+C_{22}\int\limits_0^t\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_1(t)-\alpha_1(\tau)}}+\frac{1}{\sqrt{\alpha_2(t)-\alpha_2(\tau)}}\right)d\tau+$$

$$+C_{23}\int\limits_0^t\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_1(t)-\alpha_1(\tau)}}+\frac{1}{\sqrt{\alpha_2(t)-\alpha_2(\tau)}}\right)U(\tau)d\tau, \quad t\in[0,T_4]. \tag{45}$$

Введемо таку функцію:

$$A(t)\equiv\frac{1}{\sqrt{\min\limits_{\tau\in[0,t]}a_1(\tau)}}+\frac{1}{\sqrt{\min\limits_{\tau\in[0,t]}a_2(\tau)}}.$$

Оцінимо знизу знаменники підінтегральних виразів в (45)

$$U(t)\leqslant C_{21}+C_{24}\sqrt{t}A(t)+C_{25}A(t)\int\limits_0^t\frac{U(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \quad t\in[0,T_4].$$

Запишемо цю нерівність у такому вигляді:

$$U(t)\leqslant p(t)+q(t)\int\limits_0^t\frac{U(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \quad t\in[0,T_4], \tag{46}$$

де $p(t) = C_{21} + C_{24}\sqrt{t}A(t)$, $q(t) = C_{25}A(t)$. Домножимо (46) на $\sqrt{t-\sigma}$ і проінтегруємо від 0 до t

$$\int_0^t \frac{U(\sigma)d\sigma}{\sqrt{t-\sigma}} \leqslant \int_0^t \frac{p(\sigma)d\sigma}{\sqrt{t-\sigma}} + \int_0^t \frac{q(\sigma)d\sigma}{\sqrt{t-\sigma}} \int_0^\sigma \frac{U(\tau)d\tau}{\sqrt{\sigma-\tau}}, \quad t \in [0, T_4]. \tag{47}$$

Змінимо порядок інтегрування в останньому доданку і врахуємо рівність

$$\int_\tau^t \frac{d\sigma}{\sqrt{(t-\tau)(\sigma-\tau)}} = \pi$$

та монотонність функції $q(t)$, внаслідок чого отримаємо оцінку

$$\int_0^t \frac{U(\sigma)d\sigma}{\sqrt{t-\sigma}} \leqslant \int_0^t \frac{p(\sigma)d\sigma}{\sqrt{t-\sigma}} + \pi q(t) \int_0^t U(\tau)d\tau, \quad t \in [0, T_4]. \tag{48}$$

Підставимо (48) в (46) і введемо позначення $\psi(t) \equiv p(t) + q(t) \int\limits_0^t \frac{p(\sigma)d\sigma}{\sqrt{t-\sigma}}$, $\chi(t) \equiv \pi q^2(t)$

$$U(t) \leqslant \psi(t) + \chi(t) \int_0^t U(\tau)d\tau, \quad t \in [0, T_4]. \tag{49}$$

Ліву і праву частину (49) розділимо на $\chi(t)$ і позначимо $\omega(t) \equiv \dfrac{\psi(t)}{\chi(t)} + \int\limits_0^t U(\tau)d\tau$. Тоді

$$U(t) \leqslant \chi(t)\omega(t). \tag{50}$$

Оскільки

$$\omega'(t) = \left(\frac{\psi(t)}{\chi(t)}\right)' + U(t) \leqslant \left(\frac{\psi(t)}{\chi(t)}\right)' + \chi(t)\omega(t),$$

то справджується нерівність

$$\omega'(t) - \chi(t)\omega(t) \leqslant \left(\frac{\psi(t)}{\chi(t)}\right)',$$

з якої випливає таке співвідношення:

$$\left(\omega(t)e^{-\int\limits_0^t \chi(\sigma)d\sigma}\right)' \leqslant \left(\frac{\psi(t)}{\chi(t)}\right)' e^{-\int\limits_0^t \chi(\sigma)d\sigma}. \tag{51}$$

Зінтегруємо (51) на проміжку від 0 до t. Обчислюючи інтеграли, отриманій нерівності надамо такого вигляду:

$$\omega(t) \leqslant e^{\int\limits_0^t \chi(\sigma)d\sigma} \left(\frac{\psi(0)}{\chi(0)} + \int\limits_0^t \left(\frac{\psi(\tau)}{\chi(\tau)} \right)' e^{-\int\limits_0^\tau \chi(\sigma)d\sigma} d\tau \right) = \frac{\psi(t)}{\chi(t)} + \int\limits_0^t \psi(\tau) e^{\int\limits_\tau^t \chi(\sigma)d\sigma} d\tau.$$

Підставляючи останню нерівність в (50), з'ясовуємо, що

$$U(t) \leqslant \psi(t) + \chi(t) \int\limits_0^t \psi(\tau) e^{\int\limits_\tau^t \chi(\sigma)d\sigma} d\tau.$$

Повернувшись до функцій $p(t)$, $q(t)$ та змінивши порядок інтегрування, матимемо таку нерівність:

$$U(t) \leqslant p(t) + q(t) \int\limits_0^t \frac{p(\sigma)d\sigma}{\sqrt{t-\sigma}} + \pi q^2(t) \Bigg(\int\limits_0^t p(\tau) e^{\pi \int\limits_\tau^t q^2(\sigma)d\sigma} d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t p(z)dz \int\limits_z^t \frac{q(\tau)}{\sqrt{\tau - z}} e^{\pi \int\limits_\tau^t q^2(\sigma)d\sigma} d\tau \Bigg). \qquad (52)$$

Врахувавши вигляд функцій $p(t), q(t)$, надамо (52) такого вигляду:

$$U(t) \leqslant C_{21} + C_{24}\sqrt{t}A(t) + C_{25}A(t) \int\limits_0^t \frac{C_{21} + C_{24}\sqrt{\tau}A(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau +$$

$$+ \pi C_{25}^2 A^2(t) \Bigg(\int\limits_0^t \Big(C_{21} + + C_{24}\sqrt{\tau}A(\tau) \Big) e^{C_{25}^2 \pi \int\limits_\tau^t A^2(\sigma)d\sigma} d\tau + \qquad (53)$$

$$+ C_{25} \int\limits_0^t \Big(C_{21} + C_{24}\sqrt{z}A(z) \Big) dz \int\limits_z^t \frac{A(\tau)}{\sqrt{\tau - z}} e^{C_{25}^2 \pi \int\limits_\tau^t A^2(\sigma)d\sigma} d\tau \Bigg).$$

Оцінивши експоненти в (53) зверху і порахувавши одержані інтеграли, матимемо

$$U(t) \leqslant C_{21} + C_{26}\sqrt{t}A(t) + C_{27}tA^2(t) +$$

$$+ e^{C_{25}^2 \pi \int\limits_0^t A^2(\sigma)d\sigma} \Big(C_{28}tA^2(t) + C_{29}t^{\frac{3}{2}}A^3(t) + C_{30}t^2A^4(t) \Big).$$

Застосувавши нерівність Коші, приходимо до такого співвідношення:

$$U(t) \leqslant C_{31} + C_{32}tA^2(t) + \big(C_{33}t + C_{34}t^2A^4(t) \big) e^{C_{25}^2 \pi \int\limits_0^t A^2(\tau)d\tau}. \qquad (54)$$

З (35), (36), враховуючи додатність функцій u_3, u_4 на $[0, T_4]$, визначаємо такі оцінки:

$$a_1(t) \geqslant \frac{S_1(t) - S_2(t)}{b_1(0)u_3(0,0,t)}, \quad a_2(t) \geqslant \frac{(S_2(t)b_1(0) - S_1(t)b_1(h))}{b_1(0)b_2(0)u_4(h,0,t)}, \quad t \in [0, T_4],$$

звідки випливає, що

$$a_i(t) \geqslant \frac{C_{35}}{U(t)}, \quad i = 1, 2, \quad t \in [0, T_4]. \tag{55}$$

Оскільки знаменник правої частини (55) є монотонно зростаючою функцією, то справджується така нерівність:

$$\min_{\tau \in [0,t]} a_i(\tau) \geqslant \frac{C_{35}}{U(t)}, \quad i = 1, 2, \quad t \in [0, T_4].$$

Тоді

$$A(t) \leqslant C_{36}\sqrt{U(t)}, \quad t \in [0, T_4]$$

і (54) матиме такий вигляд:

$$A^2(t) \leqslant C_{37} + C_{38}tA^2(t) + \left(C_{39}t + C_{40}t^2A^4(t)\right) e^{C_{25}^2\pi \int\limits_0^t A^2(\tau)d\tau}. \tag{56}$$

Позначимо $A^2(t) \equiv w(t)$ і знайдемо T_5, $0 < T_5 \leqslant T$ таке, щоб $C_{38}T_5 \leqslant 1/2$. Тоді з (56) випливає, що

$$w(t) \leqslant C_{41} + \left(C_{42}t + C_{43}t^2w^2(t)\right) e^{C_{44}\int\limits_0^t w(\tau)d\tau}, \quad t \in [0, T_6],$$

де $T_6 = \min\{T_4, T_5\}$. Звідси

$$w(t)\left(1 - C_{43}t^2w(t)e^{C_{44}\int\limits_0^t w(\tau)d\tau}\right) \leqslant C_{41} + C_{42}te^{C_{44}\int\limits_0^t w(\tau)d\tau}, \quad t \in [0, T_6].$$

Існує T_7, $0 < T_7 \leqslant T$ таке, що $1 - C_{43}t^2w(t)e^{C_{44}\int\limits_0^t w(\tau)d\tau} \geqslant 1/2$, $t \in [0, T_7]$. Тоді

$$w(t) \leqslant C_{45} + C_{46}te^{C_{44}\int\limits_0^t w(\tau)d\tau}, \quad t \in [0, T_8], \tag{57}$$

де $T_8 = \min\{T_6, T_7\}$. Провівши заміну $e^{C_{44}\int\limits_0^t w(\tau)d\tau} \equiv z(t)$ та врахувавши, що $z(t) \geqslant 1$, (57) запишемо так:

$$\frac{z'(t)}{z^2(t)} \leqslant \frac{C_{44}C_{45}}{z(t)} + C_{44}C_{46}t \leqslant C_{47} + C_{48}t, \quad t \in [0, T_8]. \tag{58}$$

Зінтегруємо (58) на проміжку від 0 до t. Після перетворення матимемо

$$z(t) \leqslant \frac{1}{1 - C_{47}t - C_{49}t^2}, \quad t \in [0, T_8]. \tag{59}$$

Виберемо T_9, $0 < T_9 \leqslant T$ так, щоб $1 - C_{47}T_9 - C_{49}T_9^2 > 0$ і перепозначимо $T_0 = \min\{T_8, T_9\}$. З (59) отримуємо

$$z(t) \leqslant C_{50}, \quad t \in [0, T_0],$$

звідки, повернувшись до старих позначень, знаходимо оцінку

$$U(t) \leqslant C_{51}, \quad t \in [0, T_0].$$

Тоді з системи нерівностей (39)-(44) визначаємо такі оцінки:

$$|u(x,y,t)| \leqslant C_{52} < \infty, \quad |u_i(x,y,t)| \leqslant C_{53} < \infty, \quad i = \overline{1,5}, \quad (x,y,t) \in \overline{\Omega}_{T_0}. \tag{60}$$

За допомогою нерівностей (60) з (55) матимемо

$$a_i(t) \geqslant A_0 > 0, i = 1,2, \quad t \in [0, T_0]. \tag{61}$$

При наявності апріорних оцінок розв'язків системи (9)-(11), (17)-(19), (35), (36) перевірка умов теореми Шаудера проводиться аналогічно до роботи [2]. Теорему 1 доведено.

2. Розглянемо попередню задачу в класі функцій, неперервних за Гельдером. В області Ω_T дослідимо існування розв'язку оберненої задачі знаходження трійки функцій $(a_1, a_2, u) \in H^{\gamma/2}[0,T] \times H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{\Omega}_T), 0 < \gamma < 1, a_i(t) > 0, i = 1,2, t \in [0,T]$, що задовольняють умови (1)-(5). Правильна така теорема.

Теорема 2. *Нехай, крім умов (A2), (A3), виконується умова:*

$(A1^{'})$ $\varphi \in H^{2+\gamma}(\overline{D}), \mu_i \in H^{2+\gamma,1+\gamma/2}([0,l]\times[0,T]), i = 1,2, \mu_i \in H^{2+\gamma,1+\gamma/2}([0,h]\times[0,T]), i = 3,4, \nu_i \in H^{1+\gamma/2}[0,T], i = 1,2, b_1 \in C^2[0,h], b_2 \in C^2[0,l], f \in H^{2,2,\gamma/2}(\overline{\Omega}_T), c_i \in H^{1,1,\gamma/2}(\overline{\Omega}_T), i = \overline{1,3}$.

Тоді задача (1)-(5) має розв'язок в класі $H^{\gamma/2}[0,T_0] \times H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{\Omega}_{T_0})$, де $T_0, 0 < T_0 \leqslant T$, визначається вихідними даними задачі.

Доведення. Доведення цієї теореми аналогічне до доведення теореми 1, лише треба з'ясувати, що розв'язок системи (9)-(11), (17)-(19), (35), (36) належить класу функцій, неперервних за Гельдером $(a, u, u_i) \in H^{\gamma/2}[0,T_0] \times (H^{\gamma,\gamma/2}(\overline{\Omega}_{T_0}))^6$, $i = \overline{1,5}$.

Для ядер $K_{ij}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$ інтегральних рівнянь (9)-(11), (17)-(19) справджуються оцінки

$$\int_0^l \int_0^h |K_{ij}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)| d\xi d\eta \leqslant \frac{C_1}{\sqrt{t-\tau}},$$

$$\int_0^t \int_0^l \int_0^h |K_{ij}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)| d\xi d\eta d\tau \leqslant C_2\sqrt{t}.$$

Тому згідно з теоремою 4 [9, с. 422] отримуємо, що $(u, u_i) \in (H^{\gamma,\gamma/2}(\overline{\Omega}_{T_0}))^6$, $i = \overline{1,5}$. Тоді з системи рівнянь (35)-(36) випливає, що $a_i(t) \in H^{\gamma/2}[0, T_0]$, $i = 1, 2$ і на основі теореми 5.3 [10, с. 364] робимо висновок, що $u(x, y, t) \in H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{\Omega}_{T_0})$.

3. Перейдемо до питання єдиності розв'язку задачі (1)-(5).

Теорема 3. *Нехай справджується умова*

(A4) $c_i(x, y, t) \in H^{\gamma,\gamma,\gamma/2}(\overline{\Omega}_T)$, $i = \overline{1,3}$, $b_1(x) \in H^\gamma[0, h]$, $b_1(x) > 0$, $b_2(y) \in H^\gamma[0, l]$, $b_2(y) > 0$, $b_1(0) - b_1(h) > 0$, $\varphi_{xx}(x, y) > 0$, $\varphi_{yy}(x, y) > 0$, $(x, y) \in [0, h] \times [0, l]$, $\varphi_{xx}(\beta_1^{-1}(\zeta), y) - \varphi_{xx}(\beta_1^{-1}(H - \zeta), y) \geqslant 0$, $\varphi_{yy}(\beta_1^{-1}(\zeta), y) - \varphi_{yy}(\beta_1^{-1}(H - \zeta), y) \leqslant 0$, $(\zeta, y) \in [0, H/2] \times [0, l]$.

Тоді розв'язок задачі (1)-(5) єдиний в класі $H^{\gamma/2}[0, T_0^*] \times H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{\Omega}_{T_0^*})$, *де число* $T_0^*, 0 < T_0^* \leqslant T$ *визначається вихідними даними задачі.*

Доведення. Припустимо, що існує два розв'язки цієї задачі $(a_{11}, a_{12}, u_1), (a_{21}, a_{22}, u_2)$. Введемо такі позначення $A_1(t) = a_{11}(t) - a_{21}(t), A_2(t) = a_{12}(t) - a_{22}(t), U(x, y, t) = u_1(x, y, t) - u_2(x, y, t)$. Тоді трійка функцій (A_1, A_2, U) задовольняє умови

$$U_t = a_{11}(t)b_1(x)U_{xx} + a_{12}(t)b_2(y)U_{yy} + A_1(t)b_1(x)u_{2xx} + A_2(t)b_2(y)u_{2yy}+$$

$$+c_1(x, y, t)U_x + c_2(x, y, t)U_y + c_3(x, y, t)U, \quad (x, y, t) \in \Omega_T, \tag{62}$$

$$U(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in [0, h] \times [0, l], \tag{63}$$

$$U_x(0, y, t) = U_x(h, y, t) = 0, \quad (y, t) \in [0, l] \times [0, T], \tag{64}$$

$$U_y(x, 0, t) = U_y(x, l, t) = 0, \quad (x, t) \in [0, h] \times [0, T], \tag{65}$$

$$U(0, 0, t) = U(h, 0, t) = 0, \quad t \in [0, T]. \tag{66}$$

Використовуючи функцію Гріна G_{22}^* задачі (62)-(65), її розв'язок зобразимо так:

$$U(x, y, t) = \int_0^t \int_0^l \int_0^h G_{22}^*(x, y, t, \xi, \eta, \tau)\big(A_1(\tau)b_1(\xi)u_{2\xi\xi} + A_2(\tau)b_2(\eta)u_{2\eta\eta}\big)d\xi d\eta d\tau, \tag{67}$$

$$(x, y, t) \in \overline{\Omega}_T.$$

Приймемо в (62) $x = 0, y = 0$, врахуємо умови (63)-(66) і зображення розв'язку (67). Отримаємо

$$-\big(A_1(t)b_1(0)u_{2xx}(0, 0, t) + A_2(t)b_2(0)u_{2yy}(0, 0, t)\big) =$$

$$= a_{11}(t)b_1(0) \int_0^t d\tau \int_0^l \int_0^h G_{22xx}^*(0, 0, t, \xi, \eta, \tau)\big(A_1(\tau)b_1(\xi)u_{2\xi\xi}+$$

$$+A_2(\tau)b_2(\eta)u_{2\eta\eta}\big)d\xi d\eta + a_{12}(t)b_2(0) \int_0^t d\tau \int_0^l \int_0^h G_{22yy}^*(0, 0, t, \xi, \eta, \tau)\big(A_1(\tau)b_1(\xi)u_{2\xi\xi}+$$

$$+ A_2(\tau)b_2(\eta)u_{2\eta\eta}\big)d\xi d\eta, \qquad t \in [0, T]. \tag{68}$$

Аналогічно, при $x = h, y = 0$ матимемо

$$-\big(A_1(t)b_1(h)u_{2xx}(h,0,t) + A_2(t)b_2(0)u_{2yy}(h,0,t)\big) =$$

$$= a_{11}(t)b_1(h)\int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^l \int\limits_0^h G^*_{22xx}(h,0,t,\xi,\eta,\tau)\big(A_1(\tau)b_1(\xi)u_{2\xi\xi}+$$

$$+A_2(\tau)b_2(\eta)u_{2\eta\eta}\big)d\xi d\eta + a_{12}(t)b_2(0)\int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^l \int\limits_0^h G^*_{22yy}(h,0,t,\xi,\eta,\tau)\big(A_1(\tau)b_1(\xi)u_{2\xi\xi}+$$

$$+A_2(\tau)b_2(\eta)u_{2\eta\eta}\big)d\xi d\eta, \qquad t \in [0,T]. \tag{69}$$

Розв'язуючи (68), (69) стосовно невідомих функцій $A_2(t), A_2(t)$, приходимо до такої системи:

$$-A_1(t)\bigg(b_1(0)u_{2xx}(0,0,t)u_{2yy}(h,0,t) - b_1(h)u_{2xx}(h,0,t)u_{2yy}(0,0,t)\bigg) =$$

$$= a_{11}(t)\bigg(b_1(0)u_{2yy}(h,0,t)\int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^l \int\limits_0^h G^*_{22xx}(0,0,t,\xi,\eta,\tau)\times$$

$$\times\bigg(A_1(\tau)b_1(\xi)u_{2\xi\xi} + A_2(\tau)b_2(\eta)u_{2\eta\eta}\bigg)d\xi d\eta-$$

$$-b_1(h)u_{2yy}(0,0,t)\int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^l \int\limits_0^h G^*_{22xx}(h,0,t,\xi,\eta,\tau)\times$$

$$\times\bigg(A_1(\tau)b_1(\xi)u_{2\xi\xi} + A_2(\tau)b_2(\eta)u_{2\eta\eta}\bigg)d\xi d\eta\bigg)+$$

$$+a_{12}(t)b_2(0)\bigg(u_{2yy}(h,0,t)\int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^l \int\limits_0^h G^*_{22yy}(0,0,t,\xi,\eta,\tau)\times$$

$$\times\bigg(A_1(\tau)b_1(\xi)u_{2\xi\xi} + A_2(\tau)b_2(\eta)u_{2\eta\eta}\bigg)d\xi d\eta-$$

$$-u_{2yy}(0,0,t)\int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^l \int\limits_0^h G^*_{22yy}(h,0,t,\xi,\eta,\tau)\times$$

$$\times\bigg(A_1(\tau)b_1(\xi)u_{2\xi\xi} + A_2(\tau)b_2(\eta)u_{2\eta\eta}\bigg)d\xi d\eta\bigg), \tag{70}$$

$$-A_2(t)b_2(0)\bigg(b_1(h)u_{2xx}(h,0,t)u_{2yy}(0,0,t) - b_1(0)u_{2xx}(0,0,t)u_{2yy}(h,0,t)\bigg) =$$

$$= a_{11}(t)b_1(0)b_1(h)\Bigg(u_{2xx}(h,0,t)\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l\int\limits_0^h G^*_{22xx}(0,0,t,\xi,\eta,\tau)\times$$

$$\times\Bigg(A_1(\tau)b_1(\xi)u_{2\xi\xi}+A_2(\tau)b_2(\eta)u_{2\eta\eta}\Bigg)d\xi d\eta-$$

$$-u_{2xx}(0,0,t)\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l\int\limits_0^h G^*_{22xx}(h,0,t,\xi,\eta,\tau)\times$$

$$\times\Bigg(A_1(\tau)b_1(\xi)u_{2\xi\xi}+A_2(\tau)b_2(\eta)u_{2\eta\eta}\Bigg)d\xi d\eta\Bigg)+$$

$$+a_{12}(t)b_2(0)\Bigg(b_1(h)u_{2xx}(h,0,t)\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l\int\limits_0^h G^*_{22yy}(0,0,t,\xi,\eta,\tau)\times$$

$$\times\Bigg(A_1(\tau)b_1(\xi)u_{2\xi\xi}+A_2(\tau)b_2(\eta)u_{2\eta\eta}\Bigg)d\xi d\eta-$$

$$-b_1(0)u_{2xx}(0,0,t)\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l\int\limits_0^h G^*_{22yy}(h,0,t,\xi,\eta,\tau)\times$$

$$\times\Bigg(A_1(\tau)b_1(\xi)u_{2\xi\xi}+A_2(\tau)b_2(\eta)u_{2\eta\eta}\Bigg)d\xi d\eta\Bigg). \qquad (71)$$

Оскільки функції $(a_{21}(t), a_{21}(t), u_2(x,y,t))$ є розв'язком задачі (1)-(5), то з умови $(A4)$ випливає, що $b_1(0)u_{2xx}(0,0,t)u_{2yy}(h,0,t)-b_1(h)u_{2xx}(h,0,t)u_{2yy}(0,0,t)>0$, $t\in[0,T_0^*]$. Отже, (70), (71) – система однорідних рівнянь Вольтерра другого роду з інтегровними ядрами, і внаслідок єдиності її розв'язку $A_i(t)\equiv 0$, $i=1,2$, $t\in[0,T_0^*]$. Позаяк розв'язок прямої задачі єдиний, то робимо висновок, що $U(x,y,t)\equiv 0$, $(x,y,t)\in\overline{\Omega}_{T_0^*}$. Теорему доведено.

---

1. *Cannon J., Rundell W.* Recovering a time dependent coefficient in a parabolic differential equation// Journal of mathematical analysis and application.– 1991.– 160.– P.572-582.

2. *Ковальчук С. М.* Визначення коефіцієнта температуропровідності прямокутної пластини // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.– 1996.– Вип. 45.– С.96-103.

3. *Сагайдак Р. В.* Про одну обернену задачу для двовимірного рівняння параболічного типу в прямокутнику // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.– 2003.– Вип. 62.– С.117-128.

4. *Іванчов М. І.* Обернена задача теплопровідності в анізотропному тілі // Мат. методи та фіз.-мех. поля.– 2000.– 43, № 1.– С.45-50.

5. *Сагайдак Р. В.* Про існування та єдиність розв'язку оберненої задачі визначення старших коефіцієнтів у двовимірному параболічному рівнянні // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.– 2005.– Вип. 64.– С.236-244.

6. *Іванчов М. І.* Про одну обернену задачу для параболічного рівняння // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.– 1997.– Вип. 47.– С.63-71.

7. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа.– М., 1968.

8. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа.– М., 1965.

9. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.– М., 1977.

10. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.– М., 1967.

DETERMINATION OF UNKNOWN PARAMETERS IN MAJOR COEFFICIENTS OF TWO-DIMENSIONAL PARABOLIC EQUATION

Roman Sagaydak

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

There are obtained some conditions of the existence and uniqueness of a solution for inverse problem with unknown parameters in major coefficients of two-dimensional parabolic equation. We assumed that these coefficients have the form of product of two functions depending on the time and one of the space variables accordingly.

Key words: inverse problem, parabolic equation.

Стаття надійшла до редколегії 02.06.2006

Прийнята до друку 02.11.2006

УДК 517.95

СИЛЬНО ВИРОДЖЕНА ОБЕРНЕНА ПАРАБОЛІЧНА ЗАДАЧА З ЗАГАЛЬНОЮ ПОВЕДІНКОЮ КОЕФІЦІЄНТІВ

Наталія САЛДІНА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

Розглянуто обернену задачу визначення залежного від часу коефіцієнта в параболічному рівнянні. Коефіцієнт при старшій похідній подано у вигляді добутку двох функцій, залежних від часу, одна з яких перетворюється в нуль у початковий момент часу. Поведінка інших коефіцієнтів описується деякими заданими функціями загального вигляду. З'ясовано умови існування та єдиності класичного розв'язку задачі.

Ключові слова: обернена задача, теорема Шаудера, сильне виродження, параболічне рівняння.

Оберненим задачам для параболічних рівнянь з виродженням присвячені праці [1]-[4]. В них припускалося, що залежний від часу старший коефіцієнт, який є невідомим, прямує до нуля при $t \to 0$ за степеневим законом. Випадок слабкого виродження досліджено для рівняння теплопровідності [2] та для повного параболічного рівняння, причому для існування розв'язку від молодших коефіцієнтів рівняння не вимагалося прямування їх до нуля при $t \to 0$ [4]. Аналогічний випадок для сильного виродження розглянули тільки для рівняння теплопровідності [1]. Мета нашої праці — дослідити обернену задачу для параболічного рівняння з довільним прямуванням до нуля старшого коефіцієнта і визначити залежність від нього поведінки молодших членів.

1. Формулювання задачі та позначення. В області $Q_T \equiv \{(x,t) : 0 < x < h, 0 < t < T\}$ розглянемо параболічне рівняння

$$u_t = a(t)\psi_0(t)u_{xx} + b(x,t)\psi_1(t)u_x + c(x,t)\psi_2(t)u + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \qquad (1)$$

з невідомим коефіцієнтом $a(t) > 0, t \in [0,T]$, початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,h], \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(h,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

та умовою перевизначення

$$a(t)\psi_0(t)u_x(0,t) = \mu_3(t), \quad t \in [0,T]. \tag{4}$$

Будемо вважати, що $\psi_i(t), i = \overline{0,2}$– відомі монотонно зростаючі функції, $\psi_i(0) = 0, i = \overline{0,2}$. Під розв'язком задачі (1)-(4) розуміємо пару функцій $(a(t), u(x,t)) \in C[0,T] \times C^{2,1}(Q_T) \bigcap C(\overline{Q}_T), u_x(0,t) \in C(0,T], a(t) > 0, t \in [0,T]$.

Означення. *Виродження називатимемо сильним, якщо при* $t \to +0$ *вираз* $\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta_0(t) - \theta_0(\tau)}}$ *прямує до нескінченності, де* $\theta_0(t) = \int\limits_0^t \psi_0(\sigma)d\sigma$.

Основні результати зазначено в теоремі.

Теорема існування та єдиності. *Припустимо, що виконуються умови:*

1) $\varphi \in C^1[0,h]$; $\mu_i \in C^1[0,T]$, $i = 1,2$; $\mu_3, \psi_i \in C[0,T], i = \overline{0,2}$; $f \in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$; $b, c \in C(\overline{Q}_T)$ *та задовольняють умову Гельдера в області* $\overline{Q}_T$ *за змінною* x *з показником* $\alpha, 0 < \alpha < 1$, *рівномірно стосовно* $t, t \in [0,T]$;

2) $f(0,t) - \mu_1'(t) > 0, t \in [0,T]$; $\mu_3(t) > 0, t \in (0,T]$, *існує скінченна додатна границя* $\lim\limits_{t\to+0} \frac{\mu_3(t)}{\sqrt{\psi_0(t)t}} \equiv M$, $\psi_i(t)$– *монотонно зростаючі функції,* $\psi_i(t) > 0, t \in (0,T], \psi_i(0) = 0, i = 0,1,2$, $\lim\limits_{t\to+0} \int\limits_0^t \frac{\psi_1^2(\sigma)\sigma}{\theta_0(\sigma)} d\sigma = 0$; $\lim\limits_{t\to+0} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta_0(t) - \theta_0(\tau)}} = \infty$;

3) $\varphi(0) = \mu_1(0), \quad \varphi(h) = \mu_2(0)$.

Тоді можна зазначити таке число $t_0, 0 < t_0 \leqslant T$, *яке визначається вихідними даними задачі, що існує єдиний розв'язок* $(a(t), u(x,t))$ *задачі (1)-(4) при* $x \in [0,h], t \in [0,t_0]$.

Введемо такі позначення. Через $u_0(x,t)$ позначимо розв'язок рівняння теплопровідності

$$u_t = a(t)\psi_0(t)u_{xx} + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T \tag{5}$$

з умовами (2),(3), який має вигляд

$$u_0(x,t) = \int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,0)\varphi(\xi)d\xi + \int\limits_0^t G_{1\xi}(x,t,0,\tau)a(\tau)\psi_0(\tau)\mu_1(\tau)d\tau -$$

$$- \int\limits_0^t G_{1\xi}(x,t,h,\tau)a(\tau)\psi_0(\tau)\mu_2(\tau)d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau. \tag{6}$$

Через $G_k(x,t,\xi,\tau)$ позначено функції Гріна першої та другої крайових задач для рівняння (5), які мають вигляд

$$G_k(x,t,\xi,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)+\right.$$

$$\left.+(-1)^k\exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)\right),\quad k=1,2,\quad \theta(t)=\int\limits_0^t a(\tau)\psi_0(\tau)d\tau. \tag{7}$$

Припускаючи, що функція $a(t)$ відома, вводячи позначення $v(x,t)\equiv u_x(x,t)$, задачу (1)-(4) замінимо еквівалентною системою рівнянь

$$u(x,t)=u_0(x,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)(b(\xi,\tau)\psi_1(\tau)v(\xi,\tau)+c(\xi,\tau)\psi_2(\tau)u(\xi,\tau))d\xi d\tau, \tag{8}$$

$$v(x,t)=v_0(x,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)(b(\xi,\tau)\psi_1(\tau)v(\xi,\tau)+c(\xi,\tau)\psi_2(\tau)u(\xi,\tau))d\xi d\tau, \tag{9}$$

$$a(t)=\frac{\mu_3(t)}{\psi_0(t)v(0,t)},\quad t\in[0,T], \tag{10}$$

де вираз $v_0(x,t)$ отримується з (6) диференціюванням та інтегруванням частинами

$$v_0(x,t)=\int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,0)\varphi'(\xi)d\xi+\int\limits_0^t G_2(x,t,0,\tau)(f(0,\tau)-\mu_1'(\tau))d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t G_2(x,t,h,\tau)(\mu_2'(\tau)-f(h,\tau))d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)f_\xi(\xi,\tau)d\xi d\tau. \tag{11}$$

2. Доведення існування розв'язку. Існування розв'язку будемо доводити за допомогою теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора, тому з'ясуємо апріорні оцінки розв'язків системи (8)-(10).

