ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2007. Вип. 67. С. 30–52 *Ser. Mech.-Math. 2007. Vol. 67. P. 30–52*

УДК 517.95

ЗАДАЧА З ПОЧАТКОВОЮ УМОВОЮ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОЇ ПАРАБОЛІЧНОЇ ВАРІАЦІЙНОЇ НЕРІВНОСТІ В НЕОБМЕЖЕНІЙ ЗА ПРОСТОРОВИМИ ЗМІННИМИ ОБЛАСТІ

Олег БУГРІЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – необмежена область, $\Omega_\tau = \{(x,t) \ : \ x \in \Omega, \ t = \tau\}$, $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1, t_2)$, $p \in (1;2)$, $\mathcal{K} \subset L^p(0,T; W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})) \cap L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q_{0,T}})$ – опукла замкнена множина. Розглянуто параболічну варіаційну нерівність

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[v_t(v-u)\psi + \sum_{i=1}^n a_i|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i}[(v-u)\psi]_{x_i} + (cu-f)(v-u)\psi +$$
$$+\tfrac12\psi_t|v-u|^2\Big]dxdt \ge \tfrac12\int\limits_{\Omega_\tau}|v-u|^2\psi dx - \tfrac12\int\limits_{\Omega_0}|v-u_0|^2\psi dx,$$

де $\tau \in (0,T]$, $\psi \ge 0$ – нескінченно диференційовна функція з компактним в $\overline{Q_{0,T}}$ носієм, $v \in \mathcal{K}$, $v_t \in L^2_{\mathrm{loc}}(Q_{0,T})$ – довільні. Якщо функції $a_1, \dots, a_n$ зростають при $|x| \to \infty$ не швидше за $a^0(1+|x|^\nu)$, де $a^0, \nu > 0$, то (при певних додаткових умовах) доведено однозначну розв'язність цієї варіаційної нерівності в класі функцій $u \in \mathcal{K} \cap C([0,T]; L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))$.

Ключові слова: параболічна варіаційна нерівність, задача з початковою умовою, необмежена область.

Розглянемо в області $G = \mathbb{R}^n \times (0;T)$ задачу Коші

$$u_t - \sum_{i=1}^n (a(x)|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i})_{x_i} + b(x)|u|^{q-2}u = 0, \qquad u|_{t=0} = u_0, \qquad (*)$$

де $p, q \in (1;+\infty)$ – деякі числа. Спочатку вважатимемо, що $a \equiv 1$, $b \equiv 0$ і рівняння $(*)$ є лінійним, тобто $p, q = 2$. Тоді задача $(*)$ не може мати більше одного розв'язку в класі функцій, які задовольняють умову $|u(x,t)| \le Ce^{c|x|^2}$ з якими-небудь сталими $C, c > 0$. Відмінний від нуля розв'язок такої задачі при $u_0 = 0$, який задовольняє оцінку $|u(x,t)| \le C\exp(c|x|^{2+\varepsilon})$ з $\varepsilon > 0$ вперше побудував Тихонов А.Н. в [1]. Теклінд С. у [2] довів єдиність розв'язку цієї задачі в класі функцій, які задовольняють умову $|u(x,t)| \le e^{|x|h(|x|)}$, де h – неспадна невід'ємна функція h, для якої

$\int_1^{+\infty} \frac{ds}{h(s)} = +\infty$. Брезіс Х. та Фрідман А. в [3] довели існування та єдиність в класі $\{u : |u(x,t)| \le Ce^{a|x|}\}$ розв'язку лінійної параболічної варіаційної нерівності, що відповідає задачі $(*)$. Від функції $u_0 \ge 0$ вимагалося, щоб вона була такою мірою, для якої $\int_{\mathbb{R}^n} du_0 < +\infty$. Єдиність розв'язку загальної лінійної параболічної варіаційної нерівності в класах Тихонова визначив автор у [4].

Якщо рівняння $(*)$ є нелінійним, $n = 1$, $a, b \equiv 1$, то з результатів Калашникова А.С. ([5]) випливає існування розв'язку цієї задачі при $p > 3$, $q = 2$ в класі функцій, які задовольняють оцінку $|u_x(x,t)|^{p-2} \le C(1 + |x|^2)$, $C > 0$. Від початкової функції вимагалася така сама поведінка на нескінченності. Єдиність в цьому класі визначено при $p > 2$, $q = 2$. В [6] у класах локально інтегровних функцій визначено однозначну розв'язність задачі $(*)$ за умови $|u_0(x)| \le C|x|^{p/(p-2)}$ при $|x| \to \infty$. Там вивчено багатовимірне рівняння, яке відповідає $(*)$ з $a \equiv 1$, $b \equiv 0$, $p > 2$. Аналогічний результат у випадку $p < 2$ виявлено в [7]. У [8] без обмежень на поведінку розв'язку та вихідних даних при $|x| \to \infty$ визначено однозначну розв'язність задачі Коші для півлінійного рівняння ($p = 2$, $q > 2$). Такі самі результати отримано в [9] для задачі, яка у модельному випадку збігається із задачею $(*)$ при $a, b \equiv 1$, $p = 2$, $q > 2$, а в [10] – для нелінійного рівняння вищого порядку з лінійною головною частиною.

Перейдемо до випадку, коли коефіцієнти a, b можуть зростати при $|x| \to \infty$. В [13] визначено існування єдиного обмеженого в $\mathbb{R}_+ \times (0;T)$ розв'язку задачі, яка у частковому випадку збігається з $(*)$ при $n = 1$, $p, q = 2$, $a = x^m$, $m \ge 0$. Вимагається обмеженість u_0 та виконання додаткових умов на функцію b. В [14] розглянуто рівняння, яке узагальнює $(*)$ з $a = (1 + |x|)^\lambda$, $\lambda > 0$, $p, q = 2$. За певних умов на коефіцієнт b доведено єдиність розв'язку цієї задачі без умов на поведінку розв'язку на нескінченності. Параболічні варіаційні нерівності в необмежених областях вивчено в [15]–[19].

Мета нашої праці – довести існування та єдиність розв'язку параболічної варіаційної нерівності, яка узагальнює неоднорідне рівняння $(*)$ з $p < 2$, $q = 2$. Коефіцієнти нерівності можуть зростати при $|x| \to \infty$ не швидше за $a^0(1 + |x|^\nu)$, $a^0, \nu > 0$. Результат отримано без додаткових припущень на поведінку розв'язку та функції u_0 на нескінченності.

1. Формулювання задачі та основних результатів. Нехай $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – необмежена область з межею $\partial\Omega$ класу C^1, яка задовольняє умову: для кожного $l \in \mathbb{N}$ множина $\Omega^l = \Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < l\}$ є областю, межа якої складається з двох кусково гладких гіперповерхонь Γ_1^l і Γ_2^l таких, що $\Gamma_1^l \subset \partial\Omega$, $\mathrm{mes}_{n-1}\, \Gamma_1^l > 0$, $\mathrm{mes}_{n-1}\, \{\Gamma_2^l \cap \partial\Omega\} = 0$. Приймемо $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1;t_2)$, $Q_{t_1,t_2}^l = \Omega^l \times (t_1;t_2)$, $\Omega_\tau = \{(x,t) : x \in \Omega, t = \tau\}$, $\Omega_\tau^l = \{(x,t) : x \in \Omega^l, t = \tau\}$, $l \in \mathbb{N}$.

Для кожного $l \in \mathbb{N}$ позначимо: $\{w \in W^{1,p}(\Omega^l) : w|_{\Gamma_1^l} = 0\} \subset X^l \subset W^{1,p}(\Omega^l)$, $p \in (1;2)$, X^l – замкнений підпростір, $V^l = L^2(\Omega^l) \cap X^l$, K^l – опукла замкнена підмножина V^l, $0 \in K^l$, $U(Q_{0,T}^l) = L^2(Q_{0,T}^l) \cap L^p(0,T;X^l)$. На введені простори X^s та множини K^s, $s \in \mathbb{N}$ накладемо умову: якщо $l, s \in \mathbb{N}$, $l < s$, то звуження елементів з X^s (K^s) на Ω^l належить до простору X^l (множини K^l).

Нехай $\Psi = \{\psi \in C^\infty(\overline{Q_{0,T}}) \mid \psi \ge 0,\ \exists\, s \in \mathbb{N}\ \text{ таке, що }\ \mathrm{supp}\, \psi \subset \overline{Q_{0,T}^s}\}$,
$U_{\mathrm{loc}}(Q_{0,T}) = \{u : Q_{0,T} \to \mathbb{R} \mid u \in U(Q_{0,T}^l)\ \forall\, l \in \mathbb{N}\}$,
$\mathcal{K} = \{u \in U_{\mathrm{loc}}(Q_{0,T}) \mid u(\cdot,t) \in K^l\ \text{ для майже всіх }\ t \in (0,T)\ \text{ і }\ \forall\, l \in \mathbb{N}\}$.

Нехай функції $a_1, \ldots, a_n, c, f, u_0$ задовольняють умови:

(A): $a_i \in L^\infty_{\rm loc}(\overline{Q_{0,T}})$, $a_0 \le a_i(x,t) \le a^0(1+|x|^\nu)$ для майже всіх $(x,t) \in Q_{0,T}$, $i=\overline{1,n}$, де $a_0, a^0, \nu > 0$;

(C): $c \in L^\infty(Q_{0,T})$, $c(x,t) \ge c_0$ для майже всіх $(x,t) \in Q_{0,T}$, де $c_0 \in \mathbb{R}$;

(F): $f, f_t \in L^2_{\rm loc}(\overline{Q_{0,T}})$;

(U): $u_0 \in \mathcal{K}$, існує послідовність $\{u_0^l\}_{l\in\mathbb{N}}$ така, що для кожного $l \in \mathbb{N}$ матимемо $u_0^l \in K^l$, $u_0^l = 0$ на $\Omega \setminus \Omega^l$, $u_0^{l+1} = u_0$ на Ω^l.

Означення 1. *Функцію $u \in \mathcal{K} \cap C([0;T]; L^2_{loc}(\overline{\Omega}))$ називатимемо слабким розв'язком параболічної варіаційної нерівності*

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[v_t(v-u)\psi + \sum_{i=1}^n a_i(x,t)|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i}((v-u)\psi)_{x_i} + c(x,t)u(v-u)\psi -$$

$$- f(x,t)(v-u)\psi + \frac{1}{2}|v-u|^2\psi_t\Big]dxdt \ge \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}|v-u|^2\psi dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}|v-u_0|^2\psi dx, \quad (1.1)$$

якщо u задовольняє (1.1) для всіх $\tau \in (0;T]$, $\psi \in \Psi$, $v \in \mathcal{K}$, $v_t \in L^2_{loc}(\overline{Q_{0,T}})$.

Нехай u – слабкий розв'язок нерівності (1.1), $\psi \in \Psi$, $v \in \mathcal{K}$, $v_t \in L^2_{\rm loc}(\overline{Q_{0,T}})$. Якщо $v(\cdot,0) = u_0(\cdot)$, то з (1.1) матимемо $\int_{\Omega_\tau}|v-u|^2\psi dx \to 0$ при $\tau \to +0$, тобто $\lim\limits_{\tau\to+0} u(\cdot,\tau) = \lim\limits_{\tau\to+0} v(\cdot,\tau)$ в просторі $L^2(\Omega^l)$. Оскільки $u, v \in C([0;T]; L^2_{\rm loc}(\overline{\Omega}))$, то з отриманої рівності границь та припущення на v одержимо умову

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{для майже всіх} \quad x \in \Omega. \quad (1.2)$$

Означення 2. *Сильним розв'язком параболічної варіаційної нерівності (1.1) називатимемо слабкий розв'язок цієї нерівності, якщо він задовольняє включення $u_t \in L^2_{loc}(\overline{Q_{0,T}})$.*

Легко показати, що для сильного розв'язку нерівності (1.1) співвідношення (1.1), (1.2) еквівалентні нерівності

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[u_t(v-u)\psi + \sum_{i=1}^n a_i|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i}((v-u)\psi)_{x_i} + cu(v-u)\psi - f(v-u)\psi\Big]dxdt \ge 0$$

для всіх $\tau \in (0;T]$, $\psi \in \Psi$, $v \in \mathcal{K}$.

Приклад 1. Нехай $X^l = \{w \in W^{1,p}(\Omega^l) \,:\, w|_{\Gamma_1^l} = 0\}$ $\forall\, l \in \mathbb{N}$, $\mathcal{K} = U_{\rm loc}(Q_{0,T})$. Тоді сильний розв'язок нерівності (1.1) є узагальненим розв'язком задачі

$$u_t - \sum_{i=1}^n (a_i|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i})_{x_i} + cu = f \quad \text{в} \quad Q_{0,T}, \quad (1.3)$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0;T), \qquad u|_{t=0} = u_0, \quad (1.4)$$

(див. [15, с. 254]).

Приклад 2. Нехай $\mathcal{K} = U_{\mathrm{loc}}(Q_{0,T}) \cap \{v : v \geq 0 \text{ в } Q_{0,T}\}$. Тоді сильний розв'язок u параболічної варіаційної нерівності (1.1) задовольняє рівняння (1.3) на множині $\Phi = \{(x,t) \in Q_{0,T} \ : \ u(x,t) > 0\}$, дорівнює нулю в $Q_{0,T} \setminus \Phi$ та задовольняє умови (1.4) (див. [15, с. 293]).

