УДК 519.2

ВЛАСТИВОСТІ ЗЛІЧЕННОВИМІРНИХ МАТРИЧНИХ МІР

Тарас ЗАБОЛОЦЬКИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1

Доведено властивості зліченновимірних матричних мір, які використовують під час дослідження асимптотичного поводження розв'язку рівняння відновлення.

Ключові слова: матрична міра, перетворення Фур'є.

Нехай $G_{ij}^{\varepsilon}(dx)$, $i,j \in \mathbb{N}$, – сім'я комплекснозначних мір на $\mathbb{R}_+$ така, що $G_{ij}^{\varepsilon}(dx) = 0$ при $j > i$, $V_{ij}^{\varepsilon}(dx)$ – варіація міри $G_{ij}^{\varepsilon}(dx)$, $V_{\varepsilon}(dx) = (V_{ij}^{\varepsilon}(dx))_{i,j=1}^{\infty}$, $G_{\varepsilon}(dx) = (G_{ij}^{\varepsilon}(dx))_{i,j=1}^{\infty}$.

Приймемо $m_i = \int\limits_0^{\infty} xG_{ii}(dx)$ і нехай міри $G_{ij}^{\varepsilon}(dx)$ задовольняють такі умови: границя $G_{ij}^{\varepsilon}(dx)$ в розумінні слабкої збіжності дорівнює $G_{ij}(dx)$ при $\varepsilon \to 0$, тобто

$$G_{ij}^{\varepsilon}(dx) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} G_{ij}(dx)\,; \tag{1}$$

$$G_{ij}(dx) = 0 \ (i \neq j),\ G_{ii}(dx) \geq 0,\ G_{ii}([0,\infty)) = 1; \tag{2}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}(I - V_{\varepsilon}([0,\infty))) = D = \{d_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty},\ d_{ij} < \infty,\ i,j \in \mathbb{N}; \tag{3}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}(I - G_{\varepsilon}([0,\infty))) = C = \{c_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty},\ c_{ij} < \infty,\ i,j \in \mathbb{N}; \tag{4}$$

$$\sup_{\varepsilon>0} \int\limits_T^{\infty} xV_{ij}^{\varepsilon}(dx) \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0; \tag{5}$$

$$\inf_{i\in\mathbb{N}} m_i > 0,\ \sup_{i\in\mathbb{N}} m_i < \infty; \tag{6}$$

$$\inf_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{\infty} d_{ij} > 0. \tag{7}$$

Зауважимо, що завдяки умові (5), для всіх $i \in \mathbb{N}$ виконується $0 < m_i < \infty$. Аналогічно, нехай $n_i = \int\limits_0^\infty xV_{ii}(dx)$, де $V_{ij}(dx)$ варіація міри $G_{ij}(dx)$, $G(dx) = (G_{ij}(dx))_{i,j=1}^\infty$, $V(dx) = (V_{ij}(dx))_{i,j=1}^\infty$, $M = diag\{m_1, m_2, ...\}$, $N = diag\{n_1, n_2...\}$.

Зауваження 1. Оскільки міри $G_{ii}(dx)$ дійснозначні (див. (2)), то очевидно, що $G_{ii}(dx) = V_{ii}(dx)$, тобто $M = N$.

Приймемо

$$N_\varepsilon = \int\limits_0^\infty xV_\varepsilon(dx),\ L_\varepsilon = N_\varepsilon^{-1}(I - V_\varepsilon([0;\infty))),\ Q_\varepsilon(x) = e^{-xL_\varepsilon} - \int\limits_0^x V_\varepsilon(dy)e^{-(x-y)L_\varepsilon}.$$

Властивості матричнозначних функцій $Q_\varepsilon(x)$ використовують під час дослідження асимптотичного поводження розв'язку скінченновимірного рівняння відновлення (див. [1], [2]).