З принципу максимуму [5, с. 25], випливає

$$|u(x,t)|\leqslant U<\infty \quad \text{в} \quad \overline{Q}_T. \tag{12}$$

Відсутність явного вигляду функції $v(x,t)$ вимагає дослідження поведінки цієї функції при $t\to+0$. З (11), за допомогою рівності $\int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)d\xi=1$, робимо висновок про обмеженість першого та четвертого доданків

$$\left|\int_0^h G_2(x,t,\xi,0)\varphi'(\xi)d\xi\right| \leqslant C_1, \quad \left|\int_0^t\int_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)f_\xi(\xi,\tau)d\xi d\tau\right| \leqslant C_2. \tag{13}$$

Враховуючи явний вигляд функції Гріна з (7), для двох інших доданків отримаємо

$$\int_0^t G_2(x,t,0,\tau)(f(0,\tau)-\mu_1'(\tau))d\tau \leqslant C_3 + C_4\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}},$$

$$\left|\int_0^t G_2(x,t,h,\tau)(\mu_2'(\tau)-f(h,\tau))d\tau\right| \leqslant C_5 + C_6\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}. \tag{14}$$

Тоді остаточно для $v_0(x,t)$ маємо

$$|v_0(x,t)| \leqslant C_7 + C_8\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}. \tag{15}$$

Вводячи позначення $V(t) \equiv \max\limits_{x\in[0,h]}|v(x,t)|$ та використовуючи відому оцінку $\int\limits_0^h |G_{1x}(x,t,\xi,\tau)|d\xi \leqslant \dfrac{C_9}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}$, з (9) отримаємо

$$V(t) \leqslant C_{10} + C_{11}\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} + C_{12}\int_0^t \frac{\psi_1(\tau)V(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} + C_{13}\int_0^t \frac{\psi_2(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}. \tag{16}$$

За допомогою позначень

$$a_{\min}(t) = \min_{0\leqslant\tau\leqslant t} a(\tau), \quad a_{\max}(t) = \max_{0\leqslant\tau\leqslant t} a(\tau) \tag{17}$$

з (16) отримаємо

$$V(t) \leqslant C_{10} + \frac{C_{11}}{\sqrt{a_{\min}(t)}}\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}} + \frac{C_{12}}{\sqrt{a_{\min}(t)}}\int_0^t \frac{\psi_1(\tau)V(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}} +$$

$$+\frac{C_{13}}{\sqrt{a_{\min}(t)}}\int_0^t \frac{\psi_2(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}. \tag{18}$$

Враховуючи те, що порядок особливості $V(t)$ не нижче, ніж $\int\limits_0^t \dfrac{d\tau}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}$, та умови теореми, робимо висновок, що порядок особливості третього та четвертого доданків з (18) менша, ніж другого. Отже, функція $v(x,t)$ поводить себе як $C_{14}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}$ при $t\to+0$.

Визначимо оцінки $v(x,t)$ зверху та знизу при $x=0$. Враховуючи умови теореми та (13), (14), отримаємо

$$v(0,t)\geqslant\int\limits_0^t G_2(0,t,0,\tau)(f(0,\tau)-\mu_1'(\tau))d\tau-C_{15}-C_{16}\int\limits_0^t\frac{\psi_1(\tau)V(\tau)+\psi_2(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau,$$

або

$$v(0,t)\geqslant\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau-C_{15}-C_{16}\int\limits_0^t\frac{\psi_1(\tau)V(\tau)+\psi_2(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau,\qquad(19)$$

оскільки

$$\int\limits_0^t G_2(0,t,0,\tau)(f(0,\tau)-\mu_1'(\tau))d\tau=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2h^2}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\right)d\tau\geqslant\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau.$$

Досліджуючи поведінку кожного доданка з (19) при $t\to+0$, робимо висновок, що особливість другого інтеграла менша, ніж особливість першого, а отже, існують такі значення $t_1, 0<t_1\leqslant T$, та $q, 0<q<1$, що

$$C_{16}\int\limits_0^t\frac{\psi_1(\tau)V(\tau)+\psi_2(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau+C_{15}\leqslant\frac{q}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau,\quad t\in[0,t_1].$$

Тоді з (19) одержимо

$$v(0,t)\geqslant\frac{1-q}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau.\qquad(20)$$

Підставимо отриману оцінку в рівняння (10)

$$a(t)\leqslant\frac{\sqrt{\pi}\mu_3(t)}{(1-q)\psi_0(t)\int\limits_0^t\frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau}\quad\text{або}\quad a(t)\leqslant\frac{\sqrt{\pi}\mu_3(t)\sqrt{a_{\max}(t)}}{(1-q)\psi_0(t)\int\limits_0^t\frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}d\tau}.\qquad(21)$$

Введемо нову функцію

$$H(t) \equiv \frac{\sqrt{\pi}\mu_3(t)}{\psi_0(t)\int\limits_0^t \frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}d\tau}.$$

Функція $H(t)$ неперервна та додатна на проміжку (0,T] і має скінченну додатну границю при $t \to +0$

$$\lim_{t\to+0} H(t) = \lim_{t\to+0} \frac{\sqrt{\pi\psi_0(t^*)}\mu_3(t)}{\psi_0(t)(f(0,t^*)-\mu_1'(t^*))\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}} = \frac{\sqrt{\pi}M}{2(f(0,0)-\mu_1'(0))}, \quad t^* \in [0,T].$$

Продовжуючи оцінку $a(t)$ з використанням функції $H(t)$, з (21) маємо

$$a(t) \leqslant \frac{1}{1-q}H(t)\sqrt{a_{\max}(t)} \quad \text{або} \quad a_{\max}(t) \leqslant \frac{1}{1-q}H_{\max}(t)\sqrt{a_{\max}(t)},$$

де $H_{\max}(t) = \max\limits_{0\leqslant\tau\leqslant t} H(\tau)$. Звідси маємо

$$a(t) \leqslant A_1, \quad t\in[0,t_1], \quad \text{де} \quad A_1 = \frac{1}{(1-q)^2}H^2_{\max}(T). \tag{22}$$

Оцінка $v(0,t)$ зверху буде такою:

$$v(0,t) \leqslant C_{17} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau + C_{18}\int\limits_0^t \frac{\psi_1(\tau)V(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau + C_{19}\int\limits_0^t \frac{\psi_2(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}.$$

Використаємо цю нерівність та (17) для оцінки функції $a(t)$ знизу

$$a(t) \geqslant \frac{\mu_3(t)}{\psi_0(t)}\Bigg(C_{17} + \frac{1}{\sqrt{\pi a_{\min}(t)}}\int\limits_0^t \frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}d\tau + \frac{C_{18}}{\sqrt{a_{\min}(t)}}\int\limits_0^t \frac{\psi_1(\tau)V(\tau)}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}d\tau +$$
$$+ \frac{C_{19}}{\sqrt{a_{\min}(t)}}\int\limits_0^t \frac{\psi_2(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}\Bigg)^{-1}.$$

Перетворимо цю нерівність до вигляду

$$a(t) \geqslant \sqrt{a_{\min}(t)}\Bigg(\frac{C_{17}\sqrt{a_{\min}(t)}\psi_0(t)}{\mu_3(t)} + \frac{\psi_0(t)}{\sqrt{\pi}\mu_3(t)}\int\limits_0^t \frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}d\tau +$$
$$+ \frac{C_{18}\psi_0(t)}{\mu_3(t)}\int\limits_0^t \frac{\psi_1(\tau)V(\tau)}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}d\tau + \frac{C_{19}\psi_0(t)}{\mu_3(t)}\int\limits_0^t \frac{\psi_2(\tau)}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}d\tau\Bigg)^{-1}.$$

З означення функції $H(t)$ та умов теореми маємо

$$a(t) \geqslant \sqrt{a_{\min}(t)}\left(\frac{C_{17}\sqrt{a_{\min}(t)}\psi_0(t)}{\mu_3(t)} + \frac{1}{H(t)} + \frac{C_{18}\psi_0(t)}{\mu_3(t)}\int\limits_0^t \frac{\psi_1(\tau)V(\tau)}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{C_{19}\psi_0(t)}{\mu_3(t)}\int\limits_0^t \frac{\psi_2(\tau)}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}d\tau\right)^{-1} \geqslant \sqrt{a_{\min}(t)}H(t)\left(C_{20}\sqrt{\frac{\psi_0(t)}{t}} + 1 + \right.$$

$$\left. + C_{21}\sqrt{\frac{\psi_0(t)}{t}}\int\limits_0^t \frac{\psi_1(\tau)V(\tau)}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}d\tau + C_{22}\sqrt{\frac{\psi_0(t)}{t}}\int\limits_0^t \frac{\psi_2(\tau)}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}d\tau\right)^{-1}. \qquad (23)$$

З означення сильного виродження випливає, що відношення $\sqrt{\dfrac{\psi_0(t)}{t}}$ прямує до нуля при $t \to +0$. З поведінки функції $V(t)$ та умов теореми робимо висновок, що існує таке значення $t_2, 0 < t_2 \leqslant T$, що при $t \in [0, t_2]$ виконується нерівність

$$C_{20}\sqrt{\frac{\psi_0(t)}{t}} + C_{21}\sqrt{\frac{\psi_0(t)}{t}}\int\limits_0^t \frac{\psi_1(\tau)V(\tau)}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}d\tau + C_{22}\sqrt{\frac{\psi_0(t)}{t}}\int\limits_0^t \frac{\psi_2(\tau)}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}d\tau \leqslant q.$$

Тоді з нерівності (23) отримаємо

$$a(t) \geqslant \frac{\sqrt{a_{\min}(t)}H(t)}{1+q} \quad \text{або} \quad a_{\min}(t) \geqslant \frac{H^2_{\min}(t)}{(1+q)^2}, \quad t \in [0, t_2], \qquad (24)$$

де $H_{\min}(t) = \min\limits_{0 \leqslant \tau \leqslant t} H(\tau)$. Остаточно маємо для $a(t)$

$$a(t) \geqslant A_0, \quad t \in [0, t_2], \quad \text{де} \quad A_0 = \frac{1}{(1+q)^2}H^2_{\min}(T) > 0. \qquad (25)$$

Продовжимо оцінювати (18), підставляючи (24) у (18)

$$V(t) \leqslant C_{10} + C_{23}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}} + C_{24}\int\limits_0^t \frac{\psi_1(\tau)V(\tau)}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}d\tau +$$

$$+ C_{25}\int\limits_0^t \frac{\psi_2(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}. \qquad (26)$$

Введемо позначення $\chi(t) \equiv \left(\int\limits_0^t \dfrac{d\tau}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}\right)^{-1}$. Враховуючи зростання функції $\dfrac{\theta_0(t)}{t}$, маємо

$$\theta_0(t) - \theta_0(\tau) = \frac{\theta_0(t)}{t}\left(t - \frac{\theta_0(\tau)}{\theta_0(t)}t\right) \geqslant \frac{\theta_0(t)}{t}(t-\tau).$$

Тоді з (26) отримаємо

$$V(t) \leqslant C_{10} + \frac{C_{23}}{\chi(t)} + C_{24}\sqrt{\frac{t}{\theta_0(t)}}\int\limits_0^t \frac{\psi_1(\tau)V(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + C_{25}\frac{\psi_2(t)}{\chi(t)}. \tag{27}$$

Помножимо обидві частини нерівності на $\chi(t)$ та введемо нову функцію $W(t) \equiv V(t)\chi(t)$

$$W(t) \leqslant C_{26} + C_{24}\chi(t)\sqrt{\frac{t}{\theta_0(t)}}\int\limits_0^t \frac{\psi_1(\tau)W(\tau)d\tau}{\chi(\tau)\sqrt{t-\tau}} + C_{25}\psi_2(t). \tag{28}$$

Приймемо $t = \sigma$, домножимо обидві частини нерівності на $\dfrac{1}{\sqrt{t-\sigma}}$ і проінтегруємо від 0 до t

$$\int\limits_0^t \frac{W(\sigma)d\sigma}{\sqrt{t-\sigma}} \leqslant 2C_{26}\sqrt{t} + C_{24}\int\limits_0^t \frac{\chi(\sigma)\sqrt{\sigma}d\sigma}{\sqrt{\theta_0(\sigma)(t-\sigma)}}\int\limits_0^\sigma \frac{\psi_1(\tau)W(\tau)d\tau}{\chi(\tau)\sqrt{\sigma-\tau}} + 2C_{25}\psi_2(t)\sqrt{t}.$$

Поміняємо порядок інтегрування у правій частині нерівності, врахувавши, що функція $\chi(t)\sqrt{\dfrac{t}{\theta_0(t)}}$ – спадна та $\displaystyle\int\limits_\tau^t \frac{d\sigma}{\sqrt{(t-\sigma)(\sigma-\tau)}} = \pi$. Матимемо

$$\int\limits_0^t \frac{W(\sigma)d\sigma}{\sqrt{t-\sigma}} \leqslant 2C_{26}\sqrt{t} + 2C_{25}\psi_2(t)\sqrt{t} + C_{27}\int\limits_0^t \frac{\psi_1(\tau)W(\tau)\sqrt{\tau}}{\sqrt{\theta_0(\tau)}}d\tau. \tag{29}$$

Оскільки функція $\dfrac{\psi_1(t)}{\chi(t)}$ – зростаюча, то перепишемо (28) у вигляді

$$W(t) \leqslant C_{26} + C_{24}\sqrt{\frac{t}{\theta_0(t)}}\psi_1(t)\int\limits_0^t \frac{W(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + C_{25}\psi_2(t).$$

Підставимо в цю нерівність оцінку (29) і після перетворень отримаємо

$$W(t) \leqslant C_{28} + C_{29}\sqrt{\frac{t}{\theta_0(t)}}\psi_1(t)\int\limits_0^t \frac{\psi_1(\tau)W(\tau)\sqrt{\tau}}{\sqrt{\theta_0(\tau)}}d\tau.$$

У випадку, коли $\lim\limits_{t\to+0}\sqrt{\dfrac{t}{\theta_0(t)}}\psi_1(t) = 0$, задана нерівність розв'язується за допомогою леми Гроноулла [6, с. 188], і як наслідок, функція $W(t)$ обмежена деякою константою, яка залежить від вихідних даних. Нехай $\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{\sqrt{\theta_0(t)}}{\sqrt{t}\psi_1(t)}=0$. Тоді

$$\frac{\sqrt{\theta_0(t)}}{\sqrt{t}\psi_1(t)}W(t)\leqslant C_{28}\frac{\sqrt{\theta_0(t)}}{\sqrt{t}\psi_1(t)}+C_{29}\int\limits_0^t\frac{\psi_1(\tau)W(\tau)\sqrt{\tau}}{\sqrt{\theta_0(\tau)}}d\tau. \tag{30}$$

Позначимо праву частину нерівності (30) через $L(t)$. Диференціюючи, отримаємо

$$L'(t)-C_{29}\frac{\psi_1^2(t)t}{\theta_0(t)}L(t)\leqslant C_{28}\left(\frac{\sqrt{\theta_0(t)}}{\sqrt{t}\psi_1(t)}\right)'.$$

Домножимо обидві частини нерівності на $\exp\left(-C_{29}\int\limits_0^t\dfrac{\psi_1^2(\sigma)\sigma}{\theta_0(\sigma)}d\sigma\right)$ та проінтегруємо від 0 до t. Отримаємо

$$L(t)\leqslant C_{28}\frac{\sqrt{\theta_0(t)}}{\sqrt{t}\psi_1(t)}+C_{30}\int\limits_0^t\frac{\psi_1(\tau)\sqrt{\tau}}{\sqrt{\theta_0(\tau)}}\exp\left(C_{29}\int\limits_\tau^t\frac{\psi_1^2(\sigma)\sigma}{\theta_0(\sigma)}\right)d\tau.$$

Підставляючи одержану оцінку в (30), одержуємо

$$W(t)\leqslant C_{28}+C_{31}\frac{\sqrt{t}\psi_1(t)}{\sqrt{\theta_0(t)}}\int\limits_0^t\frac{\sqrt{\tau}\psi_1(\tau)}{\sqrt{\theta_0(\tau)}}\exp\left(C_{29}\int\limits_\tau^t\frac{\psi_1^2(\sigma)\sigma}{\theta_0(\sigma)}\right)d\tau.$$

Остаточно маємо

$$V(t)\leqslant\frac{C_{32}}{\chi(t)},\quad t\in[0,t_2],\quad \text{або}\quad |v(x,t)|\leqslant\frac{C_{32}}{\chi(t)},\quad (x,t)\in[0,h]\times(0,t_2], \tag{31}$$

де $C_{32}-$ константа, що визначається вихідними даними.

Введемо нову функцію $\tilde{v}(x,t)\equiv v(x,t)\chi(t)$ і подамо систему рівнянь (8), (9), (10) у такій формі:

$$u(x,t)=u_0(x,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)(b(\xi,\tau)\psi_1(\tau)\frac{\tilde{v}(\xi,\tau)}{\chi(\tau)}+c(\xi,\tau)\psi_2(\tau)u(\xi,\tau))d\xi d\tau, \tag{32}$$

$$\tilde{v}(x,t)=v_0(x,t)\chi(t)+\chi(t)\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)(b(\xi,\tau)\psi_1(\tau)\frac{\tilde{v}(\xi,\tau)}{\chi(\tau)}+$$
$$+c(\xi,\tau)\psi_2(\tau)u(\xi,\tau))d\xi d\tau,\quad (x,t)\in Q_{t_0}, \tag{33}$$

$$a(t)=\frac{\mu_3(t)\chi(t)}{\psi_0(t)\tilde{v}(0,t)},\quad t\in[0,t_0],\quad \text{де}\quad t_0=\min\{t_1,t_2\}. \tag{34}$$

Запишемо систему рівнянь (32)-(34) в операторній формі

$$\omega = P\omega,$$

де $\omega = (u, \tilde{v}, a)$, $\quad P = (P_1, P_2, P_3)$, оператори P_1, P_2, P_3 визначаються правими частинами рівнянь (32)-(34). Визначимо множину $\mathcal{N} = \{(u, \tilde{v}, a) \in C(\overline{Q}_{t_0}) \times C(\overline{Q}_{t_0}) \times C[0, t_0] : |u(x,t)| \leqslant U, |\tilde{v}(x,t)| \leqslant C_{32}, A_0 \leqslant a(t) \leqslant A_1\}$. Згідно з отриманими оцінками (12), (31), (22), (25) оператор P переводить множину $\mathcal{N}$ в себе. Покажемо, що оператор P цілком неперервний на $\mathcal{N}$. Згідно з теоремою Арцела-Асколі треба з'ясувати, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що

$$|P_i(x_2, t_2) - P_i(x_1, t_1)| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \quad |P_3(t_2) - P_3(t_1)| < \varepsilon, \quad \forall\, (u, \tilde{v}, a) \in \mathcal{N},$$

якщо $|t_2 - t_1| < \delta, |x_2 - x_1| < \delta$, де $(x_1, t_1), (x_2, t_2) \in \overline{Q}_{t_0}$. Доведення компактності покажемо на прикладі одного з доданків, що входить до інтегрального оператора P

$$K = \left|\chi(t_2)\int\limits_0^{t_2}(f(0,\tau) - \mu_1'(\tau))G_2(0, t_2, 0, \tau)d\tau - \chi(t_1)\int\limits_0^{t_1}(f(0,\tau) - \mu_1'(\tau))G_2(0, t_1, 0, \tau)d\tau\right|.$$

Припустимо, що $t_i, i = 1, 2$ - досить малі значення. Розглянемо інтеграл

$$\widehat{K} \equiv \chi(t)\int\limits_0^{t}(f(0,\tau) - \mu_1'(\tau))G_2(0, t, 0, \tau)d\tau = \frac{\chi(t)}{\sqrt{\pi}}\left(\int\limits_0^{t}\frac{f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}}d\tau + \right.$$

$$\left. + 2\int\limits_0^{t}\frac{f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2h^2}{\theta(t) - \theta(\tau)}\right)d\tau\right) \equiv \widehat{K}_1 + \widehat{K}_2.$$

Використавши одержані оцінки для функції $a(t)$, для другого доданка маємо

$$\widehat{K_2} \leqslant \frac{2\chi(t)}{\sqrt{\pi a_{\min}(t)}}\max_{t\in[0,T]}(f(0,t) - \mu_1'(t))\int\limits_0^{t}\frac{1}{\sqrt{\theta_0(t) - \theta_0(\tau)}} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2h^2}{a_{\max}(t)(\theta_0(t) - \theta_0(\tau))}\right)d\tau.$$

Враховуючи обмеженість підінтегрального виразу, а також прямування до нуля функції $\chi(t)$ при $t \to +0$ робимо висновок, що $\widehat{K}_2$ прямує до нуля при $t \to +0$. Знайдемо границю першого доданка, використавши теорему про середнє

$$\lim_{t\to+0}\widehat{K}_1 = \lim_{t\to+0}\frac{f(0,\widetilde{t}) - \mu_1'(\widetilde{t})}{\sqrt{\pi a(\widetilde{t})}}\chi(t)\int\limits_0^{t}\frac{d\tau}{\sqrt{\theta_0(t) - \theta_0(\tau)}} = \frac{f(0,0) - \mu_1'(0)}{\sqrt{\pi a(0)}}.$$

Позначимо $\lim\limits_{t\to+0}\widehat{K}_1=\varkappa_0$. Тоді для виразу K отримаємо

$$K\leqslant\left|\chi(t_2)\int\limits_0^{t_2}(f(0,\tau)-\mu_1'(\tau))G_2(0,t_2,0,\tau)d\tau-\varkappa_0\right|+$$
$$+\left|\chi(t_1)\int\limits_0^{t_1}(f(0,\tau)-\mu_1'(\tau))G_2(0,t_1,0,\tau)d\tau-\varkappa_0\right|.$$

Можна зазначити таке значення t_*, коли $0<t_i<t_*, i=1,2$, будуть виконуватись нерівності:

$$\left|\chi(t_i)\int\limits_0^{t_i}(f(0,\tau)-\mu_1'(\tau))G_2(0,t_i,0,\tau)d\tau-\varkappa_0\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Отже, $K<\varepsilon$, коли $0<t_i<t_*, i=1,2$. Випадок $t_i>t_*, i=1,2$ та дослідження інших інтегральних операторів, що входять в P_1,P_2,P_3, проводять аналогічно до випадку сильного виродження для рівняння теплопровідності [1]. Отож, оператор P цілком неперервний на $\mathcal{N}$.

Умови теореми Шаудера виконуються. Розв'язок задачі (1)- 4) існує та володіє необхідною гладкістю.

3. Доведення єдиності розв'язку. Введемо позначення $a(t)\equiv a_1(t)-a_2(t)$, $u(x,t)\equiv u_1(x,t)-u_2(x,t), v(x,t)\equiv v_1(x,t)-v_2(x,t)$, де $(a_i(t),u_i(x,t),v_i(x,t)), i=1,2$ - різні розв'язки системи (8) - (10). Отримаємо таку систему:

$$u(x,t)=u_0(x,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_1^1(x,t,\xi,\tau)(b(\xi,\tau)\psi_1(\tau)v(\xi,\tau)+c(\xi,\tau)\psi_2(\tau)u(\xi,\tau))d\xi d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h(G_1^1(x,t,\xi,\tau)-G_1^2(x,t,\xi,\tau))(b(\xi,\tau)\psi_1(\tau)v_2(\xi,\tau)+c(\xi,\tau)\psi_2(\tau)u_2(\xi,\tau))d\xi d\tau,\tag{35}$$

$(x,t)\in Q_T,$

$$v(x,t)=v_0(x,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{1x}^1(x,t,\xi,\tau)(b(\xi,\tau)\psi_1(\tau)v(\xi,\tau)+c(\xi,\tau)\psi_2(\tau)u(\xi,\tau))d\xi d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h(G_{1x}^1(x,t,\xi,\tau)-G_{1x}^2(x,t,\xi,\tau))(b(\xi,\tau)\psi_1(\tau)v_2(\xi,\tau)+c(\xi,\tau)\psi_2(\tau)u_2(\xi,\tau))d\xi d\tau,\tag{36}$$

$(x,t)\in Q_T,$

$$a(t)=-a_1(t)a_2(t)\frac{v(0,t)\psi_0(t)}{\mu_3(t)},\quad t\in[0,T],\tag{37}$$

де $u_0(x,t) = u_{01}(x,t) - u_{02}(x,t), v_0(x,t) = v_{01}(x,t) - v_{02}(x,t)$, $G_1^i(x,t,\xi,\tau)$ – функції Гріна першої крайової задачі для рівнянь $u_t = a_i(t)\psi_0(t)u_{xx}, i = 1, 2$. Доведення єдиності будемо проводити, оцінюючи в рівнянні (37) вираз $v(0,t)$. Позначимо

$$\widetilde{a}_{\max}(t) \equiv \max_{0\leqslant\tau\leqslant t} |a_1(\tau) - a_2(\tau)|.$$

З формули (11) знаходимо $v_0(x,t)$

$$v_0(x,t) = \int_0^h (G_2^1(x,t,\xi,0) - G_2^2(x,t,\xi,0))\varphi'(\xi)d\xi + \int_0^t (G_2^1(x,t,0,\tau) - G_2^2(x,t,0,\tau))\times$$
$$\times (f(0,\tau) - \mu_1'(\tau))d\tau + \int_0^t (G_2^1(x,t,h,\tau) - G_2^2(x,t,h,\tau))(\mu_2'(\tau) - f(h,\tau))d\tau+$$
$$+ \int_0^t \int_0^h (G_2^1(x,t,\xi,\tau) - G_2^2(x,t,\xi,\tau))f_\xi(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Оцінимо вирази, що входять до $v_0(x,t)$. Для першого та четвертого доданків правильні такі оцінки:

$$R_1 \equiv \int_0^h |(G_2^1(x,t,\xi,0) - G_2^2(x,t,\xi,0))\varphi'(\xi)|d\xi \leqslant C_{33}\widetilde{a}_{\max}(t),$$
$$R_4 \equiv \int_0^t \int_0^h |(G_2^1(x,t,\xi,\tau) - G_2^2(x,t,\xi,\tau))f_\xi(\xi,\tau)|d\xi d\tau \leqslant C_{34}t\widetilde{a}_{\max}(t). \tag{38}$$

Для оцінки другого інтеграла, який входить до v_0, виділимо з ряду доданок, що відповідає $n = 0$

$$R_2 \equiv \int_0^t \left| \frac{f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)}{\sqrt{\pi(\theta_1(t) - \theta_1(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x+2nh)^2}{4(\theta_1(t) - \theta_1(\tau))}\right) - \frac{f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)}{\sqrt{\pi(\theta_2(t) - \theta_2(\tau))}}\times\right.$$
$$\left.\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x+2nh)^2}{4(\theta_2(t) - \theta_2(\tau))}\right)\right| d\tau \leqslant C_{35}\left(\int_0^t \exp\left(-\frac{x^2}{4(\theta_1(t) - \theta_1(\tau))}\right)\times\right.$$
$$\times \left|\frac{1}{\sqrt{\theta_1(t) - \theta_1(\tau)}} - \frac{1}{\sqrt{\theta_2(t) - \theta_2(\tau)}}\right| d\tau + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\theta_2(t) - \theta_2(\tau)}} \left|\exp\left(-\frac{x^2}{4(\theta_1(t) - \theta_1(\tau))}\right) - \right.$$
$$\left. - \exp\left(-\frac{x^2}{4(\theta_2(t) - \theta_2(\tau))}\right)\right| d\tau + \int_0^t \left|\frac{1}{\sqrt{\theta_1(t) - \theta_1(\tau)}} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x+2nh)^2}{4(\theta_1(t) - \theta_1(\tau))}\right) - \right.$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\exp\left(-\frac{(x+2nh)^2}{4(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}\right)\Bigg|d\tau\Bigg)=C_{35}\sum_{i=1}^{3}R_{2i}.$$

Вираз R_{23} оцінимо так:

$$R_{23}=\int_0^t\left|\int_{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}^{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\exp\left(-\frac{(x+2nh)^2}{4z}\right)\right)dz\right|d\tau\leqslant C_{36}\int_0^t|\theta_1(t)-\theta_1(\tau)-$$

$$-\theta_2(t)+\theta_2(\tau)|d\tau\leqslant C_{36}\int_0^t d\tau\int_\tau^t|a_1(\sigma)-a_2(\sigma)|\psi_0(\sigma)d\sigma\leqslant C_{36}\widetilde{a}_{\max}(t)\int_0^t d\tau\int_\tau^t\psi_0(\sigma)d\sigma.$$

Щоб оцінити R_{22}, використаємо (25) і нерівність $|e^x-e^y|\leqslant|x-y|\max\{e^x,e^y\}$

$$R_{22}\leqslant\frac{x^2}{4}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}}\left|\frac{1}{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}-\frac{1}{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}\right|\exp\left(-\frac{x^2}{C_{37}(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))}\right)d\tau=$$

$$=\frac{x^2}{4}\int_0^t\frac{|\theta_2(t)-\theta_2(\tau)-\theta_1(t)+\theta_1(\tau)|}{(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))^{3/2}(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}\exp\left(-\frac{x^2}{C_{37}(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))}\right)d\tau.$$

Враховуючи попередні оцінки, маємо

$$|\theta_2(t)-\theta_2(\tau)-\theta_1(t)+\theta_1(\tau)|\leqslant\int_\tau^t|a_1(\sigma)-a_2(\sigma)|\psi_0(\sigma)d\sigma\leqslant\widetilde{a}_{\max}(t)(\theta_0(t)-\theta_0(\tau)),$$

$$\theta_i(t)-\theta_i(\tau)\geqslant a_{\min}(t)\int_\tau^t\psi_0(\sigma)d\sigma\geqslant\frac{H^2_{\min}(t)}{(1+q)^2}\int_\tau^t\psi_0(\sigma)d\sigma=\frac{H^2_{\min}(t)}{(1+q)^2}(\theta_0(t)-\theta_0(\tau)).\tag{39}$$

Скористаємося відомою нерівністю $x^pe^{-qx^2}\leqslant C_{p,q}, x\geqslant 0, p\geqslant 0, q>0$ та (39) для подальшої оцінки R_{22}

$$R_{22}\leqslant C_{38}\widetilde{a}_{\max}(t)\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}=\frac{C_{38}\widetilde{a}_{\max}(t)}{\chi(t)}.$$

Вираз R_{21} подамо у вигляді

$$R_{21}=\int_0^t\exp\left(-\frac{x^2}{4(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}\right)\frac{|\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}-\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}|}{\sqrt{(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}}d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^t\frac{|\theta_2(t)-\theta_2(\tau)-\theta_1(t)+\theta_1(\tau)|}{\sqrt{(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}(\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}+\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)})}d\tau.$$

Враховуючи (39), отримаємо оцінку R_{21}

$$R_{21} \leqslant C_{39}\widetilde{a}_{\max}(t)\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}} = \frac{C_{39}\widetilde{a}_{\max}(t)}{\chi(t)}.$$

Остаточно для R_2 маємо

$$R_2 \leqslant \frac{C_{40}\widetilde{a}_{\max}(t)}{\chi(t)}.$$

Останній із доданків, що входить до $v_0(x,t)$, оцінюється аналогічно до попереднього

$$R_3 \equiv \int\limits_0^t \left| \frac{\mu_2'(\tau)-f(h,\tau)}{\sqrt{\pi(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x+h(2n-1))^2}{4(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{\mu_2'(\tau)-f(h,\tau)}{\sqrt{\pi(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x+h(2n-1))^2}{4(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}\right)\right| d\tau \leqslant \frac{C_{41}\widetilde{a}_{\max}(t)}{\chi(t)}. \tag{40}$$