Введемо позначення, які використовуватимемо далі. Норму банахового простору B позначатимемо через $||\cdot; B||$, а спряжений до B простір – B^*. Скалярний добуток між B^* та B позначатимемо $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* ***(A)****,* ***(C)*** *і*

$$1 < p < 2, \qquad n - \frac{2p}{2-p} + \frac{2\nu p}{2-p} < 0. \tag{1.5}$$

Тоді варіаційна нерівність (1.1) не може мати більше одного слабкого розв'язку.

Нехай $l \in \mathbb{N}$. Зазначимо, що з умови (1.5) та теорем вкладення Соболєва [20, с. 47] випливає, що $X^l \subset L^2(\Omega^l) \subset [X^l]^*$, і отже, $V^l = X^l$. Для майже всіх $t \in (0;T)$ визначимо оператори $A^l(t) : V^l \to [V^l]^*$ такою формулою:

$$\langle A^l(t)v^1, v^2\rangle_{V^l} = \int\limits_{\Omega_t^l} \Big[\sum_{i=1}^n a_i(x,t)|v^1_{x_i}(x)|^{p-2}v^1_{x_i}(x)v^2_{x_i}(x) + c(x,t)v^1(x)v^2(x)\Big]dx,$$

де $v^1, v^2 \in V^l$. Якщо функції $a_1, \ldots, a_n, c$ не залежать від t, то замість $A^l(t)$ доцільно писати просто A^l. Тоді можна вважати, що $A^l : U(Q^l_{0,T}) \to [U(Q^l_{0,T})]^*$ і $\langle A^l w^1, w^2\rangle_{U(Q^l_{0,T})} = \int_0^T \langle A^l w^1(t), w^2(t)\rangle_{V^l} dt$, $w^1, w^2 \in U(Q^l_{0,T})$.

Нехай $l \in \mathbb{N}$, функції $a_1, \ldots, a_n$, c не залежать від t,

$$D^l = \{v \in V^l \ : \ v|_{\Gamma_2^l} = 0\}, \quad \mathcal{D}^l = \{u \in U(Q^l_{0,T}) \ : \ u|_{\Gamma_2^l \times (0;T)} = 0\},$$

$$H^l = \{v \in W^{1,2}(\Omega) \ : \ v|_{\Gamma_2^l} = 0\}, \quad \mathcal{H}^l = \{u \in L^2(0,T; W^{1,2}(\Omega)) \ : \ u|_{\Gamma_2^l \times (0;T)} = 0\}.$$

Зрозуміло, що $H^l \subset D^l, \mathcal{H}^l \subset \mathcal{D}^l$. Визначимо оператори $E^l : D^l \to [D^l]^*$ та $G^l : H^l \to [H^l]^*$ за допомогою рівностей $\langle E^l v^1, v^2\rangle_{D^l} = \langle A^l v^1, v^2\rangle_{V^l}$, v^1, $v^2 \in D^l$, $\langle G^l z^1, z^2\rangle_{D^l} = \int_\Omega (\nabla z^1(x), \nabla z^2(x))dx$, $z^1, z^2 \in H^l$. Для спрощення вважатимемо, що оператор E^l також діє з $\mathcal{D}^l$ в $[\mathcal{D}^l]^*$, а G^l – з $\mathcal{H}^l$ в $[\mathcal{H}^l]^*$ так, що $\langle E^l w^1, w^2\rangle_{\mathcal{D}^l} = \langle A^l w^1, w^2\rangle_{U(Q^l_{0,T})}$, $\langle G^l y^1, y^2\rangle_{\mathcal{H}^l} = \int_0^T \langle G^l y^1(t), y^2(t)\rangle_{H^l} dt$ для всіх $w^1, w^2 \in \mathcal{D}^l$ та $y^1, y^2 \in \mathcal{H}^l$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* ***(A)****–****(U)****, умова (1.5),* $u_0 \in W^{2,2}_{loc}(\overline{\Omega})$, $E^l u^l_0, G^l u^l_0 \in L^2(\Omega^l)$ $\forall \ l \in \mathbb{N}$, $\mathcal{K} = U_{loc}(Q_{0,T}) \cap \{v : v \geq 0$ *майже скрізь в* $Q_{0,T}\}$, *функції* $a_1, \ldots, a_n, c$ *не залежать від* t. *Тоді параболічна варіаційна нерівність (1.1) має єдиний сильний розв'язок.*

Доводячи теореми 1 і 2, які подано у пункті 3, використано низку допоміжних тверджень. Для зручності викладення їх подано у вигляді лем та тверджень і зібрано в другому пункті.

2. Додаткові позначення та допоміжні твердження. Для спрощення викладення замість $u(\cdot, t)$ писатимемо просто $u(t)$.

Якщо функція f задовольняє умову **(F)**, то для кожного $l \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ визначимо функцію $f_l \in L^2(Q_{0,T})$ таку, що $f_{l,t} \in L^2(Q_{0,T})$,

$$f_l(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & (x,t) \in Q_{0,T}^{l-1}, \\ 0, & (x,t) \in Q_{0,T} \setminus Q_{0,T}^{l}. \end{cases}$$

Для сталих $R, \omega > 0$ і $\beta = \dfrac{3p-2}{2-p} + \omega$ визначимо зрізку Бернiса $\varphi^R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ так

$$\varphi^R(x) = \begin{cases} (\frac{R^2-|x|^2}{R})^\beta, & |x| \le R, \\ 0, & |x| > R. \end{cases} \tag{2.1}$$

Легко бачити, що для будь-яких $r \in \mathbb{R}$ та $x \in \mathbb{R}^n$, $|x| < R$, матимемо

$$\frac{|\varphi^R_{x_i}(x)|^r}{|\varphi^R(x)|^{r-1}} = \frac{|\frac{2\beta}{R^\beta} x_i (R^2-|x|^2)^{(\beta-1)}|^r}{|\frac{1}{R^\beta}(R^2-|x|^2)^\beta|^{r-1}} = \frac{(2\beta)^r}{R^\beta} \frac{|x_i|^r}{(R^2-|x|^2)^{r-\beta}}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{2.2}$$

Якщо $l > 0$, $2l < R$, то $R - |x| \ge R - l \ge R/2$ при $x \in \Omega^l$. Тому виконується оцінка $\varphi^R(x) = ((R-|x|)(R+|x|)/R)^\beta \ge (R/2)^\beta$, $x \in \Omega^l$. Крім того, очевидно, що для всіх $x \in \mathbb{R}^n$ матимемо $\varphi^R(x) \le R^\beta$. Зазначимо, що функцію з (2.1) введено в праці [10] (див. також [11], [12]).

Нехай $w^- = \max\{-w, 0\}$, $w \in \mathbb{R}$. Легко переконатися, що

$$([-r^-] - [-s^-])(r-s) \ge 0 \tag{2.3}$$

для всіх $r, s \in \mathbb{R}$. З [22, с. 99] відомо таке: якщо $v \in W^{1,p}(\Omega)$, то $v^- \in W^{1,p}(\Omega)$.

Якщо функція w визначена в циліндрі $Q_{0,T}$, то для кожного $h > 0$ позначимо $w^{+h}(x,t) = w(x,t+h)$ при $(x,t) \in Q_{0,T-h}$.

Лема 1. *Нехай $q > 1$. Тоді для всіх $r, s \in \mathbb{R}$*

$$(|r|^{q-2}r - |s|^{q-2}s)(r-s) \ge 2^{2-q}|r-s|^q, \quad \textit{якщо} \quad q \in [2, +\infty), \tag{2.4}$$

$$(|r|^{q-2}r - |s|^{q-2}s)(r-s) \le 2^{2-q}|r-s|^q, \quad \textit{якщо} \quad q \in (1; 2]. \tag{2.5}$$

Доведення. Доведення (2.4) подано в лемі 1.2 [23, с. 10]. Доведемо нерівність (2.5). При $q = 2$ ця нерівність очевидна. Нехай $q \in (1; 2)$, $r, s \in \mathbb{R}$. Не зменшуючи загальності, припустимо, що $r > s$. Тоді (2.5) перепишемо у вигляді

$$(|r|^{q-2}r - |s|^{q-2}s)(r-s)^{1-q} \le 2^{2-q}. \tag{2.6}$$

При $s = 0$ матимемо $r^{q-2}rr^{1-q} = 1 \le 2^{2-q}$. Нехай $s \ne 0$, $w = r/s$. При $s > 0$ з (2.6) отримаємо

$$(|r|^{q-2}r - |s|^{q-2}s)(r-s)^{1-q} = (w^{q-1} - 1)(w-1)^{1-q} = g_1(w), \quad w \in (1; +\infty).$$

При $s < 0$ одержимо, що

$$(|r|^{q-2}r - |s|^{q-2}s)(r-s)^{1-q} = (1 - |w|^{q-2}w)(1-w)^{1-q} = g_2(w), \quad w \in (-\infty; 1).$$

Оскільки $\sup\limits_{w \in (1;+\infty)} g_1(w) = g_1(+\infty) = 1$, $\sup\limits_{w \in (-\infty;1)} g_2(w) = g_2(-1) = 2^{2-q}$, то (2.6) правильна. Лема доведена.

Зауваження 1. Нехай $q \in (1;+\infty)$, $y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y(s) = \frac{|s|^q}{q}$, $z(s) = |s|^{q-2}s$, $s \in \mathbb{R}$. Очевидно, що $y'(s) = z(s)$ при $s \neq 0$, $y'(0) = 0$, $z'(s) = (q-1)|s|^{q-2}$ при $s \neq 0$, і, крім того, $z'(0) = 0$, якщо $q > 2$, $\lim\limits_{s\to 0} \frac{z(s)-z(0)}{s} = +\infty$, якщо $q \in (1;2)$.

Твердження 1. *Нехай $k \in \mathbb{N}$, виконуються умови **(A)–(U)** та (1.5), функції $a_1, \ldots, a_n, c$ не залежать від t, $E^k u_0^k \in L^2(\Omega^k)$. Тоді для кожного $s \in \mathbb{N}$ існує функція $z^s \in \mathcal{D}^k \cap C([0;T]; L^2(\Omega^k))$ така, що $z_t^s, E^k z^s \in L^2(Q_{0,T}^k)$ і*

$$\langle z_t^s(t) + E^k z^s(t) - s(z^s(t))^-, v\rangle_{D^k} = \langle f_k(t), v\rangle_{D^k}, \quad t \in (0;T), \quad v \in D^k, \tag{2.7}$$

$$z^s(0) = u_0^k. \tag{2.8}$$

Доведення. Використаємо метод Фаедо-Гальоркіна. Нехай множина $\{w_k^\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ є лінійно незалежною і всюди щільною в D^k, $w_k^1 = u_0^k$, якщо $u_0^k \neq 0$. Шукаємо

$$z^{s,m}(x,t) = \sum_{\mu=1}^{m} \varphi_\mu^{s,m}(t) w_k^\mu(x), \quad (x,t) \in Q_{0,T}^k, \tag{2.9}$$

де $\varphi_1^{s,m}, \ldots, \varphi_m^{s,m}$ – неперервно диференційовні розв'язки задачі Коші

$$\langle z_t^{s,m}(t) + E^k z^{s,m}(t) - s(z^{s,m}(t))^-, w_k^\mu\rangle_{D^k} = \langle f_k(t), w_k^\mu\rangle_{D^k}, t \in (0;T), \mu = \overline{1,m}, \tag{2.10}$$

$$\varphi_1^{s,m}(0) = \begin{cases} 1, & u_0^k \neq 0, \\ 0, & u_0^k = 0, \end{cases} \quad \varphi_2^{s,m}(0) = \cdots = \varphi_m^{s,m}(0) = 0. \tag{2.11}$$

Легко показати, що такі $\varphi_1^{s,m}, \ldots, \varphi_m^{s,m}$ існують (теорема Пеано) і що $z^{s,m}$ задовольняють оцінку

$$\max_{t\in[0,T]} \int_{\Omega^k} |z^{s,m}(t)|^2 dx + \int_{Q_{0,T}^k} \left[\sum_{i=1}^{n} |z_{x_i}^{s,m}|^p + |z^{s,m}|^2\right] dxdt \le C_1 \left(\int_{\Omega^k} |u_0^k|^2 dx + \int_{Q_{0,T}^k} |f_k|^2 dxdt\right), \tag{2.12}$$

де $C_1 > 0$ – стала, яка не залежить від s, m, k.