Розглянемо банаховий простір $\mathbf{K}$, елементами якого є матричнозначні функції $Q(x) = (Q_{ij}(x))_{i,j=1}^\infty$ з нормою $|||Q||| = \int\limits_{-\infty}^\infty \|Q(x)\|dx < \infty$, де $\|A\| = \sup\limits_{i\in\mathbb{N}} \sum\limits_{j=1}^\infty |a_{ij}|$ – норма матриці А. Для $Q \in \mathbf{K}$ позначимо $\widehat{Q}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^\infty e^{i\lambda x}Q(x)dx$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Теорема 1. *Нехай $G_{ij}^\varepsilon(dx)$ задовольняють умови (1)-(7). Тоді $Q_\varepsilon(x) \in \boldsymbol{K}$ і виконується $Q_\varepsilon(x) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} Q(x) = V([x;\infty))$ за нормою простору $\boldsymbol{K}$.*

Доведення. Завдяки умовам (6) та (7) $\sigma = \inf\limits_i \sum\limits_{j=1}^\infty \frac{d_{ij}}{m_i} > 0$, а тому $\|e^{-tM^{-1}D}\| \le e^{-t\sigma}$. Оскільки $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\|e^{-x\frac{1}{\varepsilon}L_\varepsilon}\| = \|e^{-xM^{-1}D}\|$, то, враховуючи попередню нерівність, отримуємо, що $\|e^{-xL_\varepsilon}\| \le e^{-\varepsilon x\sigma}$. Далі

$$\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^x V_\varepsilon(dy)e^{-(x-y)L_\varepsilon}\right)dx = \int\limits_0^{+\infty} V_\varepsilon(dy)\int\limits_y^{+\infty} e^{-(x-y)L_\varepsilon}dx =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} V_\varepsilon(dy)e^{yL_\varepsilon}\left(e^{-xL_\varepsilon}L_\varepsilon^{-1}\Big|_{+\infty}^{y}\right) = \int\limits_0^{+\infty} L_\varepsilon^{-1}V_\varepsilon(dy) = V_\varepsilon([0,+\infty))L_\varepsilon^{-1}.$$

Звідси і з того, що $\|e^{-xL_\varepsilon}\| \le e^{-\varepsilon x\sigma}$ випливає, що $Q_\varepsilon(x) \in \mathbf{K}$.

Позначимо $\overline{V}_\varepsilon(y) = V_\varepsilon([y;\infty))$. Тоді $d\overline{V}_\varepsilon(y) = -V_\varepsilon(dy)$ і

$$Q_\varepsilon(x) = e^{-xL_\varepsilon} + \int\limits_0^x d\overline{V}_\varepsilon(y)\cdot e^{-(x-y)L_\varepsilon} = e^{-xL_\varepsilon} + \overline{V}_\varepsilon(y)e^{-(x-y)L_\varepsilon}\Big|_0^x -$$

$$-\int\limits_0^x \overline{V}_\varepsilon(y)e^{-(x-y)L_\varepsilon}dyL_\varepsilon = -\overline{V}_\varepsilon(0)e^{-xL_\varepsilon} - \int\limits_0^x \overline{V}_\varepsilon(y)e^{-(x-y)L_\varepsilon}dyL_\varepsilon +$$

$$+e^{-xL_\varepsilon} + \overline{V}_\varepsilon(x) = \overline{V}_\varepsilon(x) + (I - \overline{V}_\varepsilon(0))e^{-xL_\varepsilon} - \int\limits_0^x \overline{V}_\varepsilon(y)e^{-(x-y)L_\varepsilon}L_\varepsilon dy =$$

$$= \overline{V}_\varepsilon(x) + N_\varepsilon L_\varepsilon e^{-xL_\varepsilon} - \int\limits_0^x \overline{V}_\varepsilon(y)e^{-(x-y)L_\varepsilon}L_\varepsilon dy.$$