Остаточно маємо

$$|v_0(x,t)| \leqslant \frac{C_{42}\widetilde{a}_{\max}(t)}{\chi(t)}.$$

Вираз $|u_0(x,t)|$ оцінюється аналогічно

$$|u_0(x,t)| \leqslant C_{43}\widetilde{a}_{\max}(t).$$

Введемо функції $V(t) \equiv \max\limits_{x\in[0,h]}|v(x,t)|, U(t) \equiv \max\limits_{x\in[0,h]}|u(x,t)|$. Використавши отримані оцінки для $|u_0(x,t)|$ та $|v_0(x,t)|$, з рівнянь (35), (36) одержуємо

$$U(t) \leqslant C_{44}\widetilde{a}_{\max}(t) + C_{45}\int\limits_0^t (\psi_1(\tau)V(\tau)+\psi_2(\tau)U(\tau))d\tau, \tag{41}$$

$$V(t) \leqslant \frac{C_{46}\widetilde{a}_{\max}(t)}{\chi(t)} + C_{47}\sqrt{\frac{t}{\theta_0(t)}}\int\limits_0^t \frac{\psi_1(\tau)V(\tau)+\psi_2(\tau)U(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau. \tag{42}$$

Розв'язавши першу з цих нерівностей стосовно $U(t)$, маємо

$$U(t) \leqslant C_{48}\widetilde{a}_{\max}(t) + C_{49}\int\limits_0^t \psi_1(\tau)V(\tau)d\tau.$$

Підставимо отриману оцінку у (42)

$$V(t) \leqslant \frac{C_{50}\widetilde{a}_{\max}(t)}{\chi(t)} + C_{47}\sqrt{\frac{t}{\theta_0(t)}}\int\limits_0^t \frac{\psi_1(\tau)V(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau +$$

$$+ C_{51}\sqrt{\frac{t}{\theta_0(t)}}\int\limits_0^t \frac{\psi_2(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_0^\tau \psi_1(\sigma)V(\sigma)d\sigma.$$

Отриману нерівність щодо $V(t)$ розв'язуємо аналогічно до нерівності (26), після чого повертаємося до оцінки $U(t)$. Остаточно одержимо

$$V(t) \leqslant \frac{C_{52}\widetilde{a}_{\max}(t)}{\chi(t)}, \qquad U(t) \leqslant C_{53}\widetilde{a}_{\max}(t), \quad t \in (0, t_0]$$

або

$$|v(x,t)| \leqslant \frac{C_{52}\widetilde{a}_{\max}(t)}{\chi(t)}, \qquad |u(x,t)| \leqslant C_{53}\widetilde{a}_{\max}(t), \quad (x,t) \in Q_{t_0}. \tag{43}$$

Покажемо відмінності в оцінці $v(0,t)$ від $v(x,t)$. При $x = 0$ нерівності (38) залишаються правильними. Підінтегральний вираз R_3 при $x = 0$ обмежений, отже, отримуємо $R_3 \leqslant C_{54}\widetilde{a}_{\max}(t)$. Для R_2 маємо

$$\widetilde{R}_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \left|\frac{1}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}} - \frac{1}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}}\right|(f(0,\tau)-\mu_1'(\tau))d\tau +$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t (f(0,\tau)-\mu_1'(\tau))\left|\frac{1}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2h^2}{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}\right) -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2h^2}{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}\right)\right|d\tau \equiv \widetilde{R}_{21} + \widetilde{R}_{22}.$$

Оцінимо $\widetilde{R}_{22}$

$$\widetilde{R}_{22} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t (f(0,\tau)-\mu_1'(\tau))\left|\int\limits_{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}^{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)} \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2h^2}{z}\right)\right)dz\right|d\tau \leq$$

$$\leqslant C_{55}\widetilde{a}_{\max}(t)\int\limits_0^t d\tau\int\limits_\tau^t \psi_0(\sigma)d\sigma.$$

Для оцінки $\widetilde{R}_{21}$ використаємо (39) та означення функції $H(t)$

$$\widetilde{R}_{21} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{|\theta_1(t)-\theta_1(\tau)-\theta_2(t)+\theta_2(\tau)|(f(0,\tau)-\mu_1'(\tau))}{\sqrt{(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}(\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}+\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)})}d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(1+q)^3\widetilde{a}_{\max}(t)}{2\sqrt{\pi}H_{\min}^3(t)}\int\limits_0^t \frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}d\tau \leqslant \frac{(1+q)^3\mu_3(t)\widetilde{a}_{\max}(t)}{2H_{\min}^4(t)\psi_0(t)}.$$

Отже, для $v_0(0,t)$ остаточно отримаємо

$$|v_0(0,t)| \leqslant \frac{(1+q)^3\mu_3(t)\widetilde{a}_{\max}(t)}{2H^4_{\min}(t)\psi_0(t)} + C_{56}\widetilde{a}_{\max}(t)\int\limits_0^t d\tau \int\limits_\tau^t \psi_0(\sigma)d\sigma + C_{57}\widetilde{a}_{\max}(t). \tag{44}$$

Підставивши одержану оцінку у (36) та врахувавши (43), маємо

$$|v(0,t)| \leqslant \frac{(1+q)^3\mu_3(t)\widetilde{a}_{\max}(t)}{2H^4_{\min}(t)\psi_0(t)} + C_{56}\widetilde{a}_{\max}(t)\int\limits_0^t d\tau \int\limits_\tau^t \psi_0(\sigma)d\sigma + C_{57}\widetilde{a}_{\max}(t)+$$
$$+ C_{58}\widetilde{a}_{\max}(t)\int\limits_0^t \left(\frac{\psi_1(\tau)}{\chi(\tau)} + \psi_2(\tau)\right)d\tau. \tag{45}$$

Використовуючи (22), з рівняння (37) знаходимо

$$|a(t)| \leqslant \frac{H^4_{\max}(t)}{(1-q)^4}\frac{\psi_0(t)}{\mu_3(t)}|v(0,t)| \leq$$
$$\leqslant \left(\frac{(1+q)^3H^4_{\max}(t)}{2(1-q)^4H^4_{\min}(t)} + C_{59}\sqrt{\frac{\psi_0(t)}{t}} + F(t)\right)\widetilde{a}_{\max}(t)$$

або

$$\widetilde{a}_{\max}(t) \leqslant \left(\frac{(1+q)^4H^4_{\max}(t)}{2(1-q)^4H^4_{\min}(t)} + C_{59}\sqrt{\frac{\psi_0(t)}{t}} + F(t)\right)\widetilde{a}_{\max}(t), \tag{46}$$

де функція $F(t) > 0$ набуває значення 0 при $t = 0$. З того, що $\lim\limits_{t\to+0} H_{\max}(t) = \lim\limits_{t\to+0} H_{\min}(t)$, випливає, що для заданого $q, 0 < q < 1$, існує таке число $t^*, 0 < t^* \leqslant T$, що $\dfrac{H^4_{\max}(t)}{H^4_{\min}(t)} \leqslant 1+q, \quad C_{59}\sqrt{\dfrac{\psi_0(t)}{t}} + F(t) \leqslant q, \quad t \in [0,t^*]$. Зафіксуємо число q так, щоб $0 < q < \dfrac{\sqrt[5]{2}-1}{\sqrt[5]{2}+1}$. Отримаємо

$$\frac{(1+q)^4H^4_{\max}(t)}{2(1-q)^4H^4_{\min}(t)} + C_{59}\sqrt{\frac{\psi_0(t)}{t}} + F(t) \leqslant \frac{(1+q)^4}{2(1-q)^4}(1+q) + q < 1.$$

Тоді з (46) випливає $\widetilde{a}_{\max}(t) \equiv 0$ при $t \in [0,t_0]$, де $t_0 = \min\{t_1,t_2,t^*\}$. Звідси одержуємо $a(t) \equiv 0, t \in [0,t_0]$, $u(x,t) \equiv 0$, $v(x,t) \equiv 0, x \in [0,h], t \in [0,t_0]$. Отже, єдиність розв'язку задачі (1)-(4) з'ясовано, що завершує доведення теореми.

1. *Ivanchov M., Saldina N.* An inverse problem for strongly degenerate heat equation// J. Inv. Ill-Posed Probl.– 2006.– Vol.14.– №5.– P.1-16.

2. *Іванчов М.І., Салдіна Н.В.* Обернена задача для рівняння теплопровідності з виродженням// Укр. матем. журнал.– 2005.– Т.57, №11.– С.1563-1570.

3. *Салдіна Н.В.* Обернена задача для параболічного рівняння з виродженням //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.– 2005.– Вип.64.– С.245-257.

4. *Салдіна Н.В.* Ідентифікація старшого коефіцієнта в параболічному рівнянні з виродженням// Науковий вісник Чернівецького ун-ту. Математика.– 2006.– №288.– С.99-106.

5. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.– М., 1967.

6. *Беккенбах Э., Беллман Р.* Неравенства.– М., 1965.

A STRONGLY DEGENERATE INVERSE PARABOLIC PROBLEM WITH GENERAL BEHAVIOUR OF THE COEFFICIENTS OF THE EQUATION

Nataliya Saldina

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

We consider an inverse problem for determining a time-dependent coefficient for the parabolic equation. The coefficient at the higher-order derivative is a product of an unknown function of time by known function which depends on time and vanishes at the initial moment. The behavior of another coefficients are given by known functions. Conditions of existence and uniqueness of classic solution for the problem are established.

Key words: inverse problem, Schauder fixed-point theorem, strong degeneration, parabolic equation.

Стаття надійшла до редколегії 19.06.2006

Прийнята до друку 02.11.2006

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2006. Вип.66. С.203–207 *Ser.Mech-Math.2006. Vol.66. P.203–207*

УДК 517.537.72

ПРО НИЖНІЙ R-ПОРЯДОК МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА РЯДУ ДІРІХЛЕ

Мирослав ШЕРЕМЕТА, Оксана СУМИК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

Зазначено умови на коефіцієнти і показники цілого ряду Діріхле, за яких нижній R-порядок його максимального члена є додатним і, зокрема, нескінченним.

Ключові слова: цілі ряди Діріхле, максимальний член.

1. Нехай $\Lambda = (\lambda_n)$ – зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел ($\lambda_0 = 0$), $S(\Lambda)$ – клас цілих рядів Діріхле

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

а $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp(\sigma\lambda_n) : n \geq 0\}$ – максимальний член ряду (1). Нижнім R-порядком максимального члена називається $q_R = \varliminf\limits_{\sigma\to+\infty} \sigma^{-1} \ln \ln \mu(\sigma, F)$.

Ми зазначимо умови на a_n і λ_n, за яких $q_R > 0$ і, зокрема, $q_R = +\infty$. Зауважимо таке: якщо $\lambda_n \ln \lambda_n = o(\ln(1/|a_n|))$, $(n \to \infty)$, то, використовуючи формулу Рітта для знаходження R-порядку, отримуємо $q_R = 0$. Якщо ж $\lambda_n \ln \lambda_n = O(\ln(1/|a_n|))$, $(n \to \infty)$, то $q_R < +\infty$. Тому необхідною умовою додатності q_R (нескінченності q_R) є існування зростаючої послідовності (n_k) натуральних чисел такої, що $\ln(1/|a_{n_k}|) = O(\lambda_{n_k} \ln \lambda_{n_k})$ (відповідно, $\ln(1/|a_{n_k}|) = o(\lambda_{n_k} \ln \lambda_{n_k})$) при $k \to \infty$. Отже, задача зводиться до дослідження щільності послідовності (λ_{n_k}), для якої виконується те чи інше з наведених співвідношень для коефіцієнтів. Зауважимо, що з одного результату К. Рахмана [1] випливає таке: якщо $\ln \lambda_n \sim \ln \lambda_{n+1}$, $n \to \infty$, і $\varliminf\limits_{\sigma\to+\infty} \dfrac{\lambda_n \ln \lambda_n}{-\ln |a_n|} > 0$, то $q_R > 0$. Дещо сильніший результат випливає з теореми.

Теорема 1. *Нехай $S^*(\Lambda)$ і $S^{**}(\Lambda)$ – класи цілих рядів Діріхле (1) такі, що, відповідно,* $\ln(1/|a_n|) = O(\lambda_n \ln \lambda_n)\,(n \to \infty)$ *і* $\ln(1/|a_n|) = o(\lambda_n \ln \lambda_n)\,(n \to \infty)$. *Тоді умова*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln \lambda_{n+1}}{\ln \lambda_n} < +\infty \tag{2}$$

є необхідною і достатньою для того, щоб $q_R > 0$ для кожної функції $F \in S^*(\Lambda)$, а також необхідною і достатньою для того, щоб $q_R = +\infty$ для кожної функції $F \in S^{**}(\Lambda)$.

2. Доведення достатності. Через Ω позначимо клас додатних необмежених на $(-\infty, +\infty)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' додатна, неперервно-диференційовна і зростає до $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$. Для $\Phi \in \Omega$ нехай φ – функція, обернена до Φ', а $\Psi(\sigma) = \sigma - \Phi(\sigma)/\Phi'(\sigma)$ – функція, асоційована з Φ за Ньютоном. Тоді [2 - 3] функція Ψ неперервно-диференційовна і зростає до $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$, а функція φ неперервно-диференційовна і зростає до $+\infty$ на $(0, +\infty)$.

Для $\Phi \in \Omega$ приймемо

$$G_1(\lambda_n, \lambda_{n+1}, \Phi) = \frac{\lambda_{n+1}\lambda_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \int\limits_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} \frac{\Phi(\varphi(t))}{t^2} dt, \quad \varkappa_n = \varkappa(\lambda_n, \lambda_{n+1}, \Phi) =$$
$$= \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \int\limits_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} \varphi(t) dt.$$

З теореми 3.1 із [3] випливає таке: якщо $\ln |a_n| \geq -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))$ $(n \geq n_0)$, то для всіх $\sigma \in [\varphi(\lambda_n),\, \varphi(\lambda_{n+1})]$ і $n \geq n_0$

$$\Phi^{-1}(\ln \mu(\sigma, F)) \geq \sigma \frac{\Phi^{-1}(G_1(\lambda_n, \lambda_{n+1}, \Phi))}{\varkappa_n}.$$

Припустимо, що $\Phi(\sigma) = e^{q\sigma}$ $(0 < q < +\infty)$. Тоді $\varphi(x) = \dfrac{1}{q} \ln \dfrac{x}{q}$, $\Psi(\sigma) = \sigma - \dfrac{1}{q}$, $x\Psi(\varphi(x)) = \dfrac{x}{q} \ln \dfrac{x}{eq}$, $\varkappa_n = \dfrac{\lambda_{n+1} \ln \lambda_{n+1} - \lambda_n \ln \lambda_n}{q(\lambda_{n+1} - \lambda_n)} - \dfrac{\ln(eq)}{q}$, $G_1(\lambda_n, \lambda_{n+1}, \Phi) = \dfrac{1}{q} \dfrac{\lambda_n\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \ln \dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}$ і $\Phi^{-1}(G_1(\lambda_n, \lambda_{n+1}, \Phi)) = \dfrac{1}{q} \ln \left(\dfrac{\lambda_n\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \ln \dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\right) - \dfrac{\ln q}{q}$.

Якщо $\ln |a_n| \geq -\dfrac{\lambda_n}{q} \ln \dfrac{\lambda_n}{eq}$ $(n \geq n_0)$, $\ln \lambda_n \leq q\sigma + \ln q \leq \ln \lambda_{n+1}$ і $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n^{1+\beta}$ $(\beta > 0)$, враховуючи, що $\dfrac{\Phi^{-1}(G_1(a, x, \Phi))}{\varkappa(a, x, \Phi)}$ є спадною на $(a, +\infty)$, для всіх

$n \geq n_0$ одержимо

$$\begin{aligned}
&\ln \ln \mu(\sigma, F) \geq \\
&\geq q\sigma \left\{ \ln \left(\frac{\lambda_n \lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \ln \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \right) - \ln q \right\} / \left\{ \frac{\lambda_{n+1} \ln \lambda_{n+1} - \lambda_n \ln \lambda_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} - \ln(eq) \right\} \geq \\
&\geq q\sigma \left\{ \ln \left(\frac{\lambda_n \lambda_n^{1+\beta}}{\lambda_n^{1+\beta} - \lambda_n} \ln \frac{\lambda_n^{1+\beta}}{\lambda_n} \right) - \ln q \right\} / \left\{ \frac{\lambda_n^{1+\beta} \ln \lambda_n^{1+\beta} - \lambda_n \ln \lambda_n}{\lambda_n^{1+\beta} - \lambda_n} - \ln(eq) \right\} = \\
&= \frac{q\sigma}{1+\beta} \left\{ 1 + \frac{\ln \ln \lambda_n}{\ln \lambda_n} - \frac{\ln (q/\beta)}{\ln \lambda_n} + \frac{\ln (eq)}{(1+\beta) \ln \lambda_n} + o\left(\frac{1}{\ln \lambda_n} \right) \right\} \geq \\
&\geq \frac{q\sigma}{1+\beta} \left\{ 1 + \frac{\ln \sigma + \ln q}{q\sigma + \ln q} + \left(\frac{\ln (eq)}{1+\beta} - \ln \frac{q}{\beta} \right) \frac{1}{q\sigma + \ln q} + o\left(\frac{1}{\sigma} \right) \right\} = \\
&= \frac{q\sigma}{1+\beta} \left\{ 1 + \frac{\ln \sigma}{q\sigma} + \frac{1}{q\sigma} \left(\frac{\ln (eq)}{1+\beta} - \ln \frac{1}{\beta} \right) + o\left(\frac{1}{\sigma} \right) \right\} = \\
&= \frac{1}{1+\beta} \left\{ q\sigma + \ln \sigma + \frac{\ln (eq)}{1+\beta} - \ln \frac{1}{\beta} \right\} + o(1), \quad \sigma \to +\infty.
\end{aligned} \tag{3}$$

Припустимо, що виконується умова (2) і $F \in S^*(\Lambda)$. Тоді для деяких чисел $\beta > 0$ і $q > 0$ маємо $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n^{1+\beta}$ і $\ln |a_n| \geq -\frac{\lambda_n}{q} \ln \frac{\lambda_n}{eq}$ $(n \geq n_0)$. Тому з (3) отримуємо нерівність $q_R \geq q/(1+\beta) > 0$. Якщо ж $F \in S^{**}(\Lambda)$, то нерівність $\ln |a_n| \geq -\frac{\lambda_n}{q} \ln \frac{\lambda_n}{eq}$ правильна для будь-якого $q > 0$ і всіх $n \geq n_0(q)$. Тоді з нерівності $q_R \geq q/(1+\beta)$ отримуємо $q_R = +\infty$. Достатність умови (2) доведено.

3. Доведення необхідності. В класі $S^*(\Lambda)$ необхідність умови (2) доведемо, використовуючи методику Дж. Уайтекера [4]. Нехай ϱ_R — R-порядок максимального члена ряду Діріхле (1) і $\nu(\sigma, F)$ — його центральний індекс. Тоді

$$q_R = \varliminf_{\sigma \to +\infty} \sigma^{-1} \ln \lambda_{\nu(\sigma,F)}, \quad \varrho_R = \varlimsup_{\sigma \to +\infty} \sigma^{-1} \ln \lambda_{\nu(\sigma,F)}$$

і, якщо $\lambda_{n_j} \leq \lambda_{n_{j+1}}^{\omega}$ для деяких підпослідовності (λ_{n_j}) і числа $\omega > 0$, то вибираючи точку σ_j стрибка центрального індексу так, щоб $\lambda_{\nu(\sigma_j - 0, F)} \leq \lambda_{n_j} \leq \lambda_{n_{j+1}} \leq \lambda_{\nu(\sigma_j + 0, F)}$, маємо

$$q_R \leq \varliminf_{j \to \infty} \frac{\ln \lambda_{\nu(\sigma_j - 0, F)}}{\sigma_j} \leq \varlimsup_{j \to \infty} \frac{\ln \lambda_{n_j}}{\sigma_j} \leq \omega \varlimsup_{j \to \infty} \frac{\ln \lambda_{n_{j+1}}}{\sigma_j} \leq \omega \varlimsup_{j \to \infty} \frac{\ln \lambda_{\nu(\sigma_j + 0, F)}}{\sigma_j} \leq \omega \varrho_R,$$

тобто $q_R \leq \varrho_R \varliminf_{n \to \infty} \frac{\ln \lambda_n}{\ln \lambda_{n+1}}$. Якщо тепер виберемо коефіцієнти ряду (1) так, щоб $\ln |a_n| = -\lambda_n \ln (\lambda_n / e)$, то $F \in S^*(\Lambda)$, $\varrho_R = 1$ і $q_R = 0$ за умови, що (2) не виконується.

Необхідність умови (2) в класі $S^*(\Lambda)$ доведено.

Доведемо, що умова (2) є необхідною і в класі $S^{**}(\Lambda)$. Припустимо, що вона не виконується, тобто існує зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$\ln \lambda_{n_k+1}/\ln \lambda_{n_k} \to \infty$, $k \to \infty$. Виберемо повільно зростаючу до $+\infty$ неперервнодиференційовну функцію α так, щоб $\alpha(\ln \lambda_{n_k+1}) \le \ln \lambda_{n_k+1}/\ln \lambda_{n_k}$ для всіх k і функція $\Phi(\sigma) = \exp\{\sigma\alpha(\sigma)\}$ належала до класу Ω, а коефіцієнти ряду Діріхле (1) виберемо так, щоб $\ln |a_n| = -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))$. Тоді $\Phi'(\sigma) = \exp\{\sigma\alpha(\sigma)\}(\alpha(\sigma) + \sigma\alpha'(\sigma)) = (1 + o(1))\alpha(\sigma)\exp\{\sigma\alpha(\sigma)\}$ $(\sigma \to +\infty)$ і для знаходження асимптотики функції φ треба розв'язати рівняння $\sigma\alpha(\sigma) + \ln(\alpha(\sigma) + \sigma\alpha'(\sigma)) = \ln x$. Розв'язок $\sigma = \varphi(x)$ цього рівняння задовольняє умову $\sigma\alpha(\sigma) + \ln \alpha(\sigma) + o(1) = \ln x$ $(x \to +\infty)$ і, отже,

$$\ln \sigma + \ln \alpha(\sigma) + o(1) = \ln \ln x, \quad x \to +\infty. \tag{4}$$

Оскільки $\ln \alpha(\sigma) = o(\ln \sigma)$, $\sigma \to +\infty$, то розв'язок рівняння (4) будемо шукати у вигляді

$$\ln \sigma = \ln \ln x - \beta, \quad \beta = \beta(x) = o(\ln \ln x)\,(x \to +\infty). \tag{5}$$

Підставляючи (5) в (4), одержуємо $\beta = \ln \alpha(e^{\ln \ln x - \beta}) + o(1) = \ln \alpha(\ln x) + o(1)$ $(x \to +\infty)$, тобто $\ln \sigma = \ln \ln x - \ln \alpha(\ln x) + o(1)\,(x \to +\infty)$ і

$$\varphi(x) = \frac{(1 + o(1)) \ln x}{\alpha(\ln x)}, \quad x \to +\infty. \tag{6}$$

Оскільки $(x\Psi(\varphi(x)))' = \varphi(x)$, то, використовуючи правило Лопіталя і співвідношення (6), бачимо, що ряд Діріхле (1) з вибраними коефіцієнтами належить до класу $S^{**}(\Lambda)$. З (6) випливає також, що

$$\begin{aligned} \varkappa_{n_k} &= \frac{1 + o(1)}{\lambda_{n_k+1} - \lambda_{n_k}} \int\limits_{\lambda_{n_k}}^{\lambda_{n_k+1}} \frac{\ln x}{\alpha(\ln x)} dx \ge \frac{1 + o(1)}{\alpha(\ln \lambda_{n_k+1})} \frac{\lambda_{n_k+1} \ln \lambda_{n_k+1} - \lambda_{n_k} \ln \lambda_{n_k}}{\lambda_{n_k+1} - \lambda_{n_k}} = \\ &= \frac{(1 + o(1)) \ln \lambda_{n_k+1}}{\alpha(\ln \lambda_{n_k+1})}, \quad k \to \infty. \end{aligned} \tag{7}$$

З іншого боку, оскільки [3]

$$\ln \mu(\varkappa_n, F) = -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n)) + \varkappa_n \lambda_n = G_1(\lambda_n, \lambda_{n+1}, \Phi) = \frac{\lambda_{n+1}\lambda_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \Psi(\varphi(x))\Big|_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}},$$

а з огляду на (6)

$$\Psi(\varphi(x)) = \frac{1 + o(1)}{x} \int_{x_0}^{x} \varphi(t)dt = \frac{(1 + o(1)) \ln x}{\alpha(\ln x)}, \quad x \to +\infty,$$

то

$$\begin{aligned} \ln \mu(\varkappa_{n_k}, F) &= \frac{\lambda_{n_k+1}\lambda_{n_k}}{\lambda_{n_k+1} - \lambda_{n_k}} \left((1 + o(1)) \frac{\ln \lambda_{n_k+1}}{\alpha(\ln \lambda_{n_k+1})} - (1 + o(1)) \frac{\ln \lambda_{n_k}}{\alpha(\ln \lambda_{n_k})} \right) = \\ &= (1 + o(1))\lambda_{n_k} \frac{\ln \lambda_{n_k+1}}{\alpha(\ln \lambda_{n_k+1})}, \quad k \to \infty. \end{aligned} \tag{8}$$

З нерівностей (7) і (8) випливає, що

$$\frac{\ln\ln\mu(\varkappa_{n_k},F)}{\varkappa_{n_k}} \le \frac{\ln\lambda_{n_k} + \ln\dfrac{\ln\lambda_{n_k+1}}{\alpha(\ln\lambda_{n_k+1})} + o(1)}{(1+o(1))\dfrac{\ln\lambda_{n_k+1}}{\alpha(\ln\lambda_{n_k+1})}} =$$

$$= \quad \frac{\ln\lambda_{n_k}\alpha(\ln\lambda_{n_k+1})}{\ln\lambda_{n_k+1}} + o(1) \le 1 + o(1), \quad k\to\infty,$$

тобто $q_R < 1$. Необхідність умови (2) в класі $S^{**}(\Lambda)$ доведено.

Оскільки $\max\{|a_n|\exp(\sigma\lambda_n) : n \ge 0\} \ge \max\{|a_{n_k}|\exp(\sigma\lambda_{n_k}) : k \ge 0\}$, то з теореми випливає таке: якщо для деякої зростаючої послідовності (n_k) натуральних чисел $\ln\lambda_{n_k+1} = O(\ln\lambda_{n_k})$ і $\ln(1/|a_{n_k}|) = O(\lambda_{n_k}\ln\lambda_{n_k})$ при $k\to\infty$, то $q_R > 0$, а якщо $\ln\lambda_{n_k+1} = O(\ln\lambda_{n_k})$ і $\ln(1/|a_{n_k}|) = o(\lambda_{n_k}\ln\lambda_{n_k})$ при $k\to\infty$, то $q_R = +\infty$.

1. *Rahman Q.I.* On the lower order of entire functions defined by Dirichlet series // Quart. J. Math. Oxsford.– 1956.– Vol. 7.– P.96-99.

2. *Шеремета М.Н., Федыняк С.И.* О производной ряда Дирихле // Сиб. матем. журн.– 1998.– Т. 39, N 1.– С.206-223.

3. *Шеремета М.М., Сумик О.М.* Зв'язок між зростанням спряжених за Юнгом функцій // Матем. студії.– 1999.– Т.11, N 1.– С.41-47.

4. *Whittaker J.M.* The lower order of integral functions // J. Lond. Math. Soc.– 1933.– Vol. 8.– P.20-27.

ON THE LOWER R-ORDER OF THE MAXIMAL TERM OF ENTIRE DIRICHLET SERIES

Myroslav Sheremeta, Oksana Sumyk

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

The conditions on the coefficients and exponents of an entire Dirichlet series under which the lower R-order of its maximal term is positive and, in particular, infinite are found.

Key words: entire Dirichlet series, maximal term.

Стаття надійшла до редколегії 06.02.2006

Прийнята до друку 02.11.2006

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2006. Вип.66. С.208–213 *Ser.Mech-Math.2006. Vol.66. P.208–213*

УДК 517.5

ОБМЕЖЕНІСТЬ l-ІНДЕКСУ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ, ЗОБРАЖЕНИХ СТЕПЕНЕВИМИ РЯДАМИ

Зоряна ШЕРЕМЕТА[1], **Мирослав ШЕРЕМЕТА**[2]

[1]*Інститут прикладних проблем математики і механіки НАН України,*
вул. Дудаєва, 15, 79050 Львів, Україна
[2]*Львівський національний університет імені Івана Франка,*
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

Знайдено умови на коефіцієнти степеневого розвинення аналітичної в крузі $\mathbb{D}_R = \{z : |z| < R\}$ функції f, за яких f є функцією обмеженого l-індексу з $l(r) = \beta/(R - r)$ для всіх $r \in [0, R)$ і деякого $\beta \geqslant 1$. Досліджено обмеженість l-індексу виродженої гіпергеометричної функції.

Ключові слова: аналітичні функції обмеженого індексу, степеневе розвинення, гіпергеометрична функція.

Нехай

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

– аналітична в крузі $\mathbb{D}_R = \{z : |z| < R\}$ функція (радіус збіжності ряду (1) може бути більшим, ніж R), а l – додатна неперервна на $[0, R)$ функція. Функція f називається функцією обмеженого l-індексу [1] в $\mathbb{D}_R$, якщо існує $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in \mathbb{D}_R$

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!l^n(|z|)} \leqslant \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!l^k(|z|)} : 0 \leqslant k \leqslant N\right\}. \tag{2}$$

Найменше з таких чисел N називається l-індексом функції f в $\mathbb{D}_R$ і позначається через $N(f, l; \mathbb{D}_R)$. Означення l-індексу цілої функції отримуємо заміною $\mathbb{D}_R$ на $\mathbb{C}$.

Мета нашої праці — визначити умови на коефіцієнти a_n, за яких функція (1) є обмеженого l-індексу з $l(r) = \beta/(R-r)$, де $\beta \geqslant 1$ – деяке число, а також дослідження обмеженості l-індексу виродженої гіпергеометричної функції.

Теорема 1. *Якщо* $a_0 \neq 0$ *і* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{|a_0|} R^n \leqslant \alpha(R) < 1$, *то* $N(f,l;\mathbb{D}_R) = 0$ *з* $l(r) = \frac{1+\alpha(R)}{1-\alpha(R)} \frac{1}{R-r}$ *для всіх* $r \in [0,\, R)$.

Доведення. З означення (2) випливає, що $N(f,l;\mathbb{D}_R) = N(\varphi,l;\mathbb{D}_R)$, де $\varphi(z) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_0} z^n$. Але для всіх $z \in \mathbb{D}_R$

$$1 - \alpha(R) \leqslant 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{|a_0|}|z|^n \leqslant |\varphi(z)| \leqslant 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{|a_0|}|z|^n \leqslant 1 + \alpha(R).$$

Тому для кожного $z \in \mathbb{D}_R$ і всіх $k \geqslant 1$

$$\frac{|\varphi^{(k)}(z)|}{k!} = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau - z| = R - |z|} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - z)^{k+1}} d\tau \right| \leqslant \frac{\max\{|\varphi(z)| : z \in \mathbb{D}_R\}}{(R-|z|)^k} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1+\alpha(R)}{1-\alpha(R)} \frac{1-\alpha(R)}{(R-|z|)^k} \leqslant \frac{1+\alpha(R)}{1-\alpha(R)} \frac{|\varphi(z)|}{(R-|z|)^k},$$

тобто

$$\frac{|\varphi^{(k)}(z)|}{k!} \left(\frac{(R-|z|)(1-\alpha(R))}{1+\alpha(R)} \right)^k \leqslant \left(\frac{1-\alpha(R)}{1+\alpha(R)} \right)^{k-1} |\varphi(z)| \leqslant |\varphi(z)|,$$

звідки випливає, що $N(f,l;\mathbb{D}_R) = 0$ з $l(r) = \frac{1+\alpha(R)}{1-\alpha(R)} \frac{1}{R-r}$. Теорему 1 доведено.

З теореми 1 випливають два твердження.

Наслідок 1. *Нехай* $f(z) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n z^n$ *– аналітична в одиничному крузі функція і* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n| \leqslant \alpha < 1$. *Тоді* f *– функція обмеженого* l*-індексу* $N(f,l;\mathbb{D}_1) = 0$ *з* $l(r) = \frac{\beta}{1-r}$, *де* $\beta = (1+\alpha)/(1-\alpha)$.

Наслідок 2. *Нехай* $f(z) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n z^n$ *– ціла функція, а* $R > 0$ *– довільне число таке, що* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n| R^n \leqslant \alpha(R) < 1$. *Тоді* $N(f,l;\mathbb{D}_{R/2}) = 0$ *з* $l(r) \equiv \frac{2}{R} \frac{1+\alpha(R)}{1-\alpha(R)}$.