З умов **(A)**, **(C)** одержимо такі оцінки: $|a_i(x)| \le C_2(k)$, $x \in \Omega^k$, $i = \overline{1,n}$, $|c(x)| \le C_3$, $x \in \Omega$. Тоді на підставі нерівності Гельдера матимемо, що

$$\langle E^k z^{s,m}, v\rangle_{\mathcal{D}^k} = \int_{Q_{0,T}^k} \left[\sum_{i=1}^{n} a_i |z_{x_i}^{s,m}|^{p-2} z_{x_i}^{s,m} v_{x_i} + c z^{s,m} v\right] dxdt \le C_4(k) \times$$

$$\times \left(\sum_{i=1}^{n} ||z_{x_i}^{s,m}; L^p(Q_{0,T}^k)||^{p-1} \cdot ||v_{x_i}; L^p(Q_{0,T}^k)|| + ||z^{s,m}; L^2(Q_{0,T}^k)|| \cdot ||v; L^2(Q_{0,T}^k)||\right),$$

для будь-якої $v \in \mathcal{D}^k$. Взявши верхню точну грань за всіма $v \in \mathcal{D}^k$, $||v; \mathcal{D}^k|| \le 1$, та використавши оцінки (2.12), отримаємо існування сталої $C_5(k)$ такої, що для всіх s, m виконується нерівність

$$||E^k z^{s,m}; [\mathcal{D}^k]^*|| \le C_5(k). \tag{2.13}$$

З умови **(F)** матимемо, що $f_k \in C([0,T];L^2(\Omega^k))$. Тому з гладкості функцій, які є в (2.10), випливає, що в (2.10) можна взяти $t=0$, домножити на $\varphi^{s,m}_{\mu,t}(0)$ і підсумувати за $\mu=\overline{1,m}$. Оскільки $(z^{s,m}(0))^- = (u_0^k)^- = 0$, то отримана рівність набуде вигляду $\langle z_t^{s,m}(0), z_t^{s,m}(0)\rangle_{D^k} = \langle f_k(0) - E^k u_0^k, z_t^{s,m}(0)\rangle_{D^k}$. З того, що елемент $z_t^{s,m}(0)$ належить до простору $L^2(\Omega^k)$ як лінійна комбінація елементів з $L^2(\Omega^k)$, включення $f_k(0)-E^ku_0^k \in L^2(\Omega^k)$ та нерівності Гельдера випливає, що виконується оцінка $||z_t^{s,m}(0);L^2(\Omega^k)||^2 \le ||f_k(0)-E^ku_0^k;L^2(\Omega^k)||\cdot||z_t^{s,m}(0);L^2(\Omega^k)||$. Отже,

$$||z_t^{s,m}(0);L^2(\Omega^k)|| \le ||f_k(0)-E^ku_0^k;L^2(\Omega^k)||. \tag{2.14}$$

Нехай $T_1\in(0;T)$, $h\in(0;T-T_1)$, $t\in(0;T_1)$. Тоді з (2.10) одержимо рівність

$$\langle z_t^{s,m,+h} - z_t^{s,m}, w_k^\mu\rangle_{D^k} + \langle E^k z^{s,m,+h} - E^k z^{s,m}, w_k^\mu\rangle_{D^k} -$$

$$- s\langle (z^{s,m,+h})^- - (z^{s,m})^-, w_k^\mu\rangle_{D^k} = \langle f_k^{+h} - f_k, w_k^\mu\rangle_{D^k}, \quad \mu=\overline{1,m}.$$

Для спрощення запису позначимо $v^h = (z^{s,m,+h} - z^{s,m})/h$, $h\in(0;T-T_1)$, $\widetilde{a}_i(x,\eta) = a_i(x)|\eta|^{p-2}\eta$, $x\in\Omega$, $\eta\in\mathbb{R}$. Тоді функція v^h задовольняє рівність

$$\int\limits_{\Omega_t^k}\Big[v_t^h w_k^\mu + \frac{1}{h}\sum_{i=1}^n\Big(\int\limits_0^1 \frac{\partial\widetilde{a}_i(x, rz_{x_i}^{s,m,+h} + (1-r)z_{x_i}^{s,m})}{\partial r}\,dr\Big)(w_k^\mu)_{x_i} + cv^h w_k^\mu -$$

$$- \frac{s}{h}[(z^{s,m,+h})^- - (z^{s,m})^-]w_k^\mu\Big]dx = \int\limits_{\Omega_t^k}\frac{(f_k^{+h}-f_k)}{h}\,w_k^\mu dx, \quad t\in(0;T_1), \quad \mu=\overline{1,m}. \tag{2.15}$$

Легко бачити, що для кожного $i=\overline{1,n}$: $\frac{1}{h}\int_0^1 \frac{\partial\widetilde{a}_i(x,rz_{x_i}^{s,m,+h}+(1-r)z_{x_i}^{s,m})}{\partial r}\,dr = b_i v_{x_i}^h$, де $b_i(x,t,h) = \int_0^1 \frac{\partial\widetilde{a}_i(x,\eta)}{\partial\eta}\big|_{\eta=rz_{x_i}^{s,m,+h}+(1-r)z_{x_i}^{s,m}}\,dr$, $(x,t)\in Q_{0,T_1}$, $h\in(0;T-T_1)$, якщо $z_{x_i}^{s,m,+h}(x,t)\ne z_{x_i}^{s,m}(x,t)$, та $b_i=0$ в іншому випадку. Домножимо (2.15) на вираз $(\varphi_\mu^{s,m,+h} - \varphi_\mu^{s,m})/h$ і підсумуємо за $\mu=\overline{1,m}$. Матимемо

$$\int\limits_{\Omega_t^k}\Big[v_t^h v^h + \sum_{i=1}^n b_i|v_{x_i}^h|^2 + c|v^h|^2 - \frac{s}{h}[(z^{s,m,+h})^- - (z^{s,m})^-]v^h\Big]dx = \int\limits_{\Omega_t^k}\frac{(f_k^{+h}-f_k)}{h}\,v^h dx, \tag{2.16}$$

$t\in(0;T_1)$. Оскільки $\frac{\partial\widetilde{a}_i(x,\eta)}{\partial\eta} = a_i(x)(p-1)|\eta|^{p-2}\ge 0$, $x\in\Omega$, $\eta\ne0$ і четвертий доданок зліва в (2.16) невід'ємний (див. (2.3)), то з (2.16) після елементарних перетворень одержимо, що $\int_{\Omega_t^k} v_t^h v^h dx \le \int_{\Omega_t^k}|\frac{(f_k^{+h}-f_k)}{h}|^2dx + C_6\int_{\Omega_t^k}|v^h|^2dx$, де $C_6>0$ – стала, яка не залежить від h,s,m,k,T_1. Зінтегруємо останню нерівність за $t\in(0;\tau)$, де $\tau\in(0;T_1)$, та перший доданок зліва зінтегруємо частинами. Використавши лему Гронуола [20, с. 191], отримаємо, що

$$\int\limits_{\Omega_\tau^k}|v^h|^2dx \le C_7\Big(\int\limits_{\Omega^k}|v^h(0)|^2dx + \int\limits_{Q_{0,\tau}^k}\Big|\frac{(f_k^{+h}-f_k)}{h}\Big|^2dxdt\Big), \tag{2.17}$$

де $C_7 > 0$ – стала, яка не залежить від h, s, m, k, T_1. Перший доданок справа в цій нерівності при $h \to 0$ прямує до виразу $\int_{\Omega^k} |z_t^{s,m}(0)|^2 dx$, бо функції $\varphi_1^{s,m}, \ldots, \varphi_m^{s,m}$ – неперервно диференційовні. Так як і в пункті а) теореми 3 [21, с. 119] матимемо, що другий доданок прямує до $\int_{Q^k_{0,\tau}} |f_{k,t}|^2 dxdt$. Отже, права частина нерівності (2.17) рівномірно обмежена за параметром $h \in (0; T-T_1)$. Так як і в пункті б) теореми 3 [21, с. 119] маємо існування похідної $z_t^{s,m} \in L^2(Q_{0,T_1})$. Зінтегруємо (2.17) за $\tau \in (0; T_1)$, візьмемо нижню границю при $h \to +0$ та використаємо (2.14). Після незначних перетворень отримаємо

$$\int\limits_{Q^k_{0,T_1}} |z_t^{s,m}|^2 dxdt \le C_8 \left(||f_k(0) - E^k u_0^k; L^2(\Omega^k)||^2 + \int\limits_{Q^k_{0,T_1}} |f_{k,t}|^2 dxdt \right), \ \ T_1 \in (0, T), \quad (2.18)$$

де $C_8 > 0$ – стала, яка не залежить від s, m, k, T_1.

З оцінок (2.12), (2.13), (2.18) одержимо існування такої підпослідовності (нехай це буде сама $\{z^{s,m}\}_{m \in \mathbb{N}}$), що $z^{s,m} \to z^s$ $*$-слабко в $L^\infty(0, T; L^2(\Omega^k))$, слабко в $\mathcal{D}^k$ та сильно в $L^2(Q^k_{0,T})$ (див. теорему 5.1 про компактність [15, с. 70]), $E^k z^{s,m} \to \chi^{k,s}$ слабко в $[\mathcal{D}^k]^*$, $z_t^{s,m} \to z_t^s$ слабко в $L^2(Q^k_{0,T})$ при $m \to \infty$. З леми 4.1 [22, с. 98] матимемо, що $(z^{s,m})^- \to (z^s)^-$ сильно в $L^2(Q^k_{0,T})$. Як і в [15, с. 171] показуємо, що $\chi^{k,s} = E^k z^s$. Тоді функція z^s задовольняє рівняння (2.7) і умову (2.8). Оскільки $z^s \in \mathcal{D}^k \subset L^2(Q^k_{0,T})$ і $z_t^s \in L^2(Q^k_{0,T})$, то $z^s \in C([0;T]; L^2(\Omega^k))$. З рівняння (2.7) $E^k z^s \in L^2(Q^k_{0,T})$, що і завершує доведення нашого твердження.

Лема 2. *Нехай виконуються умови **(A)**, **(C)**, $k \in \mathbb{N}$, $R, \omega > 0$, $R < k$, та φ^R – функція, яка визначена в (2.1), $J(\psi) = \int_{t_1}^{t_2} \langle A^k u - A^k v, (u-v)\psi \rangle_{V^k} dt$ для деяких t_1, t_2, u, v, ψ. Тоді для довільних $u, v \in U(Q^k_{0,T})$, $\chi \in C^\infty([0;T])$, $\chi \ge 0$, та будь-яких чисел $0 \le t_1 < t_2 \le T$ виконується оцінка*

$$J(\varphi^R \chi) \ge (a_0 - \varkappa) \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \sum_{i=1}^n (|u_{x_i}|^{p-2} u_{x_i} - |v_{x_i}|^{p-2} v_{x_i})(u_{x_i} - v_{x_i}) \varphi^R \chi dxdt +$$

$$+ c_0 \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} |u-v|^2 \varphi^R \chi dxdt - P(R) \Bigg(\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} |u-v|^2 \varphi^R \chi dxdt \Bigg)^{p/2}, \quad (2.19)$$

де $\varkappa > 0$ – довільна стала, $P(R) = C_9(\varkappa, \chi) R^{(n-1+\omega)\frac{2-p}{2} + \nu p}$, $C_9(\varkappa, \chi)$ – деяка додатна стала.

Доведення. Нехай виконуються умови леми, $u, v \in U(Q^k_{0,T})$, $0 \le t_1 < t_2 \le T$. Тоді

$$J(\varphi^R \chi) \ge \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Bigg[a_0 \sum_{i=1}^n (|u_{x_i}|^{p-2} u_{x_i} - |v_{x_i}|^{p-2} v_{x_i})(u_{x_i} - v_{x_i}) + c_0 |u-v|^2 \Bigg] \varphi^R \chi dxdt - I, \quad (2.20)$$

де $I = \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \sum\limits_{i=1}^n |a_i| \cdot ||u_{x_i}|^{p-2} u_{x_i} - |v_{x_i}|^{p-2} v_{x_i}| \cdot |u - v| \cdot |\varphi^R_{x_i}| \cdot \chi \, dxdt$.

Наведемо кілька допоміжних оцінок. З нерівності (2.5) для $q = p$ і довільних $\tau, s \in \mathbb{R}$ матимемо

$$||\tau|^{p-2}\tau - |s|^{p-2}s|^{p'} = ||\tau|^{p-2}\tau - |s|^{p-2}s| \cdot ||\tau|^{p-2}\tau - |s|^{p-2}s|^{p'-1} \leq$$

$$\leq C_{10}(p)||\tau|^{p-2}\tau - |s|^{p-2}s| \cdot |\tau - s| = C_{10}(p)(|\tau|^{p-2}\tau - |s|^{p-2}s)(\tau - s), \qquad (2.21)$$

де $p' = p/(p-1)$. Зауважимо, що тут ми могли "скинути модуль", бо права частина (2.21) набуває невід'ємні значення.