Покажемо, що

$$\overline{V}_\varepsilon(x)\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} Q(x) = V([x;\infty)), \tag{8}$$

$$\int\limits_0^\infty \|N_\varepsilon L_\varepsilon e^{-xL_\varepsilon} - \int\limits_0^x \overline{V}_\varepsilon(y)e^{-(x-y)L_\varepsilon}L_\varepsilon dy\|dx \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{9}$$

При $i \neq j$ маємо

$$\int\limits_0^\infty \overline{V}_{ij}^\varepsilon(x)dx = \int\limits_0^\infty V_{ij}^\varepsilon([x;\infty))dx = \int\limits_0^\infty xV_{ij}^\varepsilon(dx) + xV_{ij}^\varepsilon([x;\infty))\Big|_0^\infty =$$

$$= \int\limits_0^c xV_{ij}^\varepsilon(dx) + \int\limits_c^\infty xV_{ij}^\varepsilon(dx) \le c\cdot V_{ij}^\varepsilon([0;c]) + \int\limits_c^\infty xV_{ij}^\varepsilon(dx).$$

З умов (3) та (5) відповідно отримуємо $c\cdot V_{ij}^\varepsilon([0;c])\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}0$ та $\int\limits_c^\infty xV_{ij}^\varepsilon(dx)\underset{c\to\infty}{\longrightarrow}0$.

При $i = j$ маємо

$$\int\limits_0^\infty |\overline{V}_{ii}^\varepsilon(x) - \overline{V}_{ii}(x)|dx = \int\limits_0^c |\overline{V}_{ii}^\varepsilon(x) - \overline{V}_{ii}(x)|dx + \int\limits_c^\infty |\overline{V}_{ii}^\varepsilon(x) - \overline{V}_{ii}(x)|dx \le$$

$$\le \int\limits_0^c |\overline{V}_{ii}^\varepsilon(x) - \overline{V}_{ii}(x)|dx + \int\limits_c^\infty V_{ii}^\varepsilon([x;\infty))dx + \int\limits_c^\infty V_{ii}([x;\infty))dx \le$$

$$\le \int\limits_0^c |V_{ii}^\varepsilon([0,x]) - V_{ii}([0,x])|dx + c|1 - V_{ii}^\varepsilon([0,\infty))| + \int\limits_c^\infty xV_{ii}^\varepsilon(dx) + \int\limits_c^\infty xV_{ii}(dx).$$

Легко бачити, що завдяки умові (5), інтеграли $\int\limits_c^\infty xV_{ii}^\varepsilon(dx)$ і $\int\limits_c^\infty xV_{ii}(dx)$ рівномірно відносно ε збігаються до 0, а $c|1-V_{ii}^\varepsilon([0,\infty))|\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}0$ і $|V_{ii}^\varepsilon([0,x])-V_{ii}([0,x])|\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}0$ завдяки

(4) та (1) відповідно. Звідси випливає умова (8). Приймемо

$$\overline{V}^c_\varepsilon(y) = \begin{cases} \overline{V}_\varepsilon(y), & y \le c, \\ 0, & y > c, \end{cases} \qquad \overline{R}^c_\varepsilon(y) = \begin{cases} 0, & y \le c, \\ \overline{V}_\varepsilon(y), & y > c. \end{cases}$$

Легко бачити, що $\overline{V}_\varepsilon(y) = \overline{V}^c_\varepsilon(y) + \overline{R}^c_\varepsilon(y)$, а отже,

$$\int_0^\infty |N_\varepsilon L_\varepsilon e^{-xL_\varepsilon} - \int_0^x \overline{V}_\varepsilon(y) e^{-(x-y)L_\varepsilon} L_\varepsilon dy| dx \le$$

$$\le \int_0^\infty |N_\varepsilon L_\varepsilon e^{-xL_\varepsilon} - \int_0^x \overline{V}^c_\varepsilon(y) e^{-(x-y)L_\varepsilon} L_\varepsilon dy| dx + \int_0^\infty | \int_0^x \overline{R}^c_\varepsilon(y) e^{-(x-y)L_\varepsilon} L_\varepsilon dy| dx \le$$