Наступна теорема може бути корисною як у випадку, коли $a_0 = 0$, так і у випадку, коли $a_0 \neq 0$.

Теорема 2. *Нехай функція (1) аналітична в крузі* $\mathbb{D}_R$, $j = \min\{n \geqslant 1 : a_n \neq 0\}$ *і* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+j)!}{j!n!} \frac{|a_{n+j}|}{|a_j|} R^n \leqslant \alpha_j(R) < 1$. *Тоді* $N(f,l;\mathbb{D}_R) \leqslant j + J(R)$, *де* $l(r) = \frac{1}{R-r}$ *для всіх* $r \in [0,\, R)$ *і* $J(R) = \min\left\{ k \geqslant j : \frac{1+\alpha_j(R)}{1-\alpha_j(R)} \leqslant \frac{(k+j)!}{k!j!} \right\}$.

Доведення. Оскільки $a_j \neq 0$ і

$$f^{(j)}(z) = j!a_j + \sum_{n=j+1}^{\infty} n(n-1)\dots(n-j+1)a_n z^{n-j} = j!a_j \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+j)!}{j!n!} \frac{a_{n+j}}{a_j} z^n\right),$$

то $N(f^{(j)}, l; \mathbb{D}_R) = N(\varphi, l; \mathbb{D}_R)$, де тепер $\varphi(z) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+j)!}{j!n!} \frac{a_{n+j}}{a_j} z^n$ і, як у доведенні теореми 1, $1 - \alpha_j(R) \leqslant |\varphi(z)| \leqslant 1 + \alpha_j(R)$ для всіх $z \in \mathbb{D}_R$.

Далі, як у доведенні теореми 1, для кожного $z \in \mathbb{D}_R$ і всіх $k \geqslant 1$ маємо

$$\frac{|\varphi^{(k)}(z)|}{k!} \leqslant \frac{1 + \alpha_j(R)}{1 - \alpha_j(R)} \frac{|\varphi(z)|}{(R - |z|)^k},$$

і, оскільки $\varphi^{(k)}(z) = f^{(j+k)}(z)/j!a_j$, то для кожного $z \in \mathbb{D}_R$ і всіх $k \geqslant J(R)$

$$\frac{|f^{(j+k)}(z)|}{(k+j)!} \leqslant \frac{k!j!}{(k+j)!} \frac{1 + \alpha_j(R)}{1 - \alpha_j(R)} \frac{|f^{(j)}(z)|}{j!(R - |z|)^k} \leqslant \frac{|f^{(j)}(z)|}{j!(R - |z|)^k},$$

тобто для всіх $k \geqslant J(R)$

$$\frac{|f^{(j+k)}(z)|}{(k+j)!} (R - |z|)^{k+j} \leqslant \frac{|f^{(j)}(z)|}{j!} (R - |z|)^j,$$

звідки випливає нерівність

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!} (R - |z|)^n \leqslant \max \left\{ \frac{|f^{(m)}(z)|}{m!} (R - |z|)^m : \, 0 \leqslant m \leqslant j + J(R) \right\}.$$

Теорему 2 доведено.

З теореми 2 легко отримати відповідні аналоги наслідків 1 і 2. Розглянемо тільки аналітичні в одиничному крузі функції.

Наслідок 3. *Нехай $f(z) = z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} f_n z^n$ – аналітична в одиничному крузі функція і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n|f_n| \leqslant \alpha < 1$. Тоді f – функція обмеженого l-індексу $N(f, l; \mathbb{D}_1) \leqslant 1 + J$, де $l(r) = \dfrac{1}{1-r}$ і $J = \min\left\{k \geqslant 1 : \, \dfrac{1+\alpha}{1-\alpha} \leqslant k+1\right\}$.*

Зауважимо, що умова $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n|f_n| \leqslant \alpha < 1$ є достатньою для того, щоб функція $f(z) = z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} f_n z^n$ була близькою до опуклої в одиничному крузі [2].

Теореми 1 і 2 та їхні наслідки можна застосовувати до дослідження обмеженості l-індексу спеціальних функцій. Розглянемо тут лише вироджену гіпергеометричну функцію. Так називається [3, с. 78] функція

$$F(z) = F(\alpha, \gamma; z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{k-1} \frac{j+\alpha}{j+\gamma} \right) \frac{z^k}{k!}, \quad \gamma \neq 0, \, -1 \, -2, \dots.$$

Функція $F(\alpha,\gamma;z)$ є цілою і задовольняє [3, с. 78] диференціальне рівняння

$$zw''+(\gamma-z)w'-\alpha w=0. \tag{3}$$

З теореми 1 з [4] випливає таке: якщо $0<\alpha\leqslant\gamma$, то вироджена гіпергеометрична функція та всі її похідні є близькими до опуклих в $\mathbb{D}$ і $\ln M_F(r)\sim r$ при $r\to+\infty$, де $M_F(r)=\max\{|F(z)|:\,|z|=r\}$.

Обмеженість l-індексу функції F будемо досліджувати також за умови $0<\alpha\leqslant\gamma$.

Якщо через a_k позначимо тейлорові коефіцієнти функції F, то

$$F^{(n)}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+n)!}{k!}a_{k+n}z^k$$

і, отже, $F^{(n)}$ є обмеженого l-індексу в G тоді і тільки тоді, коли такою є функція

$$F_n(z)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k+n)!}{k!n!}\frac{a_{k+n}}{a_n}z^k=1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{j=n}^{n+k-1}\frac{j+\alpha}{j+\gamma}\right)\frac{z^k}{k!}. \tag{4}$$

Якщо позначимо $F_0=F$, то і F_0 має розвинення в степеневий ряд (4). Оскільки

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\prod_{j=n}^{n+k-1}\frac{j+\alpha}{j+\gamma}\right|\frac{1}{k!2^k}\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!2^k}=\sqrt{e}-1<1,$$

то, використовуючи наслідок 2 з $R=1/2$, отримуємо таке твердження.

Твердження 1. *Якщо* $0<\alpha\leqslant\gamma$, *то* $N(F^{(n)},l;\mathbb{D}_{1/4})=0$ $(n\geqslant 0)$ *з* $l(r)=4\sqrt{e}/(2-\sqrt{e})$, $0\leqslant r\leqslant 1/4$.

Перейдемо до обмеженості l-індексу функції F в $\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}_{1/4}$. Підставляючи F у рівняння (3), для $|z|\geqslant 1/4$ маємо

$$\begin{aligned}\frac{|F''(z)|}{2!(4\gamma+4)^2}&\leqslant\frac{\gamma/|z|+1}{2(4\gamma+4)}\frac{|F'(z)|}{1!(4\gamma+4)}+\frac{\alpha/|z|}{2(4\gamma+4)^2}|F(z)|\leqslant\\&\leqslant\left(\frac{4\gamma+1}{8(\gamma+1)}+\frac{4\gamma}{32(\gamma+1)^2}\right)\max\left\{\frac{|F'(z)|}{1!(4\gamma+4)},\,|F(z)|\right\}<\\&<\max\left\{\frac{|F'(z)|}{1!(4\gamma+4)},\,|F(z)|\right\}.\end{aligned} \tag{5}$$

Якщо підставимо F у (3) і продиференціюємо $m\geqslant 1$ раз, то отримаємо

$$zF^{(m+2)}(z)+(m+\gamma-z)F^{(m+1)}(z)-(m+\alpha)F^{(m)}(z)\equiv 0, \tag{6}$$

звідки, як вище, одержуємо

$$\begin{aligned}\frac{|F^{(m+2)}(z)|}{(m+2)!(4\gamma+4)^{m+2}}&\leqslant\left(\frac{4(m+\gamma)+1}{(m+2)(4\gamma+4)}+\frac{4(m+\gamma)}{(m+2)(m+1)(4\gamma+4)^2}\right)\times\\&\times\max\left\{\frac{|F^{(m+1)}(z)|}{(m+1)!(4\gamma+4)^{m+1}},\,\frac{|F^{(m)}(z)|}{m!(4\gamma+4)^m}\right\}<\\&<\max\left\{\frac{|F^{(m+1)}(z)|}{(m+1)!(4\gamma+4)^{m+1}},\,\frac{|F^{(m)}(z)|}{m!(4\gamma+4)^m}\right\}.\end{aligned} \tag{7}$$

З (5) і (7) легко випливає, що $N(F,l;\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}_{1/4})\leqslant 1$ з $l(r)\equiv 4(\gamma+1)$ $(r\geqslant 1/4)$.

Для кожного фіксованого $n\geqslant 1$ і всіх $j\geqslant 0$ з тотожності (6) одержуємо

$$zF^{(n+j+2)}(z)+(n+j+\gamma-z)F^{(n+j+1)}(z)-(n+j+\alpha)F^{(n+j)}(z)\equiv 0,$$

звідки, як вище, отримуємо

$$\frac{|F^{(n+j+2)}(z)|}{(j+2)!(4\gamma+4n+4)^{j+2}}\leqslant\left(\frac{4(n+j+\gamma)+1}{(j+2)(4\gamma+4n+4)}+\frac{4(n+j+\gamma)}{(j+2)(j+1)(4\gamma+4n+4)^2}\right)\times$$
$$\times\max\left\{\frac{|F^{(n+j+1)}(z)|}{(j+1)!(4\gamma+4n+4)^{j+1}},\frac{|F^{(n+j)}(z)|}{j!(4\gamma+4n+4)^{j}}\right\}<$$
$$<\max\left\{\frac{|F^{(n+j+1)}(z)|}{(j+1)!(4\gamma+4n+4)^{j+1}},\frac{|F^{(n+j)}(z)|}{j!(4\gamma+4n+4)^{j}}\right\}.$$

Звідси випливає, що $N(F^{(n)},l_n;\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}_{1/4})\leqslant 1$ $(n\geqslant 1)$ з $l_n(r)\equiv 4(\gamma+n+1)$ $(r\geqslant 1/4)$.

Отже, доведено твердження.

Твердження 2. *Якщо* $0<\alpha\leqslant\gamma$, *то* $N(F^{(n)},l_n;\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}_{1/4})\leqslant 1$ *для кожного* $n\geqslant 0$, *де* $l_n(r)\equiv 4(\gamma+n+1)$ $(r\geqslant 1/4)$.

Неважко показати [1, с.23] таке: якщо $l_*(r)\leqslant l^*(r)$ і $N(f,l_*;G)\leqslant N$, то $N(f,l^*;G)\leqslant N$. Тому з тверджень 1 і 2 випливає теорема.

Теорема 3. *Якщо параметри виродженої гіпергеометричної функції* $F(z)=F(\alpha,\gamma;z)$ *задовольняють умову* $0<\alpha\leqslant\gamma$, *то* $N(F^{(n)},l_n;\mathbb{C})\leqslant 1$ *для кожного* $n\geqslant 0$, *де* $l_n(r)\equiv 4\max\{\sqrt{e}/(2-\sqrt{e}),\ \gamma+n+1\}$.

1. *Sheremeta M.M.* Analytic functions of bounded index.– Lviv, 1999.

2. *Шеремета З.М.* Про функції, близькі до опуклих // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.– 2003.– Вип. 62.– С.144-146.

3. *Кузнецов Д.С.* Специальные функции.– М., 1965.

4. *Shah S.M.* Univalence of a function f and its successive derivatives when f satisfies a differerntial equation, II // J. Math. Anal. and Appl.– 1989.– Vol.142.– P.422-430.

BOUNDEDNESS OF L-INDEX OF ANALYTIC FUNCTIONS REPRESENTED BY POWER SERIES

Zoryna Sheremeta[1], **Myroslav Sheremeta**[2]

[1] *Instytut of Applied Problems of Mechanic and Mathematic, Dudayeva str., 15, 79050 Lviv, Ukraine*
[2] *Ivan Franko National University of Lviv, Universitetska str., 1, 79000 Lviv, Ukraine*

Conditions on the coefficients of the power development of an analytic function f in the disk $\mathbb{D}_R = \{z : |z| < R\}$ are found, under which f is of bounded l-index with $l(r) = \beta/(R-r)$ for all $r \in [0, R)$ and some $\beta \geqslant 1$. The boundedness of l-index of degenerated hypergeomitric function is investigated.

Key words: analytic functions of bounded index, power development, hypergeomitric function.

Стаття надійшла до редколегії 21.10.2005

Прийнята до друку 02.11.2006

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2006. Вип.66. С.214–224 *Ser.Mech-Math.2006. Vol.66. P.214–224*

УДК 515.12

ГІПЕРСИМЕТРИЧНІ СТЕПЕНІ І АСИМПТОТИЧНО НУЛЬВИМІРНІ ПРОСТОРИ

Оксана ШУКЕЛЬ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

Доведено, що функтор гіперсиметричного степеня у категорії Рое власних метричних просторів та грубих відображень зберігає грубі вкладення і асимптотично нульвимірні простори. Крім того, цей функтор можна розглядати і в асимптотичній категорії Дранішнікова. Розглянуто задачі існування грубих вкладень деяких асимптотично нульвимірних просторів та їхніх гіперсиметричних степенів.

Ключові слова: асимптотичний вимір, грубе вкладення, гіперсиметричний степінь.

1. Предметом асимптотичної топології є дослідження "великомасштабних" властивостей метричних просторів і деяких більш загальних структур (грубих множин, грубих топологічних просторів тощо), тобто властивостей в "нескінченності", на відміну від класичної топології, яка вивчає "локальні" властивості.

Основи асимптотичної топології викладено в статті Дранішнікова [4], де, зокрема, наведено низку означень і результатів, потрібних для подальшого викладення.

Аналогом вкладень топологічних просторів в асимптотичній топології є так звані грубі вкладення. Результатам про існування чи неіснування грубих вкладень присвячено багато праць (наприклад, [1, 2, 3]) і такі результати часто мають важливі застосування. Ю (Yu) довів [3], що кожен дискретний метричний простір, який допускає грубе вкладення в гільбертовий простір, задовольняє грубу аксіому Баума-Конна.

У цій статті ми розглядаємо задачу існування грубих вкладень для деяких нульвимірних просторів та їхніх гіперсиметричних степенів. Також запроваджено деякі асимптотично нульвимірні об'єкти асимптотичної топології.

1.1. Термінологія і позначення.

Через $O_\varepsilon(A)$ позначаємо ε-окіл множини A в метричному просторі, $\varepsilon \geqslant 0$. Замкнену кулю радіуса ε з центром в точці x позначають здебільшого $\overline{O}_\varepsilon(x)$, де $x \in X$, $\varepsilon \geqslant 0$.

Метричний простір (X, d) називаємо *власним*, якщо кожна замкнена куля в X компактна.

Нехай (X, d) і (Y, ρ) — власні метричні простори. Відображення $f : X \to Y$ називаємо (λ, s)-*ліпшицевим* (тут $\lambda > 0,\ s \geqslant 0$), якщо

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant \lambda\ d(x, y) + s, \qquad x, y \in X.$$

Кажуть, що відображення $f\colon X \to Y$ є *асимптотично ліпшицевим*, якщо воно є (λ, s)-ліпшицевим для деяких λ, s.

Відображення $f\colon X \to Y$ називають *власним*, якщо прообраз кожної компактної множини є компактним. Відображення $f\colon X \to Y$ називають *грубо власним*, якщо прообраз кожної обмеженої множини є обмеженим. Множину в метричному просторі називають *обмеженою*, якщо вона міститься в деякій кулі. Для підмножини A в метричному просторі (X, d) приймемо $\mathrm{diam}A = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$.

Нехай $C > 0$. Множину M в метричному просторі X називаємо *C-зв'язною*, якщо для кожних $x, y \in M$ існують $x_0 = x, x_1, ..., x_{n-1}, x_n = y \in M$ такі, що $d(x_i, x_{i-1}) \leqslant C,\ i = 1, ..., n$. Максимальну (щодо включення) C-зв'язну множину називаємо *компонентою C-зв'язності.*

2. Асимптотична категорія. В [4] введено асимптотичну категорію $\mathcal{A}$. Об'єктами цієї категорії є власні метричні простори, а морфізмами — власні асимптотично ліпшицеві відображення.

Нехай $n \in \mathbb{N}$. Позначимо через $\exp_n X$ множину $\{A \subset X|\ 1 \leqslant |A| \leqslant n\}$. Метрика d на X породжує метрику Гаусдорфа d_H на $\exp_n X$

$$d_H(A, B) = \inf\{\varepsilon \geqslant 0|\ A \subset O_\varepsilon(B), B \subset O_\varepsilon(A)\}.$$

Є. В.Щепін [9] запропонував термін *n-гіперсиметричний степінь* для просторів вигляду $\exp_n X$. В [9] зауважено, що $\exp_n$ — функтор в категорії компактів (компактних гаусдорфових просторів) і неперервних відображень.

Покажемо, що конструкція $\exp_n$ визначає функтор в категорії $\mathcal{A}$. Це випливатиме з тверджень 1, 2, 3.

Твердження 1. *Якщо* (X, d) *— власний метричний простір, то* $(\exp_n X, d_H)$ *— теж власний метричний простір.*

Доведення. Нехай $A = \{x_1, ...x_k\} \ \in \exp_n X$ і $\ \varepsilon > 0$. Множина $C = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \overline{O}_\varepsilon(x_i)$ є скінченним об'єднанням компактів, тому є компактним простором. Позначимо через $\overline{N}_\varepsilon(A)$ замкнену кулю з центром в точці A в просторі $\exp_n X$

$$\overline{N}_\varepsilon(A) = \{B \in \exp_n X|\ d_H(A, B) \leqslant \varepsilon\} \ \subseteq \exp_n \overline{O}_\varepsilon(A).$$

Легко бачити, що $\overline{N}_\varepsilon(A)$ є замкненою підмножиною в $\exp_n C$. Оскільки конструкція $\exp_n$ зберігає компактність, то звідси випливає, що підмножина $\overline{N}_\varepsilon(A)$ є компактною як замкнена підмножина в компакті $\exp_n C$.

Для кожного відображення $f : X \to Y$ метричних просторів означимо через $\exp_n f\colon \exp_n X \to \exp_n Y$ відображення, що діє за формулою

$$\exp_n f(A) = f(A) \ \subset Y,\ A \in \exp_n X.$$

Іншими словами, якщо $A = \{x_1, ..., x_k\} \in \exp_n X$, тоді

$$\exp_n f(A) = \{f(x_1), ..., f(x_k)\} \in \exp_n Y.$$

Твердження 2. *Нехай $f : X \to Y$ — (λ, s)-ліпшицеве відображення. Тоді відображення $\exp_n f$ теж (λ, s)-ліпшицеве.*

Доведення. Необхідно показати, що

$$\rho_H(f(A), f(B)) \leqslant \lambda \cdot d_H(A, B) + s$$

для кожних $A, B \in \exp_n X$.

Нехай $d_H(A, B) = c$. Тоді для кожного $x \in A$ знайдеться $y \in B$ таке, що $d(x, y) \leqslant c$ і для кожного $y \in B$ знайдеться $x \in A$ таке, що $d(y, x) \leqslant c$.

Оскільки відображення f є (λ, s)-ліпшицевим, то для довільного $x \in A$ знайдеться $y \in B$ таке, що $\rho(f(x), f(y)) \leqslant \lambda \cdot c + s$, і для довільного $y \in B$ знайдеться $x \in A$ таке, що $\rho(f(y), f(x)) \leqslant \lambda \cdot c + s$, тобто $f(A) \subset O_\varepsilon(f(B))$ і $f(B) \subset O_\varepsilon(f(A))$, де $\varepsilon = \lambda \cdot c + s$.

Це означає, що

$$\rho_H(f(A), f(B)) \leqslant \lambda \cdot c + s,$$

або

$$\rho_H(f(A), f(B)) \leqslant \lambda \cdot d_H(A, B) + s.$$

Означення 1. *Відображення $f\colon X \to Y$ метричних просторів (X, d), (Y, ρ) називається грубо рівномірним, якщо існує неспадна функція $\varphi\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ така, що $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$ і $\rho(f(x), f(y)) \leqslant \varphi(d(x, y))$ для всіх $x, y \in X$.*

Відображення f називається *грубим відображенням*, якщо воно є грубо рівномірним і грубо власним.

Твердження 3. *Нехай $f\colon X \to Y$ — власне відображення. Тоді $\exp_n f\colon \exp_n X \to \exp_n Y$ — власне відображення.*

Доведення. Нехай $A \subset \exp_n Y$ — компакт. Тоді множина $K = \bigcup\{C|\ C \in A\}$ також є компакт [5].

Оскільки відображення f власне, то $f^{-1}(K)$ — компакт, а отже, $(\exp_n f)^{-1}(A) \subset \exp_n(f^{-1}(K))$ — компакт як замкнена підмножина компакту.

Твердження 4. *Якщо $f\colon X \to Y$ — грубо власне відображення, то відображення $\exp_n f\colon \exp_n X \to \exp_n Y$ теж грубо власне.*

Доведення. Нехай $G \subset \exp_n Y$ — обмежена множина. Тоді існують $A \in \exp_n Y$ і $r > 0$ такі, що $G \subset N_r(A)$ (куля радіуса r з центром у точці A в $\exp_n Y$). Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $A = \{y_0\}$ для деякої точки $y_0 \in Y$. Тоді

$$(\exp_n f)^{-1}(G) \subset (\exp_n f)^{-1}(N_r(\{y_0\}) = \exp_n(f^{-1}(O_r(y_0)),$$

тобто множина $(\exp_n f)^{-1}(G)$ обмежена. Звідси випливає груба властність відображення $\exp_n f$.

Твердження 5. *Якщо f — грубе відображення, то* $\exp_n f$ *— грубе відображення.*

Доведення. Нехай $f : X \to Y$ — грубе відображення. Тоді воно є грубо рівномірним, а отже, існує неспадна функція $\varphi\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ така, що $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$, і маємо

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant \varphi(d(x, y)),\ \ x, y \in X.$$

Розглянемо довільні $A, B \in \exp_n X$. Нехай $d_H(A, B) = c$.

Тоді для кожної точки $x \in A$ існує, принаймні, одна точка $y \in B$ така, що $d(x, y) \leqslant c$. Аналогічно, для кожної точки $y \in B$ існує, принаймні, одна точка $x \in A$ така, що $d(y, x) \leqslant c$. Тоді, за означенням грубого відображення, для довільної точки $f(x) \in f(A)$ знайдеться хоча б одна точка $f(y) \in f(B)$ така, що $\rho(f(x), f(y)) \leqslant \varphi(c)$, і, аналогічно, для довільної точки $f(y) \in f(B)$ знайдеться хоча б одна точка $f(x) \in f(A)$ така, що $\rho(f(y), f(x)) \leqslant \varphi(c)$.

Тобто, для кожного $\delta > 0$ маємо

$$f(A) \subset O_{\varphi(c)+\delta}(f(B)),\ \ f(B) \subset O_{\varphi(c)+\delta}(f(A)),$$

звідки випливає, що $\rho_H(f(A), f(B)) \leqslant \varphi(c)$. Враховуючи попереднє твердження 4, одержуємо, що $\exp_n f$ — грубе відображення.

3. Категорія Рое. Одна з важливих категорій в асимптотичній топології введена в [6]. Ми називаємо цю категорію категорією Рое і позначаємо $\mathcal{R}$. Об'єктами категорії $\mathcal{R}$ є власні метричні простори, а морфізмами — грубі відображення. Як наслідок тверджень 1, 4, 5 одержуємо, що конструкція $\exp_n$ визначає функтор в категорії $\mathcal{R}$ (функтор n-гіперсиметричного степеня).

Означення 2. *Відображення $f\colon (X, d) \to (Y, \rho)$ називається грубим вкладенням, якщо існують неспадні функції $\varphi_1, \varphi_2\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ такі, що*

$$\lim_{t\to\infty} \varphi_1(t) = \lim_{t\to\infty} \varphi_2(t) = \infty$$

і

$$\varphi_1(d(x, y)) \leqslant \rho(f(x), f(y)) \leqslant \varphi_2(d(x, y))$$

для будь-яких $x, y \in X$.

Твердження 6. *Функтор* $\exp_n$ *зберігає грубі вкладення.*

Доведення. Достатньо показати, що виконується ліва частина нерівності з означення грубого вкладення. (Твердження 5 забезпечує виконання правої частини нерівності).

Нехай $\varphi_1, \varphi_2 \colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ — неспадні функції з означення грубого вкладення і $\rho_H(f(A), f(B)) = \varepsilon$ для деяких $A, B \in \exp_n X$. Це означає, що для довільної точки $x \in A$ існує деяка точка $y \in B$ така, що $\rho(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon$ і для довільної точки $y \in B$ існує деяка точка $x \in A$ така, що $\rho(f(y), f(x)) \leqslant \varepsilon$.

За означенням грубого вкладення

$$\varphi_1(d(x,y)) \leqslant \rho(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon \quad \text{для кожного } x \in A \text{ і для деякого } y \in B,$$

а також

$$\varphi_1(d(y,x)) \leqslant \rho(f(y), f(x)) \leqslant \varepsilon \quad \text{для кожного } y \in B \text{ і для деякого } x \in A.$$

Отож, існує $m > 0$ таке, що

$$\varphi_1(m) \leqslant \varepsilon, \text{ де } O_m(A) \supset B \text{ і } O_m(B) \supset A.$$

Оскільки φ_1 — неспадна функція, то $\varphi_1(m) \geqslant \varphi_1(c)$, де

$$c = \min\{m |\ A \subset O_m(B),\ B \subset O_m(A)\}.$$

Отже,

$$\varphi_1(d_H(A,B)) \leqslant \rho_H(f(A), f(B)) \leqslant \varphi_2(d_H(A,B)).$$

Звідси випливає, що $\exp_n f$ є грубим вкладенням.

4. Асимптотичний вимір. Означення асимптотичного виміру належить М. Громову [7]. Тут ми розглядаємо лише випадок асимптотично нульвимірних просторів.

Нехай (X, d) — метричний простір.

Означення 3. *Кажуть, що асимптотичний вимір метричного простору X дорівнює нулю (позначається* $\operatorname{asdim} X = 0$*), якщо для довільного $D > 0$ існує сім'я множин $\mathcal{U}$ така, що:*

1) $\mathcal{U}$ покриває X;

2) $\mathcal{U}$ рівномірно обмежена (існує $C > 0$ таке, що $\operatorname{diam} U < C$ *для кожної $U \in \mathcal{U}$);*

3) сім'я $\mathcal{U}$ є D-дискретною, тобто для довільних $U, V \in \mathcal{U}$ таких, що $U \neq V$, маємо $\inf\{d(u,v) |\ u \in U, v \in V\} > D$.

Іншими словами, $\operatorname{asdim} X = 0$, якщо для кожного $D > 0$ простір X можна зобразити у вигляді об'єднання D-диз'юнктних множин, діаметри яких обмежені згори деякою сталою.

Прикладом асимптотично нульвимірного простору є така конструкція, яку можна вважати аналогом класичного берівського простору в асимптотичній топології.

Нехай $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ — послідовність скінченних множин, $X_i \neq \varnothing$ для кожного i. Зафіксуємо точку $x_i \in X_i$.

Позначимо

$$X^* = \{(y_i)_{i=1}^{\infty} |\ y_i \in X_i,\ y_i = x_i \text{ для всіх, крім скінченного числа, } i\}.$$

На множині X^* розглянемо метрику

$$d((y_i),(z_i)) = \min\{k |\ y_i = z_i \text{ для всіх } i > k\}.$$

Нескладну перевірку того, що d — метрика на X, залишаємо читачеві.

Твердження 7. *Метричний простір* (X^*, d) *власний і* $\operatorname{asdim} X^* = 0$.

Доведення. Справді, в просторі X^* замкнена куля радіуса ε з центром в точці (y_i) — це множина послідовностей (z_i) таких, що $d((z_i),(y_i)) \leqslant \varepsilon$, тобто

$$\overline{O}_\varepsilon((y_i)) = \{(z_i) |\ z_i = y_i \text{ для всіх } i > \varepsilon\}.$$

Оскільки множини X_i скінченні, то множина точок $z_i \in X_i$ таких, що $z_i \neq y_i$, скінченна. Тоді множина $\overline{O}_\varepsilon((y_i))$ є скінченним об'єднанням скінченних множин, отже, компактна.

Покажемо тепер, що асимптотичний вимір цього простору дорівнює нулю.

Задамо довільне $D \geqslant 1$ і нехай $n \in \mathbb{N}$ — максимальне натуральне число, що не перевищує D. Утворимо множину

$$A = \{(y_i)_{i=1}^{\infty} |\ y_i = x_i \text{ для кожного } i > n\}.$$

Зрозуміло, що $\operatorname{diam} A = n \leqslant D$.

Виберемо довільну послідовність $(z_i)_{i=1}^{\infty} \in X^*$, $(z_i) = (z_1, ..., z_n, ...)$, для якої $z_i \neq x_i$ хоча б для одного номера $i > n$.

Позначимо $B_{n,z} = \{(y_i)_{i=1}^{\infty} |\ y_i = z_i \text{ для всіх } i > n\}$. Тоді $\operatorname{diam} B_{n,z} = n \leqslant D$.

Якщо $(z_i^{'})_{i=1}^{\infty} \neq (z_i^{''})_{i=1}^{\infty}$, то множини $B_{n,z'}$ та $B_{n,z''}$ містять, відповідно, послідовності, які відрізняються, принаймні, однією координатою $k > n$ (інакше б вони належали тій самій множині $B_{n,z}$). Оскільки n — максимальне натуральне число, що не перевищує D, то $k > D$. Тому $\inf d(B_{n,z'}, B_{n,z''}) > k > D$, а також $\inf d(A, B_{n,z}) > k > D$. Крім того, $A \cup \bigcup\limits_z \{B_{n,z}\} = X^*$, а це означає, що $\operatorname{asdim} X^* = 0$.

Твердження 8. *Нехай* $\operatorname{asdim} X = 0$, *тоді* $\operatorname{asdim}(\exp_n X) = 0$.

Доведення. Нехай $D > 0$. Оскільки $\operatorname{asdim} X = 0$, то існує рівномірно обмежена D-дискретна сім'я $\mathcal{U}$ підмножин множини X така, що покриває X.

Нехай $A \in \exp_n X$. Приймемо $A_{\mathcal{U}} = \{A' \in \exp_n X |\ A \cap U \neq \varnothing \iff A' \cap U \neq \varnothing \text{ для кожного } U \in \mathcal{U}\}$. Тоді $A_{\mathcal{U}} \subset \exp_n X$. Позначимо $\overline{\mathcal{U}} = \{A_{\mathcal{U}} |\ A \in \exp_n X\}$. Очевидно, що сім'я $\overline{\mathcal{U}}$ є покриттям простору $\exp_n X$.

Покажемо, що сім'я $\overline{\mathcal{U}}$ є рівномірно обмежена в метриці Гаусдорфа. Нехай $C = \max\{\operatorname{diam} U |\ U \in \mathcal{U}\}$. Оскільки $\mathcal{U}$ — рівномірно обмежена, то $C < \infty$.

Для кожної $A \in \exp_n X$ маємо, що $\operatorname{diam} A_{\mathcal{U}} = \max\{d_H(A^{'}, A^{''} |\ A^{'}, A^{''} \in A_{\mathcal{U}}\}$. Якщо $x^{'} \in A^{'}$, то, очевидно, існують $x^{''} \in A^{''}$ і елемент $U \in \mathcal{U}$, для яких $\{x^{'}, x^{''}\} \subset U$.

Оскільки diam $U < C$, то звідси випливає, що $A^{'} \subset O_C(A^{''})$. Міркуючи аналогічно, одержуємо, що $A^{''} \subset O_C(A^{'})$, звідки $d_H(A^{'}, A^{''}) < C$. Звідси одержуємо, що diam $A_{\mathcal{U}} \leqslant C$, а це й означає рівномірну обмеженість сім'ї $\overline{\mathcal{U}}$.

Покажемо тепер, що сім'я $\overline{\mathcal{U}}$ є D-дискретною. Нехай $A, B \in \exp_n X$ і $A_{\mathcal{U}} \neq B_{\mathcal{U}}$. Тоді існує $V \in \mathcal{U}$, що перетинає лише одну з множин A, B. Нехай для визначеності $A \cap V \neq \varnothing$ і $B \cap V = \varnothing$. Розглянемо довільні $A^{'} \in A_{\mathcal{U}}$ і $B^{'} \in B_{\mathcal{U}}$. Нехай $x \in A^{'} \cap V$. Оскільки сім'я $\mathcal{U}$ є D-дискретною, то одержуємо, що $O_D(x) \cap B^{'} = \varnothing$, звідки $d_H(A^{'}, B') > D$.

