УДК УДК 517.53

ПРО ЦІЛІ ФУНКЦІЇ З p-ЛИСТИМИ В ОДИНИЧНОМУ КРУЗІ ПОХІДНИМИ

Олександр ВОЛОХ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1

Теореми С. Шаха і М.М. Шеремети про цілі функції з однолистими в одиничному крузі похідними узагальнено для цілих функцій з p-листими похідними.

Ключові слова: цілі функції, аналітичні в одиничному крузі функції, p-листі функції.

1. Досліджуючи цілі функції з однолистими в одиничному крузі $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ похідними, С. Шах [1] довів таку теорему.

Теорема A. *Якщо функція* $f(z) = z + \sum\limits_{k=2}^{\infty} f_k z^k$ *і всі її похідні аналітичні й однолисті в* $\mathbb{D}$, *то* f *– ціла функція експоненціального типу.*

Той самий автор в [1] висловив таке припущення.

Гіпотеза 1. *Нехай* (n_k) *– зростаюча послідовність натуральних чисел, а функція* f *і всі її похідні* $f^{(n_k)}$ *аналітичні і однолисті в крузі* $\mathbb{D}$. *Якщо* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{n_k} = +\infty$, *то* f *– ціла функція.*

Цю гіпотезу спростував М.М. Шеремета [2], який довів [2]–[3] таку теорему.

Теорема B. *Нехай* (n_j) *– зростаюча послідовність натуральних чисел і* $n_0 = 0$. *Для того, щоб для кожної аналітичної в* $\mathbb{D}$ *функції* f *з однолистості в* $\mathbb{D}$ *всіх похідних* $f^{(n_j)}$ *випливало, що* f *– ціла функція, необхідно і достатньо, щоб послідовність* (n_j) *задовольняла умову*

$$\lim_{j\to\infty} \left\{ \ln n_j - \frac{1}{n_j} \sum_{s=1}^{j} (n_s - n_{s-1}) \ln(n_s - n_{s-1}) \right\} = +\infty. \tag{1}$$

Мета нашої праці – показати, що теореми A (С. Шаха) і B (М.М. Шеремети) залишаються правильними і для функцій з p-листими у середньому похідними.

2. Узагальнення теореми С. Шаха. Нехай функція $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k z^k$ аналітична в крузі $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$, а $n(w)$ – кількість коренів рівняння $f(z) = w$ в цьому крузі. Функція f називається p-листою ($p \in \mathbb{N}$) в $\mathbb{D}$, якщо $n(w) \le p$ для всіх $w \in \mathbb{C}$ і $n(w_0) = p$ для деякого $w_0 \in \mathbb{C}$.

Як і в [4, с. 26, 33] приймемо

$$p(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} n(\rho e^{i\theta}) d\theta$$

і

$$W(R) = \int\limits_0^R p(\rho) d(\rho^2) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^R n(\rho e^{i\theta}) \rho d\rho d\theta.$$

Якщо $W(R) \le pR^2$ ($p > 0$) для всіх $R \in (0, +\infty)$, то f називається у середньому p-листою в крузі $\mathbb{D}$. Зрозуміло таке: якщо функція f є p-листою в крузі $\mathbb{D}$, то вона в цьому крузі є у середньому p-листою. З іншого боку, існують (див., наприклад, [4, с. 48]) p-листі у середньому функції, які не є p-листими.

Відомо [4, с. 65] таке: якщо f є у середньому p-листою функцією в $\mathbb{D}$, то для всіх $k \in \mathbb{N}$ правильні оцінки

$$|f_k| \le \begin{cases} Q_p \mu_p k^{2p-1}, & p > 1/4, \\ Q_p |f_0| k^{-1/2} \ln(k+1), & p = 1/4, \\ Q_p |f_0| k^{-1/2} \ln^{1/2}(k+1), & 0 < p < 1/4, \end{cases}$$

де $Q_p = (p+2) 2^{3p-1} \exp\{p\pi^2 + 1/2\}$ і $\mu_p = \max\{|a_\nu| : \nu \le p\}$. Зрозуміло, якщо функція f у середньому p_1-листа і $p \ge p_1$, то f є у середньому p-листою. Тому можемо вважати, що $p \in \mathbb{N}$ і використовувати тільки першу з наведених оцінок, тобто

$$|f_k| \le Q_p \max\{|a_\nu| : \nu \le p\} k^{2p-1} \quad (k \ge 1). \tag{2}$$

Використовуючи цю оцінку, спочатку доведемо таке узагальнення теореми С. Шаха.

