ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 67

Львів
Львівський національний університет імені Івана Франка
2007

ISSN 2078-3744

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 67

Львівський національний університет імені Івана Франка
2007

VISNYK OF THE LVIV UNIVERSITY

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Series
Mechanics and Mathematics

Серія
механіко-математична

Issue 67

Випуск 67

Scientific journal

Збірник наукових праць

Published 1-2 issues per year

Виходить 1-2 рази на рік

Published since 1965

Видається з 1965 року

Ivan Franko National
University of Lviv

Львівський національний
університет імені Івана Франка

2007

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. – 2007. – Випуск 67.

Visnyk of the Lviv University. Series Mechanics and Mathematics. – 2007. – Vol. 67.

Вісник містить статті з теорії крайових задач для диференціальних рівнянь, алгебри, топології, теорії функцій комплексного змінного, функціонального аналізу, теорії ймовірності та статистики, проблем математичного моделювання фізико-механічних процесів і механіки.

Для наукових працівників, аспірантів і студентів старших курсів.

The issue contains articles on theory of boundary value problems for differential equations, algebra, topology, complex analysis, functional analysis, probability theory and statistics, problems of mathematical modelling of physical and mechanical processes and mechanics.

For scientists, post graduates and students.

Редакційна колегія: д-р фіз.-мат. наук, проф. *В. Лянце* (почесний ред.); д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Зарічний* (відп. ред.); д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Комарницький* (заст. ред.); д-р фіз.-мат. наук, проф. *С. Лавренюк* (заст. ред.); канд. фіз.-мат. наук, доц. *О. Бугрій* (відп. секр.); д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Іванчов*; д-р фіз.-мат. наук, проф., член-кор. НАН України *О. Андрейків*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *В. Андрійчук*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *О. Артемович*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *Т. Банах*; д-р фіз.-мат. наук, проф., член-кор. НАН України *Я. Бурак*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *Я. Єлейко*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Заболоцький*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *А. Кондратюк*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *Б. Копитко*; канд. фіз.-мат. наук, проф. *Я. Притула*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *О. Скасків*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *О. Сторож*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *Г. Сулим*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Шеремета.*

Editorial board: V.Lyantse (honorary editor-in-chief), M. Zarichny (executive editor-in-chief), M. Komarnitskyi (associate editor), S. Lavrenyuk (associate editor), O. Buhrii (executive secretary), M. Ivanchov, O. Andreykiv, V. Andriychuk, O. Artemovych, T. Banakh, Ya. Burak, Ya. Yeleyko, M. Zabolotskyi, A. Kondratyuk, B. Kopytko, Ya. Prytula, O. Skaskiv, O. Storozh, G. Sulym, M. Sheremeta.

Адреса редакційної колегії:
Львівський національний університет
імені Івана Франка,
механіко-математичний факультет,
вул. Університетська, 1 79602 Львів
Україна тел. (0322) 74-11-07

Editorial address:
Ivan Franko National University
of Lviv
Mechanical and Mathematical department
Universytets'ka st. 1 UA-79602 Lviv,
Ukraine tel. +(38) (0322) 74-11-07

E-mail: diffeq@franko.lviv.ua
Редактор *Н. Плиса*

Друкується за ухвалою Вченої Ради
Львівського національного університету імені Івана Франка

© Львівський національний університет імені Івана Франка, 2007

ЗМІСТ

Боднар Тарас. Оптимальний інвестиційний портфель для різних типів розподілів повернень 5

Бридун Андрій. Голоморфні функції скінченного λ-типу в півсмузі 14

Бугрій Олег. Задача з початковою умовою для нелінійної параболічної варіаційної нерівності в необмеженій за просторовими змінними області 30

Волох Олександр. Про цілі функції з p-листими в одиничному крузі похідними 53

Габрусев Григорій. Побудова наближених розв'язків рівняння Фредгольма першого роду в деяких контактних задачах теорії пружності 59

Головатий Юрій, Грабчак Геннадій. Асимптотика спектра задачі Штурма-Ліувілля на геометричному графі зі збуренням густини в околі вузлів 66

Гринців Надія. Обернена задача для сильно виродженого параболічного рівняння в області з вільними межами 84

Доманська Олена. Нелінійні еліптичні рівняння в квазіциліндричних областях 104

Єлейко Ярослав, Киричинська Ірина, Охрін Остап. Асимптотична поведінка S-зупинених гіллястих процесів зі зліченною кількістю типів 119

Жерновий Юрій. Стаціонарний розподіл імовірностей станів для одноканальної замкненої системи масового обслуговування 130

Заболоцький Тарас. Властивості зліченновимірних матричних мір 137

Зеліско Михайло. Модифікація узагальненого порядку цілого ряду Діріхле та її застосування 143

Йоник Лілія. Групи, багаті на $A\check{C}$-підгрупи або $\check{C}A$-підгрупи 149

Коркун Олесь, Лавренюк Сергій. Про носій розв'язку задачі Коші для нелінійного $2b$-параболічного рівняння 153

Кшановський Іван. Аналітичні в крузі з проколеним центром функції з обмеженою неванліннівською характеристикою 166

Лопушанська Галина. Узагальнені розв'язки півлінійних еліптичних рівнянь із сильними степеневими особливостями на межі області 176

Лугова Любомира. Про тричленну степеневу асимптотику логарифма максимального члена цілого ряду Діріхле 191

Мулява Оксана, Шеремета Мирослав. Про належність абсолютно збіжних у півплощині рядів Діріхле скінченного R-порядку до класу збіжності 200

Нечепуренко Максим. Мішана задача для нелінійної зв'язної еволюційної системи рівнянь в обмеженій області 207

Пирч Назар. Ізоморфізми вільних паратопологічних груп та вільних однорідних просторів I 224

Снітко Галина. Визначення невідомого множника в коефіцієнті при першій похідній в параболічному рівнянні в області з вільною межею 233

Торган Галина. Мішана задача для еволюційного рівняння типу Ейдельмана в необмеженій області 248

Федусь Уляна. Визначення невідомого коефіцієнта при похідній за часом у параболічному рівнянні з нелокальною умовою перевизначення 268

CONTENT

Bodnar Taras. Optimal investment portfolio for different types of asset returns distribution 5

Brydun Andriy. Holomorphic functions of finite λ-type in a half-strip 14

Buhrii Oleh. Initial-value problem for nonlinear parabolic variational inequality in unbounded with respect to the space variables domain 30

Volokh Oleksandr. On the entire functions with p-valent derivatives in the unit disk . . . 53

Habrusiev Hryhorii. Construction of the approximate solution of the first kind Frendholm-type equation in some contact tasks of the elastic theory 59

Golovaty Yurij, Hrabchak Hennadij. Asymptotics of spectrum of Sturm-Liouville operator on networks with perturbed density 66

Hryntsiv Nadiya. An inverse problem for a strongly degenerate parabolic equation in a domain with free boundaries 84

Domaska Olena. Nonlinear elliptic equations in quasicylindrical domain 104

Elejko Yaroslav, Kyrychynska Iryna, Okhrin Ostap. Asymptotic behaviour of the S-stopped branching processes with countable state space 119

Zhernovyi Yuriy. Statistical-eqilibrium state probabilities distribution for the single-server closed queueing systems 130

Zabolotskyy Taras. Properties of the countable matrix measures 137

Zelisko Mykhailo. Modification of generalized order and as application 143

Yonyk Liliya. Groups with many $A\check{C}$-subgroups or $\check{C}A$-subgroups 149

Korkun Oles', Lavreniuk Serhiy. On a support of a solution Cauchy problem for the nonlinear $2b$-parabolic equation 153

Kshanovskyy Ivan. On the analytic in punctured discs functions with bounded Nevanlinna characteristic. 166

Lopushaska Halyna. Generalised solutions to semilinear elliptic equation with strong power singularities at frontiery 176

Luhova Liubomyra. On three-term power asymptotic for the logarithm of the maximal term of entire Dirichlet series 191

Mylyava Osana, Sheremeta Myroslav. On the belonging of Dirichlet series absolutely convergent in half-plane to a convergence class 200

Nechepurenko Maksym. The mixed problem for a nonlinear coupled evolution system in a bounded domain 207

Pyrch Nazar. On isomorphisms of the free paratopological groups and free homogeneous spaces I 224

Snitko Halyna. Determination of unknown multiplier in the coefficient at the first derivative in a parabolic equation in a free boundary domain 233

Torhan Halyna. Mixed problem for Eidelman type evolution equation in unbounded region 248

Fedus Ulyana. On inverse problem for parabolic equation with unknown coefficient at the derivative with respect to time variable 268

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2007. Вип. 67. С. 5–13 *Ser. Mech.-Math. 2007. Vol. 67. P. 5–13*

УДК 519.21+519.872

ОПТИМАЛЬНИЙ ІНВЕСТИЦІЙНИЙ ПОРТФЕЛЬ ДЛЯ РІЗНИХ ТИПІВ РОЗПОДІЛІВ ПОВЕРНЕНЬ

Тарас БОДНАР

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: bodnar@euv-frankfurt-o.de

Розглянуто проблему впливу різних типів розподілів повернень на формування оптимального портфеля. Отримані результати застосовано до побудови портфеля, який складається з індексів польського, російського й українського ринків цінних паперів.

Ключові слова: портфельний аналіз, матричний еліптичний розподіл, статичні методи в фінансах.

1. Провідну роль у визначенні ефективності певного портфеля відіграють розподіли оцінених його оптимальних ваг ([2], [10]). У [11] виведено тест для середньо-варіаційної ефективності портфеля, а в праці [4] – тест для перевірки ефективності середньо-варіаційного оптимального портфеля за умови нормальності на повернення цінних паперів. Використовуючи регресійні процедури, визначено скінченно-вибірковий розподіл трансформованих ваг.

На практиці припущення нормальності та незалежності не відповідають дійсності, особливо, коли розподіли повернень цінних паперів мають повільно спадаючі хвости [9], [13], [14], [16]. Саме для таких випадків у працях [17], [18] було запропоновано використання багатовимірного t-розподілу. У реальних задачах некорельованість повернень практично не виконується. У [12] доведено, що не неперервні торги можуть привести до додатної автокореляції. Змінні з часом очікувані повернення також мають додатну автокореляцію в денних поверненнях цінних паперів [5]. Припущення некорельованих повернень відповідає важливим теоретичним властивостям застосування наступних моделей для опису поведінки повернень цінних паперів [3], [6], [15].

Для опису повернень цінних паперів ми вибрали сім'ю еліптичних розподілів, оскільки вона охоплює багато відомих у практичному застосуванні багатовимірних розподілів, зокрема нормальний розподіл, мішаний нормальний розподіл, розподіл Пірсона II and VII типів, багатовимірний t-розподіл, багатовимірний розподіл Коші,

---

© Боднар Тарас, 2007

логістичний розподіл [7]. Привабливою альтернативою багатовимірної нормальності є еліптичні розподіли, чиї контори однакової густини мають такий самий еліптичний вигляд, як і у випадку нормального розподілу.

Через $p_{i,t}$ позначимо ціну i-го цінного паперу в момент часу t. Тоді під вектором повернень будемо розуміти наступний k-вимірний вектор $r_t = (r_{1,t}, \dots, r_{k,t})$, де $r_{i,t} = lnp_{i,t} - lnp_{i,t-1}$. Надалі припускаємо, що вектор r_t має k-вимірний еліптичний розподіл, тобто густина вектора r_t задається такою формулою:

$$|\Sigma|^{-1/2} f((x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)),$$

де параметри процесу μ і Σ є відповідно вектором середніх і коваріаційною матрицею, а $|\Sigma|$ – визначник коваріаційної матриці. Важливу роль у теорії еліптичних розподілів відіграє генеруюча змінна еліптичного розподілу. Генеруюча змінна є випадковою величиною, яку задають за допомогою такої рівності:

$$R = (X-\mu)'\Sigma^{-1}(X-\mu)$$

і повністю визначає тип еліптичного розподілу випадкового вектора X, тобто функцію $f(.)$.

Оптимальні портфельні ваги, які максимізують очікувану квадратну функцію корисності, визначають з рівності

$$w_{EU} = \frac{\Sigma^{-1}1_k}{1_k'\Sigma^{-1}1_k} + \alpha^{-1}S\mu, \tag{1}$$

де

$$S = \Sigma^{-1} - \frac{\Sigma^{-1}1_k 1_k'\Sigma^{-1}}{1_k'\Sigma^{-1}1_k}. \tag{2}$$

Тут 1_k – k-вимірний вектор, всі елементи якого дорівнюють 1.

Мета нашої статті — вивчити залежність оцінок оптимальних ваг від типу еліптичного розподілу. Для цього використовують формули моментів оцінок для аналізу поведінки оптимальних портфельних ваг залежно від припущення, накладеного на розподіли повернень. Також досліджується випадок стійких симетричних розподілів. Показано, що оцінка оптимальних портфельних ваг має моменти вищого порядку навіть тоді, коли не існує середнє оцінки коваріаційної матриці.

2. Основні результати. Середнє і коваріаційну матрицю еліптичного процесу оцінюють за допомогою вибіркових оцінок. Тоді оцінки оптимальних портфельних ваг матимуть вигляд

$$\hat{w}_{EU} = \frac{\hat{\Sigma}^{-1}1_k}{1_k'\hat{\Sigma}^{-1}1_k} + \alpha^{-1}\hat{S}\hat{\mu},$$

де

$$\hat{S} = \hat{\Sigma}^{-1} - \frac{\hat{\Sigma}^{-1}1_k 1_k'\hat{\Sigma}^{-1}}{1_k'\hat{\Sigma}^{-1}1_k}.$$

$$M_{ij} = \frac{(n-1)^2(n-k+1)}{(n-k)(n-k-1)^2(n-k-3)} S e_i e_j' S +$$

$$+\frac{(n-1)^2}{(n-k)(n-k-1)(n-k-3)}e_i'Se_j, \tag{3}$$

$$\tilde{M}_{ij}=\frac{(n-1)^2(3(n-k)-1)}{(n-k)(n-k-1)^2(n-k-3)}Se_ie_j'S+$$

$$+\frac{(n-1)^2}{(n-k)(n-k-1)(n-k-3)}e_i'Se_j, \tag{4}$$

$$M^*_{ij}=M_{ij}-\tilde{M}_{ij}=\frac{(n-1)^2}{(n-k-1)^2}Se_ie_j'S, \tag{5}$$

причому e_i $(i=1,2,...,k)$ – k-вимірний вектор, i-й елемент якого дорівнює одиниці, а всі інші – нулю.

Середнє і коваріація між елементами вектора оцінок мають вигляд

$$E(\hat{w}_{EU})=\frac{\Sigma^{-1}1_k}{1_k'\Sigma^{-1}1_k}+\frac{n-1}{n-k-1}(nk-2)E(R^{-2})\alpha^{-1}S\mu \tag{7}$$

і

$$Cov(\hat{w}^i_{EU},\hat{w}^j_{EU})=\frac{1}{n-k-1}\frac{e_i'Se_j}{1_k'\Sigma^{-1}1_k}-\alpha^{-2}\left((nk-2)E(R^{-2})\right)^2\mu'M^*_{ij}\mu+$$

$$+\alpha^{-2}(nk-2)(nk-4)E(R^{-4})\mu'\tilde{M}_{ij}\mu+$$

$$+\alpha^{-2}(nk-2)E(R^{-2})\left(\frac{tr(M_{ij}\Sigma)}{n}+\frac{(n-1)^2}{n(n-k-1)^2}e_i'Se_j\right). \tag{8}$$

Спочатку розглянемо багатовимірний симетричний стійкий розподіл. Якщо характеристична функція деякої випадкової величини Z має вигляд

$$\varphi(t't)=e^{-r(t't)^{\frac{\zeta}{2}}},\ 0<\zeta\leqslant 2,\ r>0,$$

де t – k-вимірний вектор, то скажемо, що випадкова величина Z має багатовимірний симетричний стійкий розподіл. Це є багатовимірне узагальнення стійкого розподілу.

Зауважимо, що характеристична функція цього типу еліптичних симетричних розподілів належить до Φ_{l+1} для кожного $l+1$ [8]. Позначимо $Z=\left(Z^{(1)},Z^{(2)}\right)\sim S_{l+1}(\alpha)$, де $Z^{(1)}$ – q-вимірний вектор. Тоді з результатів [8] випливає, що $Z^{(1)}\sim S_q(\varphi)$, де через $S_q(\varphi)$ позначено сім'ю q-вимірних симетричних розподілів із характеристичною функцією φ. Застосовуючи теорему 2.5.6 з [8], доходимо висновку, що густина q-вимірного випадкового вектора $(1\leqslant q\leqslant l)$, який має багатовимірний симетричний розподіл, задають так:

$$g(X'X)=\frac{\Gamma\left(\dfrac{l+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{l+1-q}{2}\right)\pi^{\frac12}}\int\limits_{\left(\sum\limits_{i=1}^{q}x_i^2\right)^{\frac12}}^{\infty}v^{-(l-1)}\left(v^2-\sum_{i=1}^{q}x_i^2\right)^{\frac12(l+1-q)}dF_{l+1}(v),$$

де Z — q-вимірний випадковий вектор і $F_{l+1}(.)$ — функція розподілу випадкової величини R, яка є генеруючою змінною для $l+1$-вимірного випадку.

З теореми 2.9 [7] випливає, що густина генеруючої змінної R в q випадку має вигляд

$$f(r) = \frac{2\pi^{\frac{q}{2}}}{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)} r^{q-1} g(r^2) =$$

$$= \frac{2}{B\left(\frac{q}{2}, \frac{l+1-q}{2}\right)} \int\limits_{r}^{\infty} v^{-(l-1)} \left(v^2 - r^2\right)^{\frac{1}{2}(l+1-q)} dF_{l+1}(v).$$

Лема 1. *Нехай $(l+1)$-вимірний випадковий вектор Z має багатовимірний симетричний стійкий розподіл з індексом стійкості ζ, де $0 < \zeta \leqslant 2$. Тоді існує функція щільності $g(x)$ випадкового вектора Z, яка є неперервною і*

$$g(0) = \frac{4r^{-\frac{l+3}{\zeta}+\frac{5}{2}}}{\pi^{l+1}\zeta} \Gamma\left(\frac{l+1}{2\zeta}\right) > 0.$$

Доведення. Оскільки функція щільності є оберненим перетворенням Фур'є характеристичної функції, то існування густини випадкової величини Z рівносильне рівномірній збіжності інтеграла

$$g(X'X) = \frac{1}{\pi^{l+1}} \int\limits_0^{\infty} ... \int\limits_0^{\infty} e^{itx} e^{-r(t't)^{\frac{\zeta}{2}}} dt.$$

Маємо

$$|e^{itx} e^{-r(t't)^{\frac{\zeta}{2}}}| = e^{-r(t't)^{\frac{\zeta}{2}}}.$$

З леми 1.3 ([7]) випливає, що

$$\int\limits_0^{\infty} ... \int\limits_0^{\infty} e^{itx} e^{-r(t't)^{\frac{\zeta}{2}}} dt = \int\limits_0^{\infty} p^{\frac{l+1}{2}-1} e^{-rp^{\frac{\zeta}{2}}} dp = \frac{4r^{-\frac{l+3}{\zeta}+\frac{5}{2}}}{\zeta} \int\limits_0^{\infty} y^{\frac{l+1}{2\zeta}-1} e^{-y^2} dy,$$

де $y = rt^{\frac{\zeta}{2}}$. Останній інтеграл $\int_0^{\infty} y^{\frac{l+1}{2\zeta}-1} e^{-y^2} dy$ збігається при $\zeta > 0$ і його значення дорівнює $\Gamma(\frac{l+1}{2\zeta})$. Неперервність функції щільності випливає з неперервності функції $e^{itx} e^{-r(t't)^{\frac{\zeta}{2}}}$.

Зауваження 1. Оскільки для стійких розподілів $E(|Z|^{\beta}) < \infty$ за умови, що $0 \leqslant \beta < \zeta$ і $E(|Z|^{\beta}) = \infty$ у випадку $\beta > \zeta$, то, враховуючи нерівність $g(0) > 0$, з леми 1 отримаємо $E(|Z|^{\tau}) < \infty$, якщо $-1 < \tau \leqslant \alpha$ $-1 < \tau < \zeta$.

На підставі простих обчислень легко довести таку лему.

Лема 2. *Нехай Z – випадкова величина, яка має симетричний стійкий розподіл з індексом стабільності ζ. Тоді*

$$E(Z^{\beta})=\frac{2\pi^{\frac{l}{2}}B(\beta+1,\frac{1}{2}l+1)}{\Gamma\left(\frac{l}{2}\right)}\int\limits_{0}^{\infty}v^{2\beta+3}v^{l}g_{l+1}(v^2)dv.$$

Зауваження 2. Із зауваження 1 випливає, що інтеграл $\int_0^\infty v^{\eta}g_{l+1}(v^2)dv$ збігається тоді і тільки тоді, коли $-1<\eta\leq 2\zeta+3+l$.

Важливо визначити умови на β, за яких існує $E(R^{2\beta})$, де $\beta\in IR$. Відповідь на це питання дає теорема.

Теорема 1. *Нехай R – генеруюча змінна q-вимірного випадкового вектора, який має симетричний стійкий розподіл. Тоді*

$$E(R^{2\beta})=\frac{2\pi^{\dfrac{l+1}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{l+1}{2}\right)}\frac{B\left(\beta+\dfrac{q}{2},\dfrac{l+1-q}{2}+1\right)}{B\left(\dfrac{q}{2},\dfrac{l+1-q}{2}\right)}\int\limits_{0}^{\infty}v^{2\beta+2+l}g_{l+1}(v^2)dv.$$

Доведення. Враховуючи, що

$$f_{l+1}(v)=\frac{2\pi^{\frac{l+1}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{l+1}{2}\right)}v^{l}g_{l+1}(v^2),$$

щільність випадкової змінної $Q=R^2$ можна задати такою формулою [7]:

$$f_Q(r)=\frac{\pi^{\frac{q}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{q}{2}\right)}v^{\frac{q}{2}-1}g_{l+1}(r)=$$

$$=\frac{r^{\frac{q}{2}-1}}{B\left(\dfrac{q}{2},\dfrac{l+1-q}{2}\right)}\int\limits_{\sqrt{r}}^{\infty}v^{-1}(v^2-r)^{\frac{l+1-q}{2}}g_{l+1}(v^2)dv.$$

Тому

$$E(R^{2\beta})=\frac{2\pi^{\frac{l+1}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{l+1}{2}\right)}\frac{1}{B\left(\dfrac{q}{2},\dfrac{l+1-q}{2}\right)}\int\limits_{0}^{\infty}r^{\beta+\frac{q}{2}-1}\int\limits_{\sqrt{r}}^{\infty}v^{-1}(v^2-r)^{\frac{l+1-q}{2}}g_{l+1}(v^2)dvdr.$$

Змінюючи порядок інтегрування, отримаємо

$$E(R^{2\beta}) =$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{l+1}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{l+1}{2}\right)} \frac{1}{B\left(\dfrac{q}{2}, \dfrac{l+1-q}{2}\right)} \int\limits_0^\infty v^{-1} g_{l+1}(v^2) \int\limits_0^{v^2} r^{\beta+\frac{q}{2}-1} (v^2-r)^{\frac{l+1-q}{2}}\, dr\, dv =$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{l+1}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{l+1}{2}\right)} \frac{1}{B\left(\dfrac{q}{2}, \dfrac{l+1-q}{2}\right)} \int\limits_0^\infty v^{2\beta+2+l} g_{l+1}(v^2) \int\limits_0^{1} y^{\beta+\frac{q}{2}-1} (1-y)^{\frac{l+1-q}{2}}\, dy\, dv =$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{l+1}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{l+1}{2}\right)} \frac{B\left(\beta+\dfrac{q}{2}, \dfrac{l+1-q}{2}+1\right)}{B\left(\dfrac{q}{2}, \dfrac{l+1-q}{2}\right)} \int\limits_0^\infty v^{2\beta+2+l} g_{l+1}(v^2)\, dv.$$

Зауваження 3. Із зауваження 2 випливає, що момент $E(R^{2\beta})$ існує тоді і тільки тоді, коли $-\dfrac{3+l}{2} < \beta \le \zeta + \dfrac{1}{2}$.

Отже, середнє, варіації і моменти оцінок оптимальних портфельних ваг достатньо високого порядку у випадку максимізації очікуваної квадратної функції корисності існують для багатовимірних симетричних стійких розподілів з індексом стійкості ζ, $0 < \zeta < 2$, за умови, що оцінка коваріаційної матриці береться без нормування на другий момент генеруючої змінної, як і у випадку нормального розподілу. Такі результати неочікувані, оскільки у формулах використовують оцінку варіації у випадку стійких розподілів з індексом стійкості $0 < \zeta < 2$.

У випадку симетричного розподілу Котца $E(R^{-2m})$ існує для m таких, що $2(N-m)+l > 2$, де $l = nk$, і визначається формулою

$$E(R^{-2m}) = \int\limits_0^\infty v^{-m} \left(\frac{sr^{\frac{2N+l-2}{2s}}}{\pi^{\frac{l}{2}} \Gamma\left(\dfrac{2N+l-2}{2s}\right)} \right) v^{N+\frac{l}{2}-2} e^{-rv^s} dv =$$

$$= C_{l,N} \int\limits_0^\infty v^{N-m+\frac{l}{2}-2} e^{-rv^s} dv = \frac{C_{l,N}}{C_{l,N-m}} = \frac{\Gamma\left(\dfrac{2(N-m)+l-2}{2s}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{2N+l-2}{2s}\right)} r^{\frac{m}{s}}.$$

Обчислимо середнє, варіацію і коваріацію елементів вектора $\hat{w}_{EU}$ за умови, що повернення мають симетричний розподіл Котца з середнім μ, коваріаційною матрицею Σ. Оскільки у нашому випадку $l = nk$, то з формул (3) і (4) отримуємо таку рівність

$$E(\hat{w}_{EU})=\frac{\Sigma^{-1}1_k}{1_k'\Sigma^{-1}1_k}+\frac{n-1}{n-k-1}(nk-2)\frac{\Gamma\left(\dfrac{2(N-1)+nk-2}{2s}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{2N+nk-2}{2s}\right)}r^{\frac{1}{s}}\alpha^{-1}S\mu,$$

за умови, що $2(N-m)+kn>2$. Коваріація між елементами $\hat{w}^i_{EU}$ і $\hat{w}^j_{EU}$ має вигляд

$$Cov(\hat{w}^i_{EU},\hat{w}^j_{EU})=\frac{1}{n-k-1}\frac{e_i'Se_j}{1_k'\Sigma^{-1}1_k}-$$

$$-\alpha^{-2}\left((nk-2)\frac{\Gamma\left(\dfrac{2(N-1)+nk-2}{2s}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{2N+nk-2}{2s}\right)}r^{\frac{1}{s}}\right)^2\mu'M^*_{ij}\mu+$$

$$+\alpha^{-2}(nk-2)(nk-4)\frac{\Gamma\left(\dfrac{2(N-2)+nk-2}{2s}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{2N+nk-2}{2s}\right)}r^{\frac{2}{s}}\mu'\tilde{M}_{ij}\mu+$$

$$+\alpha^{-2}(nk-2)\frac{\Gamma\left(\dfrac{2(N-1)+nk-2}{2s}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{2N+nk-2}{2s}\right)}r^{\frac{1}{s}}\left(\frac{tr(M_{ij}\Sigma)}{n}+\frac{(n-1)^2}{n(n-k-1)^2}e_i'Se_j\right),$$

де M_{ij}, $\tilde{M}_{ij}$ і M^*_{ij} визначають за формулами (3), (4) і (5) відповідно.

Проводячи аналогічні міркування і обчислюючи відповідні моменти, можна одержати формули середнього і коваріацій для інших типів розподілів. Застосуємо отримані результати до реальних даних. Для цього розглянемо ціни індексів ринків цінних паперів країн, що розвиваються (Україна, Польща та Росія) у часовому періоді з 8 січня 2003 до 30 березня 2004рр. Ґрунтуючись на відповідних даних, можна порахувати повернення і сформувати оптимальний портфель в сенсі максимізації очікуваної квадратичної функції корисності.

Позначимо через $p_{i,t}$ ціну індексу i-го ринку в момент часу t, де $i=1$ відповідає Україні, $i=2$ – Польщі та $i=3$ – Росії. Тоді повернення обчислюватимемо за такою формулою:

$$r_{i,t}=\ln\left(\frac{p_{i,t}}{p_{i,t-1}}\right).$$

Оцінка вектора середнього і варіації обчислюють за формулами $\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}r_j$, $\hat{\Sigma}=\frac{E(R^2_{(nor)})}{(n-1)E(R^2)}\sum\limits_{j=1}^{n}(r_j-\hat{\mu})(r_j-\hat{\mu})'$, де $r_j=(r_{1,j},r_{2,j},r_{3,j})$. Отже,

$$\hat{\mu}=(0,002793,\ 0,001183,\ 0,002296)$$

і

$$\hat{\Sigma} = \frac{E(R^2_{(nor)})}{E(R^2)} \begin{pmatrix} 0,000672741853 & -0,000000230215 & -0,000011507796 \\ -0,000000230215 & 0,000250635841 & 0,000074233684 \\ -0,000011507796 & 0,000074233684 & 0,000316689079 \end{pmatrix}.$$

Оскільки оцінки коваріаційних матриць пропорційні, то ризикованість інвестора прямо пов'язана з типом еліптичного розподілу для опису повернень цінних паперів. Позначимо $\tilde{\alpha} = \alpha\frac{nk}{E(R^2)}$. Тоді інвестор, який вибирає певний еліптичний розподіл для моделювання повернень цінних паперів і має коефіцієнт ризикованості α та інвестор, який припускає нормальність і має коефіцієнт ризикованості $\tilde{\alpha} = \alpha\frac{nk}{E(R^2)}$, формують той самий оптимальний портфель. Також зауважимо, що всі сформовані оптимальні портфелі, незалежно від типу еліптичного розподілу, належать ефективній множині портфелів.

Таблиця 1. Оптимальні портфельні ваги для різних типів еліптичних розподілів (коефіцієнт ризикованості інвестора $\alpha = 1$)

К.р.	Норм.	Котц. $r = 0.5$ $s = 1$	Котц. $r = 1$ $s = 2$	t-роз. $d = 4$	t-розр. $d = 10$	Пір.II $d = 1$	Пір.II $d = 10$ $\zeta = 0.2$	Басел $\beta = 0.5$ $\zeta = 0$	Лапл. $\beta = 0.25$
Укр.	1.58	0.55	0.24	2.94	1.92	0.21	0.21	326.7	163.4
Пол.	-3.04	-0.42	0.39	-6.52	-3.91	0.45	0.45	-833	-416.5
Рос.	2.46	0.87	0.37	4.58	2.99	0.34	0.34	507.3	254.1

У табл. 1 подано оптимальні портфельні ваги, які максимізують очікувану квадратичну функцію корисності для різних типів еліптичних розподілів. У всіх зазначених випадках коефіцієнт ризикованості інвестора $\alpha = 1$. Оптимальні ваги дуже чутливі до типу еліптичного розподілу. У випадку розподілу Пірсона другого типу портфельні ваги майже не змінюються зі зміною параметра розподілу d. Вони відповідають безризиковому інвесторові ($\alpha = \infty$), який припускає, що повернення мають нормальний розподіл. У випадку t-розподілу, коли ступені вільності зростають, розподіл оцінки оптимальних портфельних ваг прямує до нормального розподілу. Це можна передбачити, оскільки t-розподіл за умови, що ступені вільності прямують до нескінченності, прямує до нормального розподілу. Варто також зазначити поведінку оптимальних портфельних ваг для розподілів Басселя та Лапласа. Вони відповідають випадкові дуже ризикового інвестора за умови нормальності.

1. *Єлейко Я.І., Боднар Т.Д.* Про використання векторів функцій розподілів стратегій для пошуку оптимальних рішень // Економічна кібернетика. – 2002. – Т. 5-6. – С. 49-56.
2. *Barberis N.* Investing for the long run when returns are predictable // The Journal of Finance. – 1999. – Vol. 55. – P. 225-264.
3. *Bollerslav T.* A conditionally heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return // Rewiew of Economics and Statistics. – 1987. – Vol. 69. – P. 542-547.
4. *Britten-Jones M.* The Sampling error in estimates of mean-variance efficient portfolio weights // The Journal of Finance. – 1994. – Vol. 54. – P. 655-671.
5. *Conrad J., Kaul G.* Time-variation in expected returns // Journal of Business. – 1988. – Vol. 61. – P. 409-425.

6. *Engle R.F* Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of U.K. inflation // Econometrica. – 1982. – Vol. 50. – P. 987-1008.
7. *Fang K.T., S. Kotz, Ng K.W.* Symmetric multivariate and related distributions. – London: Chapman and Hall, 1989. – P. 220.
8. *Fang K.T., Zhang Y.T.* Generalized multivariate analysis. – Berlin: Springer-Verlag, 1990. – P. 220.
9. *Fama E.F.* Foundations of finance. – New York: Basic Books, 1976. – P. 395.
10. *Fleming J., Kirby C., Ostdiek B.* The economic value of volatility timing // The Journal of Finance. – 2001. – Vol. 56. – P. 329-352.
11. *Jobson J.D., Korkie B.* A performance interpretation of multivariate tests of asset set intersection, spanning, and mean-variance efficiency // Journal of financial and quantitative analysis. Vol. 24, No. 2(1989). – P. 185-204.
12. *Lo A., MacKinlay A.C.* An econometric analysis of non-synchronous trading // Journal of Econometrics. – 1990. – Vol. 45. – P. 181-212.
13. *Markowitz H.* Foundations of portfolio theory // The Journal of Finance. – 1991. – Vol. 7. – P. 469-477.
14. *Mittnik S., Rachev S.T.* Modeling asset returns with alternative stable distributions // Econometric Reviews. – 1993. – Vol. 12. – P. 261-330.
15. *Nelson D.* Conditional heteroskedasticity in stock returns: A New Approach // Econometrica. – 1991. – Vol. 59. – P. 347-370.
16. *Osborne M.F.M.* Brownian motion in the stock market // Operation Research. – 1959. – Vol. 7. – P. 145-173.
17. *Sutradhar B.C.* Testing Linear hypothesis with t-error variable // Sankhya Ser. B. – 1988. – Vol. 50. – P. 175-180.
18. *Zellner A.* Bayesian and non-Bayesian analysis of the regression model with multivariate student-t error terms // J. Amer. Statist. Assoc. – 1976. – Vol. 71. – P. 400-405.

OPTIMAL INVESTMENT PORTFOLIO FOR DIFFERENT TYPES OF ASSET RETURNS DISTRIBUTION

Taras BODNAR

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka str., 1
e-mail: bodnar@euv-frankfurt-o.de

The present paper treats the problem of the influence of the distribution uncertainty on the portfolio selection. The derived results are applied in constructing of the international portfolio based on the Polish, Russian, and Ukrainian stock market indices.

Key words: portfolio analysis, matrix elliptical distribution, statistical methods in finance.

Стаття надійшла до редколегії 26.04.2006

Прийнята до друку 24.10.2007

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2007. Вип.67. С.14-29 *Ser. Mech.-Math. 2007. Vol.67. P.14-29*

УДК 517.53

ГОЛОМОРФНІ ФУНКЦІЇ СКІНЧЕННОГО λ-ТИПУ В ПІВСМУЗІ

Андрій БРИДУН

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1,
e-mail: a_brydun@franko.lviv.ua, a_brydun@yahoo.com

Доведено критерій скінченності λ-типу голоморфних у півсмузі функцій.

Ключові слова: голоморфна функція, мероморфна функція, характеристика Неванлінни, функція скінченного λ-типу.

1. Формулювання основної теореми та допоміжних тверджень. У 60-х роках минулого століття Л. Рубел і Б. Тейлор [1] розробили метод рядів Фур'є, який допоміг отримати вичерпний опис нулів і полюсів мероморфних функцій f з доволі загальних класів Λ, які визначають довільними додатними, неспадними, необмеженими та неперервними мажорантами λ їхніх неванліннівських характеристик. Такі класи вони назвали класами функцій скінченного λ-типу.

К. Г. Малютін визначив критерій належності функції до класу аналітичних у верхній півплощині $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ функцій скінченного λ-типу в термінах sin-коефіцієнтів Фур'є функції $\log|f|$. Ці коефіцієнти Фур'є виражають через нулі функції f та її граничні значення на межі $\mathbb{C}_+$ і одержують з класичної формули Карлемана.

Ми визначаємо критерій скінченності λ-типу голоморфних у півсмузі функцій за інших умов на межі.

Нехай функція f мероморфна в замиканні півсмуги $R = \{z = x + iy : x > x_0, 0 < y < \pi\}$, $\{\rho_q\}$ – послідовність нулів функції f в R, занумерованих у порядку зростання їхніх дійсних частин, $\rho_q = \beta_q + i\gamma_q$; $\{\omega_p\}$ – послідовність полюсів функції f в R, занумерованих відповідно, $\omega_p = \xi_p + i\eta_p$. Припустимо, що f не має ні нулів, ні полюсів на ∂R.

Нехай $f(x_0) \neq 0, \infty$, і значення $\log f(x_0)$ вибране. В замиканні R з розрізами $\{t\beta_q + i\gamma_q : t \geq 1\}$ та $\{t\xi_q + i\eta_q : t \geq 1\}$ приймемо

$$\log f(z) = \log f(x_0) + \int\limits_{x_0}^{z} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta,$$

© Бридун Андрій, 2007

а також $\arg f(z) = \operatorname{Im} \log f(z)$.

Характеристику $S(x; x_0, f)$, яку ми ввели в [2], аналогічно до [3, с. 37–40], будемо називати *характеристикою Неванлінни для півсмуги*

$$S(x; x_0, f) = A(x; x_0, f) + B(x; x_0, f) + C(x; x_0, f),$$

де

$$C(x; x_0, f) = 2 \sum_{\omega_p \in R_x} \sin \eta_p \left(\frac{1}{e^{\xi_p}} - \frac{e^{\xi_p}}{e^{2x}} \right),$$

$$A(x; x_0, f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{x_0}^{x} \left(\log^+ |f(t)| + \log^+ |f(t + i\pi)| \right) \left(\frac{1}{e^t} - \frac{e^t}{e^{2x}} \right) dt,$$

$$B(x; x_0, f) = \frac{2}{\pi e^x} \int\limits_{0}^{\pi} \log^+ |f(x + iy)| \sin y \, dy,$$

$R_x = \{z = t + iy : x_0 < t < x, \, 0 < y < \pi\}$.

Означення 1. *Додатна, неперервна, зростаюча і необмежена на* $[x_0, +\infty)$ *функція* $\lambda(x)$ *називається функцією зростання.*

Означення 2. *Функція* f, *мероморфна в замиканні півсмуги* R, *називається функцією скінченного* λ*-типу в* R, *якщо існують сталі* $a, b > 0$ *такі, що для всіх* $x > x_0$ *виконується*

1) $S(x; x_0, f) \le a\,\lambda(x + b)$;

2) $\int\limits_{x_0}^{x} \frac{|\log|f(t)|| + |\log|f(t+i\pi)||}{e^t} \, dt \le a\,\lambda(x + b)$.

Клас таких функцій позначимо через $\mathcal{F}_\lambda$.

Нехай $c_k(x, f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \log |f(x + iy)| \sin ky \, dy, \quad k \in \mathbb{N}$, sin-*коефіцієнти Фур'є* функції $\log |f(x + iy)|$ як функції від y.

Теорема 1. *Нехай* λ *– функція зростання і нехай* f *голоморфна в замиканні півсмуги* R *функція. Тоді такі твердження еквівалентні:*

а) $f \in \mathcal{F}_\lambda$;

б) виконується умова 2) та існують сталі $a, b > 0$ *такі, що для всіх* $x > x_0$ *та* $k \in \mathbb{N}$ *виконується* $|c_k(x, f)| \le a e^x \,\lambda(x + b)$.

Для доведення теореми 1 ми використовуватимемо такі леми.

Лема 1. *Якщо* $\{z_j : z_j = x_j + iy_j\}$ *– скінченна множина в* R_x, *тоді*

$$\int\limits_{x_0}^{x} \sum_{z_j \in R_t} \frac{e^{kx_j}}{e^{kt}} \sin ky_j \, dt = \frac{1}{k} \sum_{z_j \in R_x} \sin ky_j - \frac{1}{k} \sum_{z_j \in R_x} \frac{e^{kx_j}}{e^{kx}} \sin ky_j, \quad j \in \mathbb{N}, \quad x_0 < x, \tag{1}$$

$$\int\limits_{x_0}^{x} \sum_{z_j \in R_t} \frac{e^{kt}}{e^{kx_j}} \sin ky_j \, dt = \frac{1}{k} \sum_{z_j \in R_x} \frac{e^{kx}}{e^{kx_j}} \sin ky_j - \frac{1}{k} \sum_{z_j \in R_x} \sin ky_j, \quad j \in \mathbb{N}, \quad x_0 < x. \tag{2}$$

Лема 2. *Нехай голоморфна в замиканні півсмуги* $R = \{z = x + iy : x > x_0,\ 0 < y < \pi\}$, *функція* f *не має ні нулів, ні полюсів на* ∂R *і* $f(x_0) \neq 0, \infty$. *Правильні такі співвідношення:*

$$c_k(x, f) = \frac{2}{k} \sum_{\rho_q \in R_x} \left(\frac{e^{kx}}{e^{k\beta_q}} - \frac{e^{k\beta_q}}{e^{kx}} \right) \sin k\gamma_q +$$

$$+\frac{1}{\pi} \int\limits_{x_0}^{x} \left(\frac{e^{kt}}{e^{kx}} - \frac{e^{kx}}{e^{kt}} \right) \left(\log|f(t)| + (-1)^{k+1} \log|f(t+i\pi)| \right) dt +$$

$$+\frac{1}{\pi} \left(\frac{e^{kx_0}}{e^{kx}} + \frac{e^{kx}}{e^{kx_0}} \right) \int\limits_{0}^{\pi} \log|f(x_0 + iy)| \sin ky\, dy +$$

$$+\frac{1}{\pi} \left(\frac{e^{kx_0}}{e^{x}} - \frac{e^{kx}}{e^{x_0}} \right) \int\limits_{0}^{\pi} \arg f(x_0 + iy) \cos ky\, dy, \quad k \in \mathbb{N}, \quad x_0 < x. \tag{3}$$

Лема 3. *Нехай* $\{\rho_q\}$ *– нулі голоморфної функції скінченного* λ*-типу в замиканні* R_{x+1}. *Тоді*

$$\sum_{\rho_q \in R_x} \sin \gamma_q \leq a e^{x} \lambda(x + b),$$

для деяких $a, b > 0$ *і для всіх* $x > x_0$.

2. Доведення допоміжних тверджень.

Доведення леми 1. Інтегруючи частинами, отримаємо

$$\int\limits_{x_0}^{x} \sum_{z_j \in R_t} \frac{e^{kx_j}}{e^{kt}} \sin ky_j\, dt = -\frac{1}{k} \int\limits_{x_0}^{x} \sum_{z_j \in R_t} e^{kx_j} \sin ky_j\, d\left(e^{-kt}\right) =$$

$$= -\frac{1}{k} \sum_{z_j \in R_x} \frac{e^{kx_j}}{e^{kx}} \sin ky_j + \frac{1}{k} \int\limits_{x_0}^{x} e^{-kt} d \left(\sum_{z_j \in R_t} e^{kx_j} \sin ky_j \right).$$

Функція $\psi(t) = \sum\limits_{z_j \in R_t} e^{kx_j} \sin ky_j$ має стрибки $e^{kx_j} \sin ky_j$ в точках $t_j = e^{x_j}$. Отже, останній інтеграл можна записати у вигляді

$$\frac{1}{k} \int\limits_{x_0}^{x} t^{-k}\, d\psi(t) = \frac{1}{k} \sum_{z_j \in R_x} e^{-kx_j} e^{kx_j} \sin ky_j = \frac{1}{k} \sum_{z_j \in R_x} \sin ky_j.$$

Аналогічно, отримаємо співвідношення (2). Лему 1 доведено.

Доведення леми 2. Нехай функція f голоморфна в замиканні R і не має нулів на ∂R_t. Застосуємо теорему про лишки до функції $f'(z)/f(z)\, e^{-kz}$ в R_t

$$\int\limits_{\partial R_t} \frac{f'(z)}{f(z)} e^{-kz}\, dz = 2\pi i \sum_{\rho_q \in R_t} e^{-k\rho_q}, \quad k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}. \tag{4}$$

Оскільки ∂R_t складається з чотирьох відрізків, тоді (4) запишемо так:

$$2\pi i \sum_{\rho_q \in R_t} e^{-k\rho_q} = \int\limits_{x_0}^{t} e^{-k\tau}\, \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}\, d\tau + ie^{-kt} \int\limits_{0}^{\pi} e^{-iky}\, \frac{f'(t+iy)}{f(t+iy)}\, dy +$$

$$+(-1)^{k+1} \int\limits_{x_0}^{t} e^{-k\tau}\, \frac{f'(\tau+i\pi)}{f(\tau+i\pi)}\, d\tau - ie^{-kx_0} \int\limits_{0}^{\pi} e^{-iky}\, \frac{f'(x_0+iy)}{f(x_0+iy)}\, dy, \quad k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \tag{5}$$

Інтегруючи частинами в першому інтегралі правого боку (5), маємо

$$\int\limits_{x_0}^{t} e^{-k\tau} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}\, d\tau = e^{-kt} \log f(t) - e^{-kx_0} \log f(x_0) + k \int\limits_{x_0}^{t} e^{-k\tau} \log f(\tau)\, d\tau, \tag{6}$$

$k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Роблячи те саме в третьому інтегралі, одержуємо

$$\int\limits_{x_0}^{t} e^{-k\tau} \frac{f'(\tau+i\pi)}{f(\tau+i\pi)}\, d\tau = e^{-kt} \log f(t+i\pi) - e^{-kx_0} \log f(x_0+i\pi) +$$

$$+k \int\limits_{x_0}^{t} e^{-k\tau} \log f(\tau+i\pi)\, d\tau, \quad k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \tag{7}$$

Далі

$$i \int\limits_{0}^{\pi} e^{-iky} \frac{f'(x_0+iy)}{f(x_0+iy)}\, dy = \int\limits_{0}^{\pi} e^{-iky}\, d \log f(x_0+iy) = (-1)^k \log f(x_0+i\pi) -$$

$$- \log f(x_0) + ik \int\limits_{0}^{\pi} e^{-iky} \log f(x_0+iy)\, dy, \quad k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \tag{8}$$

З урахуванням (6)–(8) співвідношення (5) набуде вигляду

$$2\pi i \sum_{\rho_q \in R_t} e^{-k\rho_q} = e^{-kt} \log f(t) + k \int\limits_{x_0}^{t} e^{-k\tau} \log f(\tau)\, d\tau +$$

$$+ie^{-kt} \int\limits_{0}^{\pi} e^{-iky} \frac{f'(t+iy)}{f(t+iy)}\, dy + (-1)^{k+1} e^{-kt} \log f(t+i\pi) +$$

$$+(-1)^{k+1} k \int\limits_{x_0}^{t} e^{-k\tau} \log f(\tau+i\pi)\, d\tau - ike^{-kx_0} \int\limits_{0}^{\pi} e^{-iky} \log f(x_0+iy)\, dy, k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \tag{9}$$

Рівність (4), а отже і (9), правильні при $t \in (x_0; x)$ за винятком $t = \operatorname{Re}\rho_q$. Домножимо (9) на e^{kt} і проінтегруємо по t від x_0 до x. Одержимо

$$\begin{aligned} 2\pi i \int\limits_{x_0}^{x} e^{kt} \sum_{\rho_q \in R_t} e^{-k\rho_q}\,dt &= \int\limits_{x_0}^{x} \log f(t)\,dt + \\ +k \int\limits_{x_0}^{x} e^{kt} \left(\int\limits_{x_0}^{t} e^{-k\tau} \log f(\tau)\,d\tau \right) dt &+ \int\limits_{x_0}^{x} \left(i \int\limits_{0}^{\pi} e^{-iky} \frac{f'(t+iy)}{f(t+iy)}\,dy \right) dt + \\ +(-1)^{k+1} \int\limits_{x_0}^{x} \log f(t+i\pi)\,dt &+ (-1)^{k+1} k \int\limits_{x_0}^{x} e^{kt} \left(\int\limits_{x_0}^{t} e^{-k\tau} \log f(\tau+i\pi)\,d\tau \right) dt + \\ + i \int\limits_{0}^{\pi} e^{-iky} \log f(x_0+iy)\,dy &- ie^{k(x-x_0)} \int\limits_{0}^{\pi} e^{-iky} \log f(x_0+iy)\,dy, \quad k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Інтегрування частинами в другому інтегралі правого боку (10) дає

$$\begin{aligned} \int\limits_{x_0}^{x} e^{kt} \left(\int\limits_{x_0}^{t} e^{-k\tau} \log f(\tau)\,d\tau \right) dt &= \frac{1}{k} \int\limits_{x_0}^{x} \left(\int\limits_{x_0}^{t} e^{-k\tau} \log f(\tau)\,d\tau \right) de^{kt} = \\ &= \frac{e^{kx}}{k} \int\limits_{x_0}^{x} e^{-kt} \log f(t)\,dt - \frac{1}{k} \int\limits_{x_0}^{x} \log f(t)\,dt, \quad k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{aligned} \tag{11}$$

Аналогічно

$$\begin{aligned} \int\limits_{x_0}^{x} e^{kt} \left(\int\limits_{x_0}^{t} e^{-k\tau} \log f(\tau+i\pi)\,d\tau \right) dt &= \frac{1}{k} \int\limits_{x_0}^{x} \left(\int\limits_{x_0}^{t} e^{-k\tau} \log f(\tau+i\pi)\,d\tau \right) de^{kt} = \\ &= \frac{e^{kx}}{k} \int\limits_{x_0}^{x} e^{-kt} \log f(t+i\pi)\,dt - \frac{1}{k} \int\limits_{x_0}^{x} \log f(t+i\pi)\,dt, \quad k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{aligned} \tag{12}$$

Застосувавши теорему Фубіні до третього доданка правого боку (10), маємо

$$\begin{aligned} \int\limits_{x_0}^{x} \left(i \int\limits_{0}^{\pi} e^{-iky} \frac{f'(t+iy)}{f(t+iy)}\,dy \right) dt &= i \int\limits_{0}^{\pi} e^{-iky} \left(\int\limits_{x_0}^{x} \frac{f'(t+iy)}{f(t+iy)}\,dt \right) dy = \\ &= i \int\limits_{0}^{\pi} e^{-iky} \left(\log f(x+iy) - \log(x_0+iy) \right) dy, \quad k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{aligned} \tag{13}$$

Враховуючи (11)–(13), співвідношення (10) запишемо у вигляді

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} e^{-iky}\ \log f(x+iy)\,dy = \int\limits_{x_0}^{x} e^{kt}\sum_{\rho_q\in R_t} e^{-k\rho_q}\,dt+$$

$$+\frac{ie^{kx}}{2\pi}\int\limits_{x_0}^{x} e^{-kt}\left(\log f(t)+(-1)^{k+1}\log f(t+i\pi)\right)\,dt+$$

$$+\frac{e^{k(x-x_0)}}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} e^{-iky}\log f(x_0+iy)\,dy,\quad k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}. \tag{14}$$

Позначимо

$$l_k(x,f)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} e^{-iky}\log f(x+iy)\,dy,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Безпосередні підрахунки засвідчують, що

$$c_k(x,f)=-\mathrm{Im}\frac{l_k(x,f)+\overline{l_{-k}(x,f)}}{2},\quad k\in\mathbb{Z}. \tag{15}$$

Враховуючи (2) та (15), одержимо

$$c_k(x,f)=2\int\limits_{x_0}^{x}\sum_{\rho_q\in R_t}\left(\frac{e^{k\beta_q}}{e^{kt}}+\frac{e^{kt}}{e^{k\beta_q}}\right)\sin k\gamma_q\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{x_0}^{x}\left(\frac{e^{kt}}{e^{kx}}-\frac{e^{kx}}{e^{kt}}\right)\left(\log|f(t)|+(-1)^{k+1}\log|f(t+i\pi)|\right)\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\left(\frac{e^{kx_0}}{e^{kx}}+\frac{e^{kx}}{e^{kx_0}}\right)\int\limits_0^{\pi}\log|f(x_0+iy)|\sin ky\,dy+$$

$$+\frac{1}{\pi}\left(\frac{e^{kx_0}}{e^{kx}}-\frac{e^{kx}}{e^{kx_0}}\right)\int\limits_0^{\pi}\arg f(x_0+iy)\cos ky\,dy,\quad k\in\mathbb{N},\quad x_0<x. \tag{16}$$

Застосувавши лему 1 до першого доданка правого боку (2), отримаємо (3). Лему 2 доведено.

Доведення леми 3. Якщо $\beta_q\le x$, тоді правильна така нерівність

$$\frac{e^{\beta_q}}{e^x}\le\frac{e^{x+1}}{e^{\beta_q}}-\frac{e^{\beta_q}}{e^x}.$$

Звідси

$$\frac{e^{\beta_q}}{e^x}\le e^{x+1}\left(\frac{1}{e^{\beta_q}}-\frac{e^{\beta_q}}{e^{2x+2}}\right).$$

Отже, оскільки $0 < \gamma_q < \pi$, то

$$\sum_{\rho_q \in R_x} \frac{e^{\beta_q}}{e^x} \sin\gamma_q \le \sum_{\rho_q \in R_{x+1}} \frac{e^{\beta_q}}{e^x} \sin\gamma_q \le \sum_{\rho_q \in R_{x+1}} e^{x+1} \left(\frac{1}{e^{\beta_q}} - \frac{e^{\beta_q}}{e^{2x+2}} \right) \sin\gamma_q. \qquad (17)$$

За означенням 2 права частина (17) є характеристикою $C(x+1; x_0, 1/f)$, тобто

$$\sum_{\rho_q \in R_x} \frac{e^{\beta_q}}{e^x} \sin\gamma_q \le e^{x+1} C(x+1; x_0, \frac{1}{f}) \le ae^x\,\lambda(x+1+b) \le a_1 e^x\,\lambda(x+b_1). \qquad (18)$$

Враховуючи, що функція f є функцією скінченного λ-типу та аналог першої основної теореми (див. [2]), маємо $C(x; x_0, 1/f) \le a\,\lambda(x+b)$.

Врахувавши означення $C(x; x_0, 1/f)$, одержуємо

$$\sum_{\rho_q \in R_x} \left(\frac{e^x}{e^{\beta_q}} - \frac{e^{\beta_q}}{e^{2x}} \right) \sin\gamma_q \le ae^x\,\lambda(x+b). \qquad (19)$$

З огляду на нерівності (17)–(19), одержуємо

$$\sum_{\rho_q \in R_x} \sin\gamma_q \le \sum_{\rho_q \in R_x} \frac{e^x}{e^{\beta_q}} \sin\gamma_q \le ae^x\,\lambda(x+b) +$$
$$+ \sum_{\rho_q \in R_x} \frac{e^{\beta_q}}{e^x} \sin\gamma_q \le a_2 e^x\,\lambda(x+b_2),$$

при $0 < \gamma_q < \pi$. Лему 3 доведено.

3. Доведення теореми 1.

Доведення теореми 1. Нехай $f \in \mathcal{F}_\lambda$.

Для коефіцієнтів Фур'є функції f правильна оцінка

$$|c_k(x,f)| \le \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \big|\log|f(x+iy)|\big|\,|\sin ky|\,dy, \quad k \in \mathbb{N}.$$

З огляду на нерівність $|\sin ky| \le k\sin y$ для $0 \le y \le \pi$, (див., наприклад, [4, с. 10]) та умову а) теореми 1 отримаємо

$$|c_k(x,f)| \le k\frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \big|\log|f(x+iy)|\big| \sin y\,dy =$$
$$= k\frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \log^+|f(x+iy)| \sin y\,dy + k\frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \log^-|f(x+iy)| \sin y\,dy \le$$
$$\le k\,ae^x\,\lambda(x+b) + k\frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \log^-|f(x+iy)| \sin y\,dy, \quad k \in \mathbb{N}. \qquad (20)$$

За аналогом першої основної теореми (теорема 2 з [2]) $S(x; x_0, 1/f) = S(x; x_0, f) + \varepsilon(x; x_0, f)$, де $\varepsilon(x; x_0, f) = O(1)$ при $x \to \infty$, для функції $f \in \mathcal{F}_\lambda$ маємо, що функція $1/f \in \mathcal{F}_\lambda$. Звідси та з умови *a)* випливає, що $S(x; x_0, 1/f) \le a\,\lambda(x+b) + \varepsilon(x; x_0, f)$, де $\varepsilon(x; x_0, f) = O(1)$ при $x \to \infty$. Оскільки $B(x; x_0, 1/f) \le S(x; x_0, 1/f)$, то

$$\frac{2}{\pi\, e^x} \int\limits_0^\pi \log^- |f(x+iy)| \sin y\, dy =$$

$$= \frac{2}{\pi\, e^x} \int\limits_0^\pi \log^+ \left| \frac{1}{f(x+iy)} \right| \sin y\, dy = B(x; x_0, \frac{1}{f}) \le a_1\, \lambda(x+b),$$

де a_1– деяка стала.

Отже, з нерівності (3) та умови *a)* теореми 1 випливає

$$|c_k(x, f)| \le k\, a e^x\, \lambda(x+b), \tag{21}$$

при деяких додатних a, b і всіх $k \in \mathbb{N}$.

Згідно з (3)

$$c_k(x+1, f) = \frac{2}{k} \sum_{\rho_q \in R_{x+1}} \left(\frac{e^{k(x+1)}}{e^{k\beta_q}} - \frac{e^{k\beta_q}}{e^{k(x+1)}} \right) \sin k\gamma_q +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int\limits_{x_0}^{x+1} \left(\frac{e^{kt}}{e^{k(x+1)}} - \frac{e^{k(x+1)}}{e^{kt}} \right) \left(\log|f(t)| + (-1)^{k+1} \log|f(t+i\pi)| \right) dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \left(\frac{e^{kx_0}}{e^{k(x+1)}} + \frac{e^{k(x+1)}}{e^{kx_0}} \right) \int\limits_0^\pi \log|f(x_0+iy)| \sin ky\, dy +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \left(\frac{e^{kx_0}}{e^{k(x+1)}} - \frac{e^{k(x+1)}}{e^{kx_0}} \right) \int\limits_0^\pi \arg f(x_0+iy) \cos ky\, dy, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{22}$$

Домножимо обидва боки рівності (22) на e^{-k}, віднімемо від них $c_k(x, f)$, і використавши (3), отримаємо

$$\frac{1}{e^k}c_k(x+1,f)-c_k(x,f)=$$
$$=\frac{2}{k}\sum_{\rho_q\in R_{x+1}}\left(\frac{e^{kx}}{e^{k\beta_q}}-\frac{e^{k\beta_q}}{e^{2k}e^{kx}}\right)\sin k\gamma_q-\frac{2}{k}\sum_{\rho_q\in R_x}\left(\frac{e^{kx}}{e^{k\beta_q}}-\frac{e^{k\beta_q}}{e^{kx}}\right)\sin k\gamma_q+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{x_0}^{x+1}\left(\frac{e^{kt}}{e^{k(x+2)}}-\frac{e^{kx}}{e^{kt}}\right)\left(\log|f(t)|+(-1)^{k+1}\log|f(t+i\pi)|\right)\,dt-$$
$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{x_0}^{x}\left(\frac{e^{kt}}{e^{kx}}-\frac{e^{kx}}{e^{kt}}\right)\left(\log|f(t)|+(-1)^{k+1}\log|f(t+i\pi)|\right)\,dt+$$
$$+\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{e^{2k}}-1\right)\frac{e^{kx_0}}{e^{kx}}\int\limits_0^{\pi}\log|f(x_0+iy)|\sin ky\,dy+$$
$$+\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{e^{2k}}-1\right)\frac{e^{kx_0}}{e^{kx}}\int\limits_0^{\pi}\arg f(x_0+iy)\cos ky\,dy=$$
$$=I_1+I_2+I_3+I_4,\quad k\in\mathbb{N}. \tag{23}$$

Розглянемо I_1

$$I_1=\frac{2}{k}\sum_{\rho_q\in R_{x+1}}\left(\frac{e^{kx}}{e^{k\beta_q}}-\frac{e^{k\beta_q}}{e^{2k}e^{kx}}\right)\sin k\gamma_q-\frac{2}{k}\sum_{\rho_q\in R_x}\left(\frac{e^{kx}}{e^{k\beta_q}}-\frac{e^{k\beta_q}}{e^{kx}}\right)\sin k\gamma_q=$$
$$=\frac{2}{k}\sum_{\rho_q\in R_{x+1}\setminus R_x}\left(\frac{e^{kx}}{e^{k\beta_q}}-\frac{e^{k\beta_q}}{e^{2k}e^{kx}}\right)\sin k\gamma_q+$$
$$+\frac{2}{k}\left(1-\frac{1}{e^{2k}}\right)\sum_{\rho_q\in R_x}\frac{e^{k\beta_q}}{e^{kx}}\sin k\gamma_q=G_1+G_2,\quad k\in\mathbb{N}.$$

Оцінимо $|G_1|$,

$$|G_1|=\frac{2}{k}\left|\sum_{\rho_q\in R_{x+1}\setminus R_x}\left(\frac{e^{kx}}{e^{k\beta_q}}-\frac{e^{k\beta_q}}{e^{2k}e^{kx}}\right)\sin k\gamma_q\right|,\quad k\in\mathbb{N}.$$

Оскільки $e^{k(x-\beta_q)}-e^{k(\beta_q-x-2)}\le 1$ для всіх $x\le\rho_q\le x+1$, то

$$|G_1|\le\frac{2}{k}\left|\sum_{\rho_q\in R_x}\sin k\gamma_q\right|\le 2\sum_{\rho_q\in R_x}\sin\gamma_q,\quad k\in\mathbb{N}, \tag{24}$$

а також

$$|G_2| = \frac{2}{k}\left|\left(1-\frac{1}{e^{2k}}\right)\sum_{\rho_q\in R_x}\frac{e^{k\beta_q}}{e^{kx}}\sin k\gamma_q\right| \le$$

$$\le \frac{2}{k}\left|\sum_{\rho_q\in R_{x+1}}\sin k\gamma_q\right| \le 2\sum_{\rho_q\in R_{x+1}}\sin\gamma_q, \quad k\in\mathbb{N}. \tag{25}$$

Отож, застосувавши лему 3 до співвідношень (24) та (25), отримаємо

$$|I_1| \le ae^x\,\lambda(b+x). \tag{26}$$

Оцінимо I_2

$$|I_2| = \left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{x_0}^{x+1}\left(\frac{e^{kt}}{e^{k(x+2)}}-\frac{e^{kx}}{e^{kt}}\right)\left(\log|f(t)|+(-1)^{k+1}\log|f(t+i\pi)|\right)\,dt -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\pi}\int\limits_{x_0}^{x}\left(\frac{e^{kt}}{e^{kx}}-\frac{e^{kx}}{e^{kt}}\right)\left(\log|f(t)|+(-1)^{k+1}\log|f(t+i\pi)|\right)\,dt\right| \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\left|\left(\frac{1}{e^{2k}}-1\right)\int\limits_{x_0}^{x}\frac{e^{kt}}{e^{kx}}\left(\log|f(t)|+(-1)^{k+1}\log|f(t+i\pi)|\right)\,dt\right| +$$

$$+\frac{1}{\pi}\left|\int\limits_{x}^{x+1}\left(\frac{e^{kt}}{e^{k(x+2)}}-\frac{e^{kx}}{e^{kt}}\right)\left(\log|f(t)|+(-1)^{k+1}\log|f(t+i\pi)|\right)\,dt\right| \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\int\limits_{x_0}^{x+1}\left(|\log|f(t)||+|\log|f(t+i\pi)||\right)\,dt.$$

Врахувавши умову 2) означення 2, отримуємо

$$|I_2| \le \frac{1}{\pi}\int\limits_{x_0}^{x+1}\frac{e^{x+1}}{e^t}\left(|\log|f(t)||+|\log|f(t+i\pi)||\right)\,dt \le e^{x+1}a\,\lambda(x+b), \tag{27}$$

де a, b – деякі сталі.

Зауважимо, що доданки $|I_3|$ та $|I_4|$ не перевищують деякої сталої. Справді, $|\log|f(x_0+iy)|\sin ky| \le K$ і $|\arg f(x_0+iy)\cos ky| \le K$, $0<y<\pi$, де K – деяка стала. Тоді

$$|I_3|+|I_4| = \left|\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{e^{2k}}-1\right)\frac{e^{kx_0}}{e^{kx}}\int\limits_0^\pi \log|f(x_0+iy)|\sin ky\,dy\right| +$$

$$+\left|\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{e^{2k}}-1\right)\frac{e^{kx_0}}{e^{kx}}\int\limits_0^\pi \arg f(x_0+iy)\cos ky\,dy\right| \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{e^{2k}}\,\pi K_1 + \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{e^{2k}}\,\pi K_1 \le K_2, \tag{28}$$

де K_1, K_2 – деякі сталі.

Отже, з (3) та (26)–(28) маємо

$$|c_k(x,f)| - 1/e^k\,|c_k(x+1,f)| \le \left|1/e^k\,c_k(x+1,f) - c_k(x,f)\right| \le ae^x\,\lambda(x+b), \quad k\in\mathbb{N}.$$

Звідси

$$|c_k(x,f)| \le 1/e^k\,|c_k(x+1,f)| + ae^x\,\lambda(x+b), \quad k\in\mathbb{N}.$$

Враховуючи (21), одержимо $|c_k(x,f)| \le k/e^k\,a\lambda(x+1+b) + ae^x\,\lambda(x+b)$, звідки випливає *б)*, оскільки умова 2) входить в означення класу $\mathcal{F}_\lambda$.

Нехай тепер виконуються умови *б)* теореми 1.

Для функції f правильна формула Пуассона-Йенсена

$$\log|f(x+iy)| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial P_{x_1}} \log|f(u+iv)|\,\frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial n}\,ds - \sum_{\rho_q\in P_{x_1}} G(z,\rho_q), \tag{29}$$

де $P_{x_1} = \{z = x+iy : x_1-\alpha < x < x_1+\alpha,\ 0<y<\pi\}$, $x_0+\alpha < x_1,\ \alpha>0$, $G(z,\zeta)$ – функція Гріна прямокутника P_{x_1}, $\frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial n}$ – похідна за внутрішньою нормаллю ([3, с. 15]). Оскільки $G(z,\zeta)\ge 0$, то справджується таке співвідношення:

$$\log|f(x+iy)| \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial P_{x_1}} \log|f(u+iv)|\,\frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial n}\,ds. \tag{30}$$

Використовуючи теорію еліптичних функцій (див., наприклад, [5, гл. VIII], [6], [7]), можемо отримати розвинення ядра у формулі Пуассона-Йенсена (29)

$$G(z,\zeta) = 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(1-e^{-4m\alpha})}\,e^{m(u-x)}\left(1-e^{2m(x-x_1-\alpha)}\right)\times$$

$$\times\left(1-e^{2m(x_1-u-\alpha)}\right)\sin my\sin mv, \quad x_1-\alpha\le u<x\le x_1+\alpha, \tag{31}$$

$$G(z,\zeta) = 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(1-e^{-4m\alpha})}\,e^{m(x-u)}\left(1-e^{2m(x_1-x-\alpha)}\right)\times$$

$$\times\left(1-e^{2m(u-x_1-\alpha)}\right)\sin my\sin mv, \quad x_1-\alpha\le x<u\le x_1+\alpha. \tag{32}$$

Тоді

$$\begin{gathered}\frac{\partial G(z,u)}{\partial n}=2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-e^{-4m\alpha}}\,e^{m(u-x)}\left(1-e^{2m(x-x_1-\alpha)}\right)\times\\ \times\left(1-e^{2m(x_1-u-\alpha)}\right)\sin my,\quad x_1-\alpha\le u<x\le x_1+\alpha,\end{gathered}\tag{33}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial G(z,u+i\pi)}{\partial n}=2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{1-e^{-4m\alpha}}\,e^{m(u-x)}\left(1-e^{2m(x-x_1-\alpha)}\right)\times\\ \times\left(1-e^{2m(x_1-u-\alpha)}\right)\sin my,\quad x_1-\alpha\le u<x\le x_1+\alpha;\end{gathered}\tag{34}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial G(z,u)}{\partial n}=2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-e^{-4m\alpha}}\,e^{m(x-u)}\left(1-e^{2m(x_1-x-\alpha)}\right)\times\\ \times\left(1-e^{2m(u-x_1-\alpha)}\right)\sin my,\quad x_1-\alpha\le x<u\le x_1+\alpha,\end{gathered}\tag{35}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial G(z,u+i\pi)}{\partial n}=2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{1-e^{-4m\alpha}}\,e^{m(x-u)}\left(1-e^{2m(x_1-x-\alpha)}\right)\times\\ \times\left(1-e^{2m(u-x_1-\alpha)}\right)\sin my,\quad x_1-\alpha\le x<u\le x_1+\alpha;\end{gathered}\tag{36}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial G(z,x_1-\alpha)}{\partial n}=4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-e^{-4m\alpha}}\,e^{m(x_1-x-\alpha)}\times\\ \times\left(1-e^{2m(x-x_1-\alpha)}\right)\times\sin my\sin mv,\end{gathered}\tag{37}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial G(z,x_1+\alpha)}{\partial n}=4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-e^{-4m\alpha}}\,e^{m(x-x_1-\alpha)}\times\\ \times\left(1-e^{2m(x_1-x-\alpha)}\right)\times\sin my\sin mv.\end{gathered}\tag{38}$$

Співвідношення (30) при $\alpha = 1$, $0 < \delta < 1$ і $x = x_1$ має вигляд

$$\log|f(x_1+iy)| \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \log|f(x_1+1+iv)|\,\frac{\partial G(z,x_1+1)}{\partial n}\,dv+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \log|f(x_1-1+iv)|\,\frac{\partial G(z,x_1-1)}{\partial n}\,dv+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{x_1-1}^{x_1-\delta}\log|f(u)|\,\frac{\partial G(z,u)}{\partial n}\,du+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}\log|f(u)|\,\frac{\partial G(z,u)}{\partial n}\,du+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{x_1+\delta}^{x_1+1}\log|f(u)|\,\frac{\partial G(z,u)}{\partial n}\,du+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{x_1-1}^{x_1-\delta}\log|f(u+i\pi)|\,\frac{\partial G(z,u+i\pi)}{\partial n}\,du+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}\log|f(u+i\pi)|\,\frac{\partial G(z,u+i\pi)}{\partial n}\,du+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{x_1+\delta}^{x_1+1}\log|f(u+i\pi)|\,\frac{\partial G(z,u+i\pi)}{\partial n}\,du = I_1+I_2+I_{31}+I_{32}+I_{33}+I_{41}+I_{42}+I_{43}.$$

Використавши нерівність $a^+ \le |a|$, маємо

$$\log^+|f(x_1+iy)| \le (I_1+I_2)^+ + I_{31}^+ + I_{32}^+ + I_{33}^+ + I_{41}^+ + I_{42}^+ + I_{43}^+. \tag{39}$$

Розглянемо $I_1 + I_2$

$$I_1+I_2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{\partial G(z,x_1+1+iv)}{\partial n}\log|f(x_1+1+iv))|\,dv+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{\partial G(z,x_1-1+iv)}{\partial n}\log|f(x_1-1+iv)|\,dv=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-e^{-4m}}\,e^{-m}\left(1-e^{-2m}\right)\sin my\,\log|f(x_1+1+iv)|\sin mv\,dv+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-e^{-4m}}\,e^{-m}\left(1-e^{-2m}\right)\sin my\,\log|f(x_1-1+iv)|\sin mv\,dv.$$

Оскільки

$$\left|\frac{1}{1-e^{-4m}}\,e^{-m}\left(1-e^{-2m}\right)\sin my\right| \le \frac{e^{-m}}{1+e^{-2m}} \le \frac{1}{e^m},$$

то за теоремою Вейєрштрасса ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-e^{-4m}}\,e^{-m}\left(1-e^{-2m}\right)\sin my\sin mv$$

рівномірно збігається при $0 \le v \le \pi$ і його можна почленно інтегрувати. Тому

$$I_1 + I_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{e^m} \left(c_m(x_1+1, f) + c_m(x_1-1, f) \right).$$

Отже, згідно з умовою *б)* теореми 1

$$|I_1 + I_2| \le \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{e^m} \left(|c_m(x_1+1, f)| + |c_m(x_1-1, f)| \right) \le a\, e^{x_1}\, \lambda(x_1+b),$$

де a, b – деякі сталі. Домноживши це співвідношення на $\sin y$ і проінтегрувавши за y від 0 до π, отримаємо

$$\int\limits_0^{2\pi} |I_1 + I_2| \, \sin y \, dy \le 2\, a e^{x_1}\, \lambda(x_1+b). \tag{40}$$

Розглянемо I_{31} при $\alpha = 1$ і $x = x_1$. Оскільки $\frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial n} \ge 0$, $\log^+|x| \le |\log|x||$, то

$$I_{31}^+ \le \frac{1}{\pi} \int\limits_{x_1-1}^{x_1-\delta} |\log|f(u)|| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1+e^{-2m}}\, e^{m(u-x_1)} \left(1 - e^{2m(x_1-u-1)}\right) \sin my \, du. \tag{41}$$

Оскільки

$$\left| \frac{1}{1+e^{-2m}}\, e^{(u-x_1)} \left(1 - e^{-2m(x_1-u-1)}\right) \sin my \right| \le e^{m(u-x_1)} \le e^{-m\delta},$$

і мажоруючий ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty} e^{-m\delta} = \frac{1}{1-e^{-\delta}}$, збіжний, то за теоремою Вейєрштрасса ряд (41) збіжний абсолютно і рівномірно при $0 \le y \le \pi$, $x_1 - 1 \le u \le x_1 - \delta$. Отже, його можна почленно інтегрувати на $[x_1 - 1, x_1 - \delta]$. Тому

$$I_{31}^+ \le \sum_{m=1}^{\infty} \sin my \frac{1}{\pi} \int\limits_{x_1-1}^{x_1-\delta} |\log|f(u)|| \, \frac{1}{1+e^{-2m}}\, e^{m(u-x_1)} \left(1 - e^{2m(x_1-u-1)}\right) du. \tag{42}$$

Домножимо співвідношення (42) на $\sin y$ і проінтегруємо за y від 0 до π. Тоді

$$\int\limits_0^{\pi} I_{31}^+ \, \sin y \, dy \le$$

$$\le \int\limits_0^{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sin my \frac{1}{\pi} \int\limits_{x_1-1}^{x_1-\delta} |\log|f(u)|| \, \frac{e^{m(u-x_1)}}{1+e^{-2m}} \left(1 - e^{2m(x_1-u-1)}\right) du \sin y \, dy.$$

Почленне інтегрування рівномірно збіжного на $[0,\pi]$ ряду дає

$$\sum_{m=1}^{\infty}\int\limits_{0}^{\pi}\sin my\sin y\frac{1}{\pi}\int\limits_{x_1-1}^{x_1-\delta}|\log|f(u)||\,\frac{e^{m(u-x_1)}}{1+e^{-2m}}\left(1-e^{2m(x_1-u-1)}\right)du\,dy.$$

З ортогональності системи $\{\sin my\}_{m=1}^{\infty}$ на $[0,\pi]$, маємо

$$\int\limits_{0}^{\pi}I_{31}^{+}\sin y\,dy\le\int\limits_{0}^{\pi}\sin^2 y\int\limits_{x_1-1}^{x_1-\delta}|\log|f(u)||\,\frac{e^{u-x_1}}{1+e^{-2}}\left(1-e^{2(x_1-u-1)}\right)du\,dy\le$$

$$\le\frac{1}{2}\int\limits_{x_1-1}^{x_1-\delta}|\log|f(u)||\,\frac{e^{u-x_1}}{1+e^{-2}}\left(1-e^{2(x_1-u-1)}\right)du\,dy\le$$

$$\le\frac{1}{2}\int\limits_{x_1-1}^{x_1-\delta}|\log|f(u)||\,du\le\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x_1+1}|\log|f(u)||\,du.$$

Оскільки $\frac{1}{e^{x_1+1}}\le\frac{1}{e^t}$, при $t\le x_1+1$, то використавши умову 2), отримуємо

$$\frac{1}{e^{x+1}}\int\limits_{0}^{\pi}I_{31}^{+}\sin y\,dy\le a\lambda(x_1+b). \qquad (43)$$

Аналогічно до I_{31}^{+} доводиться оцінка для I_{33}^{+}, I_{41}^{+} та I_{43}^{+}.

З абсолютної неперервності інтеграла Лебега існує таке $\delta>0$, $\delta=\delta(x_1)<1$, що кожен з інтегралів $|I_{32}|$ і $|I_{42}|$ не перевищує 1. Отже, з урахуванням співвідношень (40) та (43) отримаємо $\int_0^\pi\log^+|f(x_1+iy)|\sin y\,dy\le e^x a_1\lambda(x+b_1)$, де a_1, b_1 – деякі сталі. Ми показали, що $B(x;x_0,f)\le a\,\lambda(x+b)$. Тепер оцінимо $A(x;x_0,f)$,

$$A(x;x_0,f)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{x_0}^{x}\left(\log^+|f(t)|+\log^+|f(t+i\pi)|\right)\left(\frac{1}{e^t}-\frac{e^t}{e^{2x}}\right)dt\le$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\log^+|f(t)|+\log^+|f(t+i\pi)|}{e^t}\,dt.$$

Використавши умову 2) та нерівність $\log^+|x|\le|\log|x||$, одержуємо $A(x;x_0,f)\le$ $\le a_1\,\lambda(x+b_1)$, де a_1, b_1 – деякі сталі.

Отож, теорему 1 доведено.

---

1. *Rubel L. A., Taylor B. A.* Fourier series method for meromorphic and entire functions // Bull. Soc. Math. France – 1968. – **96**. – P. 53-96.

2. *Бридун А. М.* Характеристика і перша основна теорема Неванлінни для мероморфних в півсмузі функцій // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2004. – Вип. 63. – С. 32-43.
3. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. – М., 1970.
4. *Демидович Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М., 1990.
5. *Ахиезер Н. И.* Элементы теории эллиптических функций. – М., 1970.
6. *Малютин К. Г.* Ряды Фурье и δ-субгармонические функции конечного γ-типа в полуплоскости // Матем. сборник – 2001. – 192. – №6. – С. 51-70.
7. *Малютин К. Г., Коломиец С. В.* Ряды Фурье и истинно-субгармонические функции конечного γ-типа // Вісн. Харків. ун-ту. Серія матем., прикладна матем. і мех. – 2000. – **475**. – С. 105-112.