5. Приклади. Розглянемо два приклади, що стосуються задачі існування грубих вкладень гіперсиметричних степенів деяких асимптотично нульвимірних просторів.

1. Злічений метричний простір $\{x_i| \ \ i \in \mathbb{N}\}$ називаємо *узагальненою послідовністю*, якщо $\lim\limits_{i\to\infty} d(x_i, \{x_1, ..., x_{i-1}\}) = \infty$.

Теорема 1. *Нехай $S = \{x_i| \ i \in \mathbb{N}\}$ – узагальнена послідовність. При $n \geqslant 2$ не існує грубого вкладення $\exp_n S$ в S.*

Доведення. Припустимо, що таке $f : \exp_n S \to S$ існує. Тоді існують неспадні функції $\varphi_1, \varphi_2 : [0, \infty) \to [0, \infty)$ такі, що

$$\lim_{t\mapsto\infty} \varphi_1(t) = \lim_{t\mapsto\infty} \varphi_2(t) = \infty$$

і

$$\varphi_1(d_H(x, y)) \leqslant d(f(x), f(y)) \leqslant \varphi_2(d_H(x, y)) \text{ для будь-яких } x, y \in \exp_n S.$$

Очевидно, існує $t_0 > 0$ таке, що $\varphi_1(t_0) = c_1 > 0$.

Розглянемо довільні дві точки $x_i = y$ і $x_j = z$ в S такі, що $d(y, z) \geqslant t_0$. Приймемо $\varphi_2(d(y, z)) = c_2$. Нехай $k > \max i, j$. Тоді $d_H(\{x_k, y\}, \{x_k, z\}) = d(y, z)$.

Одержуємо

$$c_1 \leqslant d_H(\{x_k, y\}, \{x_k, z\}) \leqslant c_2 \ \text{ для довільного } k. \tag{1}$$

Оскільки $\lim\limits_{i\mapsto\infty} d(x_i, \{x_1, ..., x_{i-1}\}) = \infty$, то існує $i_0 \in \mathbb{N}$ таке, що для кожного $i > i_o$ маємо

$$d_H(x_i, \{x_1, ..., x_{i-1}\}) > c_2.$$

Якщо $k > i_0$, то з нерівності (1) і з означення узагальненої послідовності випливає, що

$$f(\{x_k, y\}), f(\{x_k, z\}) \in \{x_1, ..., x_{i_0}\}.$$

Оскільки множина всіх впорядкованих пар елементів множини $\{x_1, ..., x_{i_0}\}$ скінченна, то існує нескінченна підмножина $M \subset \mathbb{N}$ і $a \in \{x_1, ...x_{i_0}\}$ такі, що $f(\{x_k, y\}) = a$ для кожного $k \in M$.

Розглянемо зростаючу послідовність $(k_i)_{i=1}^{\infty}$ в M. Одержуємо

$$\lim_{i\mapsto\infty} d_H(\{x_{k_1}, y\}, \{x_{k_i}, y\}) = \infty,$$

тому

$$\lim_{i\mapsto\infty}\varphi_1(d_H(\{x_{k_1},y\},\{x_{k_i},y\}))=\infty,$$

що суперечить означенню грубого вкладення, адже

$$\varphi_1(d_H(\{x_{k_1},y\},\{x_{k_i},y\}))\leqslant d(f(\{x_{k_1},y\},f(\{x_{k_i},y\}))=0.$$

2. Розглянемо підмножину дійсної прямої $C=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}C_i$, де $C_1=[0;1]$, $C_2=C_1\cup(C_1+2\cdot 3^0),\ldots, C_n=C_{n-1}\cup(C_{n-1}+2\cdot 3^{n-2})$.

Множину C можна вважати аналогом стандартної канторової множини в асимптотичній топології.

Справді, будуючи стандартну канторову множину, послідовно видаляємо з одиничного відрізка сім'ї інтервалів довжини $3^{-n},\ n\in\mathbb{N}$, тоді як побудову множини C можна уявляти як видалення з множини $\mathbb{R}$ сімей інтервалів довжини $3^n,\ n\in\mathbb{N}$.

Теорема 2. *Існує грубе вкладення простору* $\exp_n C$ *в* C $(n\geqslant 2)$.

Доведення. Спочатку покажемо, що існує грубе вкладення простору C^n в C, $(n\geqslant 2)$.

Будуємо відображення f так, щоб виконувалась умова

$f((C_m)^n)\subset C_{mn-n+1}$ для кожного m.

Метрику в просторі C^n задаємо формулою $d(x,y)=\max\limits_i d(x_i,y_i)$, де $x=(x_1,\ldots,x_n), y=(y_1,\ldots,y_n)$.

Позначимо через D_m компоненту 3^m-зв'язності простору C^n, що містить $0=(0,\ldots,0)$, $(m\geqslant 0)$. Очевидно, що кожна компонента D_m — диз'юнктне об'єднання 2^n компонент D_{m-1}.

$D_m=\bigcup\limits_{j=1}^{2^n}(a_j+D_{m-1})$, де $a_j\in\mathbb{R}^n$ для $j=1,\ldots,2^n$. Відображення f будуємо індуктивно. Приймемо $f(0,\ldots,0)=0$. Припустимо, що відображення $f|_{D_i}$ вже побудоване для всіх $i<k$.

Побудуємо $f_k=f|_{D_k}$. Нехай $s:\{1,\ldots,2^n\}\longrightarrow C_{n+1}$ — ін'єктивне відображення, що має властивість: якщо $i\neq j$, то $s(i)$ і $s(j)$ належать різним компонентам D_{kn+n-2}, що належать компоненті D_{kn+n-1}, і є мінімальними елементами в цих компонентах.

Тоді відображення $f|_{D_k}$ визначається умовою: якщо $x\in(a_j+D_{k-1})$, то $f_k(x)=s(j)+f_{k-1}(x-a_j)$.

Позначимо через D_{-1} множину C_1^n. Образом цієї множини при відображенні f є множина C_1, і для всіх x,y, що належать D_{-1}, виконуються нерівності

$$0\leqslant d(f(x),f(y))\leqslant 1.$$

Нехай точки x і y належать тій самій компоненті D_m простору C^n, але різним множинам 3^{m-1}-зв'язності, де m мінімальне, тобто $x\in a_i+D_{m-1}, y\in a_j+D_{m-1}, i\neq j$. При такому відображенні f, заданому вище, будуть виконуватись нерівності

$$3^m\leqslant d(x,y)\leqslant 3^{m+1}, \tag{2}$$

і

$$3^{mn+n-1} \leqslant d(f(x), f(y)) \leqslant 3^{nm+n}. \tag{3}$$

Тоді як функції з означення грубого вкладення можна вибрати функції $\varphi_1(t) = t$, $\varphi_2(t) = 3^t k(m)$, де $k(m)$ буде означено нижче. Легко бачити, що виконуються нерівності: $d(x,y) \leqslant d(f(x), f(y))$ і $d(f(x), f(y)) \leqslant 3^{d(x,y)} k(m)$. Перша нерівність означає, що $3^{m+1} \leqslant 3^{mn+n-1} + 1$, звідки одержуємо, що $n \geqslant 2$ для будь-якого m. Друга нерівність означає, що $3^{mn+n} \leqslant 3^{3^{m+1}} k(m)$, звідки маємо: $n(m+1) \leqslant 3^{m+1} + k_1(m)$, де $k(m) = 3^{k_1(m)}$, $m+1 \leqslant \frac{3^{m+1}+k_1(m)}{n}$. Ця нерівність виконується для довільного $m \in \mathbb{N}$ при $k_1(m) = (n-1) \cdot 3^{m+1}$. Тоді $k(m) = 3^{k_1(m)} = 3^{(n-1)\cdot 3^{m+1}}$.

Маючи значення $k(m)$, число $k(m+1)$ знаходимо за рекурентною формулою $k(m+1) = 3^{(n-1)\cdot 3^{m+2}} = 3^{(n-1)\cdot 3^{m+1}\cdot 3} = (3^{(n-1)\cdot 3^{m+1}})^3 = (k(m))^3$.

Якщо ж точки x і y належать тій самій компоненті M 3^p-зв'язності компоненти D_m $(p < m)$, то виконуються нерівності (2) і (3) за умови $m = p$ (компонента M відображається у компоненту 3^{pn+n+1}-зв'язності).

Тобто, функції $\varphi_1(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ t, & t > 1 \end{cases}$ і $\varphi_2(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 3^t k(m), & t > 1 \end{cases}$ забезпечують виконання умов грубого вкладення.

Маючи грубе вкладення f простору C^n в C, можна побудувати грубе вкладення простору $\exp_n C$ в C.

Позначимо через $D_m^{'}$ компоненту 3^m-зв'язності в просторі $\exp_n C$, що містить $\{0\}$. Як і для простору C^n, маємо: $D_m^{'} = \bigcup\limits_{j=1}^{k(n)} (a_j + D_{m-1}^{'})$, де $a_j \in \mathbb{R}^n$ для $j = 1, ..., k(n)$. Позначимо через $p: \ C^n \to \exp_n C$ факторвідображення. Тоді $p(D_m) = D_m^{'}$. Відображення g, як і відображення f, будуємо індуктивно. Маємо $g(\{0\}) = 0$. Нехай $D_{-1}^{'} = \exp_n C_1$. Означимо відображення $g|_{D_{-1}^{'}}$, приймаючи $g(x) = f(y)$, де $y \in C^n$ — довільна точка така, що $p(y) = x$.

Тепер застосуємо індукцію. Припустимо, що відображення $g|_{D_i^{'}}$ побудоване для всіх $i < k$. Маючи відображення s, визначене вище, означимо відображення $g|_{D_k^{'}}$ так: якщо $x \in (a_j + D_{k-1}^{'})$, то $g_k(x) = s(j) + g_{k-1}(x - a_j)$.

Для точок x і y, що належать компоненті $D_m^{'}$, але різним компонентам 3^{m-1}-зв'язності, образи $g(x)$ та $g(y)$ належатимуть компоненті D_{mn+n-1} і будуть виконуватись нерівності (2) і (3). Якщо ж точки x та y належать одній компоненті 3^p-зв'язності компоненти $D_m^{'}$, $p < m$, то виконуються ті самі нерівності при $m = p$.

Для такого відображення g виконуватимуться умови грубого вкладення, причому функції φ_1 і φ_2 будуть тими самими, що і для відображення f.

6. Зауваження і відкриті питання. Нехай X — множина. Введемо на n-му степені X^n множини X відношення еквівалентності $\sim$. При цьому $x = (x_1, ..., x_n) \sim y = (y_1, ..., y_n)$, якщо існує перестановка $\sigma\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ така, що $x_i = y_{\sigma(i)}$, для кожного $i = 1, \ldots, n$. Позначимо через $[x_1, \ldots, x_n]$ клас еквівалентності, що містить $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$. Нехай $SP^n X$ — фактор-простір, елементами якого є класи еквівалентності $[x] = [x_1, ..., x_n]$.

Якщо X — метричний простір, то на множині SP^nX введемо метрику $\overline{d}([x],[y]) = \min_{\sigma} \max_{i} d(x_i, y_i)$.

Можна показати, що результати, доведені вище для конструкції $\exp_n$, справджуються і для конструкції SP^n. Більш загально ці результати розповсюджуються на клас нормальних функторів скінченного степеня в категорії $\mathcal{R}$, введений в [8].

На завершення сформулюємо гіпотезу: не існує грубого вкладення $\exp_n S$ в $\exp_m S$ при $n > m$, де S — узагальнена послідовність, означена в теоремі 1.

1. *Dranishnikov, A.N.; Gong, G.; Lafforgue, V.; Yu, G.* Uniform embeddings into Hilbert space and a question of Gromov. (English)// Can. Math. Bull.– 2002.– Vol. 45.– № 1.– P. 60-70.

2. *Nowak, Piotr W.* Coarse embeddings of metric spaces into Banach spaces. (English)// Proc. Am. Math. Soc.– 2005.– Vol. 133.– № 9.– P. 2589-2596.

3. *G. Yu.* The coarse Baum-Connes conjecture for spaces which admit a uniform embedding into Hilbert space. // Invent. Math.– 2000.– Vol. 139.–№ 1.– P. 201-240.

4. *A. Dranishnikov. Asymptotic topology. //* Russian Math. Surveys.– 2000.– Vol. 55.– №6.– P. 71–116.

5. *Федорчук В.В., Филиппов В.В.* Общая топология. Основные конструкции.– М., 1986.

6. *Roe J.* Index Theory, Coarse Geometry, and Topology of Manifolds.// CBMS regional Conference Series in Mathematics.– 1996.– № 90.

7. *Gromov M. Asymptotic invariants for infinite groups.//* LMS Lecture Notes.– 1993.– Vol. 182.– № 2.

8. *Frider V.* Normal functors in coarse category.// Algebra and Discrete Mathematics.– 2005.– № 4.– P.16-27.

9. *Щепин Е.В.* Функторы и несчетные степени компактов.// Успехи матем. наук.– 1981.– Т.36.– Вып. 3.– С. 3-62.

HYPERSYMMETRIC POWERS AND ASYMPTOTICALLY ZERO-DIMENSIONAL SPACES

Oksana Shukel

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

It is proved that the hypersymmetric power in the Roe category of the proper metric spaces and coarse proper maps preserves the coarse embeddings and asymptotically zero-dimensional spaces. This functor can also be considered in the Dranishnikov asymptotic category. We consider problems of existence of coarse embeddings of some asymptotically zero-dimensional spaces and their hypersymmetric powers.

Key words: asymptotic dimension, coarse embedding, hypersymmetric power.

Стаття надійшла до редколегії 25.04.2006

Прийнята до друку 02.11.2006

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 2006. Вип.66. С.225–229 *Ser.Mech-Math.2006. Vol.66. P.225–229*

УДК 515.12

OPENNESS POINTS OF THE PROJECTION MAP OF CONVEX BODIES OF CONSTANT WIDTH

Lidiya BAZYLEVYCH

National University „Lviv Polytechnica“,
Bandery Str., 12, 79013 Lviv, Ukraine

It is proved that the set of points at which the projection map of the hyperspace of compact convex bodies of constant width in $\mathbb{R}^3$ onto the corresponding hyperspace in $\mathbb{R}^2$ is not open, is dense in the hyperspace. A similar result can be proven for the projection of $\mathbb{R}^n$ onto $\mathbb{R}^2$, where $n > 2$.

Key words: Constant width, hyperspace, open map

1. Let $\mathrm{cc}(\mathbb{R}^n)$ denote the set of all compact convex subsets in $\mathbb{R}^n$ endowed with the Hausdorff metric. For $m \le n$, we assume that $\mathbb{R}^m$ is embedded in $\mathbb{R}^n$ as the set $(x_1, \dots, x_m, 0 \dots, 0)$. For $m \le n$, the projection map $\mathrm{pr}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ induces the natural map $A \mapsto \mathrm{pr}(A)\colon \mathrm{cc}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{cc}(\mathbb{R}^m)$. It is well-known that the induced map (we preserve the notation pr for it) is open. Moreover, this map is even soft.

A closed convex body C in $\mathbb{R}^n$ is of *constant width* $d > 0$ if

$$C - C = \{x - y \mid x, y \in C\} = B^n_d(0)$$

(the closed ball in $\mathbb{R}^n$ of radius $d > 0$ centered at the origin). This is equivalent to the following: the distance between the two supporting planes to the body in given direction is independent of direction and equals d.

Let $\mathrm{cw}_d(\mathbb{R}^n)$ denote the set of all convex bodies of constant width $d > 0$ in $\mathbb{R}^n$. We endow this set with the Hausdorff metric. This metric, d_H, is in fact defined on the family $\exp \mathbb{R}^n$ of all nonempty compact subsets in $\mathbb{R}^n$:

$$d_H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid A \subset O_\varepsilon(B),\ B \subset O_\varepsilon(A)\},\ A, B \in \exp X.$$

It is proved in [2] (see also [1] for an alternative proof) that, for $n \geq 2$, the space $\mathrm{cw}_d(\mathbb{R}^n)$ is a manifold modeled on the Hilbert cube Q (a Q-manifold). This result corresponds to the well-known result due to Nadler, Quinn and Stavrokas [7] that $\mathrm{cc}(\mathbb{R}^n)$ is a Q-manifold if $n \geq 2$. However, there is no complete analogy between the case of compact convex sets and that of compact convex sets of constant width. Namely, it is proved in [1] that the induced projection map $\mathrm{pr}\colon \mathrm{cw}_d(\mathbb{R}^3) \to \mathrm{cw}_d(\mathbb{R}^2)$ is not open.

Recall that a map of topological spaces is *open* if the image of every open set is open. We say that a map is *open at a point* if the image of any neighborhood of this point is a (not necessarily open) neighborhood of the image of the point. If a surjective map $f\colon X \to Y$ of metric spaces is open at a point $x \in X$, then for every sequence (y_i) in Y converging to $f(x)$ there exists a sequence (x_i) in X converging to x such that $y_i = f(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots$.

A map $f\colon X \to Y$ is *soft* if for every commutative diagram

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "\varphi"'] & Y, \end{tikzcd}$$

where $i\colon A \to Z$ is a closed embedding into a paracompact space Z, there exists a map $\Phi\colon Z \to X$ such that $\Phi|A = \psi$ and $f\Phi = \varphi$. The notion of soft map was introduced by E.V. Shchepin [10].

The aim of this note is to show that the set of points at which the map $\mathrm{pr}\colon \mathrm{cw}_d(\mathbb{R}^3) \to \mathrm{cw}_d(\mathbb{R}^2)$ is not open is dense in $\mathrm{cw}_d(\mathbb{R}^3)$.

By ∂A we denote the boundary of A. If A is a convex body in $\mathbb{R}^n$ of constant width $d > 0$ then any chord $[v, w]$ in A with $d(v, w) = \|v - w\| = d$ is said to be a *diameter* of A.

2. Result. We will need the following geometric statement.

Proposition 1. *Let $A \in \mathrm{cw}_d(\mathbb{R}^n)$. For every $\varepsilon > 0$, there exists $\delta > 0$ which satisfies the following property. For every compact convex B with* $\mathrm{diam} B \leq d$ *and $d_H(A, B) < \delta$, and every $B' \in \mathrm{cw}_d(\mathbb{R}^n)$ with $A' \supset B$, we have $d_H(A', A) < \varepsilon$.*

Proof. It is sufficient to prove that $B' \subset O_{c\varepsilon}(A)$. In turn, it is sufficient to prove that $\partial B' \subset O_{c\varepsilon}(A)$.

Let $x \in \partial B'$. There exists $y \in B'$ such that $\|x - y\| = d$. There exists a diameter $[a, b]$ in A parallel to $[x, y]$. Moreover, we assume that $y - x = b - a$. Then there exist $a_1, b_1 \in B$ such that $\|a_1 - a\| < \delta$, $\|b_1 - b\| < \delta$. Let $b_2 = b + (a_1 - a)$, then the linear segments $[x, y]$ and $[a, b_2]$ are parallel. Note that $|\|a_1 - b_2\| - d| < 2\delta$.

There exists $b_3 \in \mathbb{R}^n$ such that the linear segments $[x, y]$ and $[a, b_3]$ are parallel and $\|a - b_3\| = \|x - y\| = d$. Denote by h the height of the parallelogram P with vertices x, y, a, b_3, i.e. the distance between the lines containing $[x, y]$ and $[a, b_3]$ respectively. Denote by C the maximal length of the diagonal of P. Then $C \geq \sqrt{d^2 + h^2} \geq d + h$. On the other hand, $C \leq d + 5\varepsilon$, whence $h \leq 5\varepsilon$. Let c be a point on the line containing $[a, b_3]$ such that the segments $[x, c]$ and $[a, b_3]$ are orthogonal. Since $C \leq d + 5\varepsilon$, we conclude that $\|a-c\|<5\varepsilon$. Then

$$\|x-a\| \le \|x-c\| + \|c-a\| \le 5\varepsilon + 5\varepsilon = 10\varepsilon$$

and we are done.

Let C be a set of constant width in $\mathbb{R}^2$. A subset V of ∂C (the boundary of C) is said to be a *pinching* set of C if every diameter (a maximal chord) of C is incident with at least one point of V. We say that a set of constant width is a *Reuleaux polygon* if it has a finite pinching set. It is well-known (see, e.g. [4]) that the family of all Reuleaux polygons of width d is dense (with respect to the Hausdorff distance) in $\mathrm{cw}_d(\mathbb{R}^2)$. We consider the projection $\mathrm{pr}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

It is well-known (and easy to prove) that, for every $A \in \mathrm{cw}_d(\mathbb{R}^3)$, we have $\mathrm{pr}(A) \in \mathrm{cw}_d(\mathbb{R}^2)$. We denote by $e(A)$ the set $A \cap (\mathrm{pr}^{-1}(\partial \mathrm{pr}(A)))$. It is easy to see that the map $\mathrm{pr}|e(A)\colon e(A) \to \partial \mathrm{pr}(A)$ is a homeomorphism.

Lemma 1. *The map $A \mapsto e(A)$ is continuous with respect to the Hausdorff metric as a map from $\mathrm{cw}_d(\mathbb{R}^3)$ to the set $\exp \mathbb{R}^3$.*

Proof. Let (A_i) be a sequence in $\mathrm{cw}_d(\mathbb{R}^3)$ that converges to A. It is well-known that the sequence (∂A_i) converges to ∂A and, similarly, the sequence $(\partial \mathrm{pr}(A_i))$ converges to $\partial \mathrm{pr}(A)$.

Suppose that a sequence (x_i) is such that $x_i \in e(A_i)$, for every i, and $x_i \to x$ as $i \to \infty$. Then $x \in A$. Obviously, $\mathrm{pr}(x_i) \to \mathrm{pr}(x)$ and, since $(\partial \mathrm{pr}(A_i)) \to \partial \mathrm{pr}(A)$, $i \to \infty$, we see that $\mathrm{pr}(x) \in \partial A$.

On the other hand, suppose that $x \in e(A)$. Then $y = \mathrm{pr}(x) \in \partial(\mathrm{pr}(A))$ and, since $(\partial \mathrm{pr}(A_i)) \to \partial \mathrm{pr}(A)$, $i \to \infty$, there exists a sequence (y_i) in $\mathbb{R}^2$ such that $y_i \in \partial \mathrm{pr}(A_i)$, $i \in \mathbb{N}$, and $y_i \to y$ as $i \to \infty$.

Lemma 2. *Let A be a Reuleaux polygon in $\mathbb{R}^2$. Then, for any $C \in \mathrm{cw}_d(\mathbb{R}^3)$ with $\mathrm{pr}(C) = A$, the set $e(C)$ is planar (i.e. is located in a plane in $\mathbb{R}^3$).*

Proof. Let V be the set of vertices of ∂A (i.e. the minimal pinching set). Given $v \in V$, denote by A_v the set of endpoints (distinct of v) of the diameters with endpoint v. For any $w \in A_v$, we have $d(v,w) = d$ and therefore, $d(v',w') = d$ for any $v', w' \in C$ with $\mathrm{pr}(v') = v$, $\mathrm{pr}(w') = w$. Thus, v', w' are located on a plane parallel to $\mathbb{R}^2$. This implies that A_v is located on a plane parallel to $\mathbb{R}^2$ and therefore $e(C)$ is a planar set.

Theorem 1. *Given $d > 0$, let*

$$N = \{A \in \mathrm{cw}_d(\mathbb{R}^3) \mid \mathrm{pr} \textit{ is not open at } A\}.$$

Then the set N is dense in $\mathrm{cw}_d(\mathbb{R}^3)$.

Proof. Let $A \in \mathrm{cw}_d(\mathbb{R}^3)$. Suppose first that the set $e(A)$ is not planar. We are going to show that pr is not open at A. Indeed, suppose the contrary. Consider a sequence $(B_i)_{i=0}^{\infty}$ of Reuleaux polygons that converges to $\partial \mathrm{pr} A$. Since pr is open at A, it follows from well-known properties of open maps that there exists a sequence $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ that converges to A and such that $\mathrm{pr}(A_i) = B_i$, $i = 1, 2, \ldots$. By Lemma 2., every set A_i is planar and, by Lemma 1., so is the set $e(A)$, which gives a contradiction.

Now we consider the case when the set $e(A)$ is planar. Passing, if necessary, to a closed neighborhood of a suitable homothetic copy of A, one may assume that the boundary ∂A is of the class C^1. Then the closed curve $e(A)$ is also of the class C^1.

There exist diameters $[v_i, w_i]$, $i = 1, \dots, k$, of the set $A \cap \pi$, which is obviously of constant width in π, such that the set $\{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_k\}$ is close enough to $\partial_\pi(A \cap \pi)$.

As usual, by $\mathbf{k}$ we denote the unit vector in the direction of the z-axis. Let A' be an affine copy of A with center at an interior point of A and coefficient $c < 1$ sufficiently close to 1. There exists $\eta > 0$ such that the set

$$A'' = A' \cup \{v_2, \dots, v_k, w_2, \dots, w_k\} \cup \{v_1 + \eta\mathbf{k}, w_1 + \eta\mathbf{k}\}$$

is of diameter d. It follows from the results of [6] that there exists a convex body $\tilde{A}$ of constant width d that contains A''. Simple geometric arguments show that one can make A'' as close to A as we wish by choosing $c < 1$ close enough to 1 and $\eta > 0$ close enough to 0. Then

$$e(A'') \supset \{v_2, \dots, v_k, w_2, \dots, w_k\} \cup \{v_1 + \eta\mathbf{k}, w_1 + \eta\mathbf{k}\}$$

and therefore $e(A'')$ is not planar. As we have proven above, A'' is not a point of openness of the map pr. Therefore, the set N is dense in $\mathrm{cw}_d(\mathbb{R}^3)$.

One can similarly prove the following result.

Theorem 2. *If $n \geq 3$, then the set*

$$\{A \in \mathrm{cw}(\mathbb{R}^n) \mid \mathrm{pr} \textit{ is not open at } A\}$$

is dense in $\mathrm{cw}(\mathbb{R}^n)$.

3. **Remarks.** The notion of convex body of constant width can be defined also in any Minkowski space (i.e. any finite-dimensional normed space). It was remarked in [1] that the considered projection map of the hyperspaces of compact convex bodies of constant width can be open for some choice of norms.

Question 1. Suppose that the unit balls of Minkowski spaces are strictly convex (i.e., the unit spheres do not contain linear segments). Suppose also that the projection map preserves the constant width property. Is the projection map of the corresponding hyperspaces of compact convex sets of constant open?

The notion of closed convex body of constant width can be defined in any normed space. We conjecture that the AR-properties of the hyperspaces of closed convex sets in normed spaces established in [8] (see also [9]) have their counterparts for the hyperspaces of closed convex bodies of constant width.

One can formulate the question of openness of the projection map also in the case of pairs. Recall that a pair (A, B) of compact convex bodies in $\mathbb{R}^n$ is said to be of *constant relative width* [5] if $A - B = B_r(x)$ (the closed ball of radius r centered at a point $x \in \mathbb{R}^n$).

One can conjecture that the property of planarity of the set $e(A)$ characterizes the sets $A \in \mathrm{cw}(\mathbb{R}^3)$ at which the map pr is not open.

In connection to Theorem 1. the following general question arises.

Question 2. Let $n > m \geq 2$. Is the set of points in $\mathrm{cw}_d(\mathbb{R}^n)$ at which the projection map $\mathrm{pr}\colon \mathrm{cw}_d(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{cw}(\mathbb{R}^m)$ is not open, dense in $\mathrm{cw}_d(\mathbb{R}^n)$?

1. *Bazylevych L.E., Zarichnyi M.M.* On convex bodies of constant width.– Top. Appl. 153 (2006).– N.11.– P.1699-1704.

2. *Bazylevych L.E.* Topology of the hyperspace of convex bodies of constant width. // Mat. zametki.– **62** (1997).– P.813-819 (in Russian).

3. *Bazylevych L.E.* On the hyperspace of strictly convex bodies. // Mat. studii.– **2** (1993).– P.83-86.

4. *Blaschke W.* Konvexe Bereiche gegebenen Breite und kleinsten Inhalts. // Math. Ann.– 76 (1915).– P.504-513.

5. *Maehara H.* Convex bodies forming pairs of constant width. // J. Geom.– 22 (1984).– P.101–107.

6. *Eggleston H.G.* Sets of constant width in finite dimensional Banach spaces. // Israel J. Math.– 3 (1965).– P.163–172.

7. *Nadler S.B.,Jr., Quinn J., Stavrokas N.M.* Hyperspace of compact convex sets. // Pacif. J. Math.– **83** (1979).– P.441-462.

8. *Kubis W., Sakai K., Yaguchi M.* Hyperspaces of separable Banach spaces with the Wijsman topology. // Topology Appl.– 148 (2005).– N.1-3.– P.7-32.

9. *Kurihara M., Sakai K., Yaguchi M.* Hyperspaces with the Hausdorff metric and uniform ANR's. // J. Math. Soc. Japan.– 57 (2005).– N.2.– P.523-535.

10. *Щепин Е.В.* Функторы и несчетные степени компактов. // Успехи матем. наук.– 1981.– Т.36.– Вып.3.– С.3-62.

Точки відкритості відображення проектування опуклих тіл сталої ширини

Лідія Базилевич

Національний університет „Львівська політехніка“,
вул. С. Бандери, 12, 79013 Львів, Україна

Доведено, що множина точок, у яких відображення проектування гіперпростору компактних опуклих тіл сталої ширини в $\mathbb{R}^3$ на відповідний гіперпростір в $\mathbb{R}^2$ не відкрите, є всюди щільною в цьому гіперпросторі. Подібний результат можна довести для проектування $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^2$, де $n > 2$.

Ключові слова: стала ширина, гіперпростір, відкрите відображення

Стаття надійшла до редколегії 03.07.2006

Прийнята до друку 02.11.2006

УДК 512.58

CHARACTERIZATION OF G-SYMMETRIC POWER FUNCTORS IN THE COARSE CATEGORY

Viktoriya FRIDER, Mykhailo ZARICHNYI

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

It is proved that a normal functor of finite degree acting in the coarse category admits an extension onto the Kleisli category of the hyperspace monad if and only if this functor is isomorphic to the symmetric power functor.

Key words: Coarse category, G-symmetric power functor, hyperspace monad.

1. The coarse category (i.e. the category of coarse spaces and coarse maps) was introduced by Roe in [4]. This theory turned out to be an appropriate universe for studying asymptotic properties of structures more general then metric spaces. Some results in the direction of asymptotic algebra (i.e. those concerning algebraic properties of coarse structures) are obtained [1],[8].

In particular, in [1] the hyperspace functor acting in the category of coarse topological spaces was considered. It was proved in [1] that the hyperspace functor determines a monad in the coarse category.

In [8] the author considered the notion of normal functor in the coarse category and established some properties of the normal functors. The aim of this note is to characterize the class of G-symmetric power functor in the coarse category by means of their extension onto the Kleisli category of the hyperspace monad. The main result is a counterpart of the characterization theorem proved in [7].

2. Preliminaries. We briefly recall some necessary definitions and results concerning the functors in the coarse category and also the Kleisli categories of monads.

2.1. Functors in the coarse category. For the convenience of reader we recall some definitions of the coarse topology; see, e.g. [4], [2] for details.

Let X be a set and $M, N \subset X \times X$. The *composition* of M and N is the set

$$MN = \{(x, y) \in X \times X \mid \text{ there exists } z \in X \text{ such that } (x, z) \in M,\ (z, y) \in N\},$$

the *inverse* of M is the set $M^{-1} = \{(x, y) \in X \times X \mid (y, x) \in M\}$.

A *coarse stucture* on a set X is a family $\mathcal{E}$ of subsets, which are called the *entourages*, in the product $X \times X$ that satisfies the following properties:

1. any finite union of entourages is contained in an entourage;
2. for every entourage M, its inverse M^{-1} is contained in an entourage;
3. for every entourages M, N their composition MN is contained in an entourage;
4. $\cup\mathcal{E} = X \times X$.

A *coarse space* is a pair $(X, \mathcal{E})$, where $\mathcal{E}$ is a coarse structure on a set X.