Нехай $r = \frac{2p}{2-p} = 1 + \frac{p'+2}{p'-2} > 1$ $(\frac{1}{p'} + \frac{1}{2} + \frac{1}{r} = 1)$. Тоді ми можемо застосувати до I нерівність Гельдера для трьох функцій ([22, с. 75]) відповідно з показниками $p', 2, r$. Використавши (2.21) та нерівність Юнга, одержимо

$$I = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{Q^R_{t_1,t_2}} ||u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i} - |v_{x_i}|^{p-2}v_{x_i}|(\varphi^R\chi)^{1/p'} \cdot |u-v|(\varphi^R\chi)^{1/2} \times$$

$$\times \frac{|a_i| \cdot |\varphi^R_{x_i}|}{\varphi^R}(\varphi^R\chi)^{1/r} dxdt \leq \sum_{i=1}^{n}\Bigg(\int\limits_{Q^R_{t_1,t_2}} ||u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i} - |v_{x_i}|^{p-2}v_{x_i}|^{p'}\varphi^R\chi dxdt\Bigg)^{1/p'} \times$$

$$\times \Bigg(\int\limits_{Q^R_{t_1,t_2}} |u-v|^2\varphi^R\chi dxdt\Bigg)^{1/2} \cdot \Bigg(\int\limits_{Q^R_{t_1,t_2}} \frac{|a_i|^r \cdot |\varphi^R_{x_i}|^r\chi}{|\varphi^R|^{r-1}} dxdt\Bigg)^{1/r} \leq$$

$$\leq \varkappa \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{Q^R_{t_1,t_2}} (|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i} - |v_{x_i}|^{p-2}v_{x_i})(u_{x_i} - v_{x_i})\varphi^R\chi dxdt +$$

$$+ C_{11}(\varkappa)\Bigg(T\sup_{[0;T]}|\chi(t)|R^{\nu r}\int\limits_{\Omega^R}\frac{|\varphi^R_{x_i}|^r}{|\varphi^R|^{r-1}}dx\Bigg)^{p/r} \cdot \Bigg(\int\limits_{Q^R_{t_1,t_2}} |u-v|^2\varphi^R\chi dxdt\Bigg)^{p/2}, \qquad (2.22)$$

де $\varkappa > 0$ – довільне число, $C_{11}(\varkappa) > 0$ – деяка залежна від $\varkappa$ додатна стала. Використавши (2.2) і ввівши полярні координати в $\mathbb{R}^n$, одержимо

$$\int\limits_{\Omega^R} \frac{|\varphi^R_{x_i}|^r}{|\varphi^R|^{r-1}}\, dx \leq \frac{(2\beta)^r}{R^\beta} \int\limits_{|x|<R} \frac{|x_i|^r}{(R^2 - |x|^2)^{r-\beta}}\, dx \leq \frac{C_{12}}{R^\beta}\int\limits_0^R \frac{\rho^r\rho^{n-1}}{(R^2-\rho^2)^{r-\beta}}\, d\rho \leq$$

$$\leq C_{12}R^{\frac{2p}{2-p}+n-2-\frac{3p-2}{2-p}-\omega}\int\limits_0^R \frac{\rho}{(R^2-\rho^2)^{\frac{2p}{2-p}-\frac{3p-2}{2-p}-\omega}}\, d\rho =$$

$$= C_{12}R^{n-1-\omega}\int\limits_0^R \frac{\rho}{(R^2-\rho^2)^{1-\omega}}\, d\rho = C_{13}R^{n-1+\omega},$$

де C_{12}, C_{13} – деякі додатні сталі, які від R не залежать. Тому звідси та з (2.20), (2.22) і отримаємо (2.19). Лема доведена.

Отримаємо тепер певні оцінки на функції z^s, $s \in \mathbb{N}$.

Твердження 2. *Нехай виконуються умови твердження 1. Тоді для кожного* $k \in \mathbb{N}$ *послідовність функцій* $\{z^s\}_{s\in\mathbb{N}}$ *з твердження 1 є обмеженою в* $\mathcal{D}^k$, *а послідовності* $\{z^s_t\}_{s\in\mathbb{N}}$, $\{s(z^s)^-\}_{s\in\mathbb{N}}$, $\{E^k z^s\}_{s\in\mathbb{N}}$ *– обмежені в* $L^2(Q^k_{0,T})$.

Доведення. Нехай виконуються умови твердження. З (2.7) отримаємо оцінку

$$\int\limits_{\Omega^k_\tau} |z^s|^2 dx \le \int\limits_{\Omega^k} |u^k_0|^2 dx + \int\limits_{Q^k_{0,\tau}} |f_k|^2 dxdt + C_{14} \int\limits_{Q^k_{0,\tau}} |z^s|^2 dxdt, \quad \tau \in (0;T],$$

де C_{14} не залежить від s, k, τ. Тоді з леми Гронуола [20, с. 191] матимемо, що

$$\int\limits_{\Omega^k_\tau} |z^s|^2 dx \le C_{15}\biggl(\int\limits_{\Omega^k} |u^k_0|^2 dx + \int\limits_{Q^k_{0,\tau}} |f_k|^2 dxdt\biggr), \quad \tau \in (0;T].$$

Звідси та з (2.7) одержимо, що функції z^s задовольняють оцінки

$$\int\limits_{Q^k_{0,T}} \biggl[\sum_{i=1}^n |z^s_{x_i}|^p + |z^s|^2\biggr] dxdt \le C_{16}\biggl(\int\limits_{\Omega^k} |u^k_0|^2 dx + \int\limits_{Q^k_{0,T}} |f_k|^2 dxdt\biggr),$$

$$\int\limits_{Q^k_{0,T}} |(z^s)^-|^2 dxdt \le \frac{C_{16}}{s}\biggl(\int\limits_{\Omega^k} |u^k_0|^2 dx + \int\limits_{Q^k_{0,T}} |f_k|^2 dxdt\biggr), \tag{2.23}$$

де $C_{16} > 0$ – стала, яка не залежить від s, k. Візьмемо з обох частин нерівності (2.18) нижню границю при $m \to \infty$. Отримаємо

$$\int\limits_{Q^k_{0,\tau}} |z^s_t|^2 dxdt \le C_{17}\biggl(||f_k(0) - E^k u^k_0; L^2(\Omega^k)||^2 + \int\limits_{Q^k_{0,\tau}} |f_{k,t}|^2 dxdt\biggr), \quad \tau \in (0;T], \tag{2.24}$$

де $C_{17} > 0$ – стала, яка не залежить від s, k, τ.

Візьмемо в (2.7) $v = -(z^s(t))^- e^{2c_0 t}$ та зінтегруємо за $t \in (0;T)$. Матимемо

$$\langle z^s_t + E^k z^s - s(z^s)^-, -(z^s)^- e^{2c_0 t}\rangle_{\mathcal{D}^k} = \langle f_k, -(z^s)^- e^{2c_0 t}\rangle_{\mathcal{D}^k}. \tag{2.25}$$

З умови $u^k_0 \ge 0$ одержимо, що $(u^k_0)^- = 0$. Тому

$$-\int\limits_{Q^k_{0,T}} z^s_t (z^s)^- e^{2c_0 t} dxdt = \frac{1}{2}\, e^{2c_0 T} \int\limits_{\Omega^k_T} |(z^s)^-|^2 dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |(u^k_0)^-|^2 dx -$$

$$- c_0 \int\limits_{Q^k_{0,T}} |(z^s)^-|^2 e^{2c_0 t} dxdt \ge -c_0 \int\limits_{Q^k_{0,T}} |(z^s)^-|^2 e^{2c_0 t} dxdt.$$

Крім того,

$$\langle E^k z^s, -(z^s)^- e^{2c_0 t}\rangle_{\mathcal{D}^k} = \int\limits_{Q^k_{0,T}} \biggl[\sum_{i=1}^n a_i |z^s_{x_i}|^{p-2} z^s_{x_i} [-(z^s)^-]_{x_i} + c|(z^s)^-|^2\biggr] e^{2c_0 t} dxdt =$$

$$= \int\limits_{Q^k_{0,T}} \left[\sum_{i=1}^n a_i |[(z^s)^-]_{x_i}|^p + c|(z^s)^-|^2\right] e^{2c_0 t} dxdt \geq c_0 \int\limits_{Q^k_{0,T}} |(z^s)^-|^2 e^{2c_0 t} dxdt.$$

Використавши ці оцінки та нерівність Гельдера, з (2.25) отримаємо нерівність $s\int_{Q^k_{0,T}} |(z^s)^-|^2 e^{2c_0 t} dxdt \leq ||f_k e^{c_0 t}; L^2(Q^k_{0,T})|| \cdot ||(z^s)^- e^{c_0 t}; L^2(Q^k_{0,T})||$, звідки

$$||s(z^s)^-; L^2(Q^k_{0,T})|| \leq C_{18}(c_0) \cdot ||f_k; L^2(Q^k_{0,T})||. \tag{2.26}$$

З рівняння (2.7) одержимо $E^k z^s = f_k - z^s_t + s(z^s)^- \in L^2(Q^k_{0,T})$. Тому з умов теореми та оцінок (2.24), (2.26) випливає, що

$$||E^k z^s; L^2(Q^k_{0,T})||^2 \leq C_{19}(||f_k; L^2(Q^k_{0,T})||^2 + ||f_{k,t}; L^2(Q^k_{0,T})||^2 +$$

$$+ ||f_k(0) - E^k u^k_0; L^2(\Omega^k)||^2),$$

де $C_{19} > 0$ – стала, яка не залежить від k, s. Твердження доведено.

Твердження 3. *Нехай $k \in \mathbb{N}$, $k > 4$, виконуються умови твердження 1, $u^k_0 \in \in W^{2,2}(\Omega^k)$, $G^k u^k_0 \in L^2(\Omega^k)$, $\{z^s\}_{s\in\mathbb{N}}$ – послідовність з твердження 1. Тоді для сталих l, R, що задовольняють умову*

$$l, R \in \mathbb{N}, \qquad 2l < R < k-1, \tag{2.27}$$

виконується оцінка

$$\int\limits_{Q^l_{0,T}} \left[|z^s|^2 + \sum_{i=1}^n |z^s_{x_i}|^p + |z^s_t|^2 + |E^k z^s|^2\right] dxdt \leq C_{20}(R) \quad \textit{для всіх} \quad s \in \mathbb{N}, \tag{2.28}$$

де $C_{20}(R) > 0$ – стала, яка не залежить від s, k, l.

Доведення. Нехай виконуються умови твердження. Візьмемо $v = z^s \varphi^R e^{-2\lambda t}$ в (2.7) та зінтегруємо за $t \in (0;\tau)$, де φ^R визначена в (2.1), $\tau \in (0;T]$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Оскільки $\varphi^R = 0$ на $\Omega \setminus \Omega^R$, то інтегрування проводять по $Q^R_{0,\tau}$. Тому

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^R_t} |z^s|^2 \varphi^R e^{-2\lambda t} dx \Big|_{t=0}^{t=\tau} + \int\limits_0^\tau \langle E^k z^s(t), z^s(t)\varphi^R\rangle_{D^k} e^{-2\lambda t} dt +$$

$$+ \lambda \int\limits_{Q^R_{0,\tau}} |z^s|^2 \varphi^R e^{-2\lambda t} dxdt \leq \int\limits_{Q^R_{0,\tau}} f_k z^s \varphi^R e^{-2\lambda t} dxdt, \quad \tau \in (0;T]. \tag{2.29}$$

Звідси, використавши лему 2 та нерівність Юнга, одержимо оцінку

$$(2c_0 + 2\lambda) y(\tau) \leq \int\limits_{\Omega^R} |u^k_0|^2 \varphi^R dx + 2\int\limits_{Q^R_{0,\tau}} f_k z^s \varphi^R e^{-2\lambda t} dxdt + 2P(R) y^{p/2}(\tau) \leq$$

$$\leq \int\limits_{\Omega^R} |u_0^k|^2 \varphi^R dx + \int\limits_{Q_{0,\tau}^R} |f_k|^2 \varphi^R e^{-2\lambda t} dxdt + y(\tau) + 2\left(\frac{y(\tau)}{2/p} + \frac{[P(R)]^{\frac{2/p}{2/p-1}}}{\frac{2/p}{2/p-1}} \right),$$

де $y(\tau) = \int_{Q_{0,\tau}^R} |z^s|^2 \varphi^R e^{-2\lambda t} dxdt$, $\tau \in (0;T]$. Вибравши $\lambda = -2c_0 + 1$, матимемо оцінку

$$y(\tau) \leq C_{21}\left(P^{\frac{2}{2-p}}(R) + \int\limits_{\Omega^R} |u_0^k|^2 \varphi^R dx + \int\limits_{Q_{0,\tau}^R} |f_k|^2 \varphi^R dxdt \right), \quad \tau \in (0;T].$$

Оскільки $k > R+1$, то $u_0^k = u_0$, $f_k = f$ для $|x| < R$. Врахувавши вигляд $y(\tau)$ і $P(R)$, з попередньої оцінки легко отримаємо нерівність

$$\int\limits_{Q_{0,T}^R} |z^s|^2 \varphi^R dxdt \leq C_{22}\left(R^{n-1+\omega+\frac{2\nu p}{2-p}} + \int\limits_{\Omega^R} |u_0|^2 \varphi^R dx + \int\limits_{Q_{0,T}^R} |f|^2 \varphi^R dxdt \right), \tag{2.30}$$