$$\le \int_0^c |N_\varepsilon L_\varepsilon e^{-xL_\varepsilon} - \int_0^x \overline{V}^c_\varepsilon(y) e^{-(x-y)L_\varepsilon} L_\varepsilon dy| dx + \int_c^\infty |N_\varepsilon L_\varepsilon e^{-xL_\varepsilon} -$$

$$- \int_0^x \overline{V}^c_\varepsilon(y) e^{-(x-y)L_\varepsilon} L_\varepsilon dy| dx + \int_c^\infty |\overline{V}_\varepsilon(y)| dy \int_0^\infty |e^{-xL_\varepsilon} L_\varepsilon| dx.$$

Але $\int\limits_0^\infty \|e^{-xL_\varepsilon} L_\varepsilon\| dx = \int\limits_0^\infty \|e^{-\frac{x}{\varepsilon} L_\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} L_\varepsilon\| dx \le \|\frac{1}{\varepsilon} L_\varepsilon\| \int\limits_0^\infty e^{-\sigma x} dx = \frac{1}{\sigma} \cdot \|\frac{1}{\varepsilon} L_\varepsilon\| \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \frac{\|M^{-1} D\|}{\sigma}$, а інтеграл $\int\limits_c^\infty |\overline{V}_\varepsilon(y)| dy$ можна зробити як завгодно малим за допомогою вибору числа c. Тому $\int\limits_c^\infty |\overline{V}_\varepsilon(y)| dy \int\limits_0^\infty |e^{-xL_\varepsilon} L_\varepsilon| dx \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Далі

$$\int_c^\infty |N_\varepsilon L_\varepsilon e^{-xL_\varepsilon} - \int_0^x \overline{V}^c_\varepsilon(y) e^{-(x-y)L_\varepsilon} L_\varepsilon dy| dx \le |N_\varepsilon - \int_0^c \overline{V}_\varepsilon(y) e^{yL_\varepsilon} dy| \int_c^\infty |e^{-xL_\varepsilon} L_\varepsilon| dx \le$$

$$\le |N_\varepsilon - \int_0^c \overline{V}_\varepsilon(y) dy| \int_c^\infty |e^{-xL_\varepsilon} L_\varepsilon| dx$$

і, аналогічно,

$$\int_0^c |N_\varepsilon L_\varepsilon e^{-xL_\varepsilon} - \int_0^x \overline{V}^c_\varepsilon(y) e^{-(x-y)L_\varepsilon} L_\varepsilon dy| dx \le |N_\varepsilon - \int_0^c \overline{V}_\varepsilon(y) e^{yL_\varepsilon} dy| \int_0^c |e^{-xL_\varepsilon} L_\varepsilon| dx \le$$

$$\le |N_\varepsilon - \int_0^c \overline{V}_\varepsilon(y) dy| \int_0^c |e^{-xL_\varepsilon} L_\varepsilon| dx.$$

Оскільки $\int\limits_0^\infty \overline{V}(y) dy = N$ і $|N_\varepsilon - \int\limits_0^c \overline{V}_\varepsilon(y) dy| \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} |N - \int\limits_0^c \overline{V}(y) dy|$, то за рахунок вибору c отримуємо (9). Теорему 1 доведено.

При доведенні наступної теореми будемо використовувати лему, яку подаємо без доведення, оскільки її доведення аналогічне до скінченновимірного випадку (див. [3])

Лема 1. *Нехай послідовність $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \boldsymbol{K}$ збігається за нормою $|||\cdot|||$ до $Q \in \boldsymbol{K}$ і при $\lambda \in [a;b]$ існує $\widehat{Q}(\lambda)^{-1}$. Тоді знайдеться послідовність $\{F_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \boldsymbol{K}$ така, що для всіх достатньо великих n*

$$\widehat{Q}_n(\lambda)^{-1} = \widehat{F}_n(\lambda) \text{ при } \lambda \in [a;b],\ |||F_n - F|||\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ \widehat{Q}(\lambda)^{-1} = \widehat{F}(\lambda) \text{ при } \lambda \in [a;b].$$

Приймемо $\Psi_\varepsilon(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{i\lambda x} V_\varepsilon(dx)$, $\Psi(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{i\lambda x} G(dx) = \int\limits_0^\infty e^{i\lambda x} V(dx)$.