HOLOMORPHIC FUNCTIONS OF FINITE λ-TYPE IN A HALF-STRIP

Andriy BRYDUN

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka str., 1
e-mail: a_ brydun@franko.lviv.ua, a_ brydun@yahoo.com

A criterion of λ-type finiteness of holomorphic functions in a half-strip is proved.

Key words: holomorphic function, meromorphic function, Nevanlinna characteristic, function of finite λ-type.

Стаття надійшла до редколегії 20.12.2006

Прийнята до друку 24.10.2007

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2007. Вип. 67. С. 30–52

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech.-Math. 2007. Vol. 67. P. 30–52

УДК 517.95

ЗАДАЧА З ПОЧАТКОВОЮ УМОВОЮ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОЇ ПАРАБОЛІЧНОЇ ВАРІАЦІЙНОЇ НЕРІВНОСТІ В НЕОБМЕЖЕНІЙ ЗА ПРОСТОРОВИМИ ЗМІННИМИ ОБЛАСТІ

Олег БУГРІЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – необмежена область, $\Omega_\tau = \{(x,t) \ : \ x \in \Omega, \ t = \tau\}$, $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1, t_2)$, $p \in (1;2)$, $\mathcal{K} \subset L^p(0,T; W^{1,p}_{\text{loc}}(\overline{\Omega})) \cap L^2_{\text{loc}}(\overline{Q_{0,T}})$ – опукла замкнена множина. Розглянуто параболічну варіаційну нерівність

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[v_t(v-u)\psi + \sum_{i=1}^{n} a_i |u_{x_i}|^{p-2} u_{x_i} [(v-u)\psi]_{x_i} + (cu-f)(v-u)\psi +$$
$$+\tfrac{1}{2}\psi_t |v-u|^2\Big] dxdt \geq \tfrac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |v-u|^2 \psi dx - \tfrac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} |v-u_0|^2 \psi dx,$$

де $\tau \in (0,T]$, $\psi \geq 0$ – нескінченно диференційовна функція з компактним в $\overline{Q_{0,T}}$ носієм, $v \in \mathcal{K}$, $v_t \in L^2_{\text{loc}}(Q_{0,T})$ – довільні. Якщо функції $a_1, \ldots, a_n$ зростають при $|x| \to \infty$ не швидше за $a^0(1+|x|^\nu)$, де $a^0, \nu > 0$, то (при певних додаткових умовах) доведено однозначну розв'язність цієї варіаційної нерівності в класі функцій $u \in \mathcal{K} \cap C([0,T]; L^2_{\text{loc}}(\overline{\Omega}))$.

Ключові слова: параболічна варіаційна нерівність, задача з початковою умовою, необмежена область.

Розглянемо в області $G = \mathbb{R}^n \times (0;T)$ задачу Коші

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} (a(x)|u_{x_i}|^{p-2} u_{x_i})_{x_i} + b(x)|u|^{q-2}u = 0, \qquad u|_{t=0} = u_0, \qquad (*)$$

де $p, q \in (1; +\infty)$ – деякі числа. Спочатку вважатимемо, що $a \equiv 1$, $b \equiv 0$ і рівняння $(*)$ є лінійним, тобто $p, q = 2$. Тоді задача $(*)$ не може мати більше одного розв'язку в класі функцій, які задовольняють умову $|u(x,t)| \leq Ce^{c|x|^2}$ з якими-небудь сталими $C, c > 0$. Відмінний від нуля розв'язок такої задачі при $u_0 = 0$, який задовольняє оцінку $|u(x,t)| \leq C \exp(c|x|^{2+\varepsilon})$ з $\varepsilon > 0$ вперше побудував Тихонов А.Н. в [1]. Теклінд С. у [2] довів єдиність розв'язку цієї задачі в класі функцій, які задовольняють умову $|u(x,t)| \leq e^{|x|h(|x|)}$, де h – неспадна невід'ємна функція h, для якої

© Бугрій Олег, 2007

$\int_1^{+\infty} \frac{ds}{h(s)} = +\infty$. Брезіс Х. та Фрідман А. в [3] довели існування та єдиність в класі $\{u : |u(x,t)| \leq Ce^{a|x|}\}$ розв'язку лінійної параболічної варіаційної нерівності, що відповідає задачі $(*)$. Від функції $u_0 \geq 0$ вимагалося, щоб вона була такою мірою, для якої $\int_{\mathbb{R}^n} du_0 < +\infty$. Єдиність розв'язку загальної лінійної параболічної варіаційної нерівності в класах Тихонова визначив автор у [4].

Якщо рівняння $(*)$ є нелінійним, $n = 1$, $a, b \equiv 1$, то з результатів Калашникова А.С. ([5]) випливає існування розв'язку цієї задачі при $p > 3$, $q = 2$ в класі функцій, які задовольняють оцінку $|u_x(x,t)|^{p-2} \leq C(1 + |x|^2)$, $C > 0$. Від початкової функції вимагалася така сама поведінка на нескінченності. Єдиність в цьому класі визначено при $p > 2$, $q = 2$. В [6] у класах локально інтегровних функцій визначено однозначну розв'язність задачі $(*)$ за умови $|u_0(x)| \leq C|x|^{p/(p-2)}$ при $|x| \to \infty$. Там вивчено багатовимірне рівняння, яке відповідає $(*)$ з $a \equiv 1$, $b \equiv 0$, $p > 2$. Аналогічний результат у випадку $p < 2$ виявлено в [7]. У [8] без обмежень на поведінку розв'язку та вихідних даних при $|x| \to \infty$ визначено однозначну розв'язність задачі Коші для півлінійного рівняння ($p = 2$, $q > 2$). Такі самі результати отримано в [9] для задачі, яка у модельному випадку збігається із задачею $(*)$ при $a, b \equiv 1$, $p = 2$, $q > 2$, а в [10] – для нелінійного рівняння вищого порядку з лінійною головною частиною.

Перейдемо до випадку, коли коефіцієнти a, b можуть зростати при $|x| \to \infty$. В [13] визначено існування єдиного обмеженого в $\mathbb{R}_+ \times (0; T)$ розв'язку задачі, яка у частковому випадку збігається з $(*)$ при $n = 1$, $p, q = 2$, $a = x^m$, $m \geq 0$. Вимагається обмеженість u_0 та виконання додаткових умов на функцію b. В [14] розглянуто рівняння, яке узагальнює $(*)$ з $a = (1 + |x|)^\lambda$, $\lambda > 0$, $p, q = 2$. За певних умов на коефіцієнт b доведено єдиність розв'язку цієї задачі без умов на поведінку розв'язку на нескінченності. Параболічні варіаційні нерівності в необмежених областях вивчено в [15]–[19].

Мета нашої праці – довести існування та єдиність розв'язку параболічної варіаційної нерівності, яка узагальнює неоднорідне рівняння $(*)$ з $p < 2$, $q = 2$. Коефіцієнти нерівності можуть зростати при $|x| \to \infty$ не швидше за $a^0(1 + |x|^\nu)$, $a^0, \nu > 0$. Результат отримано без додаткових припущень на поведінку розв'язку та функції u_0 на нескінченності.

1. Формулювання задачі та основних результатів. Нехай $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – необмежена область з межею $\partial\Omega$ класу C^1, яка задовольняє умову: для кожного $l \in \mathbb{N}$ множина $\Omega^l = \Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < l\}$ є областю, межа якої складається з двох кусково гладких гіперповерхонь Γ_1^l і Γ_2^l таких, що $\Gamma_1^l \subset \partial\Omega$, $\mathrm{mes}_{n-1}\ \Gamma_1^l > 0$, $\mathrm{mes}_{n-1}\ \{\Gamma_2^l \cap \partial\Omega\} = 0$. Приймемо $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1; t_2)$, $Q_{t_1,t_2}^l = \Omega^l \times (t_1; t_2)$, $\Omega_\tau = \{(x,t) : x \in \Omega, t = \tau\}$, $\Omega_\tau^l = \{(x,t) : x \in \Omega^l, t = \tau\}$, $l \in \mathbb{N}$.

Для кожного $l \in \mathbb{N}$ позначимо: $\{w \in W^{1,p}(\Omega^l) : w|_{\Gamma_1^l} = 0\} \subset X^l \subset W^{1,p}(\Omega^l)$, $p \in (1; 2)$, X^l – замкнений підпростір, $V^l = L^2(\Omega^l) \cap X^l$, K^l – опукла замкнена підмножина V^l, $0 \in K^l$, $U(Q_{0,T}^l) = L^2(Q_{0,T}^l) \cap L^p(0, T; X^l)$. На введені простори X^s та множини K^s, $s \in \mathbb{N}$ накладемо умову: якщо $l, s \in \mathbb{N}$, $l < s$, то звуження елементів з X^s (K^s) на Ω^l належить до простору X^l (множини K^l).

Нехай $\Psi = \{\psi \in C^\infty(\overline{Q_{0,T}}) \mid \psi \geq 0, \ \exists\, s \in \mathbb{N} \ \text{ таке, що } \ \mathrm{supp}\, \psi \subset \overline{Q_{0,T}^s}\}$,
$U_{\mathrm{loc}}(Q_{0,T}) = \{u : Q_{0,T} \to \mathbb{R} \mid u \in U(Q_{0,T}^l) \ \forall\, l \in \mathbb{N}\}$,
$\mathcal{K} = \{u \in U_{\mathrm{loc}}(Q_{0,T}) \mid u(\cdot, t) \in K^l \ \text{ для майже всіх } \ t \in (0,T) \ \text{ і } \ \forall\, l \in \mathbb{N}\}$.

Нехай функції $a_1, \dots, a_n, c, f, u_0$ задовольняють умови:

(A): $a_i \in L^\infty_{\rm loc}(\overline{Q_{0,T}})$, $a_0 \le a_i(x,t) \le a^0(1+|x|^\nu)$ для майже всіх $(x,t) \in Q_{0,T}$, $i = \overline{1,n}$, де $a_0, a^0, \nu > 0$;

(C): $c \in L^\infty(Q_{0,T})$, $c(x,t) \ge c_0$ для майже всіх $(x,t) \in Q_{0,T}$, де $c_0 \in \mathbb{R}$;

(F): $f, f_t \in L^2_{\rm loc}(\overline{Q_{0,T}})$;

(U): $u_0 \in \mathcal{K}$, існує послідовність $\{u_0^l\}_{l \in \mathbb{N}}$ така, що для кожного $l \in \mathbb{N}$ матимемо $u_0^l \in K^l$, $u_0^l = 0$ на $\Omega \setminus \Omega^l$, $u_0^{l+1} = u_0$ на Ω^l.

Означення 1. *Функцію $u \in \mathcal{K} \cap C([0;T]; L^2_{loc}(\overline{\Omega}))$ називатимемо слабким розв'язком параболічної варіаційної нерівності*

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[v_t(v-u)\psi + \sum_{i=1}^n a_i(x,t)|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i}((v-u)\psi)_{x_i} + c(x,t)u(v-u)\psi -$$

$$- f(x,t)(v-u)\psi + \frac{1}{2}|v-u|^2\psi_t\Big] dxdt \ge \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |v-u|^2\psi dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} |v-u_0|^2\psi dx, \qquad (1.1)$$

якщо u задовольняє (1.1) для всіх $\tau \in (0;T]$, $\psi \in \Psi$, $v \in \mathcal{K}$, $v_t \in L^2_{loc}(\overline{Q_{0,T}})$.

Нехай u – слабкий розв'язок нерівності (1.1), $\psi \in \Psi$, $v \in \mathcal{K}$, $v_t \in L^2_{\rm loc}(\overline{Q_{0,T}})$. Якщо $v(\cdot,0) = u_0(\cdot)$, то з (1.1) матимемо $\int_{\Omega_\tau} |v-u|^2\psi dx \to 0$ при $\tau \to +0$, тобто $\lim\limits_{\tau\to+0} u(\cdot,\tau) = \lim\limits_{\tau\to+0} v(\cdot,\tau)$ в просторі $L^2(\Omega^l)$. Оскільки $u, v \in C([0;T]; L^2_{\rm loc}(\overline{\Omega}))$, то з отриманої рівності границь та припущення на v одержимо умову

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{для майже всіх} \quad x \in \Omega. \qquad (1.2)$$

Означення 2. *Сильним розв'язком параболічної варіаційної нерівності (1.1) називатимемо слабкий розв'язок цієї нерівності, якщо він задовольняє включення $u_t \in L^2_{loc}(\overline{Q_{0,T}})$.*

Легко показати, що для сильного розв'язку нерівності (1.1) співвідношення (1.1), (1.2) еквівалентні нерівності

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[u_t(v-u)\psi + \sum_{i=1}^n a_i|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i}((v-u)\psi)_{x_i} + cu(v-u)\psi - f(v-u)\psi\Big] dxdt \ge 0$$

для всіх $\tau \in (0;T]$, $\psi \in \Psi$, $v \in \mathcal{K}$.

Приклад 1. Нехай $X^l = \{w \in W^{1,p}(\Omega^l) \, : \, w|_{\Gamma_1^l} = 0\}$ $\forall\, l \in \mathbb{N}$, $\mathcal{K} = U_{\rm loc}(Q_{0,T})$. Тоді сильний розв'язок нерівності (1.1) є узагальненим розв'язком задачі

$$u_t - \sum_{i=1}^n (a_i|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i})_{x_i} + cu = f \quad \text{в} \quad Q_{0,T}, \qquad (1.3)$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0;T), \qquad u|_{t=0} = u_0, \qquad (1.4)$$

(див. [15, с. 254]).

Приклад 2. Нехай $\mathcal{K} = U_{\mathrm{loc}}(Q_{0,T}) \cap \{v : v \geq 0 \text{ в } Q_{0,T}\}$. Тоді сильний розв'язок u параболічної варіаційної нерівності (1.1) задовольняє рівняння (1.3) на множині $\Phi = \{(x,t) \in Q_{0,T} \ : \ u(x,t) > 0\}$, дорівнює нулю в $Q_{0,T} \setminus \Phi$ та задовольняє умови (1.4) (див. [15, с. 293]).

Введемо позначення, які використовуватимемо далі. Норму банахового простору B позначатимемо через $||\cdot;B||$, а спряжений до B простір – B^*. Скалярний добуток між B^* та B позначатимемо $\langle\cdot,\cdot\rangle_B$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* ***(A)****,* ***(C)*** *і*

$$1 < p < 2, \qquad n - \frac{2p}{2-p} + \frac{2\nu p}{2-p} < 0. \tag{1.5}$$

Тоді варіаційна нерівність (1.1) не може мати більше одного слабкого розв'язку.

Нехай $l \in \mathbb{N}$. Зазначимо, що з умови (1.5) та теорем вкладення Соболєва [20, с. 47] випливає, що $X^l \subset L^2(\Omega^l) \subset [X^l]^*$, і отже, $V^l = X^l$. Для майже всіх $t \in (0;T)$ визначимо оператори $A^l(t) : V^l \to [V^l]^*$ такою формулою:

$$\langle A^l(t)v^1, v^2\rangle_{V^l} = \int\limits_{\Omega^l_t} \left[\sum_{i=1}^n a_i(x,t)|v^1_{x_i}(x)|^{p-2}v^1_{x_i}(x)v^2_{x_i}(x) + c(x,t)v^1(x)v^2(x)\right]dx,$$

де $v^1, v^2 \in V^l$. Якщо функції $a_1,\ldots,a_n,c$ не залежать від t, то замість $A^l(t)$ доцільно писати просто A^l. Тоді можна вважати, що $A^l : U(Q^l_{0,T}) \to [U(Q^l_{0,T})]^*$ і $\langle A^l w^1, w^2\rangle_{U(Q^l_{0,T})} = \int_0^T \langle A^l w^1(t), w^2(t)\rangle_{V^l} dt$, $w^1, w^2 \in U(Q^l_{0,T})$.

Нехай $l \in \mathbb{N}$, функції $a_1, \ldots, a_n$, c не залежать від t,

$$D^l = \{v \in V^l \ : \ v|_{\Gamma^l_2} = 0\}, \quad \mathcal{D}^l = \{u \in U(Q^l_{0,T}) \ : \ u|_{\Gamma^l_2 \times (0;T)} = 0\},$$

$$H^l = \{v \in W^{1,2}(\Omega) \ : \ v|_{\Gamma^l_2} = 0\}, \quad \mathcal{H}^l = \{u \in L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega)) \ : \ u|_{\Gamma^l_2 \times (0;T)} = 0\}.$$

Зрозуміло, що $H^l \subset D^l, \mathcal{H}^l \subset \mathcal{D}^l$. Визначимо оператори $E^l : D^l \to [D^l]^*$ та $G^l : H^l \to [H^l]^*$ за допомогою рівностей $\langle E^l v^1, v^2\rangle_{D^l} = \langle A^l v^1, v^2\rangle_{V^l}$, v^1, $v^2 \in D^l$, $\langle G^l z^1, z^2\rangle_{D^l} = \int_\Omega (\nabla z^1(x), \nabla z^2(x))dx$, $z^1, z^2 \in H^l$. Для спрощення вважатимемо, що оператор E^l також діє з $\mathcal{D}^l$ в $[\mathcal{D}^l]^*$, а G^l – з $\mathcal{H}^l$ в $[\mathcal{H}^l]^*$ так, що $\langle E^l w^1, w^2\rangle_{\mathcal{D}^l} = \langle A^l w^1, w^2\rangle_{U(Q^l_{0,T})}$, $\langle G^l y^1, y^2\rangle_{\mathcal{H}^l} = \int_0^T \langle G^l y^1(t), y^2(t)\rangle_{H^l} dt$ для всіх $w^1, w^2 \in \mathcal{D}^l$ та $y^1, y^2 \in \mathcal{H}^l$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* ***(A)****–****(U)****, умова (1.5),* $u_0 \in W^{2,2}_{loc}(\overline{\Omega})$, $E^l u^l_0, G^l u^l_0 \in L^2(\Omega^l)$ $\forall\ l \in \mathbb{N}$, $\mathcal{K} = U_{loc}(Q_{0,T}) \cap \{v : v \geq 0$ *майже скрізь в* $Q_{0,T}\}$, *функції* $a_1,\ldots,a_n,c$ *не залежать від* t. *Тоді параболічна варіаційна нерівність (1.1) має єдиний сильний розв'язок.*

Доводячи теореми 1 і 2, які подано у пункті 3, використано низку допоміжних тверджень. Для зручності викладення їх подано у вигляді лем та тверджень і зібрано в другому пункті.

2. Додаткові позначення та допоміжні твердження. Для спрощення викладення замість $u(\cdot,t)$ писатимемо просто $u(t)$.

Якщо функція f задовольняє умову **(F)**, то для кожного $l \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ визначимо функцію $f_l \in L^2(Q_{0,T})$ таку, що $f_{l,t} \in L^2(Q_{0,T})$,

$$f_l(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & (x,t) \in Q_{0,T}^{l-1}, \\ 0, & (x,t) \in Q_{0,T} \setminus Q_{0,T}^{l}. \end{cases}$$

Для сталих $R, \omega > 0$ і $\beta = \dfrac{3p-2}{2-p} + \omega$ визначимо зрізку Берніса $\varphi^R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ так

$$\varphi^R(x) = \begin{cases} (\frac{R^2-|x|^2}{R})^\beta, & |x| \le R, \\ 0, & |x| > R. \end{cases} \tag{2.1}$$

Легко бачити, що для будь-яких $r \in \mathbb{R}$ та $x \in \mathbb{R}^n$, $|x| < R$, матимемо

$$\frac{|\varphi^R_{x_i}(x)|^r}{|\varphi^R(x)|^{r-1}} = \frac{|\frac{2\beta}{R^\beta} x_i (R^2 - |x|^2)^{(\beta-1)}|^r}{|\frac{1}{R^\beta}(R^2-|x|^2)^\beta|^{r-1}} = \frac{(2\beta)^r}{R^\beta} \frac{|x_i|^r}{(R^2-|x|^2)^{r-\beta}}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{2.2}$$

Якщо $l > 0$, $2l < R$, то $R - |x| \ge R - l \ge R/2$ при $x \in \Omega^l$. Тому виконується оцінка $\varphi^R(x) = ((R-|x|)(R+|x|)/R)^\beta \ge (R/2)^\beta$, $x \in \Omega^l$. Крім того, очевидно, що для всіх $x \in \mathbb{R}^n$ матимемо $\varphi^R(x) \le R^\beta$. Зазначимо, що функцію з (2.1) введено в праці [10] (див. також [11], [12]).

Нехай $w^- = \max\{-w, 0\}$, $w \in \mathbb{R}$. Легко переконатися, що

$$([-r^-] - [-s^-])(r - s) \ge 0 \tag{2.3}$$

для всіх $r, s \in \mathbb{R}$. З [22, с. 99] відомо таке: якщо $v \in W^{1,p}(\Omega)$, то $v^- \in W^{1,p}(\Omega)$.

Якщо функція w визначена в циліндрі $Q_{0,T}$, то для кожного $h > 0$ позначимо $w^{+h}(x,t) = w(x, t+h)$ при $(x,t) \in Q_{0,T-h}$.

Лема 1. *Нехай $q > 1$. Тоді для всіх $r, s \in \mathbb{R}$*

$$(|r|^{q-2}r - |s|^{q-2}s)(r-s) \ge 2^{2-q}|r-s|^q, \quad \textit{якщо} \quad q \in [2, +\infty), \tag{2.4}$$

$$(|r|^{q-2}r - |s|^{q-2}s)(r-s) \le 2^{2-q}|r-s|^q, \quad \textit{якщо} \quad q \in (1; 2]. \tag{2.5}$$

Доведення. Доведення (2.4) подано в лемі 1.2 [23, с. 10]. Доведемо нерівність (2.5). При $q = 2$ ця нерівність очевидна. Нехай $q \in (1; 2)$, $r, s \in \mathbb{R}$. Не зменшуючи загальності, припустимо, що $r > s$. Тоді (2.5) перепишемо у вигляді

$$(|r|^{q-2}r - |s|^{q-2}s)(r-s)^{1-q} \le 2^{2-q}. \tag{2.6}$$

При $s = 0$ матимемо $r^{q-2}rr^{1-q} = 1 \le 2^{2-q}$. Нехай $s \ne 0$, $w = r/s$. При $s > 0$ з (2.6) отримаємо

$$(|r|^{q-2}r - |s|^{q-2}s)(r-s)^{1-q} = (w^{q-1} - 1)(w-1)^{1-q} = g_1(w), \ \ w \in (1; +\infty).$$

При $s < 0$ одержимо, що

$$(|r|^{q-2}r - |s|^{q-2}s)(r-s)^{1-q} = (1 - |w|^{q-2}w)(1-w)^{1-q} = g_2(w), \ \ w \in (-\infty; 1).$$

Оскільки $\sup\limits_{w \in (1;+\infty)} g_1(w) = g_1(+\infty) = 1$, $\sup\limits_{w \in (-\infty;1)} g_2(w) = g_2(-1) = 2^{2-q}$, то (2.6) правильна. Лема доведена.

Зауваження 1. Нехай $q \in (1;+\infty)$, $y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y(s) = \frac{|s|^q}{q}$, $z(s) = |s|^{q-2}s$, $s \in \mathbb{R}$. Очевидно, що $y'(s) = z(s)$ при $s \neq 0$, $y'(0) = 0$, $z'(s) = (q-1)|s|^{q-2}$ при $s \neq 0$, і, крім того, $z'(0) = 0$, якщо $q > 2$, $\lim\limits_{s\to 0} \frac{z(s)-z(0)}{s} = +\infty$, якщо $q \in (1;2)$.

Твердження 1. *Нехай $k \in \mathbb{N}$, виконуються умови **(A)**–**(U)** та (1.5), функції $a_1, \ldots, a_n, c$ не залежать від t, $E^k u_0^k \in L^2(\Omega^k)$. Тоді для кожного $s \in \mathbb{N}$ існує функція $z^s \in \mathcal{D}^k \cap C([0;T]; L^2(\Omega^k))$ така, що $z_t^s, E^k z^s \in L^2(Q_{0,T}^k)$ і*

$$\langle z_t^s(t) + E^k z^s(t) - s(z^s(t))^-, v\rangle_{D^k} = \langle f_k(t), v\rangle_{D^k}, \quad t \in (0;T), \quad v \in D^k, \tag{2.7}$$

$$z^s(0) = u_0^k. \tag{2.8}$$

Доведення. Використаємо метод Фаедо-Гальоркіна. Нехай множина $\{w_k^\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ є лінійно незалежною і всюди щільною в D^k, $w_k^1 = u_0^k$, якщо $u_0^k \neq 0$. Шукаємо

$$z^{s,m}(x,t) = \sum_{\mu=1}^{m} \varphi_\mu^{s,m}(t) w_k^\mu(x), \quad (x,t) \in Q_{0,T}^k, \tag{2.9}$$

де $\varphi_1^{s,m}, \ldots, \varphi_m^{s,m}$ – неперервно диференційовні розв'язки задачі Коші

$$\langle z_t^{s,m}(t) + E^k z^{s,m}(t) - s(z^{s,m}(t))^-, w_k^\mu\rangle_{D^k} = \langle f_k(t), w_k^\mu\rangle_{D^k}, t \in (0;T), \mu = \overline{1,m}, \tag{2.10}$$

$$\varphi_1^{s,m}(0) = \begin{cases} 1, & u_0^k \neq 0, \\ 0, & u_0^k = 0, \end{cases} \quad \varphi_2^{s,m}(0) = \cdots = \varphi_m^{s,m}(0) = 0. \tag{2.11}$$

Легко показати, що такі $\varphi_1^{s,m}, \ldots, \varphi_m^{s,m}$ існують (теорема Пеано) і що $z^{s,m}$ задовольняють оцінку

$$\max_{t\in[0,T]} \int\limits_{\Omega^k} |z^{s,m}(t)|^2 dx + \int\limits_{Q_{0,T}^k} \left[\sum_{i=1}^{n} |z_{x_i}^{s,m}|^p + |z^{s,m}|^2\right] dxdt \leq C_1 \left(\int\limits_{\Omega^k} |u_0^k|^2 dx + \int\limits_{Q_{0,T}^k} |f_k|^2 dxdt\right), \tag{2.12}$$

де $C_1 > 0$ – стала, яка не залежить від s, m, k.

З умов **(A)**, **(C)** одержимо такі оцінки: $|a_i(x)| \leq C_2(k)$, $x \in \Omega^k$, $i = \overline{1,n}$, $|c(x)| \leq C_3$, $x \in \Omega$. Тоді на підставі нерівності Гельдера матимемо, що

$$\langle E^k z^{s,m}, v\rangle_{\mathcal{D}^k} = \int\limits_{Q_{0,T}^k} \left[\sum_{i=1}^{n} a_i |z_{x_i}^{s,m}|^{p-2} z_{x_i}^{s,m} v_{x_i} + c z^{s,m} v\right] dxdt \leq C_4(k) \times$$

$$\times \left(\sum_{i=1}^{n} ||z_{x_i}^{s,m}; L^p(Q_{0,T}^k)||^{p-1} \cdot ||v_{x_i}; L^p(Q_{0,T}^k)|| + ||z^{s,m}; L^2(Q_{0,T}^k)|| \cdot ||v; L^2(Q_{0,T}^k)||\right),$$

для будь-якої $v \in \mathcal{D}^k$. Взявши верхню точну грань за всіма $v \in \mathcal{D}^k$, $||v; \mathcal{D}^k|| \leq 1$, та використавши оцінки (2.12), отримаємо існування сталої $C_5(k)$ такої, що для всіх s, m виконується нерівність

$$||E^k z^{s,m}; [\mathcal{D}^k]^*|| \leq C_5(k). \tag{2.13}$$

З умови **(F)** матимемо, що $f_k \in C([0,T]; L^2(\Omega^k))$. Тому з гладкості функцій, які є в (2.10), випливає, що в (2.10) можна взяти $t = 0$, домножити на $\varphi_{\mu,t}^{s,m}(0)$ і підсумувати за $\mu = \overline{1,m}$. Оскільки $(z^{s,m}(0))^- = (u_0^k)^- = 0$, то отримана рівність набуде вигляду $\langle z_t^{s,m}(0), z_t^{s,m}(0)\rangle_{D^k} = \langle f_k(0) - E^k u_0^k, z_t^{s,m}(0)\rangle_{D^k}$. З того, що елемент $z_t^{s,m}(0)$ належить до простору $L^2(\Omega^k)$ як лінійна комбінація елементів з $L^2(\Omega^k)$, включення $f_k(0) - E^k u_0^k \in L^2(\Omega^k)$ та нерівності Гельдера випливає, що виконується оцінка $||z_t^{s,m}(0); L^2(\Omega^k)||^2 \le ||f_k(0) - E^k u_0^k; L^2(\Omega^k)|| \cdot ||z_t^{s,m}(0); L^2(\Omega^k)||$. Отже,

$$||z_t^{s,m}(0); L^2(\Omega^k)|| \le ||f_k(0) - E^k u_0^k; L^2(\Omega^k)||. \tag{2.14}$$

Нехай $T_1 \in (0;T)$, $h \in (0; T - T_1)$, $t \in (0; T_1)$. Тоді з (2.10) одержимо рівність

$$\langle z_t^{s,m,+h} - z_t^{s,m}, w_k^\mu\rangle_{D^k} + \langle E^k z^{s,m,+h} - E^k z^{s,m}, w_k^\mu\rangle_{D^k} -$$

$$- s\langle (z^{s,m,+h})^- - (z^{s,m})^-, w_k^\mu\rangle_{D^k} = \langle f_k^{+h} - f_k, w_k^\mu\rangle_{D^k}, \quad \mu = \overline{1,m}.$$

Для спрощення запису позначимо $v^h = (z^{s,m,+h} - z^{s,m})/h$, $h \in (0; T - T_1)$, $\widetilde{a}_i(x,\eta) = a_i(x)|\eta|^{p-2}\eta$, $x \in \Omega$, $\eta \in \mathbb{R}$. Тоді функція v^h задовольняє рівність

$$\int\limits_{\Omega_t^k} \biggl[v_t^h w_k^\mu + \frac{1}{h}\sum_{i=1}^n \biggl(\int\limits_0^1 \frac{\partial \widetilde{a}_i(x, r z_{x_i}^{s,m,+h} + (1-r) z_{x_i}^{s,m})}{\partial r}\, dr \biggr) (w_k^\mu)_{x_i} + c v^h w_k^\mu -$$

$$- \frac{s}{h}[(z^{s,m,+h})^- - (z^{s,m})^-] w_k^\mu \biggr] dx = \int\limits_{\Omega_t^k} \frac{(f_k^{+h} - f_k)}{h}\, w_k^\mu dx, \quad t \in (0; T_1), \quad \mu = \overline{1,m}. \tag{2.15}$$

Легко бачити, що для кожного $i = \overline{1,n}$: $\frac{1}{h}\int_0^1 \frac{\partial \widetilde{a}_i(x, r z_{x_i}^{s,m,+h} + (1-r) z_{x_i}^{s,m})}{\partial r}\, dr = b_i v_{x_i}^h$, де $b_i(x,t,h) = \int_0^1 \frac{\partial \widetilde{a}_i(x,\eta)}{\partial \eta}\big|_{\eta = r z_{x_i}^{s,m,+h} + (1-r) z_{x_i}^{s,m}}\, dr$, $(x,t) \in Q_{0,T_1}$, $h \in (0; T - T_1)$, якщо $z_{x_i}^{s,m,+h}(x,t) \ne z_{x_i}^{s,m}(x,t)$, та $b_i = 0$ в іншому випадку. Домножимо (2.15) на вираз $(\varphi_\mu^{s,m,+h} - \varphi_\mu^{s,m})/h$ і підсумуємо за $\mu = \overline{1,m}$. Матимемо

$$\int\limits_{\Omega_t^k} \biggl[v_t^h v^h + \sum_{i=1}^n b_i |v_{x_i}^h|^2 + c|v^h|^2 - \frac{s}{h}[(z^{s,m,+h})^- - (z^{s,m})^-] v^h \biggr] dx = \int\limits_{\Omega_t^k} \frac{(f_k^{+h} - f_k)}{h}\, v^h dx, \tag{2.16}$$

$t \in (0; T_1)$. Оскільки $\frac{\partial \widetilde{a}_i(x,\eta)}{\partial \eta} = a_i(x)(p-1)|\eta|^{p-2} \ge 0$, $x \in \Omega$, $\eta \ne 0$ і четвертий доданок зліва в (2.16) невід'ємний (див. (2.3)), то з (2.16) після елементарних перетворень одержимо, що $\int_{\Omega_t^k} v_t^h v^h dx \le \int_{\Omega_t^k} |\frac{(f_k^{+h} - f_k)}{h}|^2 dx + C_6 \int_{\Omega_t^k} |v^h|^2 dx$, де $C_6 > 0$ – стала, яка не залежить від h, s, m, k, T_1. Зінтегруємо останню нерівність за $t \in (0;\tau)$, де $\tau \in (0; T_1)$, та перший доданок зліва зінтегруємо частинами. Використавши лему Гронуола [20, с. 191], отримаємо, що

$$\int\limits_{\Omega_\tau^k} |v^h|^2 dx \le C_7 \biggl(\int\limits_{\Omega^k} |v^h(0)|^2 dx + \int\limits_{Q_{0,\tau}^k} \biggl| \frac{(f_k^{+h} - f_k)}{h} \biggr|^2 dx dt \biggr), \tag{2.17}$$

де $C_7 > 0$ – стала, яка не залежить від h, s, m, k, T_1. Перший доданок справа в цій нерівності при $h \to 0$ прямує до виразу $\int_{\Omega^k} |z_t^{s,m}(0)|^2 dx$, бо функції $\varphi_1^{s,m}, \ldots, \varphi_m^{s,m}$ – неперервно диференційовні. Так як і в пункті а) теореми 3 [21, с. 119] матимемо, що другий доданок прямує до $\int_{Q^k_{0,\tau}} |f_{k,t}|^2 dxdt$. Отже, права частина нерівності (2.17) рівномірно обмежена за параметром $h \in (0; T-T_1)$. Так як і в пункті б) теореми 3 [21, с. 119] маємо існування похідної $z_t^{s,m} \in L^2(Q_{0,T_1})$. Зінтегруємо (2.17) за $\tau \in (0; T_1)$, візьмемо нижню границю при $h \to +0$ та використаємо (2.14). Після незначних перетворень отримаємо

$$\int\limits_{Q^k_{0,T_1}} |z_t^{s,m}|^2 dxdt \le C_8 \left(||f_k(0) - E^k u_0^k; L^2(\Omega^k)||^2 + \int\limits_{Q^k_{0,T_1}} |f_{k,t}|^2 dxdt \right), \quad T_1 \in (0, T), \qquad (2.18)$$

де $C_8 > 0$ – стала, яка не залежить від s, m, k, T_1.

З оцінок (2.12), (2.13), (2.18) одержимо існування такої підпослідовності (нехай це буде сама $\{z^{s,m}\}_{m\in\mathbb{N}}$), що $z^{s,m} \to z^s$ $*$-слабко в $L^\infty(0, T; L^2(\Omega^k))$, слабко в $\mathcal{D}^k$ та сильно в $L^2(Q^k_{0,T})$ (див. теорему 5.1 про компактність [15, с. 70]), $E^k z^{s,m} \to \chi^{k,s}$ слабко в $[\mathcal{D}^k]^*$, $z_t^{s,m} \to z_t^s$ слабко в $L^2(Q^k_{0,T})$ при $m \to \infty$. З леми 4.1 [22, с. 98] матимемо, що $(z^{s,m})^- \to (z^s)^-$ сильно в $L^2(Q^k_{0,T})$. Як і в [15, с. 171] показуємо, що $\chi^{k,s} = E^k z^s$. Тоді функція z^s задовольняє рівняння (2.7) і умову (2.8). Оскільки $z^s \in \mathcal{D}^k \subset L^2(Q^k_{0,T})$ і $z_t^s \in L^2(Q^k_{0,T})$, то $z^s \in C([0; T]; L^2(\Omega^k))$. З рівняння (2.7) $E^k z^s \in L^2(Q^k_{0,T})$, що і завершує доведення нашого твердження.

Лема 2. *Нехай виконуються умови* **(A)**, **(C)**, $k \in \mathbb{N}$, $R, \omega > 0$, $R < k$, *та* φ^R *– функція, яка визначена в (2.1),* $J(\psi) = \int_{t_1}^{t_2} \langle A^k u - A^k v, (u-v)\psi \rangle_{V^k} dt$ *для деяких* t_1, t_2, u, v, ψ. *Тоді для довільних* $u, v \in U(Q^k_{0,T})$, $\chi \in C^\infty([0; T])$, $\chi \ge 0$, *та будь-яких чисел* $0 \le t_1 < t_2 \le T$ *виконується оцінка*

$$J(\varphi^R \chi) \ge (a_0 - \varkappa) \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \sum_{i=1}^n (|u_{x_i}|^{p-2} u_{x_i} - |v_{x_i}|^{p-2} v_{x_i})(u_{x_i} - v_{x_i}) \varphi^R \chi dxdt +$$

$$+ c_0 \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} |u-v|^2 \varphi^R \chi dxdt - P(R) \left(\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} |u-v|^2 \varphi^R \chi dxdt \right)^{p/2}, \qquad (2.19)$$

де $\varkappa > 0$ *– довільна стала,* $P(R) = C_9(\varkappa, \chi) R^{(n-1+\omega)\frac{2-p}{2} + \nu p}$, $C_9(\varkappa, \chi)$ *– деяка додатна стала.*

Доведення. Нехай виконуються умови леми, $u, v \in U(Q^k_{0,T})$, $0 \le t_1 < t_2 \le T$. Тоді

$$J(\varphi^R \chi) \ge \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \left[a_0 \sum_{i=1}^n (|u_{x_i}|^{p-2} u_{x_i} - |v_{x_i}|^{p-2} v_{x_i})(u_{x_i} - v_{x_i}) + c_0 |u-v|^2 \right] \varphi^R \chi dxdt - I, \qquad (2.20)$$

де $I = \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \sum\limits_{i=1}^n |a_i| \cdot ||u_{x_i}|^{p-2} u_{x_i} - |v_{x_i}|^{p-2} v_{x_i}| \cdot |u - v| \cdot |\varphi^R_{x_i}| \cdot \chi \, dxdt$.

Наведемо кілька допоміжних оцінок. З нерівності (2.5) для $q = p$ і довільних $\tau, s \in \mathbb{R}$ матимемо

$$||\tau|^{p-2}\tau - |s|^{p-2}s|^{p'} = ||\tau|^{p-2}\tau - |s|^{p-2}s| \cdot ||\tau|^{p-2}\tau - |s|^{p-2}s|^{p'-1} \le$$

$$\le C_{10}(p)||\tau|^{p-2}\tau - |s|^{p-2}s| \cdot |\tau - s| = C_{10}(p)(|\tau|^{p-2}\tau - |s|^{p-2}s)(\tau - s), \qquad (2.21)$$

де $p' = p/(p-1)$. Зауважимо, що тут ми могли "скинути модуль", бо права частина (2.21) набуває невід'ємні значення.

Нехай $r = \frac{2p}{2-p} = 1 + \frac{p'+2}{p'-2} > 1$ $(\frac{1}{p'} + \frac{1}{2} + \frac{1}{r} = 1)$. Тоді ми можемо застосувати до I нерівність Гельдера для трьох функцій ([22, с. 75]) відповідно з показниками $p', 2, r$. Використавши (2.21) та нерівність Юнга, одержимо

$$I = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{Q^R_{t_1,t_2}} ||u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i} - |v_{x_i}|^{p-2}v_{x_i}|(\varphi^R\chi)^{1/p'} \cdot |u - v|(\varphi^R\chi)^{1/2} \times$$

$$\times \frac{|a_i| \cdot |\varphi^R_{x_i}|}{\varphi^R}(\varphi^R\chi)^{1/r}dxdt \le \sum_{i=1}^{n}\Bigg(\int\limits_{Q^R_{t_1,t_2}} ||u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i} - |v_{x_i}|^{p-2}v_{x_i}|^{p'}\varphi^R\chi dxdt\Bigg)^{1/p'} \times$$

$$\times \Bigg(\int\limits_{Q^R_{t_1,t_2}} |u-v|^2\varphi^R\chi dxdt\Bigg)^{1/2} \cdot \Bigg(\int\limits_{Q^R_{t_1,t_2}} \frac{|a_i|^r \cdot |\varphi^R_{x_i}|^r\chi}{|\varphi^R|^{r-1}}dxdt\Bigg)^{1/r} \le$$

$$\le \varkappa\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q^R_{t_1,t_2}} (|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i} - |v_{x_i}|^{p-2}v_{x_i})(u_{x_i} - v_{x_i})\varphi^R\chi dxdt +$$

$$+ C_{11}(\varkappa)\Bigg(T\sup_{[0;T]}|\chi(t)|R^{\nu r}\int\limits_{\Omega^R}\frac{|\varphi^R_{x_i}|^r}{|\varphi^R|^{r-1}}dx\Bigg)^{p/r} \cdot \Bigg(\int\limits_{Q^R_{t_1,t_2}} |u-v|^2\varphi^R\chi dxdt\Bigg)^{p/2}, \qquad (2.22)$$

де $\varkappa > 0$ – довільне число, $C_{11}(\varkappa) > 0$ – деяка залежна від $\varkappa$ додатна стала. Використавши (2.2) і ввівши полярні координати в $\mathbb{R}^n$, одержимо

$$\int\limits_{\Omega^R}\frac{|\varphi^R_{x_i}|^r}{|\varphi^R|^{r-1}}\,dx \le \frac{(2\beta)^r}{R^\beta}\int\limits_{|x|<R}\frac{|x_i|^r}{(R^2 - |x|^2)^{r-\beta}}\,dx \le \frac{C_{12}}{R^\beta}\int\limits_0^R\frac{\rho^r\rho^{n-1}}{(R^2-\rho^2)^{r-\beta}}\,d\rho \le$$

$$\le C_{12}R^{\frac{2p}{2-p}+n-2-\frac{3p-2}{2-p}-\omega}\int\limits_0^R\frac{\rho}{(R^2-\rho^2)^{\frac{2p}{2-p}-\frac{3p-2}{2-p}-\omega}}\,d\rho =$$

$$= C_{12}R^{n-1-\omega}\int\limits_0^R\frac{\rho}{(R^2-\rho^2)^{1-\omega}}\,d\rho = C_{13}R^{n-1+\omega},$$

де C_{12}, C_{13} – деякі додатні сталі, які від R не залежать. Тому звідси та з (2.20), (2.22) і отримаємо (2.19). Лема доведена.

Отримаємо тепер певні оцінки на функції z^s, $s \in \mathbb{N}$.

Твердження 2. *Нехай виконуються умови твердження 1. Тоді для кожного* $k \in \mathbb{N}$ *послідовність функцій* $\{z^s\}_{s\in\mathbb{N}}$ *з твердження 1 є обмеженою в* $\mathcal{D}^k$, *а послідовності* $\{z^s_t\}_{s\in\mathbb{N}}$, $\{s(z^s)^-\}_{s\in\mathbb{N}}$, $\{E^k z^s\}_{s\in\mathbb{N}}$ *– обмежені в* $L^2(Q^k_{0,T})$.

Доведення. Нехай виконуються умови твердження. З (2.7) отримаємо оцінку

$$\int\limits_{\Omega^k_\tau} |z^s|^2 dx \le \int\limits_{\Omega^k} |u^k_0|^2 dx + \int\limits_{Q^k_{0,\tau}} |f_k|^2 dxdt + C_{14} \int\limits_{Q^k_{0,\tau}} |z^s|^2 dxdt, \quad \tau \in (0;T],$$

де C_{14} не залежить від s, k, τ. Тоді з леми Гронуола [20, с. 191] матимемо, що

$$\int\limits_{\Omega^k_\tau} |z^s|^2 dx \le C_{15}\bigg(\int\limits_{\Omega^k} |u^k_0|^2 dx + \int\limits_{Q^k_{0,\tau}} |f_k|^2 dxdt\bigg), \quad \tau \in (0;T].$$

Звідси та з (2.7) одержимо, що функції z^s задовольняють оцінки

$$\int\limits_{Q^k_{0,T}} \bigg[\sum_{i=1}^n |z^s_{x_i}|^p + |z^s|^2\bigg] dxdt \le C_{16}\bigg(\int\limits_{\Omega^k} |u^k_0|^2 dx + \int\limits_{Q^k_{0,T}} |f_k|^2 dxdt\bigg),$$

$$\int\limits_{Q^k_{0,T}} |(z^s)^-|^2 dxdt \le \frac{C_{16}}{s}\bigg(\int\limits_{\Omega^k} |u^k_0|^2 dx + \int\limits_{Q^k_{0,T}} |f_k|^2 dxdt\bigg), \tag{2.23}$$

де $C_{16} > 0$ – стала, яка не залежить від s, k. Візьмемо з обох частин нерівності (2.18) нижню границю при $m \to \infty$. Отримаємо

$$\int\limits_{Q^k_{0,\tau}} |z^s_t|^2 dxdt \le C_{17}\bigg(||f_k(0) - E^k u^k_0; L^2(\Omega^k)||^2 + \int\limits_{Q^k_{0,\tau}} |f_{k,t}|^2 dxdt\bigg), \quad \tau \in (0;T], \tag{2.24}$$

де $C_{17} > 0$ – стала, яка не залежить від s, k, τ.

Візьмемо в (2.7) $v = -(z^s(t))^- e^{2c_0 t}$ та зінтегруємо за $t \in (0;T)$. Матимемо

$$\langle z^s_t + E^k z^s - s(z^s)^-, -(z^s)^- e^{2c_0 t}\rangle_{\mathcal{D}^k} = \langle f_k, -(z^s)^- e^{2c_0 t}\rangle_{\mathcal{D}^k}. \tag{2.25}$$

З умови $u^k_0 \ge 0$ одержимо, що $(u^k_0)^- = 0$. Тому

$$-\int\limits_{Q^k_{0,T}} z^s_t (z^s)^- e^{2c_0 t} dxdt = \frac{1}{2}\, e^{2c_0 T} \int\limits_{\Omega^k_T} |(z^s)^-|^2 dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |(u^k_0)^-|^2 dx -$$

$$- c_0 \int\limits_{Q^k_{0,T}} |(z^s)^-|^2 e^{2c_0 t} dxdt \ge -c_0 \int\limits_{Q^k_{0,T}} |(z^s)^-|^2 e^{2c_0 t} dxdt.$$

Крім того,

$$\langle E^k z^s, -(z^s)^- e^{2c_0 t}\rangle_{\mathcal{D}^k} = \int\limits_{Q^k_{0,T}} \bigg[\sum_{i=1}^n a_i |z^s_{x_i}|^{p-2} z^s_{x_i} [-(z^s)^-]_{x_i} + c|(z^s)^-|^2\bigg] e^{2c_0 t} dxdt =$$

$$= \int\limits_{Q^k_{0,T}} \left[\sum_{i=1}^n a_i|[(z^s)^-]_{x_i}|^p + c|(z^s)^-|^2\right] e^{2c_0t}dxdt \geq c_0 \int\limits_{Q^k_{0,T}} |(z^s)^-|^2 e^{2c_0t}dxdt.$$

Використавши ці оцінки та нерівність Гельдера, з (2.25) отримаємо нерівність $s\int_{Q^k_{0,T}} |(z^s)^-|^2 e^{2c_0t}dxdt \leq ||f_k e^{c_0t}; L^2(Q^k_{0,T})|| \cdot ||(z^s)^- e^{c_0t}; L^2(Q^k_{0,T})||$, звідки

$$||s(z^s)^-; L^2(Q^k_{0,T})|| \leq C_{18}(c_0) \cdot ||f_k; L^2(Q^k_{0,T})||. \tag{2.26}$$

З рівняння (2.7) одержимо $E^k z^s = f_k - z^s_t + s(z^s)^- \in L^2(Q^k_{0,T})$. Тому з умов теореми та оцінок (2.24), (2.26) випливає, що

$$||E^k z^s; L^2(Q^k_{0,T})||^2 \leq C_{19}(||f_k; L^2(Q^k_{0,T})||^2 + ||f_{k,t}; L^2(Q^k_{0,T})||^2 +$$

$$+ ||f_k(0) - E^k u^k_0; L^2(\Omega^k)||^2),$$

де $C_{19} > 0$ – стала, яка не залежить від k, s. Твердження доведено.

Твердження 3. *Нехай $k \in \mathbb{N}$, $k > 4$, виконуються умови твердження 1, $u^k_0 \in$ $\in W^{2,2}(\Omega^k)$, $G^k u^k_0 \in L^2(\Omega^k)$, $\{z^s\}_{s\in\mathbb{N}}$ – послідовність з твердження 1. Тоді для сталих l, R, що задовольняють умову*

$$l, R \in \mathbb{N}, \qquad 2l < R < k - 1, \tag{2.27}$$

виконується оцінка

$$\int\limits_{Q^l_{0,T}} \left[|z^s|^2 + \sum_{i=1}^n |z^s_{x_i}|^p + |z^s_t|^2 + |E^k z^s|^2\right] dxdt \leq C_{20}(R) \quad \text{для всіх} \quad s \in \mathbb{N}, \tag{2.28}$$

де $C_{20}(R) > 0$ – стала, яка не залежить від s, k, l.

Доведення. Нехай виконуються умови твердження. Візьмемо $v = z^s\varphi^R e^{-2\lambda t}$ в (2.7) та зінтегруємо за $t \in (0;\tau)$, де φ^R визначена в (2.1), $\tau \in (0;T]$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Оскільки $\varphi^R = 0$ на $\Omega \setminus \Omega^R$, то інтегрування проводять по $Q^R_{0,\tau}$. Тому

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^R_t} |z^s|^2 \varphi^R e^{-2\lambda t}dx\Bigg|_{t=0}^{t=\tau} + \int\limits_0^\tau \langle E^k z^s(t), z^s(t)\varphi^R\rangle_{D^k} e^{-2\lambda t}dt +$$

$$+ \lambda \int\limits_{Q^R_{0,\tau}} |z^s|^2 \varphi^R e^{-2\lambda t}dxdt \leq \int\limits_{Q^R_{0,\tau}} f_k z^s \varphi^R e^{-2\lambda t}dxdt, \quad \tau \in (0;T]. \tag{2.29}$$

Звідси, використавши лему 2 та нерівність Юнга, одержимо оцінку

$$(2c_0 + 2\lambda)y(\tau) \leq \int\limits_{\Omega^R} |u^k_0|^2 \varphi^R dx + 2\int\limits_{Q^R_{0,\tau}} f_k z^s \varphi^R e^{-2\lambda t}dxdt + 2P(R)y^{p/2}(\tau) \leq$$

$$\leq \int\limits_{\Omega^R} |u_0^k|^2 \varphi^R dx + \int\limits_{Q^R_{0,\tau}} |f_k|^2 \varphi^R e^{-2\lambda t} dxdt + y(\tau) + 2\biggl(\frac{y(\tau)}{2/p} + \frac{[P(R)]^{\frac{2/p}{2/p-1}}}{\frac{2/p}{2/p-1}} \biggr),$$

де $y(\tau) = \int_{Q^R_{0,\tau}} |z^s|^2 \varphi^R e^{-2\lambda t} dxdt$, $\tau \in (0;T]$. Вибравши $\lambda = -2c_0 + 1$, матимемо оцінку

$$y(\tau) \leq C_{21} \biggl(P^{\frac{2}{2-p}}(R) + \int\limits_{\Omega^R} |u_0^k|^2 \varphi^R dx + \int\limits_{Q^R_{0,\tau}} |f_k|^2 \varphi^R dxdt \biggr), \quad \tau \in (0;T].$$

Оскільки $k > R+1$, то $u_0^k = u_0$, $f_k = f$ для $|x| < R$. Врахувавши вигляд $y(\tau)$ і $P(R)$, з попередньої оцінки легко отримаємо нерівність

$$\int\limits_{Q^R_{0,T}} |z^s|^2 \varphi^R dxdt \leq C_{22} \biggl(R^{n-1+\omega+\frac{2\nu p}{2-p}} + \int\limits_{\Omega^R} |u_0|^2 \varphi^R dx + \int\limits_{Q^R_{0,T}} |f|^2 \varphi^R dxdt \biggr), \qquad (2.30)$$

де $C_{22} > 0$ – стала, яка не залежить від k, s, R. Оскільки l, R, k взяті з умови (2.27), то $(R/2)^\beta \leq \varphi^R(x) \leq R^\beta$ для $x \in \Omega^l$. Тоді з (2.30) одержимо, що

$$\int\limits_{Q^l_{0,T}} |z^s|^2 dxdt = (R/2)^{-\beta} (R/2)^\beta \int\limits_{Q^l_{0,T}} |z^s|^2 dxdt \leq (R/2)^{-\beta} \int\limits_{Q^l_{0,T}} |z^s|^2 \varphi^R dxdt \leq$$

$$\leq C_{23} R^{-\beta} \biggl(R^{n-1+\omega+\frac{2\nu p}{2-p}} + \int\limits_{\Omega^R} |u_0|^2 \varphi^R dx + \int\limits_{Q^R_{0,T}} |f|^2 \varphi^R dxdt \biggr).$$

Оскільки $n-1+\omega+\frac{2\nu p}{2-p}-\beta = n-1+\omega+\frac{2\nu p}{2-p}-\frac{3p-2}{2-p}-\omega = n-\frac{2p}{2-p}+\frac{2\nu p}{2-p}$ і виконується нерівність $\varphi^R \leq R^\beta$, то одержимо

$$\int\limits_{Q^l_{0,T}} |z^s|^2 dxdt \leq C_{24} \biggl(R^{n-\frac{2p}{2-p}+\frac{2\nu p}{2-p}} + \int\limits_{\Omega^R} |u_0|^2 dx + \int\limits_{Q^R_{0,T}} |f|^2 dxdt \biggr) \leq C_{25}(R). \qquad (2.31)$$

Крім того, при $\lambda = 0$ з (2.29) та леми 2 матимемо

$$\int\limits_{\Omega^R_\tau} |z^s|^2 \varphi^R dx + 2(a_0 - \varkappa) \int\limits_{Q^R_{0,\tau}} \sum_{i=1}^n |z^s_{x_i}|^p \varphi^R dxdt \leq \int\limits_{\Omega^R} |u_0^k|^2 \varphi^R dx +$$

$$+ 2 \int\limits_{Q^R_{0,\tau}} f_k z^s \varphi^R dxdt - 2c_0 \int\limits_{Q^R_{0,\tau}} |z^s|^2 \varphi^R dxdt + 2P(R) \biggl(\int\limits_{Q^R_{0,\tau}} |z^s|^2 \varphi^R dxdt \biggr)^{p/2}, \quad \tau \in (0;T],$$

де $\varkappa > 0$, що разом з (2.30) дасть нерівність

$$\max_{\tau \in [0,T]} \int\limits_{\Omega^R_\tau} |z^s|^2 \varphi^R dx + \int\limits_{Q^R_{0,T}} \sum_{i=1}^n |z^s_{x_i}|^p \varphi^R dxdt \leq C_{26}(R). \qquad (2.32)$$

Звідси і (2.31) одержимо оцінку

$$\max_{\tau\in[0,T]}\int\limits_{\Omega^l_\tau}|z^s|^2dx+\int\limits_{Q^l_{0,T}}\sum_{i=1}^n|z^s_{x_i}|^pdxdt\le C_{27}(R). \tag{2.33}$$

Для того щоб отримати оцінки z^s_t, розглянемо допоміжну задачу: для $\varepsilon\in(0;1]$ знайти $\zeta^\varepsilon\in\mathcal{H}^k\cap C([0;T];L^2(\Omega^k))$ таке, що $\zeta^\varepsilon(0)=u^k_0$ і

$$\langle\zeta^\varepsilon_t(t)+E^k\zeta^\varepsilon(t)-s(\zeta^\varepsilon(t))^-,v\rangle_{H^k}+\varepsilon\langle G^k\zeta^\varepsilon(t),v\rangle_{H^k}=\langle f_k(t),v\rangle_{H^k}, \tag{2.34}$$

для $t\in(0;T)$, $v\in H^k$. Зауважимо, що ця функція ζ^ε залежить і від чисел s,k, але для спрощення запису ці індекси біля ζ^ε опускатимемо. Як і в твердженнях 1 та 2 показуємо, що така функція ζ^ε існує, і, крім того, $\zeta^\varepsilon_t, E^k\zeta^\varepsilon+\varepsilon G^k\zeta^\varepsilon\in L^2(Q^k_{0,T})$. Ми отримуємо ζ^ε як границю у відповідних просторах послідовності $\{\zeta^{\varepsilon,m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ функцій вигляду (2.9), які задовольняють аналог рівностей (2.10), (2.11). Як і оцінки (2.12)-(2.14), матимемо, що

$$\int\limits_{Q^k_{0,T}}\left[\varepsilon|\nabla_x\zeta^{\varepsilon,m}|^2+\sum_{i=1}^n|\zeta^{\varepsilon,m}_{x_i}|^p+|\zeta^{\varepsilon,m}|^2\right]dxdt\le C_{28}\left(\int\limits_{\Omega^k}|u^k_0|^2dx+\int\limits_{Q^k_{0,T}}|f_k|^2dxdt\right), \tag{2.35}$$

$$||E^k\zeta^{\varepsilon,m};[\mathcal{H}^k]^*||\le C_{29}(k),\qquad ||\sqrt{\varepsilon}\,G^k\zeta^{\varepsilon,m};[\mathcal{H}^k]^*||\le C_{30}(k), \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}||\zeta^{\varepsilon,m}_t(0);L^2(\Omega^k)||&\le||f_k(0)-E^ku^k_0-\varepsilon G^ku^k_0;L^2(\Omega^k)||\le\\&\le||f_k(0)-E^ku^k_0;L^2(\Omega^k)||+||G^ku^k_0;L^2(\Omega^k)||,\end{aligned} \tag{2.37}$$

де $C_{28}>0$ – стала, яка не залежить від m,ε,s,k, а $C_{29},C_{30}>0$ – сталі, які не залежать від m,ε,s.

Нехай $T_1\in(0;T)$, $h\in(0;T-T_1)$, $t\in(0;T_1)$, $v^h=(\zeta^{\varepsilon,m,+h}-\zeta^{\varepsilon,m})/h$. З рівності (2.16) одержимо, що

$$\int\limits_{\Omega^k_t}\left[v^h_tv^h+\sum_{i=1}^n(\varepsilon+\widetilde{b}_i)|v^h_{x_i}|^2+c|v^h|^2-\frac{s}{h}[(\zeta^{\varepsilon,+h})^--(\zeta^\varepsilon)^-]v^h\right]dx=\int\limits_{\Omega^k_t}\frac{(f^{+h}_k-f_k)}{h}\,v^hdx,$$

де функції $\widetilde{b}_1,\ldots,\widetilde{b}_n\ge0$ визначаються аналогічно як у твердженні 1. Далі отримуємо оцінку (2.17) для нашої функції v^h. Використавши її та попередню рівність, одержимо

$$\int\limits_{\Omega^k_\tau}|v^h|^2dx+\int\limits_{Q^k_{0,\tau}}\varepsilon|\nabla_xv^h|^2dxdt\le C_{31}\left(\int\limits_{\Omega^k}|v^h(0)|^2dx+\int\limits_{Q^k_{0,\tau}}\left|\frac{(f^{+h}_k-f_k)}{h}\right|^2dxdt\right), \tag{2.38}$$

$\tau\in(0;T_1)$, де $C_{31}>0$ – стала, яка не залежить від h,m,ε,s,k,T_1. Провівши міркування як при отриманні оцінки (2.18), матимемо існування похідних $\zeta^{\varepsilon,m}_t$, $\zeta^{\varepsilon,m}_{x_1t}$, $\ldots$, $\zeta^{\varepsilon,m}_{x_nt}\in L^2(Q_{0,T_1})$. Крім того, з (2.38) і (2.37) отримаємо оцінку

$$\int\limits_{Q^k_{0,T_1}}[|\zeta^{\varepsilon,m}_t|^2+\varepsilon|\nabla_x\zeta^{\varepsilon,m}_t|^2]dxdt\le C_{32}\Big(||f_k(0)-E^ku^k_0;L^2(\Omega^k)||^2+$$

$$+ ||G^k u_0^k; L^2(\Omega^k)||^2 + \int\limits_{Q^k_{0,T_1}} |f_{k,t}|^2 dxdt\Big), \quad T_1 \in (0;T), \tag{2.39}$$

де $C_{32} > 0$ – стала, яка не залежить від $\varepsilon, s, m, k, T_1$.

Використавши лему 5.3 [20, с. 20], отримаємо, що функції ζ^ε також задовольнятимуть оцінки (2.35), (2.36), (2.39). Тому одержимо існування такої послідовності $\{\varepsilon_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, $\varepsilon_j \to +0$ при $j\to\infty$, що $\zeta^{\varepsilon_j} \to \zeta$ слабко в $\mathcal{D}^k$ та сильно в $L^2(Q^k_{0,T})$, $\zeta^{\varepsilon_j}_t \to \zeta_t$ слабко в $L^2(Q^k_{0,T})$, $E^k\zeta^{\varepsilon_j} \to \widetilde{\chi}_1$ слабко в $[\mathcal{H}^k]^*$, $\sqrt{\varepsilon_j}\zeta^{\varepsilon_j} \to \widetilde{\chi}_2$ слабко в $\mathcal{H}^k$ при $j\to\infty$. З того, що $\sqrt{\varepsilon_j}\zeta^{\varepsilon_j} \to \widetilde{\chi}_2$ і $\zeta^{\varepsilon_j} \to \zeta$, зокрема, слабко в $L^2(Q^k_{0,T})$ робимо висновок, що $\widetilde{\chi}_2 = 0$. З леми 4.1 [22, с. 98] матимемо, що $(\zeta^{\varepsilon_j})^- \to (\zeta)^-$ сильно в $L^2(Q^k_{0,T})$. Крім того, $\sqrt{\varepsilon_j}\, G^k\zeta^{\varepsilon_j} \to \widetilde{\chi}_3$ слабко в $[\mathcal{H}^k]^*$, тому $\varepsilon_j\, G^k\zeta^{\varepsilon_j} \to 0$ слабко в $[\mathcal{H}^k]^*$ при $j\to\infty$. Далі показуємо, що $\widetilde{\chi}_1 = E^k\zeta$ (див. [15, с. 171]) та те, що $\zeta = z^s$.

Нехай $j\in\mathbb{N}$, $\tau\in(0;T)$, $\delta\in(0;T-\tau)$. Візьмемо в рівності (2.34) $\varepsilon=\varepsilon_j$, а $v = \frac{1}{\delta}(\zeta^{\varepsilon_j}(t+\delta) - \zeta^{\varepsilon_j}(t))\varphi^R \in H^k$ та зінтегруємо за $t\in(0,\tau)$. Гладкість функції ζ^{ε_j} допоможе нам перейти до границі при $\delta\to+0$ і отримати рівність

$$\int\limits_{Q^R_{0,\tau}} \Big[|\zeta^{\varepsilon_j}_t|^2\varphi^R + \varepsilon_j \sum_{i=1}^n \zeta^{\varepsilon_j}_{x_i}(\zeta^{\varepsilon_j}_{x_i t}\varphi^R + \zeta^{\varepsilon_j}_t \varphi^R_{x_i}) + \sum_{i=1}^n a_i|\zeta^{\varepsilon_j}_{x_i}|^{p-2}\zeta^{\varepsilon_j}_{x_i}(\zeta^{\varepsilon_j}_{x_i t}\varphi^R + \zeta^{\varepsilon_j}_t\varphi^R_{x_i}) +$$

$$+ c\zeta^{\varepsilon_j}\zeta^{\varepsilon_j}_t\varphi^R - s(\zeta^{\varepsilon_j})^-\zeta^{\varepsilon_j}_t\varphi^R\Big]dxdt = \int\limits_{Q^R_{0,\tau}} f\zeta^{\varepsilon_j}_t\varphi^R dxdt, \quad \tau\in(0;T].$$

Зінтегрувавши частинами (див. зауваження 1), звідси одержимо

$$\frac{\varepsilon_j}{2}\int\limits_{\Omega^R_t}\sum_{i=1}^n|\zeta^{\varepsilon_j}_{x_i}|^2\varphi^R dx\Big|_{t=0}^{t=T} + \frac{1}{p}\int\limits_{\Omega^R_t}\sum_{i=1}^n a_i|\zeta^{\varepsilon_j}_{x_i}|^p\varphi^R dx\Big|_{t=0}^{t=T} + \frac{s}{2}\int\limits_{\Omega^R_t}|(\zeta^{\varepsilon_j})^-|^2\varphi^R dx\Big|_{t=0}^{t=T} +$$

$$+ \int\limits_{Q^R_{0,T}}\Big[|\zeta^{\varepsilon_j}_t|^2\varphi^R + \varepsilon_j\sum_{i=1}^n\zeta^{\varepsilon_j}_{x_i}\zeta^{\varepsilon_j}_t\varphi^R_{x_i} + \sum_{i=1}^n a_i|\zeta^{\varepsilon_j}_{x_i}|^{p-2}\zeta^{\varepsilon_j}_{x_i}\zeta^{\varepsilon_j}_t\varphi^R_{x_i} + c\zeta^{\varepsilon_j}\zeta^{\varepsilon_j}_t\varphi^R\Big]dxdt =$$

$$= \int\limits_{Q^R_{0,T}} f\zeta^{\varepsilon_j}_t\varphi^R dxdt. \tag{2.40}$$

Як і в лемі 2 візьмемо $r = \frac{2p}{2-p}$ (нагадаємо, що $\frac{1}{p'}+\frac{1}{2}+\frac{1}{r} = 1$ і тому $abc \le \frac{a^{p'}}{p'} + \frac{b^2}{2} + \frac{c^r}{r}$) і для кожного $\varkappa_1 > 0$ отримаємо

$$\Big|\sum_{i=1}^n a_i|\zeta^{\varepsilon_j}_{x_i}|^{p-2}\zeta^{\varepsilon_j}_{x_i}\zeta^{\varepsilon_j}_t\varphi^R_{x_i}\Big| \le \sum_{i=1}^n a_i\cdot|\zeta^{\varepsilon_j}_{x_i}|^{p-1}\cdot|\zeta^{\varepsilon_j}_t|\cdot\frac{|\varphi^R_{x_i}|}{\varphi^R}\cdot\varphi^R \le$$

$$\le \varkappa_1|\zeta^{\varepsilon_j}_t|^2\varphi^R + C_{33}(\varkappa_1)\Big(\sum_{i=1}^n|\zeta^{\varepsilon_j}_{x_i}|^p\varphi^R + \frac{|a_i|^r\cdot|\varphi^R_{x_i}|^r}{|\varphi^R|^{r-1}}\Big).$$

З (2.32) одержимо оцінку $\int_{Q^R_{0,T}}\sum\limits_{i=1}^{n}|\zeta^{\varepsilon_j}_{x_i}|^p\varphi^R dxdt \le C_{34}(R)$. Для кожного $\varkappa_2>0$ матимемо $f\zeta^{\varepsilon_j}_t \le \varkappa_2|\zeta^{\varepsilon_j}_t|^2 + C_{35}(\varkappa_2)|f|^2$. Враховуючи ці оцінки та те, що $(\zeta^{\varepsilon_j})^-|_{t=0} = (u^k_0)^- = 0$, після елементарних перетворень з (2.40) одержимо

$$\int\limits_{Q^R_{0,T}}\left[(1-\varkappa_1-\varkappa_2)|\zeta^{\varepsilon_j}_t|^2\varphi^R + \sqrt{\varepsilon_j}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\varepsilon_j}\zeta^{\varepsilon_j}_{x_i}\zeta^{\varepsilon_j}_t\varphi^R_{x_i} + c\zeta^{\varepsilon_j}\zeta^{\varepsilon_j}_t\varphi^R\right]dxdt \le$$

$$\le \int\limits_{\Omega^R_0}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\varepsilon_j}{2}|u^k_{0,x_i}|^2 + \frac{a_i}{p}|u^k_{0,x_i}|^p\right) + \frac{s}{2}|(u^k_0)^-|^2\right]\varphi^R dx + C_{36}(\varkappa_1,\varkappa_2)\int\limits_{Q^R_{0,T}}\left[\sum_{i=1}^{n}|\zeta^{\varepsilon_j}_{x_i}|^p\varphi^R +\right.$$

$$\left. + |f|^2\varphi^R + \frac{|a_i|^r\cdot|\varphi^R_{x_i}|^r}{|\varphi^R|^{r-1}}\right]dxdt \le \int\limits_{\Omega^R_0}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\varepsilon_j}{2}|u^k_{0,x_i}|^2 + \frac{a_i}{p}|u^k_{0,x_i}|^p\right)\varphi^R dx + C_{37}(\varkappa_1,\varkappa_2,R) +$$

$$+ C_{38}(\varkappa_1,\varkappa_2)\int\limits_{Q^k_{0,T}}\left[|f|^2\varphi^R + \frac{|a_i|^r\cdot|\varphi^R_{x_i}|^r}{|\varphi^R|^{r-1}}\right]dxdt, \qquad (2.41)$$

де C_{37} не залежить від ε_j, s, k, C_{38} не залежить від ε_j, s, k, R. Використовуючи оцінки (2.39), легко показати, що для кожного фіксованого $R>0$ границя другого доданка зліва в (2.41) при $j\to\infty$ дорівнює нулю. Зрозуміло, що границя першого доданка справа в (2.41) теж дорівнює нулю. Нехай $\varkappa_1+\varkappa_2\in(0;1)$. Взявши з обох частин (2.41) нижню границю при $j\to\infty$ одержимо, що функція ζ (тобто z^s) задовольняє оцінку

$$\int\limits_{Q^R_{0,T}}[(1-\varkappa_1-\varkappa_2)|z^s_t|^2 + cz^s z^s_t]\varphi^R dxdt \le \frac{1}{p}\int\limits_{\Omega^R_0}\sum_{i=1}^{n}a_i|u^k_{0,x_i}|^p\varphi^R dx + C_{39}(\varkappa_1,\varkappa_2,R) +$$

$$+ C_{40}(\varkappa_1,\varkappa_2)\int\limits_{Q^k_{0,T}}\left[|f|^2 + \frac{|a_i|^r\cdot|\varphi^R_{x_i}|^r}{|\varphi^R|^{r-1}}\right]dxdt.$$

Доводячи лему 2, ми показали, що $\int_{\Omega^R}\frac{|\varphi^R_{x_i}|^r}{|\varphi^R|^{r-1}}dx \le C_{41}R^{n-1+\omega}$. Крім того, $|cz^s z^s_t\varphi^R| \le \varkappa_3|z^s_t|^2\varphi^R + C_{42}(\varkappa_3)|z^s|^2\varphi^R$, $\varkappa_3>0$. Тому після нескладних перетворень з попередньої нерівності та (2.30) отримаємо

$$\int\limits_{Q^R_{0,T}}|z^s_t|^2\varphi^R dxdt \le C_{43}(R). \qquad (2.42)$$

Звідси і (2.31) одержимо оцінку

$$\int\limits_{Q^l_{0,T}}|z^s_t|^2 dxdt \le C_{44}(R). \qquad (2.43)$$

Нехай $\tau \in (0;T]$, $w_s(\tau) = (\int_{Q^k_{0,\tau}} |s(z^s)^-|^2\varphi^R e^{2c_0t}dxdt)^{1/2} \neq 0$. Тоді візьмемо в рівнянні (2.7) функцію $v = -s(z^s)^-\varphi^R e^{2c_0t}$ та зінтегруємо за $t \in (0;\tau)$. Використавши нерівність Гельдера, матимемо, що

$$-I_s(\tau) + w_s^2(\tau) \leq ||f_k\sqrt{\varphi^R}e^{c_0t}; L^2(Q^k_{0,\tau})|| \cdot w_s(\tau), \tag{2.44}$$

де

$$I_s(\tau) = \int\limits_0^\tau \langle z^s_t(t) + E^k z^s(t), s(z^s(t))^-\varphi^R\rangle_{D^k} e^{2c_0t}dt = s\int\limits_{Q^k_{0,\tau}} \Bigg[z^s_t(z^s)^-\varphi^R +$$

$$+\sum_{i=1}^n a_i|z^s_{x_i}|^{p-2}z^s_{x_i}([(z^s)^-]_{x_i}\varphi^R + (z^s)^-\varphi^R_{x_i}) - c|(z^s)^-|^2\varphi^R\Bigg]e^{2c_0t}dxdt.$$

Оцінимо цей інтеграл. Оскільки

$$\int\limits_{Q^k_{0,\tau}} \Bigg[z^s_t(z^s)^- + \sum_{i=1}^n a_i|z^s_{x_i}|^{p-2}z^s_{x_i}[(z^s)^-]_{x_i} - c|(z^s)^-|^2\Bigg]\varphi^R e^{2c_0t}dxdt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^R_\tau} |(z^s)^-|^2\varphi^R e^{2c_0\tau}dx +$$

$$+\int\limits_{Q^R_{0,\tau}} \Bigg[-\sum_{i=1}^n a_i|[(z^s)^-]_{x_i}|^p + (c_0 - c)|(z^s)^-|^2\Bigg]\varphi^R e^{2c_0t}dxdt \leq 0,$$

то

$$I_s(\tau) \leq s\int\limits_{Q^R_{0,\tau}} \sum_{i=1}^n |z^s_{x_i}|^{p-1} \cdot |(z^s)^-| \cdot a_i \cdot |\varphi^R_{x_i}|e^{2c_0t}dxdt.$$

Як і в лемі 2 отримаємо оцінку

$$I_s(\tau) \leq C_{45}(R)s\sum_{i=1}^n\Bigg(\int\limits_{Q^R_{0,\tau}} |z^s_{x_i}|^p\varphi^R dxdt\Bigg)^{1/p'} \cdot \Bigg(\int\limits_{Q^R_{0,\tau}} \frac{|a_i|^r \cdot |\varphi^R_{x_i}|^r}{|\varphi^R|^{r-1}}e^{2c_0t}dxdt\Bigg)^{1/r} \cdot$$

$$\cdot\Bigg(\int\limits_{Q^R_{0,\tau}} |(z^s)^-|^2\varphi^R e^{2c_0t}dxdt\Bigg)^{1/2} = C_{45}(R)\sum_{i=1}^n\Bigg(\int\limits_{Q^R_{0,\tau}} |z^s_{x_i}|^p\varphi^R dxdt\Bigg)^{1/p'} \cdot$$

$$\cdot\Bigg(\int\limits_{Q^R_{0,\tau}} \frac{|a_i|^r \cdot |\varphi^R_{x_i}|^r}{|\varphi^R|^{r-1}}e^{2c_0t}dxdt\Bigg)^{1/r} \cdot w_s(\tau), \quad \tau \in (0;T].$$

Тому з (2.32) та вигляду $\varphi(R)$ матимемо, що $I_s(\tau) \leq C_{46}(R)w_s(\tau)$, $\tau \in (0;T]$. Тоді з (2.44) одержимо оцінку

$$\int\limits_{Q^R_{0,T}} |s(z^s)^-|^2\varphi^R dxdt \leq C_{47}(R). \tag{2.45}$$

Отже, $\int_{Q^l_{0,T}} |s(z^s)^-|^2 dxdt \le C_{48}(R)$.

З рівняння (2.7) отримаємо $E^k z^s = f_k - z^s_t + s(z^s)^- \in L^2(Q^k_{0,T})$. Тоді з умов теореми та оцінок (2.42), (2.45) випливає, що

$$\int\limits_{Q^R_{0,T}} |E^k z^s|^2 \varphi^R dxdt = \int\limits_{Q^R_{0,T}} |f_k - z^s_t + s(z^s)^-|^2 \varphi^R dxdt \le C_{49}(R), \tag{2.46}$$

тому

$$\int\limits_{Q^l_{0,T}} |E^k z^s|^2 dxdt \le C_{50}(R). \tag{2.47}$$

З оцінок (2.31), (2.33), (2.43), (2.47) матимемо (2.28). Твердження доведено.

3. Доведення основних результатів.

Доведення теореми 1. Нехай u^1, u^2 – розв'язки нерівності (1.1) з функціями f_1, u^1_0 та f_2, u^2_0 відповідно, $w = (u^1 + u^2)/2$, функція w_η є розв'язком задачі з параметром $\eta > 0$: $\eta w_{\eta t}(t) + w_\eta(t) = w(t)$, $t \in (0,T)$, $w_\eta(0) = (u^1_0 + u^2_0)/2$. З [16, с. 59] відомо, що $w_\eta \in \mathcal{K}$ та існує послідовність $\{w_{\eta_s}\}_{s\in\mathbb{N}}$ ($\eta_s \to +0$ при $s \to \infty$), яка збігається до w слабко в $U(Q^k_{0,T})$ та сильно в $L^2(Q^k_{0,T})$ для всіх $k \in \mathbb{N}$. Тому з леми 1.18 [20, с. 39] випливає існування підпослідовності (позначимо її знову $\{w_{\eta_s}\}_{s\in\mathbb{N}}$) такої, що $||w_{\eta_s}(t) - w(t); L^2(\Omega^k)|| \to 0$ при $s \to \infty$ для майже всіх $t \in (0;T)$. Оскільки w_{η_s}, $w \in C([0;T]; L^2(\Omega^k))$, то $w_{\eta_s}(t) \to w(t)$ сильно в $L^2(\Omega^k)$ для всіх $t \in (0;T)$.