де $C_{22} > 0$ – стала, яка не залежить від k, s, R. Оскільки l, R, k взяті з умови (2.27), то $(R/2)^\beta \leq \varphi^R(x) \leq R^\beta$ для $x \in \Omega^l$. Тоді з (2.30) одержимо, що

$$\int\limits_{Q_{0,T}^l} |z^s|^2 dxdt = (R/2)^{-\beta}(R/2)^\beta \int\limits_{Q_{0,T}^l} |z^s|^2 dxdt \leq (R/2)^{-\beta} \int\limits_{Q_{0,T}^l} |z^s|^2 \varphi^R dxdt \leq$$

$$\leq C_{23} R^{-\beta}\left(R^{n-1+\omega+\frac{2\nu p}{2-p}} + \int\limits_{\Omega^R} |u_0|^2 \varphi^R dx + \int\limits_{Q_{0,T}^R} |f|^2 \varphi^R dxdt \right).$$

Оскільки $n-1+\omega+\frac{2\nu p}{2-p}-\beta = n-1+\omega+\frac{2\nu p}{2-p}-\frac{3p-2}{2-p}-\omega = n-\frac{2p}{2-p}+\frac{2\nu p}{2-p}$ і виконується нерівність $\varphi^R \leq R^\beta$, то одержимо

$$\int\limits_{Q_{0,T}^l} |z^s|^2 dxdt \leq C_{24}\left(R^{n-\frac{2p}{2-p}+\frac{2\nu p}{2-p}} + \int\limits_{\Omega^R} |u_0|^2 dx + \int\limits_{Q_{0,T}^R} |f|^2 dxdt \right) \leq C_{25}(R). \tag{2.31}$$

Крім того, при $\lambda = 0$ з (2.29) та леми 2 матимемо

$$\int\limits_{\Omega_\tau^R} |z^s|^2 \varphi^R dx + 2(a_0 - \varkappa) \int\limits_{Q_{0,\tau}^R} \sum_{i=1}^n |z_{x_i}^s|^p \varphi^R dxdt \leq \int\limits_{\Omega^R} |u_0^k|^2 \varphi^R dx +$$

$$+ 2 \int\limits_{Q_{0,\tau}^R} f_k z^s \varphi^R dxdt - 2c_0 \int\limits_{Q_{0,\tau}^R} |z^s|^2 \varphi^R dxdt + 2P(R)\left(\int\limits_{Q_{0,\tau}^R} |z^s|^2 \varphi^R dxdt \right)^{p/2}, \quad \tau \in (0;T],$$

де $\varkappa > 0$, що разом з (2.30) дасть нерівність

$$\max_{\tau\in[0,T]} \int\limits_{\Omega_\tau^R} |z^s|^2 \varphi^R dx + \int\limits_{Q_{0,T}^R} \sum_{i=1}^n |z_{x_i}^s|^p \varphi^R dxdt \leq C_{26}(R). \tag{2.32}$$

Звідси і (2.31) одержимо оцінку

$$\max_{\tau\in[0,T]}\int\limits_{\Omega_\tau^l}|z^s|^2dx+\int\limits_{Q_{0,T}^l}\sum_{i=1}^n|z^s_{x_i}|^pdxdt\le C_{27}(R). \tag{2.33}$$

Для того щоб отримати оцінки z^s_t, розглянемо допоміжну задачу: для $\varepsilon\in(0;1]$ знайти $\zeta^\varepsilon\in\mathcal{H}^k\cap C([0;T];L^2(\Omega^k))$ таке, що $\zeta^\varepsilon(0)=u_0^k$ і

$$\langle\zeta^\varepsilon_t(t)+E^k\zeta^\varepsilon(t)-s(\zeta^\varepsilon(t))^-,v\rangle_{H^k}+\varepsilon\langle G^k\zeta^\varepsilon(t),v\rangle_{H^k}=\langle f_k(t),v\rangle_{H^k}, \tag{2.34}$$

для $t\in(0;T)$, $v\in H^k$. Зауважимо, що ця функція ζ^ε залежить і від чисел s,k, але для спрощення запису ці індекси біля ζ^ε опускатимемо. Як і в твердженнях 1 та 2 показуємо, що така функція ζ^ε існує, і, крім того, $\zeta^\varepsilon_t, E^k\zeta^\varepsilon+\varepsilon G^k\zeta^\varepsilon\in L^2(Q^k_{0,T})$. Ми отримуємо ζ^ε як границю у відповідних просторах послідовності $\{\zeta^{\varepsilon,m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ функцій вигляду (2.9), які задовольняють аналог рівностей (2.10), (2.11). Як і оцінки (2.12)-(2.14), матимемо, що

$$\int\limits_{Q_{0,T}^k}\left[\varepsilon|\nabla_x\zeta^{\varepsilon,m}|^2+\sum_{i=1}^n|\zeta^{\varepsilon,m}_{x_i}|^p+|\zeta^{\varepsilon,m}|^2\right]dxdt\le C_{28}\left(\int\limits_{\Omega^k}|u_0^k|^2dx+\int\limits_{Q_{0,T}^k}|f_k|^2dxdt\right), \tag{2.35}$$

$$||E^k\zeta^{\varepsilon,m};[\mathcal{H}^k]^*||\le C_{29}(k),\qquad ||\sqrt{\varepsilon}\,G^k\zeta^{\varepsilon,m};[\mathcal{H}^k]^*||\le C_{30}(k), \tag{2.36}$$

$$||\zeta^{\varepsilon,m}_t(0);L^2(\Omega^k)||\le||f_k(0)-E^ku_0^k-\varepsilon G^ku_0^k;L^2(\Omega^k)||\le$$
$$\le||f_k(0)-E^ku_0^k;L^2(\Omega^k)||+||G^ku_0^k;L^2(\Omega^k)||, \tag{2.37}$$

де $C_{28}>0$ – стала, яка не залежить від m,ε,s,k, а $C_{29},C_{30}>0$ – сталі, які не залежать від m,ε,s.

Нехай $T_1\in(0;T)$, $h\in(0;T-T_1)$, $t\in(0;T_1)$, $v^h=(\zeta^{\varepsilon,m,+h}-\zeta^{\varepsilon,m})/h$. З рівності (2.16) одержимо, що

$$\int\limits_{\Omega_t^k}\left[v^h_tv^h+\sum_{i=1}^n(\varepsilon+\widetilde{b}_i)|v^h_{x_i}|^2+c|v^h|^2-\frac{s}{h}[(\zeta^{\varepsilon,+h})^--(\zeta^\varepsilon)^-]v^h\right]dx=\int\limits_{\Omega_t^k}\frac{(f_k^{+h}-f_k)}{h}\,v^hdx,$$

де функції $\widetilde{b}_1,\dots,\widetilde{b}_n\ge0$ визначаються аналогічно як у твердженні 1. Далі отримуємо оцінку (2.17) для нашої функції v^h. Використавши її та попередню рівність, одержимо

$$\int\limits_{\Omega_\tau^k}|v^h|^2dx+\int\limits_{Q_{0,\tau}^k}\varepsilon|\nabla_xv^h|^2dxdt\le C_{31}\left(\int\limits_{\Omega^k}|v^h(0)|^2dx+\int\limits_{Q_{0,\tau}^k}\left|\frac{(f_k^{+h}-f_k)}{h}\right|^2dxdt\right), \tag{2.38}$$

$\tau\in(0;T_1)$, де $C_{31}>0$ – стала, яка не залежить від h,m,ε,s,k,T_1. Провівши міркування як при отриманні оцінки (2.18), матимемо існування похідних $\zeta^{\varepsilon,m}_t$, $\zeta^{\varepsilon,m}_{x_1t}$, …, $\zeta^{\varepsilon,m}_{x_nt}\in L^2(Q_{0,T_1})$. Крім того, з (2.38) і (2.37) отримаємо оцінку

$$\int\limits_{Q_{0,T_1}^k}[|\zeta^{\varepsilon,m}_t|^2+\varepsilon|\nabla_x\zeta^{\varepsilon,m}_t|^2]dxdt\le C_{32}\Big(||f_k(0)-E^ku_0^k;L^2(\Omega^k)||^2+$$

$$+\,||G^k u_0^k; L^2(\Omega^k)||^2 + \int\limits_{Q^k_{0,T_1}} |f_{k,t}|^2 dxdt\Big), \quad T_1 \in (0;T), \tag{2.39}$$

де $C_{32} > 0$ – стала, яка не залежить від $\varepsilon, s, m, k, T_1$.

Використавши лему 5.3 [20, с. 20], отримаємо, що функції ζ^ε також задовольнятимуть оцінки (2.35), (2.36), (2.39). Тому одержимо існування такої послідовності $\{\varepsilon_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, $\varepsilon_j \to +0$ при $j \to \infty$, що $\zeta^{\varepsilon_j} \to \zeta$ слабко в $\mathcal{D}^k$ та сильно в $L^2(Q^k_{0,T})$, $\zeta_t^{\varepsilon_j} \to \zeta_t$ слабко в $L^2(Q^k_{0,T})$, $E^k\zeta^{\varepsilon_j} \to \widetilde{\chi}_1$ слабко в $[\mathcal{H}^k]^*$, $\sqrt{\varepsilon_j}\zeta^{\varepsilon_j} \to \widetilde{\chi}_2$ слабко в $\mathcal{H}^k$ при $j \to \infty$. З того, що $\sqrt{\varepsilon_j}\zeta^{\varepsilon_j} \to \widetilde{\chi}_2$ і $\zeta^{\varepsilon_j} \to \zeta$, зокрема, слабко в $L^2(Q^k_{0,T})$ робимо висновок, що $\widetilde{\chi}_2 = 0$. З леми 4.1 [22, с. 98] матимемо, що $(\zeta^{\varepsilon_j})^- \to (\zeta)^-$ сильно в $L^2(Q^k_{0,T})$. Крім того, $\sqrt{\varepsilon_j}\, G^k\zeta^{\varepsilon_j} \to \widetilde{\chi}_3$ слабко в $[\mathcal{H}^k]^*$, тому $\varepsilon_j\, G^k\zeta^{\varepsilon_j} \to 0$ слабко в $[\mathcal{H}^k]^*$ при $j \to \infty$. Далі показуємо, що $\widetilde{\chi}_1 = E^k\zeta$ (див. [15, с. 171]) та те, що $\zeta = z^s$.

Нехай $j \in \mathbb{N}$, $\tau \in (0;T)$, $\delta \in (0;T-\tau)$. Візьмемо в рівності (2.34) $\varepsilon = \varepsilon_j$, а $v = \frac{1}{\delta}(\zeta^{\varepsilon_j}(t+\delta) - \zeta^{\varepsilon_j}(t))\varphi^R \in H^k$ та зінтегруємо за $t \in (0,\tau)$. Гладкість функції ζ^{ε_j} допоможе нам перейти до границі при $\delta \to +0$ і отримати рівність

$$\int\limits_{Q^R_{0,\tau}} \Big[|\zeta_t^{\varepsilon_j}|^2\varphi^R + \varepsilon_j \sum_{i=1}^n \zeta_{x_i}^{\varepsilon_j}(\zeta_{x_i\,t}^{\varepsilon_j}\varphi^R + \zeta_t^{\varepsilon_j}\varphi_{x_i}^R) + \sum_{i=1}^n a_i|\zeta_{x_i}^{\varepsilon_j}|^{p-2}\zeta_{x_i}^{\varepsilon_j}(\zeta_{x_i\,t}^{\varepsilon_j}\varphi^R + \zeta_t^{\varepsilon_j}\varphi_{x_i}^R) +$$

$$+\, c\zeta^{\varepsilon_j}\zeta_t^{\varepsilon_j}\varphi^R - s(\zeta^{\varepsilon_j})^-\zeta_t^{\varepsilon_j}\varphi^R\Big] dxdt = \int\limits_{Q^R_{0,\tau}} f\zeta_t^{\varepsilon_j}\varphi^R dxdt, \quad \tau \in (0;T].$$

Зінтегрувавши частинами (див. зауваження 1), звідси одержимо

$$\frac{\varepsilon_j}{2}\int\limits_{\Omega^R_t} \sum_{i=1}^n |\zeta_{x_i}^{\varepsilon_j}|^2\varphi^R dx\Big|_{t=0}^{t=T} + \frac{1}{p}\int\limits_{\Omega^R_t} \sum_{i=1}^n a_i|\zeta_{x_i}^{\varepsilon_j}|^p\varphi^R dx\Big|_{t=0}^{t=T} + \frac{s}{2}\int\limits_{\Omega^R_t} |(\zeta^{\varepsilon_j})^-|^2\varphi^R dx\Big|_{t=0}^{t=T} +$$

$$+\int\limits_{Q^R_{0,T}} \Big[|\zeta_t^{\varepsilon_j}|^2\varphi^R + \varepsilon_j\sum_{i=1}^n \zeta_{x_i}^{\varepsilon_j}\zeta_t^{\varepsilon_j}\varphi_{x_i}^R + \sum_{i=1}^n a_i|\zeta_{x_i}^{\varepsilon_j}|^{p-2}\zeta_{x_i}^{\varepsilon_j}\zeta_t^{\varepsilon_j}\varphi_{x_i}^R + c\zeta^{\varepsilon_j}\zeta_t^{\varepsilon_j}\varphi^R\Big] dxdt =$$

$$= \int\limits_{Q^R_{0,T}} f\zeta_t^{\varepsilon_j}\varphi^R dxdt. \tag{2.40}$$

Як і в лемі 2 візьмемо $r = \frac{2p}{2-p}$ (нагадаємо, що $\frac{1}{p'} + \frac{1}{2} + \frac{1}{r} = 1$ і тому $abc \le \frac{a^{p'}}{p'} + \frac{b^2}{2} + \frac{c^r}{r}$) і для кожного $\varkappa_1 > 0$ отримаємо

$$\Big|\sum_{i=1}^n a_i|\zeta_{x_i}^{\varepsilon_j}|^{p-2}\zeta_{x_i}^{\varepsilon_j}\zeta_t^{\varepsilon_j}\varphi_{x_i}^R\Big| \le \sum_{i=1}^n a_i\cdot|\zeta_{x_i}^{\varepsilon_j}|^{p-1}\cdot|\zeta_t^{\varepsilon_j}|\cdot\frac{|\varphi_{x_i}^R|}{\varphi^R}\cdot\varphi^R \le$$

$$\le \varkappa_1|\zeta_t^{\varepsilon_j}|^2\varphi^R + C_{33}(\varkappa_1)\Big(\sum_{i=1}^n |\zeta_{x_i}^{\varepsilon_j}|^p\varphi^R + \frac{|a_i|^r\cdot|\varphi_{x_i}^R|^r}{|\varphi^R|^{r-1}}\Big).$$