Let (X, d) be a metric space. The family

$$\mathcal{E}_d = \{\{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) < n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

forms a *metric coarse structure* on X.

Given $M \in \mathcal{E}$ and $A \subset X$ we define the *M-neighborhood* $M(A)$ of A as follows: $M(A) = \{x \in X \mid (a, x) \in M \text{ for sone } a \in A\}$. We use the notation $M(\{a\})$ instead of $M(a)$. A set $A \subset X$ is *bounded* if there exists $x \in X$ such that $A \subset M(x)$.

Let $(X_i, \mathcal{E}_i)$, $i = 1, 2$, be coarse spaces. A map $f \colon X_1 \to X_2$ is called *coarse*, if the following two conditions hold:

1. for every $M \in \mathcal{E}_1$ there exists $N \in \mathcal{E}_2$ such that $(f \times f)(M) \subset N$;
2. for any bounded subset A of X_2 the set $f^{-1}(A)$ is bounded.

Let $f, g \colon X_1 \to X_2$ be coarse maps. If there exists $U \in \mathcal{E}_2$ (here $\mathcal{E}_2$ is the coarse structure on X_2) such that $(f(x), g(x)) \in U$ for every $x \in X_1$ then the maps f, g are said to be *U-close*. Define the relation $\sim$ on the set of all coarse maps as follows: $f \sim g$ if and only if f and g are U-close, for some U. It is easy to see that $\sim$ is an equivalence relation on the set of coarse maps from $X - 1$ to X_2. We denote by $[f]$ the equivalence class of $\sim$ which contains f.

The composition of the equivalence classes of the maps in the next way: $[gf] = [g][f]$

It is easy to see that the coarse spaces and coarse maps form a category. We denote it by CS and by CS/$_\sim$ we denote the category whose objects are coarse spaces and whose morphisms are the equivalence classes of the morphisms of the category CS.

We briefly recall some notions from the theory of normal functors in the category **Comp** of compact Hausdorff spaces; see, e.g., [9] for details. An endofunctor F in **Comp** is called *normal* if F is continuous , monomorphic, epimorphic, preserves weight of infinite compacta, intersections, preimages, singletons and empty set. A normal functor is called *finitary* if it preserves the class of finite sets.

Now let F be finitary normal functor of degree $n \geq 1$, $(X, \mathcal{E})$ a coarse space. For any $U \in \mathcal{E}$ define

$$\begin{aligned}\hat{U} =&\{(a,b) \in FX \times FX \mid \text{ there exist } W_1, \dots, W_k \in \mathcal{E},\\ &f_1, \dots, f_{2k} \in C(n, X),\ c_1, \dots, c_k \in Fn \text{ such that}\\ &W_1 \dots W_k \subset U, \text{ are } f_{2i-1}, f_{2i}\ U\text{-close},\ i = 1, \dots, k,\\ &\text{i } Ff_1(c_1) = a,\ Ff_{2k}(c_k) = b,\\ &Ff_{2j}(c_j) = Ff_{2j+1}(c_{j+1}),\ j = 1, \dots, k-1\}.\end{aligned}$$

Note that here we consider the set X as a discrete topological space, that is why it is possible to consider the discrete space FX, which is identified with the underlying set.

In [**?**] it is proved that the family $\{\hat{U} | U \in \mathcal{E}\}$ forms the coarse structure on FX.

See [8] for the proof of the following result.

Lemma 1. *Let $f, g\colon (X_1, \mathcal{E}_1) \to (X_2, \mathcal{E}_2)$. If $f \sim g$ then $F(f) \sim F(g)$.*

This lemma allows us to consider a functor F in the category $\mathrm{CS}/_\sim$ because of the equality $F[f] = [Ff]$.

Definition 1. *A functor $F\colon \mathrm{CS} \to \mathrm{CS}$ is* normal *in* CS *if:*

1) F preserves weight;
2) F is monomorphic;
3) F is epimorphic;
4) F preserves preimages;
5) F preserves $\emptyset$ (i.e. bounded coarse spaces).

The corresponding functor in the category $\mathrm{CS}/\sim$ is also called normal.

2.2. Kleisli category of the hyperspace monad. If T is an endofunctor in a category $\mathcal{C}$ and $\eta\colon 1_{\mathcal{C}} \to T$ and $\mu\colon T^2 \equiv TT \to T$ are natural transformations, then $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ is called a *monad* if and only if the following diagrams commute:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\eta T"] \arrow[d, "T\eta"'] \arrow[dr, "1_T"] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\ T^2 \arrow[r, "\mu"] & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T^3 \arrow[r, "\mu T"] \arrow[d, "T\mu"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\ T^2 \arrow[r, "\mu"] & T. \end{tikzcd}$$

See [1] for the definition of the hyperspace monad in the coarse category.

The *Kleisli category of* $\mathbb{T}$ is the category $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ defined as follows: $|\mathcal{C}_{\mathbb{T}}| = |\mathcal{C}|$, $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}(X, Y) = \mathcal{C}(X, TY)$, and the composition $g * f$ of morphisms $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{T}}(X, Y)$, $g \in \mathcal{C}_{\mathbb{T}}(Y, Z)$ is given by $g * f = \mu Z \circ Tg \circ f$.

Define the functor $I\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ by $F_{\mathbb{T}}X = X$, $X \in |\mathcal{C}|$ and $If = \eta Y \circ f$ for $f \in \mathcal{C}(X, Y)$.

A functor $\overline{F}\colon \mathcal{C}_{\mathbb{T}} \to \mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ called an *extension of the functor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ on the Kleisli category $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$* if $IF = \overline{F}I$.

In the sequel we will need the following result.

Theorem 1. *There exists a bijective correspondence between extensions of functor F onto the Kleisli category $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ of monad $\mathbb{T}$ and natural transformations $\xi\colon FT \to TF$ satisfying*

1. $\xi \circ F\eta = \eta F$;

2. $\mu F \circ T\xi \circ \xi T = \xi \circ F\mu$.

3. Characterization theorem.

Theorem 2. *A normal functor F of degree $n \geq 1$ in the category $\mathrm{CS}/\sim$ can be extended onto the category $(\mathrm{CS}/\sim)_{\mathbb{H}}$ if and only if $F \simeq SP^n_G$, for some subgroup G of S_n.*

Proof. For every coarse space X, define $\xi_X\colon SP^n_G(\exp X) \to \exp SP^n_G(X)$ by the formula:

$$\xi_X([A_1,\dots,A_n]_G) = \{[a_1,\dots,a_n]_G \mid a_i \in A_i \text{ for all } i \leq n\}).$$

That the natural transformation ξ satisfies the the properties of Theorem 1., is remarked in [1] (the corresponding natural transformation is denoted by d herein). We supplement the proof from [1] by explicit proof that ξ_X is a coarse map. Recall that, given a coarse structure $\mathcal{E}$ on X, we define a coarse structure $\tilde{\mathcal{E}}$ on $SP^n_G(X)$ as follows: $\tilde{\mathcal{E}} = \{\tilde{U} \mid U \in \mathcal{E}\}$, where $([a_1,\dots,a_n]_G,[b_1,\dots,b_n]_G) \in \tilde{U}$ if and only if there is a permutation $\sigma \in G$ such that $(a_i, b_{\sigma(i)}) \in U$, for every $i \leq n$.

Recall also that we consider the Hausdorff coarse structure $\hat{\mathcal{E}}$ on $\exp X$: given $U \in \mathcal{E}$, we define

$$\hat{U} = \{(A,B) \in \exp X \times \exp X \mid A \subset U(B),\ B \subset U(A)\}$$

and let $\hat{\mathcal{E}} = \{\hat{U} \mid U \in \mathcal{E}\}$.

Now, let $\tilde{\hat{U}} \in \tilde{\hat{\mathcal{E}}}$ and $([A_1,\dots,A_n]_G,[B_1,\dots,B_n]_G) \in \tilde{\hat{U}}$. Then there is a permutation $\sigma \in G$ such that $(A_i, B_{\sigma(i)}) \in \hat{U}$, for every $i \leq n$. For any $[a_1,\dots,a_n]_G \in \xi_X([A_1,\dots,A_n]_G)$ and any $i \leq n$, one can find a point, which we denote by $b_{\sigma(i)}$, such that $(a_i, b_{\sigma(i)}) \in U$. We conclude that $\xi_X(\tilde{\hat{U}}) \subset \hat{\tilde{U}}$ and therefore the map ξ_X is coarse uniform. One can easily see that the map ξ_X is coarsely proper.

Now assume that there exists a natural transformation $\xi = (\xi_X)\colon SP^n_G \exp \to \exp SP^n_G$ satisfies the conditions of Theorem 1.. For every object A of the category $\mathcal{K}_n$, let $\mathcal{S}(A) = A \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ and define a metric d on $\mathcal{S}(A)$ as follows:

$$d((x_1,m_1,n_1),(x_2,m_2,n_2)) = |m_1^{n_1} - m_2^{n_2}| + \max\{m_1,m_2\}\varrho(x,y),$$

where ϱ denotes the discrete metric on A. That d is a metric on $\mathcal{S}(A)$ can be easily verified and we leave this to the reader. Given a map $f\colon A \to B$ in $\mathcal{K}_n$, denote by $\mathcal{S}(f)\colon \mathcal{S}(A) \to \mathcal{S}(B)$ the map defined as follows: $\mathcal{S}(f)(x,m,l) = (f(x),m,l)$. Clearly, we obtain a covariant functor $\mathcal{S}\colon \mathcal{K}_n \to \mathrm{CS}$.

For any A in $\mathcal{K}_n$, write $\xi_{\mathcal{S}(A)} = [\psi_A]$, where $\psi_A\colon SP^n_G \exp A \to \exp SP^n_G A$ is a map.

Since ψ_A is a coarse map, for any $m \in \mathbb{N}$ there exists $l(m) \in \mathbb{N}$ such that $\psi_A(A \times \{m\} \times \{l\}) \subset A \times \{m\} \times \{l\}$, for all $n \geq l(m)$.

Since all the spaces in $\mathcal{K}_n$ are finite and $\mathcal{K}_n$ is a finite category, the fact that the distances between the distinct points in $B \times \{m\} \times \{l\}$ (and consequently in $F'(B \times \{m\} \times \{l\})$, for any B in $\mathcal{K}_n$ and any finitary normal functor F') are $\geq m$ implies the following: there exist $m, n \in \mathbb{N}$ such that, for any map $f\colon A \to B$ in $\mathcal{K}_n$ the diagram

$$\begin{tikzcd}
F(\exp A \times \{m\} \times \{l\}) \arrow[r, "\psi_A|\dots"] \arrow[d, "F(\exp \mathcal{S}(f))|\dots"'] & \exp F(A \times \{m\} \times \{l\}) \arrow[d, "\exp F(\mathcal{S}(f))|\dots"] \\
F(\exp B \times \{m\} \times \{l\}) \arrow[r, "\psi_B|\dots"] & \exp F(B \times \{m\} \times \{l\})
\end{tikzcd}$$

is commutative (for brevity, we drop the explicit indication of spaces onto which the restriction is considered). Note that m, n can be chosen as large as we wish.

This allows us to define a natural transformation $\psi'\colon F\exp \to \exp F$ in $\mathcal{K}_n$ by the condition $\psi_A(x, m, l) = (\psi'_A(x), m, l)$.

If m, n are large enough, the natural transformation ψ' satisfies the conditions of Theorem 1. (with ξ replaced by ψ') in $\mathcal{K}_n$. It follows from the results of [7] that F is isomorphic to SP^n_G for some subgroup G of the symmetric group S_n.

4. Remarks. In [6] the symmetric power functors are also characterized as those having an extension onto the Kleisli category of the probability measure monad. We leave as an open question that of finding a counterpart of this result in the coarse category.

---

1. *Frider V., Zarichnyi M.* Hyperspace functor in the coarse category. // Visnyk Lviv Univ. Ser. Mech.-Math.– 2002.– Vol.61.– P.213-222.

2. *Mitchener P.D.* Coarse homology theories. Algebr. Geom. Topol.– 1 (2001).– P.271-297.

3. *Higson Nigel, Pedersen E.K., Roe J.* C^*-algebras and controlled topology. K-Theory.– 11 (1997).– N.3.– H.209-239.

4. *Roe J.* Index Theory, Coarse Geometry, and Topology of Manifolds, CBMS regional Conference Series in Mathematics.– N 90.– 1996.

5. *Gromov M.* Asymptotic invariants for infinite groups, LMSLecture Notes, 182(2), 1993.

6. *Teleiko A., Zarichnyi M.* Categorical topology of compact Hausdorff spaces.- Mathematical Studies Monograph Series, 5. VNTL Publishers, L'viv, 1999.

7. *Заричный М.М.* Характеризация функторов G-симметрической степени и продолжения функторов на категории Клейсли. // Мат. заметки.– 1992.– Т.52, №5.– С.42-48.

8. *Frider V.* Normal functors in coarse category. // Algebra and Discrete Mathematics.– 2005.– №4.– P.16-27.

9. *Щепин Е.В.* Функторы и несчетные степени компактов. // Успехи матем. наук.– 1981.– Т.36.– Вып.3.– С.3-62.

Характеризація функторів G-симетричного степеня в грубій категорії

Вікторія Фрідер, Михайло Зарічний

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

Доведено, що нормальний функтор скінченного степеня, що діє в грубій категорії, має продовження на категорію Клейслі монади гіперпростору, якщо і тільки якщо цей функтор ізоморфний функторові симетричного степеня.

Ключові слова: груба категорія, функтор G-симетричного степеня, монада гіперпростору.

Стаття надійшла до редколегії 03.07.2006

Прийнята до друку 02.11.2006

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2006. Вип.66. С.236–242 *Ser.Mech-Math.2006. Vol.66. P.236–242*

УДК 515.12

OPEN-MULTICOMMUTATIVITY OF THE FUNCTOR OF UPPER-CONTINUOUS CAPACITIES

Roman KOZHAN

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

Notion of open-multicommutativity, introduced by Kozhan and Zarichnyi [5], is investigated. Weakly normal covariant functor of upper-continuous capacities is considered. The main result of the paper is that this functor open-multicommutative.

Key words: capacity, covariant functor, open-multicommutativity.

1. The impact of the non-additive probability theory in the modern economic theory and finance increased significantly during the last decades. This theory is based on the notion of the capacity which was first introduced by Choquet [2]. By the 80's the number of authors (Quiggin [7], Yaari [10], Schmeidler [8]) presented an axiomatization of individual's preferences and developed non-expected utility theory which based on the notion of the Choquet integral.

From the topological point of view capacities were considered by Zhou [12]. He investigated the structure of the space of upper-continuous capacities and an integral representation of continuous comonotonically additive functionals with respect to them.

Here we study the space of upper-continuous capacities from the viewpoint of the categorical topology. We prove an analogical result which was investigated in the case of the probability measures space. The notion of open-multicommutativity which combines properties of a covariant functor to be open and bicommutative has been introduced in [5]. The main result of their paper is that the functor of probability measures is open-multicommutative in the category of compact Hausdorff spaces. Here we extend an area of this investigation and consider the functor of upper-continuous capacities. Although, this functor turns out to be weakly-normal, it satisfies the open-multicommutativity property.

The paper is organized as follows. In Section 2 we remind some definitions which we use below. Section 3 contains a proof of the finite open-multicommutativity. The main result is given at the end of this Section.

The author gratefully thanks Michael Zarichnyi for helpful ideas, discussions and comments.

2. Notations and Definitions.

2.1. Functor of upper-continuous capacities. Let X be a compact Hausdorff space and $\mathcal{F}$ a σ-algebra of its Borel subsets.

Definition 1. *A real-valued set function μ on $\mathcal{F}$ is called a* capacity *if $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(X) = 1$ and $\mu(A) \leqslant \mu(B)$ for all $A \subseteq B$, $A, B \in \mathcal{F}$.*

Definition 2. *A capacity μ is* upper-continuous *if $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n)$ for any monotonic sequence of sets $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$ with $A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$.*

We denote a set of all upper-continuous capacities on X as $M(X)$. Due to Zhou [12] we can identify the set $M(X)$ with the set of all comonotonically additive, monotonic and continuous functional on $C(X)$ by the formula

$$\mu(f) = \int\limits_0^{\infty} \mu(f \geqslant t)dt + \int\limits_{-\infty}^{0} (\mu(f \geqslant t) - 1)dt.$$

The above integral is called the Choquet integral.

Let us endow the set $M(X)$ with the weak-* topology. The base of this topology consists of the set of the form

$$O(\mu_0, f_1, ..., f_n, \varepsilon) = \{\mu \in M(X)\colon |\mu_0(f_i) - \mu(f_i)| < \varepsilon, i = 1, ..., n\},$$

where $\mu_0 \in M(X)$, $f_1, ..., f_n \in C(X)$ and $\varepsilon > 0$.

We can consider $M\colon \mathrm{Comp} \to \mathrm{Comp}$ as a covariant functor in the category Comp and as it is shown in [6] that it is also weakly normal. Another important property of this functor is that it is open and bicommutative.

Proposition 1. *Functor M is bicommutative.*

Proof. Let us consider an arbitrary bicommutative diagram

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & X \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ Y & \xrightarrow[s]{} & T \end{array} \tag{1}$$

in the category Comp. In order to prove that M is a bicommutative functor it is sufficient to show that for every $\mu \in M(X)$ and $\nu \in M(Y)$ such that $Mh(\mu) = Ms(\nu) = \tau \in M(T)$ there exists a capacity $\lambda \in M(Z)$ with

$$Mf(\lambda) = \mu \text{ and } Mg(\lambda) = \nu. \tag{2}$$

Due to condition (2) for every $A \in \mathcal{F}_X$ and $B \in \mathcal{F}_Y$ it must hold

$$\lambda(f^{-1}(A)) = \mu(A) \text{ and } \lambda(g^{-1}(B)) = \nu(B).$$

Denote $\mathcal{S} = \{f^{-1}(A), g^{-1}(B) \colon A \in \mathcal{F}_X, B \in \mathcal{F}_Y\}$. Let λ be an inner measure defined as

$$\lambda(D) = \sup\{\mu(f(C)), \nu(g(C)) \colon C \subseteq D, C \in \mathcal{S}\}$$

for every $D \in \mathcal{F}_Z$. Defined in such way set function λ is an upper-continuous capacity (see, for instance, [11]). Let us show that condition (2) is satisfied. Let $A \in \mathcal{F}_X$ and $A' = f^{-1}(A) \subset Z$. Obviously that $\sup\{\mu(f(C)) \colon C \subseteq A', C \in \mathcal{S}\} = \mu(A)$. We assume that there exists a subset $B \subset Y$ such that $B' = g^{-1}(B) \subseteq A'$ and $\nu(B) > \mu(A)$. Note that the set $\tilde{A} = h^{-1}(s(B)) \subseteq A$. Indeed, due to the definition of this set for every point $a \in \tilde{A}$ we can find $b \in B$ such that $h(a) = s(b)$. Because of the bicommutativity of diagram (1) there exists point $z \in Z$ satisfying $f(z) = a$ and $g(z) = b$. Since B' is a full preimage of the set B it is necessary that $b \in B' \subseteq A'$. This implies $a \in A$. Due to the condition (2) we have

$$\nu(B) \leqslant \tau(s(B)) = \mu(h^{-1}(s(B))) = \mu(\tilde{A}) \leqslant \mu(A),$$

which contradicts our assumption. Thus, $\lambda(f^{-1}(A)) = \mu(A)$ for every $A \in \mathcal{F}_X$. Analogically we can prove that $\lambda(g^{-1}(B)) = \nu(B)$ for each $B \in \mathcal{F}_Y$. Therefore, condition (2) is satisfied.

Proposition 2. *Functor M is open.*

Proof. This proposition is proved in [6].

2.2. Open-multicommutative functors and characteristic map. Let us recall the notion of the multi-commutativity of a weakly-normal functor which is introduced in [5].

Suppose that $\mathcal{G}$ is a finite partially ordered set and we also regard it as a finite directed graph. Denote by $\mathcal{VG}$ the class of all vertices of graph $\mathcal{G}$ and by $\mathcal{EG}$ the set of its edges. A functor $\mathcal{O} \colon \mathcal{G} \to \mathrm{Comp}$ is called a *diagram*. A *cone* over $\mathcal{O}$ consists of a space $X \in |\mathrm{Comp}|$ and a family of maps $\{X \to \mathcal{O}(o)\}_{o \in \mathcal{VG}}$ that satisfy obvious commutativity conditions. Given such a cone, $\mathcal{C} = (\{X \to \mathcal{O}(o)\}_{o \in \mathcal{VG}})$, we denote by $\chi_{\mathcal{C}} \colon X \to \lim \mathcal{O}$ its characteristic map.

We say that the cone $\mathcal{C}$ is *open-multicommutative* if its characteristic map is an open onto map.

Definition 3. *A normal functor F in* Comp *is called* open-multicommutative *(*finite open-multicommutative*) if it preserves the class of open-multicommutative diagrams (which consist of finite spaces).*

The following result can be found in [4].

Proposition 3. *For a weakly normal open bicommutative functor F the following properties are equivalent:*

F is open-multicommutative;

F is finite open-multicommutative.

3. Case of discrete spaces. In this section we assume that all spaces $\mathcal{O}(o)$, $o \in \mathcal{VG}$ are finite and discrete. According to Proposition 3. for the open-multicommutativity of the functor M it is sufficient to show that it is finite open-multicommutative, i.e. the characteristic map $\chi\colon M(\lim \mathcal{O}) \to \lim M(\mathcal{O})$ is open and surjective. Let us assume also that $\mathcal{VG}$ is finite.

Let us also recall that $\lim \mathcal{O}$ can be defined in terms of *threads*. We say that the point $x = (x_o)_{o\in\mathcal{VG}} \in \prod\limits_{o\in\mathcal{VG}} \mathcal{O}(o)$ is a *thread* of the diagram $\mathcal{O}$ if for every $o_1, o_2 \in \mathcal{VG}$ with $o_1 \leqslant o_2$ it holds $\mathrm{pr}_{o_1}(x) = \varphi_{o_1 o_2}\mathrm{pr}_{o2}(x)$. It is well known that $\lim \mathcal{O} \subseteq \prod\limits_{o\in\mathcal{VG}} \mathcal{O}(o)$ and since all $\mathcal{O}(o)$ are discrete, the limit of the diagram is also discrete space.

Let $\lambda^0 \in M(\lim \mathcal{O})$ be a capacity on the space $\lim \mathcal{O}$ and $\mu_o^0 \in M(\mathcal{O}(o))$ be its marginals for $o \in \mathcal{VG}$. Let $O(\lambda^0, f_1, ..., f_n, \varepsilon)$ be an arbitrary weak-* neighborhood of the point λ^0.

In order to prove the openness of the characteristic map it is sufficient to find a neighborhood of the point $(\mu_o^0)_{o\in\mathcal{VG}}$ such that every point from this neighborhood can be covered by some capacity from $O(\lambda^0, f_1, ..., f_n, \varepsilon)$.

Lemma 1. *Let X be a discrete compactum. The base of the weak-* topology on $M(X)$ consists of the sets of the form*

$$O(\mu, F_1, ..., F_n, \varepsilon) = \{\nu \in M(X)\colon |\nu_0(F_i) - \mu(F_i)| < \varepsilon, i = 1, ..., n\},$$

$\mu_0 \in M(X)$ and $F_i \subset X$, $i = 1, ..., n$.

Proof. Let us show first that for every set of the form $O(\mu, F_1, ..., F_n, \varepsilon)$ we can find a basis neighborhood $O(\mu, f_1, ..., f_k, \delta)$ for some $f_i \in C(X)$ and $\delta > 0$, $i = 1, ..., k$. Indeed, if we set $f_i = \mathbf{1}_{F_i}$ and $\delta = \varepsilon$ we get

$$O(\mu, F_1, ..., F_n) = O(\mu, f_1, ..., f_n, \varepsilon).$$

Conversely, consider an element of the sub-base $O(\mu, f, \varepsilon)$. Since the space X is discrete we can represent $f = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{1}_{F_i}$ such that $F_1 \subset F_2 \subset ... \subset F_k$. It is clear (see [1]) that for every capacity $\nu \in M(X)$ holds $\nu(f) = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \nu(F_i)$. Let us consider a set $O(\mu, F_1, .., F_k, \frac{\varepsilon}{k\alpha})$, where $\alpha = \max\{|\alpha_1|, ..., |\alpha_k|\}$. Comonotonicity of functions $\mathbf{1}_{F_i}$ implies that for every capacity $\nu \in O(\mu, F_1, .., F_k, \frac{\varepsilon}{k\alpha})$ we have that

$$|\mu(f) - \nu(f)| = |\sum_{i=1}^{k} \alpha_i(\mu(F_i) - \nu(F_i))| \leqslant \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i||\mu(F_i) - \nu(F_i)| < \sum_{i=1}^{k} \frac{\varepsilon\alpha_i}{k\alpha} < \varepsilon.$$

Hence, $O(\mu, F_1, .., F_k, \frac{\varepsilon}{k\alpha}) \subset O(\mu, f, \varepsilon)$.

According to Lemma 1. we can assume without loss of generality that functions $f_1, ..., f_n$ are of the form $f_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in F_i, \\ 0, & x \notin F_i \end{cases}$ for every $x \in \lim D$ with $F_1, ..., F_n$ are subsets of $\lim \mathcal{O}$.

We consider a neighborhood

$$U = O(\mu_1^0, \{x_1^1\}, ..., \{x_{m_1}^1\}, \delta) \times ... \times O(\mu_k^0, \{x_1^k\}, ..., \{x_{m_k}^k\}, \delta),$$

where $X_i = \{x_1^i, ..., x_{m_i}^i\}$. Let $(\mu_1, ..., \mu_k)$ be an arbitrary point in U. Let us define a capacity λ on $\lim \mathcal{O}$.

For every subset $A \subset \lim \mathcal{O}$ we define

$$l_A = \max_{o' \in \mathcal{VG}} \{\max\{\mu_{o'}(W) \colon W \subseteq \mathcal{O}(o'), (\prod_{o \in \mathcal{VG} \setminus \{o'\}} \mathcal{O}(o) \times W) \cap \lim \mathcal{O} \subseteq A\}\}.$$

Analogically,

$$u_A = \min_{o' \in \mathcal{VG}} \{\min\{\mu_{o'}(W) \colon W \subseteq \mathcal{O}(o'), (\prod_{o \in \mathcal{VG} \setminus \{o'\}} \mathcal{O}(o) \times W) \cap \lim \mathcal{O} \supseteq A\}\}.$$

Note that the interval $[l_A, u_A]$ is not empty and in order λ to be well defined it should satisfies inequalities

$$l_A \leqslant \lambda(A) \leqslant u_A$$

for every subset $A \subset \lim \mathcal{O}$. Recall also that $(\mu_1, ..., \mu_k) \in U$ and this implies that for every $A \subset \lim \mathcal{O}$ we have $l_A - \delta < \lambda^0(A) < u_A + \delta$.

Lemma 2. *If $A \subseteq B$ then $l_A \leqslant l_b$ and $u_A \leqslant u_B$.*

Proof. It is clear that for every $W \subseteq \mathcal{O}(o')$ such that $(\prod_{o \in \mathcal{VG} \setminus \{o'\}} \mathcal{O}(o) \times W) \cap \lim \mathcal{O} \subseteq A$ we have that $(\prod_{o \in \mathcal{VG} \setminus \{o'\}} \mathcal{O}(o) \times W) \cap \lim \mathcal{O} \subseteq B$ for every $j = 1, ..., k$. This implies that $l_A \leqslant l_B$.

The analogical result for the upper bounds can be derived from the statement

$$(\prod_{o \in \mathcal{VG} \setminus \{o'\}} \mathcal{O}(o) \times W) \cap \lim \mathcal{O} \supseteq A \supseteq B.$$

For a Borel set $A \subset \lim \mathcal{O}$ we define a capacity λ as

$$\lambda(A) = \max\{l_A, \min\{u_A, \lambda_0(A)\}\}.$$

Lemma 3. *The set function λ is a well-defined capacity.*

Proof. First of all, $l_{(\lim \mathcal{O})} = u_{(\lim \mathcal{O})} = 1$ this implies that $\lambda(\lim \mathcal{O}) = 1$.

$l_\emptyset = u_\emptyset = 0$ this implies that $\lambda(\emptyset) = 0$.

Let us check now a monotonicity of λ. We suppose that $A \subset B \subset \lim \mathcal{O}$. Consider three cases:

1). $\lambda_0(A) \in [l_A, u_A]$. In this case

$$l_A < \lambda(A) = \lambda_0(A) \leqslant \min\{u_A, \lambda_0(B)\} \leqslant \min\{u_B, \lambda_0(B)\} = \lambda(B).$$

2). $\lambda_0(A) > u_A$. We have

$$l_A < \lambda(A) = u_A \leqslant \min\{u_B, \lambda_0(A)\} \leqslant \min\{u_B, \lambda_0(B)\} = \lambda(B).$$

3). $\lambda_0(A) < l_A$. This condition implies that

$$\lambda(A) = l_A \leqslant l_B \leqslant \lambda(B).$$

Let us set now $\delta = \varepsilon$. In this case we obtain for every $i = 1, ..., n$ that

$$|\lambda(F_i) - \lambda_0(F_i)| < \delta = \varepsilon.$$

This leads to $\lambda \in O(\lambda^0, f_1, ..., f_n, \varepsilon)$.

Due to the definition of l_A and u_A it is easy to check that

$$l_{((\prod\limits_{o\in\mathcal{VG}\setminus\{o'\}}\mathcal{O}(o)\times W)\cap\lim\mathcal{O})} = \mu_{o'}(W)$$

and

$$u_{((\prod\limits_{o\in\mathcal{VG}\setminus\{o'\}}\mathcal{O}(o)\times W)\cap\lim\mathcal{O})} = \mu_{o'}(W)$$

for every $o' \in \mathcal{VG}$ and $W \subset X_{o'}$. This implies that $\lambda((\prod\limits_{o\in\mathcal{VG}\setminus\{o'\}}\mathcal{O}(o) \times W) \cap \lim\mathcal{O}) = \mu_{o'}(W)$ and hence $M\mathrm{pr}_{o'}(\lambda) = \mu_{o'}$ for all $o' \in \mathcal{VG}$.

Hence we proved that the inverse to the correspondence map is open in the case of discrete $\mathcal{O}(o)$, $o \in \mathcal{VG}$. Thus, applying this fact to Proposition 3. we obtain

Theorem 1. *The correspondence map χ of the diagram $\mathcal{O}$ is open and surjective for every $\mathcal{O}(o) \in |\mathrm{Comp}|$, $o \in \mathcal{VG}$.*

A special case of open-multicommutativity was considered by Eifler [3]. One can get this case setting the set $\mathcal{EG} = \emptyset$. Eifler proved that the functor of the probability measures preserves surjectivity and openness of the characteristic maps of such kind of diagrams. Thus, the result of Theorem 1. is an extension of Eifler's theorem on the case of non-additive measures.

---

1. *Anger B.* Representation of capacities. // Mahematische Annalen.– 197.– Vol.229.– P.245-258.
2. *Choquet G.* Theory of capacities. // Annales de l'Institut Fourier.– 1953.– 5.– P.131-295.
3. *Eifler L.* Some open mapping theorems for marginals. // Transactions of American Mathematical Society.– 1975.– 211.
4. *Kozhan R.V.* Open-multicommutativity of some functors related to the functor of probability measures. // Mathematychni Studii.– 2005.– 24.– 1.
5. *Kozhan R.V., Zarichnyi M.M.* Open-multicommutativity of the Probability Measure Functor.– 2004 (preprint).
6. *Nykyforchyn O., Zarichnyi M.M.* On the functor of upper-continuous capacities.– 2005 (preprint).
7. *Quiggin J.* Generalized Expected Utility Theory: The Rank-dependent Model. Kluwer Academic, Boston.– 1993.

8. *Schmeidler D.* Subjective Probability and Expected Utility without Additivity. //Econometrica.– 1989.– 57 (3).– P.571-587.

9. *Teleiko A., Zarichnyi M.* Categorical Topology of Compact Hausdorf Spaces. Math. Studies Monograph Series.– 1999.– Vol.5.

10. *Yaari M.* The Dual Theory of Choice Under Risk // Econometrica.– 1987.– 55 (1).– P.95-115.