Нехай $\psi \in \Psi$. Існує $l \in \mathbb{N}$ таке, що $\psi = 0$ в $Q_{0,T} \setminus Q^l_{0,T}$. Прийнявши в (1.1) $v = w_{\eta_s}$, $s \in \mathbb{N}$, $f = f_r$, $u_0 = u^r_0$, $r = 1, 2$, отримаємо нерівності

$$\int\limits_0^\tau \langle A^l u^r, (w_{\eta_s} - u^r)\psi\rangle_{V^l} dt + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \left[(w_{\eta_s t} - f_r)(w_{\eta_s} - u^r)\psi + \frac{1}{2}\psi_t |w_{\eta_s} - u^r|^2\right] dxdt \ge$$
$$\ge \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |w_{\eta_s} - u^r|^2 \psi dx - \frac{1}{8}\int\limits_{\Omega_0} |u^1_0 - u^2_0|^2 \psi dx, \ \ r = 1, 2.$$

Додавши ці дві нерівності, з оцінки $w_{\eta_s t}(w_{\eta_s} - w) = -\eta_s |w_{\eta_s t}|^2 \le 0$ матимемо

$$\int\limits_0^\tau [\langle A^l u^1, (w_{\eta_s} - u^1)\psi\rangle_{V^l} + \langle A^l u^2, (w_{\eta_s} - u^2)\psi\rangle_{V^l}] dt +$$
$$+ \int\limits_{Q_{0,\tau}} [-f_1(w_{\eta_s} - u^1) - f_2(w_{\eta_s} - u^2)]\psi dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{0,\tau}} [|w_{\eta_s} - u^1|^2 + |w_{\eta_s} - u^2|^2]\psi_t dxdt \ge$$
$$\ge \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} [|w_{\eta_s} - u^1|^2 + |w_{\eta_s} - u^2|^2]\psi dx - \frac{1}{4}\int\limits_{\Omega_0} |u^1_0 - u^2_0|^2 \psi dx.$$

Спрямувавши $s \to +\infty$ ($\eta_s \to +0$), отримаємо

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |u^1 - u^2|^2 \psi dx + \int\limits_0^\tau \langle A^l u^1 - A^l u^2, (u^1 - u^2)\psi\rangle_{V^l} dt \le \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} |u^1_0 - u^2_0|^2 \psi dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{Q_{0,\tau}}|u^1-u^2|^2\psi_t dxdt+\int\limits_{Q_{0,\tau}}(f_1-f_2)(u^1-u^2)\psi dxdt,\quad \tau\in(0;T]. \tag{3.1}$$

Припустимо тепер, що $f_1=f_2$, $u_0^1=u_0^2$. Візьмемо в (3.1) $\psi=\varphi^R e^{-2\lambda t}$, де $\lambda>0$ таке, що $\alpha=2c_0+2\lambda>0$. Тоді (3.1) та оцінка (2.19) з $\varkappa=a_0$ дадуть нерівність $\alpha y(\tau)\le P(R)y^{p/2}(\tau)$, де $y(\tau)=\int_{Q_{0,\tau}}|u^1-u^2|^2\varphi^R e^{-2\lambda t}dxdt$, $\tau\in(0;T]$. Тому $\alpha y^{p/2}(T)[y^{\frac{2-p}{2}}(T)-P(R)/\alpha]\le 0$, звідки отримаємо нерівність $y^{\frac{2-p}{2}}(T)\le P(R)/\alpha$, тобто,

$$\Bigg(\int\limits_{Q_{0,T}}|u^1-u^2|^2\varphi^R e^{-2\lambda t}dxdt\Bigg)^{\frac{2-p}{2}}\le C_{51}R^{(n-1+\omega)\frac{2-p}{2}+\nu p}, \tag{3.2}$$

де $C_{51}>0$ – стала, яка не залежить від R. Нехай $l\in\mathbb{N}$, $R\in\mathbb{R}$, $R>2l$. Ми показували, що $\varphi^R(x)\ge(R/2)^\beta$ для $x\in\Omega^l$. Тому з (3.2) одержимо оцінку

$$\int\limits_{Q_{0,T}^l}|u^1-u^2|^2dxdt\le C_{52}R^{-\beta}\int\limits_{Q_{0,T}^R}|u^1-u^2|^2\varphi^R e^{-2\lambda t}dxdt\le$$

$$\le C_{53}R^{-\frac{3p-2}{2-p}+n-1+\frac{2\nu p}{2-p}}=C_{53}R^{n-\frac{2p}{2-p}+\frac{2\nu p}{2-p}}, \tag{3.3}$$

де $C_{53}>0$ – стала, яка не залежить від R. Оскільки $n-\frac{2p}{2-p}+\frac{2\nu p}{2-p}<0$, то спрямувавши в (3.3) $R\to+\infty$, отримаємо $u^1=u^2$ майже скрізь в $Q_{0,T}^l$, $l\in\mathbb{N}$. Отже, $u^1=u^2$ майже скрізь в $Q_{0,T}$.

Доведення теореми 2. Нехай $k,l\in\mathbb{N}$, $l<k$, $w\in\mathcal{D}^k$. З наших припущень випливають вкладення $\mathcal{D}^k\subset L^2(Q_{0,T}^k)\subset[\mathcal{D}^k]^*$. Якщо $E^kw\in L^2(Q_{0,T}^k)$, то $\langle E^kw,v\rangle_{\mathcal{D}^k}=$ $=\int_{Q_{0,T}^k}E^kwv\,dxdt$, $v\in\mathcal{D}^k$. Позначимо через $E^kw|_l$ такий елемент з простору $[\mathcal{D}^l]^*$, що $\langle E^kw|_l,v\rangle_{\mathcal{D}^l}=\langle E^kw,\widetilde{v}\rangle_{\mathcal{D}^k}$ для всіх $v\in\mathcal{D}^l$. Тут $\widetilde{v}\in\mathcal{D}^k$ – продовження v нулем поза $Q_{0,T}^l$. Якщо знову $E^kw\in L^2(Q_{0,T}^k)$, то

$$\langle E^kw|_l,v\rangle_{\mathcal{D}^l}=\langle E^kw,\widetilde{v}\rangle_{\mathcal{D}^k}=\int\limits_{Q_{0,T}^k}E^kw\widetilde{v}\,dxdt=\int\limits_{Q_{0,T}^l}E^kw|_lv\,dxdt=\int\limits_{Q_{0,T}^l}E^kwv\,dxdt,$$

$v\in\mathcal{D}^l$. Тому замість $E^kw|_l$ можна писати E^kw.

Нехай $k,s\in\mathbb{N}$, $z^s=u^{k,s}$ задовольняє (2.7), (2.8). З твердження 1 випливає, що така функція $u^{k,s}\in\mathcal{D}^k$ існує. З твердження 2 матимемо обмеженість послідовності $\{u^{k,s}\}_{s\in\mathbb{N}}$ в просторі $\mathcal{D}^k$ та послідовностей $\{u_t^{k,s}\}_{s\in\mathbb{N}}$, $\{E^ku^{k,s}\}_{s\in\mathbb{N}}$, $\{s(u^{k,s})^-\}_{s\in\mathbb{N}}$ в просторі $L^2(Q_{0,T}^k)$. Тому існує підпослідовність (позначимо її так само через $\{u^{k,s}\}_{s\in\mathbb{N}}$) така, що $u^{k,s}\to u^k$ слабко в $\mathcal{D}^k$ та сильно в $L^2(Q_{0,T}^k)$, $E^ku^{k,s}\to\widetilde{\chi}^k$ слабко в $L^2(Q_{0,T}^k)$, $u_t^{k,s}\to u_t^k$ слабко в $L^2(Q_{0,T}^k)$ при $s\to\infty$.

З твердження 1 маємо, що $\int_{Q_{0,T}^k}(u_t^{k,s}+E^ku^{k,s}-s(u^{k,s})^--f_k)v\,dxdt=0$ для всіх $v\in L^2(Q_{0,T}^k)$. Прийнявши $(v-u^{k,s})\psi$ замість v, де $v\in L^2(Q_{0,T}^k)$, $\psi\in L^\infty(Q_{0,T}^k)$,

$v, \psi \geq 0$, та використавши оцінку (2.3), отримаємо нерівність

$$\int\limits_{Q^k_{0,T}} (u^{k,s}_t + E^k u^{k,s} - f_k)(v - u^{k,s})\psi \, dxdt = s \int\limits_{Q^k_{0,T}} (-v^- - [-(u^{k,s})^-])(v - u^{k,s})\psi \, dxdt \geq 0.$$

Спрямувавши $s \to \infty$, одержимо, що $\int_{Q^k_{0,T}} (u^k_t + \widetilde{\chi}^k - f_k)(v - u^k)\psi dxdt \geq 0$ для всіх $v \in L^2(Q^k_{0,T})$, $\psi \in L^\infty(Q^k_{0,T})$, $v, \psi \geq 0$. Приймемо $\psi \equiv 1$ та як і в [15, с. 397] покажемо, що $\widetilde{\chi}^k = E^k u^k$ і $u^k \geq 0$.

Нехай l, k, R задовольняють умову (2.27). З оцінки (2.28) матимемо

$$\int\limits_{Q^l_{0,T}} \left[|u^{k,s}|^2 + \sum_{i=1}^n |u^{k,s}_{x_i}|^p + |u^{k,s}_t|^2 + |E^k u^{k,s}|^2 \right] dxdt \leq C_{54}(R), \quad s \in \mathbb{N}.$$

де $C_{54}(R) > 0$ – стала, яка не залежить від l, k, s. Тому з леми 5.3 [20, с. 20] отримаємо

$$\int\limits_{Q^l_{0,T}} \left[|u^k|^2 + \sum_{i=1}^n |u^k_{x_i}|^p + |u^k_t|^2 + |E^k u^k|^2 \right] dxdt \leq C_{55}(R). \tag{3.4}$$

Тут $C_{55}(R) > 0$ – стала, яка не залежить від l, k, s.

Продовжимо кожну функцію u^k нулем поза область $Q^k_{0,T}$. Тоді послідовність $\{u^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ має властивість: для довільних $l \in \mathbb{N}$, функцій $v \in L^2_{\text{loc}}(\overline{Q_{0,T}})$, $v \geq 0$, та $\psi \in \Psi$, $\psi = 0$ на $Q_{0,T} \setminus Q^l_{0,T}$, і для всіх $k \geq l$ справджується нерівність

$$\int\limits_{Q^l_{0,T}} (u^k_t + E^k u^k - f_k)(v - u^k)\psi \, dxdt \geq 0. \tag{3.5}$$

Додамо нерівності (3.5) записані для $k \in \mathbb{N}$ та $m \in \mathbb{N}$, $k, m \geq l$. Вважатимемо, що $m \geq k > R + 1$, де $0 < R < l$. Приймемо в отриманій нерівності $v = (u^k + u^m)/2$, $\psi \in \Psi$, $\psi = 0$ на $Q_{0,T} \setminus Q^R_{0,T}$. Після нескладних перетворень одержимо, що

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega^R_t} |u^k - u^m|^2 \psi dx \Bigg|_{t=0}^{t=\tau} + \int\limits_{Q^R_{0,\tau}} (E^k u^k - f_k)(u^k - u^m)\psi dxdt -$$

$$- \int\limits_{Q^R_{0,\tau}} (E^m u^m - f_m)(u^k - u^m)\psi dxdt - \frac{1}{2} \int\limits_{Q^R_{0,\tau}} |u^k - u^m|^2 \psi_t dxdt \leq 0, \quad \tau \in (0; T].$$

Приймемо $\psi = \varphi^R e^{-2\lambda t}$ (див. (2.1)), де $\lambda \in \mathbb{R}$. З умов на наші функції та означення оператора E^k отримаємо

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega^R_\tau} |u^k - u^m|^2 \varphi^R e^{-2\lambda\tau} dx + \int\limits_{Q^R_{0,\tau}} \left[\sum_{i=1}^n a_i (|u^k_{x_i}|^{p-2} u^k_{x_i} - |u^m_{x_i}|^{p-2} u^m_{x_i})[(u^k - u^m)\varphi^R]_{x_i} + \right.$$

$$+ (c+\lambda)|u-v|^2\varphi^R\Big] e^{-2\lambda t}dxdt \le \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^R} |u_0^k - u_0^m|^2\varphi^R dx +$$
$$+ \int\limits_{Q_{0,\tau}^R} (f_k - f_m)(u^k - u^m)\varphi^R e^{-2\lambda t}dxdt, \quad \tau \in (0;T].$$

Тоді звідси та з (2.19) і умов теореми одержимо

$$\int\limits_{\Omega_\tau^R} |u^k - u^m|^2\varphi^R e^{-2\lambda\tau}dx + 2(a_0 - \varkappa_1)\int\limits_{Q_{0,\tau}^R}\sum_{i=1}^n (|u_{x_i}^k|^{p-2}u_{x_i}^k - |u_{x_i}^m|^{p-2}u_{x_i}^m)(u_{x_i}^k -$$
$$- u_{x_i}^m)\varphi^R e^{-2\lambda t}dxdt + (2c_0 + 2\lambda - \varkappa_2)\int\limits_{Q_{0,\tau}^R} |u^k - u^m|^2\varphi^R e^{-2\lambda t}dxdt \le$$
$$\le 2P(R)\Bigg(\int\limits_{Q_{0,\tau}^R} |u^k - u^m|^2\varphi^R e^{-2\lambda t}dxdt\Bigg)^{p/2} +$$
$$+ \int\limits_{\Omega^R} |u_0^k - u_0^m|^2\varphi^R dx + \frac{1}{\varkappa_2}\int\limits_{Q_{0,\tau}^R} |f_k - f_m|^2\varphi^R e^{-2\lambda t}dxdt, \tag{3.6}$$

де $\varkappa_1, \varkappa_2 > 0$, $P(R)$ – стала з леми 2, залежна від $\varkappa_1, R$ та від λ. Приймемо $\varkappa_1 = a_0$, $\varkappa_2 > 0$, λ таке велике, щоб $\alpha = 2c_0 + 2\lambda - \varkappa_2 > 0$. Матимемо оцінку

$$\alpha y_{k,m}(\tau) \le P(R) y_{k,m}^{p/2}(\tau) + \varepsilon_{k,m}, \tag{3.7}$$

де $\varepsilon_{k,m} = \int_{\Omega^R} |u_0^k - u_0^m|^2\varphi^R dx + C_{56}\int_{Q_{0,T}^R} |f_k - f_m|^2\varphi^R e^{-2\lambda t}dxdt$, $C_{56} > 0$ – стала, яка не залежить від k, m, R, $y_{k,m}(\tau) = \int_{Q_{0,\tau}^R} |u^k - u^m|^2\varphi^R e^{-2\lambda t}dxdt$. Нехай $l \in \mathbb{N}$. Задамо довільне $\varepsilon > 0$. Виберемо $R > 2l$ таким великим, що $R^{n-\frac{2p}{2-p}+\frac{2\nu p}{2-p}} < \varepsilon$. Нехай $k, m > R + 1$. З умови **(U)** та вибору $\{f_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ отримаємо, що $\varepsilon_{k,m} = 0$. Як і оцінку (3.3) при доведенні теореми 1 з (3.7) одержимо

$$\int\limits_{Q_{0,T}^l} |u^k - u^m|^2 dxdt \le C_{57} R^{n-\frac{2p}{2-p}+\frac{2\nu p}{2-p}} < C_{57}\varepsilon.$$

Тут $C_{57} > 0$ – стала, яка не залежить від l, k, m, R, ε. Отже, послідовність $\{u^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ є фундаментальною в $L^2(Q_{0,T}^l)$, тому сильно збіжною в цьому просторі до деякого $\widetilde{u}^l$. Нехай u – така функція, що $u(x,t) = \widetilde{u}^l(x,t)$ для майже всіх $(x,t) \in Q_{0,T}^l$, $l \in \mathbb{N}$. Очевидно, що така функція визначена коректно і, крім того, для всіх фіксованих $l \in \mathbb{N}$: $u^k \to u$ сильно в просторі $L^2(Q_{0,T}^l)$. Ця збіжність, разом з оцінкою (3.6), дадуть фундаментальність (і тому збіжність) послідовності $\{u^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ до u в просторі $C([0;T];L^2(\Omega^l))$, $l \in \mathbb{N}$. Оскільки $u^k \ge 0$, то $u \ge 0$.

Отримані збіжності разом з оцінкою (3.4), рефлексивністю просторів $L^2(Q_{0,T}^k)$ та $W^{1,p}(Q_{0,T}^k)$ дадуть нам існування такої підпослідовності $\{u^{k_m}\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \{u^k\}_{k\in\mathbb{N}}$, що

$u^{k_m} \to u$ в $C([0;T];L^2(\Omega^l))$, сильно в $L^2(Q^l_{0,T})$ та слабко в $U(Q^l_{0,T})$, $u^{k_m}_t \to u_t$ слабко в $L^2(Q^l_{0,T})$, $E^{k_m}u^{k_m} \to \chi$ слабко в $L^2(Q^l_{0,T})$ при $m \to \infty$ для кожного $l \in \mathbb{N}$, де $\chi \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q_{0,T}})$.

Нехай $s \in \mathbb{N}$, $R > 0$, $R < s < k_m$. Доведемо, що для всіх $g \in U_{\mathrm{loc}}(Q_{0,T})$ та $R > 0$ виконується рівність $\langle A^s u, g\varphi^R\rangle_{U(Q^s_{0,T})} = \langle \chi, g\varphi^R\rangle_{U(Q^s_{0,T})}$. Нехай $m \in \mathbb{N}$, $w \in U_{\mathrm{loc}}(Q_{0,T})$, $Z_m = \int_{Q^R_{0,T}} E^{k_m}u^{k_m}(u^{k_m}-w)\varphi^R dxdt - \langle A^s w, (u^{k_m}-w)\varphi^R\rangle_{U(Q^s_{0,T})}$. Використавши оцінку (2.19) з $\varkappa = a_0$ одержимо, що

$$Z_m \geq c_0 \int\limits_{Q^R_{0,T}} |u^{k_m} - w|^2 \varphi^R dxdt - P(R)\Bigg(\int\limits_{Q^R_{0,T}} |u^{k_m} - w|^2\varphi^R dxdt\Bigg)^{p/2}. \qquad (3.8)$$

З нерівності (3.5) ($f_{k_m} = f$ в області $Q^R_{0,T}$) матимемо оцінку

$$\int\limits_{Q^R_{0,T}} E^{k_m}u^{k_m}\;\; u^{k_m}\varphi^R dxdt \leq \int\limits_{Q^R_{0,T}} (u^{k_m}_t - f)(v - u^{k_m})\varphi^R dxdt + \int\limits_{Q^R_{0,T}} E^{k_m}u^{k_m}\;\; v\varphi^R dxdt$$

для всіх $v \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q_{0,T}})$, $v \geq 0$. Тому з (3.8) та останньої оцінки матимемо

$$c_0 \int\limits_{Q^R_{0,T}} |u^{k_m} - w|^2\varphi^R dxdt - P(R)\Bigg(\int\limits_{Q^R_{0,T}} |u^{k_m} - w|^2\varphi^R dxdt\Bigg)^{p/2} \leq Z_m \leq$$

$$\leq \int\limits_{Q^R_{0,T}} (u^{k_m}_t - f)(v - u^{k_m})\varphi^R dxdt + \int\limits_{Q^R_{0,T}} E^{k_m}u^{k_m}\;\; v\varphi^R dxdt - \int\limits_{Q^R_{0,T}} E^{k_m}u^{k_m}\;\; w\varphi^R dxdt -$$
$$- \langle A^s w, (u^{k_m} - w)\varphi^R\rangle_{U(Q^s_{0,T})}.$$

Спрямувавши $m \to \infty$, після незначних перетворень одержимо

$$c_0 \int\limits_{Q^R_{0,T}} |u - w|^2\varphi^R dxdt \leq P(R)\Bigg(\int\limits_{Q^R_{0,T}} |u - w|^2\varphi^R dxdt\Bigg)^{p/2} + \int\limits_{Q^R_{0,T}} [(u_t - f)(v - u)\varphi^R +$$
$$+ \chi(v - w)\varphi^R]dxdt - \langle A^s w, (u - w)\varphi^R\rangle_{U(Q^s_{0,T})}.$$

Прийнявши $v = u$ (що законно), одержимо оцінку

$$c_0\int\limits_{Q^R_{0,T}} |u - w|^2\varphi^R dxdt \leq P(R)\Bigg(\int\limits_{Q^R_{0,T}} |u - w|^2\varphi^R dxdt\Bigg)^{p/2} + \langle \chi - A^s w, (u - w)\varphi^R\rangle_{U(Q^s_{0,T})}.$$

Приймемо тут $w = u - \lambda g$, де $\lambda > 0$, $g \in U_{\mathrm{loc}}(Q_{0,T})$, винесемо λ та поділимо на λ. Матимемо

$$c_0\lambda\int\limits_{Q^R_{0,T}} |g|^2\varphi^R dxdt \leq \lambda^{p-1}P(R)\Bigg(\int\limits_{Q_{0,T}} |g|^2\varphi^R dxdt\Bigg)^{p/2} + \langle \chi - A^s(u - \lambda g), g\varphi^R\rangle_{U(Q^s_{0,T})}.$$

Спрямувавши $\lambda \to +0$, з семінеперервності оператора A^s одержимо таку нерівність $0 \leq \langle \chi - A^s u, g\varphi^R \rangle_{U(Q^s_{0,T})}$. Звідси $\langle \chi, g\varphi^R \rangle_{U(Q^s_{0,T})} = \langle A^s u, g\varphi^R \rangle_{U(Q^s_{0,T})}$ ([15, с. 172]).

Нехай $\psi \in \Psi$, $v \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q_{0,T}})$, $v \geq 0$. Візьмемо $s \in \mathbb{N}$ таке, щоб $\psi = 0$ в $Q_{0,T} \setminus Q^s_{0,T}$. Спрямувавши в (3.5) $m \to \infty$, отримаємо $\int_{Q^s_{0,\tau}} (u_t + A^s u - f)(v - u)\psi dxdt \geq 0$ для всіх $\tau \in (0; T]$. Отже, u є сильним розв'язком варіаційної нерівності (1.1). Теорема доведена.

1. *Тихонов А.Н.* Теоремы единственности для уравнений теплопроводности // Мат. сб. – 1935. – Т. 42, №2. – С. 199-216.
2. *Tacklind S.* Sur les class quasianalytiques des solution des equations aux derivees partielles du type parabolique // Nova acta redital societatis schientiarum uppsaliensis. – 1936. – Ser. 4. – Vol. 10, №3. – P. 3-55.
3. *Brezis H., Friedman A.* Estimates on the support of solutions of parabolic variational inequalities // Ill. J. Math. – 1976. – Vol. 20. – P. 82-97.
4. *Бугрій О.М.* Параболічні варіаційні нерівності без початкових умов: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 2001.
5. *Калашников А.С.* О задаче Коши в классах растущих функций для некоторых квазилинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // Дифференциальные уравнения. – 1973. – Т. 9, №4. – С. 682-691.
6. *Di Benedetto E., Herero M.A.* On the Cauchy problem and initial traces for a degenerate parabolic equation // Transaction of the AMS. 1989. – Vol. 314, №1. – P. 187-224.
7. *Di Benedetto E., Herero M.A.* Non-negative solutions of the evolution p-Laplacian equation. Initial traces and Cauchy problem when $1 < p < 2$ // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1990. – Vol. 111, №3. – P. 225-290.
8. *Brezis H.* Semilinear equations in $\mathbb{R}^N$ without condition at infinity // Appl. Math. and Optim. – 1984. – Vol. 12. – P. 271-282.
9. *Бокало Н.М.* Об однозначной разрешимости краевых задач для полулинейных параболических уравнений в неограниченных областях без условий на бесконечности // Сиб. мат. журн. – 1993. – Т. 34, №4. – С. 33-40.
10. *Bernis F.* Elliptic and parabolic semilinear problems without conditions at infinity // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1989. – Vol. 106, №3. – P. 217-241.
11. *Бокало Н.М.* Задача Фурье для полулинейных параболических уравнений произвольного порядка в неограниченных областях // Нелинейные граничные задачи. – 2000. – Вып. 10. – С. 9-15.
12. *Бокало М.М.* Коректність задачі Фур'є для деяких квазілінійних параболічних рівнянь в необмежених по просторових змінних областях без умов на нескінченності // Матеріали міжн. мат. конф., присвяченій пам'яті Г. Гана – Чернівці, 1995.
13. *Смирнова Г.Н.* Линейные параболические уравнения, вырождающиеся на границе области // Сиб. мат. журн. – 1963. – Т. 4, №2. – С. 343-358.
14. *Ishige K., Murata M.* An intrinsic metric approach to uniqueness of the positive Cauchy problem for parabolic equations // Mathematische zeitschrift. – 1998.– Vol. 227.– P. 313-335.
15. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейних краевых задач. – М., 1972.
16. *Панков А.А.* Ограниченные и почти периодические решения нелинейных дифференциальных операторных уравнений. – К., 1985.
17. *Лавренюк С.П.* Параболические вариационные неравенства без начальных условий // Дифференциальные уравнения. – 1996. – Т. 32, №10. – С. 1-5.

18. *Urbanska K.* Parabolic variational inequality in unbouning domain // Мат. студії. – 2003. – Т. 19, №2. – С. 165-180.
19. *Бугрій О.М.* Системи параболічних варіаційних нерівностей в необмеженій області // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1999. – Вип. 53. – С. 77-86.
20. *Гаевский X., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М., 1978.
21. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – М., 1983.
22. *Ладыженская О.А., Солонников В.А, Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М., 1967.
23. *Бокало Н.М.* О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений // Труды семинара им. И.Г. Петровского. – 1989. – Вып. 14. – С. 3-44.

INITIAL-VALUE PROBLEM FOR NONLINEAR PARABOLIC VARIATIONAL INEQUALITY IN UNBOUNDED WITH RESPECT TO THE SPACE VARIABLES DOMAIN

Oleh BUHRII

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1

Let $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a unbounded domain, $\Omega_\tau = \{(x,t) : x \in \Omega, t = \tau\}$, $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1;t_2)$, $\mathcal{K} \subset L^p(0,T;W^{1,p}_{\text{loc}}(\overline{\Omega})) \cap L^2_{\text{loc}}(\overline{Q_{0,T}})$ be a closure convex subset, $p \in (1;2)$. We seek the function $u \in \mathcal{K} \cap C([0;T];L^2_{\text{loc}}(\overline{\Omega}))$ such that u satisfies the parabolic variational inequality

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[v_t(v-u)\psi + \sum_{i=1}^{n} a_i|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i}[(v-u)\psi]_{x_i} + (cu-f)(v-u)\psi+$$
$$+\tfrac{1}{2}\psi_t|v-u|^2\Big]dxdt \geq \tfrac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |v-u|^2\psi dx - \tfrac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} |v-u_0|^2\psi dx$$

for all test function v and for all $\tau \in (0,T]$ and arbitrary test functions $\psi \geq 0$, v. We suppose that $u_0 \in W^{2,2}_{\text{loc}}(\overline{\Omega})$, $f, f_t \in L^2_{\text{loc}}(\overline{Q_{0,T}})$, coefficients $a_1, \ldots, a_n$ may increase if $|x| \to \infty$. If some additional conditions are satisfied then we prove that our variational inequality has a unique solution.

Key words: parabolic variational inequality, initial-value problem, unbounded domain.

Стаття надійшла до редколегії 26.12.2003

Прийнята до друку 24.10.2007

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2007. Вип.67. С.53-58 *Ser. Mech.-Math. 2007. Vol.67. P.53-58*

УДК УДК 517.53

ПРО ЦІЛІ ФУНКЦІЇ З p-ЛИСТИМИ В ОДИНИЧНОМУ КРУЗІ ПОХІДНИМИ

Олександр ВОЛОХ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1

Теореми С. Шаха і М.М. Шеремети про цілі функції з однолистими в одиничному крузі похідними узагальнено для цілих функцій з p-листими похідними.

Ключові слова: цілі функції, аналітичні в одиничному крузі функції, p-листі функції.

1. Досліджуючи цілі функції з однолистими в одиничному крузі $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ похідними, С. Шах [1] довів таку теорему.

Теорема A. *Якщо функція* $f(z) = z + \sum\limits_{k=2}^{\infty} f_k z^k$ *і всі її похідні аналітичні й однолисті в* $\mathbb{D}$, *то* f *– ціла функція експоненціального типу.*

Той самий автор в [1] висловив таке припущення.

Гіпотеза 1. *Нехай* (n_k) *– зростаюча послідовність натуральних чисел, а функція* f *і всі її похідні* $f^{(n_k)}$ *аналітичні і однолисті в крузі* $\mathbb{D}$. *Якщо* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{n_k} = +\infty$, *то* f *– ціла функція.*

Цю гіпотезу спростував М.М. Шеремета [2], який довів [2]–[3] таку теорему.

Теорема B. *Нехай* (n_j) *– зростаюча послідовність натуральних чисел і* $n_0 = 0$. *Для того, щоб для кожної аналітичної в* $\mathbb{D}$ *функції* f *з однолистості в* $\mathbb{D}$ *всіх похідних* $f^{(n_j)}$ *випливало, що* f *– ціла функція, необхідно і достатньо, щоб послідовність* (n_j) *задовольняла умову*

$$\lim_{j\to\infty} \left\{ \ln n_j - \frac{1}{n_j} \sum_{s=1}^{j} (n_s - n_{s-1}) \ln(n_s - n_{s-1}) \right\} = +\infty. \tag{1}$$

Мета нашої праці – показати, що теореми A (С. Шаха) і B (М.М. Шеремети) залишаються правильними і для функцій з p-листими у середньому похідними.

© Волох Олександр, 2007

2. Узагальнення теореми С. Шаха. Нехай функція $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}f_kz^k$ аналітична в крузі $\mathbb{D}=\{z: |z|<1\}$, а $n(w)$ – кількість коренів рівняння $f(z)=w$ в цьому крузі. Функція f називається p-листою ($p\in\mathbb{N}$) в $\mathbb{D}$, якщо $n(w)\le p$ для всіх $w\in\mathbb{C}$ і $n(w_0)=p$ для деякого $w_0\in\mathbb{C}$.

Як і в [4, с. 26, 33] приймемо

$$p(\rho)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}n(\rho e^{i\theta})d\theta$$

і

$$W(R)=\int\limits_0^R p(\rho)d(\rho^2)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^R n(\rho e^{i\theta})\rho d\rho d\theta.$$

Якщо $W(R)\le pR^2\,(p>0)$ для всіх $R\in(0,+\infty)$, то f називається у середньому p-листою в крузі $\mathbb{D}$. Зрозуміло таке: якщо функція f є p-листою в крузі $\mathbb{D}$, то вона в цьому крузі є у середньому p-листою. З іншого боку, існують (див., наприклад, [4, с. 48]) p-листі у середньому функції, які не є p-листими.

Відомо [4, с. 65] таке: якщо f є у середньому p-листою функцією в $\mathbb{D}$, то для всіх $k\in\mathbb{N}$ правильні оцінки

$$|f_k|\le\begin{cases}Q_p\mu_pk^{2p-1}, & p>1/4,\\ Q_p|f_0|k^{-1/2}\ln(k+1), & p=1/4,\\ Q_p|f_0|k^{-1/2}\ln^{1/2}(k+1), & 0<p<1/4,\end{cases}$$

де $Q_p=(p+2)2^{3p-1}\exp\{p\pi^2+1/2\}$ і $\mu_p=\max\{|a_\nu|: \nu\le p\}$. Зрозуміло, якщо функція f у середньому p_1-листа і $p\ge p_1$, то f є у середньому p-листою. Тому можемо вважати, що $p\in\mathbb{N}$ і використовувати тільки першу з наведених оцінок, тобто

$$|f_k|\le Q_p\max\{|a_\nu|: \nu\le p\}k^{2p-1}\quad(k\ge1). \tag{2}$$

Використовуючи цю оцінку, спочатку доведемо таке узагальнення теореми С. Шаха.

Теорема 1. *Якщо аналітична в $\mathbb{D}$ функція f і всі її похідні у середньому p-листі функції в $\mathbb{D}$, то f — ціла функція експоненціального типу.*

Доведення. Оскільки похідна

$$f^{(n)}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k)!}{k!}f_{n+k}z^k$$

є у середньому p-листою в $\mathbb{D}$ функцією, то з огляду на нерівність (2) маємо

$$\frac{(n+k)!}{k!}|f_{n+k}|\le Q_pk^{2p-1}\max\left\{\frac{(\nu+n)!}{\nu!}|f_{\nu+n}|: \nu\le p\right\}=$$

$$= Q_p k^{2p-1} \max\left\{ \frac{(n+p)!}{p!}|f_{n+p}|, \ \ \frac{(n+p-1)!}{(p-1)!}|f_{n+p-1}|, \ldots, \frac{n!}{0!}|f_n| \right\}.$$

Звідси для $k = p+1$ отримуємо

$$|f_{n+p+1}| \le Q_p (p+1)^{2p-1}(p+1)! \max\left\{ \frac{|f_{n+p}|}{n+p+1}, \ \frac{|f_{n+p-1}|}{(n+p+1)(n+p)}, \ldots, \right.$$

$$\left. \frac{|f_{n+1}|}{(n+p+1)\ldots(n+2)}, \ \frac{|f_n|}{(n+p+1)\ldots(n+1)} \right\}.$$

Отже, для всіх $k \ge p$

$$|f_{k+1}| \le \frac{B_p}{k+1} \max\left\{ |f_k|, \ \frac{|f_{k-1}|}{k}, \ldots, \frac{|f_{k-p+1}|}{k\ldots(k-p+2)}, \ \frac{|f_{k-p}|}{k\ldots(k-p+1)} \right\},$$

де $B_p = Q_p (p+1)^{2p-1}(p+1)!$ Використовуючи цю нерівність, індуктивно отримуємо

$$|f_{k+1}| \le \frac{B_p}{k+1} \max\left\{ \frac{B_p}{k} \max\left\{ |f_{k-1}|, \ \frac{|f_{k-2}|}{k-1}, \ldots, \frac{|f_{k-1-p}|}{(k-1)\ldots(k-p)} \right\}, \right.$$

$$\left. \frac{|f_{k-1}|}{k}, \ldots, \frac{|f_{k-p+1}|}{k\ldots(k-p+2)}, \ \frac{|f_{k-p}|}{k\ldots(k-p+1)} \right\} =$$

$$= \frac{B_p^2}{(k+1)k} \max\left\{ |f_{k-1}|, \ \frac{|f_{k-2}|}{k-1}, \ldots, \frac{|f_{k-1-p}|}{(k-1)\ldots(k-p)} \right\} \le \cdots \le$$

$$\le \frac{B_p^{k-p+1}}{(k+1)k\ldots(p+1)} \max\left\{ |f_p|, \ \frac{|f_{p-1}|}{p}, \ldots, \frac{|f_1|}{p!}, \ \frac{|f_0|}{p!} \right\} = C_p \frac{B_p^k}{(k+1)!},$$

де $C_p = \mathrm{const} > 0$. З останньої нерівності випливає, що f – ціла функція експоненціального типу, який не перевищує B_p. Теорему 1 доведено.

3. Аналог теореми М. Шеремети. Припустимо тепер, що не всі $f^{(n)}$ у середньому p-листі функції в $\mathbb{D}$, але існує зростаюча послідовність (n_j) така, що всі $f^{(n_j)}$ у середньому p-листі функції в $\mathbb{D}$. Вважатимемо, що $n_0 = 0$. Тоді, як було показано вище, для всіх $k \ge 1$ і $j \ge 0$

$$|f_{n_j+k}| \le Q_p \frac{k^{2p-1}k!}{(n_j+k)!} \max\left\{ \frac{(n_j+\nu)!}{\nu!}|f_{n_j+\nu}| : \ \nu \le p \right\}. \tag{3}$$

Зокрема,

$$|f_{n_j+\nu}| = |f_{n_{j-1}+n_j-n_{j-1}+\nu}| \le Q_p \frac{(n_j-n_{j-1}+\nu)^{2p-1}(n_j-n_{j-1}+\nu)!}{(n_j+\nu)!} \times$$

$$\times \max_{0\le\mu\le p} \left\{ \frac{(n_{j-1}+\mu)!}{\mu!}|f_{n_{j-1}+\mu}| \right\}. \tag{4}$$

Нехай $1 \le m \le n_{j+1} - n_j$. Тоді з (3) і (4) маємо

$$|f_{n_j+m}| \le Q_p \frac{m^{2p-1}m!}{(n_j+m)!} \max_{0\le\nu\le p} \left\{ \frac{(n_j+\nu)!}{\nu!} Q_p \frac{(n_j-n_{j-1}+\nu)^{2p-1}(n_j-n_{j-1}+\nu)!}{(n_j+\nu)!} \right\} \times$$

$$\times \max_{0\le\mu\le p}\left\{\frac{(n_{j-1}+\mu)!}{\mu!}|f_{n_{j-1}+\mu}|\right\}$$

і, оскільки $\dfrac{(m+\nu)!}{\nu!} \le \dfrac{(m+p)!}{p!}$ для всіх $m > 1$ і $0 \le \nu \le p$, то

$$|f_{n_j+m}| \le \frac{Q_p^2}{p!}\frac{m^{2p-1}m!(n_j-n_{j-1}+p)^{2p-1}(n_j-n_{j-1}+p)!}{(n_j+m)!}\times$$

$$\times \max_{0\le\nu\le p}\left\{\frac{(n_{j-1}+\nu)!}{\nu!}|f_{n_{j-1}+\nu}|\right\}.$$

Застосовуючи до $|f_{n_{j-1}+\nu}|$ нерівність (4), звідси, як вище, отримуємо

$$|f_{n_j+m}| \le \frac{Q_p^3}{(p!)^2}\frac{m^{2p-1}m!}{(n_j+m)!}(n_j-n_{j-1}+p)^{2p-1}(n_j-n_{j-1}+p)!\times$$

$$\times(n_{j-1}-n_{j-2}+p)^{2p-1}(n_{j-1}-n_{j-2}+p)!\max_{0\le\nu\le p}\left\{\frac{(n_{j-2}+\nu)!}{\nu!}|f_{n_{j-2}+\nu}|\right\}$$

і, продовжуючи процес, приходимо до правильної для всіх $j \ge 0$, всіх $1 \le m \le n_{j+1}-n_j$ і деякої додатної сталої B_p нерівності

$$|f_{n_j+m}| \le B_p\left(\frac{Q_p}{p!}\right)^j\frac{m^{2p-1}m!}{(n_j+m)!}\prod_{s=1}^{j}(n_s-n_{s-1}+p)^{2p-1}\prod_{s=1}^{j}(n_s-n_{s-1}+p)! \qquad (5)$$

Нерівність (5) буде використано у доведенні такого аналогу теореми М.М. Шеремети.

Теорема 2. *Нехай (n_j) – зростаюча послідовність натуральних чисел і $n_0 = 0$. Для того, щоб для кожного $p \in (0,+\infty)$ і кожної аналітичної в $\mathbb{D}$ функції f з p-листості у середньому в $\mathbb{D}$ всіх похідних $f^{(n_j)}$ випливало, що f – ціла функція, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова (1).*

Доведення. В [2] показано таке: якщо умова (1) не виконується, то існує аналітична в $\mathbb{D}$ функція f, яка не є цілою, але всі похідні $f^{(n_j)}$ однолисті в $\mathbb{D}$ функції. Звідси випливає необхідність умови (1) і теореми 2.

Доведемо достатність умови (1). З (5) для $j \ge 0$ і $1 \le m \le n_{j+1}-n_j$ отримуємо

$$\frac{1}{n_j+m}\ln\frac{1}{|f_{n_j+m}|} \ge -\frac{\ln B_p + j(\ln Q_p - \ln p!) + (2p-1)\ln m}{n_j+m}+$$

$$+\frac{\ln(n_j+m)!}{n_j+m} - \frac{\ln m!}{n_j+m} - \frac{2p-1}{n_j+m}\sum_{s=1}^{j}\ln(n_s-n_{s-1}+p)-$$

$$-\frac{1}{n_j+m}\sum_{s=1}^{j}\ln(n_s-n_{s-1}+p)! \qquad (6)$$

Зрозуміло, що перший доданок у правому боці (6) є обмеженою величиною. Далі, використовуючи формулу Стірлінга $n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\exp\{-\theta_n/(12n)\}$, $0 < \theta_n < 1$, маємо

$$\frac{\ln(n_j+m)!}{n_j+m} = \ln(n_j+m) + O(1), \quad \frac{\ln m!}{n_j+m} = \frac{m\ln m}{n_j+m} + O(1)$$

при $j\to\infty$ і

$$\ln(n_s - n_{s-1}+p)! =$$

$$= (n_s - n_{s-1}+p)\ln(n_s-n_{s-1}+p) + \frac{1}{2}\ln(n_s-n_{s-1}+p) + O(1) \geq$$

$$\geq (n_s-n_{s-1})\ln(n_s-n_{s-1}) + \frac{2p+1}{2}\ln(n_s-n_{s-1}+p) + O(1)$$

при $s\to\infty$. Зауваживши ще, що $\sum\limits_{s=1}^{j}\ln(n_s-n_{s-1}+p) \leq n_j + jp$, з (6), отримуємо нерівність

$$\frac{1}{n_j+m}\ln\frac{1}{|f_{n_j+m}|} \geq \frac{1}{n_j+m}\left\{(n_j+m)\ln(n_j+m) - m\ln m - A_j\right\} + O(1),\ j\to\infty, \quad (7)$$

для всіх $1\leq m\leq n_{j+1}-n_j$, де $A_j = \sum\limits_{s=1}^{j}(n_s-n_{s-1})\ln(n_s-n_{s-1})$.

Розглянемо функцію

$$\Phi(x) = \frac{1}{n_j+x}\left\{(n_j+x)\ln(n_j+x) - x\ln x - A_j\right\}, \quad 1\leq x\leq n_{j+1}-n_j.$$

Оскільки $\Phi'(x) = (A_j - n_j\ln x)/(n_j+x)^2$, то на $[1,+\infty)$ функція Φ має єдину точку екстремуму $x = \exp\{A_j/n_j\}$, яка є точкою максимуму. Тому $\min\{\Phi(x) : 1\leq x\leq \leq n_{j+1}-n_j\} = \min\{\Phi(1), \Phi(n_{j+1}-n_j)\}$, а з (7) випливає, що для всіх $1\leq m\leq n_{j+1}-n_j$

$$\frac{1}{n_j+m}\ln\frac{1}{|f_{n_j+m}|} \geq \min\left\{\frac{1}{n_j+1}\left((n_j+1)\ln(n_j+1) - A_j\right),\right.$$

$$\left.\frac{1}{n_{j+1}}\left(n_{j+1}\ln n_{j+1} - (n_{j+1}-n_j)\ln(n_{j+1}-n_j) - A_j\right)\right\} + O(1) \geq$$

$$\geq \min\left\{\ln n_j - \frac{A_j}{n_j},\ \ln n_{j+1} - \frac{A_{j+1}}{n_{j+1}}\right\} + O(1), \quad j\to\infty.$$

З огляду на умову (1), випливає, що $\frac{1}{k}\ln\frac{1}{|f_k|}\to+\infty$, $k\to\infty$, тобто f – ціла функція. Теорему 2 доведено.

1. *Shah S.M.* Analytic functions with univalent derivatives and entire functions of exponential type // Bull. Amer. Math. Soc. – 1972. – Vol. 78, No 2. – P. 29-38.
2. *Шеремета М.М.* Спростування однієї гіпотези Шаха про однолисті функції // Матем. студії. – 1993. – Вип. 2 – С. 46-48.

3. *Шеремета М.Н.* О целых функциях с однолистными в круге производными // Укр. мат. журн. – 1991. – Т. 43, №3. – С. 400-406.
4. *Хейман В.К.* Многолистные функции. – М., 1960.

ON ENTIRE FUNCTIONS WITH P-VALENT DERIVATIVES IN THE UNIT DISK

Oleksandr VOLOKH

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1

Theorems of S. Shah and of M.M. Sheremeta on entire functions with univalent in the unit disk derivatives are generalized for entire functions with p-valent derivatives.

Key words: entire functions, analytic functions in the unit disk, p-valent functions.

Стаття надійшла до редколегії 26.04.2006

Прийнята до друку 24.10.2007

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2007. Вип. 67. С. 59–65 *Ser. Mech-Math. 2007. Vol. 67. P. 59–65*

УДК 539.3

ПОБУДОВА НАБЛИЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРШОГО РОДУ В ДЕЯКИХ КОНТАКТНИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Григорій ГАБРУСЄВ

Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя,
46001, Тернопіль, вул. Руська, 56

Отримано зображення наближеного розв'язку рівняння Фредгольма першого роду у вигляді полінома за ортогональними функціями. Проаналізовано можливість застосування варіаційної задачі з нерухомими кінцями та задачі поточкового зведення розв'язку до системи лінійних алгебричних рівнянь для визначення коефіцієнтів полінома. Одержано умову для вибору оптимальної кількості членів полінома-розв'язку.

Ключові слова: рівняння Фредгольма першого роду, регуляризація, контактна задача, контактні напруження, розподіл напружень.

Як відомо, задача відшукання розв'язку рівняння Фредгольма першого роду

$$\int_a^b y(t)\, K(t,r)\, dt = f(r), \quad a \le r \le b, \tag{1}$$

де ядро $K(t,r) \in L_2$ та права частина $f(r) \in L_2$ – відомі функції, у зв'язку з порушенням другої умови означення [1], некоректно сформульована. Навіть дуже малі збурення правої частини $f(r)$, ядра $K(t,r)$ чи методу розв'язання можуть призвести до великих похибок у побудованому розв'язку.

До середини минулого століття розгляд некоректно сформульованих задач вважався недоцільним і лише з публікаціями А.Н. Тихонова [1, 2] та М.М. Лаврентьєва [3] розпочався період розробки регуляризуючих алгоритмів. Побудові таких алгоритмів присвячені також праці львівських математиків [4, 5]. Мета нашої праці – розглянути випадки, коли наближений розв'язок задачі (1) цілком задовольняє потреби практики.

1. Метод регуляризації нульового порядку Тихонова. Запишемо (1) у вигляді операторного рівняння першого роду

$$Ay = f, \quad y, f \in L_2.$$

© Габрусєв Григорій, 2007

Нехай δ – похибка задання f, f^* – точна права частина, y_β – наближений, а y – точний розв'язки операторного рівняння. Оператор $R\left(f,\beta\right)$, залежний від параметра регуляризації β, називається *регуляризуючим* для заданого рівняння в околі $f^*\left(r\right)$, якщо:

1) $R\left(f,\beta\right)$ визначений для довільних $f \in L_2$ та $\beta > 0$;
2) існує така функція $\beta = \beta\left(\delta\right)$, що для $\forall\varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta\left(\varepsilon\right)$ таке, що у випадку $\left\|f\left(r\right) - f^*\left(r\right)\right\| \le \delta\left(\varepsilon\right)$ виконуватиметься $\left\|y_\beta\left(r\right) - y\left(r\right)\right\| \le \varepsilon$, де $y_\beta\left(r\right) = R\left(f,\beta\left(\delta\right)\right)$.

Залежність $\beta\left(\delta\right)$ повинна бути такою, щоб при $\delta \to 0$ також $\beta \to 0$, тобто наближений розв'язок повинен переходити у точний.

У методі регуляризації нульового порядку Тихонова вводиться згладжуючий функціонал
$$M^\beta\left[y_\beta\right] = \left\|Ay_\beta - f\right\|^2_{L_2} + \beta\left\|y_\beta\right\|^2_{L_2},$$
мінімізація якого і дає шуканий оператор $R\left(f,\beta\right)$ [2].

Розв'язок задачі (1) будуємо в просторі L_2 із нормою $\|y(t)\|^2 = \int_a^b y^2\left(t\right)dt$. Звідки одержимо
$$M^\beta[y_\beta] = \int\limits_a^b\left[\int\limits_a^b y_\beta\left(t\right)K\left(t,r\right)dt - f\left(r\right)\right]^2 dr + \beta\int\limits_a^b y^2_\beta\left(t\right)dt. \tag{2}$$

Будемо шукати $y_\beta\left(t\right)$ у вигляді узагальненого ряду Фур'є за ортогональними функціями $\varphi_n\left(t\right) = \sqrt{t}\cdot L\left(t,\gamma_n\right)$, тобто $y_\beta\left(t\right) = \sqrt{t}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n L\left(t,\gamma_n\right)$, де
$$L\left(t,\gamma_n\right) = N_0\left(\gamma_n\right)J_0\left(\frac{r}{a}\gamma_n\right) - J_0\left(\gamma_n\right)N_0\left(\frac{r}{a}\gamma_n\right).$$
Тут J_0 та N_0 – функції Бесселя першого та другого роду, а γ_n – додатні корені рівняння $N_0\left(z\right)J_0\left(\frac{b}{a}z\right) - J_0\left(z\right)N_0\left(\frac{b}{a}z\right) = 0$.

Запишемо наближений розв'язок, що відповідає параметру β, як поліном
$$\tilde{y}\left(t\right) = \tilde{y}_\beta\left(t\right) = \sqrt{t}\sum_{n=1}^{N} a_n L\left(r,\gamma_n\right). \tag{3}$$

Враховуючи (3), вираз (2) подамо у вигляді
$$M^\beta\left[y_\beta\right] = \int\limits_a^b\left[\sum_{n=1}^{N} a_n K_n\left(r\right) - f\left(r\right)\right]^2 dr + \beta\int\limits_a^b t\left(\sum_{n=1}^{N} a_n L\left(t,\gamma_n\right)\right)^2 dt,$$
де $K_n\left(r\right) = \int_a^b \sqrt{t}L\left(t,\gamma_n\right)K\left(t,r\right)dt$.

Шукаючи a_n, де $n = \overline{1,N}$, з умови мінімізації функціонала $M^\beta\left[y_\beta\right]$, тобто $\frac{\partial M}{\partial a_n} = 0$ (варіаційна задача з нерухомими кінцями), матимемо
$$\int\limits_a^b\left[\sum_{n=1}^{N} a_n K_n\left(r\right) - f\left(r\right)\right]K_q\left(r\right)dr + \beta\int\limits_a^b t\left(\sum_{n=1}^{N} a_n L\left(t,\gamma_n\right)\right)L\left(t,\gamma_q\right)dt = 0. \tag{4}$$

У практичних застосуваннях функції $K_n(r)$ та $f(r)$ перетворюються в нуль при $r = a$ та $r = b$ і є кусково-неперервними на проміжку $a \le r \le b$. Тому кожну з них можна подати у вигляді суми узагальненого ряду Фур'є за функціями $\varphi_j(r)$.

Замінимо згадані ряди N-частинними сумами

$$K_n(r) = \sqrt{r}\sum_{j=1}^{N} c_j^{(n)} L(r,\gamma_j), \quad f(r) = \sqrt{r}\sum_{j=1}^{N} b_j L(r,\gamma_j). \tag{5}$$

Враховуючи ортогональність системи функцій $\sqrt{r}\cdot L(r,\gamma_j)$, знайдемо

$$\begin{gathered} c_q^{(n)} = \tfrac{1}{M_q}\int\limits_a^b \sqrt{r}K_n(r)\,L(r,\gamma_q)\,dr, \\ b_q = \tfrac{1}{M_q}\int\limits_a^b \sqrt{r}f(r)\,L(r,\gamma_q)\,dr, \\ M_q = \int\limits_a^b rL^2(r,\gamma_q)\,dr = \tfrac{b^2}{2}\tfrac{1}{\left(\frac{b}{a}\gamma_q\right)^2}\left[R^2\left(\tfrac{b}{a}\gamma_q\right) - \tfrac{4}{\pi^2}\right]. \end{gathered} \tag{6}$$

Підставивши (5) та (6) у (4), одержимо

$$\begin{gathered} \int\limits_a^b \left[\sum_{n=1}^{N} a_n\sqrt{r}\left(\sum_{j=1}^{N} c_j^{(n)} L(r,\gamma_j)\right) - f(r)\right]\sqrt{r}\left(\sum_{s=1}^{N} c_s^{(q)} L(t,\gamma_s)\right)dr + \\ +\beta\int\limits_a^b t\left(\sum_{n=1}^{N} a_n L(t,\gamma_n)\right)L(t,\gamma_q)\,dt = 0. \end{gathered}$$

Проінтегрувавши по r на проміжку $[a,b]$, матимемо

$$\begin{gathered} \sum_{n=1}^{N} a_n\left[\sum_{s=1}^{N} c_s^{(n)} c_s^{(q)} M_s + \beta\begin{pmatrix} M_n,\ n = q \\ 0,\ n \ne q \end{pmatrix}\right] = \\ = \sum_{n=1}^{N} c_j^{(q)}\int\limits_a^b \sqrt{r}f(r)\,L(r,\gamma_j)\,dr, \ \ q = \overline{1,N.} \end{gathered} \tag{7}$$

Параметр регуляризації β шукатимемо згідно з принципом узагальненої нев'язки [2] як нуль функції $p(\beta) = \|Ay_\beta - f\|^2 - (\delta + h\|y_\beta\|)^2$, де h – точність задання оператора A. Задана функція після зображення y_β через коефіцієнти a_n набуде такого вигляду:

$$p(\beta) = (1-h)^2\beta^2\sum_{n=1}^{N} a_n M_n - \delta^2.$$

Величину N, кількість членів полінома (3), а отже, і кількість рівнянь у системі (7), вибираємо з тієї умови, щоб відносна похибка виконання рівності (1) $\gamma(N,\beta)$ не перевищувала заданої γ_0

$$\gamma(N,\beta) = \max_{r\in[a,b]}\frac{1}{f^*(r)}\left(\int\limits_a^b y_\beta(t)\,K(t,r)\,dt - f^*(r)\right)\cdot 100 < \gamma_0.$$

У розгорнутому вигляді, з врахуванням (3)

$$\max_{r\in[a,b]}\frac{1}{f^*(r)}\left(\sum_{n=1}^{N}a_n\int\limits_a^b\sqrt{t}L\left(t,\gamma_n\right)K\left(t,r\right)dt-f^*\left(r\right)\right)\cdot 100<\gamma_0. \tag{8}$$

2. Метод поточкового одержання системи алгебричних рівнянь. Ще одним підходом до побудови наближеного розв'язку задачі (1) є метод поточкового одержання системи алгебричних рівнянь. Вибираючи $\tilde{y}\left(t\right)$ у вигляді (3), рівняння (1) зведемо до співвідношення

$$\sum_{n=1}^{N}a_n\int\limits_a^b\sqrt{t}L\left(t,\gamma_n\right)K\left(t,r\right)dt=f\left(r\right),\quad a\le r\le b.$$

Вимагаючи виконання цієї умови в N точках проміжку $a\le r\le b$, одержимо систему N рівнянь із N невідомими a_n

$$\sum_{n=1}^{N}a_n\int\limits_a^b\sqrt{t}L\left(t,\gamma_n\right)K\left(t,r_i\right)dt=f\left(r_i\right),\quad i=\overline{1,N}.$$

Величину N вибиратимемо як і в попередньому випадку, а саме, вимагаючи, щоб відносна похибка виконання (1) не перевищувала заданої (a_n при $n=\overline{1,N}$ повинні задовольняти (8)).

3. Числовий приклад. Як числові приклади розглянемо запропоновані методи для побудови наближених функцій розподілу контактних напружень при взаємодії жорсткого кільцевого штампа з трансверсально ізотропним шаром.

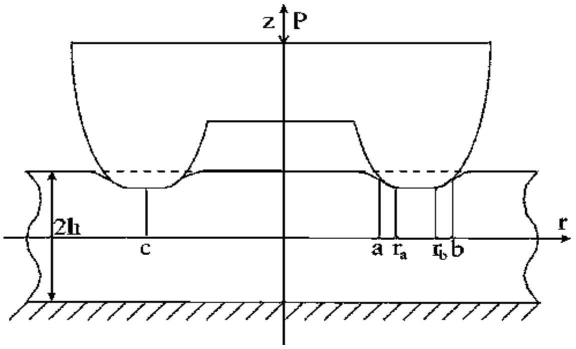

Рис. 1. Схема контактної взаємодії штампа із шаром

У [6] задана задача зводиться до розв'язання рівняння Фредгольма першого роду (1), де $y\left(t\right)=\sqrt{t}\cdot x\left(t\right)$ – шукана функція, $x\left(t\right)$ – функція, через яку описується розподіл контактних напружень під штампом, а також

$$K\left(t,r\right)=\sqrt{t}\int\limits_0^\infty F\left(\alpha\right)\left\{\begin{array}{c}J_0\left(r\alpha\right)-J_0\left(a\alpha\right)\\J_0\left(r\alpha\right)-J_0\left(b\alpha\right)\end{array}\right\}J_0\left(t\alpha\right)d\alpha,\quad\left\{\begin{array}{c}a\le r<c\\c\le r\le b\end{array}\right\},$$

$$F(\alpha) = \frac{\left(1 - e^{-4\mu_1 h\alpha}\right)\left(1 - e^{-4\mu_3 h\alpha}\right)}{\varphi^*(2\mu_3, 2\mu_1, \alpha)},$$

$$\varphi^*(2\mu_3, 2\mu_1, \alpha) = 2\mu_3\left(1 - e^{-4\mu_3\alpha}\right)\left(1 + e^{-4\mu_1\alpha}\right) - 2\mu_1\left(1 - e^{-4\mu_1\alpha}\right)\left(1 + e^{-4\mu_3\alpha}\right),$$

$$f(r) = B^{(1)}(r) = \begin{cases} (a - r_a)^2 - (r - r_a)^2, & a \le r \le r_a; \\ (a - r_a)^2, & r_a \le r < c; \\ 0, & c \le r \le b, \end{cases}$$

або

$$f(r) = B^{(2)}(r) = \begin{cases} 0, & a \le r < c; \\ (b - r_b)^2, & c \le r < r_b; \\ (b - r_b)^2 - (r - r_b)^2, & r_b \le r \le b. \end{cases}$$

Реалізуючи метод регуляризації нульового порядку Тихонова, прийдемо до двох систем вигляду (7) для відшукання $a_n^{(1)}$ та $a_n^{(2)}$ $n = \overline{1, N}$, де $c_q^{(n)}$, b_q та M_q обчислюють за співвідношеннями (6), в яких $f(r) = B^{(1)}(r)$ для відшукання $a_n^{(1)}$ та $f(r) = B^{(2)}(r)$ для відшукання $a_n^{(2)}$. Розв'язавши ці системи й одержимо наближення шуканої функції $x(r)$

$$\tilde{x}(r) = \sum_{n=1}^{N}\left(a_n^{(1)} z_1 + a_n^{(2)} z_2\right) L(r, \gamma_n),$$

через яку виражається функція контактних напружень $\sigma_{zz}(r) = \frac{P}{2\pi a^2}\tilde{x}(r)$. Задамо $\gamma_0 = 4\%$ і перевіримо для $N_1 = 11$ та $N_2 = 21$ виконання умови (8) при $f^*(r) = z_1 B^{(1)}(r) + z_2 B^{(2)}(r)$, $z_i = \frac{1}{R_i}$, $i = 1, 2$, де R_i – радіуси кривизни парабол, обертанням яких утворено штамп.

У результаті перевірки для випадків:

$$\begin{array}{ll} 1) & a = 0.4,\ b = 1.0,\ r_a = r_b = 0.7; \\ 2) & a = 0.4,\ b = 1.0,\ r_a = 0.55,\ r_b = 0.85 \end{array} \tag{9}$$

відповідно, одержимо

$$\begin{array}{ll} \gamma_1(11) = 7.2\%, & \gamma_2(11) = 10.2\%; \\ \gamma_1(21) = 2.3\%, & \gamma_2(21) = 3.0\%. \end{array}$$

Отже, випадок $N = 21$ задовольняє умову (8). Для побудови наближень функцій розподілу контактних напружень достатньо вибрати $N = 21$. Графіки функції $\tilde{x}(r)$ у наведених випадках зображено на рис. 2, 3.

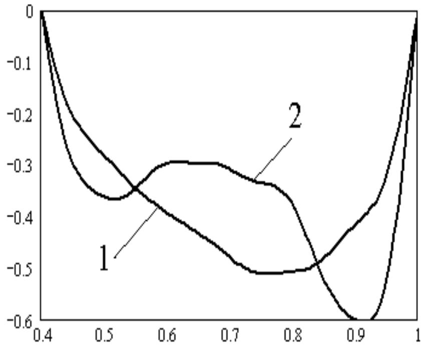

Рис. 2. Графіки функції $\tilde{x}(r)$ для випадків 1 та 2 при $N = 11$

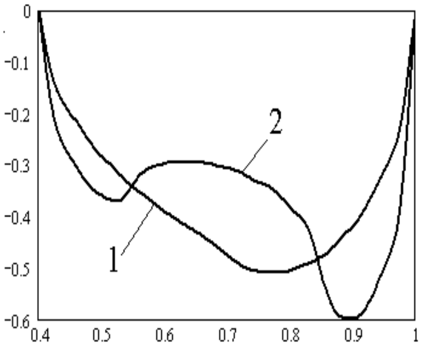

Рис. 3. Графіки функції $\tilde{x}(r)$ для випадків 1 та 2 при $N = 21$

Проаналізуємо з погляду визначення відносної похибки виконання рівності (1) методику поточкового зведення рівняння Фредгольма першого роду до системи алгебричних рівнянь.

Вибравши $N_1 = 11$ та $N_2 = 21$ для розглянутих значень геометричних параметрів (9) відповідно отримаємо

$$\gamma_1(11) = 8.6\%, \qquad \gamma_2(11) = 11.9\%;$$
$$\gamma_1(21) = 2.9\%, \qquad \gamma_2(21) = 3.8\%.$$

Графіки функції $\tilde{x}(r)$ для цих випадків показано на рис. 4, 5.

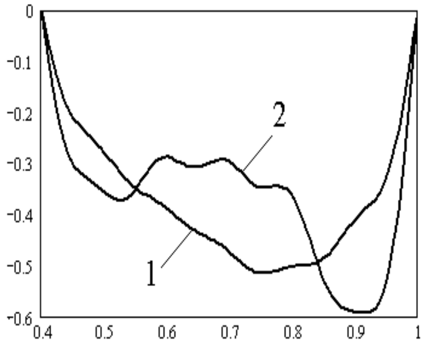

Рис. 4. Графіки функції $\tilde{x}(r)$ для випадків 1 та 2 при $N = 11$

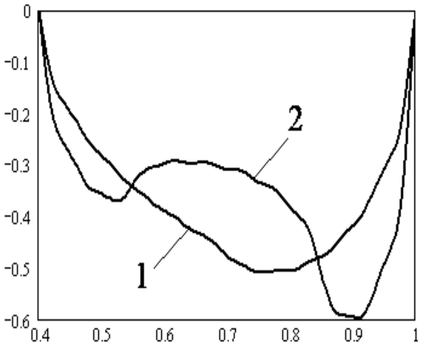

Рис. 5. Графіки функції $\tilde{x}(r)$ для випадків 1 та 2 при $N = 21$

Отже, запропонований підхід до побудови наближеного розв'язку задачі (1) при $N = 21$ цілком задовольняє практичні потреби.

Зазначимо, що методика поточкового зведення (1) до СЛАР не регуляризує задачу побудови наближеного розв'язку рівняння Фредгольма першого роду. Проте вона дає змогу провести оптимальний вибір кількості членів полінома, а отже, і кількості рівнянь СЛАР. Зауважимо лише, що застосування методу Тихонова дає більш згладжене наближення розв'язку (1), ніж у випадку поточкової побудови СЛАР, що і забезпечує меншу відносну похибку наближення розв'язку цим методом.

1. *Тихонов А.Н.* О регуляризации некорректно поставленных задач. – ДАН СССР. – 1963. – Т. 153, №1. – С. 49-52.
2. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. – М., 1990.
3. *Лаврентьев М.М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. – Новосибирск, 1962.
4. *Сявавко М.С., Пасечник Т.В., Рыбыцкая О.М.* Псевдообратный оператор и рациональные алгоритмы нормального решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода // Электрон. моделирование. – 1995. – 17, №1. – С. 10-16.
5. *Герасимчук О.Б., Рибицька О.М.* Нормальний розв'язок інтегрального рівняння першого роду із слабкою особливістю // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – 48, №2. – С. 43-52.
6. *Габрусев Г.В.* Осесиметрична контактна задача термопружності про тиск кільцевого штампа на трансверсально ізотропний шар // Вісник Тернопільського державного технічного університету – 2005. – Т. 10, № 1.

CONSTRUCTION OF THE APPROXIMATE SOLUTION OF THE FIRST KIND FRENDHOLM-TYPE EQUATION IN SOME CONTACT TASKS OF THE ELASTIC THEORY

Hryhorii HABRUSIEV

Ivan Puliuy State Technical University of Ternopil,
46001, Ternopil, Rus'ka Str., 56

Representations of the approximate solution of the first kind Frendholm-type equation in the form of a polynom on orthogonal functions are carried out. The opportunity of application of a variational task with the motionless ends and task of pointwise transition to system of the linear algebraic equations for determination a polynom's coefficients are analysed. The condition for a choice of optimum quantity of members of a polynom is received.

Key words: the first kind Frendholm-type equation, regularization, contact task, contact stresses, stress distribution.

Стаття надійшла до редколегії 22.03.2006

Прийнята до друку 24.10.2007

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2007. Вип. 67. С. 66–83 *Ser. Mech-Math. 2007. Vol. 67. P. 66–83*

УДК 517.928 :5 17.927

АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ЗАДАЧІ ШТУРМА-ЛІУВІЛЛЯ НА ГЕОМЕТРИЧНОМУ ГРАФІ ЗІ ЗБУРЕННЯМ ГУСТИНИ В ОКОЛІ ВУЗЛІВ

Юрій ГОЛОВАТИЙ, Геннадій ГРАБЧАК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1

Вивчено сингулярно збурену спектральну задачу для диференціального оператора другого порядку на геометричному графі. Ця задача моделює власні коливання системи натягнутих струн із збуренням густини в околах вузлів. Досліджено асимптотичну поведінку власних значень і власних функцій задачі для випадків регулярного та помірно сингулярного збурень густини.

Ключові слова: диференціальні рівняння на графах, сингулярні збурення, приєднані маси, спектр, власні значення, асимптотика.

Диференціальні рівняння на геометричних графах – нова математична теорія на пограниччі аналізу, алгебри та геометрії. Графи та диференціальні рівняння на них виникають у фізиці при дослідженні кристалічних структур, у механіці при вивченні властивостей складних мережоподібних конструкцій, у біології при моделюванні росту рослин і т. п. З погляду класичної теорії диференціальних рівнянь, маємо справу з системою великої кількості рівнянь із складними нелокальними умовами. Однак інтерпретація таких систем як диференціальних рівнянь на графах дає змогу дослідникові використовувати широкий спектр алгебричних та геометричних методів і водночас просто формулювати отримані результати, надаючи їм прозорого фізичного чи геометричного трактування.

За три останні десятиріччя на графи активно переносили результати якісної теорії звичайних диференціальних рівнянь, вивчали спектральні властивості та їхній зв'язок з геометрією графів. Варто зазначити, що у деяких аспектах результати досліджень задач на графах суттєво відрізняються від класичних, зокрема щодо кратності спектра та питання самоспряженості операторів.

Ця праця є одним з перших досліджень сингулярно збурених крайових задач на графах з використанням асимптотичного аналізу на таких геометричних об'єктах. Модель, яка тут узагальнюється на випадок графа загальної структури, запропонувала О. А. Олєйнік [2]. Йдеться про коливні системи з сильно нерівномірним розподілом маси. Дослідження властивостей коливних континуумів з приєднаними та

© Головатий Юрій, Грабчак Геннадій, 2007

зосередженими масами проводили механіки та математики, починаючи з XVIII ст. Нові технології, зокрема поява композитних матеріалів, призвели до виникнення нових математичних моделей з більш агресивною зміною характеристик. Наприклад, ці моделі дали змогу описати відомий з експериментів ефект локальних коливань в околі зони збурення маси (мовою механіки – ефект локалізації реакції).

Асимптотичні властивості одновимірних коливних систем із сингулярно збуреною густиною, зокрема ефект локальних коливань, досліджували в [2]-[9]. У працях [2]-[3] вивчали спектральні властивості струни з нерівномірним розподілом маси. В [4] побудовано повні асимптотичні розвинення власних значень і власних функцій цієї задачі. В [5], [6] ці результати були перенесені на випадок диференціальних операторів четвертого порядку – модель стержня. При достатньо великому локальному збуренні густини в системі, крім ефекту локальних коливань, виникають високочастотні власні коливання. Їхнє існування для струни вперше доведено в [7], а для стержня – у [8]. Багатовимірні задачі з різними збуреннями густини маси вивчали в [10]-[17]. З доволі детальним оглядом праць, присвячених таким задачам, можна ознайомитись у [18].

1. Графи та диференціальні рівняння. Нехай $\Gamma(V,E)$ – скінченний зв'язний граф з множиною V його вершин та множиною ребер E. Кожне ребро – це невпорядкована пара (a_i,a_j) елементів з V і кажуть, що воно з'єднує вершини a_i та a_j. Ребро і довільна з двох вершин, які воно з'єднує, називаються *інцидентними*. Дві вершини – *суміжні*, якщо вони інцидентні деякому ребру. Кількість ребер, інцидентних вершині a, називається *порядком* цієї вершини. Граф Γ є загальної структури – допускаються ребра-петлі (a_i,a_i), а також кратні ребра, коли дві вершини можуть з'єднуватися кількома ребрами.

Підрозбиття ребра (a_i,a_j) – це поділ цього ребра новою вершиною a на два – (a_i,a) та (a,a_j). Результатом скінченної кількості таких операцій є граф, який називається *підрозбиттям* вихідного графа.

Розглянемо деяку реалізацію графа Γ в $\mathbb{R}^3$, при якій кожне ребро є гладкою кривою і ребра не перетинаються. Надалі не будемо розрізняти абстрактний граф і його реалізацію – *геометричний граф. Функція на графі* – це відображення $u\colon\Gamma\to\mathbb{R}$. Нехай u_γ – звуження u на ребро γ. Оскільки знак похідної функції залежить від напряму параметризації ребра γ, то для граничного значення похідної функції u_γ на кінці ребра γ введемо таке позначення:

$\dfrac{du}{d\gamma}(a)$ *– крайня похідна функції u вздовж ребра γ у напрямі від вершини a.*

Інтеграл на графі від функції u є сумою інтегралів по всіх його ребрах

$$\int\limits_\Gamma u\,dx=\sum_{\gamma\in E}\int\limits_\gamma u\,ds.$$

Введемо простори: $C(\Gamma)$ – простір неперервних на графі Γ функцій; $C[\Gamma]$ – простір функцій на Γ, рівномірно неперервних на кожному ребрі і загалом невизначених

Трактуючи граф, як систему струн чи стержнів, природно припустити, що ребра реалізуються відрізками в $\mathbb{R}^3$. Однак ми не будемо обмежуватися лише механічною інтерпретацією моделі.

у вершинах; $C\{\Gamma\}$ – простір функцій на Γ, рівномірно неперервних на кожному ребрі і визначених у вершинах графа, значення $u(a)$ функції u у вершині a не обов'язково збігається з її граничними значеннями $u_\gamma(a)$ вздовж ребер; $C^n[\Gamma]$ – простір функцій, всі похідні яких до n-го порядку належать $C[\Gamma]$; $C^n(\Gamma) = C^n[\Gamma] \cap C(\Gamma)$, випадок $n = \infty$ допускається; $L_2(\Gamma)$ – простір Лебега зі скалярним добутком $(u, v)_0 = \int_\Gamma uv\,dx$ та нормою $\|u\|_0 = \sqrt{(u,\, u)_0}$.

Нехай $\partial\Gamma$ – деяка непорожня підмножина вершин, яку називатимемо *межею графа*. Тоді $V = \partial\Gamma \cup J$, де точки з J називаються *внутрішніми вершинами*. Оскільки цей поділ відбувається довільно, то множина $\partial\Gamma$ загалом не збігається з межею в топологічному сенсі. Нехай $C_0^\infty(\Gamma)$ – простір функцій з $C^\infty(\Gamma)$, що дорівнюють нулю у деякому околі $\partial\Gamma$. Тоді $H_0^1(\Gamma)$ – простір Соболєва, отриманий поповненням $C_0^\infty(\Gamma)$ за нормою $\|u\|_1 = (\int_\Gamma u'^2\,dx)^{1/2}$; $(u, v)_1$ – скалярний добуток в $H_0^1(\Gamma)$. Для функцій з $H_0^1(\Gamma)$ справджуються нерівності

$$\|u\|_0 \leqslant C\,\|u\|_1\,, \qquad \max_{x\in\Gamma} |u| \leqslant C\,\|u\|_1\,.$$

Лінійний диференціальний оператор L на графі Γ – це сукупність $\{L_\gamma\}_{\gamma\in E}$ лінійних диференціальних операторів на ребрах. *Крайовою задачею* для рівняння другого порядку $Lu = f$ на Γ є сукупність диференціальних рівнянь другого порядку $L_\gamma u_\gamma = f_\gamma$ на ребрах та умов, заданих у вершинах. Це можуть бути умови Діріхле $u(a) = 0$ чи умови спряження

$$u_{\gamma_1}(a) = u_{\gamma_2}(a) = \cdots = u_{\gamma_r}(a), \quad \gamma_i \in I(a), \quad i = 1, 2, \ldots r, \tag{1}$$

$$\sum_{\gamma\in I(a)} \frac{du}{d\gamma}(a) + h(a)u(a) = 0, \tag{2}$$

де h – деяка функція з $C\{\Gamma\}$. Тут і надалі $I(a)$ – множина ребер, інцидентних вершині a. Ми домовимось, що ребро-петля в множину $I(a)$ входить двічі, а тоді під знаком суми в (2) йому відповідає два доданки, оскільки обидва кінці петлі прилягають до a. Рівності (1) є умовою неперервності розв'язку у вершині a, а (2) – умова балансу сил натягу, потоків і т. п. Крайову задачу вивчають у класі $C^2(\Gamma)$. Позаяк розв'язок $u \in C^2(\Gamma)$ неперервний у всіх вершинах, то надалі умови (1) у формулюванні крайових задач опускатимемо.

Зауваження 1. *У фізичних моделях доданок $h(a)u(a)$ означає наявність зосередженого фактора у вершині a, на кшталт коефіцієнта $h(a)\delta(x)$ в диференціальному рівнянні. Тут $\delta(x)$ – функція Дірака. Для струнних сіток величина $h(a)$ є жорсткістю пружної опори у вершині a. У спектральних задачах умова $\sum_\gamma \frac{du}{d\gamma}(a) + \lambda\rho(a)u(a) = 0$ зазначає приєднану масу величини $\rho(a)$ у цій вершині.*

Для крайової задачі на Γ ми вважатимемо, що $\partial\Gamma$ – це множина вершин, у яких задається умова Діріхле. Тоді умови (1), (2) задаються в усіх вершинах з J – внутрішніх вершинах. Зауважимо, що вершина b кратності 1 є граничною точкою реалізації графа у топологічному сенсі. Якщо $b \notin \partial\Gamma$, то (1), (2) вироджуються в крайову умову третього роду $\frac{du}{d\gamma_i}(b) + h(b)u(b) = 0$ чи умову Неймана, коли $h(b) = 0$. Однак зручно вважати, що вершина b є внутрішньою. Ці крайові умови трактують як продовження диференціального оператора задачі з ребер на внутрішні вершини. Введемо диференціальний оператор [1]

$$\left(\frac{d}{d\Gamma}v'\right)(x)=\begin{cases} v''(x), & x\in E,\\ \sum\limits_{\gamma\in I(x)}\frac{dv}{d\gamma}(x), & x\in J,\end{cases}$$

що об'єднує диференціальні оператори на ребрах і умови спряження похідних у внутрішніх вершинах. Диференціювання функцій на ребрах проводять за натуральним параметром кривої. Зауважимо, що друга похідна є інваріантною щодо напряму параметризації ребра.

2. Формулювання збуреної задачі та допоміжні факти. Спектральна задача, яку ми вивчаємо, має подвійне збурення – від малого параметра залежать і диференціальне рівняння, і геометричний граф. Розпочнемо з опису збурення геометрії графа.

Нехай $\Gamma=\Gamma(V,E)$ – граф, реалізований в $\mathbb{R}^3$, $V=\partial\Gamma\cup J$. Через Γ_ε позначимо однопараметричну сім'ю реалізацій спеціального підрозбиття графа Γ, яке зараз опишемо. Побудуємо сфери радіуса ε з центрами у внутрішніх вершинах Γ. При достатньо малому ε вони не перетинаються. Кожна така сфера перетинає ребра, інцидентні її центру, в одній точці, за винятком петель, які вона перетинає в двох точках. Точки перетину побудованих сфер з ребрами графа Γ і центри цих сфер назвемо внутрішніми вершинами підрозбиття Γ_ε. Множину всіх вершин Γ_ε позначимо через V_ε, а множину внутрішніх вершин – через J_ε. Зрозуміло, що $J\subset J_\varepsilon$ і $V_\varepsilon=\partial\Gamma\cup J_\varepsilon$. Для кожної вершини $a\in J$ через $s_\varepsilon(a)$ позначимо зірковий підграф, що його вирізає з Γ сфера радіуса ε з центром у вершині a.

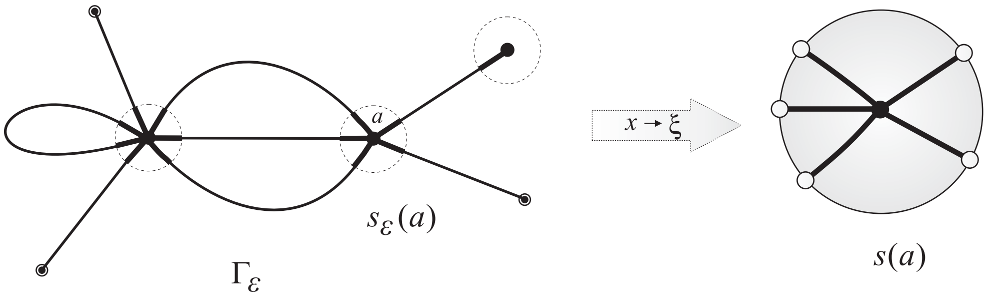

Рис. 1:

Нехай ρ – функція з $C^\infty\{\Gamma\}$, яка є додатною на ребрах і набуває нульового значення у всіх вершинах. Розглядаючи ρ на Γ_ε, ми додатково вимагатимемо, щоб вона дорівнювала нулю на J_ε, зберігаючи за нею позначення ρ. Ця функція моделює густину маси незбуреної системи. Введемо також невід'ємну функцію q_ε класу $C_0^\infty\{\Gamma_\varepsilon\}$, що дорівнює нулю на $J_\varepsilon\cup J$, а також поза всіма підграфами $s_\varepsilon(a)$, $a\in J$. На кожній зірці $s_\varepsilon(a)$ вона має зображення $q_\varepsilon(x)=q_a(\varepsilon^{-1}(x-a))$, де $q_a=q_a(\xi)$ – додатна гладка функція на ребрах графа $s(a)$ у допоміжному просторі $\mathbb{R}^3_\xi$, а $q_a(0)=0$.

Граф $s(a)$ отримуємо з $s_\varepsilon(a)$ зсувом, при якому вершина a переходить у початок координат $\xi = 0$, і гомотетичним розтягом з коефіцієнтом ε^{-1}. Побудована функція q_ε буде описувати збурення густини в околі вузлів. Розглянемо функцію

$$\rho_\varepsilon(x, \sigma) = \rho(x) + \varepsilon^{-\sigma} q_\varepsilon(x), \qquad x \in \Gamma_\varepsilon,$$

де σ – дійсний параметр, який визначає силу збурення. Ми вивчатимемо асимптотику спектра крайової задачі

$$\frac{d}{d\Gamma_\varepsilon} u'_\varepsilon + \lambda^\varepsilon \rho_\varepsilon u_\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_\varepsilon, \qquad u_\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Gamma, \tag{3}$$

де λ^ε – спектральний параметр, а u_ε – власна функція класу $C^2(\Gamma_\varepsilon)$.