З (2.32) одержимо оцінку $\int_{Q^R_{0,T}} \sum\limits_{i=1}^{n} |\zeta^{\varepsilon_j}_{x_i}|^p \varphi^R dxdt \le C_{34}(R)$. Для кожного $\varkappa_2 > 0$ матимемо $f\zeta^{\varepsilon_j}_t \le \varkappa_2 |\zeta^{\varepsilon_j}_t|^2 + C_{35}(\varkappa_2)|f|^2$. Враховуючи ці оцінки та те, що $(\zeta^{\varepsilon_j})^-|_{t=0} = (u^k_0)^- = 0$, після елементарних перетворень з (2.40) одержимо

$$\int\limits_{Q^R_{0,T}} \left[(1-\varkappa_1-\varkappa_2)|\zeta^{\varepsilon_j}_t|^2\varphi^R + \sqrt{\varepsilon_j}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\varepsilon_j}\zeta^{\varepsilon_j}_{x_i}\zeta^{\varepsilon_j}_t\varphi^R_{x_i} + c\zeta^{\varepsilon_j}\zeta^{\varepsilon_j}_t\varphi^R\right]dxdt \le$$

$$\le \int\limits_{\Omega^R_0}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\varepsilon_j}{2}|u^k_{0,x_i}|^2 + \frac{a_i}{p}|u^k_{0,x_i}|^p\right) + \frac{s}{2}|(u^k_0)^-|^2\right]\varphi^R dx + C_{36}(\varkappa_1,\varkappa_2)\int\limits_{Q^R_{0,T}}\left[\sum_{i=1}^{n}|\zeta^{\varepsilon_j}_{x_i}|^p\varphi^R + \right.$$

$$\left. + |f|^2\varphi^R + \frac{|a_i|^r\cdot|\varphi^R_{x_i}|^r}{|\varphi^R|^{r-1}}\right]dxdt \le \int\limits_{\Omega^R_0}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\varepsilon_j}{2}|u^k_{0,x_i}|^2 + \frac{a_i}{p}|u^k_{0,x_i}|^p\right)\varphi^R dx + C_{37}(\varkappa_1,\varkappa_2,R) +$$

$$+ C_{38}(\varkappa_1,\varkappa_2)\int\limits_{Q^k_{0,T}}\left[|f|^2\varphi^R + \frac{|a_i|^r\cdot|\varphi^R_{x_i}|^r}{|\varphi^R|^{r-1}}\right]dxdt, \tag{2.41}$$

де C_{37} не залежить від ε_j, s, k, C_{38} не залежить від ε_j, s, k, R. Використовуючи оцінки (2.39), легко показати, що для кожного фіксованого $R > 0$ границя другого доданка зліва в (2.41) при $j \to \infty$ дорівнює нулю. Зрозуміло, що границя першого доданка справа в (2.41) теж дорівнює нулю. Нехай $\varkappa_1 + \varkappa_2 \in (0;1)$. Взявши з обох частин (2.41) нижню границю при $j \to \infty$ одержимо, що функція ζ (тобто z^s) задовольняє оцінку

$$\int\limits_{Q^R_{0,T}} [(1-\varkappa_1-\varkappa_2)|z^s_t|^2 + cz^s z^s_t]\varphi^R dxdt \le \frac{1}{p}\int\limits_{\Omega^R_0}\sum_{i=1}^{n} a_i|u^k_{0,x_i}|^p\varphi^R dx + C_{39}(\varkappa_1,\varkappa_2,R) +$$

$$+ C_{40}(\varkappa_1,\varkappa_2)\int\limits_{Q^k_{0,T}}\left[|f|^2 + \frac{|a_i|^r\cdot|\varphi^R_{x_i}|^r}{|\varphi^R|^{r-1}}\right]dxdt.$$

Доводячи лему 2, ми показали, що $\int_{\Omega^R}\frac{|\varphi^R_{x_i}|^r}{|\varphi^R|^{r-1}}dx \le C_{41}R^{n-1+\omega}$. Крім того, $|cz^s z^s_t\varphi^R| \le \varkappa_3|z^s_t|^2\varphi^R + C_{42}(\varkappa_3)|z^s|^2\varphi^R$, $\varkappa_3 > 0$. Тому після нескладних перетворень з попередньої нерівності та (2.30) отримаємо

$$\int\limits_{Q^R_{0,T}} |z^s_t|^2\varphi^R dxdt \le C_{43}(R). \tag{2.42}$$

Звідси і (2.31) одержимо оцінку

$$\int\limits_{Q^l_{0,T}} |z^s_t|^2 dxdt \le C_{44}(R). \tag{2.43}$$

Нехай $\tau \in (0;T]$, $w_s(\tau) = (\int_{Q^k_{0,\tau}} |s(z^s)^-|^2 \varphi^R e^{2c_0 t} dxdt)^{1/2} \neq 0$. Тоді візьмемо в рівнянні (2.7) функцію $v = -s(z^s)^- \varphi^R e^{2c_0 t}$ та зінтегруємо за $t \in (0;\tau)$. Використавши нерівність Гельдера, матимемо, що

$$-I_s(\tau) + w_s^2(\tau) \leq ||f_k \sqrt{\varphi^R} e^{c_0 t}; L^2(Q^k_{0,\tau})|| \cdot w_s(\tau), \tag{2.44}$$

де

$$I_s(\tau) = \int\limits_0^\tau \langle z^s_t(t) + E^k z^s(t), s(z^s(t))^- \varphi^R \rangle_{D^k} e^{2c_0 t} dt = s \int\limits_{Q^k_{0,\tau}} \Bigg[z^s_t (z^s)^- \varphi^R +$$
$$+ \sum_{i=1}^n a_i |z^s_{x_i}|^{p-2} z^s_{x_i} ([(z^s)^-]_{x_i} \varphi^R + (z^s)^- \varphi^R_{x_i}) - c|(z^s)^-|^2 \varphi^R \Bigg] e^{2c_0 t} dxdt.$$

Оцінимо цей інтеграл. Оскільки

$$\int\limits_{Q^k_{0,\tau}} \Bigg[z^s_t (z^s)^- + \sum_{i=1}^n a_i |z^s_{x_i}|^{p-2} z^s_{x_i} [(z^s)^-]_{x_i} - c|(z^s)^-|^2 \Bigg] \varphi^R e^{2c_0 t} dxdt =$$
$$= -\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega^R_\tau} |(z^s)^-|^2 \varphi^R e^{2c_0 \tau} dx +$$
$$+ \int\limits_{Q^R_{0,\tau}} \Bigg[-\sum_{i=1}^n a_i |[(z^s)^-]_{x_i}|^p + (c_0 - c)|(z^s)^-|^2 \Bigg] \varphi^R e^{2c_0 t} dxdt \leq 0,$$

то

$$I_s(\tau) \leq s \int\limits_{Q^R_{0,\tau}} \sum_{i=1}^n |z^s_{x_i}|^{p-1} \cdot |(z^s)^-| \cdot a_i \cdot |\varphi^R_{x_i}| e^{2c_0 t} dxdt.$$

Як і в лемі 2 отримаємо оцінку

$$I_s(\tau) \leq C_{45}(R) s \sum_{i=1}^n \Bigg(\int\limits_{Q^R_{0,\tau}} |z^s_{x_i}|^p \varphi^R dxdt \Bigg)^{1/p'} \cdot \Bigg(\int\limits_{Q^R_{0,\tau}} \frac{|a_i|^r \cdot |\varphi^R_{x_i}|^r}{|\varphi^R|^{r-1}} e^{2c_0 t} dxdt \Bigg)^{1/r} \cdot$$
$$\cdot \Bigg(\int\limits_{Q^R_{0,\tau}} |(z^s)^-|^2 \varphi^R e^{2c_0 t} dxdt \Bigg)^{1/2} = C_{45}(R) \sum_{i=1}^n \Bigg(\int\limits_{Q^R_{0,\tau}} |z^s_{x_i}|^p \varphi^R dxdt \Bigg)^{1/p'} \cdot$$
$$\cdot \Bigg(\int\limits_{Q^R_{0,\tau}} \frac{|a_i|^r \cdot |\varphi^R_{x_i}|^r}{|\varphi^R|^{r-1}} e^{2c_0 t} dxdt \Bigg)^{1/r} \cdot w_s(\tau), \quad \tau \in (0;T].$$

Тому з (2.32) та вигляду $\varphi(R)$ матимемо, що $I_s(\tau) \leq C_{46}(R) w_s(\tau)$, $\tau \in (0;T]$. Тоді з (2.44) одержимо оцінку

$$\int\limits_{Q^R_{0,T}} |s(z^s)^-|^2 \varphi^R dxdt \leq C_{47}(R). \tag{2.45}$$

Отже, $\int_{Q^l_{0,T}} |s(z^s)^-|^2 dxdt \le C_{48}(R)$.

З рівняння (2.7) отримаємо $E^k z^s = f_k - z^s_t + s(z^s)^- \in L^2(Q^k_{0,T})$. Тоді з умов теореми та оцінок (2.42), (2.45) випливає, що

$$\int\limits_{Q^R_{0,T}} |E^k z^s|^2 \varphi^R dxdt = \int\limits_{Q^R_{0,T}} |f_k - z^s_t + s(z^s)^-|^2 \varphi^R dxdt \le C_{49}(R), \qquad (2.46)$$

тому

$$\int\limits_{Q^l_{0,T}} |E^k z^s|^2 dxdt \le C_{50}(R). \qquad (2.47)$$

З оцінок (2.31), (2.33), (2.43), (2.47) матимемо (2.28). Твердження доведено.

3. Доведення основних результатів.

Доведення теореми 1. Нехай u^1, u^2 – розв'язки нерівності (1.1) з функціями f_1, u^1_0 та f_2, u^2_0 відповідно, $w = (u^1 + u^2)/2$, функція w_η є розв'язком задачі з параметром $\eta > 0$: $\eta w_{\eta t}(t) + w_\eta(t) = w(t)$, $t \in (0,T)$, $w_\eta(0) = (u^1_0 + u^2_0)/2$. З [16, с. 59] відомо, що $w_\eta \in \mathcal{K}$ та існує послідовність $\{w_{\eta_s}\}_{s\in\mathbb{N}}$ ($\eta_s \to +0$ при $s \to \infty$), яка збігається до w слабко в $U(Q^k_{0,T})$ та сильно в $L^2(Q^k_{0,T})$ для всіх $k \in \mathbb{N}$. Тому з леми 1.18 [20, с. 39] випливає існування підпослідовності (позначимо її знову $\{w_{\eta_s}\}_{s\in\mathbb{N}}$) такої, що $||w_{\eta_s}(t) - w(t); L^2(\Omega^k)|| \to 0$ при $s \to \infty$ для майже всіх $t \in (0;T)$. Оскільки w_{η_s}, $w \in C([0;T]; L^2(\Omega^k))$, то $w_{\eta_s}(t) \to w(t)$ сильно в $L^2(\Omega^k)$ для всіх $t \in (0;T)$.