Теорема 1. *Якщо аналітична в $\mathbb{D}$ функція f і всі її похідні у середньому p-листі функції в $\mathbb{D}$, то f — ціла функція експоненціального типу.*

Доведення. Оскільки похідна

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!} f_{n+k} z^k$$

є у середньому p-листою в $\mathbb{D}$ функцією, то з огляду на нерівність (2) маємо

$$\frac{(n+k)!}{k!} |f_{n+k}| \le Q_p k^{2p-1} \max\left\{ \frac{(\nu+n)!}{\nu!} |f_{\nu+n}| : \nu \le p \right\} =$$

$$= Q_p k^{2p-1} \max\left\{ \frac{(n+p)!}{p!}|f_{n+p}|, \quad \frac{(n+p-1)!}{(p-1)!}|f_{n+p-1}|, \dots, \frac{n!}{0!}|f_n| \right\}.$$

Звідси для $k = p+1$ отримуємо

$$|f_{n+p+1}| \le Q_p (p+1)^{2p-1}(p+1)! \max\left\{ \frac{|f_{n+p}|}{n+p+1}, \frac{|f_{n+p-1}|}{(n+p+1)(n+p)}, \dots, \right.$$

$$\left. \frac{|f_{n+1}|}{(n+p+1)\dots(n+2)}, \frac{|f_n|}{(n+p+1)\dots(n+1)} \right\}.$$

Отже, для всіх $k \ge p$

$$|f_{k+1}| \le \frac{B_p}{k+1} \max\left\{ |f_k|, \frac{|f_{k-1}|}{k}, \dots, \frac{|f_{k-p+1}|}{k\dots(k-p+2)}, \frac{|f_{k-p}|}{k\dots(k-p+1)} \right\},$$

де $B_p = Q_p(p+1)^{2p-1}(p+1)!$ Використовуючи цю нерівність, індуктивно отримуємо

$$|f_{k+1}| \le \frac{B_p}{k+1} \max\left\{ \frac{B_p}{k} \max\left\{ |f_{k-1}|, \frac{|f_{k-2}|}{k-1}, \dots, \frac{|f_{k-1-p}|}{(k-1)\dots(k-p)} \right\}, \right.$$

$$\left. \frac{|f_{k-1}|}{k}, \dots, \frac{|f_{k-p+1}|}{k\dots(k-p+2)}, \frac{|f_{k-p}|}{k\dots(k-p+1)} \right\} =$$

$$= \frac{B_p^2}{(k+1)k} \max\left\{ |f_{k-1}|, \frac{|f_{k-2}|}{k-1}, \dots, \frac{|f_{k-1-p}|}{(k-1)\dots(k-p)} \right\} \le \dots \le$$

$$\le \frac{B_p^{k-p+1}}{(k+1)k\dots(p+1)} \max\left\{ |f_p|, \frac{|f_{p-1}|}{p}, \dots, \frac{|f_1|}{p!}, \frac{|f_0|}{p!} \right\} = C_p \frac{B_p^k}{(k+1)!},$$

де $C_p = \mathrm{const} > 0$. З останньої нерівності випливає, що f – ціла функція експоненціального типу, який не перевищує B_p. Теорему 1 доведено.

3. Аналог теореми М. Шеремети. Припустимо тепер, що не всі $f^{(n)}$ у середньому p-листі функції в $\mathbb{D}$, але існує зростаюча послідовність (n_j) така, що всі $f^{(n_j)}$ у середньому p-листі функції в $\mathbb{D}$. Вважатимемо, що $n_0 = 0$. Тоді, як було показано вище, для всіх $k \ge 1$ і $j \ge 0$

$$|f_{n_j+k}| \le Q_p \frac{k^{2p-1}k!}{(n_j+k)!} \max\left\{ \frac{(n_j+\nu)!}{\nu!}|f_{n_j+\nu}| : \nu \le p \right\}. \tag{3}$$