В [4] для моделі струни показано, що є лише 5 випадків якісно різної поведінки спектра щодо сили збурення: $\sigma < 1$, $\sigma = 1$, $\sigma \in (1, 2)$, $\sigma = 2$ та $\sigma > 2$. Це залишається правильним і для моделі на графі. В цій праці ми вивчатимемо перші три випадки.

Оскільки простори Соболєва $H^1_0(\Gamma)$ та $H^1_0(\Gamma_\varepsilon)$, як множини функцій, збігаються, то подамо таке варіаційне формулювання задачі (3): *знайти число* λ^ε *і функцію* $u_\varepsilon \not\equiv 0$ *з класу* $H^1_0(\Gamma)$ *такі, що*

$$(u_\varepsilon, \varphi)_1 = \lambda^\varepsilon (\rho_\varepsilon u_\varepsilon, \varphi)_0 \tag{4}$$

для всіх $\varphi \in H^1_0(\Gamma)$. Тотожність одержуємо за допомогою формули інтегрування частинами на графі Γ

$$\int\limits_\Gamma \left(\frac{d}{d\Gamma} \phi' \right) \psi \, dx = - \sum_{x \in \partial\Gamma} \frac{d\phi}{d\gamma}(x) \psi(x) - \int\limits_\Gamma \phi' \psi' \, dx. \tag{5}$$

Звернемо увагу, що ця формула не залежить від орієнтації ребер. Задачі (4) відповідає оператор $A_\varepsilon \colon H^1_0(\Gamma) \to H^1_0(\Gamma)$, породжений рівністю

$$(A_\varepsilon u, v)_1 = (\rho_\varepsilon u, v)_0 \tag{6}$$

двох білінійних форм для всіх $v \in H^1_0(\Gamma)$. Очевидно, він є самоспряжений компактний і додатний. Точками його спектра є величини $(\lambda^\varepsilon)^{-1}$, обернені до власних значень задачі (3). Отже, для будь-якого $\varepsilon > 0$ ця задача має дискретний додатний спектр $\lambda^\varepsilon_1 < \lambda^\varepsilon_2 \leqslant \lambda^\varepsilon_3 \leqslant \cdots \leqslant \lambda^\varepsilon_k \leqslant \cdots$, а з власних функцій $\{u_{\varepsilon,k}\}_{k=1}^\infty$ можна сформувати ортонормовану базу в $H^1_0(\Gamma)$. Оскільки на ребрах коефіцієнти рівнянь є гладкими, то згідно з теоремами регулярності варіаційне формулювання дає нам власні функції класу $C^2(\Gamma_\varepsilon)$.

Зрозуміло, що оператор A_ε залежить також від σ, і правильніше було б писати $A(\varepsilon, \sigma)$. Зберігаючи коротше позначення, ми надалі завжди зазначатимемо, для яких значень σ вивчається асимптотична поведінка сім'ї A_ε при $\varepsilon \to 0$.

Введемо позначення $m_a = \int_{s(a)} q_a(\xi)\, d\xi$ для всіх $a \in J$. У випадку, коли в моделі $\sigma = 1$, величина m_a є масою, що концентрується поблизу вузла a.

Лема 1. *Для кожної вершини $a \in J$ та довільних функцій u, v з простору $H_0^1(\Gamma)$ виконуються оцінки*

$$\max_{x\in s_\varepsilon(a)} |u(x)-u(a)| \leqslant c\sqrt{\varepsilon}\,\|u\|_1\,, \tag{7}$$

$$\Bigl|\varepsilon^{-1}\int\limits_{s_\varepsilon(a)} q_\varepsilon uv\,dx - m_a u(a)v(a)\Bigr| \leqslant C\sqrt{\varepsilon}\,\|u\|_1\,\|v\|_1\,, \tag{8}$$

з незалежними від ε сталими c та C.

Доведення. Нехай γ_ε – ребро графа $s_\varepsilon(a)$ довжини ℓ_ε. Очевидно, що $\ell_\varepsilon = O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. Тоді для $x \in \gamma_\varepsilon$ матимемо

$$|u(x)-u(a)| \leqslant \int_{\gamma_\varepsilon} |u'(s)|\,ds \leqslant \Bigl(\int_0^{\ell_\varepsilon} ds\Bigr)^{1/2}\Bigl(\int_{\gamma_\varepsilon} u'^2\,ds\Bigr)^{1/2} \leqslant c\sqrt{\varepsilon}\,\|u\|_1\,.$$

Доведемо оцінку (8). Враховуючи (7), маємо

$$\begin{aligned}&|u(x)v(x)-u(a)v(a)| \leqslant |u(x)(v(x)-v(a))| + |v(a)(u(x)-u(a))| \leqslant\\ &\leqslant |(v(x)-v(a))|\,\max_\Gamma u + |(u(x)-u(a))|\,\max_\Gamma v \leqslant \sqrt{\varepsilon}C\,\|u\|_1\,\|v\|_1\,.\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}\Bigl|\varepsilon^{-1}\int\limits_{s_\varepsilon(a)} q_\varepsilon uv\,dx - m_a u(a)v(a)\Bigr| &\leqslant \varepsilon^{-1}\int\limits_{s_\varepsilon(a)} q_\varepsilon(x)\bigl|u(x)v(x)-u(a)v(a)\bigr|\,dx \leqslant\\ &\leqslant c\sqrt{\varepsilon}\Bigl(\int\limits_{s(a)} q_a(\xi)\,d\xi\Bigr)\,\|u\|_1\,\|v\|_1 \leqslant c\,m_a\sqrt{\varepsilon}\,\|u\|_1\,\|v\|_1.\end{aligned}$$

Як наслідок маємо також нерівності для u, $v \in H_0^1(\Gamma)$

$$|(q_\varepsilon u,\, v)_0| \leqslant c\,\varepsilon\,\|u\|_1\,\|v\|_1\,, \tag{9}$$

$$\Bigl|\varepsilon^{-1}(q_\varepsilon u,\, v)_0 - \textstyle\sum_{a\in J} m_a u(a)v(a)\Bigr| \leqslant C\sqrt{\varepsilon}\,\|u\|_1\,\|v\|_1\,. \tag{10}$$

Нам знадобляться деякі факти з теорії збурень операторів, які сформулюємо в зручному для наших потреб вигляді. У більш загальному формулюванні їх можна знайти в [19]–[22]. Нехай T – компактний самоспряжений оператор у гільбертовому просторі H з нормою $\|\cdot\|$.

Означення 1. Квазімодою *з нев'язкою δ для оператора T будемо називати таку пару $(\mu, v) \in \mathbb{R}\times H$, що $\|Tv-\mu v\| \leqslant \delta$ і $\|v\| = 1$.*

Лема 2. *(i) Якщо (μ, v) – квазімода з нев'язкою δ для оператора T, то інтервал $[\mu-\delta, \mu+\delta]$ містить принаймні одне власне значення оператора T.*
(ii) Нехай $E_T(\Delta)$ – спектральний проектор оператора T, що відповідає інтервалу $\Delta = [\mu-\alpha, \mu+\alpha]$, де $\alpha > 0$. Тоді

$$\|E_T(\Delta)v - v\| \leqslant \delta\alpha^{-1}.$$

Зокрема, коли в Δ лежить лише одне просте власне значення оператора T, то йому відповідає така нормована власна функція u, що $\|u-v\| \leqslant 2\delta\alpha^{-1}$.
(iii) Нехай $(\mu, v_1), \ldots, (\mu, v_r)$ – ортогональна сім'я квазімод для оператора T з нев'язкою δ, тобто $(v_i, v_j)_H = 0$ при $i \neq j$. Якщо $r\delta < \alpha$, то сумарна кратність частини спектра оператора T, що лежить в інтервалі Δ, дорівнює r.

Нехай S ще один компактний самоспряжений оператор в H. Тоді, як відомо,

$$|\lambda_k(T) - \lambda_k(S)| \leqslant \|T - S\|, \tag{11}$$

де $\lambda_k(T)$ і $\lambda_k(S)$ – k-ті власні значення операторів T і S. Якщо $Sv = \mu v$, то (μ, v) є квазімодою для оператора T з нев'язкою $\|T - S\|$. Нехай $E_S(\mu)$ – ортопроектор на власний підпростір для μ, а інтервал Δ не містить інших точок спектра S, окрім μ. Тоді

$$\|E_T(\Delta) - E_S(\mu)\| \leqslant c_\mu \, \|T - S\|, \tag{12}$$

що безпосередньо випливає з частин (ii), (iii) леми 2.

3. Регулярні збурення: випадки $\sigma < 1$ та $\sigma = 1$. Регулярними називаємо такі збурення, за яких сім'я операторів $A_\varepsilon = A(\varepsilon, \sigma)$ є рівномірно збіжною. Як ми доведемо, для випадку $\sigma < 1$ граничною є задача

$$\frac{d}{d\Gamma}\, u' + \lambda \rho u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \qquad u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Gamma, \quad u \in C^2(\Gamma) \tag{13}$$

із незбуреною густиною ρ. З нею асоційований самоспряжений, компактний, додатний оператор $B_0\colon H_0^1(\Gamma) \to H_0^1(\Gamma)$, який задається рівністю $(B_0 u, \varphi)_1 = (\rho u, \varphi)_0$ для всіх $\varphi \in H_0^1(\Gamma)$. Нехай $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ – власні значення задачі (13), перенумеровані з врахуванням кратності, а $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ – відповідні власні функції. Тоді спектр оператора B_0 складається з точок $(\lambda_k)^{-1}$.

Нехай P_λ – ортопроектор в $H_0^1(\Gamma)$ на власний підпростір, що відповідає власному значенню λ задачі (13), а P_λ^ε – ортопроектор на підпростір, породжений власними функціями задачі (3), для яких власні значення λ^ε прямують до λ при $\varepsilon \to 0$.

Теорема 1. *Нехай $\sigma < 1$. Власні значення задачі* (3) *збігаються при $\varepsilon \to 0$ до власних значень задачі* (13)*, ця збіжність є пономерною і $|\lambda_k^\varepsilon - \lambda_k| \leqslant c_k\, \varepsilon^{1-\sigma}$ для всіх $k \in \mathbb{N}$. Крім того, якщо λ – власне значення задачі* (13)*, то $\|P_\lambda^\varepsilon - P_\lambda\| \leqslant C_\lambda\, \varepsilon^{1-\sigma}$. Тут сталі c_k, C_λ не залежать від ε.*

Доведення. Покажемо, що сім'я операторів A_ε при $\varepsilon \to 0$ рівномірно збігається до оператора B_0. Справді, для функцій $u, \varphi \in H_0^1(\Gamma)$, враховуючи (9), маємо

$$\left|\big((A_\varepsilon - B_0)u,\, \varphi\big)_1\right| = \left|(\rho_\varepsilon u,\, \varphi)_0 - (\rho u,\, \varphi)_0\right| = \left|\varepsilon^{-\sigma}(q_\varepsilon u,\, \varphi)_0\right| \leqslant c\varepsilon^{1-\sigma}\|u\|_1\, \|\varphi\|_1,$$

тобто $\|A_\varepsilon - B_0\| \leqslant c\varepsilon^{1-\sigma}$. Тоді $|(\lambda_k^\varepsilon)^{-1} - (\lambda_k)^{-1}| \leqslant c\varepsilon^{1-\sigma}$ згідно з (11). Звідси маємо $|\lambda_k^\varepsilon - \lambda_k| \leqslant c\,|\lambda_k^\varepsilon|\,|\lambda_k|\,\varepsilon^{1-\sigma} \leqslant c_k\,\varepsilon^{1-\sigma}$, оскільки $\lambda_k^\varepsilon \to \lambda_k$ при $\varepsilon \to 0$.

Нехай Δ – окіл власного значення λ, що не містить інших точок спектра B_0. Тоді при малому ε всі власні значення A_ε, що прямують до λ, і лише вони, належатимуть інтервалу Δ. Отже, оцінка для різниці проекторів P_λ^ε, P_λ випливає з (12).

Зауваження 2. Отримані в теоремі оцінки $\|P_\lambda^\varepsilon - P_\lambda\| \leqslant C_\lambda\,\varepsilon^{1-\sigma}$ для кожного з власних значень λ задачі (13) рівносильні пономерній збіжності власних функцій $u_{\varepsilon,k} \to u_k$ в $H_0^1(\Gamma)$ при відповідному виборі u_k. Зрештою, $\|u_{\varepsilon,k} - u_k\|_1 \leqslant C_k\,\varepsilon^{1-\sigma}$, а з причини гладкості коефіцієнтів власні функції $u_{\varepsilon,k}$ збігаються і в просторі $C^2(\Gamma)$. Це стосується і випадку, описаного в теоремі 2.

Тепер вивчимо випадок $\sigma = 1$. Нехай функція $\rho_0 \in C^\infty\{\Gamma\}$ збігається з незбуреною густиною ρ на ребрах графа, але у внутрішніх вершинах $\rho_0(a) = m_a$, $a \in J$. В зауваженні 1 зазначено, що така густина описує приєднані маси величиною m_a у вершинах $a \in J$. Розглянемо спектральну задачу

$$\frac{d}{d\Gamma}\,v' + \lambda\rho_0\,v = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \qquad v = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Gamma, \quad v \in C^2(\Gamma), \tag{14}$$

якій відповідає самоспряжений компактний оператор B_1 в $H_0^1(\Gamma)$, визначений так: $(B_1 v,\, \varphi)_1 = (\rho v,\, \varphi)_0 + \sum_{a\in J} m_a v(a)\varphi(a)$ для всіх $\varphi \in H_0^1(\Gamma)$. Занумеруємо власні значення задачі (14) з врахуванням їхніх кратностей: $\lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k \leqslant \cdots$. Через P_λ позначимо ортопроектор в $H_0^1(\Gamma)$ на власний підпростір, що відповідає власному значенню λ задачі (14).

Теорема 2. *Нехай $\sigma = 1$. Власні значення задачі* (3) *збігаються при $\varepsilon \to 0$ до власних значень задачі* (14), *ця збіжність є пономерною і $|\lambda_k^\varepsilon - \lambda_k| \leqslant c_k\sqrt{\varepsilon}$ для всіх $k \in \mathbb{N}$. Крім того, для кожного власного значення λ задачі* (14) *справджується оцінка $\|P_\lambda^\varepsilon - P_\lambda\| \leqslant C_\lambda\sqrt{\varepsilon}$, де сталі c_k, C_λ не залежать від ε.*

Доведення. Як і в доведенні теореми 1, достатньо перевірити, що сім'я операторів A_ε рівномірно збігається до оператора B_1. Скориставшись нерівністю (10), матимемо

$$\begin{aligned}\left|\left((A_\varepsilon - B_1)v,\, \varphi\right)_1\right| &= \left|(\rho_\varepsilon v,\, \varphi)_0 - (\rho v,\, \varphi)_0 - \sum_{a\in J} m_a v(a)\varphi(a)\right| = \\ &= \left|\varepsilon^{-1}(q_\varepsilon v,\, \varphi)_0 - \sum_{a\in J} m_a v(a)\varphi(a)\right| \leqslant C\sqrt{\varepsilon}\,\|v\|_1\,\|\varphi\|_1\end{aligned}$$

для довільних функцій u, $\varphi \in H_0^1(\Gamma)$. Звідси $\|A_\varepsilon - B_1\| \leqslant C\sqrt{\varepsilon}$.

Отже, для $\sigma < 1$ спектр задачі (3) прямує до спектра задачі з незбуреною густиною, оскільки загальна маса, що концентрується в околах внутрішніх вершин, безмежно мала при $\varepsilon \to 0$. У випадку $\sigma = 1$ збурення густини в околах внутрішніх вершин δ-подібні, тому в границі отримуємо задачу (14) з приєднаними масами.

4. Сингулярні збурення: випадок $1 < \sigma < 2$. У цьому випадку сім'я операторів A_ε вже не є рівномірно обмеженою при $\varepsilon \to 0$. Позаяк $\|A_\varepsilon\|$ є точкою спектра A_ε, тоді $\|A_\varepsilon\|^{-1}$ є власним значенням задачі (3), то принаймні одне власне значення прямує до нуля при $\varepsilon \to 0$. Насправді, спектр задачі (3) ділиться на дві частини. Одна з них складається зі скінченної кількості власних значень, збіжних до нуля (*нижня частина спектра*), а до іншої належать власні значення, які мають додатні границі (*верхня частина спектра*).

4.1. "Невагомі" графи з важкими вузлами.

Ми доведемо, що нижня частина спектра складається з n власних значень із врахуванням їхньої кратності, де n – потужність множини J. Розглянемо спектральну задачу

$$\frac{d}{d\Gamma}\,w' + \nu q_0 w = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \qquad w = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Gamma \tag{15}$$

з густиною $q_0 \in C^\infty\{\Gamma\}$, яка є відмінною від нуля лише на множині J, а саме $q_0(a) = m_a$ для $a \in J$. Така задача моделює надлегку сітку струн з важкими вузлами, коли масою ребер можна знехтувати порівняно з масою вузлів.

Означення 2. *Функція u називається лінійною на графі Γ, якщо вона неперервна на Γ і є лінійною на кожному ребрі в його параметризації натуральним параметром.*

Тут і надалі позначатимемо через $b_1, b_2, \dots, b_N$ вершини графа Γ, а внутрішні вершини нам буде зручно позначати іншими літерами – $a_1, \dots, a_n$. Тут $n < N$, бо $J \subset V$. Домовимося також, що $b_i = a_i$ для $i = 1, \dots, n$.

Лема 3. *Лінійні функції на графі Γ утворюють лінійний простір $\mathcal{L}(\Gamma)$, вимірність якого дорівнює кількості вершин графа:* $\dim \mathcal{L}(\Gamma) = N$.

Доведення. Оскільки лінійна функція ℓ на Γ однозначно визначається своїми значеннями $\ell(b_1), \dots, \ell(b_N)$ у вершинах графа, то $\mathcal{L}(\Gamma)$ ізоморфний простору $\mathbb{R}^N$.

Через $\mathcal{L}_0(\Gamma)$ позначимо підпростір лінійних функцій на Γ, які обертаються в нуль на $\partial\Gamma$. Зрозуміло, що $\dim \mathcal{L}_0(\Gamma) = n$. Виберемо в $\mathcal{L}_0(\Gamma)$ базу з таких лінійних функцій $\ell_1, \dots, \ell_n$, що $\ell_i(a_i) = 1$ та $\ell_i(a_j) = 0$, коли $i \neq j$.

Теорема 3. *Задача* (15) *має $n = |J|$ додатних власних значень із врахуванням кратностей, а власні функції є лінійними на Γ і утворюють базу в просторі $\mathcal{L}_0(\Gamma)$.*

Доведення. Рівняння (15) на ребрах графа має вигляд $w''_\gamma = 0$, тому будь-який неперервний його розв'язок є лінійною функцією на Γ. Задача (15) має операторне зображення $\nu T_0 w - w = 0$ з оператором T_0 в $H^1_0(\Gamma)$

$$(T_0\, w, \varphi)_1 = \sum_{a \in J} m_a w(a) \varphi(a) \quad \text{для всіх } \varphi \in H^1_0(\Gamma). \tag{16}$$

Це оператор скінченного рангу. Справді, $\operatorname{Ker} T_0 = \{w \in H^1_0(\Gamma) \colon w = 0 \text{ на } J\}$. Функція $f \in H^1_0(\Gamma)$ має однозначне зображення $f = f(a_1)\ell_1 + \dots + f(a_n)\ell_n + f_0$, де $f_0 \in \operatorname{Ker} T_0$. Звідси $\operatorname{Im} T_0 = \mathcal{L}_0(\Gamma)$, тобто ранг T_0 дорівнює n. Тепер твердження про базу в $\mathcal{L}_0(\Gamma)$ стає очевидним.

До речі, існує простий і конструктивний алгоритм знаходження власних значень і власних функцій задачі (15). Введемо такі позначення: $I^*(a)$ – множина ребер, які є інцидентними вершині a, але не є петлями; R_{ij} – множина ребер, що з'єднують вершини a_i та a_j. Якщо w – власна функція задачі (15) з власним значенням ν, то на ребрі $\gamma = (b_i, b_j)$ вона має зображення $w_\gamma(\tau) = \big(w(b_j) - w(b_i)\big) d_\gamma^{-1} \tau + w(b_i)$, де d_γ – довжина ребра, а τ – натуральний параметр, $\tau \in (0, d_\gamma)$. Якщо γ є петлею, то $w_\gamma(\tau) = w_\gamma(b_i)$, тобто w є сталою на петлях. Отже, пошук функції w зводиться до знаходження вектора $\boldsymbol{w} = (w(a_1), \dots, w(a_n))$ її значень у внутрішніх вершинах, оскільки $w(b_i) = 0$ для $i \in \{n+1, \dots, N\}$ в силу крайових умов. Але диференціальне рівняння (15) для w на множині J рівносильне лінійній алгебричній системі

$$(C - \nu M)\,\boldsymbol{w} = 0. \tag{17}$$

Тут $M = \operatorname{diag}(m_{a_1}, \dots, m_{a_n})$ – діагональна матриця, складена з мас вузлів, а елементи c_{ij} квадратної матриці C порядку n будують за такими правилами:

$$c_{ii} = \sum_{\gamma \in I^*(a_i)} \frac{1}{d_\gamma}, \qquad c_{ij} = -\sum_{\gamma \in R_{ij}} \frac{1}{d_\gamma}, \ \text{ коли } a_i \text{ та } a_j \text{ суміжні,}$$

і $c_{ij} = 0$, коли вершини a_i та a_j суміжними не є. Рівняння (17) є так званою *узагальненою задачею на власні значення* для знаходження ν та $\boldsymbol{w}$ [24]. Власні значення $\nu_1, \dots, \nu_n$ задачі (15) є коренями характеристичного рівняння $\det(C - \nu M) = 0$, а за відповідними власними векторами $\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n$ будують лінійні власні функції.

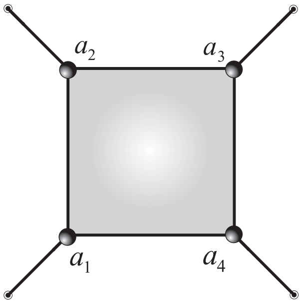

Рис. 2:

Приклад 1. Розглянемо модель невагомого графа, зображеного на рис. 2. Він складається з одиничного квадрата на чотирьох розтяжках довжини 1/2. У вершинах квадрата a_1, a_2, a_3, a_4, які вважають внутрішніми, зосереджено маси величини m. Для такого графа матриця C має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

а $M = mI$, де I – одинична матриця четвертого порядку. Тоді задача (17) має чотири власні значення – два прості, а одне двократне

$$\begin{aligned} \nu_1 = 2 \quad &\longrightarrow \quad \boldsymbol{w}_1 = (1,\ 1,\ 1,\ 1), \\ \nu_2 = \nu_3 = 4 \quad &\longrightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{w}_2 = (-1,\ -1,\ 1,\ 1), \\ \boldsymbol{w}_3 = (-1,\ 1,\ 1,\ -1), \end{cases} \\ \nu_4 = 6 \quad &\longrightarrow \quad \boldsymbol{w}_4 = (-1,\ 1,\ -1,\ 1). \end{aligned}$$

Рівняння на J є сукупністю умов спряження перших похідних у внутрішніх вершинах графа.

Нагадаємо, що координати власних векторів $\boldsymbol{w}_k$ – це значення у внутрішніх вершинах відповідних лінійних власних функцій для невагомого графа. Ці функції зображено на рис. 3.

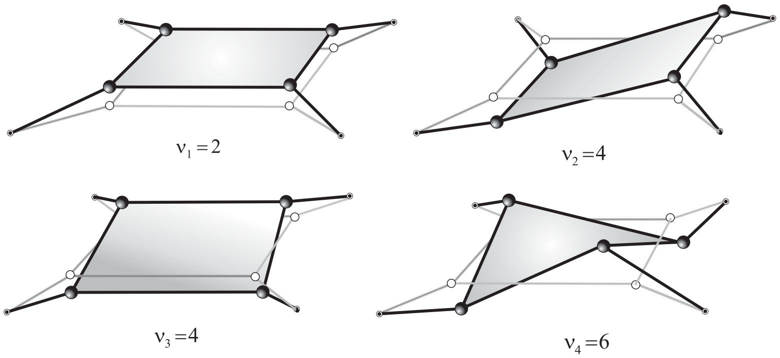

Рис. 3:

4.2. Асимптотика нижньої частини спектра. Вивчимо поведінку при $\varepsilon \to 0$ перших n власних значень $\lambda_1^\varepsilon, \dots, \lambda_n^\varepsilon$ задачі (3) та відповідних власних функцій $u_{\varepsilon,k}$, які вважатимемо нормованими в $H_0^1(\Gamma)$.

Введемо позначення: P_ν – ортопроектор в $H_0^1(\Gamma)$ на власний підпростір задачі (15), що відповідає власному значенню ν; $\mathcal{P}_\nu^\varepsilon$ – ортопроектор в $H_0^1(\Gamma)$ на підпростір, породжений власними функціями збуреної задачі (3) з такими власними значеннями λ^ε, що $\varepsilon^{1-\sigma}\lambda^\varepsilon \to \nu$ при $\varepsilon \to 0$. Нехай $\nu_1, \dots, \nu_n$ – власні значення задачі (15), занумеровані з врахуванням кратності.

Теорема 4. *Нехай $\sigma > 1$. Для всіх $k = 1, 2, \dots, n$ власні значення λ_k^ε задачі* (3) *прямують до нуля при $\varepsilon \to 0$ і виконуються оцінки*

$$|\varepsilon^{1-\sigma}\lambda_k^\varepsilon - \nu_k| \leqslant c_k\varepsilon^\theta, \qquad \theta = \min\{1/2, \sigma - 1\}.$$

Крім того, для кожного власного значення ν задачі (15)

$$\|\mathcal{P}_\nu^\varepsilon - P_\nu\| \leqslant C_\nu\varepsilon^\theta,$$

а лінійні власні функції $w_1, \dots, w_n$ цієї задачі можна вибрати так, що

$$\|u_{\varepsilon,k} - w_k\|_1 \leqslant L_k\,\varepsilon^\theta \tag{18}$$

для всіх $k = 1, \dots, n$. Тут сталі c_k, C_ν, L_k не залежать від ε.

Доведення. Перенормуємо сім'ю операторів A_ε, ввівши позначення $T_\varepsilon = \varepsilon^{\sigma-1}A_\varepsilon$. Сім'я T_ε вже є рівномірно обмеженою і при $\varepsilon \to 0$ збігається в операторній нормі до оператора T_0. Справді, використавши рівності (6) і (16), матимемо

$$\left|\big((T_\varepsilon - T_0)v, v\big)_1\right| = \left|\varepsilon^{\sigma-1}(A_\varepsilon v, v)_1 - (T_0 v, v)_1\right| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon^{\sigma-1}|(\rho v, v)_0| + \left|\varepsilon^{-1}(q_\varepsilon v, v)_0 - \sum_{a\in J} m_a v(a)^2\right| \leqslant c\,(\varepsilon^{\sigma-1} + \sqrt{\varepsilon})\,\|v\|_1^2$$

для всіх $v \in H^1_0(\Gamma)$. Тут ми застосували нерівність (10). Отже,

$$\|T_\varepsilon - T_0\| \leqslant c\,\varepsilon^\theta. \tag{19}$$

Позаяк величини $\varepsilon^{\sigma-1}(\lambda^\varepsilon_k)^{-1}$ є власними значеннями оператора T_ε, а його власні вектори такі самі як у оператора A_ε, то всі твердження теореми випливають із оцінки норм (19) та нерівностей (11), (12).

Хоча в цій статті ми обмежилися дослідженням моделі при $\sigma < 2$, однак результат про поведінку нижньої частини спектра залишається правильним для всіх $\sigma > 1$. Коли маса, що концентрується в околі вузлів, необмежено зростає при $\varepsilon \to 0$, то перші n власних значень збуреної задачі (3), де n – кількість внутрішніх вершиш графа Γ, завжди прямують до нуля, а відповідні власні функції є асимптотично близькими до лінійних функцій на Γ. Ці лінійні функції, тобто базу $w_1, \dots, w_n$ з теореми, можна знайти конструктивно, побудувавши асимптотичні розвинення власних значень λ^ε_k і відповідних власних функцій $u_{\varepsilon,k}$ в околі кратного власного значення ν.

Перенормуванням сім'ї A_ε ми досягли її обмеженості в операторній нормі, але втратили в результаті граничного переходу всю інформацію про форми власних коливань, що відповідають верхній частині спектра. Ці власні функції "зникли" в ядрі оператора T_0.

4.3. Асимптотика верхньої частини спектра. Покажемо, що для $1 < \sigma < 2$ решти власних значень відокремлені від нуля при $\varepsilon \to 0$.

Лема 4. *Для кожної вершини $a_i \in J$ графа Γ_ε існує лінійна комбінація $v_{\varepsilon,i}$ перших n власних функцій задачі* (3)*, така що*

$$|v_{\varepsilon,i}(a_i)| \geqslant c \qquad \textit{та} \qquad v_{\varepsilon,i}(a_j) \to 0 \quad \textit{для } j \neq i$$

з деякою додатною сталою c. При $j \neq i$

$$|v_{\varepsilon,i}(a_j)| \leqslant C\varepsilon^\theta, \qquad \theta = \min\{1/2, \sigma - 1\}. \tag{20}$$

Доведення. Раіше ми використовували дві різні бази в просторі $\mathcal{L}_0(\Gamma)$, який є образом оператора T_0. Першу з них побудовано в теоремі 3, а другу – в теоремі 4. Лінійна функція ℓ_i з першої бази є відмінною від нуля лише в одній внутрішній вершині a_i. Нехай $\ell_i = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n$ – її зображення у базі з теореми 4. Приймемо $v_{\varepsilon,i} = \alpha_1 u_{\varepsilon,1} + \dots + \alpha_n u_{\varepsilon,n}$. Тоді згідно з (1) та (18) маємо

$$\max_{x\in\Gamma} |v_{\varepsilon,i}(x) - \ell_i(x)| \leqslant \|v_{\varepsilon,i} - \ell_i\|_1 \leqslant C\varepsilon^\theta.$$

Отже, лінійна комбінація $v_{\varepsilon,i}$ задовольняє всі умови леми.

Лема 5. *Нехай $\sigma \in (1, 2]$. Тоді існує така додатна стала $\varkappa$, що $\lambda^\varepsilon_{n+1} \geqslant \varkappa$ для всіх додатних ε.*

Доведення. Нехай $u_\varepsilon = u_{\varepsilon,n+1}$ – власна функція задачі (3), яка відповідає власному значенню $\lambda^\varepsilon_{n+1}$, $\|u_\varepsilon\|_1 = 1$. Тоді вона ортогональна в $H^1_0(\Gamma)$ до функції $v_{\varepsilon,i}$ з попередньої леми, що на підставі тотожності (4) можна записати так: $(\rho u_\varepsilon,\, v_{\varepsilon,i})_0 + \varepsilon^{-\sigma}(q_\varepsilon u_\varepsilon,\, v_{\varepsilon,i})_0 = 0$. Отже,

$$\varepsilon^{-\sigma}|(q_\varepsilon u_\varepsilon,\, v_{\varepsilon,i})_0| \leqslant |(\rho u_\varepsilon,\, v_{\varepsilon,i})_0| \leqslant C.$$

Перепишемо цю нерівність у такому вигляді:

$$\varepsilon^{-1}\Big|\int\limits_{s_\varepsilon(a_i)} q_\varepsilon u_\varepsilon v_{\varepsilon,i}\,dx + \beta_\varepsilon(u_\varepsilon, v_{\varepsilon,i})\Big| \leqslant C\varepsilon^{\sigma-1}, \tag{21}$$

де $\beta_\varepsilon(u_\varepsilon, v_{\varepsilon,i}) = \sum_j{}' \int_{s_\varepsilon(a_j)} q_\varepsilon u_\varepsilon v_{\varepsilon,i}\,dx$. Тут сума береться за всіма внутрішніми вершинами, крім a_i. Врахувавши (9) і (20), матимемо $|\beta_\varepsilon(u_\varepsilon, v_{\varepsilon,i})| \leqslant C\varepsilon^{1+\theta}$. Комбінуючи цю нерівність з оцінками (8), (21), легко отримати, що $|u_\varepsilon(a_i)v_{\varepsilon,i}(a_i)| \leqslant C\varepsilon^\theta$. Згідно з лемою 4 величина $|v_{\varepsilon,i}(a_i)|$ рівномірно відокремлена від нуля. Тому $|u_\varepsilon(a_i)| \leqslant C\varepsilon^\theta$, і остаточно

$$\max_{x\in s_\varepsilon(a_i)} |u_\varepsilon(x)| \leqslant C\varepsilon^\theta \tag{22}$$

на підставі нерівності (9). Зауважимо, що ця нерівність виконується для кожної внутрішньої вершини $a_i \in J$, бо у попередніх міркуваннях вершина була довільна.

Тепер з тотожності (4) маємо $1 = \lambda^\varepsilon_{n+1}(\rho_\varepsilon u_\varepsilon,\, u_\varepsilon)_0$. Отже,

$$\begin{aligned}\left(\lambda^\varepsilon_{n+1}\right)^{-1} &\leqslant |(\rho u_\varepsilon,\, u_\varepsilon)_0| + \varepsilon^{-\sigma}|(q_\varepsilon u_\varepsilon,\, u_\varepsilon)_0| \leqslant \\ &\leqslant C\|u_\varepsilon\|_0^2 + \varepsilon^{1-\sigma}\sum_{a\in J} m_a \max_{s_\varepsilon(a)} |u_\varepsilon|^2 \leqslant C_1 + C_2\varepsilon^{1-\sigma+2\theta}\end{aligned}$$

згідно з оцінками (22). Для завершення доведення достатньо зауважити, що
$1 - \sigma + 2\theta \geqslant 0$ при $\sigma \in (1,\, 2]$, тобто величина $(\lambda^\varepsilon_{n+1})^{-1}$ є обмеженою при $\varepsilon \to 0$.

Отже, всі власні значення λ^ε_k збуреної задачі (3), починаючи з номера $n+1$, рівномірно відокремлені від нуля. Саме вони становлять верхню частину спектра. Далі вивчимо поведінку власних функцій, які відповідають цій частині спектра. Характерною ознакою таких коливань є те, що великі маси, які концентруються у вузлах, роблять ці вузли асимптотично нерухомими.

Лема 6. *Нехай $\sigma \in (1,\, 2]$ і $k > n$. Значення кожної власної функції $u_{\varepsilon,k}$ у всіх внутрішніх вершинах прямують до нуля при $\varepsilon \to 0$. А саме, $|u_{\varepsilon,k}(a)| \leqslant C_k\varepsilon^\theta$ для всіх $a \in J$.*

Доведення. Насправді все вже доведено в попередній лемі. Оцінки, які нам потрібні, отримано для функції $u_{\varepsilon,n+1}$ (див. нерівності (22)). При доведенні ми використали лише факт, що ця власна функція ортогональна до перших n власних функцій. Тому його без жодних змін можна повторити для кожної $u_{\varepsilon,k}$ з номером, більшим за n.

Отож, природно очікувати, що в граничній задачі, яка описуватиме асимптотику власних функцій верхньої частини спектра, виникнуть умови Діріхле у кожному вузлі, де збурюється густина маси. Розглянемо задачу на власні значення

$$\frac{d}{d\Gamma}\, u' + \mu\rho u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \qquad u = 0 \quad \text{на} \quad V, \tag{23}$$

де нагадаємо, що V – множина усіх вершин графа. В цій задачі треба вважати, що $\partial\Gamma = V$, тоді вона фактично стає сукупністю класичних задач Штурма-Ліувілля на ребрах графа Γ

$$u''_\gamma(\tau) + \mu\rho_\gamma(\tau)u_\gamma(\tau) = 0, \quad \tau \in (0, d_\gamma), \qquad u_\gamma(0) = u_\gamma(d_\gamma) = 0. \tag{24}$$

Хоча всі власні значення будь-якої із задач (24) є простими, спектр задачі (23) як диз'юнктне об'єднання спектрів задач (24) може бути кратним. Максимальна кратність власного значення не перевищує кількості ребер графа Γ.

Нехай $\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots \leqslant \mu_n \leqslant \cdots$ – власні значення задачі (23), занумеровані з врахуванням кратності. Введемо підпростір $\mathcal{H} = \big\{u \in H^1(\Gamma)\colon u(a) = 0$ для всіх $a \in V\big\}$ простору $H_0^1(\Gamma)$. Варіаційне формулювання задачі (23) є таким: *знайти число μ і функцію $u \neq 0$ з класу $\mathcal{H}$ такі, що*

$$(u,\, \varphi)_1 = \mu(\rho u,\, \varphi)_0, \qquad \varphi \in \mathcal{H}. \tag{25}$$

З нею асоційований самоспряжений компактний додатний оператор $T_1\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, дія якого визначається рівністю $(T_1 u,\, \varphi)_1 = (\rho u,\, \varphi)_0$ для всіх $\varphi \in \mathcal{H}$.

Для функції $u \in C^1(\Gamma)$ введемо такі позначення $g_a(u) = \sum_{\gamma \in I(a)} \frac{du}{d\gamma}(a)$, $a \in J$. Доведемо одну технічну лему.

Лема 7. *Нехай μ і v – власне значення і власна функція задачі* (23)*, а φ – довільна функція з $H_0^1(\Gamma)$. Тоді*

$$(v,\, \varphi)_1 - \mu(\rho v,\, \varphi)_0 = \sum_{a \in J} g_a(v)\varphi(a), \tag{26}$$

$$\Bigg|\varepsilon^{-2} \int\limits_{s_\varepsilon(a)} q_\varepsilon v \varphi\, dx\Bigg| \leqslant C\|\varphi\|_1. \tag{27}$$

Доведення. Зауважимо таке: хоча ми трактуємо v як елемент $H_0^1(\Gamma)$, ця функція як розв'язок рівняння (24) є гладкою на кожному ребрі. Тому її похідні $\frac{dv}{d\gamma}(a)$, а тоді і величини $g_a(v)$, коректно визначені. Щоб отримати (26), треба помножити рівняння (23) на φ і проінтегрувати частинами за допомогою формули (5). Зрозуміло таке: коли φ належить підпростору $\mathcal{H}$, то (26) збігається з тотожністю (25).

Оскільки $v(a) = 0$, то виконується оцінка $\max\limits_{x \in s_\varepsilon(a)} |v(x)| \leqslant c\varepsilon$. Тоді

$$\Bigg|\varepsilon^{-2}\int\limits_{s_\varepsilon(a)} q_\varepsilon v \varphi\, dx\Bigg| \leqslant \big(\varepsilon^{-1} \max_{x \in s_\varepsilon(a)} |v(x)|\big)\Bigg(\varepsilon^{-1}\int\limits_{s_\varepsilon(a)} q_\varepsilon |\varphi|\, dx\Bigg) \leqslant C\|\varphi\|_1$$

відповідно до (8).

Лема 8. *Нехай $1 < \sigma < 2$. Кожне власне значення λ_k^ε, $k > n$, верхньої частини спектра має скінченну додатну границю при $\varepsilon \to 0$ і ця границя є власним значенням задачі* (23).

Доведення. Нехай λ^ε – власне значення верхньої частини спектра і $\lambda^\varepsilon \to \mu$ при $\varepsilon \to 0$. Спочатку доведемо такий факт: якщо u_ε – відповідна послідовність нормованих власних функцій і $u_\varepsilon \to u$ слабко в $H_0^1(\Gamma)$, то u є власною функцією задачі (23) з власним значенням μ. Наразі покажемо, що гранична функція u відмінна від нуля. Використаємо тотожність (4)

$$(\rho u_\varepsilon,\, u_\varepsilon)_0 + \varepsilon^{-\sigma}(q_\varepsilon u_\varepsilon,\, u_\varepsilon)_0 = \frac{1}{\lambda^\varepsilon}. \tag{28}$$

Для власних функцій верхньої частини спектра виконуються оцінки (22), тому

$$\varepsilon^{-\sigma}(q_\varepsilon u_\varepsilon,\, u_\varepsilon)_0 \leqslant c\varepsilon^{1-\sigma}\sum_{a\in J}\max_{x\in s_\varepsilon(a)}|u_\varepsilon(x)|^2\left(\varepsilon^{-1}\int\limits_{s_\varepsilon(a)} q_\varepsilon\,dx\right) \leqslant c\varepsilon^{1-\sigma+2\theta}\sum_{a\in J} m_a.$$

Крім того, $1-\sigma+2\theta>0$ для $\sigma\in(1,2)$. Оскільки послідовність u_ε є збіжною в $L_2(\Gamma)$, то граничний перехід в (28) дає $(\rho u,\, u)_0 = (\mu)^{-1} > 0$. Отже, функція u є ненульовою.

Аналогічно можна довести, що $\varepsilon^{-\sigma}(q_\varepsilon u_\varepsilon,\, \varphi) \to 0$ для довільної функції φ з підпростору $\mathcal{H}$ і $\sigma\in(1,\,2)$. Тому ще раз перейшовши до границі в (28), тепер вже для $\varphi\in\mathcal{H}$, отримаємо, що u задовольняє тотожність (25). Згідно з лемою 6 функція u належить $\mathcal{H}$, тому є власною функцією задачі (23) з власним значенням μ.

Тепер припустимо, що деяке власне значення λ_k^ε не має границі при $\varepsilon\to 0$

$$\alpha = \varliminf_{\varepsilon\to 0}\lambda_k^\varepsilon < \varlimsup_{\varepsilon\to 0}\lambda_k^\varepsilon = \beta.$$

Оскільки λ_k^ε є неперервною функцією малого параметра, то для кожної точки λ з інтервалу $[\alpha,\beta]$ знайдеться підпослідовність $\{\lambda_{\varepsilon'}\}\subset\{\lambda_k^\varepsilon\}$ власних значень та відповідних власних функцій $\{u_{\varepsilon'}\}$ таких, що $\lambda_{\varepsilon'}\to\lambda$ та $u_{\varepsilon'}\to u$, де $u\neq 0$. Тоді згідно з доведеним, число λ є точкою спектра задачі (23). Отже, весь інтервал $[\alpha,\beta]$ повинен міститися в цьому спектрі, що неможливо.

Нехай P_μ – ортопроектор в $H_0^1(\Gamma)$ на власний підпростір, що відповідає власному значенню μ задачі (23), а P_μ^ε – ортопроектор на підпростір, породжений власними функціями задачі (3), для яких власні значення λ^ε прямують до μ при $\varepsilon\to 0$.

Теорема 5. *Нехай* $1<\sigma<2$. *Власні значення верхньої частини спектра задачі* (3) *збігаються при* $\varepsilon\to 0$ *до власних значень задачі* (23), *ця збіжність є пономерною в тому сенсі, що*

$$|\lambda_k^\varepsilon - \mu_{k-n}| \leqslant c_k\,\varepsilon^\omega, \qquad \omega=\min\{\sigma-1,\, 2-\sigma\} \tag{29}$$

для всіх $k=n+1,n+2,\dots$. *Крім того, якщо* μ *– власне значення задачі* (23), *то*

$$\|P_\mu^\varepsilon - P_\mu\| \leqslant C_\mu\,\varepsilon^\omega, \tag{30}$$

а власні функції $u_1,\, u_2,\dots$ *цієї задачі можна вибрати так, що*

$$\left\|u_{\varepsilon,k} - u_{k-n}\right\|_1 \leqslant L_k\,\varepsilon^\omega \tag{31}$$

для всіх $k>n$. *Тут сталі* c_k, C_μ, L_k *не залежать від* ε.

Доведення. Для кожної вершини $a\in J$ введемо функцію-зрізку $\zeta_a\in C_0^\infty(\Gamma)$ таку, що при достатньо малому ε вона дорівнює одиниці на зірковому підграфі $s_\varepsilon(a)$ і нулю поза деяким його околом. Причому цей окіл не містить жодної іншої вершини графа Γ, окрім a. Нехай μ – власне значення задачі (23) з власною функцією v, $\|v\|_1=1$. Для цієї пари побудуємо функцію на Γ $\psi(x)=\sum_{a\in J}\frac{g_a(v)}{\mu\, m_a}\,\zeta_a(x)$, призначенням якої є відкоригувати власну функцію v так, щоб вона стала квазімодою для оператора A_ε. Розглянемо функцію $w_\varepsilon = v+\varepsilon^{\sigma-1}\psi$ і покажемо, що пара $(\mu^{-1}, w_\varepsilon)$ є квазімодою для оператора A_ε з нев'язкою $c\,\varepsilon^\omega$. Зауважимо, що $\|w_\varepsilon\|_1 = 1 + O(\varepsilon^{\sigma-1})$. Для довільної функції $\varphi \in H_0^1(\Gamma)$ маємо

$$(A_\varepsilon w_\varepsilon - \mu^{-1} w_\varepsilon,\, \varphi)_1 = (\rho w_\varepsilon,\, \varphi)_0 + \varepsilon^{-\sigma}(q_\varepsilon w_\varepsilon,\, \varphi)_0 - \mu^{-1}(w_\varepsilon,\, \varphi)_1 = \bigl[(\rho v,\, \varphi)_0 - \\ - \mu^{-1}(v,\, \varphi)_1 + \varepsilon^{-1}(q_\varepsilon \psi,\, \varphi)_0\bigr] + \varepsilon^{-\sigma}(q_\varepsilon v,\, \varphi)_0 + \varepsilon^{\sigma-1}\bigl[(\rho\psi,\, \varphi)_0 - \mu^{-1}(\psi,\, \varphi)_1\bigr]. \quad (32)$$

Далі скористаємося виглядом функцій ψ та ζ_a. Тоді згідно з (10) $\varepsilon^{-1}(q_\varepsilon\psi, \varphi)_0 = \frac{1}{\mu}\sum_{a\in J} g_a(v)\varphi(a) + \alpha_\varepsilon(\varphi)$, де $|\alpha_\varepsilon(\varphi)| \leqslant c_0\sqrt{\varepsilon}$. Врахувавши (26), отримаємо $\bigl|\mu^{-1}(v,\, \varphi)_1 - (\rho v,\, \varphi)_0 - \varepsilon^{-1}(q_\varepsilon\psi,\, \varphi)_0\bigr| \leqslant c_1\sqrt{\varepsilon}\,\|\varphi\|_1$. Крім того, згідно з (27) $|\varepsilon^{-\sigma}(q_\varepsilon v,\, \varphi)_0| \leqslant \varepsilon^{2-\sigma}\sum_{a\in J}|\varepsilon^{-2}\int_{s_\varepsilon(a)} q_\varepsilon v\varphi\,dx| \leqslant c_2\varepsilon^{2-\sigma}\|\varphi\|_1$. Отже, остаточно з рівності (32) маємо

$$\bigl|(A_\varepsilon w_\varepsilon - \mu^{-1} w_\varepsilon,\, \varphi)_1\bigr| \leqslant (c_1\sqrt{\varepsilon} + c_2\varepsilon^{2-\sigma} + c_3\varepsilon^{\sigma-1})\|\varphi\|_1 \leqslant c\varepsilon^\omega\|\varphi\|_1,$$

тобто $\bigl\|A_\varepsilon w_\varepsilon - \mu^{-1}w_\varepsilon\bigr\|_1 \leqslant c\,\varepsilon^\omega$, а пара $(\mu^{-1},\, w_\varepsilon)$ є квазімодою для оператора A_ε.

Нехай тепер μ є власним значенням кратності r. Виберемо ортонормовану базу $v_1, \dots, v_r$ в його власному підпросторі. Доведене стосується довільної власної функції v, тому $(\nu^{-1}, v_1 + \varepsilon^{\sigma-1}\psi_1), \dots, (\nu^{-1}, v_r + \varepsilon^{\sigma-1}\psi_r)$ – ортогональна сім'я квазімод для оператора A_ε з нев'язкою $c\varepsilon^\omega$. Виберемо додатне число α так, щоб інтервал $\Delta = [\nu^{-1} - \alpha,\ \nu^{-1} + \alpha]$ не містив відмінних від ν^{-1} точок спектра оператора T_1. Тепер звернувшись до леми 2, можна зробити два висновки. По-перше, для значень ε таких, що $rc\varepsilon^\omega < \alpha$, існує саме r (із врахуванням кратності) власних значень $(\lambda_k^\varepsilon)^{-1}$ оператора A_ε, що лежать в інтервалі Δ, а також $|(\lambda_k^\varepsilon)^{-1} - \nu^{-1}| \leqslant c\varepsilon^\omega$. Звідси, а також з леми 8 випливає пономерна збіжність $\lambda_k^\varepsilon \to \nu_{k-n}$ та оцінки (29) для всіх $k > n$. По-друге, $\|E_{A_\varepsilon}(\Delta)v_j - v_j\| \leqslant c\alpha^{-1}\varepsilon^\omega$ для $j = 1, \dots, r$, звідки випливає (30), а при належному виборі бази в просторі $\mathcal{L}_0(\Gamma)$ також і пономерна збіжність власних функцій (31).

Отримані результати для нижньої та верхньої частин спектра можна поєднати так. Оскільки $H_0^1(\Gamma) = \mathcal{L}_0(\Gamma) \oplus \mathcal{H}$, то оператору A_ε можна поставити у відповідність матричний оператор $\mathcal{A}_\varepsilon$, який діє на цій прямій сумі

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} A_{11}^\varepsilon & A_{12}^\varepsilon \\ A_{21}^\varepsilon & A_{22}^\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Ми фактично довели, що $\mathcal{A}_\varepsilon$ асимптотично близький до діагонального оператора

$$\mathcal{T}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon^{1-\sigma}T_0 & 0 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix},$$

який хоча і залежить від ε, але ця залежність є конструктивною. Наприклад, для $\sigma \in (1,\, 3/2]$ цю асимптотичну близькість треба розуміти так. Хоча обидві сім'ї операторів $\mathcal{A}_\varepsilon$ та $\mathcal{T}_\varepsilon$ не є рівномірно обмежені при $\varepsilon \to 0$, проте це правильно для їхньої різниці, а саме $\|\mathcal{A}_\varepsilon - \mathcal{T}_\varepsilon\| \leqslant M$. Для більших σ норма $\|\mathcal{A}_\varepsilon - \mathcal{T}_\varepsilon\|$ необмежено зростає при $\varepsilon \to 0$, але порядок її росту дорівнює $3/2 - \sigma$, що менше від $1 - \sigma$ – степеня зростання норм операторів $\mathcal{A}_\varepsilon$ та $\mathcal{T}_\varepsilon$.

---

1. *Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л, Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. – М., 2004.
2. *Oleinik O. A.* Homogenization problems in elasticity. Spectrum of singularly perturbed operators // Non-classical continuum mechanics. – 1987. – Lecture Notes series, 122. – Cambridge University Press. – P. 188-205.
3. *Олейник О. А.* О собственных колебаниях тел с концентрированными массами // Современные проблемы прикладной математики и математической физики. – М., 1988. – С. 101-128.
4. *Головатый Ю. Д., Назаров С. А., Олейник О. А., Соболева Т. С.* О собственных колебаниях струны с присоединенной массой // Сиб. мат. журн. – 1988. – Т. 29, №5. – С. 71-91.
5. *Головатый Ю. Д.* Спектральные свойства колебательных систем с присоединенными массами // Труды Моск. мат. об-ва. – 1992. – Т. 54. – С. 29-72.
6. *Бабич Н. О., Головатий Ю. Д.* Спектральна задача Неймана для сингулярно збуреного диференціального оператора четвертого порядку // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1998. – Вип. 51. – С. 118-127.
7. *Головатий Ю. Д., Головач І. А.* Про асимптотику глобальних власних коливань сильно неоднорідної струни // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1997. – Вип. 49. – С. 88-99.
8. *Бабич Н. О.* Короткохвильова асимптотика глобальних коливань у задачі із локально-збуреною густиною // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – Т. 42, №3. – С. 36-44.
9. *Mercier D., Régnier V.* Spectrum of a network of beams with interior point masses // Prepublications. Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications. – 2006. – 24p. (www.univ-valanciennes.fr/lamav/preprints/lamav-06.13.pdf)
10. *Головатый Ю. Д., Назаров С. А., Олейник О. А.* Асимптотическое разложение собственных значений и собственных функций задач о колебаниях среды с концентрированными возмущениями // Труды Математического института им. В. А. Стеклова. – 1990. – Т. 192. – С. 42-60.
11. *Nazarov S. A.* Interaction of concentrated masses in a harmonically oscillating spatial body with Neumann boundary conditions // Math. Model. Numer. Anal. – 1993. – Vol. 27, №6. – P. 777-799.
12. *Mel'nyk T. A.* Vibrations of a thick periodic junction with concentrated masses // Math. Models Meth. Appl. Sci. – Vol. 11, №6. – 2001. – P. 1001-1029.
13. *Грабчак Г. Є.* Спектральна задача Неймана для системи рівнянь лінійної теорії пружності із сингулярним збуренням густини // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1996. – Вип. 45. – С. 124-140.
14. *Gómez D., Lobo M., Pérez M. E.* On a vibrating plate with concentrated mass // C. R. Acad. Sci. Paris. – 2000. – Vol. 328, Série II b. – P. 494-500.
15. *Golovaty Yu. D., Gomez D., Lobo M. and Perez E.* Asymptotics for the eigenelements of vibrating membranes with very heavy thin inclusions // C.R. Mecanique, 330 (11). – 2002. – P. 777-782.
16. *Golovaty Yu. D., Gomez D., Lobo M. and Perez E.* On vibrating membranes with very heavy thin inclusions, // Math. Models Meth. Appl. Sci. – Vol. 14, №7. – 2004. – P. 987-1034.
17. *Чечкин Г. А.* Асимптотическое разложение собственных значений и собственных функций эллиптического оператора в области с большим количеством близко расположенных на границе "лёгких" концентрированных масс. Двумерный случай. // Известия РАН. – 2005. – Т. 69, №4. – С. 161-204.
18. *Lobo M., Pérez M. E.* Local problems for vibrating systems with concentrated masses: a review // C. R. Mecanique. – 2003. – Vol. 331 – P. 303-317.

19. *Лазуткин В. Ф.* Квазиклассическая асимптотика собственных функций. "Современные проблемы математики. Фундаментальные напрвления. Т. 34 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)". – М., 1988. – С. 135-174.
20. *Лазуткин В. Ф.* Выпуклый биллиард и собственные функции оператора Лапласа. – Ленинград, 1981.
21. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. – М., 1990.
22. *Вишик М. И., Люстерник А. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. – 1957. – Т. 12, №5. – С. 3-122.
23. *Яблонский С.В.* Введение в дискретную математику. – М., 1986.
24. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. – М., 1984.

ASYMPTOTICS OF SPECTRUM OF STURM-LIOUVILLE OPERATOR ON NETWORKS WITH PERTURBED DENSITY

Yurij GOLOVATY, Hennadij HRABCHAK

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1

We study a singular perturbed boundary value problem for second order differential operator on a geometrical graph. A network of flexible strings connecting by heavy nodes is considered. We investigate the asymptotic behavior of eigenvalues and eigenspaces of the problem with perturbed mass density. The spectral properties of networks with very light, light and heavy bindings are described.

Key words: differential equations on graphs, singular perturbations, adjoint masses, spectrum, eigenvalues, asymptotic expansions

Стаття надійшла до редколегії 27.06.2007

Прийнята до друку 24.10.2007

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2007. Вип.67. С.84-103 *Ser. Mech.-Math. 2007. Vol.67. P.84-103*

УДК 517.95

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ СИЛЬНО ВИРОДЖЕНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНИМИ МЕЖАМИ

Надія ГРИНЦІВ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1

В області з вільними межами досліджено обернену задачу визначення старшого коефіцієнта в сильно виродженому повному параболічному рівнянні. Визначено умови існування та єдиності класичного розв'язку цієї задачі.

Ключові слова: обернена задача, сильне степеневе виродження, вільні межі, параболічне рівняння.

Задача, яку досліджуємо, поєднує коефіцієнтну обернену задачу з виродженням та задачу з вільними межами. Кожен з цих типів задач досліджували раніше. В [1, 2] в області з відомими межами вивчали обернені задачі визначення старшого коефіцієнта в повному параболічному рівнянні в випадках слабкого і сильного степеневого виродження. Подібну обернену задачу без виродження в області з вільними межами розглядали в [3]. Випадок слабкого виродження для параболічного рівняння в області з вільною межею досліджено в [4]. Мета нашої праці – за допомогою теореми Шаудера визначити умови існування класичного розв'язку оберненої задачі визначення коефіцієнта при старшій похідній у повному параболічному рівнянні з сильним степеневим виродженням в області з вільними межами. Доведення єдиності розв'язку згаданої задачі ґрунтується на оцінках розв'язку деякого рівняння, що містить невідомі функції.

1. Формулювання задачі та основні результати. В області $\Omega_T = \{(x,t) : h_1(t) < x < h_2(t),\ 0 < t < T\}$, де $x = h_1(t)$ та $x = h_2(t)$ – невідомі функції, розглядається обернена задача визначення коефіцієнта $a(t) > 0, t \in [0,T]$ в рівнянні

$$u_t = a(t)t^{\beta}u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega_T \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad h_1(0) \leqslant x \leqslant h_2(0) \tag{2}$$

© Гринців Надія, 2007

та крайовими умовами

$$u(h_1(t),t) = \mu_1(t),\ u(h_2(t),t) = \mu_2(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

де $h_1(0) = h_{10}$ та $\beta \geqslant 1$ – задані числа. Для визначення невідомого коефіцієнта та функцій, які задають межі області, задають додаткові так звані умови перевизначення вигляду

$$a(t)t^{\beta}u_x(h_1(t),t) = \mu_3(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4}$$

$$\int\limits_{h_1(t)}^{h_2(t)} u(x,t)dx = \mu_4(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5}$$

$$\int\limits_{h_1(t)}^{h_2(t)} xu(x,t)dx = \mu_5(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{6}$$

Заміною змінних $y = \frac{x-h_1(t)}{h_2(t)-h_1(t)}$, $t = t$ задача (1)-(6) зводиться до оберненої стосовно невідомих $(a(t), h_1(t), h_3(t) = h_2(t) - h_1(t), v(y,t) = u(yh_3(t) + h_1(t), t))$ в області зі сталими межами $Q_T = \{(y,t) : 0 < y < 1, 0 < t < T\}$:

$$v_t = \frac{a(t)t^{\beta}}{h_3^2(t)}v_{yy} + \frac{b(yh_3(t)+h_1(t),t) + h_1'(t) + yh_3'(t)}{h_3(t)}v_y + c(yh_3(t)+h_1(t),t)v+$$

$$+f(yh_3(t)+h_1(t),t), \qquad (y,t) \in Q_T, \tag{7}$$

$$v(y,0) = \varphi(yh_3(0) + h_{10}), \qquad 0 \leqslant y \leqslant 1, \tag{8}$$

$$v(0,t) = \mu_1(t),\ v(1,t) = \mu_2(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{9}$$

$$\frac{a(t)t^{\beta}}{h_3(t)}v_y(0,t) = \mu_3(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{10}$$

$$h_3(t)\int\limits_0^1 v(y,t)dy = \mu_4(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{11}$$

$$h_1(t)\mu_4(t) + h_3^2(t)\int\limits_0^1 yv(y,t)dy = \mu_5(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{12}$$

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються умови:*

1) $\varphi \in C^1[h_{10},+\infty)$, $\varphi(x) \geqslant \varphi_0 > 0$, $x \in [h_{10},+\infty)$, $\mu_i \in C^1[0,T], i = 1,2,4,5$, $\mu_i(t) > 0$, $t \in [0,T]$, $i = 1,2,4$, $b, f \in C^{2,0}([h_{10},+\infty) \times [0,T])$, $c \in C^{1,0}([h_{10},+\infty) \times$ $\times [0,T]), f(x,t) \geqslant 0$, $c(x,t) \leqslant 0$, $(x,t) \in [h_{10},+\infty) \times [0,T]$;

2) $\mu_3 \in C[0,T], \mu_3(t) > 0, t \in (0,T]$, *та існує скінченна границя* $\lim\limits_{t\to+0}\mu_3(t)t^{-\frac{\beta+1}{2}} =$ $= A_0 > 0, -\mu_1'(t) > 0, t \in [0,T]$, $|\mu_5'(t)| \leqslant A_1 t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}, |\mu_4'(t)| \leqslant A_2 t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}$, $t \in [0,T]$, $|b(x,t)| \leqslant A_3 t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}$, $|b_x(x,t)| \leqslant A_4 t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}$, $|b_{xx}(x,t)| \leqslant A_5 t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}, |c(x,t)| \leqslant$

$\leqslant A_6 t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}$, $|c_x(x,t)| \leqslant A_7 t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}$, $|f(x,t)| \leqslant A_8 t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}$, $|f_x(x,t)| \leqslant A_9 t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}$, $(x,t) \in$ $\in [h_{10}, +\infty) \times [0,T]$, *де* A_i, $i = \overline{0,9}$ *– деякі додатні сталі,* $\gamma > 0$ *– довільне фіксоване число;*

3) $\varphi(h_{10}) = \mu_1(0),\ \varphi(h_2(0)) = \mu_2(0)$.

Тоді можна зазначити таке число T_0*,* $0 < T_0 \leqslant T$*, яке визначається вихідними даними, що розв'язок* $(a, h_1, h_3, v) \in C[0,T_0] \times (C^1[0,T_0])^2 \times C^{2,1}(Q_{T_0}) \cap (\overline{Q}_{T_0})$*,* $v_y(0,t) \in C(0,T_0]$*,* $a(t) > 0$*,* $h_3(t) > 0$*,* $t \in [0,T_0]$ *задачі (7)-(12) існує і єдиний.*

2. Зведення задачі (7)-(12) до системи рівнянь. Визначимо початкове значення функції $x = h_2(t)$, яка задає невідому межу області. Згідно з умовами (2), (5) та припущеннями теореми існує єдине число $h_2(0) > h_{10}$, яке є розв'язком рівняння

$$\int\limits_{h_{10}}^{h_2(0)} \varphi(x)dx = \mu_4(0).$$

Тому надалі різницю $h_{30} = h_2(0) - h_{10}$ вважатимемо відомою.

До розв'язку задачі (7)-(9) застосуємо принцип максимуму [5, с. 25]. Отримаємо оцінку знизу функції $v(y,t)$

$$v(y,t) \geqslant M_1 > 0,\ (y,t) \in \overline{Q}_T, \tag{13}$$

де стала M_1 залежить від вихідних даних задачі. Знайдена оцінка дає змогу оцінити функції $h_3(t)$, $h_1(t)$, враховуючи рівняння (11), (12)

$$h_3(t) \leqslant \frac{1}{M_1} \max_{[0,T]} \mu_4(t) \equiv H_1 < \infty, \quad t \in [0,T], \tag{14}$$

$$|\,h_1(t)| \leqslant \frac{\mu_5(t)}{\mu_4(t)} + \frac{\mu_4(t)}{\int\limits_0^1 v(y,t)dy} \equiv H_2, \quad t \in [0,T]. \tag{15}$$

Використовуючи знову принцип максимуму для розв'язку задачі (7)-(9), одержуємо

$$v(y,t) \leqslant M_2 < +\infty, \quad (y,t) \in \overline{Q}_T \tag{16}$$

і згідно з (11)

$$h_3(t) \geqslant \frac{1}{M_2} \min_{[0,T]} \mu_4(t) \equiv H_0 > 0, \quad t \in [0,T]. \tag{17}$$

Позначимо $q(t) = \frac{a(t)}{h_3^2(t)}$, $p(t) = h_1'(t)$, $r(t) = h_3'(t)$, $\omega(y,t) = v_y(y,t)$. Припустивши тимчасово, що функції $a(t), h_1(t), h_3(t)$ – відомі, пряму задачу (7)-(9) замінимо еквівалентною системою інтегральних рівнянь

$$v(y,t)=v_0(y,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\bigg(\frac{b(\eta h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)+p(\tau)+\eta r(\tau)}{h_3(\tau)}\omega(\eta,\tau)+$$

$$+c(\eta h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)v(\eta,\tau)\bigg)d\eta d\tau,\qquad (y,t)\in\overline{Q}_T,\tag{18}$$

$$\omega(y,t)=v_{0y}(y,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)\bigg(\frac{b(\eta h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)+p(\tau)+\eta r(\tau)}{h_3(\tau)}\omega(\eta,\tau)+$$

$$+c(\eta h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)v(\eta,\tau)\bigg)d\eta d\tau,\qquad (y,t)\in Q_T,\tag{19}$$

де через $G_k(y,t,\eta,\tau), k=1,2$ позначено функції Гріна k-ї крайової задачі для рівняння

$$v_t=q(t)t^\beta v_{yy}+f(yh_3(t)+h_1(t),t).\tag{20}$$

Їх визначають формулою

$$G_k(y,t,\eta,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\bigg(\exp\bigg(-\frac{(y-\eta+2n)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\bigg)+$$

$$+(-1)^k\exp\bigg(-\frac{(y+\eta+2n)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\bigg)\bigg),\quad k=1,2,$$

де $\theta(t)=\int_0^t q(\tau)\tau^\beta d\tau$. Розв'язок рівняння (20) з умовами (8), (9) позначено через $v_0(y,t)$ і він має вигляд

$$v_0(y,t)=\int\limits_0^1 G_1(y,t,\eta,0)\,\varphi(\eta h_{30}+h_{10})d\eta+\int\limits_0^t G_{1\eta}(y,t,0,\tau)\,\tau^\beta q(\tau)\mu_1(\tau)\,d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t G_{1\eta}(y,t,1,\tau)\,\tau^\beta q(\tau)\mu_2(\tau)d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\,f(\eta h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)d\eta d\tau.\tag{21}$$

Продиференціюємо рівність (21) по y. Використовуючи властивості функції Гріна $G_{1y}=-G_{2\eta}$, $G_{2\tau}=-\tau^\beta q(\tau)G_{2\eta\eta}$ та інтегруючи частинами, знаходимо

$$\omega_0(y,t)=h_{30}\int\limits_0^1 G_2(y,t,\eta,0)\varphi'(\eta h_{30}+h_{10})d\eta+\int\limits_0^t G_2(y,t,0,\tau)(f(h_1(\tau),\tau)-\mu_1'(\tau))\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t G_2(y,t,1,\tau)(\mu_2'(\tau)-f(h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau))d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_2(y,t,\eta,\tau)\,h_3(\tau)f_x(\eta h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)\,d\eta\,d\tau.\tag{22}$$

З умов (10)-(12) отримуємо

$$q(t)t^{\beta}\omega(0,t)=\frac{\mu_3(t)}{h_3(t)},\quad t\in[0,T],\tag{23}$$

$$h_3(t)=\frac{\mu_4(t)}{\int\limits_0^1 v(y,t)dy},\quad t\in[0,T],\tag{24}$$

$$h_1(t)\mu_4(t)=\mu_5(t)-h_3^2(t)\int\limits_0^1 yv(y,t)dy,\quad t\in[0,T].\tag{25}$$

Продиференціюємо рівності (11), (12). Враховуючи рівняння (7), умови (8), (9) та використовуючи інтегрування частинами, одержуємо

$$p(t)\mu_1(t)=\frac{\mu_5'(t)}{h_3(t)}-\mu_4'(t)\left(\frac{h_1(t)}{h_3(t)}+1\right)-b(h_1(t),t)\mu_1(t)-h_3(t)q(t)t^{\beta}(\omega(0,t)+\mu_1(t)-$$
$$-\mu_2(t))+\int\limits_0^1 b(yh_3(t)+h_1(t),t)v(y,t)dy-h_3(t)\int\limits_0^1(1-y)\big((b_x(yh_3(t)+h_1(t),t)-$$
$$-c(yh_3(t)+h_1(t),t))v(y,t)-f(yh_3(t)+h_1(t),t)\big)dy,\ t\in[0,T],\tag{26}$$

$$p(t)(\mu_2(t)-\mu_1(t))+r(t)\mu_2(t)=\mu_4'(t)-h_3(t)q(t)t^{\beta}(\omega(1,t)-\omega(0,t))+b(h_1(t),t)\mu_1(t)-$$
$$-b(h_3(t)+h_1(t),t)\mu_2(t)+h_3(t)\int\limits_0^1\big((b_x(yh_3(t)+h_1(t),t)-c(yh_3(t)+h_1(t),t))v(y,t)-$$
$$-f(yh_3(t)+h_1(t),t)\big)dy,\quad t\in[0,T].\tag{27}$$

Отже, задачу (7)-(12) зведено до системи рівнянь (18), (19), (23)-(27). Задача (7)-(12) та згадана система еквівалентні в такому сенсі: якщо $(a(t),\,h_1(t),\,h_3(t),\,v(y,t))$ є розв'язком задачі (7)-(12), то $q(t)=\frac{a(t)}{h_3^2(t)}$, $h_1(t)$, $h_3(t)$, $p(t)=h_1'(t)$, $r(t)=h_3'(t)$, $v(y,t)$, $\omega(y,t)=v_y(y,t))$ – неперервний розв'язок системи (18), (19), (23)-(27), і навпаки, якщо $(q(t),h_1(t),h_3(t),p(t),r(t),v(y,t),\omega(y,t))$ – неперервний розв'язок системи (18), (19), (23)-(27), то $a\in C[0,T]$, $h_1,h_3\in C^1[0,T]$, $v\in C^{2,1}(Q_T)\cap C(\overline{Q}_T)$, $v_y(0,t)\in C(0,T]$ є розв'язком задачі (7)-(12).

Справді, нехай $(q(t),h_1(t),h_3(t),p(t),r(t),v(y,t),\omega(y,t))$ – неперервний розв'язок системи рівнянь (18), (19), (23)-(27). Припущення теореми дають змогу продиференціювати рівність (18) по y. Порівнюючи праві частини отриманої рівності і рівності (19), одержуємо $\omega(y,t)=v_y(y,t)$, $(y,t)\in Q_T$. Крім того, $v_y(0,\cdot)\in C(0,T]$. Підставляючи в (18) замість $\omega(y,t)$ функцію $v_y(y,t)$, матимемо, що $v\in C^{2,1}(Q_T)\cap C(\overline{Q}_T)$, задовольняє рівняння

$$v_t=q(t)t^{\beta}v_{yy}+\frac{b(yh_3(t)+h_1(t),t)+p(t)+yr(t)}{h_3(t)}v_y+c(yh_3(t)+h_1(t),t)v+$$
$$+f(yh_3(t)+h_1(t),t)\tag{28}$$

та умови (8), (9).

Продиференціюємо рівності (24), (25), використовуючи рівняння (28) та умови (8), (9)

$$\frac{h_1'(t)\mu_4(t)}{h_3(t)} - h_3'(t)\left(\frac{\mu_4(t)}{h_3(t)} - 2\int\limits_0^1 yv(y,t)dy\right) + p(t)\left(\mu_1(t) - \frac{\mu_4(t)}{h_3(t)}\right) + r(t)\left(\frac{\mu_4(t)}{h_3(t)} - \right.$$

$$\left. -2\int\limits_0^1 yv(y,t)dy\right) = \frac{\mu_5'(t)}{h_3(t)} - \mu_4'(t)\left(\frac{h_1(t)}{h_3(t)} + 1\right) - b(h_1(t),t)\mu_1(t) - h_3(t)q(t)t^{\beta}(\omega(0,t) +$$

$$+\mu_1(t) - \mu_2(t)) + \int\limits_0^1 b(yh_3(t) + h_1(t),t)v(y,t)dy - h_3(t)\int\limits_0^1 (1-y)\big((b_x(yh_3(t) + h_1(t),t) -$$

$$-c(yh_3(t) + h_1(t),t))v(y,t) - f(yh_3(t) + h_1(t),t)\big), \quad t \in [0,T], \tag{29}$$

$$\frac{h_3'(t)\mu_4(t)}{h_3(t)} + p(t)(\mu_2(t) - \mu_1(t)) + r(t)\left(\mu_2(t) - \frac{\mu_4(t)}{h_3(t)}\right) = \mu_4'(t) - h_3(t)q(t)t^{\beta}(\omega(1,t) -$$

$$-\omega(0,t)) + b(h_1(t),t)\mu_1(t) - b(h_3(t) + h_1(t),t)\mu_2(t) + h_3(t)\int\limits_0^1 \big((b_x(yh_3(t) + h_1(t),t) -$$

$$-c(yh_3(t) + h_1(t),t))v(y,t) - f(yh_3(t) + h_1(t),t)\big)dy, \quad t \in [0,T]. \tag{30}$$

Звідси, враховуючи припущення теореми, робимо висновок, що $h_1, h_3 \in C^1[0,T]$. Віднімемо від (30) рівність (27). Враховуючи, що $\omega(y,t) = v_y(y,t)$, отримуємо

$$\frac{\mu_4(t)}{h_3(t)}(r(t) - h_3'(t)) = 0,$$

звідки, використовуючи умови теореми, маємо $r(t) = h_3'(t)$. Віднявши тепер від (29) рівність (26), знаходимо $p(t) = h_1'(t)$. Підставляючи в (28) замість $r(t), p(t)$ знайдені значення, а замість $q(t)$ – дріб $\frac{a(t)}{h_3^2(t)}$, приходимо до рівняння (7). Після цього умови (23)-(25) еквівалентні відповідно (10)-(12), що й завершує доведення еквівалентності.

3. Доведення існування розв'язку задачі (7)-(12). Доведемо, що існує розв'язок системи рівнянь (18), (19), (23)-(27). Для цього використаємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Знайдемо апріорні оцінки розв'язків системи. З еквівалентності задачі (7)-(12) та системи рівнянь (18), (19), (23)-(27) випливає, що для функцій $h_1(t), h_3(t), v(y,t)$ правильні оцінки (13)-(17). Тому залишилось оцінити функції $p(t), r(t), q(t), \omega(y,t)$. Визначимо поведінку функції $\omega(y,t)$ при $t \to +0$. Позначимо $W(t) = \max\limits_{y\in[0,1]} |\omega(y,t)|$, $h_{3min}(t) = \min\limits_{0\leqslant\tau\leqslant t} h_3(\tau)$, $h_{3max}(t) = \max\limits_{0\leqslant\tau\leqslant t} h_3(\tau)$, $q_{min}(t) = \min\limits_{0\leqslant\tau\leqslant t} q(\tau)$, $q_{max}(t) = \max\limits_{0\leqslant\tau\leqslant t} q(\tau)$. Враховуючи рівність

$$\int\limits_0^1 G_2(y,t,\eta,\tau)d\eta = 1, \tag{31}$$

одержуємо, що перший і четвертий інтеграли з (22) обмежені сталими, які залежать від вихідних даних задачі (7)-(12)

$$\left|\int\limits_0^1 G_2(y,t,\eta,0)\varphi'(\eta h_0)d\eta\right| \leqslant C_1, \quad \left|\int\limits_0^1\int\limits_0^t G_2(y,t,\eta,\tau)h(\tau)f_\eta(\eta h(\tau),\tau)d\eta d\tau\right| \leqslant C_2. \tag{32}$$

Для оцінки двох інших доданків використаємо таку оцінку функції Гріна

$$G_2(y,t,\eta,\tau) \leqslant C_3 + \frac{C_4}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}. \tag{33}$$

Отримаємо

$$|\,\omega_0(y,t)\,| \leqslant C_5 + C_6\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}. \tag{34}$$

Враховуючи нерівність

$$\int\limits_0^1 |\,G_{1y}(y,t,\eta,\tau)\,|\,d\eta \leqslant \frac{C_7}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \tag{35}$$

та припущення теореми, з рівняння (19) знаходимо

$$\begin{aligned} W(t) \quad &\leqslant \quad C_5 + C_6\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} + C_8\int\limits_0^t \frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau + \\ &+C_9\int\limits_0^t \frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma} + |\,p(\tau)| + |\,r(\tau)|}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}W(\tau)d\tau, \quad (y,t)\in Q_T. \end{aligned} \tag{36}$$

Функції $p(t), r(t)$ оцінимо, використовуючи (26), (27). Враховуючи умови теореми, маємо

$$|\,p(t)\,| \leqslant C_{10}t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma} + C_{11}q(t)t^\beta + C_{12}q(t)t^\beta W(t), \quad t\in[0,T], \tag{37}$$

$$|\,r(t)\,| \leqslant C_{13}t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma} + C_{14}q(t)t^\beta + C_{15}q(t)t^\beta W(t), \quad t\in[0,T]. \tag{38}$$

Розглянемо інтеграл

$$\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \leqslant \frac{C_{16}}{\sqrt{q_{min}(t)}}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}} \leqslant \frac{C_{17}}{t^{\frac{\beta-1}{2}}\sqrt{q_{min}(t)}}. \tag{39}$$

Підставляючи (37)–(39) у (36), одержимо

$$\begin{aligned} W(t) \quad &\leqslant \quad C_5 + \frac{C_{18}}{t^{\frac{\beta-1}{2}}\sqrt{q_{min}(t)}} + \frac{C_{19}t^\gamma}{\sqrt{q_{min}(t)}} + \frac{C_{20}}{t^{\frac{\beta}{2}}\sqrt{q_{min}(t)}}\int\limits_0^t \frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}W(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau + \\ &+\frac{C_{21}q_{max}(t)}{t^{\frac{\beta}{2}}\sqrt{q_{min}(t)}}\int\limits_0^t \frac{\tau^\beta W(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau + \frac{C_{22}q_{max}(t)}{t^{\frac{\beta}{2}}\sqrt{q_{min}(t)}}\int\limits_0^t \frac{\tau^\beta W^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau, \end{aligned} \tag{40}$$

звідки робимо висновок, що $\omega(y,t)$ поводить себе як $\dfrac{C_{23}}{t^{\frac{\beta-1}{2}}}$ при $t \to +0$.