Нехай $\psi \in \Psi$. Існує $l \in \mathbb{N}$ таке, що $\psi = 0$ в $Q_{0,T} \setminus Q^l_{0,T}$. Прийнявши в (1.1) $v = w_{\eta_s}$, $s \in \mathbb{N}$, $f = f_r$, $u_0 = u^r_0$, $r = 1,2$, отримаємо нерівності

$$\int\limits_0^\tau \langle A^l u^r, (w_{\eta_s} - u^r)\psi\rangle_{V^l} dt + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \left[(w_{\eta_s t} - f_r)(w_{\eta_s} - u^r)\psi + \frac{1}{2}\psi_t |w_{\eta_s} - u^r|^2\right] dxdt \ge$$
$$\ge \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |w_{\eta_s} - u^r|^2 \psi dx - \frac{1}{8}\int\limits_{\Omega_0} |u^1_0 - u^2_0|^2 \psi dx, \ \ r = 1,2.$$

Додавши ці дві нерівності, з оцінки $w_{\eta_s t}(w_{\eta_s} - w) = -\eta_s |w_{\eta_s t}|^2 \le 0$ матимемо

$$\int\limits_0^\tau [\langle A^l u^1, (w_{\eta_s} - u^1)\psi\rangle_{V^l} + \langle A^l u^2, (w_{\eta_s} - u^2)\psi\rangle_{V^l}] dt +$$
$$+ \int\limits_{Q_{0,\tau}} [-f_1(w_{\eta_s} - u^1) - f_2(w_{\eta_s} - u^2)]\psi dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{0,\tau}} [|w_{\eta_s} - u^1|^2 + |w_{\eta_s} - u^2|^2]\psi_t dxdt \ge$$
$$\ge \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} [|w_{\eta_s} - u^1|^2 + |w_{\eta_s} - u^2|^2]\psi dx - \frac{1}{4}\int\limits_{\Omega_0} |u^1_0 - u^2_0|^2 \psi dx.$$

Спрямувавши $s \to +\infty$ ($\eta_s \to +0$), отримаємо

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |u^1 - u^2|^2 \psi dx + \int\limits_0^\tau \langle A^l u^1 - A^l u^2, (u^1 - u^2)\psi\rangle_{V^l} dt \le \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} |u^1_0 - u^2_0|^2 \psi dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{Q_{0,\tau}}|u^1-u^2|^2\psi_t dxdt+\int\limits_{Q_{0,\tau}}(f_1-f_2)(u^1-u^2)\psi dxdt,\quad \tau\in(0;T]. \tag{3.1}$$

Припустимо тепер, що $f_1=f_2$, $u_0^1=u_0^2$. Візьмемо в (3.1) $\psi=\varphi^R e^{-2\lambda t}$, де $\lambda>0$ таке, що $\alpha=2c_0+2\lambda>0$. Тоді (3.1) та оцінка (2.19) з $\varkappa=a_0$ дадуть нерівність $\alpha y(\tau)\le P(R)y^{p/2}(\tau)$, де $y(\tau)=\int_{Q_{0,\tau}}|u^1-u^2|^2\varphi^R e^{-2\lambda t}dxdt$, $\tau\in(0;T]$. Тому $\alpha y^{p/2}(T)[y^{\frac{2-p}{2}}(T)-P(R)/\alpha]\le 0$, звідки отримаємо нерівність $y^{\frac{2-p}{2}}(T)\le P(R)/\alpha$, тобто,

$$\left(\int\limits_{Q_{0,T}}|u^1-u^2|^2\varphi^R e^{-2\lambda t}dxdt\right)^{\frac{2-p}{2}}\le C_{51}R^{(n-1+\omega)\frac{2-p}{2}+\nu p}, \tag{3.2}$$

де $C_{51}>0$ – стала, яка не залежить від R. Нехай $l\in\mathbb{N}$, $R\in\mathbb{R}$, $R>2l$. Ми показували, що $\varphi^R(x)\ge(R/2)^\beta$ для $x\in\Omega^l$. Тому з (3.2) одержимо оцінку

$$\int\limits_{Q_{0,T}^l}|u^1-u^2|^2dxdt\le C_{52}R^{-\beta}\int\limits_{Q_{0,T}^R}|u^1-u^2|^2\varphi^R e^{-2\lambda t}dxdt\le$$

$$\le C_{53}R^{-\frac{3p-2}{2-p}+n-1+\frac{2\nu p}{2-p}}=C_{53}R^{n-\frac{2p}{2-p}+\frac{2\nu p}{2-p}}, \tag{3.3}$$

де $C_{53}>0$ – стала, яка не залежить від R. Оскільки $n-\frac{2p}{2-p}+\frac{2\nu p}{2-p}<0$, то спрямувавши в (3.3) $R\to+\infty$, отримаємо $u^1=u^2$ майже скрізь в $Q_{0,T}^l$, $l\in\mathbb{N}$. Отже, $u^1=u^2$ майже скрізь в $Q_{0,T}$.

Доведення теореми 2. Нехай $k,l\in\mathbb{N}$, $l<k$, $w\in\mathcal{D}^k$. З наших припущень випливають вкладення $\mathcal{D}^k\subset L^2(Q_{0,T}^k)\subset[\mathcal{D}^k]^*$. Якщо $E^kw\in L^2(Q_{0,T}^k)$, то $\langle E^kw,v\rangle_{\mathcal{D}^k}=$ $=\int_{Q_{0,T}^k}E^kwv\,dxdt$, $v\in\mathcal{D}^k$. Позначимо через $E^kw|_l$ такий елемент з простору $[\mathcal{D}^l]^*$, що $\langle E^kw|_l,v\rangle_{\mathcal{D}^l}=\langle E^kw,\widetilde{v}\rangle_{\mathcal{D}^k}$ для всіх $v\in\mathcal{D}^l$. Тут $\widetilde{v}\in\mathcal{D}^k$ – продовження v нулем поза $Q_{0,T}^l$. Якщо знову $E^kw\in L^2(Q_{0,T}^k)$, то

$$\langle E^kw|_l,v\rangle_{\mathcal{D}^l}=\langle E^kw,\widetilde{v}\rangle_{\mathcal{D}^k}=\int\limits_{Q_{0,T}^k}E^kw\widetilde{v}\,dxdt=\int\limits_{Q_{0,T}^l}E^kw|_lv\,dxdt=\int\limits_{Q_{0,T}^l}E^kwv\,dxdt,$$

$v\in\mathcal{D}^l$. Тому замість $E^kw|_l$ можна писати E^kw.

Нехай $k,s\in\mathbb{N}$, $z^s=u^{k,s}$ задовольняє (2.7), (2.8). З твердження 1 випливає, що така функція $u^{k,s}\in\mathcal{D}^k$ існує. З твердження 2 матимемо обмеженість послідовності $\{u^{k,s}\}_{s\in\mathbb{N}}$ в просторі $\mathcal{D}^k$ та послідовностей $\{u_t^{k,s}\}_{s\in\mathbb{N}}$, $\{E^ku^{k,s}\}_{s\in\mathbb{N}}$, $\{s(u^{k,s})^-\}_{s\in\mathbb{N}}$ в просторі $L^2(Q_{0,T}^k)$. Тому існує підпослідовність (позначимо її так само через $\{u^{k,s}\}_{s\in\mathbb{N}}$) така, що $u^{k,s}\to u^k$ слабко в $\mathcal{D}^k$ та сильно в $L^2(Q_{0,T}^k)$, $E^ku^{k,s}\to\widetilde{\chi}^k$ слабко в $L^2(Q_{0,T}^k)$, $u_t^{k,s}\to u_t^k$ слабко в $L^2(Q_{0,T}^k)$ при $s\to\infty$.

З твердження 1 маємо, що $\int_{Q_{0,T}^k}(u_t^{k,s}+E^ku^{k,s}-s(u^{k,s})^--f_k)v\,dxdt=0$ для всіх $v\in L^2(Q_{0,T}^k)$. Прийнявши $(v-u^{k,s})\psi$ замість v, де $v\in L^2(Q_{0,T}^k)$, $\psi\in L^\infty(Q_{0,T}^k)$,

$v, \psi \geq 0$, та використавши оцінку (2.3), отримаємо нерівність

$$\int\limits_{Q_{0,T}^k} (u_t^{k,s} + E^k u^{k,s} - f_k)(v - u^{k,s})\psi\, dxdt = s \int\limits_{Q_{0,T}^k} (-v^- - [-(u^{k,s})^-])(v - u^{k,s})\psi\, dxdt \geq 0.$$

Спрямувавши $s \to \infty$, одержимо, що $\int_{Q_{0,T}^k} (u_t^k + \widetilde{\chi}^k - f_k)(v - u^k)\psi dxdt \geq 0$ для всіх $v \in L^2(Q_{0,T}^k)$, $\psi \in L^\infty(Q_{0,T}^k)$, $v, \psi \geq 0$. Приймемо $\psi \equiv 1$ та як і в [15, с. 397] покажемо, що $\widetilde{\chi}^k = E^k u^k$ і $u^k \geq 0$.

Нехай l, k, R задовольняють умову (2.27). З оцінки (2.28) матимемо

$$\int\limits_{Q_{0,T}^l} \Big[|u^{k,s}|^2 + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^{k,s}|^p + |u_t^{k,s}|^2 + |E^k u^{k,s}|^2 \Big] dxdt \leq C_{54}(R), \quad s \in \mathbb{N}.$$

де $C_{54}(R) > 0$ – стала, яка не залежить від l, k, s. Тому з леми 5.3 [20, с. 20] отримаємо

$$\int\limits_{Q_{0,T}^l} \Big[|u^k|^2 + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^k|^p + |u_t^k|^2 + |E^k u^k|^2 \Big] dxdt \leq C_{55}(R). \tag{3.4}$$

Тут $C_{55}(R) > 0$ – стала, яка не залежить від l, k, s.

Продовжимо кожну функцію u^k нулем поза область $Q_{0,T}^k$. Тоді послідовність $\{u^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ має властивість: для довільних $l \in \mathbb{N}$, функцій $v \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q_{0,T}})$, $v \geq 0$, та $\psi \in \Psi$, $\psi = 0$ на $Q_{0,T} \setminus Q_{0,T}^l$, і для всіх $k \geq l$ справджується нерівність

$$\int\limits_{Q_{0,T}^l} (u_t^k + E^k u^k - f_k)(v - u^k)\psi\, dxdt \geq 0. \tag{3.5}$$

Додамо нерівності (3.5) записані для $k \in \mathbb{N}$ та $m \in \mathbb{N}$, $k, m \geq l$. Вважатимемо, що $m \geq k > R + 1$, де $0 < R < l$. Приймемо в отриманій нерівності $v = (u^k + u^m)/2$, $\psi \in \Psi$, $\psi = 0$ на $Q_{0,T} \setminus Q_{0,T}^R$. Після нескладних перетворень одержимо, що

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_t^R} |u^k - u^m|^2 \psi dx \Big|_{t=0}^{t=\tau} + \int\limits_{Q_{0,\tau}^R} (E^k u^k - f_k)(u^k - u^m)\psi dxdt -$$

$$- \int\limits_{Q_{0,\tau}^R} (E^m u^m - f_m)(u^k - u^m)\psi dxdt - \frac{1}{2} \int\limits_{Q_{0,\tau}^R} |u^k - u^m|^2 \psi_t dxdt \leq 0, \quad \tau \in (0; T].$$

Приймемо $\psi = \varphi^R e^{-2\lambda t}$ (див. (2.1)), де $\lambda \in \mathbb{R}$. З умов на наші функції та означення оператора E^k отримаємо

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau^R} |u^k - u^m|^2 \varphi^R e^{-2\lambda\tau} dx + \int\limits_{Q_{0,\tau}^R} \Big[\sum_{i=1}^n a_i (|u_{x_i}^k|^{p-2} u_{x_i}^k - |u_{x_i}^m|^{p-2} u_{x_i}^m)[(u^k - u^m)\varphi^R]_{x_i} +$$

$$+ (c+\lambda)|u-v|^2\varphi^R\Big] e^{-2\lambda t}dxdt \leq \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^R} |u_0^k - u_0^m|^2\varphi^R dx +$$
$$+ \int\limits_{Q_{0,\tau}^R} (f_k - f_m)(u^k - u^m)\varphi^R e^{-2\lambda t}dxdt, \quad \tau \in (0;T].$$

Тоді звідси та з (2.19) і умов теореми одержимо

$$\int\limits_{\Omega_\tau^R} |u^k - u^m|^2\varphi^R e^{-2\lambda\tau}dx + 2(a_0 - \varkappa_1)\int\limits_{Q_{0,\tau}^R}\sum_{i=1}^n (|u_{x_i}^k|^{p-2}u_{x_i}^k - |u_{x_i}^m|^{p-2}u_{x_i}^m)(u_{x_i}^k -$$
$$- u_{x_i}^m)\varphi^R e^{-2\lambda t}dxdt + (2c_0 + 2\lambda - \varkappa_2)\int\limits_{Q_{0,\tau}^R} |u^k - u^m|^2\varphi^R e^{-2\lambda t}dxdt \leq$$
$$\leq 2P(R)\Bigg(\int\limits_{Q_{0,\tau}^R} |u^k - u^m|^2\varphi^R e^{-2\lambda t}dxdt\Bigg)^{p/2} +$$
$$+ \int\limits_{\Omega^R} |u_0^k - u_0^m|^2\varphi^R dx + \frac{1}{\varkappa_2}\int\limits_{Q_{0,\tau}^R} |f_k - f_m|^2\varphi^R e^{-2\lambda t}dxdt, \tag{3.6}$$

де $\varkappa_1, \varkappa_2 > 0$, $P(R)$ – стала з леми 2, залежна від $\varkappa_1, R$ та від λ. Приймемо $\varkappa_1 = a_0$, $\varkappa_2 > 0$, λ таке велике, щоб $\alpha = 2c_0 + 2\lambda - \varkappa_2 > 0$. Матимемо оцінку

$$\alpha y_{k,m}(\tau) \leq P(R) y_{k,m}^{p/2}(\tau) + \varepsilon_{k,m}, \tag{3.7}$$