Зокрема,

$$|f_{n_j+\nu}| = |f_{n_{j-1}+n_j-n_{j-1}+\nu}| \le Q_p \frac{(n_j-n_{j-1}+\nu)^{2p-1}(n_j-n_{j-1}+\nu)!}{(n_j+\nu)!} \times$$

$$\times \max_{0\le\mu\le p} \left\{ \frac{(n_{j-1}+\mu)!}{\mu!}|f_{n_{j-1}+\mu}| \right\}. \tag{4}$$

Нехай $1 \le m \le n_{j+1} - n_j$. Тоді з (3) і (4) маємо

$$|f_{n_j+m}| \le Q_p \frac{m^{2p-1}m!}{(n_j+m)!} \max_{0\le\nu\le p} \left\{ \frac{(n_j+\nu)!}{\nu!} Q_p \frac{(n_j-n_{j-1}+\nu)^{2p-1}(n_j-n_{j-1}+\nu)!}{(n_j+\nu)!} \right\} \times$$

$$\times \max_{0\le\mu\le p}\left\{\frac{(n_{j-1}+\mu)!}{\mu!}|f_{n_{j-1}+\mu}|\right\}$$

і, оскільки $\dfrac{(m+\nu)!}{\nu!}\le\dfrac{(m+p)!}{p!}$ для всіх $m>1$ і $0\le\nu\le p$, то

$$|f_{n_j+m}|\le\frac{Q_p^2}{p!}\frac{m^{2p-1}m!(n_j-n_{j-1}+p)^{2p-1}(n_j-n_{j-1}+p)!}{(n_j+m)!}\times$$

$$\times \max_{0\le\nu\le p}\left\{\frac{(n_{j-1}+\nu)!}{\nu!}|f_{n_{j-1}+\nu}|\right\}.$$

Застосовуючи до $|f_{n_{j-1}+\nu}|$ нерівність (4), звідси, як вище, отримуємо

$$|f_{n_j+m}|\le\frac{Q_p^3}{(p!)^2}\frac{m^{2p-1}m!}{(n_j+m)!}(n_j-n_{j-1}+p)^{2p-1}(n_j-n_{j-1}+p)!\times$$

$$\times(n_{j-1}-n_{j-2}+p)^{2p-1}(n_{j-1}-n_{j-2}+p)!\max_{0\le\nu\le p}\left\{\frac{(n_{j-2}+\nu)!}{\nu!}|f_{n_{j-2}+\nu}|\right\}$$

і, продовжуючи процес, приходимо до правильної для всіх $j\ge 0$, всіх $1\le m\le n_{j+1}-n_j$ і деякої додатної сталої B_p нерівності

$$|f_{n_j+m}|\le B_p\left(\frac{Q_p}{p!}\right)^j\frac{m^{2p-1}m!}{(n_j+m)!}\prod_{s=1}^{j}(n_s-n_{s-1}+p)^{2p-1}\prod_{s=1}^{j}(n_s-n_{s-1}+p)! \qquad (5)$$

Нерівність (5) буде використано у доведенні такого аналогу теореми М.М. Шеремети.

Теорема 2. *Нехай (n_j) – зростаюча послідовність натуральних чисел і $n_0=0$. Для того, щоб для кожного $p\in(0,+\infty)$ і кожної аналітичної в $\mathbb{D}$ функції f з p-листості у середньому в $\mathbb{D}$ всіх похідних $f^{(n_j)}$ випливало, що f – ціла функція, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова (1).*

Доведення. В [2] показано таке: якщо умова (1) не виконується, то існує аналітична в $\mathbb{D}$ функція f, яка не є цілою, але всі похідні $f^{(n_j)}$ однолисті в $\mathbb{D}$ функції. Звідси випливає необхідність умови (1) і теореми 2.

Доведемо достатність умови (1). З (5) для $j\ge 0$ і $1\le m\le n_{j+1}-n_j$ отримуємо

$$\frac{1}{n_j+m}\ln\frac{1}{|f_{n_j+m}|}\ge-\frac{\ln B_p+j(\ln Q_p-\ln p!)+(2p-1)\ln m}{n_j+m}+$$

$$+\frac{\ln(n_j+m)!}{n_j+m}-\frac{\ln m!}{n_j+m}-\frac{2p-1}{n_j+m}\sum_{s=1}^{j}\ln(n_s-n_{s-1}+p)-$$

$$-\frac{1}{n_j+m}\sum_{s=1}^{j}\ln(n_s-n_{s-1}+p)! \qquad (6)$$

Зрозуміло, що перший доданок у правому боці (6) є обмеженою величиною. Далі, використовуючи формулу Стірлінга $n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\exp\{-\theta_n/(12n)\}$, $0<\theta_n<1$, маємо

$$\frac{\ln(n_j+m)!}{n_j+m} = \ln(n_j+m)+O(1), \quad \frac{\ln m!}{n_j+m} = \frac{m\ln m}{n_j+m}+O(1)$$