11. *Zhang J.* Subjective ambiguity, probability and capacity. Mimeo. University of Toronto.– 1997

12. *Zhou L.* Integral Representation of Continuous Comonotonically Additive Functionals// Transactions of American Mathematical Society.– 1998.– Vol.350.– 5.– P.1811-1822.

ВІДКРИТА МУЛЬТИКОМУТАТИВНІСТЬ ФУНКТОРА НЕПЕРЕРВНИХ ЗВЕРХУ ЄМНОСТЕЙ

Роман Кожан

Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

Досліджуємо поняття відкритої мультикомутативності, вперше введене Кожаном та Зарічним [5]. Розглянуто слабко-нормальний функтор неперервних зверху ємностей. Основним результатом статті є доведення факту відкритої мультикомутативності цього функтора.

Ключові слова: ємність, коваріантний функтор, відкрита мультикомутативність.

Стаття надійшла до редколегії 23.11.2005

Прийнята до друку 02.11.2006

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2006. Вип.66. С.243–260

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2006. Vol.66. P.243–260

УДК 517.95

THE MIXED PROBLEM FOR A SEMILINEAR HYPERBOLIC EQUATION IN GENERALIZED LEBESGUE SPACES

Serhiy Lavrenyuk, Oksana Panat

Ivan Franko Lviv National University,
Universytetska Str. 1, 79000 Lviv, Ukraine

The initial boundary value problem for a semilinear hyperbolic equation in a bounded cylindrical domain is considered. Existence conditions for this problem are obtained in generalized Lebesgue spaces.

Key words: hyperbolic equation, mixed problem, generalized Lebesgue spaces.

1. Problems for nonlinear hyperbolic equations were considered by many authors [1-36]. The mixed problem for such equations are well studied in Sobolev spaces specially in case of bounded domains with respect to spacial variables. In particular, semilinear hyperbolic equation of the form

$$u_{tt} - \Delta u + \alpha u_t + \beta |u|^{p-2}u + \gamma |u_t|^{q-2}u_t = f(x,t),$$

where $\alpha \geqslant 0,\ \gamma \geqslant 0,\ \beta \in \mathbb{R}$ and p, q are constants, is the subject of research in [1-22]. Cauchy problems for the previous equation are examined in [1-7] and mixed problems in [8-14] respectively. For these problems the conditions on the coefficients of the equation and nonlinearity exponents are stated which provides the existence, uniqueness or nonexistence of the problems solutions.

Over the last years problems for nonlinear partial differential equations have being actively studied in some special classes of functions namely in generalized Lebesgue and Sobolev spaces. The main properties of these spaces are given in [37]. In this article we consider a mixed problem for certain generalization of the mentioned above equation with $\beta > 0,\ \gamma > 0$, in which nonlinearity exponents depend on spacial variables. Conditions are obtained providing the existence of the solution in generalized Lebesgue spaces.

2. Formulation of the problem. Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded domain with the regular in Calderon's sense boundary $\partial\Omega$ [38], $Q_\tau = \Omega \times (0,\tau)$, $\tau \in (0,T]$, $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1,t_2)$, $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T$, $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$.

Consider the following problem in the domain Q_T:

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)u_{x_i} + a_0(x,t)u_t + c(x,t)u +$$
$$+b_0(x,t)|u_t|^{p_0(x)-2}u_t + b_1(x,t)|u|^{p_1(x)-2}u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$u|_{S_T} = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \ \ u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

We denote by $L^{p_0(x)}(\Omega)$ the class of all measurable functions v, defined on Ω, for which $\int_\Omega |v|^{p_0(x)}\,dx < +\infty$. It is proved in [37] that $L^{p_0(x)}(\Omega)$ is a Banach space with the norm

$$||v; L^{p_0(x)}(\Omega)|| = \inf\left\{\lambda > 0 : \int\limits_\Omega |v/\lambda|^{p_0(x)}\,dx \leqslant 1\right\}.$$

Let

$$V(\Omega) = H_0^1(\Omega) \cap L^{p_0(x)}(\Omega) \cap L^{p_1(x)}(\Omega), \ V(Q_T) = H_0^1(Q_T) \cap L^{p_0(x)}(Q_T) \cap L^{p_1(x)}(Q_T),$$

$$q(x) = \min\{2, p'_0(x)\}, \ b(x) = \min\{p'_0(x), p'_1(x)\}, \ \frac{1}{p_i(x)} + \frac{1}{p'_i(x)} = 1, \ i = 0,1.$$

We assume that for the coefficients of equation (1) the following conditions hold:

(A): $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $i,j = 1,...,n$ for a. e. $x \in \Omega$; $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \theta_0 \sum\limits_{i=1}^{n} |\xi_i|^2$, $\theta_0 > 0$ for all $\xi \in \mathbb{R}^n$ and for a. e. $x \in \Omega$; $a_i, c \in L^\infty(Q_T)$, $\quad i = 0,1,...,n$;

(B): $b_0, b_1, b_{1t} \in L^\infty(Q_T)$, $b_0(x,t) \geqslant \beta_0 > 0$, $b_1(x,t) \geqslant \beta_1 > 0$ a. e. in Q_T;

(P): $p_i : \Omega \to (1,+\infty)$, $p_i \in L^\infty(\Omega)$, $1 < \overline{p}_i \leqslant \widehat{p}_i < +\infty$, where $\overline{p}_i = \operatorname{ess}\inf\limits_\Omega p_i(x)$, $\widehat{p}_i = \operatorname{ess}\sup\limits_\Omega p_i(x)$, $i = 0,1$.

Definition. By a weak solution of problem (1) – (3) we understand the function $u \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap L^{p_1(x)}(Q_T) \cap C([0,T]; L^2(\Omega))$, $u_t \in L^2(Q_T) \cap L^{p_0(x)}(Q_T)$ that satisfies the equality

$$\int\limits_{\Omega_T} u_t v\,dx - \int\limits_{\Omega_0} u_1(x) v\,dx + \int\limits_{Q_T} \Bigg[-u_t v_t + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t) u_{x_i} v + a_0(x,t) u_t v + c(x,t) u v + b_0(x,t)|u_t|^{p_0(x)-2} u_t v +$$
$$+ b_1(x,t)|u|^{p_1(x)-2} u v - f(x,t) v \Bigg]\,dx\,dt = 0, \quad \forall \ v \in V(Q_T), \ v_t \in L^2(Q_T)$$

and the initial data $u(x,0) = u_0(x)$.

3. Existence of a weak solution. We define a functional $\rho_{p_0}(\cdot,\Omega)$ as follows:

$$\rho_{p_0}(v,\Omega) = \int\limits_{\Omega} |v(x)|^{p_0(x)}\,dx$$

for any functions v for which the right side makes sense. To prove the main result of this paper, we need the auxiliary lemma.

Lemma. *The functional $\rho_{p_0}(\cdot,\Omega)$ is lower semicontinuous.*

Proof. Let us consider some facts from the functional analysis. By Theorem 1.22 [39, p. 173] it is known that if M is a closed linear subset of a Banach space X and $v_0 \in X\backslash M$, then there exists $h \in X^*$ such that $\langle h, v_0\rangle_X = 1$, $\langle h, v\rangle_X = 0$ for all $v \in M$ and, in addition, $||h||_{X^*} = \dfrac{1}{\operatorname{dist}(v_0, M)}$.

We will also use the generalized Hölder's inequality

$$\int\limits_{\Omega} |v(x)w(x)|\,dx \leqslant r_{p_0}||v;[L^{p_0(x)}(\Omega)]^*||\;||w;L^{p_0(x)}(\Omega)||,$$

which is true for all $w \in L^{p_0(x)}(\Omega)$, $v \in [L^{p_0(x)}(\Omega)]^*$ and where r_{p_0} is a constant that depends only on p_0 and Ω [37].

Let $v_0 \in L^{p_0(x)}(\Omega)$. Fix an arbitrary $r > 0$. It is clear that there exists a closed linear space M_r (for instance, a hyperline in $L^{p_0(x)}(\Omega)$) such that $\operatorname{dist}(v_0, M_r) = \dfrac{1}{r}$. There also exists an element $h_r \in [L^{p_0(x)}(\Omega)]^*$ such that, in particular, $\langle h_r, v_0\rangle_{L^{p_0(x)}(\Omega)} = 1$ and $||h_r||_{[L^{p_0(x)}(\Omega)]^*} = r$. Hence, the following statement holds: for arbitrary $v \in L^{p_0(x)}(\Omega)$, $\tilde z > 0$, $r > 0$ (let $v_0 = \frac{v}{\tilde z}$) there exists $h \in [L^{p_0(x)}(\Omega)]^*$ such that $\langle h, v\rangle_{L^{p_0(x)}(\Omega)} = \tilde z$ and $||h||_{[L^{p_0(x)}(\Omega)]^*} = r$. It is obvious that h depends on v, $\tilde z$, r.

Now prove the statement of lemma. Let $v_m \to v$ weakly in $L^{p_0(x)}(\Omega)$ as $m \to \infty$. Then there exist such constants $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ that $||v;L^{p_0(x)}(\Omega)|| \leqslant c_1$ and $\rho_{p_0}(v_m,\Omega) \leqslant c_2$ for arbitrary $m \in \mathbb{N}$. First of all let us assume that $\varliminf\limits_{m\to\infty} ||v_m;L^{p_0(x)}(\Omega)|| \neq 0$. Then $\varliminf\limits_{m\to\infty} \rho(v_m,\Omega) \neq 0$. Hence, there existnumbers $m_0 \in \mathbb{N}$, $\tilde c_1 > 0$, $\tilde c_2 > 0$ such that for all $m \geqslant m_0$ $\tilde c_1 \leqslant \rho(v_m,\Omega) \leqslant \tilde c_2$, $\tilde c_1 \leqslant ||v_m;L^{p_0(x)}(\Omega)|| \leqslant \tilde c_2$. Let $\tilde z = \rho(v,\Omega)$, $r = \dfrac{\tilde c_1}{r_{p_0}\tilde c_2}$. For these $\tilde z$, r, v choose a corresponding $h \in [L^{p(x)}(\Omega)]^*$. Then

$$\rho(v,\Omega) = \tilde z = \langle h, v\rangle_{L^{p_0(x)}(\Omega)} = \varliminf_{m\to\infty} \langle h, v_m\rangle_{L^{p_0(x)}(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \varliminf_{m\to\infty} r_{p_0}||h;[L^{p_0(x)}(\Omega)]^*||\;||v_m;L^{p_0(x)}(\Omega)|| \leqslant \varliminf_{m\to\infty} r_{p_0} r\tilde c_2 = \tilde c_1 \leqslant \varliminf_{m\to\infty} \rho(v_m,\Omega).$$

Now let us suppose that $\varliminf\limits_{m\to\infty} ||v_m;L^{p_0(x)}(\Omega)|| = 0$. Reflexivity of the space $L^{p_0(x)}(\Omega)$ gives $||v;L^{p_0(x)}(\Omega)|| \leqslant \varliminf\limits_{m\to\infty} ||v_m;L^{p_0(x)}(\Omega)|| = 0$. This implies $v = 0$. Hence, $\rho(v,\Omega) = 0 \leqslant \varliminf\limits_{m\to\infty} \rho(v_m,\Omega)$. This completes the proof of the lemma.

Theorem. *Suppose that conditions (A), (B), (P) are true and besides that* $f \in L^{q(x)}(Q_T)$, $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^{p_1(x)}(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$. *Then there exists a weak solution* u *of the problem (1) – (3) such that* $u_{tt} \in L^2((0,T); H^{-1}(\Omega)) + L^{b(x)}(Q_T)$.

Proof. We use Faedo-Galerkin's method. As $V(\Omega)$ is a Banach separable space, there exists a linearly independent dense everywhere in $V(\Omega)$ set of functions $\{\varphi^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ which is orthonormal in $L^2(\Omega)$. Let us consider a sequence $u^N(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{N} C_k^N(t)\varphi^k(x)$, $N \in \mathbb{N}$, where $(C_1^N, \dots C_k^N)$ is a solution of the Cauchy problem

$$\int\limits_\Omega \Big[u_{tt}^N \varphi^k + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i}^N \varphi_{x_j}^k + \sum_{i=1}^n a_i(x,t) u_{x_i}^N \varphi^k + a_0(x,t) u_t^N \varphi^k + c(x,t) u^N \varphi^k +$$

$$+ b_0(x,t)|u_t^N|^{p_0(x)-2} u_t^N \varphi^k + b_1(x,t)|u^N|^{p_1(x)-2} u^N \varphi^k - f(x,t)\varphi^k \Big] \, dx = 0, \tag{4}$$

$$C_k^N(0) = u_{0,k}^N, \; C_{kt}^N(0) = u_{1,k}^N, \tag{5}$$

$$u_0^N(x) = \sum_{k=1}^N u_{0,k}^N \varphi^k(x), \quad u_1^N(x) = \sum_{k=1}^N u_{1,k}^N \varphi^k(x),$$

$$\|u_0^N - u_0\|_{H_0^1(\Omega)\cap L^{p_1(x)}(\Omega)} \to 0, \; \|u_1^N - u_1\|_{L^2(\Omega)} \to 0.$$

Substitute $C_k^N(t) = y_k(t)$, $C_{kt}^N(t) = z_k(t)$. Taking into account the orthonormality of $\{\varphi^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ in the space $L^2(\Omega)$, (4), (5), we obtain

$$y_k'(t) = z_k(t),$$

$$z_k'(t) = -\int\limits_\Omega \Big[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \sum_{l=1}^N y_l \varphi_{x_i}^l \varphi_{x_j}^k + \sum_{i=1}^n a_i(x,t) \sum_{l=1}^N y_l \varphi_{x_i}^l \varphi^k +$$

$$+ a_0(x,t) \sum_{l=1}^N z_l \varphi^l \varphi^k + c(x,t) \sum_{l=1}^N y_l \varphi^l \varphi^k + b_0(x,t) \Big| \sum_{l=1}^N z_l \varphi^l \Big|^{p_0(x)-2} \sum_{l=1}^N z_l \varphi^l \, \varphi^k +$$

$$+ b_1(x,t) \Big| \sum_{l=1}^N y_l \varphi^l \Big|^{p_1(x)-2} \sum_{l=1}^N y_l \varphi^l \, \varphi^k - f(x,t)\varphi^k \Big] \, dx, \; k = 1, \dots, N, \tag{6}$$

$$y_k(0) = u_{0,k}^N, \; z_k(0) = u_{1,k}^N. \tag{7}$$

Rewrite system (6) in the following way:

$$\begin{cases} y_k' = z_k, \\ z_k' = f_k(y_1, \dots y_N, z_1, \dots z_N). \end{cases}$$

Let $\prod_a = \{(y,x) \in \mathbb{R}^{2N} : |y_i| \leqslant a,\ |z_i| \leqslant a, i = 1,\dots N\}$. The Hölder inequality gives the estimate

$$\Big|\sum_{l=1}^{N} z_l\varphi^l\Big|^{p_0(x)-1} \leqslant \sum_{l=1}^{N} |z_l|^{p_0(x)-1}|\varphi^l|^{p_0(x)-1} N^{\frac{p_0(x)-1}{(p_0(x)-1)'}} \leqslant$$
$$\leqslant N^{\frac{p_0(x)-1}{(p_0(x)-1)'}} a^{p_0(x)-1}\sum_{l=1}^{N}|\varphi^l|^{p_0(x)-1}.$$

Thus, the functions f_k satisfy the conditions of Caratheodory Theorem [40, p. 54]. Then there exists a continuously differentiable solution of problem (6), (7) which is determined in some interval $(0,t_0]$ and has absolutely continuous derivative. From the estimates obtained below it follows that $t_0 = T$.

Multiplying equation (4) by the functions $C_{kt}^N e^{-\eta t}$, $\eta > 0$ respectively, summing by k from 1 to N and integrating along the interval $(0,\tau]$, $\tau \in (0,T]$, we obtain

$$\int\limits_{Q_\tau}\Big[u_{tt}^N u_t^N + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}^N u_{x_jt}^N + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)u_{x_i}^N u_t^N + a_0(x,t)|u_t^N|^2 + c(x,t)u^N u_t^N +$$
$$+ b_0(x,t)|u_t^N|^{p_0(x)} + b_1(x,t)|u^N|^{p_1(x)-2}u^N u_t^N - f(x,t)u_t^N\Big]e^{-\eta t}\,dx\,dt = 0. \qquad (8)$$

Estimate the addends in (8), taking into account the conditions of the theorem:

$$I_1 := \int\limits_{Q_\tau} u_{tt}^N u_t^N e^{-\eta t}\,dx\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}|u_t^N|^2 e^{-\eta\tau}\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}|u_1^N|^2\,dx + \frac{\eta}{2}\int\limits_{Q_\tau}|u_t^N|^2 e^{-\eta t}\,dx\,dt;$$

$$I_2 := \int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}^N u_{x_jt}^N e^{-\eta t}\,dx\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}^N u_{x_j}^N e^{-\eta\tau}\,dx -$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{0,x_i}^N u_{0,x_j}^N\,dx + \frac{\eta}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}^N u_{x_j}^N e^{-\eta t}\,dx\,dt \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\theta_0}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}|\nabla u^N|^2 e^{-\eta\tau}\,dx - \frac{A_0}{2}\int\limits_{\Omega_0}|\nabla u_0^N|^2\,dx + \frac{\eta\theta_0}{2}\int\limits_{Q_\tau}|\nabla u^N|^2 e^{-\eta t}\,dx\,dt,$$

$$A_0 = n\max_{i,j}\operatorname*{ess\,sup}_{\Omega}|a_{ij}(x)|;$$

$$I_3 := \int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)u_{x_i}^N u_t^N e^{-\eta t}\,dx\,dt \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\Big[A_1|\nabla u^N|^2 + |u_t^N|^2\Big]e^{-\eta t}\,dx\,dt,$$

$$A_1 = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T}\sum_{i=1}^{n} a_i^2(x,t);$$

$$I_4 := \int\limits_{Q_\tau} a_0(x,t)|u_t^N|^2 e^{-\eta t}\,dx\,dt \leqslant \frac{A_2}{2}\int\limits_{Q_\tau}|u_t^N|^2 e^{-\eta t}\,dx\,dt,\ A_2 = 2\operatorname*{ess\,sup}_{Q_T}|a_0(x,t)|;$$

$$I_5 := \int\limits_{Q_\tau} c(x,t)u^N u_t^N e^{-\eta t}\,dx\,dt \leqslant \frac{1}{2}\,C_1 \int\limits_{Q_\tau} \Big[|u^N|^2 + |u_t^N|^2\Big] e^{-\eta t}\,dx\,dt,\ C_1 = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} |c(x,t)|;$$

$$I_6 := \int\limits_{Q_\tau} b_0(x,t)|u_t^N|^{p_0(x)} e^{-\eta t}\,dx\,dt \geqslant \beta_0 \int\limits_{Q_\tau} |u_t^N|^{p_0(x)} e^{-\eta t}\,dx\,dt;$$

$$I_7 := \int\limits_{Q_\tau} b_1(x,t)|u^N|^{p_1(x)-2}u^N u_t^N e^{-\eta t}\,dx\,dt = \int\limits_{\Omega_\tau} \frac{b_1(x,\tau)}{p_1(x)}|u^N|^{p_1(x)} e^{-\eta\tau}\,dx -$$

$$-\int\limits_{\Omega_0} \frac{b_1(x,0)}{p_1(x)}|u_0^N|^{p_1(x)}\,dx + \int\limits_{Q_\tau} \frac{1}{p_1(x)}(\eta b_1(x,t) - b_{1t}(x,t))|u^N|^{p_1(x)} e^{-\eta t}\,dx\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\beta_1}{\widehat{p}_1} \int\limits_{\Omega_\tau} |u^N|^{p_1(x)} e^{-\eta\tau}\,dx - \frac{\beta_2}{\overline{p}_1} \int\limits_{\Omega_0} |u_0^N|^{p_1(x)}\,dx + \left(\frac{\eta\beta_1}{\widehat{p}_1} - \frac{\beta_3}{\overline{p}_1}\right) \int\limits_{Q_\tau} |u^N|^{p_1(x)} e^{-\eta t}\,dx\,dt,$$

$$\beta_2 = \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} |b_1(x,0)|,\ \beta_3 = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} |b_{1t}(x,t)|;$$

$$I_8 := \int\limits_{Q_\tau} f(x,t)u_t^N e^{-\eta t}\,dx\,dt \leqslant \int\limits_{Q_\tau} \left[\frac{\delta_0}{q'(x)}|u_t^N|^{q'(x)} + \frac{1}{\delta_0^{\frac{q(x)}{q'(x)}} q(x)}|f(x,t)|^{q(x)}\right] e^{-\eta t}\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta_0}{\overline{q}'} \int\limits_{Q_\tau} |u_t^N|^{q'(x)} e^{-\eta t}\,dx\,dt + \frac{1}{\delta_0^{\gamma_0}\overline{q}} \int\limits_{Q_\tau} |f(x,t)|^{q(x)} e^{-\eta t}\,dx\,dt,\quad \frac{1}{q(x)} + \frac{1}{q'(x)} = 1,$$

$$\overline{q} = \operatorname*{ess\,inf}_{\Omega} q(x),\quad \overline{q}' = \operatorname*{ess\,inf}_{\Omega} q'(x),\quad \gamma_0 = \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} \frac{q(x)}{q'(x)},\quad \delta_0 \in (0,1].$$

Since

$$u^N(x,t) = u^N(x,0) + \int\limits_0^t u_t^N(x,s)\,ds,$$

then

$$\int\limits_{Q_\tau} |u^N|^2 e^{-\eta t}\,dx\,dt \leqslant 2T\bigg(\int\limits_{\Omega_0} |u_0^N|^2\,dx + T\int\limits_{Q_\tau} |u_t^N|^2 e^{-\eta t}\,dx\,dt\bigg). \tag{9}$$

Thus, taking into account the estimates of the integrals $I_1 - I_8$ and (9), from (8) we obtain the inequality

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \left[|u_t^N|^2 + \theta_0|\nabla u^N|^2 + \frac{2\beta_1}{\widehat{p}_1}|u^N|^{p_1(x)}\right] e^{-\eta\tau}\,dx + \int\limits_{Q_\tau} \bigg[\Big(\eta - 1 - A_2 - C_1 -$$

$$-2T^2 - \nu\Big)|u_t^N|^2 + \Big(\theta_0\eta - A_1\Big)|\nabla u^N|^2 + \Big(2\beta_0 - \frac{2\delta_0}{\overline{q}'}(1-\nu)\Big)|u_t^N|^{p_0(x)} +$$

$$+2\Big(\frac{\eta\beta_1}{\widehat{p}_1} - \frac{\beta_3}{\overline{p}_1}\Big)|u^N|^{p_1(x)}\bigg] e^{-\eta t}\,dx\,dt \leqslant \int\limits_{\Omega_0} \bigg[|u_1^N|^2 + \frac{2\beta_2}{\overline{p}_1}|u_0^N|^{p_1(x)} + A_0|\nabla u_0^N|^2 +$$

$$+2TC_1|u_0^N|^2\Big]\,dx+\frac{2}{\delta_0^{\gamma_0}\overline{q}}\int\limits_{Q_\tau}|f(x,t)|^{q(x)}e^{-\eta t}\,dx\,dt, \tag{10}$$

where $\nu=1$ if $q(x)\equiv 2$ and $\nu=0$ if $q(x)\leqslant 2,\ q(x)\not\equiv 2$.

Choose η and δ_0 such that the following conditions hold:

$$\eta-2-A_2-C_1-2T^2\geqslant 1,\ \ \theta_0\eta-A_1\geqslant 1,\ \ \frac{\eta\beta_1}{\widehat{p}_1}-\frac{\beta_3}{\overline{p}_1}\geqslant 1,\ \ \delta_0=\min\{1;\beta_0;\overline{q}\,'\}.$$

Then, considering the convergence of u_0^N to u_0 in the space $H_0^1(\Omega)\cap L^{p_1(x)}(\Omega)$ and the convergence of u_1^N to u_1 in the space $L^2(\Omega)$, from (10) we have the estimates

$$\int\limits_{\Omega_\tau}[|u_t^N|^2+|\nabla u^N|^2+|u^N|^{p_1(x)}]\,dx\leqslant M_1,\ \tau\in(0,T], \tag{11}$$

$$\int\limits_{Q_T}[|u_t^N|^2+|\nabla u^N|^2+|u_t^N|^{p_0(x)}+|u^N|^{p_1(x)}]\,dx\,dt\leqslant M_1, \tag{12}$$

where M_1 does not depend on N.
Besides that

$$\int\limits_{Q_T}||u^N|^{p_1(x)-2}u^N|^{p'_1(x)}\,dx\,dt\leqslant\int\limits_{Q_T}|u^N|^{p_1(x)}\,dx\,dt\leqslant M_2, \tag{13}$$

$$\int\limits_{Q_T}||u_t^N|^{p_0(x)-2}u_t^N|^{p'_0(x)}\,dx\,dt\leqslant\int\limits_{Q_T}|u_t^N|^{p_0(x)}\,dx\,dt\leqslant M_2. \tag{14}$$

From estimates (11) – (14) it follows that

$$\|u^N\|_{L^\infty((0,T);H_0^1(\Omega)\cap L^{p_1(x)}(\Omega))}+\|u_t^N\|_{L^\infty((0,T);L^2(\Omega))}\leqslant M_3, \tag{15}$$

$$\|u^N\|_{L^2((0,T);H_0^1(\Omega))\cap L^{p_1(x)}(Q_T)}\leqslant M_3,\quad \|u_t^N\|_{L^{p_0(x)}(Q_T)}\leqslant M_3, \tag{16}$$

$$\||u^N|^{p_1(x)-2}u^N\|_{L^{p'_1(x)}(Q_T)}\leqslant M_3,\quad \||u_t^N|^{p_0(x)-2}u_t^N\|_{L^{p'_0(x)}(Q_T)}\leqslant M_3, \tag{17}$$

where the constant M_3 does not depend on N.
On the basis of (15) – (17) there exists a subsequence $\{u^{N_k}\}_{N_k\in\mathbb{N}}\subset\{u^N\}_{N\in\mathbb{N}}$ such that

$u^{N_k}\to u\ *-$ weakly in $L^\infty((0,T);H_0^1(\Omega)\cap L^{p_1(x)}(\Omega))$, $u^{N_k}\to u$ weakly in $L^2((0,T);H_0^1(\Omega))\cap L^{p_1(x)}(Q_T)$, $u_t^{N_k}\to u_t\ *-$ weakly in $L^\infty((0,T);L^2(\Omega))$, $u_t^{N_k}\to u_t$ weakly in $L^{p_0(x)}(Q_T)$, $u_t^{N_k}(\cdot,T)\to w$ weakly in $L^2(\Omega)$, $u^{N_k}\to u$ strongly in $L^2(Q_T)$ and a. e. in Q_T, $|u^{N_k}|^{p_1(x)-2}u^{N_k}\to\chi$ weakly in $L^{p'_1(x)}(Q_T)$, $|u_t^{N_k}|^{p_0(x)-2}u_t^{N_k}\to z$ weakly in

$$L^{p'_0(x)}(Q_T) \text{ as } N_k \to \infty.$$

Then from Lemma 2.2 [38, p. 57] it follows that $\chi = |u|^{p_1(x)-2}u$.

Let us consider the set of functions

$$\mathfrak{M} = \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathfrak{M}_N, \text{ where } \mathfrak{M}_N = \{v^N : \ v^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} d_k^N(t)\varphi^k(x), \ d_k^N \in C^1([0,T])\}.$$

From (4) we get

$$\int\limits_{Q_T} \Big[-u_t^{N_k} v_t^N + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i}^{N_k} v_{x_j}^N + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t) u_{x_i}^{N_k} v^N + a_0(x,t) u_t^{N_k} v^N + c(x,t) u^{N_k} v^N +$$
$$+ b_0(x,t)|u_t^{N_k}|^{p_0(x)-2} u_t^{N_k} v^N + b_1(x,t)|u^{N_k}|^{p_1(x)-2} u^{N_k} v^N - f(x,t) v^N \Big]\, dx\, dt =$$
$$= -\int\limits_{\Omega_T} u_t^{N_k} v^N\, dx + \int\limits_{\Omega_0} u_1^{N_k} v^N\, dx, \tag{18}$$

where N is an arbitrary fixed natural number and $N_k \geqslant N$.
Hence, passing to the limit as $N_k \to \infty$, obtain

$$\int\limits_{Q_T} \Big[-u_t v_t^N + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j}^N + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t) u_{x_i} v^N + a_0(x,t) u_t v^N + c(x,t) u v^N +$$
$$+ b_0(x,t) z v^N + b_1(x,t)|u|^{p_1(x)-2} u v^N - f(x,t) v^N \Big]\, dx\, dt + \int\limits_{\Omega_T} w v^N\, dx = \int\limits_{\Omega_0} u_1 v^N\, dx. \tag{19}$$

Taking into account the density of the set $\mathfrak{M}$ in the space $H_0^1(Q_T)$ and in the space $L^{p_0(x)}(Q_T) \cap L^{p_1(x)}(Q_T)$ [36], from (19) we get the equality

$$\int\limits_{Q_T} \Big[-u_t v_t + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t) u_{x_i} v + a_0(x,t) u_t v + c(x,t) u v +$$
$$+ b_0(x,t) z v + b_1(x,t)|u|^{p_1(x)-2} u v - f(x,t) v \Big]\, dx\, dt + \int\limits_{\Omega_T} w v\, dx = \int\limits_{\Omega_0} u_1 v\, dx, \tag{20}$$

which is correct for all $v \in V(Q_T)$, $v_t \in L^2(Q_T)$.
In particular, (20) implies the equality in the sense of distributions

$$u_{tt} = -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} - \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t) u_{x_i} - a_0(x,t) u_t - c(x,t) u - b_0(x,t) z -$$
$$- b_1(x,t)|u|^{p_1(x)-2} u + f(x,t). \tag{21}$$

Then $u_{tt} \in L^2((0,T);H^{-1}(\Omega)) + L^{p'_0(x)}(Q_T) + L^{p'_1(x)}(Q_T) \subset L^2((0,T);H^{-1}(\Omega)) + L^{b(x)}(Q_T)$.

Let $\overline{b} = \operatorname*{ess\,inf}_{\Omega} b(x)$ and put $\varkappa_0 = \min\{2, \overline{b}\}$, $\varkappa_1 = \min\{2, \overline{p}_0\}$. Then $u_{tt} \in L^{\varkappa_0}((0,T); H^{-1}(\Omega) + L^{\overline{b}}(\Omega))$. Furthermore, $u_t \in L^2(Q_T) \cap L^{p_0(x)}(Q_T) \subset L^{\varkappa_1}(Q_T)$, $u \in L^2((0,T); H_0^1(\Omega))$. Hence, $u \in C([0,T]; L^2(\Omega))$ [8, p. 20].

Denote by s the smallest positive number for which the embeddings $L^{\varkappa_1}(\Omega) \subset H^{-s}(\Omega)$ and $L^{\overline{b}_0}(\Omega) \subset H^{-s}(\Omega)$ hold. Then $u_{tt} \in L^{\varkappa}((0,T); H^{-s}(\Omega))$ and $u_t \in L^{\varkappa}((0,T); H^{-s}(\Omega))$, where $\varkappa = \min\{\varkappa_0, \varkappa_1\}$. Thus, $u_t \in C([0,T]; H^{-s}(\Omega))$ [8 , p. 20].