Для того, щоб оцінити $q(t)$ зверху, оцінимо $\omega(0,t)$ знизу, враховуючи (19), (22). Оскільки $G_2(0,t,1,\tau) \leqslant C_{24}$, то, враховуючи (32), (35), знаходимо

$$\omega(0,t) \geqslant \int\limits_0^t G_2(0,t,0,\tau)(f(p_1(\tau),\tau) - \mu_1'(\tau))d\tau - C_{25} - C_{26}\int\limits_0^t \frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau -$$

$$-C_{27}\int\limits_0^t \frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma} + |\,p(\tau)| + |\,r(t)|}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}W(\tau)d\tau, \quad t \in (0,T]. \tag{41}$$

Оцінимо перший інтеграл з останньої нерівності, використовуючи зображення функції Гріна

$$\int\limits_0^t G_2(0,t,0,\tau)(f(h_1(\tau),\tau) - \mu_1'(\tau))d\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{f(h_1(\tau),\tau) - \mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau +$$

$$+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{f(h_1(\tau),\tau) - \mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\Big(-\frac{n^2}{\theta(t)-\theta(\tau)}\Big)d\tau \geqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{f(h_1(\tau),\tau) - \mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau.$$

Використовуючи нерівності (37), (38) та поведінку функції $\omega(y,t)$ при $t \to +0$, робимо висновок, що особливості двох інших інтегралів з (41) є меншими за особливість першого. Тому для довільного фіксованого r: $0 < r < 1$ існує таке число t_1: $0 < t_1 \leqslant T$, що

$$C_{25} + C_{26}\int\limits_0^t \frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau + C_{27}\int\limits_0^t \frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma} + |\,p(\tau)| + |\,r(\tau)|}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}W(\tau)d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{f(h_1(\tau),\tau) - \mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau, \quad t \in [0,t_1].$$

Тоді з (41) отримуємо

$$\omega(0,t) \geqslant \frac{1-r}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{f(h_1(\tau),\tau) - \mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau, \quad t \in (0,t_1]. \tag{42}$$

Підставивши (42) в (23), одержимо

$$\begin{aligned} q(t) \quad &\leqslant \quad \frac{\mu_3(t)}{\dfrac{1-r}{\sqrt{\pi}}\, t^\beta h_3(t) \displaystyle\int\limits_0^t \frac{f(h_1(\tau),\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau} \leqslant \\ &\leqslant \frac{\sqrt{\pi}\mu_3(t)\sqrt{q_{max}(t)}}{(1-r)\sqrt{1+\beta}\, t^\beta h_{3min}(t) \displaystyle\int\limits_0^t \frac{f(h_1(\tau),\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}d\tau}, \quad t\in[0,t_1]. \quad (43) \end{aligned}$$

Введемо позначення

$$K(t) \equiv \frac{\sqrt{\pi}\mu_3(t)}{\sqrt{1+\beta}\, t^\beta \displaystyle\int\limits_0^t \frac{f(h_1(\tau),\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}d\tau}. \qquad (44)$$

Згідно з умовами теореми $K(t)$ неперервна та додатна на $(0,T]$. Використовуючи теорему про середнє та заміну змінних $z=\tau/t$, доведемо існування границі

$$\lim_{t\to+0} K(t) = \lim_{t\to+0} \frac{\sqrt{\pi}\mu_3(t)}{\sqrt{1+\beta}t^\beta (f(h_1(\widetilde{t}),\widetilde{t})-\mu_1'(\widetilde{t})) \displaystyle\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t^{1+\beta}-\tau^{1+\beta}}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{1+\beta}} \frac{A_0}{(f(h_{10},0)-\mu_1'(0))I_1} > 0,$$

де $\widetilde{t}\in[0,T]$, $I_1 = \displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^{\beta+1}}}$.

Враховуючи (44), з (43) матимемо

$$q(t) \leqslant \frac{K(t)}{(1-r)h_{3min}(t)}\sqrt{q_{max}(t)}, \quad \text{або} \quad q_{max}(t) \leqslant \frac{K^2_{max}(t)}{(1-r)^2 h^2_{3min}(t)}, \qquad (45)$$

де $K_{max}(t) = \max\limits_{0\leqslant\tau\leqslant t} K(\tau)$. Остаточно отримуємо

$$q(t) \leqslant B_1, \quad \text{де} \quad B_1 = \frac{K^2_{max}(T)}{(1-r)^2 h^2_{3min}(T)}, \quad t\in[0,t_1]. \qquad (46)$$

Оцінимо $\omega(0,t)$ зверху. Згідно з (19), (22) маємо

$$\omega(0,t) \leqslant C_{28} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{f(h_1(\tau),\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau + C_{29}\int\limits_0^t \frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau +$$

$$+C_{30}\int\limits_0^t \frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}+|\,p(\tau)|+|\,r(\tau)|}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}W(\tau)d\tau.$$

Підставимо останню нерівність в (23). Використовуючи (37)-(38), (46), одержимо

$$q(t)\geqslant\frac{K(t)\sqrt{q_{min}(t)}}{h_{3max}(t)}\Bigg(C_{31}t^{\frac{\beta-1}{2}}+1+C_{32}t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}+C_{33}t^{\frac{\beta-1}{2}}\int\limits_0^t\frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}W(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}d\tau+C_{34}t^{\frac{\beta-1}{2}}\times$$

$$\times\int\limits_0^t\frac{\tau^\beta W(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}d\tau+C_{35}t^{\frac{\beta-1}{2}}\int\limits_0^t\frac{\tau^\beta W^2(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}d\tau\Bigg)^{-1}\geqslant\frac{K(t)\sqrt{q_{min}(t)}}{(1+r)h_{3max}(t)},\qquad(47)$$

$t\in[0,t_2]$, де число $t_2:0<t_2\leqslant T$ таке, що правильна нерівність

$$C_{31}t^{\frac{\beta-1}{2}}+C_{32}t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}+C_{33}t^{\frac{\beta-1}{2}}\int\limits_0^t\frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}W(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}d\tau+C_{34}t^{\frac{\beta-1}{2}}\int\limits_0^t\frac{\tau^\beta W(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}d\tau+$$

$$+C_{35}t^{\frac{\beta-1}{2}}\int\limits_0^t\frac{\tau^\beta W^2(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}d\tau\leqslant C_{31}t^{\frac{\beta-1}{2}}+C_{32}t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}+C_{36}t^\gamma+C_{37}t^{\frac{\beta+1}{2}}+C_{38}t\leqslant r,$$

при $t\in[0,t_2]$. Тоді

$$q_{min}(t)\geqslant\frac{K^2_{min}(t)}{(1+r)^2h^2_{3max}(t)},\quad\text{або}\quad q(t)\geqslant B_0,\quad t\in[0,t_2],\qquad(48)$$

де $K_{min}(t)=\min\limits_{0\leqslant\tau\leqslant t}K(\tau)$, $B_0=\dfrac{K^2_{min}(T)}{(1+r)^2h^2_{3max}(T)}>0$.

Враховуючи (46), (48), з (40) знаходимо

$$W(t)\leqslant C_5+\frac{C_{39}}{t^{\frac{\beta-1}{2}}}+C_{40}t^\gamma+\frac{C_{41}}{t^{\frac{\beta}{2}}}\int\limits_0^t\frac{(\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}+\tau^\beta)W(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau+\frac{C_{42}}{t^{\frac{\beta}{2}}}\int\limits_0^t\frac{\tau^\beta W^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau.\quad(49)$$

Домножимо обидві частини нерівності (49) на $t^{\frac{\beta-1}{2}}$ і приймемо $W_1(t)=W(t)t^{\frac{\beta-1}{2}}$. Отримаємо

$$W_1(t)=C_{43}t^{\frac{\beta-1}{2}}+C_{44}+C_{45}t^{-\frac12}\int\limits_0^t\frac{(\tau^\gamma+\tau^{\frac{\beta+1}{2}})W_1(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau+C_{46}t^{-\frac12}\int\limits_0^t\frac{\tau W_1^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau.\quad(50)$$

Нехай $\gamma\leqslant1$. Тоді з (50) матимемо

$$W_1(t)=C_{47}+C_{48}t^{-\frac12}\int\limits_0^t\frac{\tau^\gamma(W_1(\tau)+1)^2}{\sqrt{t-\tau}}d\tau,$$

або, позначивши $W_2(t) = W_1(t) + 1$,

$$W_2(t) \leqslant C_{49} + \frac{C_{48}}{\sqrt{t}} \int\limits_0^t \frac{\tau^\gamma W_2^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau. \tag{51}$$

Піднесемо обидві частини (51) до квадрата, використовуючи нерівності Коші та Коші – Буняковського

$$W_2^2(t) \leqslant 2C_{49}^2 + 2C_{48}^2 t^{\gamma+\frac{1}{2}} \int\limits_0^t \frac{\tau^{\gamma-1} W_2^4(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau.$$

В останній нерівності змінимо t на σ і, домноживши на $\frac{1}{\sqrt{t-\sigma}}$, проінтегруємо її по σ від 0 до t

$$\int\limits_0^t \frac{W_2^2(\sigma)}{\sqrt{t-\sigma}} d\sigma \leqslant C_{50}\sqrt{t} + C_{51} t^{\gamma+\frac{1}{2}} \int\limits_0^t \tau^{\gamma-1} W_2^4(\tau) d\tau.$$

Використовуючи останню нерівність в (51), одержимо

$$W_2(t) \leqslant C_{52} + C_{53} \int\limits_0^t \frac{W_2^4(\tau)}{\tau^{1-\gamma}} d\tau. \tag{52}$$

Позначимо

$$\chi(t) = C_{52} + C_{53} \int\limits_0^t \frac{W_2^4(\tau)}{\tau^{1-\gamma}} d\tau. \tag{53}$$

Тоді з (52) отримаємо $W_2(t) \leqslant \chi(t)$. Продиференціювавши (53) і використавши останню нерівність, знаходимо

$$\chi'(t) \leqslant \frac{C_{53}}{t^{1-\gamma}} \chi^4(t),$$

звідки

$$\chi(t) \leqslant \frac{C_{52}\sqrt[3]{\gamma}}{\sqrt[3]{\gamma - 3C_{52}^3 C_{53} t^\gamma}}.$$

Вибираючи число $t_3, 0 < t_3 \leqslant T$ так, щоб $\gamma - 3C_{52}^3 C_{53} t_3^\gamma > 0$, матимемо $\chi(t) \leqslant M_3$, або $W_2(t) \leqslant M_3$, $t \in [0, t_3]$. У випадку $\gamma > 1$ нерівність (50) зводиться до вигляду

$$W_2(t) \leqslant C_{54} + C_{55} \int\limits_0^t \frac{W_2^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau,$$

звідки, застосовуючи ті самі міркування, що й при розв'язанні (51), знаходимо $W_2(t) \leqslant M_4$, $t \in [0, t_4]$, де число $t_4, 0 < t_4 \leqslant T$ визначається сталими C_{54}, C_{55}. Отже,

$$|\,\omega(y,t)| \leqslant \frac{M_5}{t^{\frac{\beta-1}{2}}}, \quad (y,t) \in [0,1] \times (0, t_5], \tag{54}$$

де $M_5 = \max\{M_3, M_4\}$, $t_5 = \min\{t_3, t_4\}$. Підставляючи (46), (54) в (37), (38), одержимо

$$|\,p(t)| \leqslant M_6 t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}, \quad |\,r(t)| \leqslant M_7 t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}, \quad t \in [0, t_5]. \tag{55}$$

Зауважимо, що згідно з (42) і (48)

$$\omega(0,t) \geqslant \frac{M_8}{t^{\frac{\beta-1}{2}}}, \quad t \in (0, t_5]. \tag{56}$$

Отже, знайдено апріорні оцінки розв'язків системи (18), (19), (23)-(27). Введемо нову функцію $\widetilde{\omega}(y,t) = \omega(y,t)t^{\frac{\beta-1}{2}}$ і подамо систему (18), (19), (23)-(27) у вигляді

$$v(y,t) = v_0(y,t) + \int\limits_0^t \int\limits_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\bigg(c(\eta h_3(\tau) + h_1(\tau),\tau)v(\eta,\tau) + \\ + \frac{b(\eta h_3(\tau) + h_1(\tau),\tau) + p(\tau) + \eta r(\tau)}{h_3(\tau)} \frac{\widetilde{\omega}(\eta,\tau)}{\tau^{\frac{\beta-1}{2}}}\bigg) d\eta d\tau, \qquad (y,t) \in \overline{Q}_{t_0}, \tag{57}$$

$$\widetilde{\omega}(y,t) = \omega_0(y,t)t^{\frac{\beta-1}{2}} + t^{\frac{\beta-1}{2}} \int\limits_0^t \int\limits_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)\bigg(c(\eta h_3(\tau) + h_1(\tau),\tau)v(\eta,\tau) + \\ + \frac{b(\eta h_3(\tau) + h_1(\tau),\tau) + p(\tau) + \eta r(\tau)}{h_3(\tau)} \frac{\widetilde{\omega}(\eta,\tau)}{\tau^{\frac{\beta-1}{2}}}\bigg) d\eta d\tau, \qquad (y,t) \in \overline{Q}_{t_0}, \tag{58}$$

$$q(t) = \frac{\mu_3(t)}{t^{\frac{\beta+1}{2}} \widetilde{\omega}(0,t) h_3(t)}, \quad t \in [0, t_0], \tag{59}$$

$$h_3(t) = \frac{\mu_4(t)}{\int\limits_0^1 v(y,t)dy}, \quad t \in [0, t_0], \tag{60}$$

$$h_1(t) = \left(\mu_5(t) - h_3^2(t)\int\limits_0^1 yv(y,t)dy\right)\mu_4^{-1}(t), \quad t \in [0, t_0], \tag{61}$$

$$p(t) = \left(\frac{\mu_5'(t)}{h_3(t)} - \mu_4'(t)\left(\frac{h_1(t)}{h_3(t)} + 1\right) - b(h_1(t), t)\mu_1(t) - h_3(t)q(t)(\widetilde{\omega}(0,t)t^{\frac{\beta+1}{2}} + t^{\beta}(\mu_1(t) - \right.$$
$$-\mu_2(t))) + \int\limits_0^1 b(yh_3(t) + h_1(t), t)v(y,t)dy - h_3(t)\int\limits_0^1 (1-y)\big((b_x(yh_3(t) + h_1(t), t) -$$
$$\left. -c(yh_3(t) + h_1(t), t))v(y,t) - f(yh_3(t) + h_1(t), t)\big)dy\right)\mu_1^{-1}(t), \quad t \in [0, t_0], \tag{62}$$

$$r(t) = \left(\mu_4'(t) - p(t)(\mu_2(t) - \mu_1(t)) - h_3(t)q(t)t^{\frac{\beta+1}{2}}(\widetilde{\omega}(1,t) - \widetilde{\omega}(0,t)) + b(h_1(t), t)\mu_1(t) - \right.$$
$$-b(h_3(t) + h_1(t), t)\mu_2(t) + h_3(t)\int\limits_0^1 \big((b_x(yh_3(t) + h_1(t), t) - c(yh_3(t) + h_1(t), t))v(y,t) -$$
$$\left. -f(yh_3(t) + h_1(t), t)\big)dy\right)\mu_2^{-1}(t), \quad t \in [0, t_0], \tag{63}$$

де $v_0(y,t), \omega_0(y,t)$ визначаються формулами (21), (22), а $t_0 = \min\{t_i,\ i = \overline{1,5}\}$. Систему (57)-(63) подамо у вигляді операторного рівняння

$$w = Pw,$$

де $w = (q, h_1, h_3, p, r, v, \widetilde{\omega})$, а оператор P визначається правими частинами рівнянь (57)-(63). Через N позначимо множину $N = \{(q, h_1, h_3, p, r, v, \widetilde{\omega}) \in (C[0,t_0])^3 \times$ $\times (C(\overline{Q}_{t_0}))^2 : B_0 \leqslant q(t) \leqslant B_1,\ |h_1(t)| \leqslant H_2,\ H_0 \leqslant h_3(t) \leqslant H_1,\ |p(t)| \leqslant M_6 t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}$, $|r(t)| \leqslant M_7 t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma},\ M_1 \leqslant v(y,t) \leqslant M_2,\ |\widetilde{\omega}(y,t)| \leqslant M_5,\ \widetilde{\omega}(0,t) \geqslant M_8 > 0\}$. Згадані оцінки дають право стверджувати, що множина N – замкнена й опукла, а оператор P переводить її в себе. Те, що оператор P цілком неперервний, доводиться як в [2], [6]. Тоді згідно з теоремою Шаудера існує розв'язок системи рівнянь (18), (19), (23)-(27), а отже, і розв'язок задачі (7)-(12) при $(y,t) \in [0,1] \times [0,t_0]$.

4. Доведення єдиності розв'язку задачі (7)-(12). На підставі еквівалентності задачі (7)-(12) та системи рівнянь (18), (19), (23)-(27), доведемо єдиність розв'язку згаданої системи. Припустимо, що існує два розв'язки $(q_i(t),\ h_{1i}(t),\ h_{3i}(t),$ $p_i(t),\ r_i(t),\ v_i(y,t),\ \omega_i(y,t)),\ i = 1,2$, системи рівнянь (18), (19), (23)-(27). Позначимо $q(t) = q_1(t) - q_2(t)$, $h_1(t) = h_{11}(t) - h_{12}(t)$, $h_3(t) = h_{31}(t) - h_{32}(t)$, $p(t) = p_1(t) - p_2(t)$, $r(t) = r_1(t) - r_2(t)$, $v(y,t) = v_1(y,t) - v_2(y,t)$,

$\omega(y,t)=\omega_1(y,t)-\omega_2(y,t)$. Зазначені різниці задовольняють таку систему рівнянь

$$
\begin{gathered}
v(y,t)=v_0^*(y,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^1(G_1^{(1)}(y,t,\eta,\tau)-G_1^{(2)}(y,t,\eta,\tau))\Big(c(\eta h_{31}(\tau)+h_{11}(\tau),\tau)v_1(\eta,\tau)+\\
+\frac{b(\eta h_{31}(\tau)+h_{11}(\tau),\tau)+p_1(\tau)+\eta r_1(\tau)}{h_{31}(\tau)}\omega_1(\eta,\tau)\Big)d\eta d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_1^{(2)}(y,t,\eta,\tau)\times\\
\times\Big(\Big(\frac{p(\tau)}{h_{31}(\tau)}+\frac{\eta r(\tau)}{h_{31}(\tau)}+\frac{b(\eta h_{31}(\tau)+h_{11}(\tau),\tau)-b(\eta h_{32}(\tau)+h_{12}(\tau),\tau)}{h_{31}(\tau)}\Big)\omega_1(\eta,\tau)-\\
-\frac{h_3(\tau)}{h_{31}(\tau)h_{32}(\tau)}b(\eta h_{32}(\tau)+h_{12}(\tau),\tau)\omega_1(\eta,\tau)+\frac{b(\eta h_{32}(\tau)+h_{12}(\tau),\tau)+p_2(\tau)+\eta r_2(\tau)}{h_{32}(\tau)}\times\\
\times\omega(\eta,\tau)+(c(\eta h_{31}(\tau)+h_{11}(\tau),\tau)-c(\eta h_{32}(\tau)+h_{12}(\tau),\tau))v_1(\eta,\tau)+\\
+c(\eta h_{32}(\tau)+h_{12}(\tau),\tau)v(\eta,\tau)\Big)d\eta d\tau,\quad (y,t)\in\overline{Q}_T,
\end{gathered}
\tag{64}
$$

$$
\begin{gathered}
\omega(y,t)=\omega_0^*(y,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^1(G_{1y}^{(1)}(y,t,\eta,\tau)-G_{1y}^{(2)}(y,t,\eta,\tau))\Big(c(\eta h_{31}(\tau)+h_{11}(\tau),\tau)\times\\
\times v_1(\eta,\tau)+\frac{b(\eta h_{31}(\tau)+h_{11}(\tau),\tau)+p_1(\tau)+\eta r_1(\tau)}{h_{31}(\tau)}\omega_1(\eta,\tau)\Big)d\eta d\tau+\\
+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{1y}^{(2)}(y,t,\eta,\tau)\Big(\Big(\frac{\eta r(\tau)}{h_{31}(\tau)}+\frac{b(\eta h_{31}(\tau)+h_{11}(\tau),\tau)-b(\eta h_{32}(\tau)+h_{12}(\tau),\tau)}{h_{31}(\tau)}+\\
+\frac{p(\tau)}{h_{31}(\tau)}\Big)\omega_1(\eta,\tau)-\frac{h_3(\tau)}{h_{31}(\tau)h_{32}(\tau)}b(\eta h_{32}(\tau)+h_{12}(\tau),\tau)\omega_1(\eta,\tau)+\\
+\frac{b(\eta h_{32}(\tau)+h_{12}(\tau),\tau)+p_2(\tau)+\eta r_2(\tau)}{h_{32}(\tau)}\omega(\eta,\tau)+(c(\eta h_{31}(\tau)+h_{11}(\tau),\tau)-\\
-c(\eta h_{32}(\tau)+h_{12}(\tau),\tau))v_1(\eta,\tau)+c(\eta h_{32}(\tau)+h_{12}(\tau),\tau)v(\eta,\tau)\Big)d\eta d\tau,(y,t)\in Q_T,
\end{gathered}
\tag{65}
$$

$$
q(t)=-\frac{h_3(t)q_1(t)}{h_{32}(t)}-\frac{t^\beta q_1(t)q_2(t)h_{31}(t)}{\mu_3(t)}\omega(0,t),\quad t\in[0,T],
\tag{66}
$$

$$
h_3(t)=\frac{h_{31}(t)h_{32}(t)}{\mu_4(t)}\int\limits_0^1 v(y,t)dy,\quad t\in[0,T],
\tag{67}
$$

$$
h_1(t)\mu_4(t)=h_3(t)(h_{31}(t)+h_{32}(t))\int\limits_0^1 yv_1(y,t)dy+h_{32}^2(t)\int\limits_0^1 yv(y,t)dy,\quad t\in[0,T],
\tag{68}
$$

$$\begin{gathered}
p(t)\mu_1(t) = -\frac{\mu_5'(t)h_3(t)}{h_{31}(t)h_{32}(t)} - \mu_4'(t)\Bigg(\frac{h_1(t)}{h_{31}(t)} + \frac{h_{12}(t)h_3(t)}{h_{31}(t)h_{32}(t)}\Bigg) - t^\beta\big((h_3(t)q_1(t)+ \\
+h_{32}(t)q(t))\omega_1(0,t) + h_{32}(t)q_2(t)\omega(0,t) + (h_3(t)q_1(t) + h_{32}(t)q(t))(\mu_1(t) - \mu_2(t))\big)- \\
-(b(h_{11}(t),t) - b(h_{12}(t),t))\mu_1(t) + \int\limits_0^1 \big((b(yh_{31}(t) + h_{11}(t),t) - b(yh_{32}(t) + h_{12}(t),t))\times \\
\times v_1(y,t) + v(y,t)b(yh_{32}(t) + h_{12}(t),t)\big)dy - h_3(t)\int\limits_0^1 (1-y)\big((b_x(yh_{31}(t) + h_{11}(t),t)- \\
-c(yh_{31}(t) + h_{11}(t),t))v_1(y,t) - f(yh_{31}(t) + h_{11}(t),t)\big)dy - h_{32}(t)\int\limits_0^1 (1-y)\times \\
\times\Bigg(\big((b_x(yh_{31}(t) + h_{11}(t),t) - b_x(yh_{32}(t) + h_{12}(t),t)) - (c(yh_{31}(t) + h_{11}(t),t)- \\
-c(yh_{32}(t) + h_{12}(t),t))\big)v_1(y,t) + (b_x(yh_{32}(t) + h_{12}(t),t) - c(yh_{32}(t) + h_{12}(t),t))\times \\
\times v(y,t) - (f(yh_{31}(t) + h_{11}(t),t) - f(yh_{32}(t) + h_{12}(t),t))\Bigg)dy, \quad t \in [0,T], \qquad (69)
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
p(t)(\mu_2(t) - \mu_1(t)) + r(t)\mu_2(t) = -(h_3(t)q_1(t) + h_{32}(t)q(t))t^\beta(\omega_1(1,t) - \omega_1(0,t))- \\
-h_{32}(t)q_2(t)t^\beta(\omega(1,t) - \omega(0,t)) + (b(h_{11}(t),t) - b(h_{12}(t),t))\mu_1(t)- \\
-(b(h_{31}(t) + h_{11}(t),t) - b(h_{32}(t) + h_{12}(t),t))\mu_2(t) + h_3(t)\int\limits_0^1 \big((b_x(yh_{31}(t) + h_{11}(t),t)- \\
-c(yh_{31}(t) + h_{11}(t),t))v_1(y,t) - f(yh_{31}(t) + h_{11}(t),t)\big)dy + h_{32}(t)\int\limits_0^1 \Bigg(v_1(y,t)\times \\
\times\big((b_x(yh_{31}(t) + h_{11}(t),t) - b_x(yh_{32}(t) + h_{12}(t),t)) - (c(yh_{31}(t) + h_{11}(t),t)- \\
-c(yh_{32}(t) + h_{12}(t),t))\big) + (b_x(yh_{32}(t) + h_{12}(t),t) - c(yh_{32}(t) + h_{12}(t),t))v(y,t)- \\
-(f(yh_{31}(t) + h_{11}(t),t) - f(yh_{32}(t) + h_{12}(t),t))\Bigg)dy, \quad t \in [0,T], \qquad (70)
\end{gathered}$$

де $v_0^*(y,t) = v_{01}(y,t) - v_{02}(y,t)$, $\omega_0^*(y,t) = \omega_{01}(y,t) - \omega_{02}(y,t)$, $v_{0i}(y,t)$, $\omega_{0i}(y,t)$, $i = 1,2$, визначаються рівностями (21), (22), $G_i^{(j)}(y,t,\eta,\tau)$, $i,j = 1,2$, – функції Гріна i-ї крайової задачі для рівняння

$$v_{jt} = q_j(t)t^\beta v_{jyy} + f(yh_{3j}(t) + h_{1j}(t),t).$$

Припущення теореми забезпечують правильність рівності

$$b(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)-b(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)=(y(h_{31}(t)-h_{32}(t))+(h_{11}(t)-h_{12}(t)))\times$$
$$\times\int\limits_0^1 b_x(y(h_{32}(t)+\sigma(h_{31}(t)-h_{32}(t))+h_{12}(t)+\sigma(h_{11}(t)-h_{12}(t))),t)d\sigma, \qquad (71)$$

що правильна для функцій $b_x(yh_3(t)+h_1(t),t), c(yh_3(t)+h_1(t),t), f(yh_3(t)+h_1(t),t)$.

Оцінимо функцію $q(t)$, використовуючи рівняння (66). Позначимо $V(t) = = \max\limits_{y\in[0,1]}|v(y,t)|$, $W(t)= \max\limits_{y\in[0,1]}|\omega(y,t)|$; $\widetilde{q}_{max}(t)= \max\limits_{0\leqslant\tau\leqslant t}|\,q(\tau)|$, $\widetilde{h}_{3max}(t)= \max\limits_{0\leqslant\tau\leqslant t}|\,h_3(\tau)|$.

Оскільки $q_i(t), i=1,2$ розв'язки системи (18), (19), (23)-(27), то для них справджуються оцінки (45). Тоді з (66) отримуємо

$$\widetilde{q}_{max}(t)\leqslant\frac{t^\beta K^4_{max}(t)h_{32max}(t)}{(1-r)^4h^2_{31min}(t)h^2_{32min}(t)\mu_3(t)}|\omega(0,t)|+C_{56}\widetilde{h}_{3max}(t). \qquad (72)$$

Спочатку оцінимо величини $|v(y,t)|$, $|\omega(y,t)|$, $|p(t)|$, $|r(t)|$, $|h_1(t)|$, від яких залежать оцінки $|\omega(0,t)|$ та $h_{3max}(t)$. Розглянемо деякі з доданків, які входять до $v^*_0(y,t)$, $\omega^*_0(y,t)$. Використовуючи припущення теореми та оцінки (31), (33), знаходимо

$$|Q_1|=\left|\int\limits_0^t\int\limits_0^1(G_1^{(1)}(y,t,\eta,\tau)-G_1^{(2)}(y,t,\eta,\tau))f(\eta h_{31}(\tau)+h_{11}(\tau),\tau)d\eta d\tau\right|\leqslant$$
$$\leqslant C_{57}t^{\frac{\beta+1}{2}+\gamma}\widetilde{q}_{max}(t), \qquad (73)$$

$$|Q_2|=\left|\int\limits_0^t\int\limits_0^1(G_1^{(2)}(y,t,0,\tau)(f(\eta h_{31}(\tau)+h_{11}(\tau),\tau)-f(\eta h_{32}(\tau)+h_{12}(\tau),\tau))d\eta d\tau\right|\leqslant$$
$$\leqslant C_{58}t^{\frac{\beta+1}{2}+\gamma}(\widetilde{h}_{3max}(t)+|h_1(t)|),$$

$$|R_1|=\left|\int\limits_0^t(G_2^{(2)}(y,t,0,\tau)(f(h_{11}(\tau),\tau)-f(h_{12}(\tau),\tau))d\tau\right|\leqslant C_{59}t^\gamma|h_1(t)|,$$

$$|R_2|=\left|\int\limits_0^t(G_2^{(2)}(y,t,0,\tau)(f(h_{31}(\tau)+h_{11}(\tau),\tau)-f(h_{32}(\tau)+h_{12}(\tau),\tau))d\tau\right|\leqslant$$
$$\leqslant C_{60}t^\gamma(\widetilde{h}_{3max}(t)+|h_1(t)|),$$

$$|R_3|=\left|\int\limits_0^t\int\limits_0^1(G_2^{(2)}(y,t,\eta,\tau)h_{32}(\tau)(f_x(\eta h_{31}(\tau)+h_{11}(\tau),\tau)-f_x(\eta h_{32}(\tau)+h_{12}(\tau),\tau))d\eta d\tau\right|\leqslant$$
$$\leqslant C_{61}t(\widetilde{h}_{3max}(t)+|h_1(t)|).$$

Всі інші доданки оцінюють як в [2]. У результаті отримаємо

$$|v_0^*(y,t)| \leqslant C_{62}\widetilde{q}_{max}(t) + C_{63}t^{\frac{\beta+1}{2}+\gamma}(\widetilde{h}_{3max}(t) + |h_1(t)|), \quad t \in [0,T], \tag{74}$$

$$|\omega_0^*(y,t)| \leqslant \frac{C_{64}\widetilde{q}_{max}(t)}{t^{\frac{\beta-1}{2}}} + C_{65}t^{\gamma}(\widetilde{h}_{3max}(t) + |h_1(t)|), \quad t \in (0,T]. \tag{75}$$

Для оцінки $h_3(t)$ підставимо (64) в (67).

Розглянемо доданок $S_1 = \int_0^1 dy \int_0^1 (G_1^{(1)}(y,t,\eta,0) - G_1^{(2)}(y,t,\eta,0))\varphi(\eta h_{30} + h_{10})d\eta$. Змінивши порядок інтегрування та використавши рівність

$$\int\limits_0^1 G_1(y,t,\eta,0)d\eta = 1 - \int\limits_0^t G_{1\eta}(y,t,0,\tau)\tau^\beta q(\tau)d\tau + \int\limits_0^t G_{1\eta}(y,t,1,\tau)\tau^\beta q(\tau)d\tau,$$

одержимо

$$S_1 = \int\limits_0^1 \varphi(\eta h_{30} + h_{10})\bigg(-\int\limits_0^t \big(G_{1y}^{(1)}(\eta,t,0,\tau) - G_{1y}^{(2)}(\eta,t,0,\tau)\big)\tau^\beta q_1(\tau)d\tau -$$

$$-\int\limits_0^t G_{1y}^{(2)}(\eta,t,0,\tau)\tau^\beta q(\tau)d\tau + \int\limits_0^t \big(G_{1y}^{(1)}(\eta,t,1,\tau) - G_{1y}^{(2)}(\eta,t,1,\tau)\big)\tau^\beta q_1(\tau)d\tau +$$

$$+\int\limits_0^t G_{1y}^{(2)}(\eta,t,1,\tau)\tau^\beta q(\tau)d\tau\bigg)d\eta = \sum_{i=1}^4 S_{1,i}.$$

Оскільки $G_{1y}(\eta,t,y,\tau) = -G_{2\eta}(\eta,t,y,\tau)$, то для $S_{1,1}$ маємо

$$S_{1,1} = \int\limits_0^t \tau^\beta q_1(\tau)d\tau \int\limits_0^1 \big(G_{2\eta}^{(1)}(\eta,t,0,\tau) - G_{2\eta}^{(2)}(\eta,t,0,\tau)\big)\varphi(\eta h_{30} + h_{10})d\eta =$$

$$= \int\limits_0^t \tau^\beta q_1(\tau)\bigg((G_2^{(1)}(1,t,0,\tau) - G_2^{(2)}(1,t,0,\tau))\varphi(h_{30} + h_{10}) - (G_2^{(1)}(0,t,0,\tau) - G_2^{(2)}(0,t,0,\tau)) \times$$

$$\times \varphi(h_{10}) - h_{30}\int\limits_0^1 (G_2^{(1)}(\eta,t,0,\tau) - G_2^{(2)}(\eta,t,0,\tau))\varphi'(\eta h_{30} + h_{10})d\eta\bigg)d\tau,$$

звідки знаходимо $|S_{1,1}| \leqslant C_{66}t^{\frac{\beta+1}{2}}\widetilde{q}_{max}(t)$. Оцінюючи всі інші доданки подібно, з (67) отримуємо

$$\widetilde{h}_{3max}(t) \leqslant C_{67}t^\gamma \widetilde{q}_{max}(t) + C_{68}t^{\gamma+1}(\widetilde{h}_{3max}(t) + |h_1(t)|) + \frac{C_{69}}{t^{\frac{\beta-1}{2}}}(|p(t)| + |r(t)|) +$$

$$+ C_{70}t^{\frac{\beta+1}{2}+\gamma}W(t) + C_{71}t^{\frac{\beta+1}{2}+\gamma}V(t). \tag{76}$$

З рівностей (68)-(70) знаходимо

$$|h_1(t)| \leqslant C_{72}\widetilde{h}_{3max}(t) + C_{73}V(t), \tag{77}$$

$$|p(t)| \leqslant C_{74}t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}\widetilde{q}_{max}(t) + C_{75}t^{\gamma}(|p(t)| + |r(t)|) + C_{76}t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}V(t) + C_{77}t^{\beta}W(t), \tag{78}$$

$$|r(t)| \leqslant C_{78}t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}\widetilde{q}_{max}(t) + C_{79}t^{\gamma}(|p(t)| + |r(t)|) + C_{80}t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}V(t) + C_{81}t^{\beta}W(t). \tag{79}$$

Враховуючи (74), (75), із (64), (65) одержуємо

$$V(t) \leqslant C_{82}\widetilde{q}_{max}(t) + C_{83}t^{\gamma}(\widetilde{h}_{3max}(t) + |h_1(t)|)+$$

$$+C_{84}\int\limits_0^t \left(\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}(V(\tau) + W(\tau)) + \frac{|p(\tau)| + |r(\tau)|}{\tau^{\frac{\beta-1}{2}}}\right)d\tau, \quad t \in [0,T], \tag{80}$$

$$W(t) \leqslant \frac{C_{85}\widetilde{q}_{max}(t)}{t^{\frac{\beta-1}{2}}} + \frac{C_{86}(\widetilde{h}_{3max}(t) + |h_1(t)|)}{t^{\frac{\beta-1}{2}}}+$$

$$+\frac{C_{87}}{t^{\frac{\beta}{2}}}\int\limits_0^t \frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}V(\tau) + \tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}W(\tau) + \dfrac{|p(\tau)| + |r(\tau)|}{\tau^{\frac{\beta-1}{2}}}}{\sqrt{t-\tau}}d\tau, \quad t \in (0,T]. \tag{81}$$

Розв'язуючи систему нерівностей (76)-(81), знаходимо

$$V(t) \leqslant C_{88}\widetilde{q}_{max}(t), \ t \in [0,t_4], \ W(t) \leqslant \frac{C_{89}}{t^{\frac{\beta-1}{2}}}\widetilde{q}_{max}(t), \quad t \in (0,t_6], \tag{82}$$

$$|p(t)| \leqslant C_{90}t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}\widetilde{q}_{max}(t), \quad |r(t)| \leqslant C_{91}t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}\widetilde{q}_{max}(t), \quad t \in [0,t_6], \tag{83}$$

$$|h_1(t)| \leqslant C_{92}\widetilde{q}_{max}(t), \widetilde{h}_{3max}(t) \leqslant C_{93}t\widetilde{q}_{max}(t), \quad t \in [0,t_6], \tag{84}$$

де число t_6, $0 < t_6 \leqslant T$ залежить від сталих згаданої системи.

Оцінимо точніше один з доданків, який входить до $\omega(0,t)$, а саме:

$$R_4 = \int\limits_0^t |G_2^{(1)}(0,t,0,\tau) - G_2^{(2)}(0,t,0,\tau)|(f(h_1(\tau),\tau) - \mu_1'(\tau))d\tau =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \left|\frac{1}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}} - \frac{1}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}}\right|(f(h_1(\tau),\tau) - \mu_1'(\tau))d\tau+$$

$$+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \left|\frac{f(h_1(\tau),\tau) - \mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}} \times \sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2}{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}\right) - \frac{f(h_1(\tau),\tau) - \mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2}{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}\right)\right|d\tau = \sum_{i=1}^{2}R_{4,i}.$$

Доданок $R_{4,2}$ подамо у вигляді

$$R_{4,2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t (f(h_1(\tau),\tau) - \mu_1'(\tau)) \left| \int\limits_{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}^{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)} \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2}{z}\right)\right) dz \right| d\tau,$$

звідки, враховуючи обмеженість підінтегрального виразу та нерівність

$$|\theta_1(t) - \theta_1(\tau) - \theta_2(t) + \theta_2(\tau)| \leqslant \int\limits_\tau^t |q(\sigma)|\sigma^\beta d\sigma \leqslant \frac{t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}}{\beta+1} \widetilde{q}_{max}(t), \tag{85}$$

маємо $R_{4,2} \leqslant C_{94} t^{\beta+2} \widetilde{q}_{max}(t)$. Для оцінки $R_{4,1}$ використаємо (44), (85) та нерівності

$$\theta_i(t) - \theta_i(\tau) = \int\limits_\tau^t |q(\sigma)|\sigma^\beta d\sigma \geqslant \frac{K^2_{min}(t)}{h^2_{3imax}(t)(1+r)^2} \frac{t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}}{\beta+1}, \quad i = 1, 2,$$

$$R_{4,1} \leqslant \frac{\sqrt{\beta+1}(1+r)^3 \widetilde{q}_{max}(t) h_{31max}(t) h_{32max}(t)}{K^3_{min}(t)\left(\dfrac{1}{h_{31max}(t)} + \dfrac{1}{h_{32max}(t)}\right)} \int\limits_0^t \frac{f(h_1(\tau),\tau) - \mu_1'(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}}} d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(1+r)^3 h^2_{31max}(t) h^2_{32max}(t) \mu_3(t)}{t^\beta K^4_{min}(t)(h_{31max}(t) + h_{32max}(t))} \widetilde{q}_{max}(t).$$

Для оцінки всіх інших доданків $\omega(0,t)$ врахуємо нерівності (82)-(84). Отримаємо

$$|\,\omega(0,t)| \leqslant \left(C_{95} + \frac{(1+r)^3 h^2_{31max}(t) h^2_{32max}(t) \mu_3(t)}{t^\beta K^4_{min}(t)(h_{31max}(t) + h_{32max}(t))} + C_{96} t^{\gamma - \frac{\beta-1}{2}}\right) \widetilde{q}_{max}(t). \tag{86}$$

Підставивши (84), (86) в (72), одержимо

$$\widetilde{q}_{max}(t) \leqslant \left(C_{97} t^{\frac{\beta-1}{2}} + \frac{(1+r)^4 K^4_{max}(t) h^2_{31max}(t) h^3_{32max}(t)}{(1-r)^4 K^4_{min}(t) h^2_{31min}(t) h^2_{32min}(t)(h_{31max}(t) + h_{32max}(t))} + \right.$$

$$\left. + C_{98} t^\gamma + C_{99} t\right) \widetilde{q}_{max}(t), \quad t \in [0, t_6]. \tag{87}$$

Оскільки $\lim\limits_{t\to+0} K_{max}(t) = \lim\limits_{t\to+0} K_{min}(t)$, $\lim\limits_{t\to+0} h_{3imax}(t) = \lim\limits_{t\to+0} h_{3imin}(t) = h_{30}$, $i = 1, 2$, то для заданого $r : 0 < r < 1$ існує таке число $t_7 : 0 < t_7 \leqslant T$, що

$$\frac{K^4_{max}(t) h^2_{31max}(t) h^3_{32max}(t)}{K^4_{min}(t) h^2_{31min}(t) h^2_{32min}(t)(h_{31max}(t) + h_{32max}(t))} \leqslant \frac{1+r}{2}, \quad t \in [0, t_7],$$

$$C_{97} t^{\frac{\beta-1}{2}} + C_{98} t^\gamma + C_{99} t \leqslant r, \quad t \in [0, t_7].$$

Зафіксуємо число r так, щоб $0 < r < \dfrac{\sqrt[5]{2} - 1}{\sqrt[5]{2} + 1}$. Тоді

$$C_{97} t^{\frac{\beta-1}{2}} + \frac{(1+r)^4 K^4_{max}(t) h^2_{31max}(t) h^3_{32max}(t)}{(1-r)^4 K^4_{min}(t) h^2_{31min}(t) h^2_{32min}(t)(h_{31max}(t) + h_{32max}(t))} + C_{98} t^\gamma + C_{99} t \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(1+r)^5}{2(1-r)^4} + r < 1.$$

У результаті з (87) матимемо $\widetilde{q}_{max}(t) \leqslant 0$, $t \in [0, t_7]$, що неможливо. Отже, $\widetilde{q}_{max}(t) \equiv 0$, $t \in [0, T_0]$, де $T_0 = \min\{t_0, t_6, t_7\}$, звідси $q(t) \equiv 0$, $h(t) \equiv 0$, $p(t) \equiv 0$, $t \in [0, T_0]$, $v(y, t) \equiv 0$, $\omega(y, t) \equiv 0$, $(y, t) \in [0, 1] \times [0, T_0]$, що й завершує доведення теореми.

1. *Салдіна Н.* Обернена задача для параболічного рівняння з виродженням // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 245-257.
2. *Іванчов М. І., Салдіна Н. В.* Обернена задача для параболічного рівняння з сильним степеневим виродженням // Укр. мат. журн. – 2006. – Т. 58, №11. – С. 1487-1500.
3. *Баранська І.* Визначення старшого коефіцієнта у параболічному рівнянні в області з невідомими межами // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 20-38.
4. *Гринців Н.* Обернена задача для параболічного рівняння з виродженням в області з вільною межею // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2006. – Вип. 66. – С. 45-59.
5. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М., 1967.
6. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. – Lviv, 2003.

AN INVERSE PROBLEM FOR A STRONGLY DEGENERATE PARABOLIC EQUATION IN A DOMAIN WITH FREE BOUNDARIES

Nadiya HRYNTSIV

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka str., 1

In the domain with free boundaries there is investigated an inverse problem of determination the coefficient at the higher - order derivative in a strongly degenerate complete parabolic equation. Conditions of existence and uniqueness of the classical solution to this problem are established.

Key words: inverse problem, strong power degeneration, free boundaries, parabolic equation.

Стаття надійшла до редколегії 31.08.2007

Прийнята до друку 24.10.2007

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2007. Вип. 67. С.104-118 Ser. Mech.-Math. 2007. Vol. 67. P.104-118

УДК 517.95

НЕЛІНІЙНІ ЕЛІПТИЧНІ РІВНЯННЯ В КВАЗІЦИЛІНДРИЧНИХ ОБЛАСТЯХ

Олена ДОМАНСЬКА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1

Доведено існування та єдиність розв'язків крайових задач для деякого класу нелінійних еліптичних рівнянь, який охоплює лінійні рівняння, заданих у необмежених квазіциліндричних областях за певних умов на поведінку розв'язку та зростання вихідних даних на нескінченності.

Ключові слова: нелінійні еліптичні рівняння, узагальнений розв'язок, узагальнені простори Лебега-Соболєва, квазіциліндрична область.

1. Крайові задачі для різних класів стаціонарних рівнянь, модельними прикладами яких є рівняння

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(|u_{x_i}(x)|^{p_i-2}u_{x_i}(x)\Big)_{x_i} - |u(x)|^{p_0-2}u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

при відповідних значеннях $p_i > 1$, $i = \overline{0,n}$, в необмежених областях вивчали у багатьох працях. У випадку лінійних і близьких до них квазілінійних рівнянь (модельним прикладом яких є рівняння (1) при $p_i = 2$, $i = \overline{0,n}$) для єдиності розв'язку крайової задачі треба вимагати його певну поведінку на нескінченності, а існування розв'язку доводиться при відповідних обмеженнях на зростання вихідних даних на нескінченності [1], [2]. Для одного класу майже лінійних еліптичних рівнянь, які містять рівняння (1) за умови, що $p_0 > 2$, $p_i = 2$, $i = \overline{1,n}$, доведено [3]-[5], що крайові задачі мають єдиний розв'язок без обмежень на його поведінку на нескінченності і припущень на зростання вихідних даних на нескінченності. У [6], [7] аналогічні результати отримано у випадку крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь, модельним прикладом яких є (1) при $p_0 > p_i$, $1 < p_i \leqslant 2$, $i = \overline{1,n}$.

Мета нашої праці – розглянути крайові задачі для узагальнень рівняння (1) при $p_0 = p_i = 2$, $i = \overline{1,k}$, $p_i > 1$, $i = \overline{k+1,n}$ (серед них є лінійні рівняння) з граничними умовами мішаного типу, а область задання за змінними $x_1, \dots, x_k$ є необмеженою, а за рештою – обмеженою.

© Доманська Олена, 2007

Знайдено класи існування та єдиності узагальненого розв'язку досліджуваних задач. Використовують комбінацію методу, який ґрунтується на аналозі відомого в теорії пружності принципу Сен-Венана [1],[2] та методу монотонності [8].

2. Основні позначення. Нехай n – натуральне число, а $\mathbb{R}^n$ – лінійний простір, складений з елементів вигляду $x = (x_1, \ldots, x_n)$, де $x_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$, з нормою $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$.

Всі функції, які тут розглядають, визначені на відповідних множинах просторів $\mathbb{R}^n$ та $\mathbb{R}^{n+1}$ і набувають значення в $\mathbb{R}$. Якщо $v(z)$, $z \in \widetilde{D}$, – яка-небудь функція, то під $v|_D$ розумітимемо її звуження на множину $D \subset \widetilde{D}$.

Нехай Ω – необмежена *квазіциліндрична* область у просторі $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$, тобто для деякого натурального $s < n$ існують числа $1 \leqslant l_1 < \ldots < l_s \leqslant n$ такі, що множина $\Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_{l_1}^2 + \ldots + x_{l_s}^2 < R^2\}$ — обмежена для будь-якого $R > 0$. Позначимо через k найменше з таких чисел s і вважатимемо, що $l_1 = 1, \ldots, l_k = k$, тобто множина $\Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \ldots + x_k^2 < R^2\}$ — обмежена для кожного $R > 0$ і для будь-якого $j \in \{1, \ldots, k\}$ множина $\Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \sum\limits_{i=\overline{1,k}, i \neq j} x_i^2 < R^2\}$ — необмежена хоча б для одного $R > 0$. Крім того, припускатимемо, що 0 належить Ω. Через Ω_τ для довільного $\tau > 0$ позначатимемо зв'язну компоненту множини $\Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_k^2} < 1 + \tau\}$, що містить 0. Нехай межа $\partial\Omega$ області Ω кусково-гладка і така, що для будь-якої неперервної на $\overline{\Omega}$ функції v виконується рівність

$$\frac{d}{d\tau} \int\limits_{\Omega_\tau} v(x)\,d\,x = \int\limits_{S_\tau} v(s)h(s)\,d\,s, \quad \tau > 0, \tag{2}$$

де $S_\tau \overset{\mathrm{def}}{=} \partial\Omega_\tau \backslash \partial\Omega$, $h \in C(\overline{\Omega})$, $h > 0$, $d\,s$ – елемент площі поверхні S_τ. (Для виконання умови (2) достатньо вимагати, щоб межа області Ω була гладкою).

Зауважимо, що будь-яка циліндрична область вигляду $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, де Ω_1 – необмежена область в $\mathbb{R}^k$ з гладкою межею, а Ω_2 – обмежена область в $\mathbb{R}^{n-k}$, є квазіциліндричною і задовольняє зазначену умову.

Нехай $\partial\Omega = \overline{\Gamma_1} \bigcup \overline{\Gamma_2}$, де Γ_1, Γ_2 – відкриті множини на $\partial\Omega$ (одна з них може бути порожньою) і $\Gamma_1 \bigcap \Gamma_2 = \varnothing$. Під $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ розумітимемо одиничний вектор зовнішньої нормалі до межі $\partial\Omega$ $(\partial\Omega_\tau)$ області Ω (Ω_τ).

Через $C(\overline{\Omega})$ позначатимемо простір неперервних на $\overline{\Omega}$ функцій, а через $C^1(\overline{\Omega})$ – простір неперервно диференційовних в Ω функцій, які разом з похідними до першого порядку допускають неперервне продовження на $\overline{\Omega}$. Нехай $C^1_{\mathrm{c}}(\overline{\Omega})$ – підпростір простору $C^1(\overline{\Omega})$, який складається з функцій, носії яких обмежені, а $C^{1,+}_{\mathrm{c}}(\overline{\Omega})$ – підпростір простору $C^1_{\mathrm{c}}(\overline{\Omega})$, елементами якого є невід'ємні в $\overline{\Omega}$ функції. Позначатимемо через $C^1_0(\overline{\Omega}, \Gamma_1)$ підпростір простору $C^1_{\mathrm{c}}(\overline{\Omega})$, елементами якого є функції, які набувають нульові значення в околі Γ_1.

Приймемо $L_{q,\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) = \big\{v(x),\, x \in \Omega : v|_{\Omega_\tau} \in L_q(\Omega_\tau) \quad \forall\, \tau > 0\big\}$, де $q \in [1, \infty]$. На просторі $L_{q,\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ вводиться стандартна лінійна структура і сім'я півнорм $\|\cdot\|_{L_q(\Omega_\tau)}$, $\tau > 0$, з якою він стає локально опуклим простором, якщо ототожнити функції, які рівні майже всюди (див., наприклад, [9]). Отож, збіжність послідовності елементів простору $L_{q,\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ означає, що для кожного $\tau > 0$ послідовність звужень на Ω_τ членів заданої послідовності є збіжною в $L_q(\Omega_\tau)$.

Нехай $r \in L_{\infty,\,\mathrm{loc}}(\Omega)$, причому $r(x) \geqslant 1$ для майже всіх $x \in \Omega$. На просторі $C(\overline{\Omega_\tau})$, де $\tau > 0$ – довільне число, введемо норму

$$\|v\|_{L_{r(\,\cdot\,)}(\Omega_\tau)} \overset{\mathrm{def}}{=} \inf\{\lambda > 0 : \rho_{r,\tau}(v/\lambda) \leqslant 1\}, \text{ де } \rho_{r,\tau}(v) \overset{\mathrm{def}}{=} \int\limits_{\Omega_\tau} |v(x)|^{r(x)}\, d\,x.$$

Поповнення лінійного простору $C(\overline{\Omega_\tau})$ за цією нормою позначимо через $L_{r(\,\cdot\,)}(\Omega_\tau)$ (див. [13]). Множина $L_{r(\,\cdot\,)}(\Omega_\tau)$ є лінійним підпростором простору $L_1(\Omega_\tau)$ і називається узагальненим простором Лебега. Під $L_{r(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ розумітимемо замикання простору $C(\overline{\Omega})$ за топологією, породженою системою півнорм $\|\cdot\|_{L_{r(\,\cdot\,)}(\Omega_\tau)}$, $\tau > 0$. Приймемо $L_{r(\,\cdot\,)}(\Omega) = \big\{v \in L_{r(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) : \sup_{\tau>0} \|v|_{\Omega_\tau}\|_{L_{r(\,\cdot\,)}(\Omega_\tau)} < \infty\big\}$.

Нехай $\mathbb{P} \overset{\mathrm{def}}{=} \{p = (p_0, p_1, \ldots, p_n) : p_i \in L_\infty(\Omega),\ p_i(x) > 1$ для м. в. $x \in \Omega\}$. Для $p \in \mathbb{P}$ через $p^* = (p_0^*, p_1^*, \ldots, p_n^*)$ позначимо векторну функцію, компоненти якої задовольняють умову $\frac{1}{p_i(x)} + \frac{1}{p_i^*(x)} = 1$, $i = \overline{0,n}$, для м. в. $x \in \Omega$. Для кожного $\tau > 0$ під $W^1_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_\tau)$ розумітимемо банахів простір, отриманий поповненням простору $C^1(\overline{\Omega_\tau})$ за нормою $\|v\|_{W^1_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_\tau)} \overset{\mathrm{def}}{=} \|v\|_{L_{p\,0(\,\cdot\,)}(\Omega_\tau)} + \sum\limits_{i=1}^{n} \|v_{x_i}\|_{L_{p\,i(\,\cdot\,)}(\Omega_\tau)}$. Очевидно, що $W^1_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_\tau)$ є підпростором простору $\big\{v(x),\ x \in \Omega_\tau :\ v \in L_{p\,0(\,\cdot\,)}(\Omega_\tau),\ v_{x_i} \in L_{p_i(\,\cdot\,)}(\Omega_\tau),\ i = \overline{1,n}\big\}$.

На лінійному просторі $C_0^1(\overline{\Omega}, \Gamma_1)$ введемо топологію (лінійного опуклого простору) за допомогою системи півнорм: $\|\cdot\|_{W^1_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_\tau)}$, $\tau > 0$. Замикання цього простору за введеною топологією позначимо через $\overset{\circ}{W}{}^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}, \Gamma_1)$, а замикання $C^1_{\mathrm{c}}(\overline{\Omega})$ за цією самою топологією позначатимемо $W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$. Очевидно, що послідовність $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ є збіжною до v в цих просторах, якщо $\|v_k - v\|_{W^1_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_\tau)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ для кожного $\tau > 0$. Під $\overset{\circ}{W}{}^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{c}}(\overline{\Omega}, \Gamma_1)$ розумітимемо підпростір простору $\overset{\circ}{W}{}^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}, \Gamma_1)$, що складається з функцій, носії яких обмежені.

3. Формулювання задачі й основних результатів. Розглянемо задачу

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i(x, u, \nabla u) - a_0(x, u, \nabla u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(x) - f_0(x), \qquad x \in \Omega, \tag{3}$$

$$u|_{\Gamma_1} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i(x, u, \nabla u)\, \nu_i\big|_{\Gamma_2} = 0, \tag{4}$$

де $\nabla u = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$. Припустимо, що вихідні дані задовольняють такі умови:

1) для кожного $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ функція $a_i(x, s, \xi)$, $(x, s, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, є каратеодорівською, тобто для майже всіх $x \in \Omega$ функція $a_i(x, \cdot, \cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – неперервна і для будь-яких $s \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ функція $a_i(\cdot, s, \xi) : \Omega \to \mathbb{R}$ – вимірна;

1′) $a_i(x, 0, 0) = 0$ для м. в. $x \in \overline{\Omega}$, $i = \overline{0,n}$;

2) для кожного $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, м. в. $x \in \Omega$ і будь-яких $s \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ виконується нерівність

$$|a_i(x, s, \xi)| \leqslant h_{1i}(x) \Big(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^{p_j(x)/p_i^*(x)} + |s|^{p_0(x)/p_i^*(x)} \Big) + h_{2i}(x),$$

де $p = (p_0, p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{P}$, $h_{1i} \in L_{\infty,\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $h_{2i} \in L_{p\,{}^*_i(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$;

3) $f_i \in L_{p\,{}^*_i(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $i = \overline{0,n}$.

Означення 1. *Узагальненим розв'язком задачі (3), (4) назвемо функцію* $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1}_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}, \Gamma_1)$, *яка задовольняє інтегральну рівність*

$$\int\limits_{\Omega} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x,u,\nabla u)\, v_{x_i} + a_0(x,u,\nabla u)\, v \Big\}\, d\,x = \int\limits_{\Omega} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} f_i\, v_{x_i} + f_0\, v \Big\}\, d\,x \tag{5}$$

для будь-якої функції $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1}_{p(\,\cdot\,),\,c}(\overline{\Omega}, \Gamma_1)$.

Зауваження 1. Умова $\mathbf{1}'$) не є принциповою, оскільки інакше, ввівши позначення $\widetilde{a}_i(x,s,\xi) \overset{\mathrm{def}}{=} a_i(x,s,\xi) - a_i(x,0,0)$, $\widetilde{f}_i(x) \overset{\mathrm{def}}{=} f_i(x) - a_i(x,0,0)$ для м. в. $x \in \Omega$ $(i = \overline{0,n})$, рівність (5) можна записати з $\widetilde{a}_i$, $\widetilde{f}_i$ замість відповідно a_i, f_i, причому $\widetilde{a}_i(x,0,0) = 0$ $(i = \overline{0,n})$ для майже всіх $x \in \Omega$.

Вважаючи, що:

4) $p_0(x) = 2$, $p_1(x) = 2, \ldots, p_k(x) = 2$ для майже всіх $x \in \Omega$ (очевидно, що $p_0^*(x) = 2$, $p_1^*(x) = 2, \ldots, p_k^*(x) = 2$ для майже всіх $x \in \Omega$),

шукатимемо додаткові умови на вихідні дані, при яких узагальнений розв'язок задачі (3), (4) існує та єдиний у класі функцій з певною поведінкою на нескінченності.

Нехай виконуються ще такі умови:

5) для майже всіх $x \in \Omega$ та будь-яких $s, r \in \mathbb{R}$ і $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$

$$a_0(x,s,\xi) = \sum_{i=1}^{k} b_i(x)\xi_i + c(x,s,\xi), \tag{6}$$

де $b_i, b_{i,x_i} \in C(\overline{\Omega})$, $b_i|_{\Gamma_2} = 0$, $i = \overline{1,k}$, і

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i(x,s,\xi) - a_i(x,r,\eta))(\xi_i - \eta_i) + (c(x,s,\xi) - c(x,r,\eta))(s-r) \geqslant$$

$$\geqslant q_1(x) \sum_{i=1}^{k} |\xi_i - \eta_i|^2 + q_2(x)|s-r|^2, \tag{7}$$

де $q_1, q_2 \in C(\overline{\Omega})$, $\min\limits_{x \in \overline{\Omega_\tau}} q_1(x) > 0 \ \forall \tau > 0$,

$$q_2(x) - 2^{-1} \sum_{i=1}^{k} b_{i,x_i}(x) > 0 \quad \forall\ x \in \Omega; \tag{8}$$

6) для кожного $i \in \{1, \ldots, k\}$, м. в. $x \in \Omega$ та будь-яких $s, r \in \mathbb{R}$ і $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ правильна нерівність

$$|a_i(x,s,\xi)-a_i(x,r,\eta)|\leqslant g_{1i}(x)\sum_{j=1}^{k}|\xi_j-\eta_j|+g_{2i}(x)|s-r|, \tag{9}$$

де g_{1i}, g_{2i} – деякі неперервні та невід'ємні на $\overline{\Omega}$ функції, причому

$$2\sum_{i=1}^{k}(g_{2i}(x))^2\geqslant\sum_{j=1}^{k}b_j(x)\frac{x_j}{|x|}\quad\forall x\in S_\tau,\quad\forall\tau>0; \tag{10}$$

7) існує неперервна додатна функція $A(\tau)$, $\tau\geqslant 0$, така, що

$$d_1(\tau)\lambda^{-1/2}(\tau)+d_2(\tau)\lambda^{-1}(\tau)\leqslant A(\tau)\quad\forall\tau>0\quad\text{і}\quad\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\,z}{A(z)}=+\infty, \tag{11}$$

де $d_1(\tau)=\sup\limits_{s\in S_\tau}\Big(\sum\limits_{i=1}^{k}g_{1i}^2(s)/(q_1(s)h(s))\Big)^{1/2}$; $d_2(\tau)=\sup\limits_{s\in S_\tau}\Big(\Big(\sum\limits_{i=1}^{k}g_{2i}^2(s)\Big)^{1/2}-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{k}b_i\frac{x_i}{|x|}\Big)$;

$$\lambda(\tau)=\inf_{v}\Big\{\Big[\int\limits_{S_\tau}E(v)\,h\,d\,s\Big]\Big[\int\limits_{S_\tau}v^2\,d\,s\Big]^{-1}\Big\}.$$

Тут інфімум беремо по всіх неперервно диференційовних в околі S_τ функціях, які зануляються на $\partial S_\tau\cap\Gamma_1$; $E(v)\overset{\mathrm{def}}{=}q_1\sum\limits_{i=1}^{k}v_{x_i}^2+(q_2-2^{-1}\sum\limits_{i=1}^{k}b_{i,x_i})v^2$.

Зауваження 2. З умови **6**), зокрема, випливає, що при її виконанні функції $a_i(x,s,\xi)$, $(x,s,\xi)\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, $i=\overline{1,k}$, явно не залежать від змінних $\xi_{k+1},\ldots,\xi_n$.

Розглянемо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння

$$\frac{d\,\tau}{d\,\alpha}=A(\tau),\qquad\tau(0)=0. \tag{12}$$

Очевидно, що розв'язок $\tau(\alpha)$, $\alpha\geqslant 0$, цієї задачі визначається рівністю $\int_0^{\tau(\alpha)}\frac{d\,z}{A(z)}=\alpha$. Звідси та умови (11), зокрема, випливає, що $\tau(\alpha)\to+\infty$ при $\alpha\to+\infty$.

Приймемо $\Omega^\alpha\overset{\mathrm{def}}{=}\Omega_{\tau(\alpha)}$, $\Gamma_1^\alpha\overset{\mathrm{def}}{=}\Gamma_{1,\tau(\alpha)}$, $\Gamma_2^\alpha\overset{\mathrm{def}}{=}\Gamma_{2,\tau(\alpha)}$, $S^\alpha\overset{\mathrm{def}}{=}S_{\tau(\alpha)}$, $\langle v\rangle_\alpha\overset{\mathrm{def}}{=}(\int_{\Omega^\alpha}E(v)\,d\,x)^{1/2}$, $\alpha\geqslant 0$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* **1**)–**7**). *Тоді задача (3), (4) в класі функцій з* $\overset{\circ}{W}{}^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega},\Gamma_1)$, *які задовольняють умову*

$$\int\limits_{\Omega^R}E(v)\,d\,x=o(1)e^R\quad\textit{при}\quad R\to+\infty, \tag{13}$$

може мати не більше одного узагальненого розв'язку.

Для кожного натурального l приймемо $\Lambda_l\overset{\mathrm{def}}{=}\inf\limits_{v}\Big\{\Big[\int_{\Omega^l}E(v)\,d\,x\Big]\Big[\int_{\Omega^l}v^2\,d\,x\Big]^{-1}\Big\}$, де інфімум береться по всіх функціях v з простору $C^1(\overline{\Omega^l})$, які дорівнюють нулеві на $\partial\Omega^l\backslash\Gamma_2$; $q_{1l}\overset{\text{def}}{=}\min\limits_{\overline{\Omega^l}} q_1(x)>0$.

Теорема 2. *Нехай, крім умов* **1**)–**7**), *виконуються ще дві умови:*

8) *для м.в.* $x\in\Omega$ *і будь-яких* $s\in\mathbb{R}$, $\xi\in\mathbb{R}^n$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,s,\xi)\xi_i + c(x,s,\xi)s \geqslant q_1(x)\sum_{i=1}^{k}|\xi_i|^2 + q_2(x)|s|^2 + q_3(x)\sum_{i=k+1}^{n}|\xi_i|^{p_i(x)}$$

де $q_3\in L_\infty(\Omega)$, $q_{3l}\overset{\text{def}}{=}\operatorname*{ess\,inf}\limits_{x\in\Omega^l} q_3(x)>0\ \forall l\in\mathbb{N}$;

9) *для будь-якого* $l\in\mathbb{N}$

$$\Lambda_l^{-1}\int_{\Omega^l}|f_0(x)|^2\,d\,x + q_{1l}^{-1}\int\limits_{\Omega^l}\sum_{i=1}^{k}|f_i(x)|^2\,d\,x + q_{3l}^{-1}\int\limits_{\Omega^l}\sum_{i=k+1}^{n}|f_i(x)|^{p_i^*(x)}\,d\,x \leqslant C_1e^{(1-\varepsilon)l},$$

де C_1, $\varepsilon>0$ *– сталі, які від* l *не залежать.*

Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (3), (4), який належить класу єдиності, визначеному в теоремі 1. Цей розв'язок задовольняє оцінку

$$\langle u\rangle_l \leqslant C_2e^{(1-\varepsilon)l/2}, \qquad l\in\mathbb{N}, \tag{14}$$

де $C_2>0$ *– стала, яка залежить тільки від* C_1 *і* ε.

4. Допоміжне твердження.

Лема 1. *Нехай* $u_1,u_2\in\overset{\circ}{W}{}^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega},\Gamma_1)$ *– функції, для яких виконується рівність (5) (тобто, коли взяти* $u=u_1$, $u=u_2$*) за умови, що* $\operatorname{supp}v$ *лежить в* Ω^{R_*}, *де* $R_*>0$ *– деяке число. Тоді для будь-яких* R_1,R_2, $0<R_1<R_2\leqslant R_*$, *правильна нерівність*

$$\langle u_1-u_2\rangle_{R_1}\leqslant e^{(R_1-R_2)/2}\langle u_1-u_2\rangle_{R_2}. \tag{15}$$

Доведення. Нехай $\{u_{1m}\}_{m=1}^\infty$, $\{u_{2m}\}_{m=1}^\infty$ – послідовності функцій з простору $C_0^1(\overline{\Omega},\Gamma_1)$, які збігаються відповідно до u_1 і u_2 за нормою $\langle\,\cdot\,\rangle_{R_*}$, причому для кожного $m\in\mathbb{N}$ звуження $u_{1m}|_{\Omega^{R_*}}$ та $u_{1m}|_{\Omega^{R_*}}$ належить простору $C^2(\overline{\Omega^{R^*}})$. Приймемо $w\overset{\text{def}}{=}u_1-u_2$, $w_m=u_{1m}-u_{2m}$, $m\in\mathbb{N}$. Очевидно, що $\langle w-w_m\rangle_{R_*}\to 0$ при $m\to+\infty$.

Віднімемо від інтегральної тотожності (5), записаної для u_1, ту саму тотожність, але записану для u_2. Вибравши яке-небудь $\tau\in(0,\tau(R_*))$, приймемо в отриманій після віднімання тотожності $v=w_m\psi_\delta$, де $m\in\mathbb{N}$, $\delta\in(0,\tau)$ – довільне число, ψ_δ – функція з простору $C^1(\mathbb{R}^k)$, для якої виконуються умови: $\psi_\delta(x')=1$ при $|x'|<\tau-\delta$ (тут і далі прийнято позначення $x'=(x_1,\dots,x_k)$), $\psi_\delta(x')=0$ при $|x'|>\tau$ і $0\leqslant\psi_\delta(x')\leqslant 1$, $|\nabla\psi_\delta(x')|\leqslant C/\delta$ для всіх $x'\in\mathbb{R}^k$, де $C>0$ – стала, яка не залежить від τ і δ. Тоді матимемо

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[\sum_{i=1}^{n}(a_i(u_1)-a_i(u_2))(w_m\psi_\delta)_{x_i} + (a_0(u_1)-a_0(u_2))\,w_m\psi_\delta\Big]\,d\,x = 0. \tag{16}$$

Тут і далі використовуємо позначення

$$c(v) \overset{\text{def}}{=} c(x, v, \nabla v), \qquad a_i(v) \overset{\text{def}}{=} a_i(x, v, \nabla v), \quad i = \overline{0, n}. \tag{17}$$

Перепишемо рівність (16), враховуючи (6)

$$I_m \equiv \int\limits_{\Omega_\tau} \Big[\sum_{i=1}^{n} (a_i(u_{1m}) - a_i(u_{2m})) w_{m,x_i} + (c(u_{1m}) - c(u_{2m}))\, w_m + \sum_{i=1}^{k} b_i\, w_{m,x_i}\, w_m \Big]\, d\,x =$$

$$= \sigma_{m\delta}(\tau) + G_{m\delta}(\tau), \tag{18}$$

де $\sigma_{m\delta}(\tau) = \int\limits_{\Omega_\tau} \Big[\sum\limits_{i=1}^{n} \Big\{ (a_i(u_{1m}) - a_i(u_{2m})) w_{m,x_i} - (a_i(u_1) - a_i(u_2))\, w_{m,x_i} \psi_\delta \Big\} +$
$+ (a_0(u_{1m}) - a_0(u_{2m}))\, w_m - (a_0(u_1) - a_0(u_2)) w_m \psi_\delta \Big]\, d\,x,$
$G_{m\delta}(\tau) = -\int\limits_{\Omega_\tau} \sum\limits_{i=1}^{k} (a_i(u_1) - a_i(u_2))\, w_m \psi_{\delta, x_i}\, d\,x.$
Перетворимо $G_{m\delta}$ так. Довизначимо $a_i(u_{jm})$ нулем поза Ω^{R_*} і приймемо

$$a_{i\rho}(u_{jm}(x)) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n} a_i(u_{jm}(y))\, \omega_\rho(x - y)\, d\,y, \quad i = \overline{1, k}, \quad j = 1, 2,$$

де ω_ρ – ядра усереднення, $\rho > 0$. Тоді

$$G_{m\delta}(\tau) = \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^{k} \left[(a_{i\rho}(u_{1m}) - a_i(u_1)) - (a_{i\rho}(u_{2m}) - a_i(u_2)) \right]\, w_m \psi_{\delta, x_i}\, d\,x +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_\tau \setminus \Omega_{\tau-\delta}} \sum_{i=1}^{k} \Big[(a_{i\rho}(u_{1m}) - a_{i\rho}(u_{2m})) w_m \Big]_{x_i} \psi_\delta\, d\,x + \int\limits_{S_{\tau-\delta}} \sum_{i=1}^{k} (a_{i\rho}(u_{1m}) - a_{i\rho}(u_{2m})) w_m \nu_i ds -$$

$$- \int\limits_{S_\tau} \sum_{i=1}^{k} (a_{i\rho}(u_{1m}) - a_{i\rho}(u_{2m})) w_m\, \nu_i\, d\,s + \int\limits_{S_\tau} \sum_{i=1}^{k} (a_{i\rho}(u_{1m}) - a_{i\rho}(u_{2m})) w_m\, \nu_i\, d\,s. \tag{19}$$

Тут $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ – одиничний вектор зовнішньої щодо області Ω_τ ($\Omega_{\tau-\delta}$) нормалі до S_τ ($S_{\tau-\delta}$), тобто $\nu_i(x) = x_j/|x|$, $j = \overline{1, n}$, $x \in S_\tau$ ($S_{\tau-\delta}$).

З умови **6**) і нерівності Коші – Буняковського випливає

$$\int\limits_{S_\tau} \sum_{i=1}^{k} (a_{i\rho}(u_{1m}) - a_{i\rho}(u_{2m})) w_m\, \nu_i\, d\,s \leqslant \int\limits_{S_\tau} \sum_{i=1}^{k} |(g_{1i} |\widetilde{\nabla} w_m| + g_{2i} |w_m|)_\rho -$$

$$-(g_{1i} |\widetilde{\nabla} w_m| + g_{2i} |w_m|)|\, |w_m|\, |\nu_i|\, d\,s + \int\limits_{S_\tau} \sum_{i=1}^{k} (g_{1i} |\widetilde{\nabla} w_m| + g_{2i} |w_m|)\, |w_m|\, |\nu_i|\, d\,s \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\int\limits_{S_\tau}\Big(\sum_{i=1}^{k} g_{1i}^2\Big)\,|\widetilde{\nabla} w_m|^2\,d\,s\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_{S_\tau}|w_m|^2\,d\,s\Big)^{1/2}+\int\limits_{S_\tau}\Big(\sum_{i=1}^{k} g_{2i}^2\Big)^{1/2}|w_m|^2\,d\,s+L_{m\rho}(\tau), \tag{20}$$

де $L_{m\rho}(\tau)\overset{\mathrm{def}}{=}\int\limits_{S_\tau} b_{m\rho}(s)\,d\,s$, $b_{m\rho}(x)\overset{\mathrm{def}}{=}\sum\limits_{i=1}^{k}|(g_{1i}|\widetilde{\nabla} w_m|+g_{2i}|w_m|)_\rho-(g_{1i}|\widetilde{\nabla} w_m|+g_{2i}|w_m|)|\times$ $\times\,|w_m|$, $\widetilde{\nabla} w_m=(w_{m,x_1},\ldots,w_{m,x_k})$.

Перетворимо й оцінимо знизу ліву частину рівності (18), використовуючи нерівність (7) та формулу інтегрування частинами

$$I_m\geqslant\int\limits_{\Omega_\tau}E(w_m)\,d\,x+\frac{1}{2}\int\limits_{S_\tau}\sum_{i=1}^{k}b_i\,\nu_i\,w_m^2\,d\,s. \tag{21}$$

Отож, з (18) на підставі (19)–(21), використовуючи введені в умові **7**) позначення, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_\tau}E(w_m)dx\leqslant\Big[d_1(\tau)\lambda^{-1/2}(\tau)+d_2(\tau)\lambda^{-1}(\tau)\Big]\int\limits_{S_\tau}E(w_m)hds+\sigma_{m\delta}(\tau)+G^*_{m\rho\delta}(\tau)+L_{m\rho}(\tau), \tag{22}$$

$\tau>0$, де $G^*_{m\rho\delta}$ – сума всіх членів правої частини (19), за винятком останнього.

Позначимо $F_m(\tau)\overset{\mathrm{def}}{=}\int_{\Omega_\tau}E(w_m)\,d\,x$. З (22), враховуючи умову **7**) і (12), матимемо

$$F_m(\tau)\leqslant\frac{dF(\tau)}{d\tau}\frac{d\tau}{d\alpha}+\sigma_{m\delta}(\tau)+G^*_{m\rho\delta}(\tau)+L_{m\rho}(\tau),\quad \tau>0,$$

звідки

$$0\leqslant -F_m+\frac{dF_m}{d\alpha}+\sigma_{m\delta}+G^*_{m\rho\delta}+L_{m\rho}. \tag{23}$$

Домноживши (23) на $e^{-\alpha}$ і проінтегрувавши одержану нерівність за α від R_1 до R_2, отримаємо

$$F_m(\tau(R_1))\leqslant e^{R_1-R_2}F_m(\tau(R_2))+\int\limits_{R_1}^{R_2}[\sigma_{m\delta}+G^*_{m\rho\delta}+L_{m\rho}]e^{R_1-\alpha}\,d\,\alpha. \tag{24}$$

Аналогічно як в [1] і [14] можна показати, що інтеграл $\int_{R_1}^{R_2}[\sigma_{m\delta}+G^*_{m\rho\delta}+L_{m\rho}]e^{R_1-\alpha}\,d\,\alpha$ як завгодно малий, якщо $m\in\mathbb{N}$ достатньо велике, $\rho=\rho(m)>0$ достатньо мале і $\delta=\delta(m,\rho)$ достатньо мале. Враховуючи зазначене, з (24) одержимо оцінку (15).

5. Доведення основних результатів. *Доведення теореми 1.* Нехай u_1, u_2 – два узагальнених розв'язки задачі (3), (4), які задовольняють умову (13). Тоді $\langle\,u_1-u_2\rangle_R=o(1)e^{R/2}$ при $R\to+\infty$. Звідси та з оцінки (15) маємо для довільних R_1 і R_2, $R_1<R_2$, нерівність

$$\langle\,u_1-u_2\rangle_{R_1}\leqslant\gamma(R_2), \tag{25}$$

де $\gamma(R_2) \to 0$ при $R_2 \to +\infty$. Фіксуючи R_1 і спрямувавши R_2 до $+\infty$, з (25) отримаємо рівність $\langle u_1 - u_2 \rangle_{R_1} = 0$, тобто $u_1 = u_2$ майже всюди на Ω^{R_1}. На підставі довільності R_1 отримаємо, що $u_1 = u_2$ майже всюди на Ω. □

Доведення теореми 2. Нехай $l \in \mathbb{N}$. Розглянемо крайову задачу

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i(x, u_l, \nabla u_l) - a_0(x, u_l, \nabla u_l) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(x) - f_0(x), \qquad x \in \Omega^l, \tag{26}$$

$$u_l|_{\Gamma_1^l \cup S^l} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i(x, u_l, \nabla u_l)\, \nu_i\big|_{\Gamma_2^l} = 0. \tag{27}$$

Під U_l розумітимемо поповнення простору функцій з $C^1(\overline{\Omega^l})$, які занулюються в околі $\Gamma_1^l \cup S^l$, за нормою простору $W^1_{p(\,\cdot\,)}(\Omega^l)$. Очевидно, що $U_l \subset W^1_{p(\,\cdot\,)}(\Omega^l)$.

Узагальненим розв'язком задачі (26), (27) називається функція u_l з простору U_l, яка задовольняє інтегральну тотожність

$$\int\limits_{\Omega^l} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, u_l, \nabla u_l)\, v_{x_i} + a_0(x, u_l, \nabla u_l)\, v \Big\}\, d\,x = \int\limits_{\Omega^l} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} f_i\, v_{x_i} + f_0\, v \Big\}\, d\,x \tag{28}$$

для будь-якої функції $v \in U_l$.

Доведення існування узагальненого розв'язку u_l задачі (26), (27) проводиться методом Гальоркіна (див., наприклад, [8, с. 22]), а його єдиність легко отримати, використовуючи умову **5**).

Для кожного $l \in \mathbb{N}$ функцію u_l продовжимо нулем на Ω, залишивши за цим продовженням позначення u_l. Покажемо, що отримана послідовність $\{u_l\}_{l=1}^{\infty}$ містить підпослідовність, яка збіжна в певному сенсі до узагальненого розв'язку (3), (4).

Спочатку оцінимо $\langle u_l \rangle_l$. Для цього приймемо в інтегральній тотожності (28) $v = u_l$. Тоді, враховуючи (17), отримаємо

$$\int\limits_{\Omega^l} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(u_l)\, u_{l,x_i} + a_0(u_l)\, u_l \Big\}\, d\,x = \int\limits_{\Omega^l} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} f_i\, u_{l,x_i} + f_0\, u_l \Big\}\, d\,x. \tag{29}$$

Використовуючи умови на вихідні дані, формулу інтегрування частинами і нерівність Коші – Буняковського, з (29) матимемо

$$\int\limits_{\Omega^l} \Big\{ q_1 \sum_{i=1}^{k} |u_{l,x_i}|^2 + (q_2 - 2^{-1} \sum_{i=1}^{k} b_{i,x_i}) |u_l|^2 + q_3 \sum_{i=k+1}^{n} |u_{l,x_i}(x)|^{p_i(x)} \Big\}\, d\,x \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon_1}{2} \int\limits_{\Omega^l} |u_l|^2\, d\,x + \frac{1}{2\varepsilon_1} \int\limits_{\Omega^l} |f_0|^2\, d\,x + \frac{\varepsilon_2}{2} \int\limits_{\Omega^l} \sum_{i=1}^{k} |u_{l,x_i}|^2\, d\,x + \frac{1}{2\varepsilon_2} \int\limits_{\Omega^l} \sum_{i=1}^{k} |f_i|^2\, d\,x +$$

$$+ \frac{\varepsilon_3}{2} \int\limits_{\Omega^l} \sum_{i=k+1}^{n} |u_{l,x_i}(x)|^{p_i(x)}\, d\,x + \frac{1}{2\varepsilon_3} \int\limits_{\Omega^l} \sum_{i=k+1}^{n} |f_i(x)|^{p_i^*(x)}\, d\,x, \tag{30}$$

де ε_1, ε_2, ε_3 – довільні додатні сталі.