де $\varepsilon_{k,m} = \int_{\Omega^R} |u_0^k - u_0^m|^2\varphi^R dx + C_{56}\int_{Q_{0,T}^R} |f_k - f_m|^2\varphi^R e^{-2\lambda t}dxdt$, $C_{56} > 0$ – стала, яка не залежить від k, m, R, $y_{k,m}(\tau) = \int_{Q_{0,\tau}^R} |u^k - u^m|^2\varphi^R e^{-2\lambda t}dxdt$. Нехай $l \in \mathbb{N}$. Задамо довільне $\varepsilon > 0$. Виберемо $R > 2l$ таким великим, що $R^{n-\frac{2p}{2-p}+\frac{2\nu p}{2-p}} < \varepsilon$. Нехай $k, m > R+1$. З умови **(U)** та вибору $\{f_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ отримаємо, що $\varepsilon_{k,m} = 0$. Як і оцінку (3.3) при доведенні теореми 1 з (3.7) одержимо

$$\int\limits_{Q_{0,T}^l} |u^k - u^m|^2 dxdt \leq C_{57}R^{n-\frac{2p}{2-p}+\frac{2\nu p}{2-p}} < C_{57}\varepsilon.$$

Тут $C_{57} > 0$ – стала, яка не залежить від l, k, m, R, ε. Отже, послідовність $\{u^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ є фундаментальною в $L^2(Q_{0,T}^l)$, тому сильно збіжною в цьому просторі до деякого $\widetilde{u}^l$. Нехай u – така функція, що $u(x,t) = \widetilde{u}^l(x,t)$ для майже всіх $(x,t) \in Q_{0,T}^l$, $l \in \mathbb{N}$. Очевидно, що така функція визначена коректно і, крім того, для всіх фіксованих $l \in \mathbb{N}$: $u^k \to u$ сильно в просторі $L^2(Q_{0,T}^l)$. Ця збіжність, разом з оцінкою (3.6), дадуть фундаментальність (і тому збіжність) послідовності $\{u^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ до u в просторі $C([0;T]; L^2(\Omega^l))$, $l \in \mathbb{N}$. Оскільки $u^k \geq 0$, то $u \geq 0$.

Отримані збіжності разом з оцінкою (3.4), рефлексивністю просторів $L^2(Q_{0,T}^k)$ та $W^{1,p}(Q_{0,T}^k)$ дадуть нам існування такої підпослідовності $\{u^{k_m}\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \{u^k\}_{k\in\mathbb{N}}$, що

$u^{k_m} \to u$ в $C([0;T];L^2(\Omega^l))$, сильно в $L^2(Q^l_{0,T})$ та слабко в $U(Q^l_{0,T})$, $u_t^{k_m} \to u_t$ слабко в $L^2(Q^l_{0,T})$, $E^{k_m}u^{k_m} \to \chi$ слабко в $L^2(Q^l_{0,T})$ при $m \to \infty$ для кожного $l \in \mathbb{N}$, де $\chi \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q_{0,T}})$.

Нехай $s \in \mathbb{N}$, $R > 0$, $R < s < k_m$. Доведемо, що для всіх $g \in U_{\mathrm{loc}}(Q_{0,T})$ та $R > 0$ виконується рівність $\langle A^s u, g\varphi^R\rangle_{U(Q^s_{0,T})} = \langle \chi, g\varphi^R\rangle_{U(Q^s_{0,T})}$. Нехай $m \in \mathbb{N}$, $w \in U_{\mathrm{loc}}(Q_{0,T})$, $Z_m = \int_{Q^R_{0,T}} E^{k_m}u^{k_m}(u^{k_m}-w)\varphi^R dxdt - \langle A^s w, (u^{k_m}-w)\varphi^R\rangle_{U(Q^s_{0,T})}$. Використавши оцінку (2.19) з $\varkappa = a_0$ одержимо, що

$$Z_m \ge c_0 \int\limits_{Q^R_{0,T}} |u^{k_m}-w|^2\varphi^R dxdt - P(R)\Bigg(\int\limits_{Q^R_{0,T}} |u^{k_m}-w|^2\varphi^R dxdt\Bigg)^{p/2}. \qquad (3.8)$$

З нерівності (3.5) ($f_{k_m} = f$ в області $Q^R_{0,T}$) матимемо оцінку

$$\int\limits_{Q^R_{0,T}} E^{k_m}u^{k_m}\ \ u^{k_m}\varphi^R dxdt \le \int\limits_{Q^R_{0,T}} (u_t^{k_m} - f)(v-u^{k_m})\varphi^R dxdt + \int\limits_{Q^R_{0,T}} E^{k_m}u^{k_m}\ \ v\varphi^R dxdt$$

для всіх $v \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q_{0,T}})$, $v \ge 0$. Тому з (3.8) та останньої оцінки матимемо

$$c_0 \int\limits_{Q^R_{0,T}} |u^{k_m}-w|^2\varphi^R dxdt - P(R)\Bigg(\int\limits_{Q^R_{0,T}} |u^{k_m}-w|^2\varphi^R dxdt\Bigg)^{p/2} \le Z_m \le$$

$$\le \int\limits_{Q^R_{0,T}} (u_t^{k_m} - f)(v-u^{k_m})\varphi^R dxdt + \int\limits_{Q^R_{0,T}} E^{k_m}u^{k_m}\ \ v\varphi^R dxdt - \int\limits_{Q^R_{0,T}} E^{k_m}u^{k_m}\ \ w\varphi^R dxdt -$$
$$- \langle A^s w, (u^{k_m}-w)\varphi^R\rangle_{U(Q^s_{0,T})}.$$

Спрямувавши $m \to \infty$, після незначних перетворень одержимо

$$c_0 \int\limits_{Q^R_{0,T}} |u-w|^2\varphi^R dxdt \le P(R)\Bigg(\int\limits_{Q^R_{0,T}} |u-w|^2\varphi^R dxdt\Bigg)^{p/2} + \int\limits_{Q^R_{0,T}} [(u_t - f)(v-u)\varphi^R +$$
$$+ \chi(v-w)\varphi^R]dxdt - \langle A^s w, (u-w)\varphi^R\rangle_{U(Q^s_{0,T})}.$$

Прийнявши $v = u$ (що законно), одержимо оцінку

$$c_0 \int\limits_{Q^R_{0,T}} |u-w|^2\varphi^R dxdt \le P(R)\Bigg(\int\limits_{Q^R_{0,T}} |u-w|^2\varphi^R dxdt\Bigg)^{p/2} + \langle \chi - A^s w, (u-w)\varphi^R\rangle_{U(Q^s_{0,T})}.$$

Приймемо тут $w = u - \lambda g$, де $\lambda > 0$, $g \in U_{\mathrm{loc}}(Q_{0,T})$, винесемо λ та поділимо на λ. Матимемо

$$c_0\lambda \int\limits_{Q^R_{0,T}} |g|^2\varphi^R dxdt \le \lambda^{p-1}P(R)\Bigg(\int\limits_{Q_{0,T}} |g|^2\varphi^R dxdt\Bigg)^{p/2} + \langle \chi - A^s(u-\lambda g), g\varphi^R\rangle_{U(Q^s_{0,T})}.$$

Спрямувавши $\lambda \to +0$, з семінеперервності оператора A^s одержимо таку нерівність $0 \leq \langle \chi - A^s u, g\varphi^R \rangle_{U(Q^s_{0,T})}$. Звідси $\langle \chi, g\varphi^R \rangle_{U(Q^s_{0,T})} = \langle A^s u, g\varphi^R \rangle_{U(Q^s_{0,T})}$ ([15, c. 172]).

Нехай $\psi \in \Psi$, $v \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q_{0,T}})$, $v \geq 0$. Візьмемо $s \in \mathbb{N}$ таке, щоб $\psi = 0$ в $Q_{0,T} \setminus Q^s_{0,T}$. Спрямувавши в (3.5) $m \to \infty$, отримаємо $\int_{Q^s_{0,\tau}} (u_t + A^s u - f)(v - u)\psi dxdt \geq 0$ для всіх $\tau \in (0;T]$. Отже, u є сильним розв'язком варіаційної нерівності (1.1). Теорема доведена.

---

1. *Тихонов А.Н.* Теоремы единственности для уравнений теплопроводности // Мат. сб. – 1935. – Т. 42, №2. – С. 199-216.
2. *Tacklind S.* Sur les class quasianalytiques des solution des equations aux derivees partielles du type parabolique // Nova acta redital societatis schientiarum uppsaliensis. – 1936. – Ser. 4. – Vol. 10, №3. – P. 3-55.
3. *Brezis H., Friedman A.* Estimates on the support of solutions of parabolic variational inequalities // Ill. J. Math. – 1976. – Vol. 20. – P. 82-97.
4. *Бугрій О.М.* Параболічні варіаційні нерівності без початкових умов: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 2001.
5. *Калашников А.С.* О задаче Коши в классах растущих функций для некоторых квазилинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // Дифференциальные уравнения. – 1973. – Т. 9, №4. – С. 682-691.
6. *Di Benedetto E., Herero M.A.* On the Cauchy problem and initial traces for a degenerate parabolic equation // Transaction of the AMS. 1989. – Vol. 314, №1. – P. 187-224.
7. *Di Benedetto E., Herero M.A.* Non-negative solutions of the evolution p-Laplacian equation. Initial traces and Cauchy problem when $1 < p < 2$ // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1990. – Vol. 111, №3. – P. 225-290.
8. *Brezis H.* Semilinear equations in $\mathbb{R}^N$ without condition at infinity // Appl. Math. and Optim. – 1984. – Vol. 12. – P. 271-282.
9. *Бокало Н.М.* Об однозначной разрешимости краевых задач для полулинейных параболических уравнений в неограниченных областях без условий на бесконечности // Сиб. мат. журн. – 1993. – Т. 34, №4. – С. 33-40.
10. *Bernis F.* Elliptic and parabolic semilinear problems without conditions at infinity // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1989. – Vol. 106, №3. – P. 217-241.
11. *Бокало Н.М.* Задача Фурье для полулинейных параболических уравнений произвольного порядка в неограниченных областях // Нелинейные граничные задачи. – 2000. – Вып. 10. – С. 9-15.
12. *Бокало М.М.* Коректність задачі Фур'є для деяких квазілінійних параболічних рівнянь в необмежених по просторових змінних областях без умов на нескінченності // Матеріали міжн. мат. конф., присвяченій пам'яті Г. Гана – Чернівці, 1995.
13. *Смирнова Г.Н.* Линейные параболические уравнения, вырождающиеся на границе области // Сиб. мат. журн. – 1963. – Т. 4, №2. – С. 343-358.
14. *Ishige K., Murata M.* An intrinsic metric approach to uniqueness of the positive Cauchy problem for parabolic equations // Mathematische zeitschrift. – 1998.– Vol. 227.– P. 313-335.
15. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейних краевых задач. – М., 1972.
16. *Панков А.А.* Ограниченные и почти периодические решения нелинейных дифференциальных операторных уравнений. – К., 1985.
17. *Лавренюк С.П.* Параболические вариационные неравенства без начальных условий // Дифференциальные уравнения. – 1996. – Т. 32, №10. – С. 1-5.

18. *Urbanska K.* Parabolic variational inequality in unbouning domain // Мат. студії. – 2003. – Т. 19, №2. – С. 165-180.
19. *Бугрій О.М.* Системи параболічних варіаційних нерівностей в необмеженій області // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1999. – Вип. 53. – С. 77-86.
20. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М., 1978.
21. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – М., 1983.
22. *Ладыженская О.А., Солонников В.А, Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М., 1967.
23. *Бокало Н.М.* О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений // Труды семинара им. И.Г. Петровского. – 1989. – Вып. 14. – С. 3-44.

INITIAL-VALUE PROBLEM FOR NONLINEAR PARABOLIC VARIATIONAL INEQUALITY IN UNBOUNDED WITH RESPECT TO THE SPACE VARIABLES DOMAIN

Oleh BUHRII

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1

Let $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a unbounded domain, $\Omega_\tau = \{(x,t) : x \in \Omega, t = \tau\}$, $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1;t_2)$, $\mathcal{K} \subset L^p(0,T;W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})) \cap L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q_{0,T}})$ be a closure convex subset, $p \in (1;2)$. We seek the function $u \in \mathcal{K} \cap C([0;T];L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))$ such that u satisfies the parabolic variational inequality

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[v_t(v-u)\psi + \sum_{i=1}^{n} a_i|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i}[(v-u)\psi]_{x_i} + (cu-f)(v-u)\psi +$$
$$+\frac{1}{2}\psi_t|v-u|^2\Big]dxdt \ge \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |v-u|^2\psi dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} |v-u_0|^2\psi dx$$

for all test function v and for all $\tau \in (0,T]$ and arbitrary test functions $\psi \ge 0$, v. We suppose that $u_0 \in W^{2,2}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $f, f_t \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q_{0,T}})$, coefficients $a_1,\dots,a_n$ may increase if $|x| \to \infty$. If some additional conditions are satisfied then we prove that our variational inequality has a unique solution.

Key words: parabolic variational inequality, initial-value problem, unbounded domain.

Стаття надійшла до редколегії 26.12.2003

Прийнята до друку 24.10.2007