Теорема 2. *Нехай $G_{ij}^{\varepsilon}(dx)$ задовольняють умови (1)-(7). Якщо для кожного $\lambda \in \mathbb{R}$ матриця $(\Psi(\lambda) - I)$ оборотна, то для всіх $-\infty < a < b < \infty$ і достатньо малих $\varepsilon > 0$ знайдуться функції $F \in \boldsymbol{K}$, $F_\varepsilon \in \boldsymbol{K}$ такі, що для $\lambda \in [a,b]$ виконується*

$$\begin{aligned}
&\widehat{F}_\varepsilon^{-1}(\lambda) = (I - \Psi_\varepsilon(\lambda))(L_\varepsilon - i\lambda I)^{-1},\\
&\widehat{F}^{-1}(\lambda) = \frac{i}{\lambda}(I - \Psi(\lambda)),\\
&F_\varepsilon(x) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} F(x)
\end{aligned}$$

за нормою простору $\boldsymbol{K}$.

Зауваження 2. Умова оборотності матриці $(\Psi(\lambda) - I)$ є аналогом умови нерешітчастості мір $G_{ii}(dx)$ у випадку скінченновимірних матриць.

Доведення. Враховуючи твердження леми 1 та теореми 1 для доведення цієї теореми треба показати, що перетворення Фур'є матриці $Q(x) = V([x;\infty))$ оборотне та знайти явний вигляд матриць $\widehat{Q}(\lambda)$ і $\widehat{Q}_\varepsilon(\lambda)$.

Маємо $\widehat{Q}(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{i\lambda x} V([x,\infty))dx = \int\limits_0^\infty e^{i\lambda x} G([x,\infty))dx = \int\limits_0^\infty G(dy) \int\limits_0^y e^{i\lambda x} dx = \int\limits_0^\infty G(dy) \frac{e^{i\lambda x}-1}{i\lambda} = \frac{1}{i\lambda}(\Psi(\lambda) - I)$. Звідси отримуємо, що матриця $\widehat{Q}(\lambda)$ має обернену. Далі

$$\begin{aligned}
\widehat{Q}_\varepsilon(\lambda) &= \int\limits_0^\infty e^{i\lambda x} e^{-xL_\varepsilon} dx - \int\limits_0^\infty e^{i\lambda x} (\int\limits_0^x V_\varepsilon(dy) e^{-(x-y)L_\varepsilon}) dx = \\
&= (L_\varepsilon - i\lambda I)^{-1} - \Psi_\varepsilon(\lambda)(L_\varepsilon - i\lambda I)^{-1} = (I - \Psi_\varepsilon(\lambda))(L_\varepsilon - i\lambda I)^{-1}.
\end{aligned}$$

Теорему 2 доведено.

1. *Сильвестров Д.С.* Теорема востановления в схеме серий // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1978. – Т. 18. – С. 144-161.

2. *Шуренков В.М.* Переходные явления в теоремах многомерного востановления // Теория вероятностей и ее примен. – 1979. – Т. 24. – С. 436-438.

3. *Куция П.П.* Многомерные теоремы типа восстановления и их применения к регенерирующим случайным процессам: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – К., 1990.

PROPERTIES OF COUNTABLE MATRIX MEASURES

Taras ZABOLOTSKYY

Ivan Franko National university of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka str., 1

Here is proved properties of countable matrix measures which can be used in investigating asymptotic behavior of the solution of the renewal equation.

Key words: matrix measure, Fourier transformation.

Стаття надійшла до редколегії 30.01.2007

Прийнята до друку 24.10.2007