Прийнявши в нерівності (30) $\varepsilon_1 = 2^{-1}\Lambda_l$, $\varepsilon_2 = 2^{-1}q_{1l}$, $\varepsilon_3 = 2^{-1}q_{3l}$, одержимо

$$\int\limits_{\Omega^l} \Big\{ E(u_l) + q_3 \sum_{i=k+1}^{n} |u_{l,x_i}(x)|^{p_i(x)} \Big\}\, d\,x \leqslant$$

$$\leqslant 2\Lambda_l^{-1} \int\limits_{\Omega^l} |f_0|^2\, d\,x + 2q_{1l}^{-1} \int\limits_{\Omega^l} \sum_{i=1}^{k} |f_i|^2\, d\,x + 2q_{3l}^{-1} \int\limits_{\Omega^l} \sum_{i=k+1}^{n} |f_i(x)|^{p_i^*(x)}\, d\,x.$$

Звідси та з умови **9**) випливає оцінка

$$\langle u_l \rangle_l \leqslant C_2 e^{(1-\varepsilon)l/2}. \tag{31}$$

Нехай $m \in \mathbb{N}$ – фіксоване число. Покажемо, що послідовність $\{u_l\}$ є фундаментальною за нормою $\langle\,\cdot\,\rangle_m$. Візьмемо будь-які натуральні числа l, r, причому $l \geqslant m$. Маємо

$$\langle\, u_{l+r} - u_l \rangle_m \leqslant \sum_{i=0}^{r-1} \langle\, u_{l+i+1} - u_{l+i} \rangle_m. \tag{32}$$

Оскільки u_{l+i+1}, u_{l+i} справджують умови леми 1 при $R_* = l + i$, то з цього твердження випливає оцінка

$$\langle\, u_{l+i+1} - u_{l+i} \rangle_m \leqslant e^{-1/2} \langle\, u_{l+i+1} - u_{l+i} \rangle_{m+1} \leqslant \ldots \leqslant e^{-(l+i-m)/2} \langle\, u_{l+i+1} - u_{l+i} \rangle_{l+i}. \tag{33}$$

З (31) отримаємо

$$\langle\, u_{l+i+1} - u_{l+i} \rangle_{l+i} \leqslant \langle\, u_{l+i+1} \rangle_{l+i+1} + \langle\, u_{l+i} \rangle_{l+i} \leqslant C_3 e^{(1-\varepsilon)(l+i)/2}, \tag{34}$$

де $C_3 > 0$ – стала, яка від l та i не залежить. На підставі (32)-(34) одержимо

$$\langle\, u_{l+r} - u_l \rangle_m \leqslant \sum_{i=0}^{r-1} C_3 e^{m/2} e^{-\varepsilon(l+i)/2} \leqslant C_4 e^{(m-\varepsilon l)/2}. \tag{35}$$

Тут $C_4 > 0$ – стала, яка від l і r не залежить.

З (35) випливає, що $\langle\, u_{l+r} - u_l \rangle_m \to 0$ при $l \to \infty$ для будь-яких $r \in \mathbb{N}$, тобто послідовності $\{u_l\}$, $\{u_{l,x_i}\}$, $i = \overline{1,k}$, фундаментальні в просторі $L_2(\Omega^m)$ для кожного $m \in \mathbb{N}$. Тому існує функція $u \in L_{2,\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ така, що $u_{x_i} \in L_{2,\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $i = \overline{1,k}$, і

$$u_l \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{сильно в } L_{2,\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), \tag{36}$$

$$u_{l,x_i} \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} u_{x_i} \quad \text{сильно в } L_{2,\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), \qquad i = \overline{1,k}. \tag{37}$$

На підставі умови **6**) з (36), (37) маємо

$$a_i(u_l) \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} a_i(u) \quad \text{сильно в } L_{2,\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), \qquad i = \overline{1,k}. \tag{38}$$

Нехай $R > 0$ – довільне число, $\zeta(x') = \psi_1(x')$, $x' \in \mathbb{R}^k$, де функція ψ_1 така сама як у доведенні леми 1 при $\tau = R + 1$, $\delta = 1$. Візьмемо в (28) $v = u_l\zeta$. Нехай число

l_0 таке, що для довільного $l \geqslant l_0$ маємо $\Omega^l \supset \Omega_{R+1}$. Тоді для $l > l_0$ після простих перетворень отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_{R+1}} \Big[\sum_{i=1}^{n} a_i(u_l)u_{l,x_i} + a_0(u_l)u_l\Big]\,\zeta\,d\,x = \int\limits_{\Omega_{R+1}} \Big[f_0 u_l + \sum_{i=1}^{n} f_i u_{l,x_i}\Big]\,\zeta\,d\,x +$$

$$+\int\limits_{\Omega_{R+1}} \sum_{i=1}^{k} f_i\,u_l\,\zeta_{x_i}\,d\,x - \int\limits_{\Omega_{R+1}} \sum_{i=1}^{k} a_i(u_l)\,u_l\,\zeta_{x_i}\,d\,x. \tag{39}$$

Оцінимо доданки рівності (39), використовуючи умову **8**), нерівності Коші – Буняковського та Юнга. У результаті, врахувавши, що $|\nabla\zeta| \leqslant C$ на $\mathbb{R}^k$, матимемо

$$\int\limits_{\Omega_{R+1}} \Big[q_1(x)\sum_{i=1}^{k}|u_{l,x_i}(x)|^2 + (q_2(x) - 2^{-1}\sum_{i=1}^{k} b_{i,x_i})|u_l(x)|^2 + q_3(x)\sum_{i=k+1}^{n}|u_{l,x_i}(x)|^{p_i(x)}\Big]\zeta d\,x \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega_{R+1}} \Big[|u_l|^2 + \sum_{i=1}^{k}|u_{l,x_i}|^2\Big]\zeta\,d\,x + \int\limits_{\Omega_{R+1}} \Big[|f_0(x)|^2 + \sum_{i=1}^{k}|f_i(x)|^2\Big]\zeta\,d\,x +$$

$$+\eta \int\limits_{\Omega_{R+1}} \sum_{i=k+1}^{n} |u_{l,x_i}(x)|^{p\,_i(x)}\zeta\,d\,x + C_5(\eta)\int\limits_{\Omega_{R+1}} \sum_{i=k+1}^{n} |f_i(x)|^{p^*_i(x)}\zeta\,d\,x +$$

$$+C_6 \int\limits_{\Omega_{R+1}} \sum_{i=1}^{k}\Big\{|a_i(u_l)|^2 + (1 + |b_i(x)|)|u_l|^2 + |f_i|^2\Big\}|\zeta_{x_i}|\,d\,x, \tag{40}$$

де $\eta > 0$ – довільна стала, $C_5(\eta) > 0, C_6 > 0$ – деякі сталі.

На підставі (36)–(38) з (40), вибираючи значення η досить малим, одержимо

$$\int\limits_{\Omega_R} \sum_{i=k+1}^{n} |u_{l,x_i}(x)|^{p_i(x)}\,d\,x \leqslant C_7(R). \tag{41}$$

Тут $C_7(R) > 0$ – стала, яка від l не залежить. Згідно з умовою **2**) та на підставі (36), (37) і (41) для кожного $i = 0, k+1, \ldots, n$ маємо

$$\int\limits_{\Omega_R} |a_i(u_l)|^{p^*_i(x)} d\,x \leqslant C_8 \int\limits_{\Omega_R} \Big\{\sum_{j=1}^{k}|u_{l,x_j}|^2 + \sum_{j=k+1}^{n}|u_{l,x_j}|^{p\,_j(x)} + |u_l|^2\Big\} d\,x + C_9(R) \leqslant C_{10}(R), \tag{42}$$

де $C_8, C_9(R), C_{10}(R) > 0$ – деякі сталі, які від l не залежать (але можуть залежати від R).

З (36), (37), (41), (42) і умови **1**), врахувавши рефлексивність просторів $L_{p_i(\,\cdot\,)}(\Omega_R)$, $i = \overline{k+1, n}$, та $L_{p^*_i(\,\cdot\,)}(\Omega_R)$, $i = 0, k+1, \ldots, n$, $R > 0$, отримаємо існування підпослідовності $\{u_{l_j}\}_{j=1}^{\infty}$ послідовності $\{u_l\}_{l=1}^{\infty}$ (за якою залишимо те саме позначення) та функцій $\chi_i \in L_{p_i^*(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ $i = 0, k+1, \ldots, n$, таких, що

$$u_{l_j,x_i} \xrightarrow[j\to\infty]{} u_{x_i} \quad \text{слабко в} \quad L_{p_i(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), \qquad i = \overline{k+1,n}, \tag{43}$$

$$c\big(u_{l_j}\big) \xrightarrow[j\to\infty]{} \chi_0(\,\cdot\,) \quad \text{слабко в} \quad L_{p_0^*(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), \tag{44}$$

$$a_i\big(u_{l_j}\big) \xrightarrow[j\to\infty]{} \chi_i(\,\cdot\,) \quad \text{слабко в} \quad L_{p_i^*(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), \quad i = k+1, \ldots, n. \tag{45}$$

Покажемо, що

$$\chi_0 = c(u), \tag{46}$$

$$\chi_i(\,\cdot\,) = a_i\big(u\big), \qquad i = k+1, \ldots, n. \tag{47}$$

Нехай $w \in W^1_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $\psi \in C_c^{1,+}(\mathbb{R}^k)$. Згідно з нерівністю (7) маємо

$$\int\limits_{\Omega} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \big(a_i(u_{l_j}) - a_i(w)\big)\big(u_{l_j,x_i} - w_{x_i}\big) +$$

$$+ \big(c(u_{l_j}) - c(w)\big)\big(u_{l_j} - w\big) - 2^{-1} \sum_{i=1}^{k} b_{i,x_i}(u_{l_j} - w)^2 \Big\} \psi \, dx \geqslant 0 \tag{48}$$

для всіх $j \in \mathbb{N}$, звідки

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} a_i(u_{l_j}) u_{l_j,x_i} \, \psi \, dx - \int\limits_{\Omega} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \big(a_i(u_{l_j}) w_{x_i} + a_i(w)(u_{l_j,x_i} - w_{x_i})\big) -$$

$$- \big(c(u_{l_j}) - c(w)\big)\big(u_{l_j} - w\big) + 2^{-1} \sum_{i=1}^{k} b_{i,x_i}(u_{l_j} - w)^2 \Big\} \psi \, dx \geqslant 0 \tag{49}$$

для всіх $j \in \mathbb{N}$.

Врахуємо, що для будь-якого $j \in \mathbb{N}$ правильна рівність

$$\int\limits_{\Omega} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(u_{l_j}) v_{x_i} + a_0(u_{l_j}) v - f_0 v - \sum_{i=1}^{n} f_i v_{x_i} \Big\} \, dx = 0 \tag{50}$$

для будь-яких $v \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p(\,\cdot\,),\mathrm{c}}(\overline{\Omega}, \Gamma_1)$ таких, що supp v лежить в $\overline{\Omega^{l_j}}$.

З рівності (50), взявши у ній $v = u_{l_j}\,\psi$, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} a_i(u_{l_j}) u_{l_j,x_i} \, \psi \, dx = - \int\limits_{\Omega} \Big\{ a_0(u_{l_j}) u_{l_j} \, \psi - f_0 \, u_{l_j} \, \psi -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} f_i \, u_{l_j,x_i} \, \psi + \sum_{i=1}^{k} a_i(u_{l_j}) \, u_{l_j} \, \psi_{x_i} - \sum_{i=1}^{k} f_i(x) \, u_{l_j} \, \psi_{x_i} \Big\} \, dx. \tag{51}$$

З (49) та (51) одержимо

$$-\int\limits_\Omega \Big\{a_0(u_{l_j})u_{l_j}\,\psi - f_0\,u_{l_j}\,\psi - \sum_{i=1}^n f_i\,u_{l_j,x_i}\,\psi + \sum_{i=1}^k a_i(u_{l_j})\,u_{l_j}\,\psi_{x_i} - \sum_{i=1}^k f_i(x)\,u_{l_j}\,\psi_{x_i}\Big\}\,d\,x-$$

$$-\int\limits_\Omega \Big\{\sum_{i=1}^n \big(a_i(u_{l_j})w_{x_i} + a_i(w)(u_{l_j,x_i} - w_{x_i})\big) -$$

$$-\big(c(u_{l_j}) - c(w)\big)\big(u_{l_j}-w\big) + 2^{-1}\sum_{i=1}^k b_{i,x_i}(u_{l_j}-w)^2\Big\}\,\psi\,d\,x \geqslant 0. \tag{52}$$

Перейдемо в (52) до границі при $j \to \infty$, врахувавши (6), (36), (37), (38), (43), (44) та (45). У результаті отримаємо

$$-\int\limits_\Omega \Big\{(\chi_0 + \sum_{i=1}^k b_i u_{x_i})u\,\psi - f_0\,u\,\psi - \sum_{i=1}^n f_i\,u_{x_i}\,\psi + \sum_{i=1}^k a_i(u)\,u\,\psi_{x_i} +$$

$$-\sum_{i=1}^k f_i(x)\,u\,\psi_{x_i}\Big\}\,d\,x - \int\limits_\Omega \Big\{\sum_{i=1}^k a_i(u)w_{x_i} + \sum_{i=k+1}^n \chi_i w_{x_i} + \sum_{i=1}^n a_i(w)(u_{x_i} - w_{x_i}) -$$

$$-(\chi_0 - c(w))(u-w) + 2^{-1}\sum_{i=1}^k b_{i,x_i}(u-w)^2\Big\}\,\psi\,d\,x \geqslant 0. \tag{53}$$

Нехай $\nu \in \mathbb{N}$ таке, що supp $\psi \subset \Omega^{l_\nu}$. Приймемо при $j > \nu$ в рівності (50) $v = u\,\psi$ і перейшовши до границі при $j \to \infty$, матимемо

$$\int\limits_\Omega \Big\{\sum_{i=1}^k a_i(u)u_{x_i} + \sum_{i=k+1}^n \chi_i\,u_{x_i}\Big\}\,\psi\,d\,x = -\int\limits_\Omega \Big\{(\chi_0 + \sum_{i=1}^k b_i u_{x_i})u\,\psi -$$

$$-f_0\,u\,\psi - \sum_{i=1}^n f_i\,u_{x_i}\,\psi + \sum_{i=1}^k a_i(u)\,u\,\psi_{x_i} - \sum_{i=1}^k f_i\,u\,\psi_{x_i}\Big\}\,d\,x. \tag{54}$$

З (53) та (54) одержимо

$$\int\limits_\Omega \Big\{\sum_{i=1}^k (a_i(w) - a_i(u))\,(u_{x_i} - w_{x_i}) + \sum_{i=k+1}^n (a_i(w) - \chi_i)\,(u_{x_i} - w_{x_i}) +$$

$$+(c(w) - \chi_0)\,(u-w) - 2^{-1}\sum_{i=1}^k b_{i,x_i}(u-w)^2\Big\}\,\psi\,d\,x \leqslant 0 \tag{55}$$

для довільного $w \in W^1_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $\psi \in C_c^{1,+}(\overline{\Omega})$.

Взявши в (55) $w = u - \lambda g$, $\lambda > 0$, $g \in W^1_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, матимемо

$$\lambda \int\limits_{\Omega} \Big\{ \sum_{i=1}^{k} (a_i(u - \lambda g) - a_i(u))\, g_{x_i} +$$

$$+ \sum_{i=k+1}^{n} (a_i(u - \lambda g) - \chi_i)\, g_{x_i} + (c(u - \lambda g) - \chi_0) g - 2^{-1} \lambda \sum_{i=1}^{k} b_{i,x_i} g^2 \Big\} \psi \, dx \leqslant 0 \qquad (56)$$

для довільних $g \in W^1_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$. Поділимо праву і ліву частини нерівності (56) на λ, і в отриманій нерівності спрямуємо λ до 0. У результаті одержимо

$$\int\limits_{\Omega} \Big\{ \sum_{i=k+1}^{n} (a_i(u) - \chi_i)\, g_{x_i} + (c(u) - \chi_0) g \Big\} \psi \, dx \leqslant 0 \quad \forall g \in W^1_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}). \qquad (57)$$

З (57) беручи по черзі спочатку $g(x) = 1$, а потім $g(x) = -1$, отримаємо (46). Врахувавши (46), з (57) одержимо

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i=k+1}^{n} (a_i(u) - \chi_i)\, g_{x_i}\, \psi \, dx \leqslant 0 \quad \forall g \in W^1_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}). \qquad (58)$$

Оскільки (58) виконується для довільної $g \in W^1_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, то вибираючи спочатку $g(x) = x_l$, $l = \overline{k+1, n}$, а потім $g(x) = -x_l$, $l = \overline{k+1, n}$, отримаємо (47).

Нехай $v \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p(\,\cdot\,),\mathrm{c}}(\overline{\Omega}, \Gamma_1)$. Для кожного $j \geqslant \nu$, де $\nu \in \mathbb{N}$ таке, що $\operatorname{supp} v \subset \overline{\Omega^{l_\nu}}$, з означення u_{l_j} маємо рівність (28). Перейдемо в ній до границі при $j \to +\infty$, врахувавши (6), (37), (38), (44)–(47). У результаті отримаємо рівність (5) для заданої функції v. Оскільки v – довільна, і u належить простору $\overset{\circ}{W}{}^1_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}, \Gamma_1)$, то u є узагальненим розв'язком задачі (3), (4). Оцінку (14) одержуємо з (31) і (35) так: $\langle u \rangle_l \leqslant \langle u - u_l \rangle_l + \langle u_l \rangle_l = \lim\limits_{m\to\infty} \langle u_m - u_l \rangle_l + \langle u_l \rangle_l \leqslant C_2 e^{(1-\varepsilon)l/2}$. □

1. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А.* Аналог принципа Сен-Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений // Успехи мат. наук. – 1976. – Т. 31. – №6. – С. 142-166.
2. *Шишков А. Е.* Разрешимость граничных задач для квазилинейных эллиптических и параболических уравнений в неограниченных областях в классах функций, растущих на бесконечности // Укр. мат. журн. – 1995. – Т. 47. – №2. – С. 277-289.
3. *Brezis H.* Semilinear equations in $\mathbb{R}^N$ without condition at infinity // Appl. Math. and Optim. – Vol. 12. – 1984. – P. 271-282.
4. *Diaz J. I. and Oleinik O. A.* Nonlinear elliptic boundary-value problems in unbounded domains and the asymptotic behaviour of its solution // C. R. Acad. Sci. Paris. – Vol. 315, Serie I. (1992). – P. 787-792.
5. *Бокало М. М., Кушнір О. В.* Про коректність крайових задач для квазілінійних еліптичних систем в необмежених областях // Математичні студії. – 2005. – Т. 24. – №1. – С. 69-82.

6. *Медвідь І.* Задачі для нелінійних еліптичних і параболічних рівнянь в анізотропних просторах // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 149-166.
7. *Bendahmane M., Karlsen H.* Nonlinear anisotropic elliptic and parabolic equations in $\mathbb{R}^n$ with advection and lower order terms and locally integrable data // Potential Anal. – Vol. 22 (2002). – P. 207-227.
8. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., 1972.
9. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения – М., 1978.
10. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М., 1964.
11. *Bernis F.* Elliptic and Parabolic Semilinear Problems without Conditions at infinity // Arch. Ration Mech. and Anal. – Vol. 106, №3 (1989). – P. 217-241.
12. *Antontsev S. and Shmarev S.* Elliptic equations and systems with nonstandard growth conditions: existence, uniqueness and localization properties of solutions // Nonlinear analysis Serie A: Theory & Methods. – Vol. 65, №4 (2004). – P. 728-761.
13. *Kováčik O., Rákosník J.* On spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{1,p(x)}$ // Czechosl. Math. J. – Vol. 41, №4 (1991). – P. 592-618.
14. *Бокало Н. М.* Энергетические оценки решений и однозначная разрешимость задачи Фурье для линейных и квазилинейных параболических уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1994. – Т. 30. – №8. – С. 1325-1334.

NONLINEAR ELLIPTIC EQUATIONS IN QUASICYLINDRICAL DOMAIN

Olena DOMANSKA

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1

It is proved the existence and uniqueness of solutions to boundary problems for some class of nonlinear elliptic equations, containing linear elliptic equations, given in unbounded quasicylindric domains under some conditions on the behaviour of solution and growth of the initial data at infinity.

Key words: nonlinear elliptic equations, weak solution, general Lebesgue-Sobolev spaces, quasicylindric domain.

Стаття надійшла до редколегії 31.08.2007

Прийнята до друку 24.10.2007

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2007. Вип.67. С.119-129 *Ser. Mech.-Math. 2007. Vol.67. P.119-129*

УДК 519.21

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА S-ЗУПИНЕНИХ ГІЛЛЯСТИХ ПРОЦЕСІВ ЗІ ЗЛІЧЕННОЮ КІЛЬКІСТЮ ТИПІВ

Ярослав ЄЛЕЙКО, Ірина КИРИЧИНСЬКА, Остап ОХРІН

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: wild@mail.lviv.ua

Початковий процес зі зліченною кількістю типів $\mu(t)$ породжує зупинений гіллястий процес $\xi(t)$. Якщо початковий процес потрапляє в деяку непорожню множину S, то процес зупиняється. Припускається, що початковий процес докритичний, нерозкладний і неперіодичний. Доведено, що ймовірність виродження збігається до періодичної з періодом 1 функції.

Ключові слова: гіллясті процеси, ймовірність виродження, асимптотична поведінка.

1. Нехай задано фазовий вимірний простір $(X, \mathcal{A})$, де $\mathcal{A}$ — σ-алгебра задана на X. На цьому просторі розглядається необривний однорідний марківський процес з перехідною ймовірністю $P(t, x, A)$, де t – час, $x \in X$, $A \in \mathcal{A}$. Розглядаючи кожну траєкторію цього процесу як еволюцію блукання частинки, $P(t, x, A)$ інтерпретується як ймовірність того, що частинка, яка почала блукання з точки $x \in X$ за час t потрапляє в множину $A \in \mathcal{A}$. Припускається, що час дискретний, тривалість життя частинки дорівнює 1, і в кінці свого життя частинка миттєво породжує деяку випадкову кількість нових частинок, початкові положення яких розподілені випадково на просторі X. Кількість і положення цих частинок залежать тільки від положення частинки-предка в момент перетворення. Далі кожна нова частинка незалежно від інших частинок еволюціонує аналогічно.

Нехай $\mu_{xt}(A)$ випадкова міра, яка для кожного $A \in \mathcal{A}$ дорівнює кількості частинок у момент часу t, типи яких потрапляють в множину A за умови, що в початковий момент була тільки одна частинка в точці $x \in X$. $\mu_t(A)$ — випадкова міра, яка дорівнює кількості частинок у момент часу t, типи яких належать множині A.

Надалі вважаємо, що простір X складається зі зліченної кількості елементів $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, тобто припускається, що множина типів частинок $\{T_1, \ldots, T_n, \ldots\}$ зліченна.

© Єлейко Ярослав, Киричинська Ірина, Охрін Остап, 2007

На підставі міри $\mu_{xt}(A)$ вводиться багатовимірна міра $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}t}(A)$

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}t}(A) = \left\{ \begin{array}{cl} \sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{n_i} \mu_{x_{ij}t}(x_m), & \text{якщо } x_m \in A \\ 0, & \text{в іншому випадку} \end{array} \right\}_{m=0}^{\infty},$$

де $\mathbf{x} = \{x_{11}, \ldots, x_{1n_1}, x_{21}, \ldots, x_{2n_2}, \ldots\}$, $x_{ij} \in X$ – j-й елемент i-го типу.

Позначимо $\mathcal{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$, і відповідно $\mathcal{N}_0^{\infty}$ нескінченно вимірний простір, елементами якого є $x_i \in \mathcal{N}_0$.

Маючи $P(t, x, A)$, введемо $\widehat{P}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$, $(\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{N}_0^{\infty})$, де $\widehat{P}$ – ймовірність того, що якщо в початковий момент є вектор $\mathbf{x}$, то за час t отримуємо вектор $\mathbf{y}$. Керуючись зробленими позначеннями, можна записати співвідношення

$$\widehat{P}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = P\{\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}t}(X) = \mathbf{y}\}.$$

Введемо $\mathcal{E}(i) = (\delta_{i1}, \ldots, \delta_{in}, \ldots)$, де δ_{ij} – символ Кронекера, $\delta_{\mathbf{xy}} = \prod_{i=1}^{\infty} \delta_{x_i y_i}$, $\mathcal{E}(i)$-частинка i-го типу. Вважаємо, що $a^b = a_1^{b_1} a_2^{b_2} \cdots a_n^{b_n} \cdots$, $a! = a_1! a_2! \cdots a_n! \cdots$, $\overline{a} = a_1 + \cdots + a_n + \cdots$, $a_i^{[b_i]} = a_i(a_i - 1) \cdots (a_i - b_i + 1)$.

Означення 1. *Функціонал*

$$F(s(\cdot)) = F(s) = \mathrm{E} \exp\left\{ \int \ln s(x) \mu(dx) \right\}$$

називатимемо твірним функціоналом випадкової міри μ, де $s(x)$ – вимірна обмежена функція.

Твірний функціонал $F(s)$ визначений завжди, коли $0 < |s(x)| \leqslant 1$ та інтеграл $\int \ln s(x)\, \mu(dx)$ існує.

Для побудованого процесу твірний функціонал є таким:

$$h(t, s(\cdot)) = \mathrm{E} \exp\left\{ \int_X \ln s(z) \boldsymbol{\mu}_t(dz) \right\}.$$

Надалі використовуватимемо тільки $s(\cdot) = const = s = (s_1, s_2, \ldots)$. Легко перевірити, що введений твірний функціонал є твірним у тому сенсі, яким він є у випадку скінченної кількості типів (тоді це не функціонал, а функція).

Введемо

$$\begin{array}{rcl} h^i(t, s) & = & h^{\mathcal{E}(i)}(t, s), \\ h^{\boldsymbol{\beta}}(t, s) & = & \left((h^{\mathcal{E}(1)}(t, s))^{\boldsymbol{\beta}_1}, (h^{\mathcal{E}(2)}(t, s))^{\boldsymbol{\beta}_2}, \ldots \right), \\ h(t, s) & = & \left(h^{\mathcal{E}(1)}(t, s), h^{\mathcal{E}(2)}(t, s), \ldots \right). \end{array}$$

Легко переконатися [3], що введений твірний функціонал задовольняє основне функціональне рівняння $(\forall\, t, \tau = 0, 1, 2, \ldots)$

$$h(t + \tau, s) = h(t, h(\tau, s)).$$

Зафіксуємо скінченну підмножину $S \subset \mathcal{N}_0^\infty$, $0 \notin S$. *Зупиненим*, або S-*зупиненим* гіллястим процесом називається процес $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{x}t}(X)$, визначений для $t = 1, 2, \ldots$ та $\mathbf{x} \in \mathcal{N}_0^\infty$ рівностями

$$\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{x}t}(X) = \begin{cases} \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}t}(X), & \text{якщо } \forall v,\ 0 \leqslant v < t,\ \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}v}(X) \notin S \\ \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}u}(X), & \text{якщо } \forall v,\ 0 \leqslant v < u,\ \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}v}(X) \notin S,\ \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}u}(X) \in S,\ u < t. \end{cases}$$

Отже, для S-зупиненого гіллястого процесу $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{x}t}(X)$, точки множини S є додатковими станами поглинання порівняно з початковим процесом $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}t}(X)$, який мав тільки одну точку поглинання 0. Тому на відміну від процесу $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}t}(X)$ в S-зупиненому гіллястому процесі $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{x}t}(X)$ окремі частинки в t-му поколінні незалежно розмножуються за ймовірнісним законом, який визначається твірною функцією $h(\cdot)$, тільки в тому випадку, коли $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{x}t}(X) \notin S$. Як тільки випадковий вектор $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{x}t}(X)$ потрапить у множину S, еволюція процесу припиняється.

Оскільки процес $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}t}(X)$ є ланцюгом Маркова, то

$$\widehat{P}(t_1 + t_2, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{\boldsymbol{\gamma} \in \mathcal{N}_0^\infty} \widehat{P}(t_1, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}) \widehat{P}(t_2, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}).$$

Крім того, розглянемо ймовірності $\widetilde{P}(t, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r})$, які визначаються так:

$$\widetilde{P}(t, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r}) = \begin{cases} \widehat{P}(1, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r}), & t = 1; \\ \sum_{\boldsymbol{\beta} \notin S} \widehat{P}(1, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \widetilde{P}(t-1, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{r}), & t \geqslant 2. \end{cases} \tag{1}$$

Легко бачити, що $\widetilde{P}(l, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r})$ – це умовна ймовірність події

$$\left\{\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\alpha} l}(X) = \mathbf{r}\right\} \bigcap \left(\bigcap_{l'=1}^{l-1} \left\{\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\alpha} l'}(X) \notin S\right\} \right).$$

Позначимо

$$q_{\mathbf{r}}^{\mathbf{n}}(t) = P\left\{\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{n}t}(X) = \mathbf{r}\right\}$$

– ймовірність виродження в стан $\mathbf{r} \in S$ до моменту часу t S-зупиненого гіллястого процесу $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{x}t}(X)$, що починається зі стану $\mathbf{n} \in \mathcal{N}_0^\infty$.

2. Основні факти.

Теорема 1. *Для довільних* $\mathbf{n} \notin S,\ \mathbf{n} \neq 0,\ \mathbf{r} \in S,\ t \geqslant 1$ *справджується рівність*

$$q_{\mathbf{r}}^{\mathbf{n}}(t) = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in S} \sum_{l=1}^{t} c_{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{r}}(t, l) \widehat{P}(l, \mathbf{n}, \boldsymbol{\alpha}), \tag{2}$$

де коефіцієнти $c_{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{r}}(t, l)$ *знаходять із співвідношень*

$$c_{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{r}}(t+1, l+1) = c_{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{r}}(t, l), \tag{3}$$

$$c_{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{r}}(t+1, 1) = \delta_{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{r}} - \sum_{l=1}^{t-1} \widetilde{P}(l, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r}), \tag{4}$$

$$c_{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{r}}(1, 1) = \delta_{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{r}}. \tag{5}$$

Доведення. Введемо

$$\tau = \min\{t : \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{n}t}(X) \in S\}$$

момент першого попадання в S. Тоді при $t \geqslant l$

$$P\{\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{n}t}(X) = \mathbf{r},\ \tau = l\} = P\{\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{n}l}(X) = \mathbf{r}\} = \widetilde{P}(l, \mathbf{n}, \mathbf{r}).$$

Застосовуючи до $\widetilde{P}(l, \mathbf{n}, \mathbf{r}),\ l \geqslant 2$, формулу (1), одержуємо

$$\widetilde{P}(l, \mathbf{n}, \mathbf{r}) = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \notin S} \widehat{P}(1, \mathbf{n}, \boldsymbol{\alpha}) \widetilde{P}(l-1, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r}) =$$
$$= \sum_{\boldsymbol{\alpha} \notin S} \widehat{P}(2, \mathbf{n}, \boldsymbol{\alpha}) \widetilde{P}(l-2, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r}) - \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in S} \widehat{P}(1, \mathbf{n}, \boldsymbol{\alpha}) \widetilde{P}(l-1, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r}).$$

Аналогічно перетворюється перша сума в правій частині цієї формули

$$\sum_{\boldsymbol{\alpha} \notin S} \widehat{P}(2, \mathbf{n}, \boldsymbol{\alpha}) \widetilde{P}(l-2, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r}) = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \notin S} \widehat{P}(3, \mathbf{n}, \boldsymbol{\alpha}) \widetilde{P}(l-3, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r}) - \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in S} \widehat{P}(2, \mathbf{n}, \boldsymbol{\alpha}) \widetilde{P}(l-2, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r}).$$

Роблячи такі самі перетворення в сумах $\sum_{\boldsymbol{\alpha} \notin S} \widehat{P}(i, \mathbf{n}, \boldsymbol{\alpha}) \widetilde{P}(l-i, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r})$, отримуємо

$$\widetilde{P}(l, \mathbf{n}, \mathbf{r}) \quad = \quad \widehat{P}(l, \mathbf{n}, \mathbf{r}) - \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in S} \sum_{i=1}^{l-1} \widehat{P}(l-i, \mathbf{n}, \boldsymbol{\alpha}) \widetilde{P}(i, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r}), \tag{6}$$

$$l = 2, \ldots, t,\ \widetilde{P}(l, \mathbf{n}, \mathbf{r}) = \widehat{P}(1, \mathbf{n}, \mathbf{r}). \tag{7}$$

Оскільки $q_{\mathbf{r}}^{\mathbf{n}}(t) = \sum_{l=1}^{t} \widetilde{P}(l, \mathbf{n}, \mathbf{r})$, то з формул (6), (7) випливають відношення (3), (4), (5). Теорема доведена.

Далі розглядатимемо процес аналогічно як в [1]. Нехай

$$A_1(x, D) = \mathrm{E}\{\xi_{x1}(D)\}$$

перший факторіальний момент, де $\xi_{x1}(D)$ – така випадкова міра, яка для кожного $D \in \mathcal{A}$ дорівнює кількості частинок у момент часу 1, типи яких є в множині D, якщо в початковий момент часу була тільки одна частинка типу $x \in X$, за умови S-зупиненого процесу, тобто $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{x}1}(D) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{x_i 1}(D)$. Оскільки E лінійне, то $A_1(\mathbf{x}, D) = \mathrm{E}\{\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{x}1}(D)\} = \sum_{i=1}^{\infty} A_1(x_i, D)$. Варто зазначити, що D може бути вектором і множиною.

Означення 2. *Нехай* $A_1(x, D) = A(x, D)$ *та*

$$A_{n+1}(x, D) = \int_X A_n(y, D)\, dA(x, y) = \int_X A(y, D)\, dA_n(x, y).$$

Вважається, що $A_0(x, D) = 1$*, якщо* $x \in D$*, і* $A_0(x, D) = 0$ *в протилежному випадку.*

В [4] доведено, що ітерації оператора A збігаються з першими моментами ξ, якщо визначити $A(t)$ – матрицю лінійного оператора, де її елементи $A_{ij}(t) = A_t(x_i, x_j)$, то буде виконуватись $A(t) = A^t$, де $A = A(1)$.

Нехай
$$B_t(x, D_1, D_2) = \mathrm{E}\{\xi_{xt}(D_1) \cdot \xi_{xt}(D_2) - \xi_{xt}(D_1 \cap D_2)\}$$
другий факторіальний момент.

За Севастьяновим [3] всі типи частинок розбиваються на класи.

Означення 3. *Нерозкладний гіллястий процес з дискретним часом називається періодичним з періодом d, якщо найбільший дільник для всіх тих t, для яких $\langle A_t(x_i, x_i)\rangle > 0$, дорівнює d. Якщо $d = 1$, то процес називається неперіодичним.*

Означення 4. *Гіллястий процес, в якому всі типи утворюють один клас еквівалентних типів, називається нерозкладним. Всі інші процеси розкладні. Гіллястий процес – цілком розкладний, якщо множину типів можна розбити на дві непорожні замкнені підмножини.*

Означення 5. *Нерозкладний гіллястий процес з дискретним часом називається* докритичним, *якщо корінь Перрона δ матриці A менший, ніж одиниця,* надкритичним, *якщо $\delta > 1$ і* критичним, *якщо $\delta = 1$ і $f(x_i)B^i_{jk}\nu(x_j)\nu(x_k) > 0$, де B^i_{jk} – матриця оператора B, а f і ν відповідно правий і лівий власні вектори, що відповідають кореню перрона δ.*

Умова 1. *Ядро $\mathrm{E}\xi_{\mathbf{x}\mathbf{t}}(S)$ нерозкладне, неперіодичне і докритичне.*

Згідно з умовою 1 оператор A, що визначається ядром $\mathrm{E}\{\xi_{xt}(D)\}$ в просторі вимірних функцій і в просторі мір має власну функцію $f(\cdot)$ й інварінтну міру $\nu(\cdot)$, такі, що
$$\begin{aligned}\int_X f(y)A_t(x, dy) \quad &= \quad f(x) \; = \; \sum_{i=1}^{\infty} f(y_i)A_t(x, y_i),\\ \int_X A_t(x, Y)\nu(dx) \quad &= \quad \nu(Y) \; = \; \sum_{i=1}^{\infty} A_t(x_i, Y)\nu(x_i).\end{aligned}$$

Далі вважатимемо, що $0 < x_1 < f(x) < x_2 < \infty$, $\nu(X) < \infty$ та
$$\int_X f(y)\nu(dy) = 1 = \sum_{i=1}^{\infty} f(y_i)\nu(y_i). \tag{8}$$

Оператор, породжений визначеним ядром у просторі обмежених функцій має спектральний радіус менший одиниці.

Умова 2. $\forall i, j = 1, 2, \ldots$ $\mathrm{E}\{\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{E}(j)1}(x_i)\log \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{E}(j)1}(x_i)\}$ *– скінченні.*

Умова 3. *Існує розклад $A_t(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_k f(x_k)\delta^t_k\nu(y_k)$.*

Оскільки в нерозкладних, неперіодичних, докритичних процесах з дискретним часом всі власні значення за модулем менші одиниці, то на підставі умови 3 можна сказати, що при $t \to \infty$
$$A_t(x_i, y_j) = f(x_i)\delta^t\nu(y_j) + o(\delta^t_1),$$

де δ – найбільше власне значення. Отже,

$$\lim_{t\to\infty} A_t(x_i,y_j)\delta^{-t} = f(x_i)\nu(y_j). \tag{9}$$

Введемо позначення

$$\begin{aligned} R^i(t,s) &= 1-h^i(t,s),\\ R(t,s) &= (R^1(t,s),\dots,R^n(t,s),\dots),\\ R(t,0) &= Q(t) = (Q^1(t),\dots,Q^n(t),\dots) = \lim_{s\to 0} R(t,s). \end{aligned}$$

Так як і у випадку з одним числом типів, легко доводяться нерівності [3]

$$0 \leqslant R^i(t,s) \leqslant Q^i(t) \quad \text{при} \quad 0<|s|\leqslant 1, \tag{10}$$

$$|R^i(t,s)| \leqslant 2Q^i(t) \quad \text{при} \quad 0<|s|\leqslant 1. \tag{11}$$

З нерівності (11) випливає, що в гіллястих процесах, які вироджуються $R^i(t,s)\to 0$ рівномірно по $0<|s|\leqslant 1$. Накладемо такі умови на процес.

Умова 4. *$A^t>0$ при деяких $t>0$ в сенсі $\forall i,j\ a_{ij}>0$ та $h^i(t,s)\neq A_{ij}(t)$.*

Тут і надалі запис $A>0$, де $A=\{a_{ij}\}$, означає, що $\forall i,j\ a_{ij}>0$, а запис $A>B$, де $A=\{a_{ij}\}, B=\{b_{ij}\}$ – матриці, означає, що $\forall i,j\ a_{ij}>b_{ij}$.

Позначимо $h(s)=h(1,s)$.

Умова 5. *За введених умов для цього процесу виконується*

$$1-h(s) = [A-E(s)](1-s), \tag{12}$$

де матриця $E(s)$ при $0<|s|\leqslant|s'|\leqslant 1$ задовольняє умови $0<E(s')\leqslant E(s)\leqslant A$ і $\lim_{s\to 1}E(s)=0$.

Теорема 2. *За умов 3-5*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{R^i(t,s)}{f(x_k)R^k(t,s)} = \nu(x_i)$$

рівномірно за всіма $s\neq 1$ і $0<|s|\leqslant 1$.

Цю теорему доводимо аналогічно до теореми 1 на стор. 192 у [3], замінюючи правий і лівий власні вектори власною функцією та інваріантною мірою відповідно. Матриці є з класу матриць нескінченно вимірного лінійного оператора.

Теорема 3. *За умов 1-5 $\forall i,j=1,2,\dots$ та при $l\to\infty$*

$$1-\widehat{P}(l,\mathcal{E}(j),0) = K(S_j)\delta^l(1+o(1)),\ \text{де } K(S_j)>0; \tag{13}$$

а) існує границя умовних ймовірностей

$$\lim_{t\to\infty} P\{\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{n}t}(X)=\mathbf{k}|\mathbf{n}\neq 0\} = p^*_{\mathbf{k}}, \tag{14}$$

а твірна функція $h^*(s) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{N}_0^\infty} p^*_{\mathbf{k}} s^{\mathbf{k}}$ *не залежить від* $\mathbf{n}$ *і задовольняє співвідношення*

$$1 - h^*(h(\cdot)) = \delta(1 - h^*(s)), \tag{15}$$

$$h^*(0,\ldots,0,\ldots) = 0 \;, h^*(1,\ldots,1,\ldots) = 1;$$

б) розподіл $p^*_{\mathbf{k}}$ *має додатне математичне сподівання*

$$h^*_j(1) = \lim_{s\to 1} h^*_j(s) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{N}_0^\infty} k_j p^*_{\mathbf{k}},$$

де $h^*_j(s) = \frac{\partial h^*(s)}{\partial s_j}$.

Доводиться аналогічно до теореми 3 на стор. 198 у [3], з використанням теореми 2 для зображення границі твірної функції для умовного розподілу.

Накладемо ще одну умову.

Умова 6. *Нехай* $h_{ij}(s) = \frac{\partial h_i(s)}{\partial s_j}$, *тоді для будь-якого* j, $1 \leqslant j < \infty$ *існує таке* i, $1 \leqslant i < \infty$, *що* $h_{ij}(0)$ *додатні.*

На підставі рівності

$$h_{ij}(0) = \widehat{P}(0, \mathcal{E}(i), \mathcal{E}(j)) = P\{\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{E}(i)1}(X) = \mathcal{E}(j)\}$$

це означає, що відповідні ймовірності $\widehat{P}(0, \mathcal{E}(i), \mathcal{E}(j))$ додатні.
Далі нам буде потрібна ще одна лема.

Лема 1. *За умов 1-6 границі умовних ймовірностей*

$$\lim_{t\to\infty} P\{\mu_{\mathbf{n}t}(X) = \mathcal{E}(i) | n \neq 0\} = p^*_{\mathcal{E}(i)} > 0,$$

при всіх $i = 1, 2, \ldots$

Доведення. Твірна функція $h^*(s) = \sum_k p^*_k s^k$ в теоремі 3 задовольняє рівняння (15). Якщо в цьому рівнянні замінити s на $h(s)$, а потім повторити цю заміну t разів, отримаємо рівність

$$1 - h^*(h(t,s)) = \delta^t(1 - h^*(s)), \tag{16}$$

де $h(t,s)$ — t-та ітерація функції згідно з основним диференціальним рівнянням. Диференціюючи рівність (16) по s_j в точці $s = 0$, отримаємо

$$\sum_{i=1}^{\infty} h^*_i(h(t,0)) h_{ij}(t,0) = \delta^t h^*_j(0) = \delta^t p^*_{e(j)}. \tag{17}$$

При $t \to \infty$ всі координати $h(t,0)$ прямують до 1, тому на підставі теореми 3 знайдуться такі T і C_1, що при $t > T$ всі $h^*_i(h(t,0)) \geqslant C_1 > 0$. З умови 6 випливає, що для $\forall\ 1 \leqslant j \leqslant \infty$ можна знайти таке i, що $h_{ij}(t,0) > 0$, оскільки для будь-яких $i_1, i_2, \ldots, i_{t+1}$

$$h_{i_1 i_{t+1}}(t,0) \geqslant \prod_{l=1}^{t} h_{i_1} h_{i_{l+1}}(0).$$

Тому з (17) випливає, що для $\forall 1 \leqslant j \leqslant \infty$

$$\delta^t p^*_{e(j)} \geqslant C_1 \sum_{i=1}^{t} h_{ij}(t,0) > 0,$$

що і треба було довести.

Теорема 4. *При виконанні умови 1 граничні ймовірності виродження* $q^{\mathbf{n}}_{\mathbf{r}} = \lim\limits_{t\to\infty} q^{\mathbf{n}}_{\mathbf{r}}(t)$, $\forall \mathbf{n} \notin S$, $\mathbf{r} \in S$ *можна подати у вигляді ряду*

$$q^{\mathbf{n}}_{\mathbf{r}} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in S} c_{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{r}} \widehat{P}(l,n,\boldsymbol{\alpha}), \tag{18}$$

де $c_{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{r}} = \lim\limits_{t\to\infty} c_{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{r}}(t,l) = \delta_{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{r}} - \sum_{u=1}^{\infty} \widetilde{P}(u,\boldsymbol{\alpha}\mathbf{r})$.

Доведення. Ймовірності $q^{\mathbf{n}}_{\mathbf{r}}(t)$ зростають з ростом t і обмежуються зверху 1. Тому існують границі $q^{\mathbf{r}}_{\mathbf{n}} = \lim\limits_{t\to\infty} q^{\mathbf{r}}_{\mathbf{n}}(t)$.

У формулі (2) зліва і справа можна перейти до границі при $t \to \infty$, оскільки за будь-яких $\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r} \in S$ виконується нерівність $\widetilde{P}(l,\boldsymbol{\alpha},\mathbf{r}) \leqslant \widehat{P}(l,\boldsymbol{\alpha},\mathbf{r})$, а з нерівності Чебишова і умови 3 випливає

$$\widehat{P}(l,\boldsymbol{\alpha},\mathbf{r}) \leqslant P\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu_{\boldsymbol{\alpha}l}(\mathcal{E}(j)) \geqslant 1\right\} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{E}\left\{\mu_{\boldsymbol{\alpha}l}(\mathcal{E}(j))\right\} =$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \sum_{j=1}^{\infty} d_{ij}\delta^l(1+o(1)),$$

тому ряди $\sum_l \widetilde{P}(l,\boldsymbol{\alpha},\mathbf{r})$ і $\sum_l \widehat{P}(l,\boldsymbol{\alpha},\mathbf{r})$ сходяться. Звідси випливає (18).

Розглянемо асимптотичну поведінку $q^{\mathbf{n}}_{\mathbf{r}}$ при $\overline{\mathbf{n}} \to \infty$.

Далі припускатимемо, що виконуються умови (1.),(2.),(3.).

Теорема 5. *Нехай виконуються умови 1, 2, 3 і* $\lim_{\overline{\mathbf{n}}\to\infty}(n_i/\overline{\mathbf{n}}) = a_i$, *де* $a = (a_1, a_2, \ldots)$. *В цьому випадку при* $\overline{\mathbf{n}} \to \infty$ *для будь-якого* $\mathbf{r} \in S$

$$q^{\mathbf{n}}_{\mathbf{r}} - H(\log_\delta \overline{\mathbf{n}}) \to 0, \tag{19}$$

де $H(x)$ *– періодична функція з періодом* 1, *яка визначається рівностями*

$$H(x) = \sum_{j=1}^{r_0} c_j H_j(x),$$

$$H_j(x) = \sum_{L=-\infty}^{\infty} \delta^{j(L+x)} e^{-(\mathbf{a},K)\delta^{L+x}},$$

де константи $c_j = c_j(\mathbf{r}, \mathbf{a}, p^*)$ *залежать від* $\mathbf{r}$, $\mathbf{a}$ *і граничного розподілу* $p^* = \{p^*_k\}$ *визначеного в лемі 1,* $(\mathbf{a},K) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i K_i$, K_i *– в (13),* $r_0 = \max\{\overline{\mathbf{r}} = r_1 + r_2 + \ldots : \mathbf{r} \in S\}$.

Доведення. Нехай $\theta(l) = (\theta_1(l), \theta_2(l), \ldots)$ випадковий вектор, компоненти якого $\theta_i(l)$ дорівнюють числу частинок i-го типу, що дали потомство в процесі до покоління l. Тому можна записати, що для будь-яких $\boldsymbol{\alpha} \in S,\ l \geqslant 1$ і $\mathbf{n} \notin S$ маємо

$$\widehat{P}(l, \mathbf{n}, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{\{\boldsymbol{\beta}:1\leqslant\overline{\boldsymbol{\beta}}\leqslant\overline{\boldsymbol{\alpha}}\}} P\big\{\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{n},l}(X) = \boldsymbol{\alpha},\ \theta(0,l) = \boldsymbol{\beta}\big\} =$$

$$= \sum_{\{\boldsymbol{\beta}:1\leqslant\overline{\boldsymbol{\beta}}\leqslant\overline{\boldsymbol{\alpha}}\}} P\big\{\theta(0,l) = \boldsymbol{\beta}\big\} P\{\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\beta}l}(X) = \boldsymbol{\alpha} \,|\, \theta(0,l) = \boldsymbol{\beta}\}. \tag{20}$$

В умовах теореми 5

$$P\big\{\theta(0,l) = \boldsymbol{\beta}\big\} = \prod_{i=1}^{\infty} \binom{n_i}{\beta_i} \big(\widehat{P}(l, \mathcal{E}(i), 0)\big)^{n_i - \beta_i} \big(1 - \widehat{P}(l, \mathcal{E}(i), 0)\big)^{\beta_i} =$$

$$= \overline{\mathbf{n}}^{\overline{\boldsymbol{\beta}}} \frac{\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\beta}}}{\boldsymbol{\beta}!} K^{\boldsymbol{\beta}} \delta^{l\overline{\boldsymbol{\beta}}} e^{-(\mathbf{a},K)\overline{\mathbf{n}}\delta^{l}(1+1+o(1))} \big(1 + o(1)\big), \tag{21}$$

і незалежна від $\mathbf{n}$ ймовірність

$$P\big\{\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\beta}l}(X) = \boldsymbol{\alpha} \,|\, \theta(0,l) = \boldsymbol{\beta}\big\} = \sum_{\{\boldsymbol{\alpha}^{(jk)}\}} \prod_{k=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{\beta_k} P\{\boldsymbol{\mu}^{jk}_{\mathcal{E}(k),l}(X) = \boldsymbol{\alpha}^{(jk)} \,|\, \mathcal{E}(k) \neq 0\} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \sum_{\{\boldsymbol{\alpha}^{(jk)}\}} \prod_{k=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{\beta_k} p^*_{\boldsymbol{\alpha}^{(jk)}} \text{ при } l \to \infty, \tag{22}$$

де $\boldsymbol{\mu}^{jk}_{\mathcal{E}(k),l}(X)$ – гіллясті процеси, які мають той самий розподіл, що $\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{E}(k),l}(X)$, а підсумовування в $\sum_{\{\boldsymbol{\alpha}^{(jk)}\}}$ проводиться за всіма такими $\boldsymbol{\alpha}^{(jk)}$, для яких $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\beta_k}\boldsymbol{\alpha}^{(jk)} = \alpha$. З (20)-(22) випливає, що загальний член ряду (18) при $\overline{\mathbf{n}} \to \infty,\ l \to \infty$ можна записати у вигляді

$$(1 + o(1)) \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in S} \sum_{\{\boldsymbol{\beta}:1\leqslant\overline{\boldsymbol{\beta}}\leqslant\overline{\boldsymbol{\alpha}}\}} g(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \sum_{\overline{\boldsymbol{\beta}}}^{r_0} \delta^{(l+\log_\delta \overline{\mathbf{n}})\overline{\boldsymbol{\beta}}} \times$$

$$\times \exp\big\{ - (\mathbf{a}, K)\delta^{l+\log_\delta \overline{\mathbf{n}}}(1 + o(1))\big\}, \tag{23}$$

де $g(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ незалежні від $\mathbf{n}$ і l величини. Неважко помітити також, що при $\overline{\mathbf{n}} \to \infty$ в формулі (18) кожний член ряду з будь-яким $l \geqslant 1$ прямує до нуля.
Виберемо $L_1 < L_2$ так, щоб суми

$$\sum_{L=L_2}^{\infty} \delta^{\overline{\boldsymbol{\beta}}L} e^{-(\mathbf{a},K)\delta^{L}} \text{ та } \sum_{L=-\infty}^{L_2} \delta^{\overline{\boldsymbol{\beta}}L} e^{-(\mathbf{a},K)\delta^{L}} \tag{24}$$

були малі. Приймемо $l_i + \log_\delta \overline{\mathbf{n}} = L_i + x_{i\overline{\mathbf{n}}},\ i = 1, 2$, де $0 \leqslant x_{i\overline{\mathbf{n}}} \leqslant 1$. З (23) та (24) випливає, що можна вибрати такі L_1, L_2 і n_0, щоб хвости суми в формулі (18) у межах від 1 до l_1 і від l_2 до нескінченності були менші $\varepsilon/2$, де $\varepsilon > 0$ довільно мале. Члени ряду (18) з $l_1 < l < l_2$ можна замінити граничними виразами (23), оскільки при $\overline{\mathbf{n}} \to \infty$ такі $l \to \infty$. Всього доданків у сумі $\sum_{l=l_1+1}^{l_2-1}$ в формулі (18) скінченне число $l_2 - l_1 - 1 = L_2 - L_1 - 1$, тому n_0 можна вибрати таким, щоб для всіх $\mathbf{n} > n_0$ помилка апроксимації також була менше $\varepsilon/2$. Звідси випливає твердження теореми, оскільки $\varepsilon > 0$ довільне.

З доведення теореми не видно, чи будуть в формулі (19) коефіцієнти c_j такі, що функція $H(x) > 0$. Для цього доведемо таку лему.

Лема 2. *При виконанні умов 1-6 існує така константа* $\Theta > 0$, *що при деякому числі* n_0 *для всіх* $\mathbf{n}$ *з* $\overline{\mathbf{n}} \geqslant n_0$ *і всіх* $\mathbf{r} \in S$

$$q_{\mathbf{r}}^{\mathbf{n}} > \Theta.$$

Доведення. Позаяк за будь-якого t $q_{\mathbf{r}}^{\mathbf{n}} = \lim_{t\to\infty} q_{\mathbf{r}}^{\mathbf{n}}(t) \geqslant q_{\mathbf{r}}^{\mathbf{n}}(t)$, то нам достатньо довести, що нерівність $q_{\mathbf{r}}^{\mathbf{n}}(t) \geqslant \Theta > 0$ виконується за будь-яких достатньо великих t для всіх $\mathbf{r} \in S$ і $\mathbf{n}$ з $\overline{\mathbf{n}} \geqslant n_0$. Скористаємося введеним випадковим вектором $\theta(0,t)$ і введемо ще один випадковий вектор $\theta_i'(t-1) = (\theta_1'(t-1), \theta_2'(t-1), \ldots)$, де $\theta_i'(t-1)$ дорівнюють числу початкових частинок i-го типу, потомство яких непорожнє в $(t-1)$-му поколінні, але порожнє в t-му поколінні. При $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots)$, $n_1 \geqslant r_0 + 1$, де $r_0 = \max_{\mathbf{r}\in S} \overline{\mathbf{r}}$, використаємо нерівність

$$q_{\mathbf{r}}^{\mathbf{n}}(t) = P\big\{\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{n}t}(X) = \mathbf{r}\big\} \geqslant P\big\{\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{n}t}(X) = \mathbf{r},\ \theta'(t-1) = (r_0+1-\overline{\mathbf{r}}),\ \theta(0,t) = \overline{\mathbf{r}}\mathcal{E}(1)\big\}. \tag{25}$$

Праву частину (25) можна записати як добуток $\mathcal{P}_1(\mathbf{n},t)\mathcal{P}_2(t)$, де $\mathcal{P}_1(\mathbf{n},t) = P\big\{\theta'(t-1) = (r_0+1-\overline{\mathbf{r}})\mathcal{E}(1),\ \theta(0,t) = \overline{\mathbf{r}}\mathcal{E}(1)\big\}$ залежить від $\mathbf{n}$ і t, а $\mathcal{P}_2(t) = P\big\{\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{n}t}(X) = \mathbf{r} \,|\, \theta'(t-1) = (r_0+1-\overline{\mathbf{r}})\mathcal{E}(1),\ \theta(0,t) = \overline{\mathbf{r}}\mathcal{E}(1)\big\}$ залежить тільки від t. З означення випадкових векторів $\theta(0,t)$ та $\theta'(t-1)$ випливає, що

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_1(\mathbf{n},t) &= \frac{n_1!}{(n_1-r_0-1)!(r_0+1-\overline{\mathbf{r}})!\overline{\mathbf{r}}}\big[\widehat{P}(t-1,\mathcal{E}(1),0)\big]^{n_1-r_0-1} \times \\
&\times \big(1-\widehat{P}(t-1,\mathcal{E}(1),0)\big)^{r_0+1-\overline{\mathbf{r}}}\big(1-\widehat{P}(t-1,\mathcal{E}(1),0)\big)^{\overline{\mathbf{r}}} \times \\
&\times \prod_{i=1}^{\infty}[\widehat{P}(1,\mathcal{E}(1),0)^{n_i}]P\big\{\boldsymbol{\mu}'_{r_0+1-\overline{\mathbf{r}}\,t}(X) = 0 \,|\, r_0+1-\overline{\mathbf{r}} \neq 0\big\}; \qquad (26)\\
\mathcal{P}_2(t) &= \prod_{k=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{r_k} P\big\{\boldsymbol{\mu}^{(jk)}_{\mathcal{E}(1)t}(X) = \mathcal{E}(k) \,|\, \mathcal{E}(k) \neq 0\big\}. \qquad (27)
\end{aligned}$$

Тут $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\mu}'$, $\boldsymbol{\mu}^{(jk)}$ – гіллясті процеси, еволюція яких визначається твірною функцією $h(s) = (h_1(s), h_2(s), \ldots)$. Вибираючи далі $t \to \infty$ так, щоб $\overline{\mathbf{n}}\delta^t \to V > 0$ при $\overline{\mathbf{n}} \to \infty$, отримуємо в правій частині рівності (26) додатну константу, помножену на умовну ймовірність, що стоїть у кінці формули. З допомогою граничного відношення $P\big\{\boldsymbol{\mu}_t'(X) = \mathbf{k} \,|\, \mathbf{k} \neq 0\big\} \to p_{\mathbf{k}}^*$, теореми 3 і рівності

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{N}_0^\infty} p_{\mathbf{k}}^*\big(\widehat{P}^{k_1}(1,\mathcal{E}(1),0)\widehat{P}^{k_2}(1,\mathcal{E}(2),0)\cdots\big) = h^*(h(0))$$

отримуємо, що ця умовна ймовірність у границі дорівнює $h^*(h(0))$. Вираз (27) не залежить від $\mathbf{n}$ і при $t \to \infty$ дорівнює добутку $\prod_{i=1}^{\infty}[p^*_{\mathcal{E}(i)}]^{r_i}$. Згідно з лемою 1 цей добуток додатний, що й завершує доведення.

---

1. *Єлейко Я.І.* Асимптотичний аналіз і перехідні явища в матричнозначних випадкових еволюціях, гіллясті процеси та процеси марківського втручання випадку: Дис. ... д-ра фіз.-мат. наук. – Львів, 1994.
2. *Севастьянов Б.А.* Асимптотическое поведение вероятностей вырождения остановленных ветвящихся процессов // Теория вер. и ее прил. – Т. 43, 1998. – С. 315-322.
3. *Севастьянов Б.А.* Ветвящиеся процессы. – М., 1971.
4. *Харрис Т.* Теория ветвящихся процессов. – М., 1966.

ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF THE S-STOPPED BRANCHING PROCESSES WITH COUNTABLE STATE SPACE

Yaroslav YELEJKO, Iryna KYRYCHYNSKA, Ostap OKHRIN

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: wild@mail.lviv.ua

The origin process with counted quantity of types $\mu(t)$ generates branching process $\xi(t)$, if in case of getting the initial processes into some nonempty set S process stops. We suppose that the first processes precritical, undecomposable, nonperiodical. It's proved that probability of degeneration convergss to periodical function with period 1.

Key words: branching processes, probability of degeneration, asymptotic behavior.

Стаття надійшла до редколегії 19.10.2006

Прийнята до друку 24.10.2007

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2007. Вип.67. С.130-136 *Ser. Mech.-Math. 2007. Vol.67. P.130-136*

УДК 519.212

СТАЦІОНАРНИЙ РОЗПОДІЛ ІМОВІРНОСТЕЙ СТАНІВ ДЛЯ ОДНОКАНАЛЬНОЇ ЗАМКНЕНОЇ СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

Юрій ЖЕРНОВИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1

Для одноканальної замкненої системи масового обслуговування з показниковим розподілом часу безвідмовної роботи та довільно розподіленим часом обслуговування визначено ймовірності станів граничного стаціонарного процесу.

Ключові слова: одноканальна замкнена система масового обслуговування, граничний стаціонарний процес, розподіл імовірностей.

1. У випадку, коли час обслуговування – довільно розподілена випадкова величина, а потік замовлень найпростіший, існування граничного стаціонарного процесу для одноканальної відкритої системи масового обслуговування (СМО) з необмеженою чергою доведено методом вкладених ланцюгів Маркова [1, с. 98]. Дослідження ергодичних властивостей одноканальної замкненої СМО ускладнюється тим, що для неї потік замовлень на вході системи ніколи не може бути найпростішим, оскільки інтенсивність потоку замовлень на вході системи змінюється разом з надходженням кожного нового замовлення і навіть дорівнює нулеві після того, як всі наявні в системі технічні пристрої (ТП) прибули на обслуговування.

Однак випадковий процес, який відбувається у замкненій СМО з найпростішими потоками, є найпростішим процесом загибелі-розмноження, тому володіє ергодичною властивістю. Для такої СМО відомі формули для стаціонарних імовірностей станів [2, с. 282].

Стаціонарні ймовірності станів визначено для одноканальної замкненої СМО з показниковим розподілом часу безвідмовної роботи технічних пристроїв і довільно розподіленим часом обслуговування.

2. Загальні формули для стаціонарних імовірностей. Розглянемо одноканальну замкнену СМО, в якій кожен з m ($m \geq 2$) технічних пристроїв може в деякі випадкові моменти часу потребувати обслуговування. Нехай потік відмов кожного ТП – найпростіший з інтенсивністю λ. Це означає, що час T_λ безвідмовної роботи ТП розподілений згідно з показниковим законом. Математичне сподівання

© Жерновий Юрій, 2007

випадкової величини T_λ позначимо через m_λ: $M(T_\lambda) = m_\lambda = 1/\lambda$. ТП, що потребує обслуговування і застає канал обслуговування вільним, відразу приймають на обслуговування. У випадку зайнятості каналу ТП чекає на обслуговування в черзі.

Тривалості обслуговування замовлень – незалежні однаково розподілені випадкові величини T_μ з довільною функцією розподілу $F_\mu(t)$. Тоді інтенсивність потоку обслуговувань $\mu = 1/m_\mu$, де $m_\mu = M(T_\mu) = \int\limits_0^\infty t\,dF_\mu(t)$.

Введемо нумерацію станів СМО відповідно до кількості ТП, що потребують обслуговування: s_i $(i = \overline{0, m})$. Нехай $p_i(t)$ – імовірність перебування системи в стані s_i в момент часу t.

Припустимо, що в початковий момент часу система перебуває у стані s_0, і позначимо через t_k $(k = 1{,}2{,}\ldots)$ – момент завершення обслуговування k-го замовлення, а через N_k кількість ТП, які потребують обслуговування в момент, коли k-те обслужене замовлення, завершивши обслуговування, покидає канал обслуговування. Тоді подія $\{N_k = j\}$ означає, що в момент $t_k + 0$ система переходить до стану s_j.

За формулою повної ймовірності

$$\begin{gathered} P\{\,N_{k+1} = j\,\} = \sum_{s=0}^{m-1} P\{\,N_{k+1} = j \,|\, N_k = s\,\}P\{\,N_k = s\,\}, \\ j = \overline{0,\, m-1}\,; \qquad k = 1,\, 2, \ldots . \end{gathered} \tag{1}$$

Перехідні ймовірності $p_{js}^{(k)} = p_{js} = P\{\,N_{k+1} = j \,|\, N_k = s\,\}$ не залежать від номера обслуженого замовлення k, а визначають з врахуванням кількості замовлень, які надходять на обслуговування за час обслуговування одного замовлення T_μ

$$p_{js} = \begin{cases} \Pi_{j,\,m-1}, & s = 0;\ 1; \\ \Pi_{j-s+1,\,m-s}, & s = \overline{2,\, j+1}, \ \ j = \overline{0,\, m-2}, \quad s = \overline{2,\, m-1}, \ \ j = m-1. \\ 0, & s > j+1. \end{cases} \tag{2}$$

Тут Π_{kl} – імовірність того, що за час обслуговування T_μ з ладу вийдуть k технічних пристроїв, за умови, що потенційними джерелами замовлень у момент початку обслуговування були l ТП.

Враховуючи, що наявність у системі i джерел замовлень означає, що залишок часу до моменту надходження чергового замовлення розподілений згідно з показниковим законом з параметром $i\lambda$ (позначимо цю випадкову величину через $T_{i\lambda}$ $(i = \overline{1,\, m-1})$, для ймовірностей Π_{kl} отримаємо співвідношення

$$\begin{gathered} \Pi_{0l} = P\{\,T_\mu < T_{l\lambda}\,\}, \qquad l = \overline{1,\, m-2}; \\ \Pi_{ll} = P\{\,T_{l\lambda} + T_{(l-1)\lambda} + \cdots + T_\lambda < T_\mu\,\}, \qquad l = \overline{1,\, m-1}; \\ \Pi_{kl} = P\{\,T_{l\lambda} + T_{(l-1)\lambda} + \cdots + T_{(l-k+1)\lambda} < T_\mu < \\ < T_{l\lambda} + T_{(l-1)\lambda} + \cdots + T_{(l-k)\lambda}\,\}, \qquad l = \overline{2,\, m-1}, \quad k < l. \end{gathered} \tag{3}$$

Переконаємося в тому, що послідовність $\{N_k\}$ утворює ланцюг Маркова.

Якщо Δ_k – кількість замовлень, які надійшли в систему за час T_μ обслуговування k-го замовлення, то

$$N_k = \begin{cases} N_{k-1} + \Delta_k - 1, & N_{k-1} > 0; \\ \Delta_k, & N_{k-1} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Оскільки залишок часу від моменту завершення обслуговування k-го замовлення до моменту надходження чергового замовлення розподілений за показниковим законом (з параметром, кратним λ) і, отже, не залежить від поведінки системи до моменту t_k, то випадкова величина Δ_k не залежить від минулого, тому рівність (4) доводить марковську властивість послідовності $\{N_k\}$. Рівності (2) доводять однорідність ланцюга Маркова $\{N_k\}$.

Опираючись на ергодичну теорему для однорідного незвідного ланцюга Маркова зі скінченною множиною станів ([2, с. 61] або [3, с. 67]), можемо стверджувати, що існують границі

$$\pi_j = \lim_{k\to\infty} P\{\, N_k = j \,\} \qquad (j = \overline{0,\, m-1}).$$

Переходячи до границі в рівностях (1), з врахуванням співвідношень (2) одержимо систему алгебричних рівнянь для визначення ймовірностей π_j

$$\pi_j = \sum_{s=0}^{j+1} p_{js}\pi_s \quad (j = \overline{0,\, m-2}); \qquad \sum_{s=0}^{m-1} \pi_s = 1. \tag{5}$$

Для з'ясування зв'язку між імовірностями π_j $(j = \overline{0,\, m-1})$ і стаціонарним розподілом імовірностей станів системи $p_j = \lim\limits_{t\to\infty} p_j(t)$ $(j = \overline{0,\, m})$ проаналізуємо роботу системи на дуже великому проміжку часу T.

Проміжки часу, протягом яких система перебуває в стані s_0, розподілені за показниковим законом з параметром $m\lambda$ $\big(M(T_{m\lambda}) = m_{m\lambda} = 1/(m\lambda)\big)$. Якщо $N(T)$ – кількість замовлень, обслужених у системі за час T, то

$$T \approx (m_{m\lambda}\pi_0 + m_\mu)N(T). \tag{6}$$

Рівність (6) виконується тим точніше, чим триваліший проміжок часу T розглядають. Враховуючи, що $T_0(T) \approx m_{m\lambda}\pi_0 N(T)$ – сумарний (за час T) час перебування системи у стані s_0, стаціонарну ймовірність перебування системи у цьому стані визначимо за допомогою граничного переходу

$$p_0 = \lim_{T\to\infty} \frac{T_0(T)}{T} = \frac{m_{m\lambda}\pi_0}{m_\mu + m_{m\lambda}\pi_0}.$$

У момент, коли обслужене замовлення покидає канал обслуговування, стан s_j настає з імовірністю π_j і триває протягом випадкового проміжку часу $T_{(m-j)\lambda}$. Тому $T_j(T) \approx m_{(m-j)\lambda}\pi_j N(T)$ – сумарний (за час T) час перебування системи у стані s_j, і

$$p_j = \lim_{T\to\infty} \frac{T_j(T)}{T} = \frac{m_{(m-j)\lambda}\pi_j}{m_\mu + m_{m\lambda}\pi_0} \qquad (j = \overline{0,\, m-1}). \tag{7}$$

Імовірність p_m визначимо за допомогою умови нормування $\sum\limits_{j=0}^{m} p_j = 1$

$$p_m = \frac{m_\mu - \sum\limits_{j=1}^{m-1} m_{(m-j)\lambda}\pi_j}{m_\mu + m_{m\lambda}\pi_0}. \tag{8}$$

Використовуючи знайдені ймовірності p_j $(j = \overline{0,\, m})$, можемо обчислити показники ефективності одноканальної замкненої СМО, зокрема середню кількість замовлень, які перебувають у черзі

$$\begin{gathered}\overline{r} = \sum_{j=2}^{m}(j-1)p_j = \\ = \frac{1}{m_\mu + m_{m\lambda}\pi_0}\left(\sum_{j=2}^{m-1}(j-1)m_{(m-j)\lambda}\pi_j + (m-1)\big(m_\mu - \sum_{j=1}^{m-1} m_{(m-j)\lambda}\pi_j\big)\right),\end{gathered} \tag{9}$$

і середній час перебування ТП у черзі

$$\begin{aligned}\overline{t}_r = \lim_{T\to\infty}\frac{\sum\limits_{j=2}^{m}(j-1)T_j(T)}{N(T)} &= \lim_{T\to\infty}\frac{T}{N(T)}\sum_{j=2}^{m}\frac{(j-1)T_j(T)}{T} = \\ = \overline{r}\lim_{T\to\infty}\frac{T}{N(T)} &= \overline{r}\,(m_\mu + m_{m\lambda}\pi_0) = \\ = \sum_{j=2}^{m-1}(j-1)m_{(m-j)\lambda}\pi_j &+ (m-1)\big(m_\mu - \sum_{j=1}^{m-1} m_{(m-j)\lambda}\pi_j\big).\end{aligned} \tag{10}$$

Для СМО з двома технічними пристроями $(m = 2)$ система (5) скаладається лише з двох рівнянь

$$\pi_0 = \Pi_{01}(\pi_0 + \pi_1), \qquad \pi_0 + \pi_1 = 1,$$

де згідно з (3) $\Pi_{01} = P\{\,T_\mu < T_\lambda\,\}$. Отже, у цьому випадку

$$\pi_0 = \Pi_{01} = P\{\,T_\mu < T_\lambda\,\} = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\,dF_\mu(t), \qquad \pi_1 = 1 - \pi_0. \tag{11}$$

Для випадків $m = 3$ і $m = 4$ розв'язки системи (5) зручно записати, ввівши нові позначення для ймовірностей Π_{kl}

$$\pi_0 = \frac{\beta_1\beta_2}{\beta_1 + \beta_{21}}, \quad \pi_1 = \frac{\beta_1(1-\beta_2)}{\beta_1 + \beta_{21}}, \quad \pi_2 = \frac{\beta_{21}}{\beta_1 + \beta_{21}}; \qquad (m = 3) \tag{12}$$

$$\begin{gathered}\pi_0 = (1-\beta_1)\beta_2\beta_3\Delta, \qquad \pi_1 = (1-\beta_1)\beta_2(1-\beta_3)\Delta, \\ \pi_2 = \beta_{32}(1-\beta_1)\Delta, \qquad \pi_3 = (\beta_2\beta_{31} + \beta_{21}\beta_{32})\Delta, \\ \frac{1}{\Delta} = \beta_2(1-\beta_1+\beta_{31}) + \beta_{32}(1-\beta_1+\beta_{21}), \qquad (m = 4),\end{gathered} \tag{13}$$

де

$$\beta_i = P\{\, T_\mu < T_{i\lambda} \,\} \quad (\, i = \overline{1,\, 3}\,)\,; \quad \beta_{21} = P\{\, T_{2\lambda} + T_\lambda < T_\mu \,\};$$
$$\beta_{31} = P\{\, T_{3\lambda} + T_{2\lambda} + T_\lambda < T_\mu \,\}; \quad \beta_{32} = P\{\, T_{3\lambda} + T_{2\lambda} < T_\mu \,\}.$$

3. Результати обчислень для типових законів розподілу часу обслуговування. Використовуючи знайдені ймовірності π_j $(j = \overline{0,\, m-1})$, можна визначити стаціонарний розподіл імовірностей станів системи p_j $(j = \overline{0,\, m})$, середні значення $\overline{r}$, $\overline{t}_r$ та інші показники ефективності одноканальної замкненої СМО для будь-якого заданого розподілу часу обслуговування T_μ. Зокрема, у випадку показникового розподілу часу обслуговування, коли $m_\mu = 1/\mu$, з (7), (8) отримаємо формули [2, с. 282 – 283] для одноканальної замкненої СМО з найпростішими потоками.

Наведемо результати, отримані за формулами (7)-(13) для деяких типових розподілів випадкової величини T_μ.

Приклад 1. Час обслуговування детермінований $T_\mu = T = const$, $m_\mu = T$.

Випадок 1. $m = 2$.

$$p_0 = \alpha_0 e^{-\lambda T}, \quad p_1 = 2\alpha_0(1 - e^{-\lambda T}), \quad p_2 = 2\alpha_0(\lambda T + e^{-\lambda T} - 1),$$
$$\frac{1}{\alpha_0} = 2\lambda T + e^{-\lambda T}; \qquad \overline{t}_r = (\lambda T + e^{-\lambda T} - 1)/\lambda.$$

Випадок 2. $m = 3$.

$$p_0 = \beta_0 e^{-3\lambda T}, \quad p_1 = 1,5\beta_0 e^{-\lambda T}(1 - e^{-2\lambda T}), \quad p_2 = 3\beta_0(1 - 2e^{-\lambda T} + e^{-2\lambda T});$$
$$p_3 = 1,5\beta_0\big(2\lambda T(1 - e^{-\lambda T} + e^{-2\lambda T}) - 2(1 + e^{-2\lambda T}) + 3e^{-\lambda T} + e^{-3\lambda T}\big);$$
$$\frac{1}{\beta_0} = e^{-3\lambda T} + 3\lambda T(1 - e^{-\lambda T} + e^{-2\lambda T});$$
$$\overline{t}_r = 2T + \frac{e^{-3\lambda T}}{\lambda(1 - e^{-\lambda T} + e^{-2\lambda T})} - \frac{1}{\lambda}\,.$$

Випадок 3. $m = 4$.

$$\frac{1}{p_0} = 1 + 4\lambda T e^{\lambda T}(1 - 2e^{\lambda T} + 3e^{2\lambda T} - e^{3\lambda T} - e^{4\lambda T} + e^{5\lambda T});$$
$$p_1 = \frac{4}{3}(e^{3\lambda T} - 1)p_0; \qquad p_2 = 2e^{2\lambda T}(e^{3\lambda T} - 3e^{\lambda T} + 2)p_0;$$
$$p_3 = 4e^{\lambda T}(e^{5\lambda T} - 2e^{4\lambda T} - e^{3\lambda T} + 5e^{2\lambda T} - 4e^{\lambda T} + 1)p_0;$$
$$p_4 = \frac{p_0}{3}\big(7 + 12\lambda T e^{\lambda T}(1 - 2e^{\lambda T} + 3e^{2\lambda T} - e^{3\lambda T} - e^{4\lambda T} + e^{5\lambda T}) -$$
$$-12e^{\lambda T}(e^{5\lambda T} - e^{3\lambda T} - 4e^{\lambda T} + 1) - 38e^{3\lambda T} + 18e^{5\lambda T}\big);$$
$$\overline{r} = p_2 + 2p_3 + 3p_4; \qquad \overline{t}_r = \frac{1 - p_0 + \overline{r}}{\lambda(3 + p_0 - \overline{r})} - T.$$

Приклад 2. Час обслуговування рівномірно розподілений на проміжку (a, b), $m_\mu = (a + b)/2$.

Випадок 1. $m = 2$.

$$\begin{gathered}
p_0 = \gamma_0(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}); \qquad p_1 = 2\gamma_0\big(\lambda(b-a) + e^{-\lambda b} - e^{-\lambda a}\big);\\
p_2 = \gamma_0\big(\lambda^2(b^2-a^2) - 2\big(\lambda(b-a) + e^{-\lambda b} - e^{-\lambda a}\big)\big);\\
\frac{1}{\gamma_0} = \lambda^2(b^2-a^2) + e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b};\\
\overline{t}_r = \frac{a+b}{2} - \frac{\lambda(b-a) - e^{-\lambda a} + e^{-\lambda b}}{\lambda^2(b-a)}\,.
\end{gathered}$$

Випадок 2. $m = 3$.

$$\begin{gathered}
p_0 = 2\delta_0(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b})(e^{-2\lambda a} - e^{-2\lambda b});\\
p_1 = 3\delta_0(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b})\big(2\lambda(b-a) + e^{-2\lambda b} - e^{-2\lambda a}\big);\\
p_2 = 6\delta_0\lambda(b-a)\big(2\lambda(b-a) - 4(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}) + e^{-2\lambda a} - e^{-2\lambda b}\big);\\
p_3 = 3\delta_0\big(\lambda^2(b^2-a^2)\big(2\lambda(b-a) - 2(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}) + e^{-2\lambda a} - e^{-2\lambda b}\big) -\\
-2\lambda(b-a)\big(2\lambda(b-a) - 3(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}) + e^{-2\lambda a} - e^{-2\lambda b}\big) +\\
+(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b})(e^{-2\lambda a} - e^{-2\lambda b})\big);\\
\overline{r} = p_2 + 2p_3; \qquad \overline{t}_r = \frac{\overline{r}}{6\lambda}\big(2\pi_0 + 3\lambda(a+b)\big);\\
\pi_0 = \frac{(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b})(e^{-2\lambda a} - e^{-2\lambda b})}{\lambda(b-a)\big(2\lambda(b-a) - 2(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}) + e^{-2\lambda a} - e^{-2\lambda b}\big)}\,.
\end{gathered}$$

Приклад 3. Час обслуговування розподілений за узагальненим законом Ерланга другого порядку з параметрами μ_1, μ_2; $\quad m_\mu = (\mu_1 + \mu_2)/(\mu_1\mu_2)$.