при $j\to\infty$ і

$$\ln(n_s-n_{s-1}+p)! =$$
$$= (n_s-n_{s-1}+p)\ln(n_s-n_{s-1}+p)+\frac{1}{2}\ln(n_s-n_{s-1}+p)+O(1)\geq$$
$$\geq (n_s-n_{s-1})\ln(n_s-n_{s-1})+\frac{2p+1}{2}\ln(n_s-n_{s-1}+p)+O(1)$$

при $s\to\infty$. Зауваживши ще, що $\sum\limits_{s=1}^{j}\ln(n_s-n_{s-1}+p)\leq n_j+jp$, з (6), отримуємо нерівність

$$\frac{1}{n_j+m}\ln\frac{1}{|f_{n_j+m}|}\geq\frac{1}{n_j+m}\{(n_j+m)\ln(n_j+m)-m\ln m-A_j\}+O(1),\ j\to\infty, \quad (7)$$

для всіх $1\leq m\leq n_{j+1}-n_j$, де $A_j=\sum\limits_{s=1}^{j}(n_s-n_{s-1})\ln(n_s-n_{s-1})$.

Розглянемо функцію

$$\Phi(x)=\frac{1}{n_j+x}\{(n_j+x)\ln(n_j+x)-x\ln x-A_j\},\quad 1\leq x\leq n_{j+1}-n_j.$$

Оскільки $\Phi'(x)=(A_j-n_j\ln x)/(n_j+x)^2$, то на $[1,+\infty)$ функція Φ має єдину точку екстремуму $x=\exp\{A_j/n_j\}$, яка є точкою максимуму. Тому $\min\{\Phi(x): 1\leq x\leq \leq n_{j+1}-n_j\}=\min\{\Phi(1),\Phi(n_{j+1}-n_j)\}$, а з (7) випливає, що для всіх $1\leq m\leq n_{j+1}-n_j$

$$\frac{1}{n_j+m}\ln\frac{1}{|f_{n_j+m}|}\geq\min\left\{\frac{1}{n_j+1}\left((n_j+1)\ln(n_j+1)-A_j\right),\right.$$
$$\left.\frac{1}{n_{j+1}}\left(n_{j+1}\ln n_{j+1}-(n_{j+1}-n_j)\ln(n_{j+1}-n_j)-A_j\right)\right\}+O(1)\geq$$
$$\geq\min\left\{\ln n_j-\frac{A_j}{n_j},\ \ln n_{j+1}-\frac{A_{j+1}}{n_{j+1}}\right\}+O(1),\quad j\to\infty.$$

З огляду на умову (1), випливає, що $\frac{1}{k}\ln\frac{1}{|f_k|}\to+\infty$, $k\to\infty$, тобто f – ціла функція. Теорему 2 доведено.

1. *Shah S.M.* Analytic functions with univalent derivatives and entire functions of exponential type // Bull. Amer. Math. Soc. – 1972. – Vol. 78, No 2. – P. 29-38.
2. *Шеремета М.М.* Спростування однієї гіпотези Шаха про однолисті функції // Матем. студії. – 1993. – Вип. 2 – С. 46-48.

3. *Шеремета М.Н.* О целых функциях с однолистными в круге производными // Укр. мат. журн. – 1991. – Т. 43, №3. – С. 400-406.
4. *Хейман В.К.* Многолистные функции. – М., 1960.

ON ENTIRE FUNCTIONS WITH P-VALENT DERIVATIVES IN THE UNIT DISK

Oleksandr VOLOKH

*Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1*

Theorems of S. Shah and of M.M. Sheremeta on entire functions with univalent in the unit disk derivatives are generalized for entire functions with p-valent derivatives.

Key words: entire functions, analytic functions in the unit disk, p-valent functions.

Стаття надійшла до редколегії 26.04.2006

Прийнята до друку 24.10.2007