Let $v^N|_{t=T} = 0$. Then

$$\int_0^T \int_\Omega u_t^{N_k} v^N \,dx\,dt = -\int_0^T \int_\Omega u^{N_k} v_t^N \,dx\,dt - \int_{\Omega_0} u_0^{N_k} v^N \,dx \underset{N_k\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\underset{N_k\to\infty}{\longrightarrow} -\int_0^T \int_\Omega u v_t^N \,dx\,dt - \int_{\Omega_0} u_0 v^N \,dx \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} -\int_{Q_T} u v_t \,dx\,dt - \int_{\Omega_0} u_0 v \,dx.$$

On the other hand,

$$\int_{Q_T} u_t^{N_k} v^N \,dx\,dt \underset{N_k\to\infty}{\longrightarrow} \int_{Q_T} u_t v^N \,dx\,dt = -\int_{Q_T} u v_t^N \,dx\,dt - \int_{\Omega_0} u(x,0) v^N \,dx \underset{N\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\underset{N\to\infty}{\longrightarrow} -\int_{Q_T} u v_t \,dx\,dt - \int_{\Omega_0} u(x,0) v \,dx.$$

Then

$$\int_{\Omega_0} u_0 v \,dx = \int_{\Omega_0} u(x,0) v \,dx.$$

From here

$$u(x,0) = u_0(x).$$

On the basis of (4) we have

$$\langle u_{tt}^{N_k}, w\rangle_{H_0^1(\Omega)} = -\int_{\Omega_t} \Bigg[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i}^{N_k} w_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x,t) u_{x_i}^{N_k} w + a_0(x,t) u_t^{N_k} w + c(x,t) u^{N_k} w +$$

$$+ b_0(x,t) |u_t^{N_k}|^{p_0(x)-2} u_t^{N_k} w + b_1(x,t) |u^{N_k}|^{p_1(x)-2} u^{N_k} w - f(x,t) w \Bigg] dx,$$

where $N_k \geqslant N$, $w \in \operatorname{Span}\{\varphi^1, \dots, \varphi^N\}$.
Then

$$\langle u_{tt}^{N_k}, w\rangle_{H_0^1(\Omega)} \underset{N_k\to\infty}{\longrightarrow} -\int_{\Omega_t} \Bigg[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} w_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x,t) u_{x_i} w + a_0(x,t) u_t w + c(x,t) u w +$$

$$+b_0(x,t)zw + b_1(x,t)|u|^{p_1(x)-2}uw - f(x,t)w\Bigg]\,dx \quad \text{weakly in } L^{\varkappa_0}(0,T).$$

On the other hand, from (21) we have

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_t} u_t w\,dx = -\int\limits_{\Omega_t}\Bigg[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}w_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)u_{x_i}w + a_0(x,t)u_t w +$$
$$+c(x,t)uw + b_0(x,t)zw + b_1(x,t)|u|^{p_1(x)-2}uw - f(x,t)w\Bigg]\,dx.$$

Thus,

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_t} u_t^{N_k} w\,dx \underset{N_k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_t} u_t w\,dx \quad \text{weakly in} \quad L^{\varkappa_0}(0,T).$$

Since $\langle u_{tt}^{N_k}, w\rangle_{H_0^1(\Omega)} \in L^{\varkappa_0}(0,T)$, we see that $\int\limits_{\Omega_t} u_t w\,dx \in C([0,T])$. Let $\varphi \in C([0,T])$ and $\varphi(T) = 0$. Then

$$\int\limits_0^T \frac{d}{dt}\left(\int\limits_{\Omega_t} u_t w\,dx\right)\varphi\,dt = -\int\limits_{Q_T} u_t w\varphi'\,dx\,dt - \int\limits_{\Omega_0} u_t(x,0)w\varphi(0)\,dx.$$

On the other hand,

$$\int\limits_0^T \frac{d}{dt}\left(\int\limits_{\Omega_t} u_t^{N_k} w\,dx\right)\varphi\,dt = -\int\limits_{Q_T} u_t^{N_k} w\varphi'\,dx\,dt - \int\limits_{\Omega_0} u_t^{N_k} w\varphi(0)\,dx \underset{N_k\to\infty}{\longrightarrow}$$
$$\underset{N_k\to\infty}{\longrightarrow} -\int\limits_{Q_T} u_t w\varphi'\,dx\,dt - \int\limits_{\Omega_0} u_1 w\varphi(0)\,dx.$$

Thus,

$$\int\limits_{\Omega_0} u_1 w\varphi(0)\,dx = \int\limits_{\Omega_0} u_t(x,0)w\varphi(0)\,dx \quad \text{for all } N \in \mathbb{N},$$

that is,

$$u_t(x,0) = u_1(x).$$

Choosing $\varphi(0) = 0$, we can prove in a similar way that $u_t(x,T) = w(x)$. Then the equality (20) can be written in the form

$$\int\limits_{Q_T}\Bigg[-u_t v_t + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)u_{x_i}v + a_0(x,t)u_t v + c(x,t)uv + b_0(x,t)zv +$$
$$+b_1(x,t)|u|^{p_1(x)-2}uv - f(x,t)v\Bigg]\,dx\,dt + \int\limits_{\Omega_T} u_t v\,dx = \int\limits_{\Omega_0} u_1(x)v\,dx, \tag{22}$$

which is correct for all $v \in V(Q_T),\ v_t \in L^2(Q_T)$.

Now prove that $z = |u_t|^{p_1(x)-2}u_t$. Let $\tau_0,\ \tau \in (0,T),\ \tau_0 < \tau,\ m \in \mathbb{N},\ \Theta_m$ be a continuous piecewise linear function on the interval $[0,T]$ such that $\Theta_m(t) = 1,\ \tau_0 + \frac{2}{m} < t < \tau - \frac{2}{m},\ \Theta_m(t) = 0,\ t > \tau - \frac{1}{m},\ t < \tau_0 + \frac{1}{m}$. Let ρ_l be a regularizing sequence in $D(\mathbb{R})$, $\rho_l(t) = \rho_l(-t)$,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_l(t)dt = 1, \qquad \operatorname{supp}\, \rho_l \subset \left[-\frac{1}{l}, \frac{1}{l}\right].$$

Put in (22) $v = ((\Theta_m e^{-\eta t}u_t) * \rho_l * \rho_l)\Theta_m e^{-\eta t}$, where $l > 2m$ and $*$ denotes the convolution by t. As

$$v_t = ((\Theta_m e^{-\eta t}u_t) * \rho_l * \rho_l)_t\Theta_m e^{-\eta t} + ((\Theta_m e^{\eta t}u_t) * \rho_l * \rho_l)\Theta'_m e^{-\eta t} -$$
$$-\eta((\Theta_m e^{-\eta t}u_t) * \rho_l * \rho_l)\Theta_m e^{-\eta t},$$

then the first addend of equality (22) can be presented in the following form:

$$-\int\limits_{Q_T} u_t v_t\, dx\, dt = \int\limits_{Q_T} ((\Theta_m u_t e^{-\eta t})_t * \rho_l)((\Theta_m u_t e^{-\eta t}) * \rho_l)\, dx\, dt -$$
$$-\int\limits_{Q_T} ((\Theta'_m u_t e^{-\eta t}) * \rho_l)((\Theta_m u_t e^{-\eta t}) * \rho_l)\, dx\, dt + \eta \int\limits_{Q_T} ((\Theta_m u_t e^{-\eta t}) * \rho_l)^2\, dx\, dt \underset{l\to\infty}{\longrightarrow}$$
$$\underset{l\to\infty}{\longrightarrow} \eta \int\limits_{Q_T} |u_t|^2\Theta_m^2 e^{-2\eta t}\, dx\, dt - \int\limits_{Q_T} |u_t|^2\Theta_m\Theta'_m e^{-2\eta t}\, dx\, dt \underset{m\to\infty}{\longrightarrow}$$
$$\underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \eta \int\limits_{Q_{\tau_0,\tau}} |u_t|^2 e^{-2\eta t}\, dx\, dt + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |u_t|^2 e^{-2\eta\tau}\, dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{\tau_0}} |u_t|^2 e^{-2\eta\tau_0}\, dx.$$

Similarly, for the second term of equality (22) we have

$$\int\limits_{Q_T}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i}v_{x_i}\, dx\, dt = \int\limits_{Q_T}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)((u_{x_i}\Theta_m e^{-\eta t}) * \rho_l)((u_{x_j}\Theta_m e^{-\eta t})_t * \rho_l)\, dx\, dt +$$
$$+\eta\int\limits_{Q_T}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)((u_{x_i}\Theta_m e^{-\eta t}) * \rho_l)((u_{x_j}\Theta_m e^{-\eta t}) * \rho_l)\, dx\, dt -$$
$$-\int\limits_{Q_T}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)((u_{x_i}\Theta_m e^{-\eta t}) * \rho_l)((u_{x_j}\Theta'_m e^{-\eta t}) * \rho_l)\, dx\, dt \underset{l\to\infty}{\longrightarrow}$$
$$\underset{l\to\infty}{\longrightarrow} \eta\int\limits_{Q_T}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}\Theta_m^2 e^{-2\eta t}\, dx\, dt - \int\limits_{Q_T}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}\Theta_m\Theta'_m e^{-2\eta t}\, dx\, dt \underset{m\to\infty}{\longrightarrow}$$
$$\underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \eta\int\limits_{Q_T}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}e^{-2\eta t}\, dx\, dt + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}e^{-2\eta\tau}\, dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{\tau_0}}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}e^{-2\eta\tau_0}\,dx.$$

Moreover,

$$\int\limits_{Q_T}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)u_{x_i} + a_0(x,t)u_t + c(x,t)u + b_0(x,t)z + b_1(x,t)|u|^{p_1(x)-2}u -\right.$$

$$\left.-f(x,t)\right]v\,dx\,dt \underset{l,m\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_{Q_{\tau_0,\tau}}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)u_{x_i} + a_0(x,t)u_t + c(x,t)u +\right.$$

$$\left.+b_0(x,t)z + b_1(x,t)|u|^{p_1(x)-2}u - f(x,t)\right]u_t e^{-2\eta t}\,dx\,dt.$$

Thus, for a.e. $\tau_0,\ \tau \in (0,T)$ the following equality holds

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\left[u_t^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}\right]e^{-2\eta\tau}\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{\tau_0}}\left[u_t^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}\right]e^{-2\eta\tau_0}\,dx +$$

$$+\int\limits_{Q_{\tau_0,\tau}}\left[(\eta + a_0(x,t))u_t^2 + \eta\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)u_{x_i}u_t + c(x,t)uu_t +\right.$$

$$\left.+b_0(x,t)zu_t + b_1(x,t)|u|^{p_1(x)-2}uu_t - f(x,t)u_t\right]e^{-2\eta t}\,dx\,dt = 0. \tag{23}$$

Since $u \in L^\infty((0,T);H_0^1(\Omega))$ and $u_t \in L^\infty((0,T);L^2(\Omega))$, we see that $||u_t(\cdot,t)||_{L^2(\Omega)} \leqslant M_4$, $||u(\cdot,t)||_{H_0^1(\Omega)} \leqslant M_4$ for a.e. $t \in (0,T]$. Suppose that τ is a nonexclusive point of the functions $u(\cdot,t)$, $u_t(\cdot,t)$. Then for the sequences $u^{N_k}(\cdot,\tau)$, $u_t^{N_k}(\cdot,\tau)$ we obtain

$$u^{N_k}(\cdot,\tau) \to \psi_0 \quad \text{weakly in} \quad H_0^1(\Omega),\ u^{N_k}(\cdot,\tau) \to \psi_0 \quad \text{strongly in} \quad L^2(\Omega),$$
$$u^{N_k}(\cdot,\tau) \to \psi_0 \quad \text{a. e. in} \quad \Omega, \quad u_t^{N_k}(\cdot,\tau) \to \psi_1 \quad \text{weakly in} \quad L^2(\Omega) \quad \text{as } N_K \to \infty. \tag{24}$$

This implies

$$|u^{N_k}(\cdot,\tau)|^{p_1(x)-2}u^{N_k}(\cdot,\tau) \to |\psi_0|^{p_1(x)-2}\psi_0 \quad \text{weakly in} \quad L^{{p'}_1(x)}(\Omega).$$

Let $\{\tau_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset (0,T)$ be a sequence of nonexclusive values for $||u_t(\cdot,t)||_{L^2(\Omega)}$ and $||u(\cdot,t)||_{H_0^1(\Omega)}$ such that $\lim\limits_{k\to\infty}\tau_k = \tau$, $\tau \in [0,T]$. Then from the estimates

$$||u(\cdot,\tau_k)||_{H_0^1(\Omega)} \leqslant M_4, \quad ||u_t(\cdot,\tau_k)||_{L^2(\Omega)} \leqslant M_4,$$

we obtain the existence of a subsequence of the sequence $\{\tau_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ (let it again be $\{\tau_k\}_{k\in\mathbb{N}}$) such that

$$u(\cdot,\tau_k) \to \psi_0 \ \text{ weakly in } \ H_0^1(\Omega), \quad u_t(\cdot,\tau_k) \to \psi_1 \ \text{ weakly in } \ L^2(\Omega) \ \text{ as } \tau_k \to \tau.$$

On the other hand, we have the convergence

$$u(\cdot,\tau_k)\to u(\cdot,\tau) \quad \text{in} \quad L^2(\Omega), \quad u_t(\cdot,\tau_k)\to u_t(\cdot,\tau) \ \text{weakly in} \quad H^{-s}(\Omega) \ \text{as} \ \tau_k\to\tau.$$

Hence, $\psi_1(x)=u_t(x,\tau)$ and $\psi_0(x)=u(x,\tau)$.

Now choose $\{\tau_0^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ a sequence of nonexclusive values for $||u_t(\cdot,t)||_{L^2(\Omega)}$ and $||u(\cdot,t)||_{H_0^1(\Omega)}$ such that $\lim\limits_{k\to\infty}\tau_0^k=0$. Consider (23) in which τ_0 is substituted by the elements of the constructed sequence $\{\tau_0^k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Further passage to the limit as $k\to\infty$ and Lemma 5.3 [38, p. 20] provide the fulfillment of the inequality

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\left[u_t^2+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}\right]e^{-2\eta\tau}\,dx+\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[(\eta+a_0(x,t))u_t^2+\\
&+\eta\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}+\sum_{i=1}^n a_i(x,t)u_{x_i}u_t+c(x,t)uu_t+b_0(x,t)zu_t+\\
&+\frac{1}{p_1(x)}(2\eta b_1(x,t)-b_{1t}(x,t))|u|^{p_1(x)}-f(x,t)u_t\Bigg]e^{-2\eta t}\,dx\,dt+\\
&+\int\limits_{\Omega_\tau}\frac{1}{p_1(x)}|u|^{p_1(x)}e^{-2\eta\tau}\,dx\geqslant\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\left[u_t^2+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{0,x_i}u_{0,x_j}\right]dx+\\
&+\int\limits_{\Omega_0}\frac{1}{p_1(x)}|u|^{p_1(x)}\,dx.
\end{aligned}\tag{25}$$

If $u_0=0$ and $u_1=0$, then (25) transforms into an equality.

Let us consider the sequence

$$\begin{aligned}
0\leqslant y_k&=\int\limits_{Q_\tau}b_0(x,t)(|u_t^{N_k}|^{p_0(x)-2}u_t^{N_k}-|v|^{p_0(x)-2}v)(u_t^{N_k}-v)e^{-2\eta t}\,dx\,dt=\\
&=\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[f(x,t)u_t^{N_K}-u_{tt}^{N_k}u_t^{N_K}-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i}^{N_k}u_{x_jt}^{N_k}-\sum_{i=1}^n a_i(x,t)u_{x_i}^{N_k}u_t^{N_k}-\\
&-a_0(x,t)|u_t^{N_k}|^2-c(x,t)u^{N_k}u_t^{N_k}-b_1(x,t)|u_t^{N_k}|^{p_1(x)-2}u^{N_k}u_t^{N_k}\Bigg]e^{-2\eta t}\,dx\,dt-\\
&-\int\limits_{Q_\tau}b_0(x,t)[|u_t^{N_k}|^{p_0(x)-2}u_t^{N_k}v+|v|^{p_0(x)-2}v(u_t^{N_k}-v)]e^{-2\eta t}\,dx\,dt=
\end{aligned}$$

$$=\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[f(x,t)u_t^{N_K}-(\eta+a_0(x,t))|u_t^{N_k}|^2-2\eta\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i}^{N_k}u_{x_j}^{N_k}-\sum_{i=1}^n a_i(x,t)u_{x_i}^{N_k}u_t^{N_k}-$$

$$-c(x,t)u^{N_k}u_t^{N_k} - \frac{1}{p_1(x)}(2\eta b_1(x,t) - b_{1t}(x,t))|u^{N_k}|^{p_1(x)}\Bigg] e^{-2\eta t}\,dx\,dt -$$

$$-\int\limits_{\Omega_\tau}\left[\frac{1}{2}|u_t^{N_k}|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}^{N_k}u_{x_j}^{N_k} + \frac{1}{p_1(x)}b_1(x,\tau)|u^{N_k}|^{p_1(x)}\right] e^{-2\eta\tau}\,dx +$$

$$+\int\limits_{\Omega_0}\left[\frac{1}{2}|u_1^{N_k}|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{0,x_i}^{N_k}u_{0,x_j}^{N_k} + \frac{1}{p_1(x)}b_1(x,0)|u^{N_k}|^{p_1(x)}\right] dx -$$

$$-\int\limits_{Q_\tau} b_0(x,t)[|u_t^{N_k}|^{p_0(x)-2}u_t^{N_k}v + |v|^{p_0(x)-2}v(u_t^{N_k} - v)]e^{-2\eta t}\,dx\,dt. \qquad (26)$$

It is easy to show that for sufficiently large η the functional

$$J_1(u^{N_k}) = \Bigg(\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[(\eta + a_0(x,t))|u_t^{N_k}|^2 + 2\eta\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}^{N_k}u_{x_j}^{N_k} +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)u_{x_i}^{N_k}u_t^{N_k} + c(x,t)u^{N_k}u_t^{N_k}\Bigg] e^{-2\eta t}\,dx\,dt\Bigg)^{\frac{1}{2}}, \quad \tau \in (0,T]$$

is equivalent to the norm $||u^{N_k}||_{H_0^1(Q_\tau)}$ and the functional

$$J_2(u^{N_k}) = \int\limits_{Q_\tau} \frac{1}{p_1(x)}(2\eta b_1(x,t) - b_{1t}(x,t))|u^{N_k}|^{p_1(x)}e^{-2\eta t}\,dx\,dt, \quad \tau \in (0,T]$$

specifies a norm in the space $L^{p_1(x)}(Q_\tau)$ which is equivalent to the norm $||u^{N_k}||_{L^{p_1(x)}(Q_\tau)}$. Taking into account (26), (24), Lemma at the beginning of this section and Lemma 5.3 [38, p. 20], we obtain

$$0 \leqslant y_k = \int\limits_{Q_\tau}\Bigg[f(x,t)u_t - (\eta + a_0(x,t))|u_t|^2 - 2\eta\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j} -$$

$$-\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)u_{x_i}u_t - c(x,t)uu_t - \frac{1}{p_1(x)}(2\eta b_1(x,t) - b_{1t}(x,t))|u|^{p_1(x)}\Bigg] e^{-2\eta t}\,dx\,dt -$$

$$-\int\limits_{\Omega_\tau}\left[\frac{1}{2}|u_t|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j} + \frac{1}{p_1(x)}b_1(x,\tau)|u|^{p_1(x)}\right] e^{-2\eta\tau}\,dx +$$

$$+\int\limits_{\Omega_0}\left[\frac{1}{2}|u_1|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{0,x_i}u_{0,x_j} + \frac{1}{p_1(x)}b_1(x,0)|u|^{p_1(x)}\right] dx-$$

$$-\int\limits_{Q_\tau} b_0(x,t)[zv+|v|^{p_0(x)-2}v(u_t-v)]e^{-2\eta t}\,dx\,dt, \quad \forall\ v\in L^{p_0(x)}(Q_\tau). \tag{27}$$

By adding (25) and (27), we get

$$0\leqslant y_k=\int\limits_{Q_\tau} b_0(x,t)(u_t-v)(z-|v|^{p_0(x)-2}v)e^{-2\eta t}\,dx\,dt. \tag{28}$$

Suppose that $\{\tau_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ is a sequence of nonexclusive points of the function $u_t(\cdot,t)$ such that $\lim\limits_{k\to\infty}\tau_k=T$. Then from (28) for all $v\in L^{p_0(x)}(Q_T)$ we obtain the estimate

$$0\leqslant y_k=\int\limits_{Q_T} b_0(x,t)(u_t-v)(z-|v|^{p_0(x)-2}v)e^{-2\eta t}\,dx\,dt. \tag{29}$$

Let us consider the functional

$$J(v)=\int\limits_{Q_T}\frac{1}{p_0(x)}|v|^{p_0(x)}\,dx\,dt, \quad v\in L^{p_0(x)}(Q_T).$$

Since $J(u)$ is convex and its derivative in Gateaux's sense equals

$$J'(v)=\int\limits_{Q_T}|v|^{p_0(x)-2}v\ dx\,dt,$$

then according to [8, p. 169] the operator $A: L^{p_0(x)}(Q_T)\to L^{p_0'(x)}(Q_T)$ which is defined by the formula

$$\langle Av,u\rangle_1=\int\limits_{Q_T}|v|^{p_0(x)-2}vu\ dx\,dt,$$

where $\langle\ ,\ \rangle_1$ denotes the pairing between the spaces $L^{p'_0(x)}(Q_T)$, $L^{p_0(x)}(Q_T)$, is semicontinuous. Taking into account (29), we have the inequality

$$\langle z-Av,u_t-v\rangle_1\geqslant 0, \quad \forall\ u_t,\,v\in L^{p_0(x)}(Q_T). \tag{30}$$

Let us take in (30) $v=u_t-\lambda\omega$, where $\lambda>0$, $\omega\in L^{p_0(x)}(Q_T)$ are arbitrary. Passing to the limit as $\lambda\to 0$ we get

$$\langle z-Au_t,\omega\rangle_1\geqslant 0 \quad \text{for all } \omega\in L^{p_0(x)}(Q_T).$$

Let h be an arbitrary element from $L^{p_0(x)}(Q_T)$. By setting in the last inequality first $\omega=h$ and then $\omega=-h$, we obtain $z=|u_t|^{p_0(x)-2}u_t$. Thus, u is a weak solution of (1) – (3). The proof of the theorem is completed.

---

1. *Grozdena Todorova, Enzo Vitillaro.* Blow-up for nonlinear dissipative wave equations in $\mathbb{R}^n$ // J. Math. Anal. Appl.– 2005.– Vol. 303.– P. 242-257.

2. *Carlos E. Kenig, Gustavo Ponce, Luis Vega.* Global well-posedness for semi-linear wave equations // Commun. In Partial Differential Equations – 2000. – Vol. 25.– No 9-10.– P. 1741-1752.

3. *Changxing Miao, Bo Zhang.* H^s- global well-posedness for semilinear wave equations // J. Math. Anal. Appl.– 2003.– Vol. 283.– P. 645-666.

4. *Ryo Ikehata.* Improved decay rates for solutions to one-dimensional linear and semilinear dissipative wave equations in all space // J. Math. Anal. Appl.– 2003.– Vol. 277.– P. 555-570.

5. *Ryo Ikehata, Kensuke Tanizawa.* Global existence of solutions for semilinear damped wave equation in $\mathbb{R}^n$ with noncompactly supported initial data // Nonlinear Analysis – 2005.– Vol. 61.– P. 1189-1208.

6. *Hartmut Pecher.* Sharp existence results for self-similar solutions of semilinear wave equations // NoDEA.– 2000.– Vol. 7.– P. 323-341.

7. *Grozdena Todorova, Borislav Yordanov.* Critical exponent for a nonlinear wave equation with damping // J. Differential Equations – 2001.– Vol. 174.– P. 464-489.

8. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.– М., 2002.

9. *Salim A.* Blow up in a nonlinearly damped wave equation // Math. Nachr.– 2001.– Vol. 231.– P. 105-111.

10. *Ryo Ikehata.* Global existence of solutions for semilinear damped wave equation in 2-D exterior domain // J. Differential Equations – 2004.– Vol. 200.– P. 53-68.

11. *Ryo Ikehata.* Two dimensional exterior mixed problem for semilinear damped wave equations // J. Math. Anal. Appl.– 2005.– Vol. 301.– P. 366-377.

12. *Kenji Nishihara, Huijiang Zhao.* Existence and nonexistence of time-global solutions to damped wave equation on half-line // Nonlinear Analysis – 2005.– Vol. 61.– P. 931-960.

13. *Mohamed Ali Jendoubi.* Convergence of global and bounded solutions of the wave equation with linear dissipation and analytic nonlinearity // J. Differential Equations – 1998.– Vol. 144.– P. 302-312.

14. *Jorge A. Esquivel-Avila.* The dynamics of a nonlinear wave equation // J. Math. Anal. Appl.– 2003.– Vol. 279.– P. 135-150.

15. *Nedeljkov M., Oberguggenberger M., Pilipović S.* Generalized solutions to a semilinear wave equation // Nonlinear Analysis – 2005.– Vol. 61.– P. 461-475.

16. *Majdoub M.* Qualitative study of the critical wave equation with a subcritical perturbation // J. Math. Anal. Appl.– 2005.– Vol. 301.– P. 354-365.

17. *Ping Gao, Boling Guo.* The time-periodic solution for a 2D dissipative Klein-Gordon equation // J. Math. Anal. Appl.– 2004.– Vol. 296.– P. 686-694.

18. *Junhong Ha, Shin-ichi Nakagiri.* Identification problems for the damped Klein-Gordon equations // J. Math. Anal. Appl.– 2004.– Vol. 289.– P. 77-89.

19. *Isabelle Gallagher, Patrick Gérard.* Profile decomposition for the wave equation outside a convex obstacle // J. Math. Pures Appl.– 2001.– Vol. 80.– No 1.– P. 1-49.

20. *David M.A. Stuart.* Modulational approach to stability of non-topological solitons in semilinear wave equations // J. Math. Pures Appl.– 2001.– Vol. 80.– No 1.– P. 51-83.

21. *Nakao Hayashi, Elena I. Kaikina, Pavel I. Naumkin.* Damped wave equation in the subcritical case // J. Differential Equations – 2004.– Vol. 207.– P. 161-194.

22. *Takafumi Hosono, Takayoshi Ogawa.* Large time behavior and $L^p - L^q$ estimate of solutions of 2-dimensional nonlinear damped wave equations // J. Diff. Equations – 2004.– Vol. 203.– P. 82-118.

23. *Jáuber Cavalcante Oliveira, Ruy Coimbra Charão.* Stabilization of a locally damped incompressible wave equation // J. Math. Anal. Appl.– 2005.– Vol. 303.– P. 699-725.

24. *Masaru Jamaguchi.* Free and forced vibrations of nonlinear wave equations in ball // J. Differential Equations – 2004.– Vol. 203.– P. 255-291.

25. *Russell Johnson, Paolo Nistri, Mikhail Kamenski.* On periodic solutions of a damped wave equation in a thin domain using degree theoretic methods // J. Differential Equations – 1997.– Vol. 140.– P. 186-208.

26. *Louis Roder Tcheugoué Tébou.* Stabilization of the wave equation with localized nonlinear damping // J. Differential Equations – 1998.– Vol. 145.– P. 502-524.

27. *Mourad Bellassoued.* Decay of solutions of the wave equation with arbitrary localized nonlinear damping // J. Differential Equations – 2005.– Vol. 211.– P. 303-332.

28. *Jun Kato, Tohru Ozawa.* Weighted Strichartz estimates for the wave equation in even space dimensions // Math. Z.– 2004.– Vol. 247.– P. 747-764.

29. *Vladimir Varlamov.* Long-time asymptotic expansion for the damped semilinear wave equation // J. Math. Anal. Appl.– 2002.– Vol. 276.– P. 896-923.

30. *Jose Miguel Alonso, Jean Mawhin, Rafael Ortega.* Bounded solutions of second order semilinear evolution equations and applications to the telegraph equation // J. Math. Pures Appl.– 1999.– Vol. 78.– P. 49-63.

31. *Daoyuan Fang, Gilles Laschon, Alain Piriou, Varenne J. P.* Hyperbolic conormal spaces and semilinear wave equation // J. Math. Pures Appl.– 2004.– Vol. 83.– P. 699-737.

32. *Ricardo Weder.* Multidimensional inverse scattering for the nonlinear Klein-Gordon equation with a potential // J. Differential Equations – 2002.– Vol. 184.– P. 62–77.

33. *Huicheng Yin, Ingo Witt.* Global singularity structure of weak solutions to 3-D semilinear dispersive wave equations with discontinuous initial data // J. Differential Equations – 2004.– Vol. 196.– P. 134-150.

34. *Baoxiang Wang.* Nonlinear scattering theory for a class of wave equations in H^s // J. Math. Anal. Appl.– 2004.– Vol. 296.– P. 74-96.

35. *Barabash H.* The mixed problem for one semilinear hyperbolic equation in an unbounded domain // Visnyk Lviv university. Ser. Mech-Math.– 2005.– Vol. 64.– P. 7-19. (in Ukrainian)

36. *Bugrii O., Domans'ka G., Protsah N.* Initial boundary value problem for nonlinear differential equation of the third order in generalized Sobolev spaces // Visnyk Lviv university. Ser. Mech-Math.– 2005.– Vol. 64.– P. 44-61. (in Ukrainian)

37. *Kováčik O., Rákosnik J.* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$ // Czechoslovak Math. J.– 1991.– Vol. 41 (116).– P. 592-618.

38. *Gajewski H., Groger K., Zacharias K.* Nichtlineare operatorgleichungen und operatordifferentialgleichungen. – Moscow.– 1978 (in Russian).

39. *Kato T.* Perturbation theory for linear operators.– Moscow.– 1972 (in Russian).

40. *Coddington E.A., Levinson N.* Theory of ordinary differential equations.– Moscow.– 1958 (in Russian).

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ СЛАБКО НЕЛІНІЙНОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ В УЗАГАЛЬНЕНИХ ПРОСТОРАХ ЛЕБЕГА

Сергій Лавренюк, Оксана Панат

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

В обмеженій циліндричній області розглянуто мішану задачу для слабко нелінійного гіперболічного рівняння. Умови існування розв'язку такої задачі отримано в узагальнених просторах Лебега.

Ключові слова: гіперболічне рівняння, мішана задача, узагальнені простори Лебега.

Стаття надійшла до редколегії 05.01.2006

Прийнята до друку 02.11.2006

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

1. Стаття повинна містити результати нових досліджень автора з повним їхнім доведенням. Не доцільно робити великі огляди вже опублікованих результатів. Робити посилання на неопубліковані праці не можна.

2. Текст статті набирають на комп'ютері українською мовою. До редакційної колегії потрібно подавати:

два примірники статті з підписом автора (співавторів) на останній сторінці;

резюме та ключові слова українською й англійською мовами, ім'я, прізвище автора та назву статті англійською мовою (резюме повинно передавати зміст основних результатів статті, а не лише повторювати її назву);

електронний варіант статті та резюме на дискеті 3,5"(редколегія повертає авторові дискету; тексти можна надіслати за адресою *diffeqfranko.lviv.ua*);

довідка про автора (співавторів), у якій треба зазначити ім'я, по батькові та прізвище автора, місце роботи, посаду, домашню адресу, телефон та електронну адресу.

Оптимальний обсяг статті до 12 сторінок. Розмір шрифтів 10pt, висота сторінки – \vsize 19.0 true cm, ширина – \hsize 13.5 true cm. На першій сторінці потрібно зазначити номер УДК.

3. Вимоги до набору:

текст статті створювати у версії LaTeX; кодування кирилічних шрифтів „Кирилиця (Windows)" (кодова сторінка 1251);

номери формул ставити з правого боку; нумерувати лише формули, на які є посилання;

у посиланнях на теорему з монографії зазначити сторінку, на якій вона описана.

4. Рисунки до статті подавати у графічному форматі BMP чи PCX. Назва рисунка чи його номер не входять у зображення, їх потрібно створювати засобами TEX'у. Вибираючи розмір графічного зображення, належить врахувати, що воно буде надруковане на принтері з роздільною здатністю 600 dpi.

5. Літературу подавати загальним списком у порядку посилань на джерела в тексті статті.

Зразки бібліографічного опису книги, статті, препринту, дисертації, депонованого рукопису, тез доповідей конференцій (з'їздів та ін.) у працях:

1. *Грабович А.І.* Назва. – К., 1985.
2. *Кравчук О.М.* Назва// Мат. сб.–1985.–Т. 2. – В2.– С.4–20.
3. *Михайленко Г.Д.* Назва.– М., 1993.– 9 с. (Препринт/НАН України. ІППММ; N80.1).
4. *Коваленко О. В.* Назва: Автореф. дис... канд. фіз.-мат. наук. – К., 1977.
5. *Сенів С.М.* Назва.– К., 1992.– 17 с. – Деп. в ДНТБ України, В2020-1995.
6. *Муравський В.К.* Назва // Нелінійні диференціальні рівняння: Тези доп. Київ, 27 серпня – 2 вересня 1994 р. – К., 1994.– С. 540–551.