Випадок 1. $m = 2$.

$$\begin{gathered}
p_0 = (\mu_1\mu_2)^2\eta_0; \qquad p_1 = 2\lambda\mu_1\mu_2\eta_0(\lambda + \mu_1 + \mu_2);\\
p_2 = 2\lambda\eta_0\big((\mu_1+\mu_2)(\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_2) - \mu_1\mu_2(\lambda+\mu_1+\mu_2)\big);\\
\frac{1}{\eta_0} = (\mu_1\mu_2)^2 + 2\lambda(\mu_1+\mu_2)(\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_2);\\
\overline{t}_r = \frac{\mu_1+\mu_2}{\mu_1\mu_2} - \frac{\lambda+\mu_1+\mu_2}{(\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_2)}\,.
\end{gathered}\tag{14}$$

Випадок 2. $m = 3$. Введемо позначення $\alpha_i = \lambda/\mu_i$ $(i = 1,\ 2)$. Тоді

$$\begin{gathered}
\frac{1}{p_0} = 1 + 3(\alpha_1+\alpha_2)\big((1+\alpha_1)(1+\alpha_2) +\\
+(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_1\alpha_2)(1+2\alpha_1)(1+2\alpha_2)\big);\\
p_1 = 3(\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_1\alpha_2)p_0; \quad p_2 = 6\big(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_1\alpha_2 +\\
+2\alpha_1^2\alpha_2^2 + 3\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)\big)p_0; \quad p_3 = 6\big(\alpha_1^2(\alpha_1 + 3\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2^2) +
\end{gathered}\tag{15}$$

$$+\alpha_2\big(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_1\alpha_2+2\alpha_1^2\alpha_2^2+3\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)\big)\big)p_0;$$

$$\overline{r}=p_2+2p_3; \qquad \overline{t}_r=\frac{\overline{r}\,\pi_0}{3\lambda p_0};$$

$$\frac{1}{\pi_0}=(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)+(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_1\alpha_2)(1+2\alpha_1)(1+2\alpha_2).$$

Правильність отриманих у цій праці формул для стаціонарних імовірностей p_j $(j=\overline{0,\,m})$ підтверджена результатами числових експериментів на імітаційних моделях одноканальної замкненої СМО, виконаних за допомогою комп'ютерної системи GPSS World. Формули (14) і (15) перевірені також за допомогою так званого методу фаз [4, с. 389], який дає змогу знаходити стаціонарний розподіл імовірностей у випадку, коли випадкові величини T_λ або T_μ розподілені за узагальненим законом Ерланга.

1. *Ивченко Г. И., Каштанов В. А., Коваленко И. Н.* Теория массового обслуживания. – М., 1982.
2. *Овчаров Л. А.* Прикладные задачи теории массового обслуживания. – М., 1969.
3. *Жерновий Ю. В.* Марковські моделі масового обслуговування. – Львів, 2004.
4. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Прикладные задачи теории вероятностей. – М., 1983.

STATISTICAL-EQUILIBRIUM STATE PROBABILITIES DISTRIBUTION FOR THE SINGLE-SERVER CLOSED QUEUEING SYSTEMS

Yuriy ZHERNOVYI

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1

The statistical-equilibrium state probabilities distribution for the single-server closed queueing system with the exponential distributed nonfailure operating time and arbitrary distributed service time is obtained.

Key words: single-server closed queueing system, statistical-equilibrium state, probabilities distribution.

Стаття надійшла до редколегії 18.04.2006

Прийнята до друку 24.10.2007

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2007. Вип.67. С.137-142 *Ser. Mech.-Math. 2007. Vol.67. P.137-142*

УДК 519.2

ВЛАСТИВОСТІ ЗЛІЧЕННОВИМІРНИХ МАТРИЧНИХ МІР

Тарас ЗАБОЛОЦЬКИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1

Доведено властивості зліченновимірних матричних мір, які використовують під час дослідження асимптотичного поводження розв'язку рівняння відновлення.

Ключові слова: матрична міра, перетворення Фур'є.

Нехай $G^{\varepsilon}_{ij}(dx)$, $i,j \in \mathbb{N}$, – сім'я комплекснозначних мір на $\mathbb{R}_+$ така, що $G^{\varepsilon}_{ij}(dx) = 0$ при $j > i$, $V^{\varepsilon}_{ij}(dx)$ – варіація міри $G^{\varepsilon}_{ij}(dx)$, $V_{\varepsilon}(dx) = (V^{\varepsilon}_{ij}(dx))^{\infty}_{i,j=1}$, $G_{\varepsilon}(dx) = (G^{\varepsilon}_{ij}(dx))^{\infty}_{i,j=1}$.

Приймемо $m_i = \int\limits_0^{\infty} xG_{ii}(dx)$ і нехай міри $G^{\varepsilon}_{ij}(dx)$ задовольняють такі умови: границя $G^{\varepsilon}_{ij}(dx)$ в розумінні слабкої збіжності дорівнює $G_{ij}(dx)$ при $\varepsilon \to 0$, тобто

$$G^{\varepsilon}_{ij}(dx)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}G_{ij}(dx)\,; \tag{1}$$

$$G_{ij}(dx) = 0\ (i \neq j),\ G_{ii}(dx) \geq 0,\ G_{ii}([0,\infty)) = 1; \tag{2}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}(I - V_{\varepsilon}([0,\infty))) = D = \{d_{ij}\}^{\infty}_{i,j=1},\ d_{ij} < \infty,\ i,j \in \mathbb{N}; \tag{3}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}(I - G_{\varepsilon}([0,\infty))) = C = \{c_{ij}\}^{\infty}_{i,j=1},\ c_{ij} < \infty,\ i,j \in \mathbb{N}; \tag{4}$$

$$\sup_{\varepsilon>0}\int\limits_T^{\infty} xV^{\varepsilon}_{ij}(dx)\xrightarrow[T\to\infty]{}0; \tag{5}$$

$$\inf_{i\in\mathbb{N}} m_i > 0,\ \sup_{i\in\mathbb{N}} m_i < \infty; \tag{6}$$

$$\inf_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j=1}^{\infty} d_{ij} > 0. \tag{7}$$

© Заболоцький Тарас, 2007

Зауважимо, що завдяки умові (5), для всіх $i \in \mathbb{N}$ виконується $0 < m_i < \infty$. Аналогічно, нехай $n_i = \int\limits_0^\infty xV_{ii}(dx)$, де $V_{ij}(dx)$ варіація міри $G_{ij}(dx)$, $G(dx) = (G_{ij}(dx))_{i,j=1}^\infty$, $V(dx) = (V_{ij}(dx))_{i,j=1}^\infty$, $M = diag\{m_1, m_2, ...\}$, $N = diag\{n_1, n_2...\}$.

Зауваження 1. Оскільки міри $G_{ii}(dx)$ дійснозначні (див. (2)), то очевидно, що $G_{ii}(dx) = V_{ii}(dx)$, тобто $M = N$.

Приймемо

$$N_\varepsilon = \int\limits_0^\infty xV_\varepsilon(dx),\ L_\varepsilon = N_\varepsilon^{-1}(I - V_\varepsilon([0;\infty))),\ Q_\varepsilon(x) = e^{-xL_\varepsilon} - \int\limits_0^x V_\varepsilon(dy)e^{-(x-y)L_\varepsilon}.$$

Властивості матричнозначних функцій $Q_\varepsilon(x)$ використовують під час дослідження асимптотичного поводження розв'язку скінченновимірного рівняння відновлення (див. [1], [2]).

Розглянемо банаховий простір $\mathbf{K}$, елементами якого є матричнозначні функції $Q(x) = (Q_{ij}(x))_{i,j=1}^\infty$ з нормою $|||Q||| = \int\limits_{-\infty}^\infty \|Q(x)\|dx < \infty$, де $\|A\| = \sup\limits_{i\in\mathbb{N}} \sum\limits_{j=1}^\infty |a_{ij}|$ – норма матриці A. Для $Q \in \mathbf{K}$ позначимо $\widehat{Q}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^\infty e^{i\lambda x}Q(x)dx$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Теорема 1. *Нехай $G_{ij}^\varepsilon(dx)$ задовольняють умови (1)-(7). Тоді $Q_\varepsilon(x) \in \boldsymbol{K}$ і виконується $Q_\varepsilon(x) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} Q(x) = V([x;\infty))$ за нормою простору $\boldsymbol{K}$.*

Доведення. Завдяки умовам (6) та (7) $\sigma = \inf\limits_i \sum\limits_{j=1}^\infty \frac{d_{ij}}{m_i} > 0$, а тому $\|e^{-tM^{-1}D}\| \le e^{-t\sigma}$. Оскільки $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\|e^{-x\frac{1}{\varepsilon}L_\varepsilon}\| = \|e^{-xM^{-1}D}\|$, то, враховуючи попередню нерівність, отримуємо, що $\|e^{-xL_\varepsilon}\| \le e^{-\varepsilon x\sigma}$. Далі

$$\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^x V_\varepsilon(dy)e^{-(x-y)L_\varepsilon}\right)dx = \int\limits_0^{+\infty} V_\varepsilon(dy)\int\limits_y^{+\infty} e^{-(x-y)L_\varepsilon}dx =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} V_\varepsilon(dy)e^{yL_\varepsilon}\left(e^{-xL_\varepsilon}L_\varepsilon^{-1}\Big|_{+\infty}^{y}\right) = \int\limits_0^{+\infty} L_\varepsilon^{-1}V_\varepsilon(dy) = V_\varepsilon([0,+\infty))L_\varepsilon^{-1}.$$

Звідси і з того, що $\|e^{-xL_\varepsilon}\| \le e^{-\varepsilon x\sigma}$ випливає, що $Q_\varepsilon(x) \in \mathbf{K}$.

Позначимо $\overline{V}_\varepsilon(y) = V_\varepsilon([y;\infty))$. Тоді $d\overline{V}_\varepsilon(y) = -V_\varepsilon(dy)$ і

$$Q_\varepsilon(x) = e^{-xL_\varepsilon} + \int\limits_0^x d\overline{V}_\varepsilon(y)\cdot e^{-(x-y)L_\varepsilon} = e^{-xL_\varepsilon} + \overline{V}_\varepsilon(y)e^{-(x-y)L_\varepsilon}\Big|_0^x -$$

$$-\int\limits_0^x \overline{V}_\varepsilon(y)e^{-(x-y)L_\varepsilon}dyL_\varepsilon = -\overline{V}_\varepsilon(0)e^{-xL_\varepsilon} - \int\limits_0^x \overline{V}_\varepsilon(y)e^{-(x-y)L_\varepsilon}dyL_\varepsilon +$$

$$+e^{-xL_\varepsilon} + \overline{V}_\varepsilon(x) = \overline{V}_\varepsilon(x) + (I - \overline{V}_\varepsilon(0))e^{-xL_\varepsilon} - \int\limits_0^x \overline{V}_\varepsilon(y)e^{-(x-y)L_\varepsilon}L_\varepsilon dy =$$

$$= \overline{V}_\varepsilon(x) + N_\varepsilon L_\varepsilon e^{-xL_\varepsilon} - \int\limits_0^x \overline{V}_\varepsilon(y)e^{-(x-y)L_\varepsilon}L_\varepsilon dy.$$

Покажемо, що

$$\overline{V}_\varepsilon(x)\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}Q(x) = V([x;\infty)), \tag{8}$$

$$\int\limits_0^\infty \|N_\varepsilon L_\varepsilon e^{-xL_\varepsilon} - \int\limits_0^x \overline{V}_\varepsilon(y)e^{-(x-y)L_\varepsilon}L_\varepsilon dy\|dx \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{9}$$

При $i \neq j$ маємо

$$\int\limits_0^\infty \overline{V}_{ij}^\varepsilon(x)dx = \int\limits_0^\infty V_{ij}^\varepsilon([x;\infty))dx = \int\limits_0^\infty xV_{ij}^\varepsilon(dx) + xV_{ij}^\varepsilon([x;\infty))\Big|_0^\infty =$$

$$= \int\limits_0^c xV_{ij}^\varepsilon(dx) + \int\limits_c^\infty xV_{ij}^\varepsilon(dx) \leq c\cdot V_{ij}^\varepsilon([0;c]) + \int\limits_c^\infty xV_{ij}^\varepsilon(dx).$$

З умов (3) та (5) відповідно отримуємо $c\cdot V_{ij}^\varepsilon([0;c])\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}0$ та $\int\limits_c^\infty xV_{ij}^\varepsilon(dx)\underset{c\to\infty}{\longrightarrow}0$.

При $i = j$ маємо

$$\int\limits_0^\infty |\overline{V}_{ii}^\varepsilon(x) - \overline{V}_{ii}(x)|dx = \int\limits_0^c |\overline{V}_{ii}^\varepsilon(x) - \overline{V}_{ii}(x)|dx + \int\limits_c^\infty |\overline{V}_{ii}^\varepsilon(x) - \overline{V}_{ii}(x)|dx \leq$$

$$\leq \int\limits_0^c |\overline{V}_{ii}^\varepsilon(x) - \overline{V}_{ii}(x)|dx + \int\limits_c^\infty V_{ii}^\varepsilon([x;\infty))dx + \int\limits_c^\infty V_{ii}([x;\infty))dx \leq$$

$$\leq \int\limits_0^c |V_{ii}^\varepsilon([0,x]) - V_{ii}([0,x])|dx + c|1 - V_{ii}^\varepsilon([0,\infty))| + \int\limits_c^\infty xV_{ii}^\varepsilon(dx) + \int\limits_c^\infty xV_{ii}(dx).$$

Легко бачити, що завдяки умові (5), інтеграли $\int\limits_c^\infty xV_{ii}^\varepsilon(dx)$ і $\int\limits_c^\infty xV_{ii}(dx)$ рівномірно відносно ε збігаються до 0, а $c|1-V_{ii}^\varepsilon([0,\infty))|\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}0$ і $|V_{ii}^\varepsilon([0,x])-V_{ii}([0,x])|\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}0$ завдяки

(4) та (1) відповідно. Звідси випливає умова (8). Приймемо

$$\overline{V}^c_\varepsilon(y) = \begin{cases} \overline{V}_\varepsilon(y), & y \le c, \\ 0, & y > c, \end{cases} \qquad \overline{R}^c_\varepsilon(y) = \begin{cases} 0, & y \le c, \\ \overline{V}_\varepsilon(y), & y > c. \end{cases}$$

Легко бачити, що $\overline{V}_\varepsilon(y) = \overline{V}^c_\varepsilon(y) + \overline{R}^c_\varepsilon(y)$, а отже,

$$\int\limits_0^\infty |N_\varepsilon L_\varepsilon e^{-xL_\varepsilon} - \int\limits_0^x \overline{V}_\varepsilon(y) e^{-(x-y)L_\varepsilon} L_\varepsilon dy| dx \le$$

$$\le \int\limits_0^\infty |N_\varepsilon L_\varepsilon e^{-xL_\varepsilon} - \int\limits_0^x \overline{V}^c_\varepsilon(y) e^{-(x-y)L_\varepsilon} L_\varepsilon dy| dx + \int\limits_0^\infty | \int\limits_0^x \overline{R}^c_\varepsilon(y) e^{-(x-y)L_\varepsilon} L_\varepsilon dy| dx \le$$

$$\le \int\limits_0^c |N_\varepsilon L_\varepsilon e^{-xL_\varepsilon} - \int\limits_0^x \overline{V}^c_\varepsilon(y) e^{-(x-y)L_\varepsilon} L_\varepsilon dy| dx + \int\limits_c^\infty |N_\varepsilon L_\varepsilon e^{-xL_\varepsilon} -$$

$$- \int\limits_0^x \overline{V}^c_\varepsilon(y) e^{-(x-y)L_\varepsilon} L_\varepsilon dy| dx + \int\limits_c^\infty |\overline{V}_\varepsilon(y)| dy \int\limits_0^\infty |e^{-xL_\varepsilon} L_\varepsilon| dx.$$

Але $\int\limits_0^\infty \|e^{-xL_\varepsilon} L_\varepsilon\| dx = \int\limits_0^\infty \|e^{-\frac{x}{\varepsilon}L_\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} L_\varepsilon\| dx \le \|\frac{1}{\varepsilon} L_\varepsilon\| \int\limits_0^\infty e^{-\sigma x} dx = \frac{1}{\sigma} \cdot \|\frac{1}{\varepsilon} L_\varepsilon\| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \frac{\|M^{-1}D\|}{\sigma}$, а інтеграл $\int\limits_c^\infty |\overline{V}_\varepsilon(y)| dy$ можна зробити як завгодно малим за допомогою вибору числа c. Тому $\int\limits_c^\infty |\overline{V}_\varepsilon(y)| dy \int\limits_0^\infty |e^{-xL_\varepsilon} L_\varepsilon| dx \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Далі

$$\int\limits_c^\infty |N_\varepsilon L_\varepsilon e^{-xL_\varepsilon} - \int\limits_0^x \overline{V}^c_\varepsilon(y) e^{-(x-y)L_\varepsilon} L_\varepsilon dy| dx \le |N_\varepsilon - \int\limits_0^c \overline{V}_\varepsilon(y) e^{yL_\varepsilon} dy| \int\limits_c^\infty |e^{-xL_\varepsilon} L_\varepsilon| dx \le$$

$$\le |N_\varepsilon - \int\limits_0^c \overline{V}_\varepsilon(y) dy| \int\limits_c^\infty |e^{-xL_\varepsilon} L_\varepsilon| dx$$

і, аналогічно,

$$\int\limits_0^c |N_\varepsilon L_\varepsilon e^{-xL_\varepsilon} - \int\limits_0^x \overline{V}^c_\varepsilon(y) e^{-(x-y)L_\varepsilon} L_\varepsilon dy| dx \le |N_\varepsilon - \int\limits_0^c \overline{V}_\varepsilon(y) e^{yL_\varepsilon} dy| \int\limits_0^c |e^{-xL_\varepsilon} L_\varepsilon| dx \le$$

$$\le |N_\varepsilon - \int\limits_0^c \overline{V}_\varepsilon(y) dy| \int\limits_0^c |e^{-xL_\varepsilon} L_\varepsilon| dx.$$

Оскільки $\int\limits_0^\infty \overline{V}(y) dy = N$ і $|N_\varepsilon - \int\limits_0^c \overline{V}_\varepsilon(y) dy| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} |N - \int\limits_0^c \overline{V}(y) dy|$, то за рахунок вибору c отримуємо (9). Теорему 1 доведено.

При доведенні наступної теореми будемо використовувати лему, яку подаємо без доведення, оскільки її доведення аналогічне до скінченновимірного випадку (див. [3])

Лема 1. *Нехай послідовність* $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \boldsymbol{K}$ *збігається за нормою* $|||\cdot|||$ *до* $Q \in \boldsymbol{K}$ *і при* $\lambda \in [a;b]$ *існує* $\widehat{Q}(\lambda)^{-1}$. *Тоді знайдеться послідовність* $\{F_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \boldsymbol{K}$ *така, що для всіх достатньо великих* n

$$\widehat{Q}_n(\lambda)^{-1} = \widehat{F}_n(\lambda) \text{ при } \lambda \in [a;b],\ |||F_n - F|||_{\overrightarrow{n\to\infty}}0,\ \widehat{Q}(\lambda)^{-1} = \widehat{F}(\lambda) \text{ при } \lambda \in [a;b].$$

Приймемо $\Psi_\varepsilon(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{i\lambda x} V_\varepsilon(dx)$, $\Psi(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{i\lambda x} G(dx) = \int\limits_0^\infty e^{i\lambda x} V(dx)$.

Теорема 2. *Нехай* $G_{ij}^{\varepsilon}(dx)$ *задовольняють умови (1)-(7). Якщо для кожного* $\lambda \in \mathbb{R}$ *матриця* $(\Psi(\lambda) - I)$ *оборотна, то для всіх* $-\infty < a < b < \infty$ *і достатньо малих* $\varepsilon > 0$ *знайдуться функції* $F \in \boldsymbol{K}$, $F_\varepsilon \in \boldsymbol{K}$ *такі, що для* $\lambda \in [a,b]$ *виконується*

$$\begin{aligned}
&\widehat{F}_\varepsilon^{-1}(\lambda) = (I - \Psi_\varepsilon(\lambda))(L_\varepsilon - i\lambda I)^{-1},\\
&\widehat{F}^{-1}(\lambda) = \frac{i}{\lambda}(I - \Psi(\lambda)),\\
&F_\varepsilon(x) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} F(x)
\end{aligned}$$

за нормою простору $\boldsymbol{K}$.

Зауваження 2. Умова оборотності матриці $(\Psi(\lambda) - I)$ є аналогом умови нерешітчастості мір $G_{ii}(dx)$ у випадку скінченновимірних матриць.

Доведення. Враховуючи твердження леми 1 та теореми 1 для доведення цієї теореми треба показати, що перетворення Фур'є матриці $Q(x) = V([x;\infty))$ оборотне та знайти явний вигляд матриць $\widehat{Q}(\lambda)$ і $\widehat{Q}_\varepsilon(\lambda)$.

Маємо $\widehat{Q}(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{i\lambda x} V([x,\infty))dx = \int\limits_0^\infty e^{i\lambda x} G([x,\infty))dx = \int\limits_0^\infty G(dy) \int\limits_0^y e^{i\lambda x} dx =$ $= \int\limits_0^\infty G(dy) \frac{e^{i\lambda x} - 1}{i\lambda} = \frac{1}{i\lambda}(\Psi(\lambda) - I)$. Звідси отримуємо, що матриця $\widehat{Q}(\lambda)$ має обернену. Далі

$$\widehat{Q}_\varepsilon(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{i\lambda x} e^{-xL_\varepsilon} dx - \int\limits_0^\infty e^{i\lambda x} (\int\limits_0^x V_\varepsilon(dy) e^{-(x-y)L_\varepsilon}) dx =$$
$$= (L_\varepsilon - i\lambda I)^{-1} - \Psi_\varepsilon(\lambda)(L_\varepsilon - i\lambda I)^{-1} = (I - \Psi_\varepsilon(\lambda))(L_\varepsilon - i\lambda I)^{-1}.$$

Теорему 2 доведено.

---

1. *Сильвестров Д.С.* Теорема востановления в схеме серий // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1978. – Т. 18. – С. 144-161.

2. *Шуренков В.М.* Переходные явления в теоремах многомерного востановления // Теория вероятностей и ее примен. – 1979. – Т. 24. – С. 436-438.

3. *Куция П.П.* Многомерные теоремы типа восстановления и их применения к регенерирующим случайным процессам: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – К., 1990.

PROPERTIES OF COUNTABLE MATRIX MEASURES

Taras ZABOLOTSKYY

Ivan Franko National university of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka str., 1

Here is proved properties of countable matrix measures which can be used in investigating asymptotic behavior of the solution of the renewal equation.

Key words: matrix measure, Fourier transformation.

Стаття надійшла до редколегії 30.01.2007
Прийнята до друку 24.10.2007

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2007. Вип.67. С.143-148 *Ser. Mech.-Math. 2007. Vol.67. P.143-148*

УДК 517.537.72

МОДИФІКАЦІЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО ПОРЯДКУ ЦІЛОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Михайло ЗЕЛІСКО

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1

Модифіковано узагальнені порядки Шеремети і зазначено їхнє застосування до вивчення асимптотичного поводження цілих функцій, заданих степеневими рядами або рядами Діріхле.

Ключові слова: ціла функція, ряд Діріхле, узагальнений порядок.

1. Формулювання результатів. Зростання цілої функції

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n \tag{1}$$

ототожнюють зі зростанням її максимуму модуля $M_f(r)=\max\{|f(z)|:|z|=r\}$, а для характеристики зростання $M_f(r)$ переважно використовують порядок $\varrho[f]=\varlimsup\limits_{r\to+\infty}\dfrac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}$. За теоремою Адамара [1] $\varrho[f]=\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\ln n}{-\ln|a_n|}$. Для характеристики зростання $M_f(r)$ у випадку, коли $\varrho[f]=0$, П. Камсен [2] ввів логарифмічний порядок $p[f]=\varlimsup\limits_{r\to+\infty}\dfrac{\ln\ln M_f(r)}{\ln\ln r}$ і за умови $p[f]>1$ довів, що $p[f]=\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{\ln\left(\dfrac{1}{n}\ln\dfrac{1}{|a_n|}\right)}+1$.

Для цілих функцій нескінченного порядку зростання $M_f(r)$ вивчають за допомогою досконаліших шкал зростання. А. Шьонгаґе [3] порівнював деяку ітерацію логарифма від $M_f(r)$ з іншою ітерацією логарифма від r. Г.А. Фрідман [4] ітерації від $\ln M_f(r)$ порівнював з досить правильно зростаючими функціями від r. Найзагальнішу шкалу зростання ввів М.М. Шеремета [5].

Через L позначимо клас додатних неперервних зростаючих до $+\infty$ на $[0,+\infty)$ функцій і, як в [5], будемо говорити, що $\alpha\in L^0$, якщо $\alpha((1+o(1))x)=(1+o(1))\alpha(x)$

© Зеліско Михайло, 2007

при $x \to +\infty$, і $\alpha \in L_{nз}$, якщо $\alpha(cx) \sim \alpha(x)$ при $x \to +\infty$ для будь-якого $c \in (0, +\infty)$, тобто α – повільно зростаюча функція.

Для $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ узагальненим порядком цілої функції f називається величина $\varrho_{\alpha\beta}[f] = \varlimsup\limits_{r\to+\infty} \dfrac{\alpha(\ln M_f(r))}{\beta(\ln r)}$. В [5] доведено таке: якщо $\alpha \in L_{nз}$, $\beta \in L^0$ і $\dfrac{d\beta^{-1}(c\alpha(x))}{d\ln x} = O(1)$ при $x \to +\infty$ для будь-якого $c \in (0, +\infty)$, то $\varrho_{\alpha\beta}[f] = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha(n)}{\beta\left(\dfrac{1}{n}\ln\dfrac{1}{|a_n|}\right)}$. Для цілих функцій нульового порядку узагальнений порядок $\varrho_{\alpha}[f] = \varlimsup\limits_{r\to+\infty} \dfrac{\alpha(\ln\ln M_f(r))}{\alpha(\ln\ln r)}$ введено в [6], де доведено таке: якщо $\alpha \in L_{nз}$ і $0 \leqslant \dfrac{d\alpha^{-1}(c\alpha(x))}{dx} \leqslant Ae^{B\alpha^{-1}(c\alpha(x))}$ для будь-якого $c \in (0, +\infty)$, всіх $x \geqslant x_0(c)$ та деяких додатних сталих A і B, то $\varrho_{\alpha}[f] = \max\{1, k_{\alpha}[f]\}$, де $k_{\alpha}[f] = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha(\ln n)}{\alpha\left(\ln\left(\dfrac{1}{n}\ln\dfrac{1}{|a_n|}\right)\right)}$. Неважко показати, що $\varrho_{\alpha} = \max\{1, \hat{\varrho}_{\alpha}[f]\}$, де $\hat{\varrho}_{\alpha}[f] = \varlimsup\limits_{r\to+\infty} \dfrac{1}{\alpha(\ln\ln r)}\alpha\left(\ln\dfrac{\ln M_f(r)}{\ln r}\right)$.

Тому виникають питання.

Проблема . *Чи правильна рівність $\hat{\varrho}_{\alpha}[f] = k_{\alpha}[f]$ і, з огляду на означення $\hat{\varrho}_{\alpha}[f]$, як зміняться наведені результати Ж. Адамара, П. Камсена та М.М. Шеремети, якщо зростання цілої функції виміряти не в термінах $\ln M_f(r)$, а в термінах $\dfrac{\ln M_f(r)}{\ln r}$ (зауважимо, що $\dfrac{\ln M_f(r)}{\ln r} \to +\infty \quad (r \to +\infty)$ для трансцендентної цілої функції), тобто узагальнений порядок цілої функції (1) ввести у вигляді $\hat{\varrho}_{\alpha\beta}[f] = \varlimsup\limits_{r\to+\infty} \dfrac{1}{\beta(\ln r)}\alpha\left(\dfrac{\ln M_f(r)}{\ln r}\right)$?*

Відповідь на ці питання дає така теорема.

Теорема 1. *Якщо $\alpha \in L_{nз}$ і $\beta \in L^0$, то $\hat{\varrho}_{\alpha\beta}[f] = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha(n)}{\beta\left(\dfrac{1}{n}\ln\dfrac{1}{|a_n|}\right)}$.*

Ця теорема є безпосереднім наслідком доведеної нижче теореми 2 для цілих рядів Діріхле. Для цілого (абсолютно збіжного в $\mathbb{C}$) ряду Діріхле

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}, \quad s = \sigma + it, \tag{2}$$

зі зростаючою до $+\infty$ послідовністю невід'ємних показників λ_n приймемо $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$. Ж. Рітт [7], узагальнюючи теорему Адамара, ввів R-порядок $\varrho_R = \varlimsup\limits_{\sigma\to+\infty} \dfrac{\ln\ln M(\sigma, F)}{\sigma}$ і за умови $\ln n = O(\lambda_n) \quad (n \to \infty)$ довів, що $\varrho_R = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lambda_n \ln \lambda_n}{-\ln|a_n|}$. А. Азпітіа [8] показав, що ця рівність є правильною за умови

$\ln n = o(\lambda_n \ln \lambda_n)$, $n \to \infty$. Узагальнені порядки $\varrho_{\alpha\beta}[F] = \varlimsup\limits_{\sigma\to+\infty} \dfrac{\alpha(\ln M(\sigma,F))}{\beta(\sigma)}$ введені в [9], де, зокрема, доведено таке: якщо $\alpha \in L_{\text{нз}}$, $\beta \in L^0$, $\dfrac{d\beta^{-1}(c\alpha(x))}{d\ln x} = O(1)$ $(x \to +\infty)$ і $\ln n = o(\lambda_n \beta^{-1}(c\alpha(\lambda_n)))$ для будь-якого $c \in (0,+\infty)$, то $\varrho_{\alpha\beta}[F] = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha(\lambda_n)}{\beta\left(\dfrac{1}{\lambda_n}\ln\dfrac{1}{|a_n|}\right)}$. Якщо ж узагальнений порядок цілого ряду Діріхле означити у вигляді $\hat\varrho_{\alpha\beta}[F] = \varlimsup\limits_{\sigma\to+\infty} \dfrac{1}{\beta(\sigma)}\alpha\left(\dfrac{\ln M(\sigma,F)}{\sigma}\right)$, то правильна така теорема.

Теорема 2. *Якщо* $\alpha \in L_{\text{нз}}$, $\beta \in L^0$ *і* $\ln n = o(\lambda_n \beta^{-1}(c\alpha(\lambda_n)))$, $n \to \infty$, *для кожного* $c \in (0,+\infty)$, *то* $\hat\varrho_{\alpha\beta}[F] = k_{\alpha\beta}[F] =: \varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha(\lambda_n)}{\beta\left(\dfrac{1}{\lambda_n}\ln\dfrac{1}{|a_n|}\right)}$.

Приймемо $M_1(\sigma,F) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|\exp\{\sigma\lambda_n\}$. Вивченню зв'язку між зростанням $M(\sigma,F)$ і $M_1(\sigma,F)$ присвячено праці [10-12]. Зокрема, в [12] доведено таке: якщо показники цілого ряду Діріхле скінченного R-порядку ϱ_R задовольняють умову $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{\ln \lambda_n} \leqslant \tau < +\infty$, то $\varlimsup\limits_{\sigma\to+\infty} \dfrac{\ln M_1(\sigma,F) - \ln M(\sigma,F)}{\sigma} \leqslant \dfrac{\tau\varrho_R}{2}$.

Застосування узагальнених порядків дає такий результат.

Теорема 3. *Якщо* $\alpha \in L_{\text{нз}}$, $\beta \in L^0$ *і* $\ln n = o(\lambda_n \beta^{-1}(c\alpha(\lambda_n)))$, $n \to \infty$, *для кожного* $c \in (0,+\infty)$, *то* $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\beta(\sigma)}\alpha\left(\dfrac{\ln M_1(\sigma,F) - \ln M(\sigma,F)}{\sigma}\right) \leqslant \hat\varrho_{\alpha\beta}[F]$.

Зауважимо, що для цілих рядів Діріхле скінченного R-порядку ϱ_R з теореми 3 отримуємо оцінку $\varlimsup\limits_{\sigma\to+\infty} \dfrac{1}{\sigma}\ln\ln\dfrac{M_1(\sigma,F)}{M(\sigma,F)} \leqslant \varrho_R$, яка є значно гіршою від наведеної вище оцінки з [12], але вона виконується за умови $\ln n = o(\lambda_n \ln \lambda_n)$, $n \to \infty$, яка є значно ширшою від умови $\ln n = O(\ln \lambda_n)$, $n \to \infty$.

2. Доведення основних результатів.

Доведення теореми 2. Припустимо, що $\hat\varrho_{\alpha\beta}[F] < +\infty$, і нехай $\mu(\sigma,F) = \max\{|a_n|\exp\{\sigma\lambda_n\} : n \geqslant 0\}$ – максимальний член ряду (2). Тоді для будь-якого $\varrho > \hat\varrho_{\alpha\beta}[F]$ і всіх $\sigma > \sigma_0(\varrho)$, з огляду на нерівність Коші, маємо $\ln|a_n| + \sigma\lambda_n \le \le \ln\mu(\sigma,F) \leqslant \ln M(\sigma,F) \leqslant \sigma\alpha^{-1}(\varrho\beta(\sigma))$ і, отже, $\ln|a_n| \leqslant \sigma(\alpha^{-1}(\varrho\beta(\sigma)) - \lambda_n)$ для всіх $n \geqslant 0$ і $\sigma \geqslant \sigma_0(\varrho)$.

Виберемо $\sigma = \sigma_n = \beta^{-1}\left(\dfrac{1}{\varrho}\alpha(\varepsilon\lambda_n)\right)$, де $\varepsilon > 0$ – довільне число. Тоді $\sigma_n \geqslant \sigma_0(\varrho)$ для всіх $n \geqslant n_0(\varrho,\varepsilon)$ і, отже, $\ln|a_n| \leqslant -(1-\varepsilon)\lambda_n\beta^{-1}\left(\dfrac{1}{\varrho}\alpha(\varepsilon\lambda_n)\right)$ для всіх $n \geqslant n_0(\varrho,\varepsilon)$, тобто $\dfrac{\alpha(\varepsilon\lambda_n)}{\beta\left(\dfrac{1}{(1-\varepsilon)\lambda_n}\ln\dfrac{1}{|a_n|}\right)} \leqslant \varrho$.

Оскільки $\alpha \in L_{пз}$, то $\alpha(\varepsilon\lambda_n) \sim \alpha(\lambda_n)$ при $n \to \infty$. З умови $\beta \in L^0$ випливає (див., наприклад, [13]), що $\varlimsup\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\beta((1+\varepsilon)x)}{\beta(x)} = A(\varepsilon) \searrow 1 \quad (\varepsilon \to 0)$. Тому з останньої нерівності за рахунок довільності ε отримуємо нерівність $k_{\alpha\beta}[F] \leqslant \varrho$. Завдяки довільності $\varrho > \hat{\varrho}_{\alpha\beta}[F]$, звідси одержуємо нерівність $k_{\alpha\beta}[F] \leqslant \hat{\varrho}_{\alpha\beta}[F]$, яка є очевидною, якщо $\hat{\varrho}_{\alpha\beta}[F] = +\infty$.

Припустимо тепер від супротивного, що $k_{\alpha\beta}[F] < \hat{\varrho}_{\alpha\beta}[F]$ і виберемо $k_{\alpha\beta}[F] < \varrho < \hat{\varrho}_{\alpha\beta}[F]$. Тоді для всіх $n \geqslant n_0(\varrho)$ маємо $\ln|a_n| \leqslant -\lambda_n\beta^{-1}\left(\dfrac{1}{\varrho}\alpha(\lambda_n)\right)$, тобто для досить великих σ маємо

$$\ln\mu(\sigma,F) = \max\left\{\max_{n\leqslant n_0(\varrho)}\{\ln|a_n| + \sigma\lambda_n\},\ \max_{n\geqslant n_0(\varrho)}\{\ln|a_n| + \sigma\lambda_n\}\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \max\{K(\varrho)\sigma, \ln\mu^*(\sigma,F)\}, \tag{3}$$

де $\ln\mu^*(\sigma,F) = \max\limits_{n\geqslant n_0(\varrho)}\left\{\lambda_n\left(\sigma - \beta^{-1}\left(\dfrac{1}{\varrho}\alpha(\lambda_n)\right)\right)\right\}$.

Якщо n таке, що $\sigma - \beta^{-1}\left(\dfrac{1}{\varrho}\alpha(\lambda_n)\right) \leqslant 0$, то вираз у фігурних дужках від'ємний і оскільки $\ln\mu^*(\sigma,F) \to +\infty$, $\sigma \to +\infty$, то для центрального індексу $\nu^*(\sigma,F) = \max\left\{n : \lambda_n\left(\sigma - \beta^{-1}\left(\dfrac{1}{\varrho}\alpha(\lambda_n)\right)\right) = \ln\mu^*(\sigma,F)\right\}$ маємо нерівність $\sigma - \beta^{-1}\left(\dfrac{1}{\varrho}\alpha(\lambda_{\nu^*(\sigma,F)})\right) \geqslant 0$, тобто $\lambda_{\nu^*(\sigma,F)} \leqslant \alpha^{-1}(\varrho\beta(\sigma))$, $\sigma \geqslant \sigma_0$.

Використовуючи відому рівність [14, с. 17] $\ln\mu^*(\sigma,F) = \ln\mu^*(\sigma_0,F) + \displaystyle\int_{\sigma_0}^{\sigma}\lambda_{\nu^*(t,F)}dt$, отримуємо

$$\ln\mu^*(\sigma,F) \leqslant \int_{\sigma_0}^{\sigma}\alpha^{-1}(\varrho\beta(t))dt + \ln\mu^*(\sigma_0,F) \leqslant \alpha^{-1}(\varrho\beta(\sigma))(\sigma-\sigma_0) + \ln\mu^*(\sigma_0,F) =$$
$$= (1+o(1))\alpha^{-1}(\varrho\beta(\sigma))\sigma, \quad \sigma \to +\infty.$$

Звідси і з (3) випливає таке: якщо $\alpha \in L_{пз}$ і $\beta \in L^0$, то

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{1}{\beta(\sigma)}\alpha\left(\frac{\ln\mu(\sigma,F)}{\sigma}\right) \leqslant \varrho. \tag{4}$$

Оскільки $\ln n = o\left(\lambda_n\beta^{-1}\left(\dfrac{1}{\varrho}\alpha(\lambda_n)\right)\right)$ при $n \to \infty$ і $-\ln|a_n| \geqslant \lambda_n\beta^{-1}\left(\dfrac{1}{\varrho}\alpha(\lambda_n)\right)$ $(n \geqslant n_0(\varrho))$, то $h_0 =: \varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{-\ln|a_n|} = 0$. Тому [14, с. 23] для кожного $\varepsilon \in (0,1)$ існує стала $A_0(\varepsilon) > 0$ така, що для всіх $\sigma \geqslant 0$ правильна нерівність $M(\sigma,F) \leqslant A_0(\varepsilon)\mu\left(\dfrac{\sigma}{1-\varepsilon}, F\right)$, а з огляду на (4) й умову $\alpha \in L_{пз}$

$$\hat{\varrho}_{\alpha\beta}[F] \leqslant \varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{1}{\beta(\sigma)}\alpha\left(\frac{\ln\mu(\sigma/(1-\varepsilon),F)}{\sigma}\right) = \varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{1}{\beta((1-\varepsilon)\sigma)}\alpha\left(\frac{\ln\mu(\sigma,F)}{\sigma}\right).$$

Оскільки $\beta \in L^0$, то, як зазначалось, отримуємо нерівність $\hat{\varrho}_{\alpha\beta}[F] \leqslant \varrho$, що неможливо. Отже, $\hat{\varrho}_{\alpha\beta}[F] = k_{\alpha\beta}[F]$. Теорему 2 доведено.

Доведення теореми 3. У випадку, коли $\hat{\varrho}_{\alpha\beta}[F] = +\infty$, теорема 3 очевидна. Якщо ж $\hat{\varrho}_{\alpha\beta}[F] < +\infty$, то для будь-якого $\varrho > \hat{\varrho}_{\alpha\beta}[F]$ і всіх $n \geqslant n_0(\varrho)$ за теоремою 2 маємо $|a_n| \leqslant \exp\left\{-\lambda_n\beta^{-1}\left(\alpha(\lambda_n)/\varrho\right)\right\}$. Нехай $n(t) = \sum\limits_{\lambda_n \leqslant t} 1$ – лічильна функція послідовності. Зрозуміло, що тоді $\ln n(t) = o\left(t\beta^{-1}\left(\alpha(t)/\varrho\right)\right)$ при $t \to +\infty$. Приймемо $\gamma(\sigma) = \alpha^{-1}(\varrho\beta(\sigma(1+\varepsilon)))$, $\varepsilon > 0$. Тоді для всіх досить великих σ маємо

$$\sum_{\lambda_n>\gamma(\sigma)} |a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} \leqslant \sum_{\lambda_n>\gamma(\sigma)} \exp\left\{-\lambda_n\beta^{-1}\left(\frac{1}{\varrho}\alpha(\lambda_n)\right)\left(1-\frac{\sigma}{\beta^{-1}\left(\dfrac{1}{\varrho}\alpha(\lambda_n)\right)}\right)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\lambda_n>\gamma(\sigma)} \exp\left\{-\lambda_n\beta^{-1}\left(\frac{1}{\varrho}\alpha(\lambda_n)\right)\left(1-\frac{\sigma}{\beta^{-1}\left(\dfrac{1}{\varrho}\alpha(\gamma(\sigma))\right)}\right)\right\} =$$

$$= \sum_{\lambda_n>\gamma(\sigma)} \exp\left\{-\frac{\varepsilon\lambda_n}{1+\varepsilon}\beta^{-1}\left(\frac{1}{\varrho}\alpha(\lambda_n)\right)\right\} \leqslant \int\limits_{\gamma(\sigma)}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\varepsilon t}{1+\varepsilon}\beta^{-1}\left(\frac{1}{\varrho}\alpha(t)\right)\right\} dn(t) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\gamma(\sigma)}^{\infty} n(t) \exp\left\{-\frac{\varepsilon t}{1+\varepsilon}\beta^{-1}\left(\frac{1}{\varrho}\alpha(t)\right)\right\} d\left(\frac{\varepsilon t}{1+\varepsilon}\beta^{-1}\left(\frac{1}{\varrho}\alpha(t)\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\gamma(\sigma)}^{\infty} \exp\left\{\frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}t\beta^{-1}\left(\frac{\alpha(t)}{\varrho}\right)\right\} \exp\left\{-\frac{\varepsilon t}{1+\varepsilon}\beta^{-1}\left(\frac{\alpha(t)}{\varrho}\right)\right\} d\left(\frac{\varepsilon t}{1+\varepsilon}\beta^{-1}\left(\frac{\alpha(t)}{\varrho}\right)\right) =$$

$$= 2\int\limits_{\gamma(\sigma)}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\varepsilon t}{2(1+\varepsilon)}\beta^{-1}\left(\frac{1}{\varrho}\alpha(t)\right)\right\} d\left(\frac{\varepsilon t}{2(1+\varepsilon)}\beta^{-1}\left(\frac{1}{\varrho}\alpha(t)\right)\right) = o(1), \sigma \to +\infty.$$

Як видно з доведення леми 1 з [12], $M_1(\sigma,F) \leqslant M(\sigma,F)\sqrt{n(\gamma(\sigma))} + \sum\limits_{\lambda_n>\gamma(\sigma)} |a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\}$. Тому $\ln M_1(\sigma,F) - \ln M(\sigma,F) \leqslant \frac{1}{2}\ln n(\gamma(\sigma)) + o(1) = o\left(\gamma(\sigma)\beta^{-1}\left(\alpha(\gamma(\sigma))/\varrho\right)\right) \le$ $\le \sigma\alpha^{-1}(\varrho\beta(\sigma(1+\varepsilon)))$, $\sigma \geqslant \sigma_0$, звідси, з огляду на умову $\beta \in L^0$ і довільність $\varepsilon > 0$, легко випливає потрібна нерівність.

1. *Hadamard J.* Essai sur l'étude des fonctions données par leur developpement de Taylor // J. math. pures et appl. – 1892. – Vol. 8. – P. 154-186.
2. *Kamthan P.K.* Some properties of entre functions // Proc. Rajasthan Acad. Sci. – 1963. – Vol. 10. – P. 14-20.
3. *Schönhage A.* Über das Wachstum der zusammengesetzen Funktionen // Math. Z. – 1960. – Bd. 73. – S. 22-44.

4. *Фридман Г.А.* Зависимость роста модуля аналитической функции от роста модуля коэффициентов её степенного разложения: Автореф. ... дисс. канд. физ.-мат. наук – М., 1951.
5. *Шеремета М.Н.* О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов её степенного разложения // Изв. вузов. Математика. – 1967. – №2. – С. 100-108.
6. *Шеремета М.Н.* О связи между ростом целых или аналитических в круге функций нулевого порядка и коэффициентами их степенных разложений // Изв. вузов. Математика. – 1968. – №6. – С. 115-120.
7. *Ritt J.F.* On certain points in the theory of Dirichlet series // Amer. Math. J. – 1928. – Vol. 50. – P. 73-83.
8. *Azpeitia A.G.* A remark on the Ritt order of entre function defined by Dirchlet series // Proc. Amer. Math. Soc. – 1961. – Vol. 12. – P. 722-728.
9. *Пьяныло Я.Д., Шеремета М.Н.* О росте целых функций, представленных рядами Дирихле // Изв. вузов. Математика. – 1975. – №5. – С. 105-108.
10. *Шеремета М.М.* Про зростання цілого ряду Діріхле // Укр. мат. журн. – 1999. – Т. 51, №8. – С. 1149-1153.
11. *Зеліско М.М., Шеремета М.М.* Про середні значення рядів Діріхле // Укр. мат. журн. – 2004. – Т. 56, №11. – С. 1501-1512.
12. *Зеліско М.М., Шеремета М.М.* Про вплив аргументів коефіцієнтів ряду Діріхле на його зростання // Матем. студії. – 2006. – Т. 26, №1. – С. 54-58.
13. *Sheremeta M.M.* On two classes of positive functions and belonging to them of main characteristics of entre functions // Matem. Studii. – 2003. – Vol. 19, №1. – P. 74-82.
14. *Шеремета М.М.* Цілі ряди Діріхле. – К., 1993.

MODIFICATION OF GENERALIZED ORDER AND AS APPLICATION

Mykhaylo ZELISKO

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka str., 1

It is modified generalized orders of Sheremeta and indicated their applications to the study of asymptotic behaviours of entire function given by power series or Dirichlet series.

Key words: entire function, Dirichlet series, generalized order.

Стаття надійшла до редколегії 26.10.2006

Прийнята до друку 24.10.2007

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2007. Вип.67. С.149-152 *Ser. Mech.-Math. 2007. Vol.67. P.149-152*

УДК 512.544

ГРУПИ, БАГАТІ НА $A\check{C}$-ПІДГРУПИ АБО $\check{C}A$-ПІДГРУПИ

Лілія ЙОНИК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: lila_yonyk@ua.fm

Доведено, що локально ступінчаста група з умовою мінімальності для підгруп, які не є розширеннями абелевих груп за допомогою черніковських груп (відповідно черніковських груп за допомогою абелевих груп) є розширенням абелевої групи за допомогою черніковської групи (відповідно черніковської групи за допомогою абелевої групи). Також з'ясовано, що локально ступінчаста періодична недосконала група, всі власні нормальні підгрупи якої є розширеннями абелевих груп за допомогою черніковських груп, сама є такою.

Ключові слова: абелева група, черніковська група, умова мінімальності, розширення групи.

1. Основні результати. Нехай χ – теоретико-групова властивість, яку успадковують підгрупи. Будемо говорити, що G задовольняє умову мінімальності для не χ-підгруп (коротко Min-$\overline{\chi}$), якщо кожен строго спадний ланцюг

$$G = G_0 > G_1 > \ldots > G_n > \ldots \tag{1}$$

не χ-підгруп G_i через скінченну кількість кроків обривається, тобто знайдеться таке натуральне число m, що G_n – χ-група для всіх $n \geq m$. Кожна мінімальна не χ-група (тобто не χ-група, кожна власна підгрупа якої є χ-групою) задовольняє умову Min-$\overline{\chi}$.

Нагадаємо, що $\check{C}A$-групою (відповідно $A\check{C}$-групою) називається група, яка є розширенням черніковської (відповідно абелевої) групи за допомогою абелевої (відповідно черніковської) групи. Як визначили Х. Отал і Х. Пена [1, теорема 1], мінімальних не $\check{C}A$-груп у класі локально ступінчастих груп не існує. Аналогічно за теоремою 2 з [1] і теоремою C із [2] мінімальних не $A\check{C}$-груп у класі локально ступінчастих груп не існує. Подібний результат для $N\check{C}$-груп випливає з теореми A [2] і теореми 1.3 [3], тобто локально ступінчаста група, всі власні підгрупи якої є $N\check{C}$-групами, сама є такою. Групи, багаті на $N\check{C}$-підгрупи, зокрема розглядали в статті [4].

© Йоник Лілія, 2007

У цій статті вивчаємо групи з умовою мінімальності для не $\check{C}A$-підгруп Min-$\overline{\check{C}A}$ й умовою мінімальності для не $A\check{C}$-підгруп Min-$\overline{A\check{C}}$. Ми отримали деяке розширення цих результатів і довели таке твердження.

Твердження 1. *Нехай G – локально ступінчаста група.*

1. *Група G задовольняє умову мінімальності для не $\check{C}A$-підгруп Min-$\overline{\check{C}A}$ тоді і тільки тоді, коли G – $\check{C}A$-група.*
2. *Група G задовольняє умову мінімальності для не $A\check{C}$-підгруп Min-$\overline{A\check{C}}$ тоді і тільки тоді, коли G – $A\check{C}$-група.*

Нагадаємо, що група, яка є розширенням нільпотентної групи за допомогою черніковської групи, коротко називається $N\check{C}$-групою.

Теорему 2 із [1] узагальнює твердження.

Твердження 2. 1. *Нехай G – недосконала періодична локально ступінчаста група. Якщо всі власні нормальні підгрупи із G є $A\check{C}$-групами, то G – $A\check{C}$-група.*

2. *Нехай G – недосконала локально ступінчаста група. Якщо всі її власні нормальні підгрупи є $N\check{C}$-групами, то G – $N\check{C}$-група.*

Із цього твердження легко випливає наслідок.

Наслідок 1. *Нехай G – локально ступінчата група.*

1. *Якщо G не є $\check{C}A$-групою, то вона має нескінченний строго спадний ланцюг підгруп, які не є $\check{C}A$-групами.*
2. *Якщо G не є $A\check{C}$-групою, то вона має нескінченний строго спадний ланцюг підгруп, які не є $A\check{C}$-групами.*

Нагадаємо, що група G називається локально ступінчастою, якщо кожна неодинична скінченно породжена підгрупа з G містить власну підгрупу скінченного індексу. Як відомо, клас локально ступінчастих груп достатньо широкий; він містить, зокрема, локально розв'язні групи. Якщо комутант G' відмінний від групи G, то G називається досконалою.

Всі інші означення та факти загальноприйняті і їх можна знайти в [5] і [6].

2. Доведення основних результатів. Доведенню тверджень передує лема.

Лема 1. *Нехай G – група, H – її підгрупа, а χ – теоретико-групова властивість, яка успадковується підгрупами. Якщо G задовольняє умову Min-$\overline{\chi}$, то правильні такі твердження:*

1) *H задовольняє умову Min-$\overline{\chi}$;*
2) *якщо $H \lhd G$, то фактор-група G/H задовольняє Min-$\overline{\chi}$;*
3) *якщо $H \lhd G$ і H не є χ-групою, то фактор-група G/H задовольняє умову мінімальності для підгруп Min.*

Доведення. Нехай G – група з умовою Min-$\overline{\chi}$.

1. Оскільки кожен строго спадний ланцюг не χ-підгруп із H є одночасно строго спадним ланцюгом не χ-підгруп із G, то він обривається.

2. Якщо

$$G_1/H > G_2/H > \ldots > G_n/H > \ldots$$

– який-небудь строго спадний ланцюг не χ-підгруп із G/H, то (1) – строго спадний ланцюг не χ-підгруп групи G, тому він обривається. Як наслідок, ланцюг (1) також обривається.

3. Нехай H – нормальна підгрупа групи G і H не є χ-групою. Якщо фактор-група $\overline{G} = G/H$ не задовольняє Min і має нескінченний строго спадний ланцюг $\{\overline{G}_i | i \in \mathbb{N}\}$ підгруп $\overline{G}_i$, то G має також нескінченний строго спадний ланцюг $\{G_i | i \in \mathbb{N}\}$ не χ-підгруп G_i, де G_i – повний прообраз підгрупи $\overline{G}_i$ в групі G, а це призводить до суперечності. Лема доведена.

Доведення твердження 1. ($\Leftarrow$) очевидно.

($\Rightarrow$) Нехай G задовольняє умову Min-$\overline{\check{C}A}$ (відповідно Min-$\overline{A\check{C}}$). Припустимо, що G не є $\check{C}A$-групою (відповідно $A\check{C}$-групою). Тоді G має скінченний строго спадний ланцюг (1) підгруп G_i, які не є $\check{C}A$-групами (відповідно $A\check{C}$-групами), де $n \geq 0$, а $i = 0, 1, \ldots, n$, причому всі власні підгрупи з G_n є $\check{C}A$-групами (відповідно $A\check{C}$-групами). Але це неможливо з огляду на теорему 1 із [1] (відповідно на теорему 2 із [1], теорему A із [2] і теорему 1.3 із [3]). Отримана суперечність засвідчує, що G – $\check{C}A$-група (відповідно $A\check{C}$-група). Твердження доведено.

Нагадаємо, що група G, в якій кожні дві власні підгрупи A і B знову породжують власну підгрупу $\langle A, B \rangle$ в G, називається нерозкладною.

Доведення твердження 2.

1. Якщо фактор-група G/G' розкладна, то $G = AB$ – добуток своїх двох власних нормальних підгруп A і B. Позаяк за твердженням 2.2 із [1] A (відповідно B) містить характеристичну абелеву підгрупу A_1 (відповідно B_1) з черніковською фактор-групою A/A_1 (відповідно B/B_1), то $A_1B_1 \lhd G$ і G/A_1B_1 – черніковська група. Але A_1B_1 – нільпотентна $A\check{C}$-група, яка знову за твердженням 2.2 із [1] має таку характеристичну (а, отже, нормальну в групі G) підгрупу A_2, що G/A_2 – черніковська група. Тому G – $A\check{C}$-група.

Тепер нехай G/G' – нерозкладна група. За лемою 2 із [7] G/G' – циклічна або квазіциклічна p-група для деякого простого числа p. Знову застосовуючи твердження 2.2 із [2] до підгрупи G', отримуємо, що G – $A\check{C}$-група.

2. Нехай у групі G всі власні нормальні підгрупи є $N\check{C}$-групами. Якщо фактор-група G/G' нерозкладна, то з огляду на лему 2 із [7] вона черніковська. Припустимо, що фактор-група G/G' розкладна. Тоді вона є добутком двох своїх власних нормальних підгруп, кожна з яких є $N\check{C}$-групою. Як наслідок, група G має черніковський гомоморфний образ. Отже, в обох випадках група G містить таку нормальну підгрупу S, що фактор-група G/S черніковська. За лемою 4.7 із [8] нормальне замикання $S^G =< S^g | g \in G >$ – нільпотентна підгрупа в G. Оскільки фактор-група G/S^G черніковська, то G – $N\check{C}$-група.

Твердження доведено.

1. *Otal J., Peña J.M.* Groups in which every proper subgroup is Černikov-by-nilpotent or nilpotent-by-Černikov // Archiv Math. – 1988. – Vol. 51. – P. 193-197.
2. *Napolitani F., Pegoraro E.* On groups with nilpotent-by-Černikov proper subgroups // Archiv Math. – 1997. – Vol. 69. – P. 89-94.
3. *Asar A.O.* Locally nilpotent p-groups whose proper subgroups are hypercentral or nilpotent-by-Černikov // J. London Math. Soc. – 2000. – Vol. (2) 61. – P. 412-422.
4. *Artemovych O.D.* Solvable groups with many conditions // Matematychni Studii. – 2000. – Vol. 13. – P. 23-32.
5. *Черников С.Н.* Группы с заданными свойствами систем подгрупп. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
6. *Robinson D.J.S.* A Course in the Theory of Groups. – Berlin: Springer, 1980.
7. *Артемович О.Д.* Неразложимые метабелевы группы // Укр. мат. журн. – 1990. – Т. 42. – С. 1252-1254.
8. *Hartley B.* Periodic locally soluble groups containing an element of prime order with Černikov centralizer // Quart. J. Math. Oxford. – 1982. – Ser.(2) 33. – P. 309-323.

GROUPS WITH MANY $A\check{C}$-SUBGROUPS OR $\check{C}A$-SUBGROUPS

Liliya YONYK

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: lila_yonyk@ua.fm

We prove that a locally graded group with the minimal condition on non-"abelian-by-Černikov" (respectively non-"Černikov-by-abelian") subgroups are abelian-by-Černikov (respectively Černikov-by-abelian). We obtain that a locally graded torsion non-perfect group with proper abelian-by-Černikov normal subgroups is also abelian-by-Černikov.

Key words: abelian-by-Černikov group, Černikov-by-abelian group.

Стаття надійшла до редколегії 31.03.2006

Прийнята до друку 24.10.2007

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2007. Вип.67. С.153-165 *Ser. Mech.-Math. 2007. Vol.67. P.153-165*

УДК 517.95

ПРО НОСІЙ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО 2b-ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Олесь КОРКУН, Сергій ЛАВРЕНЮК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1

Розглянуто задачу Коші для рівняння

$$u_t + \sum_{|\alpha|=2} D_x^\alpha(a_\alpha(z,t,u,D_xu,D_x^2u)) - \sum_{|\beta|=1} D_z^\beta(b_\beta(z,t,u,D_zu)) + c(z,t,u) = f.$$

Одержано умови існування та єдиності узагальненого розв'язку, компактності носія розв'язку.

Ключові слова: 2b-параболічне рівняння, задача Коші.

У 1960 році С. Д. Ейдельман [1] розглянув узагальнення параболічних за Петровським систем, ввівши термін "$\vec{2b}$-параболічні системи". У цих системах диференціюванню за різними просторовими змінними приписують різну вагу стосовно диференціювання за змінною t. Було розроблено теорію задачі Коші для лінійних систем зазначеного типу (див. праці [2]–[21]).

Мета цієї праці – дослідити задачу Коші для нелінійного диференціального рівняння з похідною першого порядку за часовою змінною, в якому за групою просторових змінних є диференціальний оператор четвертого порядку, і за всіма просторовими змінними – другого порядку. Зазначимо, що на праці, присвячені вивченню нелінійних рівнянь такого типу, ми не натрапляли.

Нехай $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^m$, $z = (x,y) \in \mathbb{R}^n$, $k+m=n$; $Q_\tau = \mathbb{R}^n \times (0,\tau)$, $0 < \tau < T$. Розглянемо в області Q_T рівняння

$$A(u) \equiv u_t + \sum_{|\alpha|=2} D_x^\alpha(a_\alpha(z,t,u,D_xu,D_x^2u)) - \sum_{|\beta|=1} D_z^\beta(b_\beta(z,t,u,D_zu)) + c(z,t,u) = f \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(z,0) = u_0(z), \quad z \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Тут $D_w^j u$ позначає вектор всіх похідних функції u за змінними $w = (w_1,\dots,w_l)$ порядку j $(j=1,2)$, причому $D_w^1 u \equiv D_w u$,

$$D_w^\gamma = \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial w_1^{\gamma_1}\dots\partial w_l^{\gamma_l}}, \quad |\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_l.$$

© Коркун Олесь, Лавренюк Сергій, 2007

Приймемо

$$| D_x^j u |_p = \left(\sum_{|\alpha|=j} | D_x^\alpha u |^p \right)^{1/p}, p \in [2, \infty), \ j = 1, 2;$$

$$| D_z u |_q = \left(\sum_{|\beta|=1} | D_z^\beta u |^q \right)^{1/q}, q \in [2, \infty).$$

Припускатимемо, що виконуються такі умови:

(**A**) функції $a_\alpha(\cdot, \cdot, \xi, \eta, \zeta)$ вимірні в Q_T для всіх $(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^{1+k+N(k)}$, функції $a_\alpha(z, t, \cdot, \cdot, \cdot)$ неперервні в $\mathbb{R}^{1+k+N(k)}$ майже для всіх $(z, t) \in Q_T$, де $N(k) -$ довжина вектора ζ_α, $|\alpha| = 2$; майже для всіх $(z, t) \in Q_T$ і для всіх$(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^{1+k+N(k)}$ правильні такі нерівності:

$$\sum_{|\alpha|=2} (a_\alpha(z, t, \xi, \eta, \zeta) - a_\alpha(z, t, \widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}, \widetilde{\zeta}))(\zeta_\alpha - \widetilde{\zeta}_\alpha) \geqslant A_0 \sum_{|\alpha|=2} |\zeta_\alpha - \widetilde{\zeta}_\alpha|^p,$$

$$|a_\alpha(z, t, \xi, \eta, \zeta)| \leqslant A_1 \sum_{|\sigma|=2} |\zeta_\sigma|^{p-1},$$ де A_0, $A_1 -$ додатні сталі, $p \in [2, \infty)$;

(**B**) функції $b_\beta(\cdot, \cdot, \xi, \eta)$ вимірні в Q_T для всіх $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^{1+m}$, функції $b_\beta(z, t, \cdot, \cdot)$ неперервні в $\mathbb{R}^{1+m}$ майже для всіх $(z, t) \in Q_T$ та $|\beta| = 1;$ майже для всіх $(z, t) \in Q_T$ і для всіх $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^{1+m}$ правильні такі нерівності:

$$\sum_{|\beta|=1} (b_\beta(z, t, \xi, \eta) - b_\beta(z, t, \widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}))(\eta_\beta - \widetilde{\eta}_\beta) \geqslant B_0 \sum_{|\beta|=1} |\eta_\beta - \widetilde{\eta}_\beta|^q,$$

$$|b_\beta(z, t, \xi, \eta)| \leqslant B_1 \sum_{|\sigma|=1} |\eta_\sigma|^{q-1},$$ де B_0, $B_1 -$ додатні сталі, $q \in [2, \infty)$;

(**C**) функція $c(\cdot, \cdot, \xi)$ вимірна в Q_T для всіх $\xi \in \mathbb{R}$, функція $c(z, t, \cdot)$ неперервна в $\mathbb{R}$ майже для всіх $(z, t) \in Q_T$; майже для всіх $(z, t) \in Q_T$ і для всіх $\xi \in \mathbb{R}$ правильні такі нерівності:

$(c(z, t, \xi) - c(z, t, \widetilde{\xi}))(\xi - \widetilde{\xi}) \geqslant C_0 |\xi - \widetilde{\xi}|^r$, $r \in (1, \infty)$,

$|c(z, t, \xi)| \leqslant C_1 |\xi|^{r-1}$, де стала $C_0 > 0$ при $r \geqslant 2$ і $C_0 = 0$ при $r \in (1, 2)$, $C_1 = \mathrm{const} > 0$;

(**F**) $$f(z, t) = \sum_{|\alpha|=2} D_x^\alpha f_\alpha(z, t) + \sum_{|\beta|\leqslant 1} (-1)^{|\beta|} D_z^\beta g_\beta(z, t);$$

$$f_\alpha \in L^{p'}(Q_T), \ |\alpha| = 2, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1; \ g_\beta \in L^{q'}(Q_T), \ |\beta| = 1, \ \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1;$$

$g_0 \in L^{r_0}(Q_T)$, $r_0 = \max\{2; r\}$;

(**U**) $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Позначимо через W_p простір, який є замиканням множини функцій $C([0,T];$ $C_0^\infty(\mathbb{R}^n))$ у банаховому просторі

$$\{u \in L^{r_0}(Q_T),\ D_x^\alpha u \in L^p(Q_T),\ |\alpha| = 2\}, \quad \|u\|_{W_p} = \|u\|_{L^{r_0}(Q_T)} + \|D_x^2 u\|_{L^p(Q_T)};$$

через W_q простір, який є замиканням множини функцій $C([0,T];C_0^\infty(\mathbb{R}^n))$ у банаховому просторі

$$\{u \in L^{r_0}(Q_T),\ D_z^\beta u \in L^q(Q_T),\ |\beta| = 1\}, \quad \|u\|_{W_q} = \|u\|_{L^{r_0}(Q_T)} + \|D_z u\|_{L^q(Q_T)}.$$

Означення 1. *Узагальненим розв'язком задачі (1), (2) називатимемо функцію* $u \in C([0,T];L^2(\mathbb{R}^n)) \bigcap W_q \bigcap W_p$, *яка задовольняє рівність*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} u(z,\tau)v(z,\tau)\,dz + \int\limits_{Q_\tau} \Bigg[-uv_t + \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(z,t,u,D_x u,D_x^2 u)D_x^\alpha v +$$
$$+ \sum_{|\beta|=1} b_\beta(z,t,u,D_z u)D_z^\beta v + c(z,t,u)v\Bigg]\,dz\,dt = \int\limits_{Q_\tau}\Bigg[\sum_{|\alpha|=2} f_\alpha(z,t)D_x^\alpha v +$$
$$+ \sum_{|\beta|\leqslant 1} g_\beta(z,t)D_z^\beta v\Bigg]\,dz\,dt + \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(z)v(z,0)\,dz \tag{3}$$

для всіх $\tau \in (0,T]$ *і для довільної функції* $v \in W_q \bigcap W_p$ *такої, що* $v_t \in L^2(Q_T)$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* (**A**), (**B**), (**C**), (**F**), (**U**). *Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1), (2).*

Доведення. Нехай R – довільне додатне фіксоване число

$$\Pi_x^R = \{x \in \mathbb{R}^k\ :\ |x| < R\},\ \Pi_y^R = \{y \in \mathbb{R}^m\ :\ |y| < R\},$$

$\Omega^R = \Pi_x^R \times \Pi_y^R$, $Q_\tau^R = \Omega^R \times (0,\tau)$, $S_T^R = \partial\Omega^R \times (0,T)$. Розглянемо задачу

$$A(u) = f^R, \quad (z,t) \in Q_T^R, \tag{4}$$

$$u(z,0) = u_0^R(z), \quad z \in \Omega^R, \tag{5}$$

$$u\mid_{S_T^R} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\mid_{\partial\Pi_x^R \times \Pi_y^R \times (0,T)} = 0, \tag{6}$$

де ν – вектор зовнішньої нормалі до $\partial\Pi_x^R \times \Pi_y^R \times (0,T)$

$$f^R(z,t) = \begin{cases} f(z,t), & (z,t) \in Q_T^R, \\ 0, & (z,t) \in Q_T \setminus Q_T^R, \end{cases} \qquad u_0^R(z) = \begin{cases} u_0(z), & z \in \Omega^R, \\ 0, & z \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^R. \end{cases}$$

На підставі умов теореми виконуються всі умови зауваження 1.13 [22, гл. 2, § 1.7]. Тому задача (4)–(6) має єдиний розв'язок u^R в сенсі розподілів такий, що $u^R \in L^\infty((0,T);L^2(\Omega^R))$,

$$u^R \in L^q((0,T);W_0^{1,q}(\Omega^R)) \cap L^p((0,T);L^p(\Pi_y^R;W_0^{2,p}(\Pi_x^R))) \cap L^{r_0}(Q_T^R) \equiv V_R(0,T).$$

Зокрема,

$$u_t^R = -\sum_{|\alpha|=2} D_x^\alpha (a_\alpha(\cdot,\cdot,u^R,D_x u^R,D_x^2 u^R)) + \sum_{|\beta|=1} D_z^\beta (b_\beta(\cdot,\cdot,u^R,D_z u^R)) - \\ -c(\cdot,\cdot,u^R) + f^R(\cdot,\cdot)$$

і

$$u_t^R \in V_R^*(0,T) \equiv L^{q'}((0,T);W^{-1,q'}(\Omega^R)) + L^{p'}((0,T);L^{p'}(\Pi_y^R;W^{-2,p'}(\Pi_x^R))) + L^{r_0'}(Q_T^R).$$

Тоді на підставі теореми 1.17 [23, с. 177] $u^R \in C([0,T];L^2(\Omega^R))$, оскільки

$$V_R(0,T) \subset L^2(Q_T^R) \subset V_R^*(0,T)$$

щільно і неперервно. Крім того, правильна формула інтегрування частинами

$$\langle u_t^R, u^R\rangle_{(V_R^*(t_1,t_2),V_R(t_1,t_2))} = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^R} |u^R(z,t_2)|^2\,dz - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^R} |u^R(z,t_1)|^2\,dz$$

для довільних t_1,t_2, $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T$, де через $\langle\cdot,\cdot\rangle_{(V_R^*(t_1,t_2),V_R(t_1,t_2))}$ позначено значення функціонала з простору $V_R^*(t_1,t_2)$ на елементах простору $V_R(t_1,t_2)$.

Продовжимо функцію u^R нулем на область $Q_T \setminus Q_T^R$. Нехай R набуває значення з множини натуральних чисел. Тоді матимемо послідовність функцій $\{u^s\}$. Очевидно, кожна функція $u^{s,l} = u^s - u^l$, $s > l$ задовольняє рівність

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |u^{s,l}(z,\tau)|^2\,dz + 2\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[\sum_{|\alpha|=2}(a_\alpha(z,t,u^s,D_x u^s,D_x^2 u^s) - a_\alpha(z,t,u^l,D_x u^l,D_x^2 u^l))D_x^\alpha u^{s,l} + \\ + \sum_{|\beta|=1}(b_\beta(z,t,u^s,D_z u^s) - b_\beta(z,t,u^l,D_z u^l))D_z^\beta u^{s,l} + (c(z,t,u^s) - c(z,t,u^l))u^{s,l}\Bigg]\,dz\,dt = \\ = \int\limits_{Q_\tau\setminus Q_\tau^l}\Bigg[\sum_{|\alpha|=2} f_\alpha^l(z,t)D_x^\alpha u^{s,l} + \sum_{|\beta|\leqslant 1} g_\beta^l(z,t)D_z^\beta u^{s,l}\Bigg]\,dz\,dt + \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega^l} |u_0^l(z)|^2\,dz, \quad \tau \in (0,T]. \tag{7}$$

Нехай ε – довільне як завгодно мале додатне фіксоване число. На підставі умов (**F**), (**U**) існує таке число $N_0 \in \mathbb{N}$, що для всіх $l > N_0$ права частина (7) менша від ε. Тоді, використовуючи умови (**A**), (**B**), (**C**), з (7) одержимо нерівність

$$\|u^{s,l}\|_{C([0,T];L^2(\mathbb{R}^n))} + \int\limits_{Q_T}\Big[A_0|D_x^2 u^{s,l}|_p^p + B_0|D_z u^{s,l}|_q^q + \upsilon C_0|u^{s,l}|^{r_0}\Big]\,dz\,dt < \varepsilon, \tag{8}$$

де $\upsilon = 0$ при $r < 2$ і $\upsilon = 1$ при $r \geqslant 2$. З (8) випливає, що послідовність $\{u^s\}$ фундаментальна у просторі $C([0,T];L^2(\mathbb{R}^n)) \cap W_q \cap W_p$. Позначимо через u границю послідовності $\{u^s\}$ у цьому просторі. Для кожного елемента u^s маємо рівність

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} u^s(z,\tau)v(z,\tau)\,dz + \int\limits_{Q_\tau}\Big[-u^s v_t + \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(z,t,u^s,D_x u^s,D_x^2 u^s)D_x^\alpha v +$$

$$+\sum_{|\beta|=1} b_\beta(z,t,u^s,D_z u^s)D_z^\beta v + c(z,t,u^s)v\Big]\,dz\,dt = \int\limits_{Q_\tau}\Big[\sum_{|\alpha|=2} f_\alpha^s(z,t)D_x^\alpha v +$$

$$+\sum_{|\beta|\leqslant 1} g_\beta^s(z,t)D_z^\beta v\Big]\,dz\,dt + \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0^s(z)v(z,0)\,dz, \tag{9}$$

правильну для всіх $\tau \in (0,T]$ і для всіх функцій $v \in W_q \cap W_p$ таких, що $v_t \in L^2(Q_T)$.

Функції a_α ($|\alpha|=2$), b_β ($|\beta|=1$) та c задовольняють умови леми 2.2 [23, с. 57]. Тому

$$a_\alpha(\cdot,\cdot,u^s,D_x u^s,D_x^2 u^s) \to a_\alpha(\cdot,\cdot,u,D_x u,D_x^2 u), \quad |\alpha|=2$$

слабко в $L^{p'}(Q_T)$,

$$b_\beta(\cdot,\cdot,u^s,D_z u^s) \to b_\beta(\cdot,\cdot,u,D_z u), \quad |\beta|=1$$

слабко в $L^{q'}(Q_T)$, $c(\cdot,\cdot,u^s) \to c(\cdot,\cdot,u^s)$ слабко в $L^{r'}(Q_T)$ при $s\to\infty$. Крім того, $u_0^s \to u_0$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$, $f_\alpha^s \to f_\alpha$ ($|\alpha|=2$) в $L^{p'}(Q_T)$, $g_\beta^s \to g_\beta$ ($|\beta|=1$) в $L^{q'}(Q_T)$, $g_0^s \to g_0$ в $L^{r_0'}(Q_T)$ при $s\to\infty$. Отже, перейшовши в (9) до границі при $s\to\infty$ одержимо, що функція u є узагальненим розв'язком задачі (1), (2). Крім того, для функції u правильна рівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|u(z,\tau)|^2\,dz + \int\limits_{Q_\tau}\Big[\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(z,t,u,D_x u,D_x^2 u)D_x^\alpha u +$$

$$+\sum_{|\beta|=1} b_\beta(z,t,u,D_z u)D_z^\beta u + c(z,t,u)u\Big]\,dz\,dt = \int\limits_{Q_\tau}\Big[\sum_{|\alpha|=2} f_\alpha(z,t)D_x^\alpha u +$$

$$+\sum_{|\beta|\leqslant 1} g_\beta(z,t)D_z^\beta u\Big]\,dz\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|u_0(z)|^2\,dz. \tag{10}$$

Для доведення єдиності припускаємо, що існують два узагальнені розв'язки u^1 і u^2. Тоді аналогічно як (10) одержимо рівність

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}|u^1(z,\tau)-u^2(z,\tau)|^2\,dz + 2\int\limits_{Q_\tau}\Big[\sum_{|\alpha|=2}(a_\alpha(z,t,u^1,D_x u^1,D_x^2 u^1)-$$

$$-a_\alpha(z,t,u^2,D_x u^2,D_x^2 u^2))D_x^\alpha(u^1-u^2) + \sum_{|\beta|=1}(b_\beta(z,t,u^1,D_z u^1)-b_\beta(z,t,u^2,D_z u^2))\times$$

$$\times D_z^\beta(u^1-u^2) + (c(z,t,u^1)-c(z,t,u^2))(u^1-u^2)\Big]\,dz\,dt = 0,$$

$\tau \in (0,T]$. Враховуючи умови (**A**), (**D**), (**C**), одержуємо, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |u^1(z,\tau) - u^2(z,\tau)|^2\, dz \leqslant 0, \quad \tau \in [0,T],$$

тобто $u^1(z,t) = u^2(z,t)$ майже всюди в Q_T. Теорему доведено.

Використовуючи методику та ідеї праці [24], дослідимо умови компактності та поведінки носія узагальненого розв'язку задачі Коші.

Нехай u – узагальнений розв'язок задачі (1), (2). Приймемо

$$\omega_m(T) = \sup_{y_m \in \mathbb{R}} \{z \in \operatorname{supp} u(\cdot, T)\}, \quad S_{m,f}(T) = \sup_{y_m \in \mathbb{R}} \{z \in \operatorname{supp} f,\ t \in (0,T)\},$$

$$S_m(T) = \sup\{S_{m,f}(T)\,;\, \omega_m(0)\};$$

$s_0 = 2q$, якщо $q \in \mathbb{N}$ і $s_0 = [q] + q + 1$ у протилежному випадку ($[q]$ – ціла частина q);

$$a_0 = \frac{q-2}{2q}\left(\frac{q-2}{2q} + \frac{1}{n+s_0-q}\right)^{-1}, \quad \vartheta_0 = a_0 + \frac{(1-a_0)q}{2}, \quad \nu_0 = \frac{\vartheta_0 q}{\vartheta_0 - 1}.$$

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* (**A**), (**B**), (**C**), (**F**), (**U**), $S_m(T) < \infty$. *Тоді*

$$\omega_m(T) \leqslant S_m(T) + MT^{\beta_0}\left(\int\limits_{Q_T} |D_z u|_q^q\, dz\, dt\right)^{1/\lambda_0},$$

де

$$\lambda_0 = \frac{1}{\nu_0 - s_0 + q}, \quad \beta_0 = \frac{1-a_0}{(\vartheta_0 - 1)(\nu_0 - s_0 + q)},$$

а стала M залежить від n, q.

Доведення. Нехай $\rho(y_m) = (y_m - \xi)^{s_0}$ при $y_m \geqslant \xi$ і $\rho(y_m) = 0$ при $y_m < \xi$, а $\xi \geqslant S_m(T)$. Повторюючи доведення леми 4.2 [24] для необмеженої області, одержимо рівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(z,\tau)|^2 \rho(y_m)\, dz + \int\limits_{Q_\tau}\Bigg[\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(z,t,u,D_x u, D_x^2 u) D_x^\alpha(u\rho) +$$
$$+ \sum_{|\beta|=1} b_\beta(z,t,u,D_z u) D_z^\beta(u\rho) + c(z,t,u)u\rho\Bigg]\, dz\, dt = 0, \quad \tau \in (0,T]. \qquad (11)$$

На підставі умов (**A**), (**B**), (**C**) з (11) випливає нерівність

$$\sup_{t\in[0,T]} \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(z,t)|^2 \rho(y_m)\, dz + \int\limits_{Q_T}\Big[A_0 |D_x^2 u|_p^p + B_0 |D_z u|_q^q + C_0 |u|^r\Big]\rho\, dz\, dt \leqslant$$
$$\leqslant s_0 B_1 \int\limits_{Q_T \cap \{y_m > \xi\}} \sum_{|\beta|=1} |D_z^\beta u|^{q-1} |u| (y_m - \xi)^{s_0 - 1}\, dz\, dt. \qquad (12)$$

Позначимо

$$F_{s_0}(\xi) = \sup_{t\in[0,T]} \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^n\cap\{y_m>\xi\}} |u(z,t)|^2 (y_m-\xi)^{s_0}\, dz,$$

$$E_{s_0}(\xi) = \int\limits_{Q_T\cap\{y_m>\xi\}} |D_z u|_q^q (y_m-\xi)^{s_0}\, dz\, dt.$$

Оскільки

$$\int\limits_{Q_T\cap\{y_m>\xi\}} \sum_{|\beta|=1} |D_z^\beta u|^{q-1} |u| (y_m-\xi)^{s_0-1}\, dz\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta}{q'} \int\limits_{Q_T\cap\{y_m>\xi\}} |D_z u|_q^q (y_m-\xi)^{s_0}\, dz\, dt + \frac{n}{q\delta^{q/q'}} \int\limits_{Q_T\cap\{y_m>\xi\}} |u|^q (y_m-\xi)^{s_0-q}\, dz\, dt,$$

то, вибравши $\delta = \dfrac{B_0 q'}{2s_0 B_1}$, з (12) одержимо нерівність

$$F_{s_0}(\xi) + E_{s_0}(\xi) \leqslant M_1 \int\limits_{Q_T\cap\{y_m>\xi\}} |u|^q (y_m-\xi)^{s_0-q}\, dz\, dt, \tag{13}$$

де $M_1 = \dfrac{2n}{q\delta^{q/q'}}$. На підставі нерівності Харді [24, лема А.2]

$$\int\limits_{Q_T\cap\{y_m>\xi\}} |u|^q (y_m-\xi)^{s_0-q}\, dz\, dt \leqslant$$

$$\left(\frac{q}{s_0-q+1}\right)^q \int\limits_{Q_T\cap\{y_m>\xi\}} |D_z u|_q^q (y_m-\xi)^{s_0}\, dz\, dt = M_2 E_{s_0}(\xi).$$

Отже, з (13) випливає оцінка

$$F_{s_0}(\xi) \leqslant M_1 M_2 E_{s_0}(\xi). \tag{14}$$

Використаємо лему А.1 [24]

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n\cap\{y_m>\xi\}} |u|^q (y_m-\xi)^{s_0-q}\, dz \leqslant M_3 \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n\cap\{y_m>\xi\}} |D_z u|_q^q (y_m-\xi)^{s_0-q}\, dz \right)^{a_0} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n\cap\{y_m>\xi\}} |u|^2 (y_m-\xi)^{s_0-q}\, dz \right)^{(1-a_0)q/2}, \tag{15}$$

де стала M_3 залежить від n, q. Отже, з (13), враховуючи (15) і (14), отримаємо

$$E_{s_0}(\xi) \leqslant M_1 M_2 M_3 T^{1-a_0} \left[E_{s_0-q}(\xi)\right]^{a_0+(1-a_0)q/2}. \tag{16}$$

Тоді на підставі леми А.4 [24] з (16) випливає оцінка

$$\omega_m(T) \leqslant S_m(T) + (\nu_0 - s_0 + q + 1) M_4^{1/[(\vartheta_0-1)(\nu_0-s_0+q)]} \times$$
$$\times T^{(1-a_0)/[(\vartheta_0-1)(\nu_0-s_0+q)]} \left[E_0(0)\right]^{1/(\nu_0-s_0+q)},$$

де $M_4 = M_1 M_2 M_3$. Отже, теорему доведено.

Зауваження 1. Нехай u_0 має обмежений носій за змінною y_m, f_α ($|\alpha| = 2$), g_β ($|\beta| \leqslant 1$) мають обмежені носії за змінною y_m майже для всіх $t \in (0, T)$. Тоді на підставі теореми 2 $u(\cdot, T)$ має обмежений носій за змінною y_m.

Нехай u – узагальнений розв'язок задачі (1), (2). Приймемо

$$\omega_k(T) = \sup_{x_k \in \mathbb{R}} \{z \in \operatorname{supp} u(\cdot, T)\}, \quad S_{k,f}(T) = \sup_{x_k \in \mathbb{R}} \{z \in \operatorname{supp} f,\ t \in (0, T)\},$$

$$S_k(T) = \sup\{S_{k,f}(T)\,;\,\omega_k(0)\} \quad \mathcal{E}_s(\xi) = \int\limits_{Q_T \cap \{x_k > \xi\}} \left(|D_z u|_q^q + |D_x^2 u|_q^q\right)(x_k - \xi)^s \, dz\, dt,$$

$$a = \frac{q-2}{2q}\left(\frac{q-2}{2q} + \frac{1}{n+[q]+1}\right)^{-1}.$$

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* (**A**), (**B**), (**C**), (**F**), (**U**), $S_m(T) < \infty$, $p = q$. *Тоді існує таке* x_k^0, *що*

$$\mathcal{E}_0(\xi) \leqslant \mu \exp\left[-\frac{\xi - x_k^0}{\mu(1 + T^{1-a})^{1/q}}\right]$$

при

$$\xi \geqslant \max\{(1 + T^{1-a})^{1/q}\,;\, x_k^0\},$$

де стала μ *залежить від* n, q, A_0, A_1, B_0, B_1. *Зокрема, якщо* $p = q = 2$, *то* $x_k^0 = S_k(T)$.

Доведення. Виберемо

$$\rho(x_k) = \begin{cases} (x_k - \xi)^s, & x_k \geqslant \xi, \\ 0, & x_k < \xi, \end{cases}$$

де $\xi \geqslant S_k(T)$, $s = [q] + q + 1$. Тоді залишається правильною рівність (11). На підставі умов (**A**), (**B**), (**C**) з (11) випливає нерівність

$$\sup_{t\in[0,T]}\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|u(z,t)|^2\rho(x_k)\,dz+\int\limits_{Q_T}\left[A_0|D_x^2u|_q^q+B_0|D_zu|_q^q+C_0|u|^r\right]\rho\,dz\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{Q_T\cap\{x_k>\xi\}}\left[sA_1\sum_{|\alpha|=2}|D_x^\alpha u|^{q-1}|u_{x_k}|(x_k-\xi)^{s-1}+\right.$$

$$\left.+s(s-1)A_1\sum_{|\alpha|=2}|D_x^\alpha u|^{q-1}|u|(x_k-\xi)^{s-2}+sB_1\sum_{|\beta|=1}|D_z^\beta u|^{q-1}|u|(x_k-\xi)^{s-1}\right]dz\,dt. \tag{17}$$

Позначимо

$$F_s(\xi)=\sup_{t\in[0,T]}\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n\cap\{x_k-\xi\}}|u(z,t)|^2(x_k-\xi)^s\,dz,$$

$$E_s(\xi)=\int\limits_{Q_T\cap\{x_k-\xi\}}|D_zu|_q^q(x_k-\xi)^s\,dz\,dt.$$

Використовуючи нерівність Гельдера і нерівність Харді [24, лема A.2], праву частину (17) можна оцінити виразом

$$\int\limits_{Q_T}\left[\frac{s^2\delta_1A_1}{q'}|D_x^2u|_q^q+\frac{s\delta_2B_1}{q'}|D_zu|_q^q\right]\rho\,dz\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q_T\cap\{x_k>\xi\}}\left[\left(\frac{s(s-1)k^2A_1}{q\delta_1^{q/q'}}\left(\frac{q}{s-2q+1}\right)^q+\frac{sk^2A_1}{q\delta_1^{q/q'}}\right)|D_zu|_q^q+\frac{sB_1}{q\delta_2^{q/q'}}|u|^q\right]\times$$

$$\times(x_k-\xi)^{s-q}\,dz\,dt,$$

$\delta_1>0$, $\delta_2>0$. Виберемо δ_1 і δ_2 з умов $A_0-\frac{s^2\delta_1A_1}{q'}=\frac{A_0}{2}$, $B_0-\frac{s\delta_2B_1}{q'}=\frac{B_0}{2}$. Тоді з (17) одержимо нерівність

$$F_s(\xi)+\mathcal{E}_s(\xi)\leqslant\mu_1\left[E_{s-q}(\xi)+\int\limits_{Q_T\cap\{x_k>\xi\}}|u|^q(x_k-\xi)^{s-q}\,dz\,dt\right], \tag{18}$$

де стала μ_1 залежить від A_0, A_1, B_0, B_1, q, k.

На підставі леми A.1 [24]

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n\cap\{x_k>\xi\}}|u|^q(x_k-\xi)^{s-q}\,dz\leqslant\mu_2\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n\cap\{x_k>\xi\}}|D_zu|_q^q(x_k-\xi)^{s-q}\,dz\right)^a\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n\cap\{x_k>\xi\}}|u|^2(x_k-\xi)^{s-q}\,dz\right)^{(1-a)/2}, \tag{19}$$

причому стала μ_2 залежить від n, q. Інтегруючи (19) за змінною t на проміжку $[0,T]$ і застосовуючи нерівність Гельдера, одержимо

$$\int\limits_{Q_T\cap\{x_k>\xi\}} |u|^q(x_k-\xi)^{s-q}\,dz\,dt \leqslant T^{1-a}\,[E_{s-q}(\xi)]^a\,[F_{s-q}(\xi)]^{(1-a)q/2}\,. \tag{20}$$

Крім того, на підставі нерівності Гельдера і нерівності Харді [24, лема А.2] праву частину (17) можна оцінити виразом

$$\mu_3\int\limits_{Q_T}(|D_x^2u|_q^q+|D_zu|_q^q)\rho\,dz\,dt.$$

Тому з (17) матимемо оцінку

$$F_s(\xi)\leqslant\mu_4\mathcal{E}_f(\xi). \tag{21}$$

Сталі μ_3, μ_4 залежать від A_0, A_1, B_0, B_1, q, n. Оскільки $E_s(\xi)\leqslant\mathcal{E}_s(\xi)$, то згідно з (18), (20), (21) отримаємо

$$\mathcal{E}_s(\xi)\leqslant\mu_5\left[\mathcal{E}_{s-q}(\xi)+T^{1-a}\left(\mathcal{E}_{s-q}(\xi)\right)^{a+(1-a)q/2}\right], \tag{22}$$

де стала μ_5 залежить від A_0, A_1, B_0, B_1, q, n. Зазначимо, що $a+\dfrac{(1-a)q}{2}\geqslant 1$ і $\mathcal{E}_s$ спадає при зростанні ξ. Тому існує таке x_k^0, що

$$\left(\mathcal{E}_{s-q}(\xi)\right)^{a+(1-a)q/2}\leqslant\mathcal{E}_s(\xi)$$

для всіх $\xi\geqslant x_k^0$. Отже, з (22) випливає нерівність

$$\mathcal{E}_s(\xi)\leqslant\mu_5(1+T^{1-a})\mathcal{E}_{s-q}(\xi),\quad \xi\geqslant x_k^0. \tag{23}$$

На підставі нерівності Гельдера маємо

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1(\xi)\leqslant&\left(\int\limits_{Q_T\cap\{x_k>\xi\}}|D_x^2u|_q^q(x_k-\xi)^s\,dz\,dt\right)^{1/s}\left(\int\limits_{Q_T\cap\{x_k>\xi\}}|D_x^2u|_q^q\,dz\,dt\right)^{1-1/s}+\\&+\left(\int\limits_{Q_T\cap\{x_k>\xi\}}|D_zu|_q^q(x_k-\xi)^s\,dz\,dt\right)^{1/s}\left(\int\limits_{Q_T\cap\{x_k>\xi\}}|D_zu|_q^q\,dz\,dt\right)^{1-1/s}\leqslant\\&\leqslant 2\,[\mathcal{E}_s(\xi)]^{1/s}\,[\mathcal{E}_0(\xi)]^{1-1/s}\,.\end{aligned} \tag{24}$$

Аналогічно одержимо нерівність

$$\mathcal{E}_{s-q}(\xi)\leqslant 2\,[\mathcal{E}_s(\xi)]^{1-q/s}\,[\mathcal{E}_0(\xi)]^{q/s}\,. \tag{25}$$

Отже, враховуючи (25), з (23) матимемо оцінку

$$\mathcal{E}_s(\xi)\leqslant 2\mu_5(1+T^{1-a})\,[\mathcal{E}_s(\xi)]^{1-q/s}\,[\mathcal{E}_0(\xi)]^{q/s}\,,$$

тобто

$$\mathcal{E}_s(\xi) \leqslant [2\mu_5(1+T^{1-a})]^{s/q}\mathcal{E}_0(\xi). \tag{26}$$

Тоді на підставі (26) з (24) одержимо

$$\mathcal{E}_1(\xi) \leqslant \mu_6(1+T^{1-a})^{1/q}\mathcal{E}_0(\xi), \tag{27}$$

де $\mu_6 = 2(2\mu_5)^{1/q}$.

Оскільки $\mathcal{E}_1'(\xi) = -\mathcal{E}_0(\xi)$, то (27) набуває вигляду

$$\mathcal{E}_1'(\xi) \leqslant -\frac{1}{\mu_6(1+T^{1-a})^{1/q}}\mathcal{E}_1(\xi),$$

звідки

$$\mathcal{E}_1(\xi) \leqslant \mathcal{E}_1(x_k^0)\exp\left[\frac{\xi - x_k^0}{\mu_6(1+T^{1-a})^{1/q}}\right], \quad \xi \geqslant x_k^0. \tag{28}$$

Зазначимо, що $\mathcal{E}_1(\xi) \geqslant \xi\mathcal{E}_0(\xi)$. Тому, враховуючи (27), з (28) одержимо

$$\xi\mathcal{E}_0(\xi) \leqslant \mu_6(1+T^{1-a})^{1/q}\mathcal{E}_0(x_k^0)\exp\left[\frac{\xi - x_k^0}{\mu_6(1+T^{1-a})^{1/q}}\right], \quad \xi \geqslant x_k^0.$$

Вибираючи $\xi \geqslant \max\{(1+T^{1-a})^{1/q}\,;\, x_k^0\}$, отримуємо твердження теореми. Зокрема, якщо $p = q = 2$, то $x_k^0 = S_k(T)$.

1. *Эйдельман С. Д.* Об одном классе параболических систем // Докл. АН СССР. – 1960. – Т. 133. – N 1. – С. 40-43.
2. *Матійчук М. І.* Фундаментальні матриці розв'язків загальних $2\vec{b}$-параболічних і $2\vec{b}$-еліптичних систем, коефіцієнти яких задовольняють інтегральну умову Гельдера // Доп. АН УРСР. – 1964. – N 8. – С. 1010-1013.
3. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – М., 1964.
4. *Матийчук М. И., Эйдельман С. Д.* О фундаментальных решениях и задаче Коши для параболических систем, коэффициенты которых удовлетворяют условию Дини // Труды семинара по функциональному анализу. – Воронеж, 1967. – Вып. 9. – С. 54-83.
5. *Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.* $2\vec{b}$-параболические системы // Труды семинара по функциональному анализу. – Киев, 1968. – Вып. 1. – С. 3-175, 271-273.
6. *Мартыненко М. Д., Бойко Д. Ф.* $2\vec{b}$-параболические граничные задачи // Дифференциальные уравнения. – 1978. – Т. 14. – N 12. – С. 2212-2222.
7. *Ивасишен С. Д.* Интегральное представление и начальные значения решений $2\vec{b}$-параболических систем // Укр. мат. журн. – 1990. – Т. 42. – N 4. – С. 500-506.
8. *Березан Л. П., Івасишен С. Д.* Фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для $2\vec{b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Доп. НАН України. – 1998. – N 12. – С. 7-12.
9. *Березан Л. П., Івасишен С. Д.* Про сильно вироджені на початковій гіперплощині $2\vec{b}$-параболічні системи // Вісник держ. ун-ту "Львівська політехніка". Прикладна математика. – 1998. – N 337. – С. 73-76.
10. *Матійчук М. І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ, 1999.

11. *Івасишен С. Д., Пасічник Г. С.* Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для дисипативних $2\vec{b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Доп. НАН України. – 1999. – N 6. – С. 18-22.

12. *Пасічник Г. С.* Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для дисипативних $2\vec{b}$-параболічних систем // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1999. – Вип. 54. – С. 140-151.

13. *Пасічник Г. С.* Про розв'язність задачі Коші для $2\vec{b}$-параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – Т. 42. – N 3. – С. 61-65.

14. *Березан Л. П.* Інтегральне зображення розв'язків узагальненої задачі Коші для сильно виродженої на початковій гіперплощині $2\vec{b}$-параболічної системи // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Зб. наук. праць. Вип. 46. Математика. – Чернівці, 1999. – С. 13-18.

15. *Березан Л. П.* Деякі властивості фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $2\vec{b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Зб. наук. праць. Вип. 76. Математика. – Чернівці, 2000. – С. 5-10.

16. *Івасишен С. Д., Пасічник Г. С.* Про задачу Коші для $2\vec{b}$-параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2000. – Т. 52. – N 11. – С. 1484-1496.

17. *Івасишен С. Д., Пасічник Г. С.* Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для одного класу параболічних систем з необмеженими коефіцієнтами і виродженням на початковій гіперплощині // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Зб. наук. праць. Вип. 76. Математика. – Чернівці, 2000. – С. 82-91.

18. *Івасишен С. Д., Кондур О. С.* Про матрицю Гріна задачі Коші та характеризацію деяких класів розв'язків для $2\vec{b}$-параболічних систем довільного порядку // Мат. студії. – 2000. – Т. 14. – N 1. – С. 73-84.

19. *Балабушенко Т. М.* Оцінки фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $2\vec{b}$-параболічних систем у необмежених відносно часової змінної областях та їх застосування // Вісник національного ун-ту "Львівська політехніка". – N 411. Прикладна математика. – 2000. – С. 6-11.

20. *Балабушенко Т. М.* Про оцінки в необмежених відносно часової змінної областях фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $2\vec{b}$-параболічних систем // Мат. студії. – 2002. – Т. 17. – N 2. – С. 163-174.

21. *Балабушенко Т. М., Івасишен С. Д.* Про властивості розв'язків $2\vec{b}$-параболічних систем у необмежених за часовою змінною областях // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – Т. 45. – N 4. – С. 19-26.

22. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., 2002.

23. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М., 1978.

24. *Bernis F.* Qualitative properties for some nonlinear higher order degenerate parabolic equations // Huston J. Mathem. – 1988. – Vol. 14. – N 3. – P. 319-352.

ON A SUPPORT OF A SOLUTION CAUCHY PROBLEM FOR THE NONLINEAR $2B$-PARABOLIC EQUATION

Oles' KORKUN, Serhiy LAVRENIUK

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universitetska Str., 1

There is considered Cauchy problem for the equation
$$u_t + \sum_{|\alpha|=2} D_x^\alpha (a_\alpha(z,t,u,D_x u, D_x^2 u)) - \sum_{|\beta|=1} D_z^\beta (b_\beta(z,t,u,D_z u)) + c(z,t,u) = f.$$
Conditions of the existence and uniqueness of a generalized solution and compactness of a support are obtained.

Key words: $2b$-parabolic equation, Cauchy problem.

Стаття надійшла до редколегії 03.01.2006

Прийнята до друку 24.10.2007

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2007. Вип.67. С.166-175 *Ser. Mech.-Math. 2007. Vol.67. P.166-175*

УДК 517.53

АНАЛІТИЧНІ В КРУЗІ З ПРОКОЛЕНИМ ЦЕНТРОМ ФУНКЦІЇ З ОБМЕЖЕНОЮ НЕВАНЛІННІВСЬКОЮ ХАРАКТЕРИСТИКОЮ

Іван КШАНОВСЬКИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1

Введено узагальнену характеристику Неванлінни для функцій, мероморфних у довільному кільці та в крузі з проколеним центром. Доведено узагальнену теорему Йенсена, вивчено структуру аналітичних у крузі з проколеним центром функцій з обмеженою характеристикою.

Ключові слова: мероморфна функція, лічильна функція, характеристика Неванлінни, формула Йенсена.

1. Позначення та формулювання основних результатів. Властивості та поведінка мероморфних у крузі та в багатозв'язних областях функцій вивчали багато авторів [1-10]. Нещодавно А.А. Кондратюк та А.Я. Христіянин запропонували новий підхід до теорії розподілу значень мероморфних функцій у кільцях інваріантних стосовно інверсії $z \to \frac{1}{z}$. Вони ввели однопараметричну характеристику, яка має властивості, схожі на властивості класичної характеристики Неванлінни мероморфних у крузі функцій. Мета нашої праці – дещо узагальнити поняття характеристики для функцій мероморфних у довільному кільці та в крузі з проколеним центром, а також вивчити аналітичні в крузі з проколеним центром функції з обмеженою характеристикою.

Нехай f – мероморфна функція в області $A = \{z : r_0 < |z| < R_0\}$, $0 \leqslant r_0 < 1$, $1 < R_0 < +\infty$. Якщо $w(r)$ – гладка, додатна і спадна функція на проміжку $[1, R_0)$, $w(1) = 1$, $w(R_0 - 0) = r_0$, а $\{b_j\}$ – послідовність полюсів функції f в області A, то введемо таке позначення:

$$N_w(r,f) = \sum_{\sqrt{rw(r)}<|b_j|} \log^+ \frac{r}{|b_j|} + \sum_{|b_j|\leqslant\sqrt{rw(r)}} \log^+ \frac{|b_j|}{w(r)}, \qquad 1 \leqslant r < R_0.$$

Позначимо через $n^{(1)}(t,f)$ лічильну функцію полюсів функції f в області $\{z : t \leqslant |z| < 1\}$, $r_0 < t < 1$, а через $n^{(2)}(t,f)$ – лічильну функцію полюсів

© Кшановський Іван, 2007

функції f в області $\{z : 1 \leqslant |z| < t\}$, $1 \leqslant t < R_0$. Через $T(r, f)$ позначатимемо класичну характеристику Неванлінни мероморфної в крузі функції f.

Теорема 1. *Нехай f – мероморфна функція в області $A = \{z : r_0 < |z| < R_0\}$, $\{a_i\}$ та $\{b_j\}$ – послідовності нулів і полюсів функції f в області A, відповідно. Тоді*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log|f(e^{i\theta})|d\theta = \\ = \int\limits_1^r \frac{n^{(2)}(t, 1/f)}{t}dt - \int\limits_1^r \frac{n^{(2)}(t, f)}{t}dt + k(\psi)\log r, \qquad 1 \leqslant r < R_0, \tag{1}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log|f(e^{i\theta})|d\theta = \\ = \int\limits_r^1 \frac{n^{(1)}(t, 1/f)}{t}dt - \int\limits_r^1 \frac{n^{(1)}(t, f)}{t}dt + k(\psi)\log r, \qquad r_0 < r \leqslant 1, \tag{2}$$

де $k(\psi) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}dz$, $\psi(z) = f(z)\dfrac{\prod\limits_{|b_j|=1}(z - b_j)}{\prod\limits_{|a_i|=1}(z - a_i)}$.

Теорема 2. *(теорема Йенсена для довільного кільця). Нехай f – мероморфна функція в області $A = \{z : r_0 < |z| < R_0\}$. Тоді*

$$N_w(r, \frac{1}{f}) - N_w(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log|f(w(r)e^{i\theta})|d\theta - \\ -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log|f(\sqrt{rw(r)}e^{i\theta})|d\theta, \qquad 1 \leqslant r < R_0. \tag{3}$$

Позначимо $m(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log^+|f(re^{i\theta})|d\theta$ і приймемо

$$m_w(r, f) = m(r, f) + m(w(r), f) - 2m(\sqrt{rw(r)}, f), \qquad 1 \leqslant r < R_0.$$

Означення 1. *Функцію*

$$T_w(r, f) = m_w(r, f) + N_w(r, f), \qquad 1 \leqslant r < R_0,$$

називатимемо w-характеристикою функції f.

Теорема 3. *Нехай f – не дорівнює тотожно сталій мероморфній в області A функції. Тоді*

$$T_w(r,f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} N_w\left(r, \frac{1}{f - e^{i\varphi}}\right) d\varphi, \qquad 1 \leqslant r < R_0.$$

Теорема 4. *Нехай функція f мероморфна в області A. Тоді її w-характеристика $T_w(r,f)$ невід'ємна, неперервна, неспадна на $[1, R_0)$, $T_w(1,f) = 0$. Крім того, якщо f – не дорівнює тотожно нулю, то $T_w(r,f) = T_w(r, 1/f)$.*

Теорема 5. *Нехай f – аналітична в області $\{z : 0 < |z| < R_0\}$ функція з обмеженою характеристикою $T_w(r,f)$. Тоді f продовжується до мероморфної в крузі $\{z : |z| < R_0\}$ функції з обмеженою неванліннівською характеристикою $T(r,f)$.*

2. Допоміжні твердження та результати.

Лема A. *([13]) Нехай f – аналітична в $A = \{z : 1/R_0 < |z| < R_0\}$, $1 < R_0 \leqslant \infty$, функція без нулів. Тоді для будь-якого замкненого шляху γ в A такого, що проходить через точку $z_0 = 1$, існує $k \in \mathbb{Z}$, що для функції $g(z) = z^{-k} f(z)$ виконується*

$$\int\limits_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)} dz = 0.$$

Насправді, правильна загальніша лема.

Лема B. *Нехай f – аналітична в $A = \{z : r_0 < |z| < R_0\}$, $0 \leqslant r_0 < 1$, $1 < R_0 < +\infty$, функція без нулів. Тоді для будь-якого замкненого шляху γ в A такого, що проходить через точку $z_0 = 1$, існує $k \in \mathbb{Z}$, що для функції $g(z) = z^{-k} f(z)$ виконується*

$$\int\limits_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)} dz = 0.$$

Доведення цієї леми повністю повторює доведення леми A, оскільки в доведенні леми A ніде не використовувалась симетричність області аналітичності функції, лише важливо, що коло $\{z : |z| = 1\}$ є підмножиною цієї області.

3. Доведення основних результатів.

Доведення теореми 1. Позначимо $A^r = \{z : 1 < |z| < r\}$ і розглянемо такі випадки: 1) $f(z) \neq 0, \infty$, $z \in \bar{A}^r$. Лема B гарантує існування такого $k = k(f)$, що в A^r визначена однозначна вітка $\log F(z)$, де $F(z) = z^{-k} f(z)$. Справді, нехай $z_0 = 1$, і вважаємо $\log F(z_0)$ визначеним. Приймемо

$$\log F(z) = \log F(z_0) + \int\limits_{z_0}^{z} \frac{F'(\zeta)}{F(\zeta)} d\zeta,$$

де інтеграл обчислюється вздовж шляху, що з'єднує z_0 і z в A^r.

Оскільки функція $\frac{\log F(z)}{z}$ – аналітична в області $\bar{A}^r$, то за теоремою Коші

$$\int\limits_{|z|=r} \frac{\log F(z)}{z} dz - \int\limits_{|z|=1} \frac{\log F(z)}{z} dz = 0.$$

Виділяючи дійсну частину, одержимо

$$\int\limits_0^{2\pi} \log|F(re^{i\theta})|d\theta - \int\limits_0^{2\pi} \log|F(e^{i\theta})|d\theta = 0.$$

Звідси випливає рівність

$$\int\limits_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta - \int\limits_0^{2\pi} \log|f(e^{i\theta})|d\theta - 2\pi k \log r = 0; \tag{4}$$

2) $f(z)$ має нулі і не має полюсів в області $\bar{A}^r$. Позначимо

$$\psi(z) = \frac{f(z)}{\prod\limits_{|a_i|=1} (z - a_i)}, \quad \varphi(z) = \frac{f(z)}{\prod\limits_{a_i \in \bar{A}^r} (z - a_i)}$$

і застосуємо формулу (4) до функції $\varphi(z)$. Оскільки ([15, c. 34])

$$\int\limits_0^{2\pi} \log|e^{i\theta} - a|d\theta = \log^+|a|, \quad a \in \mathbb{C}, \tag{5}$$

то для $a_i \in \bar{A}^r$ маємо

$$\int\limits_0^{2\pi} \log|re^{i\theta} - a_i|d\theta = \int\limits_0^{2\pi} \log|e^{i\theta} - \frac{a_i}{r}|d\theta + 2\pi \log r = \log^+\left|\frac{a_i}{r}\right| + 2\pi \log r = 2\pi \log r,$$

а також

$$\int\limits_0^{2\pi} \log|e^{i\theta} - a_i|d\theta = 2\pi \log|a_i|.$$

У результаті одержимо

$$\int\limits_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta - \int\limits_0^{2\pi} \log|f(e^{i\theta})|d\theta - 2\pi \sum_{a_i \in \bar{A}^r} \log\frac{r}{|a_i|} - 2\pi k(\varphi) \log r = 0. \tag{6}$$

Позначимо $g(z) = \dfrac{\psi(z)}{z - a}$, $a \in \mathbb{C}$, $|a| \neq 1$. Тоді

$$k(g) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} dz - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z - a} = \begin{cases} k(\psi) - 1, & |a| < 1, \\ k(\psi), & |a| > 1. \end{cases}$$

Звідси випливає, що $k(\varphi)=k(\psi)$, оскільки $\varphi(z)=\dfrac{\psi(z)}{\prod\limits_{1<|a_i|\leqslant r}(z-a_i)}$. Враховуючи те, що

$$\sum_{a_i\in\bar{A}^r}\log\frac{r}{|a_i|}=\int\limits_1^r\log\frac{r}{t}d(n^{(2)}(t,1/f)-n^{(2)}(1,1/f))dt+\sum_{|a_i|=1}\log r=\int\limits_1^r\frac{n^{(2)}(t,1/f)}{t}dt,$$

одержимо з рівності (6) формулу (1);
3) $f(z)$ має нулі і полюси в області $\bar{A}^r$. Результат є простим наслідком попереднього випадку, з огляду на можливість зображення функції f у вигляді $f=f_0\dfrac{1}{f_\infty}$, де f_0 і f_∞ – мероморфні в $\bar{A}^r$ функції без полюсів. Аналогічно доводиться формула (2).

Лема C. *Нехай* f *– аналітична в області* $\{z\,:\,0<|z|<R_0\}$ *функція. Якщо* $m(w(r),f)-2m(\sqrt{rw(r)},f)\leqslant C,\ 1<r_1\leqslant r<R_0$, *то* $m(t,f)=O(\log(1/t)),\ t\to 0$.

Доведення. Зробимо таку заміну змінної $x=\log\dfrac{1}{w(r)}$. Враховуючи строгу монотонність функції $w(r)$, маємо $0<x_1=\log\dfrac{1}{w(r_1)}\leqslant x<\infty$. Тоді $w(r)=e^{-x}$. Отже, $m(w(r),f)=m(e^{-x},f):=\lambda(x)$. Функція $\lambda(x)$ – опукла, тому в кожній точці інтервалу $x_1<x<\infty$ існує правостороння похідна $\lambda'_+(x)$, причому ця похідна зростає на зазначеному інтервалі ([14, с. 28, 85]). Можливі такі варіанти:
а) $\lambda'_+(x)\leqslant 0,\ x_1<x<\infty$. Тоді $\lambda(x)$ – не зростає, тому $\lambda(x)\leqslant C_0$, звідки негайно випливає твердження леми;
б) існує точка $x^*>x_1$ така, що $\lambda'_+(x^*)>0$. Оскільки $\lambda'_+(x)$ зростає, то $\lambda'_+(x)>0$ для всіх $x\geqslant x^*$. Тому функція $\lambda(x)$ зростає на інтервалі $x^*\leqslant x<\infty$. Враховуючи це, з умов леми одержимо

$$m(w(r),f)\leqslant 2m(\sqrt{rw(r)},f)+C\leqslant 2m(\sqrt{w(r)},f)+C,\quad r^*\leqslant r<R_0.$$

Це еквівалентно такій нерівності

$$\lambda(x)\leqslant 2\lambda(x/2)+C,\quad x^*\leqslant x<\infty.$$

З огляду на зростання функції λ, випливає, що $\lambda(x)=O(x),\ x\to\infty$.

Доведення теореми 2. Якщо $rw(r)<1$, то маємо

$$\begin{aligned}N_w(r,f)&=\sum_{1\leqslant|b_j|\leqslant r}\log\frac{r}{|b_j|}+\sum_{\sqrt{rw(r)}\leqslant|b_j|<1}\log\frac{r}{|b_j|}+\sum_{w(r)\leqslant|b_j|<\sqrt{rw(r)}}\log\frac{|b_j|}{w(r)}=\\&=\int\limits_1^r\log\frac{r}{t}dn^{(2)}(t,f)-\int\limits_{\sqrt{rw(r)}}^1\log\frac{r}{t}dn^{(1)}(t,f)-\int\limits_{w(r)}^{\sqrt{rw(r)}}\log\frac{t}{w(r)}dn^{(1)}(t,f)=\\&=\int\limits_1^r\frac{n^{(2)}(t,f)}{t}dt+\int\limits_{w(r)}^1\frac{n^{(1)}(t,f)}{t}dt-2\int\limits_{\sqrt{rw(r)}}^1\frac{n^{(1)}(t,f)}{t}dt.\end{aligned}\tag{7}$$

Використовуючи формули (1) і (2), можемо записати такі рівності

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\sqrt{rw(r)}e^{i\theta})|d\theta-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(e^{i\theta})|d\theta= \\ =\int_{\sqrt{rw(r)}}^{1}\frac{n^{(2)}(t,1/f)}{t}dt-\int_{\sqrt{rw(r)}}^{1}\frac{n^{(2)}(t,f)}{t}dt+k(\psi)\log\sqrt{rw(r)}, \tag{8}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(w(r)e^{i\theta})|d\theta-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(e^{i\theta})|d\theta= \\ =\int_{w(r)}^{1}\frac{n^{(1)}(t,1/f)}{t}dt-\int_{w(r)}^{1}\frac{n^{(1)}(t,f)}{t}dt+k(\psi)\log w(r). \tag{9}$$

Додавши рівності (1) та (9) і віднявши від цієї суми подвоєну рівність (8), з огляду на формулу (7), одержимо твердження теореми.
У випадку, коли $rw(r)\geqslant 1$, то отримуємо

$$N_w(r,f)=\sum_{1\leqslant|b_j|<\sqrt{rw(r)}}\log\frac{|b_j|}{w(r)}+\sum_{\sqrt{rw(r)}\leqslant|b_j|<r}\log\frac{r}{|b_j|}+\sum_{w(r)\leqslant|b_j|<1}\log\frac{|b_j|}{w(r)}= \\ =\int_1^{\sqrt{rw(r)}}\log\frac{t}{w(r)}dn^{(2)}(t,f)+\int_{\sqrt{rw(r)}}^{r}\log\frac{r}{t}dn^{(2)}(t,f)-\int_{w(r)}^{1}\log\frac{t}{w(r)}dn^{(1)}(t,f)= \\ =\int_1^{r}\frac{n^{(2)}(t,f)}{t}dt+\int_{w(r)}^{1}\frac{n^{(1)}(t,f)}{t}dt-2\int_1^{\sqrt{rw(r)}}\frac{n^{(2)}(t,f)}{t}dt. \tag{10}$$

Застосувавши формули (1) та (2) подібно, як у попередньому випадку, з огляду на рівність (10), одержимо формулу (3).

Доведення теореми 3. Доведення цієї теореми подібне до доведення класичної теореми Картана. Застосуємо формулу Йенсена (3) до функції $f(z)-e^{i\varphi}$. Одержимо

$$cN_w\left(r,\frac{1}{f-e^{i\varphi}}\right)-N_w(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})-e^{i\varphi}|d\theta+ \\ +\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(w(r)e^{i\theta})-e^{i\varphi}|d\theta-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\sqrt{rw(r)}e^{i\theta})-e^{i\varphi}|d\theta,\quad 1\leqslant r<R_0. \tag{11}$$

Проінтегруємо рівність (11) за змінною φ від 0 до 2π. Використання теореми Фубіні, а також рівності (5), завершує доведення теореми.

Доведення теореми 4. Якщо $rw(r) < 1$, то з (7) отримуємо, що функція $N_w(r,f)$ неперервна на $[1, R_0)$, $N_w(1,f) = 0$. Її правостороння похідна стосовно $\log r$

$$rN'_w(r,f) = n^{(2)}(r,f) - \frac{rw'(r)}{w(r)}n^{(1)}(w(r),f) + \left(1 + \frac{rw'(r)}{w(r)}\right)n^{(1)}(\sqrt{rw(r)},f) =$$
$$= n^{(2)}(r,f) + n^{(1)}(\sqrt{rw(r)},f) - \frac{rw'(r)}{w(r)}(n^{(1)}(w(r),f) - n^{(1)}(\sqrt{rw(r)},f)) \geqslant 0.$$

Оскільки $w'(r) < 0$, $N_w(1,f) = 0$, то функція $N_w(r,f)$ – невід'ємна, неспадна. У випадку, коли $rw(r) \geqslant 1$, з огляду на рівність (10), маємо

$$rN'_w(r,f) = n^{(2)}(r,f) - n^{(2)}(\sqrt{rw(r)},f) - \frac{rw'(r)}{w(r)}(n^{(1)}(w(r),f) + n^{(2)}(\sqrt{rw(r)},f)) \geqslant 0.$$

Отже, у двох випадках функція $N_w(r,f)$ неперервна, невід'ємна, неспадна. Рівність $T_w(r,f) = T_w(r,1/f)$ є негайним наслідком теореми 2.

Доведення теореми 5. З умови теореми випливає, що $m(w(r),f) - 2m(\sqrt{rw(r)},f) \leq$ $\leq const$. На підставі леми С маємо $m(t,f) = O(\log(1/t))$, $t \to 0$. Тоді з рівності (2) одержуємо

$$\int_t^1 \frac{n^{(1)}(\tau,1/f)}{\tau}d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(te^{i\theta})|d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(e^{i\theta})|d\theta + k(\psi)\log\frac{1}{t} \leqslant$$
$$\leqslant m(t,f) + k(\psi)\log\frac{1}{t} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(e^{i\theta})|d\theta \leqslant C\log(1/t), \quad t \to 0.$$

Звідси робимо висновок, що функція $f(z)$ в деякому околі точки $z = 0$ має скінченну кількість нулів. Справді, в протилежному випадку, якщо ми позначимо $p = [C]$, то одержимо

$$\int_t^1 \frac{n^{(1)}(\tau,1/f)}{\tau}d\tau \geqslant \int_t^{|a_{p+1}|}\frac{n^{(1)}(\tau,1/f)}{\tau}d\tau \geqslant (p+1)\log\frac{|a_{p+1}|}{t} =$$
$$= (p+1)\log|a_{p+1}| + (p+1-C)\log\frac{1}{t} + C\log\frac{1}{t} > C\log\frac{1}{t}, \quad t \to 0,$$

де $\{a_j\}$ – послідовність нулів функції f в області $\{z : 0 < |z| < 1\}$, пронумерованих в порядку спадання модулів. Отже, існує таке t_0, що $m(t,f) \leqslant C\log\frac{1}{t}$, $0 < t \leqslant t_0$ і $f(z)$ не має нулів в області $\{z : 0 < |z| \leqslant t_0\}$. Розглянемо функцію $h(\xi) = f(\xi t_0/2)$, $0 < |\xi| \leqslant 2$. Для цієї функції

$$m(\rho,h) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|h(\rho e^{i\theta})|d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(\frac{t_0\rho}{2}e^{i\theta})|d\theta = O\left(\log\frac{2}{t_0\rho}\right) = O\left(\log\frac{1}{\rho}\right),$$

при $\rho \to 0$.

Лема B гарантує існування такого $m \in \mathbb{Z}$, що в області $\{\xi : 0 < |\xi| < 2\}$ визначена однозначна вітка $\log G(\xi)$, де $G(\xi) = \xi^{-m} h(\xi)$. Розглянемо розвинення в ряд Лорана

$$\log G(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \xi^k.$$

Нехай $\xi = \rho e^{i\theta},\ 0 < \rho < 2$. Тоді

$$\log |G(\xi)| = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathrm{Re}(c_k \xi^k) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (c_k \xi^k + \bar{c}_k \bar{\xi}^k) = \\ = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (c_k \rho^k + \bar{c}_{-k} \rho^{-k}) e^{ik\theta},$$

$$\frac{1}{2}(c_k \rho^k + \bar{c}_{-k} \rho^{-k}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log |G(\rho e^{i\theta})| e^{-ik\theta} d\theta, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Оскільки $h(\xi)$ немає ні нулів, ні полюсів, то з формули (2) і з рівності

$$\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}, \quad x > 0,$$

одержуємо

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log^+ \left| \frac{1}{h}(\rho e^{i\theta}) \right| d\theta = O(\log \frac{1}{\rho}), \quad \rho \to 0.$$

Враховуючи цю рівність, маємо

$$|c_k \rho^k + \bar{c}_{-k} \rho^{-k}| \leqslant 2 \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |\log |G(\rho e^{i\theta})|| d\theta \leqslant 2(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |\log |h(\rho e^{i\theta})|| d\theta + |m| |\log \rho|) = \\ = 2(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log^+ |h(\rho e^{i\theta})| d\theta + \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log^+ |\frac{1}{h}(\rho e^{i\theta})| d\theta + |m| |\log \rho|) = O(\log \frac{1}{\rho}),\ \rho \to 0.$$

Звідси $c_k = 0$, $k < 0$. Отже, функція $\log G(\xi)$ аналітична в області $\{\xi : 0 \leqslant |\xi| < 2\}$, звідки випливає, що в околі точки $z = 0$ функція $f(z)$ допускає зображення $f(z) = z^m q(z), m \in \mathbb{Z}$, де функція $q(z)$ аналітична в околі точки $z = 0$, $q(0) \neq 0$. Якщо $m \geqslant 0$, то з обмеженості характеристики $T_w(r, f)$ негайно випливає, що f – аналітична в області $\{z : |z| < R_0\}$ функція з обмеженою характеристикою $T(r, f)$. У випадку, коли $m < 0$, маємо

$$T_w(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log |f(w(r) e^{i\theta})| d\theta - \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log |f(\sqrt{r w(r)} e^{i\theta})| d\theta + \\ + \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log^+ |f(r e^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log |q(w(r) e^{i\theta})| d\theta - \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log |q(\sqrt{r w(r)} e^{i\theta})| d\theta + \\ + \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log^+ |f(r e^{i\theta})| d\theta + m \log r \leqslant C, \qquad r \to R_0.$$

Звідси, враховуючи те, що $w(r) \to 0$, $r \to R_0$, а функція $q(z)$ аналітична в околі нуля, отримуємо, що f – мероморфна в області $\{z : |z| < R_0\}$ функція з обмеженою характеристикою $T(r, f)$.

---

1. *Hällström G. af* Über meromorphe Funktionen mit mehrfach zussammenhängenden Existenzgebieten // Acta Acad. Aboensis, Math. et Phys., 1940, **12**, Bd. 8, 1-100.
2. *Hällström G. af* Ein eindeutiger Ordnungsbegriff bei Funktionen mit nullberandetem Existenzgebiet // Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 117.
3. *Hällström G. af* Zur Berechnung der Bodenordnung oder Borenhyperordnung eindeutiger Funktionen // Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1995, Sar. AI, Bd. 193, 1-16.
4. *Oğuztöreli N.* Extension de la théorie de Nevanlinna aux domaines multiplement connexes // Istanbul Univ. fen fak. mecm., 1953, **A18**, Bd. 4, 384-419.
5. *Oğuztöreli N.* Représentations intégrales de la fonction caracteristique, de la fonction de nombre et de la forme sphérique normale généralisée et de extension d'un théorème de Borel // Istanbul Univ. fen fak. mecm., 1954, **A19**, Bd. 2, 79-85.
6. *Jenkins J. A.* Sur quelques aspects globaux du théorème de Picard // Ann. sci. Ecole norm. supér., 1955, **72**, B2, 151-161.
7. *Künzi H. P.* Über periodische Enden mit mehrfach zusammenhängendem Existenzgebiet // Math. Z., 1954, **61**, B2, 200-205.
8. *Wittich H.* Defekte Werte eindeutiger analytisher Funktionen // Arch. Math. 1958, 9, 1-2, 65-74.
9. *Mathevossian H. H.* On a factorisation of meromorphic function in multiply connected domain and some of its applications // Izvest. Acad. Nauk Arm. SSR, 1974, **IX**, Bd. 5, 387-408. (in Russian)
10. *Mathevossian H. H.* An analog of $N\{\omega\}$ classes for annuli // Mat. zamet., 1977, Bd. 2, 173-181. (in Russian)
11. *Khrystiyanyn A., Kondratyuk A.* On the Nevanlinna Theory for meromorphic functions on annuli. I // Matematychni Studii 23 (2005), 19-30.
12. *Khrystiyanyn A., Kondratyuk A.* On the Nevanlinna Theory for meromorphic functions on annuli. II // Matematychni Studii 24 (2005), 57-68.
13. *Kshanovskyy I.* An analog of Poisson-Jensen formula for annuli // Matematychni Studii 24 (2005), 147-158.
14. *Hayman W.K., Kennedy P.* Subharmonic functions, Vol. 1, London: Academic Press. – 1980.
15. *Гольдберг А.А., Островский И.В.* Распределение значений мероморфных функций, М., 1970.

ON THE ANALYTIC IN PUNCTURED DISCS FUNCTIONS WITH BOUNDED NEVANLINNA CHARACTERISTIC

Ivan KSHANOVSKYY

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1

A generalized Nevanlinna characteristic for meromorphic in punctured discs functions is introduced. A counterpart of the Jensen formula is proved. The structure of analytic functions with bounded Nevanlinna characteristic is studied.

Key words: meromorphic function, counting function, Nevanlinna characteristic, Jensen formula.

Стаття надійшла до редколегії 08.11.2006

Прийнята до друку 24.10.2007

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2007. Вип.67. С.176-190 *Ser. Mech.-Math. 2007. Vol.67. P.176-190*

УДК 517.95

УЗАГАЛЬНЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ПІВЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ ІЗ СИЛЬНИМИ СТЕПЕНЕВИМИ ОСОБЛИВОСТЯМИ НА МЕЖІ ОБЛАСТІ

Галина ЛОПУШАНСЬКА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: diffeq@franko.lviv.ua

Одержано достатні умови існування розв'язку крайової задачі для квазілінійного з лінійною головною частиною еліптичного рівняння порядку $2m$ при заданих на межі області узагальнених функціях із сильними степеневими особливостями.

Ключові слова: півлінійне еліптичне рівняння, узагальнена функція, ваговий функційний простір, нелінійне інтегродиференціальне рівняння.

У багатьох працях (див., наприклад, [1-13]) досліджуються властивості розв'язків півлінійних еліптичних рівнянь.

У [4] для $q \in (1, q_c)$, де $q_c = \frac{n+1}{n-1}$, у [5] для $q = 2$, у [6] для $q \in [q_c, 2]$, [7] для $q > q_c$ (у тім числі для $q > 2$) досліджується природа крайових значень g розв'язків задачі

$$\Delta u = |u|^{q-1}u, \quad x \in \Omega, \qquad u\,|_{\partial\Omega} = g.$$

При $q \in (1, q_c)$ визначено однозначну розв'язність задачі для довільної g із простору обмежених мір Бореля на $\partial\Omega$. З цих результатів також випливає, що при $q \geq q_c$ узагальнених крайових значень-мір може не існувати. Задачі з мірами також вивчали у [8-12].

Відомо (див. бібліогр. у [14]), що розв'язок лінійного однорідного рівняння набуває узагальнених крайових значень із простору $(C^\infty)'$ тоді і тільки тоді, коли він належить до певного вагового L_1-простору.

У [14-17] запропоновано метод дослідження крайових задач для квазілінійних з головними лінійними частинами (далі півлінійних) еліптичних і параболічних рівнянь при заданих на межі області узагальнених функціях. З результатів [16] випливає, зокрема, розв'язність задачі

$$\Delta u = |u|^q, \quad x \in \Omega, \qquad u\,|_{\partial\Omega} = g$$

© Лопушанська Галина, 2007

у певному ваговому L_1-просторі при довільній $g \in (C^\infty(S))'$ та при $q \in (0, q_0)$, де $q_0 \in (0,1)$ і залежить від порядку сингулярності узагальненої функції g.

Тут досліджуємо розв'язність нормальної крайової задачі для півлінійного еліптичного рівняння порядку $2m < n$ в обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, у ваговому L_1-просторі при заданих на межі області узагальнених функціях. З'ясовуємо, в якому сенсі розв'язок рівняння набуває на межі заданих узагальнених крайових значень. Для доведення розв'язності використовуємо метод зведення такої узагальненої крайової задачі до інтегродиференціального рівняння у ваговому L_1-просторі.

1. Основні позначення, функціональні простори. Нехай Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею S класу C^∞, у ній задано еліптичний диференціальний вираз $A(x,D) = \sum\limits_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha$ порядку $2m < n$, $a_\alpha \in C^\infty(\overline{\Omega})$, на S задані крайові диференціальні вирази $B_j(x,D) = \sum\limits_{|\alpha| \leq m_j} b_{j\alpha}(x) D^\alpha$, $b_{j\alpha} \in C^\infty(S)$, $j = \overline{1,m}$, система $\{B_j(x,D)\}_{j=1}^m$ нормальна і задовольняє умову Лопатинського для $A(x,D)$. Нехай $\{T_j(x,D)\}_{j=1}^m$, $\{\hat{B}_j(x,D)\}_{j=1}^m$, $\{\hat{T}_j(x,D)\}_{j=1}^m$ – такі нормальні системи диференціальних виразів відповідно порядків $\hat{m}_j, 2m - m_j - 1, 2m - \hat{m}_j - 1$, $j = \overline{1,m}$ (див., наприклад, [18]), що правильна формула Гріна

$$\int\limits_\Omega (vAu - uA^*v)dx = \sum_{j=1}^m \int\limits_S (\hat{T}_j v B_j u - \hat{B}_j v T_j u) dS, \ u, v \in C^\infty(\overline{\Omega}). \qquad (1)$$

Нехай ε_0 – фіксоване мале число, таке що при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ паралельні до поверхні S поверхні $S_\varepsilon = \{x_\varepsilon = x + \varepsilon\nu(x) : x \in S\}$ також є нескінченно диференційовними. Тут $\nu(x)$ – орт внутрішньої нормалі до поверхні S у точці $x \in S$.

Для довільної фіксованої точки $\hat{x} \in S$ позначаємо через $\varrho(x, \hat{x})$ $(x \in \overline{\Omega})$ нескінченно диференційовну функцію, яка додатна в $\overline{\Omega} \backslash \{\hat{x}\}$, має порядок $|x - \hat{x}|$ у деякому околі точки $\hat{x}$, $\varrho(\hat{x}, \hat{x}) = 0$, через $\varrho(x)$ – нескінченно диференційовну функцію, яка додатна всередині Ω та має порядок відстані $d(x)$ від точки $x \in \Omega$ до S. Також вважаємо, що $\varrho(x) = 1$ при $d(x) \geq \varepsilon_0$, $\varrho(x, \hat{x}) = 1$ при $|x - \hat{x}| \geq \varepsilon_0$ для всіх $x \in \overline{\Omega}$.

Як у [14, р. 2], при $s \geq 0$ та $k \geq -\hat{m} - 1$, де $\hat{m} = \min\limits_{1 \leq j \leq m} (\hat{m}_j)$, визначаємо функційні простори:

$Z_s(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \varrho^{|\alpha| - s} D^\alpha \varphi \in C(\overline{\Omega})\ \forall \alpha$, якщо s неціле та $\frac{D^\alpha \varphi}{ln \varrho} \in C(\overline{\Omega})$, якщо $|\alpha| = s \in N \cup \{0\}\}$,

$Z_k(\overline{\Omega}, \hat{x}) = \{\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \{\hat{x}\}) : \varrho^{|\alpha| - k}(\cdot, \hat{x}) D^\alpha \varphi \in C(\overline{\Omega})\ \forall \alpha$, якщо k неціле та $\frac{D^\alpha \varphi}{ln \varrho(\cdot, \hat{x})} \in C(\overline{\Omega})$, якщо $|\alpha| = k \in N \cup \{0\}\}$,

$Z_s(S, \hat{x}) = \{\varphi \in C^\infty(S)$: $\varrho^{|\alpha| - s}(\cdot, \hat{x}) D^\alpha \varphi \in C(S)\ \forall \alpha$, якщо s неціле та
$\frac{D^\alpha \varphi}{ln \varrho(\cdot, \hat{x})} \in C(S)$, якщо $|\alpha| = s \in N \cup \{0\}\}$,

$X_s(\overline{\Omega}) = \{\psi \in C^\infty(\overline{\Omega}) : A^* \psi = O(\varrho^s(x))$ при $d(x) \to 0$, $\hat{B}_j \psi = 0, j = \overline{1,m}\}$,

$X_k(\overline{\Omega}, \hat{x}) = \{\psi \in Z_{k+2m}(\overline{\Omega}, \hat{x}) : A^* \psi(x) = O(\varrho^k(x, \hat{x}))$ при $|x - \hat{x}| \to 0$,
$\hat{T}_j \psi \in Z_{k + m_j + 1}(S, \hat{x}), \hat{B}_j \psi = 0,\ j = \overline{1,m}\}$ (згідно з [14], [17] простори $X_s(\overline{\Omega})$ та $X_k(\overline{\Omega}, \hat{x})$ непорожні),

$M_s(\Omega) = \{v \in L_{1,loc}(\Omega) : ||v||_s = \int\limits_\Omega \varrho^s(x) |v(x)| dx < +\infty\}$,

$M_{s,r}(\Omega) = \{v \in W^r_{1,loc}(\Omega) : ||v||_{s,r} = \int\limits_{\Omega} \sum\limits_{|\gamma|\leq r} \varrho^{s+|\gamma|}(x)|D^\gamma v(x)|dx < +\infty\}$,

$M_{k,r}(\Omega, \hat{x}) = \{v \in W^r_{1,loc}(\Omega) : ||v||_{k,r,\hat{x}} = \int\limits_{\Omega} \sum\limits_{|\gamma|\leq r} \varrho^{k+|\gamma|}(x, \hat{x})|D^\gamma v(x)|dx < +\infty\}$,

$M_k(\Omega, \hat{x}) = M_{k,0}(\Omega, \hat{x})$, $D(S) = C^\infty(S)$.

Як у [14, р. 2], кажемо, що послідовність $\varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$ у просторі $Z_k(\overline{\Omega}, \hat{x})$ (відповідно $Z_k(S, \hat{x})$), якщо для довільного мультиіндексу α рівномірно в $\overline{\Omega}$ (S) збігається послідовність $\varrho^{|\alpha|-k}(\cdot, \hat{x})D^\alpha\varphi$ при k нецілому та послідовність $\frac{D^\alpha\varphi}{ln\varrho(\cdot,\hat{x})}$ при $|\alpha| = k \in N \cup \{0\}$. Зауважимо, що $Z_k(\overline{\Omega}, \hat{x}) \subset C^l(\overline{\Omega})$, $Z_k(S, \hat{x}) \subset C^l(S)$ при $k > l \in N \cup \{0\}$, а також $Z_{k_1}(\overline{\Omega}, \hat{x}) \subset Z_{k_2}(\overline{\Omega}, \hat{x})$ при $k_1 > k_2$ [14].

Оскільки $\varrho^{-k}\varphi \in C(\overline{\Omega})$ при $\varphi \in Z_k(\overline{\Omega})$, то при такій φ та при $v \in M_k(\Omega)$ існує і скінчений $\int_\Omega \varphi v dx = \int_\Omega \varrho^{-k}\varphi\varrho^k v dx$. Звідси $M_k(\Omega)$ (та відповідно $M_k(\Omega, \hat{x})$) є прикладами просторів регулярних узагальнених функцій на просторах $Z_k(\Omega)$ (відповідно $Z_k(\overline{\Omega}, \hat{x})$).

Використовуємо позначення:

$M_{k,r,C}(\Omega, \hat{x}) = \{u \in M_{k,r}(\Omega, \hat{x}) : ||u||_{k,r,\hat{x}} \leq C\}$ – куля в $M_{k,r}(\Omega, \hat{x})$,

$V' = V'(S)$ – простір лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій) на просторі гладких функцій $V = V(S)$,

$< \varphi, F >$ – значення узагальненої функції $F \in V'$ на основній функції $\varphi \in V$,

запис $s(F) \leq s$ при $s \in N$ означає, що порядок сингулярності узагальненої функції $F \in V'(S)$ не більший, ніж s, тобто (див. [19, 20])

$$< \varphi, F >= \sum_{|\alpha|\leq s} \int\limits_S D^\alpha\varphi f_\alpha dS \quad \forall\varphi \in V(S), \tag{2}$$

де $f_\alpha \in L_1(S)$ у випадку $V(S) = D(S)$, відповідно $\varrho^{k-|\alpha|}f_\alpha \in L_1(S)$ у випадку $V(S) = Z_k(S, \hat{x})$, $k > s$ для всіх $|\alpha| \leq s$ та k нецілому, $\ln\varrho(\cdot, \hat{x})D^\alpha F \in L_1(S)$, якщо $|\alpha| = k \in N\cup\{0\}$; $s(F) \leq s$ при $s \leq 0$, якщо $D^\alpha F \in L_1(S)$ для всіх $|\alpha| \leq -s$ у випадку $V(S) = D(S)$, $\varrho^{|\alpha|-k}D^\alpha F \in L_1(S)$ для всіх $|\alpha| \leq -s$ у випадку $V(S) = Z_k(S, \hat{x})$, $k > s$.

Якщо $F \in D'(S)$ та $s(F) \leq s \in N \cup \{0\}$, то $F \in (C^s(S))'$ [20], тоді, враховуючи вкладення $Z_k(S, \hat{x}) \subset C^s(S)$ при $k > s$, одержуємо $F \in (C^s(S))' \subset Z'_k(S, \hat{x})$ при $k > s$ та довільній $\hat{x} \in S$. При довільній $\varphi \in Z_k(S, \hat{x})$ маємо $D^\alpha\varphi \in Z_{k-|\alpha|}(S, \hat{x})$, при $f_\alpha \in L_1(S)$ та $|\alpha| \leq s < k$ маємо $\varrho^{k-|\alpha|}f_\alpha \in L_1(S)$, тоді при $F \in D'(S)$ порядку сингулярності $s(F) \leq s$ виконується (2) також при $\varphi \in Z_k(S, \hat{x})$, а отже, $F \in Z'_k(S, \hat{x})$ і має в сенсі відповідного означення $s(F) \leq s$.

Між точками S та S_ε є взаємооднозначна відповідність: $x_\varepsilon = x + \varepsilon\nu(x) = \psi_\varepsilon(x)$, $x \in S$, тоді $x = \psi_\varepsilon^{-1}(x_\varepsilon)$. Гомеоморфізми ψ та ψ^{-1} нескінченно диференційовні та обмежені разом з усіма похідними [18].

Побудуємо продовження $\varphi \in V(S)$ до нескінченно диференційовної та фінітної в $\overline{\Omega}$ функції $(\psi^*_\varepsilon\varphi)(x)$, наприклад, так: $(\psi^*_\varepsilon\varphi)(x_\varepsilon) = \varphi(\psi_\varepsilon^{-1}(x_\varepsilon)) = \varphi(x)$ для $\varepsilon \in [0, \frac{\varepsilon_0}{2}]$ та $(\psi^*_\varepsilon\varphi)(x_\varepsilon) = 0$ для $\varepsilon > \varepsilon_0$. Одночасно визначено значення $\psi^*_\varepsilon\varphi$ на поверхнях S_ε.

Якщо $\tilde{B}_j(x, \frac{\partial}{\partial x}) = \sum\limits_{|\alpha|\leq j} \tilde{b}_{j\alpha}(x)(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha$, $j = \overline{0, 2m-1}$ – система Діріхле порядку $2m$ на S, то продовжуючи з S всередину Ω коефіцієнти $\tilde{b}_{j\alpha}$ операторів $\tilde{B}_j(x, \frac{\partial}{\partial x})$, на S_ε визначаємо $\tilde{B}_j(x_\varepsilon, \frac{\partial}{\partial x_\varepsilon})v = \sum\limits_{|\alpha|\leq j} (\psi^*\tilde{b}_{j\alpha})(x_\varepsilon)(\frac{\partial}{\partial x_\varepsilon})^\alpha v(x_\varepsilon)$, $v \in V(\overline{\Omega})$. Так визначені оператори $\tilde{B}_j(x_\varepsilon, \frac{\partial}{\partial x_\varepsilon})$, $j = \overline{0, 2m-1}$ також утворюють систему Діріхле на S_ε (див. ([21, ч.111]). У [22] на прикладі задачі Діріхле для системи рівнянь другого порядку показано, що при досить малих ε умова Лопатинського виконується на S_ε, якщо вона виконувалась на S.

Означення. Кажемо, що регулярна всередині області Ω функція u набуває на S узагальнених крайових значень $F \in V'(S)$ (див. бібліогр. у [14]), якщо існує

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{S_\varepsilon} \varphi(x_\varepsilon) u(x_\varepsilon) dS =< \varphi, F >, \ \varphi \in V(S).$$

Ця границя не залежить від того, як визначено продовження $\varphi \in V(S)$ до функції з $V(S_\varepsilon)$. Справді, переходячи до інтегрування за S, одержуємо

$$\int\limits_{S_\varepsilon} \varphi(x_\varepsilon) u(x_\varepsilon) dS_\varepsilon = \int\limits_{S} \varphi(x + \varepsilon\nu(x)) u(x + \varepsilon\nu(x)) W_\varepsilon(x) dS,$$

де $W_\varepsilon(x)$ – якобіан перетворення $x_\varepsilon = x + \varepsilon\nu(x), x \in S$. За лемою [19, с. 70] з існування границі цього виразу випливає, що існує також

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{S} \lim_{\varepsilon \to 0} (W_\varepsilon(x) \varphi(x + \varepsilon\nu(x))) u(x + \varepsilon\nu(x)) dS = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{S} \varphi(x) u(x + \varepsilon\nu(x)) dS =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{S_\varepsilon} \varphi(x) u(x_\varepsilon) dS_\varepsilon.$$

Зауважимо, що $W_\varepsilon \to 1$ при $\varepsilon \to 0$.

Через $D_r v$ позначаємо $M(r)$-вимірний вектор, компонентами якого є функція v та її похідні до порядку $r \leq 2m - 1$.

Вважаємо функцію $f(x, z)$ визначеною та неперервною в $\Omega \times \mathbb{R}^{M(R)}$.

Теорема 1. *Нехай s – довільне ціле невід'ємне число, $f \in C(\Omega \times \mathbb{R}^{M(r))})$, $u \in C^{2m-1}(\Omega) \cap M_s(\Omega)$ – узагальнений розв'язок рівняння*

$$A(x, D) u(x) = f(x, D_r u(x)), \ x \in \Omega \tag{3}$$

та існує

$$\int\limits_{\Omega} |f(x, D_r u(x))| dx < +\infty. \tag{4}$$

Тоді для довільних крайових диференціальних виразів $\tilde{B}_j(x, D)$, $j = \overline{0, 2m-1}$ з нескінченно диференційовними коефіцієнтами, які утворюють систему Діріхле, функції $\tilde{B}_j u$ набувають на S узагальнених крайових значень $\tilde{F}_j \in D'(S)$ ($\tilde{F}_j \in \in Z'_{k+j+1}(S, \hat{x})$ для довільних $k > s$, $\hat{x} \in S$) порядків сингулярностей $s(\tilde{F}_j) \leq s + j + 1$ ($< k + j + 1$), $j = \overline{0, 2m-1}$.

Теорема 1 є узагальненням теореми 1.4 із [14] на нелінійний випадок і доводиться подібно. Так само доводиться таке: якщо для узагальненого розв'язку $u \in C^{2m-1}(\Omega)$ рівняння (3) виконується умова (4), $(\frac{\partial}{\partial \nu})^t u$ для всіх $t = \overline{0, 2m-1}$ набувають узагальнених крайових значень із $Z'_{k+t+1}(S, \hat{x})$ (відповідно $D'(S)$) порядків сингулярностей $\leq s+t+1$, де $s < k$, то $u \in M_k(\Omega, \hat{x})$ (відповідно $u \in M_s(\Omega)$) і навіть $u \in M_{k,2m-1}(\Omega, \hat{x})$ (відповідно $u \in M_{s,2m-1}(\Omega)$).

2. Формулювання узагальненої крайової задачі. Нехай функція $f(x, z)$ визначена та неперервна в $\Omega \times \mathbb{R}^{M(r)}$, $F_j \in Z'_{p_j}(S, \hat{x})$, $s(F_j) \leq s_j < p_j$, $p_j \geq 0$, $j = \overline{1, m}$. Розглядаємо нормальну еліптичну крайову задачу

$$A(x, D)u = f(x, D_r u), x \in \Omega, \quad B_j(x, D)u \mid_S = F_j, \quad j = \overline{1, m} \tag{5}$$

за умови, що відповідна їй лінійна однорідна крайова задача однозначно розв'язна.

Далі вважаємо

$$k > \hat{k} = \max\{\max_{1 \leq j \leq m}(p_j - m_j - 1), -\hat{m} - 1\}, \quad s \geq k_0 = \max\{0, \max_{1 \leq j \leq m}(s_j - m_j - 1)\}.$$

Формулювання 1 задачі (5). Знайти узагальнений розв'язок $u \in M_{k,r}(\Omega, \hat{x}) \cap$ $\cap C^{2m-1}(\Omega)$ рівняння (3), який задовольняє крайові умови

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{S_\varepsilon} \varphi B_j u dS = < \varphi, F_j > \quad \forall \varphi \in Z_{p_j}(S, \hat{x}), \ j = \overline{1, m} \tag{6}$$

та існують

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{S_\varepsilon} \varphi T_j u dS \quad \forall \varphi \in Z_{k+\hat{m}_j+1}(S, \hat{x}), \ j = \overline{1, m}. \tag{7}$$

Формулювання 2 задачі (5). Знайти функцію $u \in M_{k,r}(\Omega, \hat{x})$, яка задовольняє тотожність

$$\int\limits_\Omega A^* \psi u dx = \int\limits_\Omega \psi f dx + \sum_{j=1}^m < \hat{T}_j \psi, F_j > \quad \forall \psi \in X_k(\overline{\Omega}, \hat{x}). \tag{8}$$

Зрозуміло, що інтеграл $\int_\Omega \psi(x) f(x, D_r u(x)) dx$ скінчений для розв'язку u задачі та всіх $\psi \in X_k(\overline{\Omega}, \hat{x})$ і для цього достатньо виконання умови (4).

При $F_j \in D'(S)$, $s(F_j) \leq s_j$, $s_j \geq 0$, $j = \overline{1, m}$ у формулюванні 1 задачі вважаємо $u \in M_s(\Omega) \cap C^{2m-1}(\Omega)$, вимагаємо виконання умов (6) для довільної $\varphi \in D(S)$, умови (7) не накладаються (вони виконуються на підставі теореми 1), а у формулюванні 2 задачі вимагаємо виконання умови (8) для довільної $\psi \in X_s(\overline{\Omega})$.

Подібно до [14, лема 1.10] доводиться, що при $k > \hat{k}$ функція $u \in M_k(\Omega, \hat{x}) \cap$ $\cap C^{2m-1}(\Omega)$ (відповідно при $k \geq k_0$) функція $u \in M_k(\Omega) \cap C^{2m-1}(\Omega)$є розв'язком задачі (5) одночасно в обох формулюваннях.

3. Розв'язок задачі. Позначаємо через $(G_0(x, y), G_1(x, y), \ldots, G_m(x, y))$ векторфункцію Гріна задачі (5), існування якої та властивості визначено в [23, 24]. Зокрема, правильні оцінки

$$|D_x^\alpha D_y^\gamma G_j(x, y)| \leq C_{\alpha\gamma j}(1 + |x - y|^{m_j+1-n-|\alpha|-|\gamma|}), \ j = \overline{0, m}, \ m_0 = 2m. \tag{9}$$

Також використовуємо позначення

$$g(x) = \sum_{j=1}^{m} < G_j(x,y), F_j(y) >, x \in \Omega,$$

$$\tilde{G}_{k\gamma}(x,y,\hat{x}) = \varrho^{k+|\gamma|}(x,\hat{x}) D_x^\gamma G_0(x,y), \quad x, y \in \overline{\Omega}, \hat{x} \in S,$$

$R_\gamma = \max\limits_{y \in \overline{\Omega}} \int\limits_\Omega \varrho^{k+|\gamma|}(x,\hat{x}) |D_x^\gamma G_0(x,y)| dx$, $|\gamma| \leq r$, $R_0 = \sum\limits_{|\gamma| \leq r} R_\gamma$ (ці сталі визначено згідно з лемою 3 [17]).

Лема 1. *Якщо* $F_j \in Z'_{p_j}(S,\hat{x})$, $s(F_j) \leq s_j < p_j$, $j = \overline{1,m}$, $k > \hat{k}$, *то* $g \in M_{k,r}(\Omega,\hat{x})$. *Якщо* $F_j \in D'(S)$, $s(F_j) \leq s_j$, $j = \overline{1,m}$, $k > k_0 + n - 1$, *то* $g \in M_{k,r}(\Omega)$.

Доведення. За лемою 2 [17] існують такі натуральні числа $N_j < p_j + \frac{n-1}{2}$, такі функції $f_j \in L_2(S)$, що

$$D^\gamma g(x) = \langle D_x^\gamma G_j(x,y), F_j(y) \rangle = \int\limits_S (1 - \Delta_S)_y^{\frac{N_j}{2}} D_x^\gamma G_j(x,y) f_j(y) dS, \quad x \in \Omega, \quad j = \overline{1,m},$$

де Δ_S– оператор Лапласа-Бельтрамі на S. Розглянемо інтеграли

$$I_{j,\gamma}(\hat{x}) = \int\limits_S \Big(\int\limits_\Omega \varrho^{k+|\gamma|}(x,\hat{x}) |(1-\Delta_S)_y^{\frac{N_j}{2}} D_x^\gamma G_j(x,y)| dx \Big) |f_j(y)| dS.$$

Використовуючи лему 3 із [17], одержуємо оцінку

$\int_\Omega \varrho^{k+|\gamma|}(x,\hat{x}) |(1-\Delta_S)_y^{\frac{N_j}{2}} D_x^\gamma G_j(x,y)| dx \leq c_j(1 + \varrho^{m_j+1+k-N_j}(y,\hat{x}))$, де $c_j = const > 0$; $\varrho^{m_j+1+k-N_j}(y,\hat{x}) \in L_2(S)$ при $k > N_j - 1 - m_j + \frac{1-n}{2}$, що виконується при $k > p_j - m_j - 1$, а отже, при $k > \hat{k}$. Тоді

$$I_{j,\gamma}^2(\hat{x}) \leq c_j \int\limits_S [1 + \varrho^{m_j+1+k-N_j}(y,\hat{x})]^2 dS \cdot \int\limits_S |f_j(y)|^2 dS < +\infty, \quad j = \overline{1,m}, |\gamma| \leq r.$$

За теоремою Фубіні при $k > \hat{k}$ одержуємо існування такої додатної сталої C'_1, що

$$||g||_{k,r,\hat{x}} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\gamma| \leq r} \int\limits_\Omega \varrho^{k+|\gamma|}(x,\hat{x}) | < D_x^\gamma G_j(x,y), F_j(y) > | dS \leq \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\gamma| \leq r} |I_{j,\gamma}(\hat{x})| \leq C'_1.$$

За теоремою про структуру фінітної узагальненої функції із $D'(S)$ [19] маємо

$$|D^\gamma g(x)| = | < D_x^\gamma G_j(x,y), F_j(y) > | \leq \sum_{j=1}^{m} \tilde{C}_{j,\gamma} \max_{y \in S, |\alpha| \leq s_j} |D_x^\gamma D_y^\alpha G_j(x,y)|.$$

На підставі оцінок (9) $||g||_{k,r} \leq \sum\limits_{j=1}^{m} \tilde{C}_j \int\limits_\Omega \varrho^{k+m_j+1-n-|\alpha|}(x) dx < +\infty$ при $k > n - 1 + k_0$.

При $k > \hat{k}$ у просторі $M_{kr}(\Omega,\hat{x})$ розглядаємо інтегродиференціальне рівняння

$$u(x) - \int\limits_\Omega G_0(x,y) f(y, D_r u(y)) dy = g(x), \; x \in \Omega. \tag{10}$$

Зрозуміло, що для розв'язку u рівняння (10) також $\int_\Omega G_0(\cdot,y) f(y, D_r u(y)) dy \in \in M_k(\Omega,\hat{x})$.

Лема 2. *Якщо u – розв'язок рівняння (10) у $M_k(\Omega, \hat{x})$ та виконується (4), то u є розв'язком задачі (5) у формулюванні 2.*

Доведення. Якщо u – розв'язок рівняння (10) в $M_k(\Omega, \hat{x})$, то

$$\varrho^k(x, \hat{x})[u(x) - \int\limits_\Omega G_0(x,y)f(y, D_r u(y))dy - \sum_{j=1}^m < G_j(x,y), F_j(y) >] = 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

Оскільки $A^*\psi(x) = O(\varrho^k(x, \hat{x}))$ при $x \to \hat{x}$ для $\psi \in X_k(\overline{\Omega}, \hat{x})$, то існує

$$\int\limits_\Omega A^*\psi(x)u(x)dx = \int\limits_\Omega A^*\psi(x)\left(\int\limits_\Omega G_0(x,y)f(y, D_r u(y))dy\right)dx+$$
$$+\int\limits_\Omega A^*\psi(x)\sum_{j=1}^m \langle G_j(x,y), F_j(y)\rangle dx, \;\; \psi \in X_k(\overline{\Omega}, \hat{x}), j = \overline{1,m}. \tag{11}$$

Згідно з лемою 6 із [17], при $k > \hat{k}$ та при $\psi \in X_k(\overline{\Omega}, \hat{x})$ правильні тотожності $\int\limits_\Omega A^*\psi(x)G_0(x,y)dx = \psi(y), \; y \in \overline{\Omega}, \quad \int\limits_\Omega A^*\psi(x)G_j(x,y)dx = \hat{T}_j\psi(y), \; y \in S, \quad j = \overline{1,m}.$ Тоді $\int\limits_\Omega(\int\limits_\Omega A^*\psi(x)G_0(x,y)dx)f(y, D_r u(y))dy = \int\limits_\Omega \psi(y)f(y, D_r u(y))dy$, а за теоремою Фубіні також $\int\limits_\Omega A^*\psi(x)(\int\limits_\Omega G_0(x,y)f(y, D_r u(y))dy)dx = \int\limits_\Omega \psi(y)f(y, D_r u(y))dy$.

За аналогом теореми Фубіні [20] $\int\limits_\Omega A^*\psi(x) < G_j(x,y), F_j(y) > dx =< \int\limits_\Omega A^*\psi(x)G_j(x,y)dx, F_j(y) >=< \hat{T}_j\psi(y), F_j(y) >$, $j = \overline{1,m}$. Тому з (3) одержуємо (8).

Лема 3. *При $k > \max\{-\hat{m} - 1, r + 1 - 2m\}$ для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для довільної підобласті $\omega \subset \Omega$, міра якої $m(\omega) < \delta$, та для всіх $y \in \overline{\Omega}$, $\hat{x} \in S$ виконується*

$$\sum_{|\gamma| \leq r} \int\limits_\omega |\tilde{G}_{k\gamma}(x,y,\hat{x})|dx < \varepsilon.$$

Доведення. Лема доводиться за схемою доведення леми 3 із [17]. Нехай $\hat{x} \in S$. Розділяючи особливості функції $\tilde{G}_{k\gamma}(x,y,\hat{x})$ та використовуючи оцінки (9), при $y \in \overline{\Omega}$, $|y - \hat{x}| < d < 1$ матимемо

$$I_{1\gamma}(y,d) = \int\limits_{\omega\cap\{x\in\Omega:|x-\hat{x}|<d\}} |\tilde{G}_{k\gamma}(x,y,\hat{x})|dx \leq \int\limits_{\omega\cap\{x\in\Omega:|x-\hat{x}|<\frac{1}{2}|y-\hat{x}|\}} |\tilde{G}_{k\gamma}(x,y,\hat{x})|dx+$$
$$+\int\limits_{\omega\cap\{x\in\Omega:|x-y|<\frac{1}{2}|y-\hat{x}|\}} |\tilde{G}_{k\gamma}(x,y,\hat{x})|dx+ \int\limits_{\omega\cap\{x\in\Omega:|x-\hat{x}|>\frac{1}{2}|y-\hat{x}|,|x-y|>\frac{1}{2}|y-\hat{x}|\}} |\tilde{G}_{k\gamma}(x,y,\hat{x})|dx\leq$$
$$\leq \tilde{a}\max\{|y-\hat{x}|^{k+2m}, |y-\hat{x}|^{2m-|\gamma|}, |y-\hat{x}|^{k+n}\} < \tilde{a}d,$$

де $\tilde{a}$ – додатна стала. Тоді $I_1(y,d) = \sum\limits_{|\gamma|\leq r} I_{1\gamma}(y,d) < ad$, $a = const > 0$. За заданим $\varepsilon > 0$, вибравши $d_0 < \frac{\varepsilon}{3a}$, при $y \in \overline{\Omega}$, $|y - \hat{x}| < d_0$ матимемо $I_{1k}(y, d_0) < \frac{\varepsilon}{3}$.

При $y \in \overline{\Omega}$, $|y - \hat{x}| < d_0$ подібно знаходимо

$$I_{2\gamma}(y,d_0) = \int\limits_{\omega\cap\{x\in\Omega:|x-\hat{x}|>d_0\}=\omega_1} |\tilde{G}_{k\gamma}(x,y,\hat{x})|dx =$$

$$= \int\limits_{\omega_1 \cap \{x \in \Omega : |x-y| < \frac{1}{2}|y-\hat{x}|\}} |\tilde{G}_{k\gamma}(x,y,\hat{x})|dx + \int\limits_{\omega_1 \cap \{x \in \Omega : |x-y| > \frac{1}{2}|y-\hat{x}|\}} |\tilde{G}_{k\gamma}(x,y,\hat{x})|dx \leq$$
$$\leq \tilde{b} d_0 (1 + d_0^{-n} m(\omega)).$$

Звідси $I_2(y, d_0) = \sum\limits_{|\gamma| \leq r} I_{2\gamma}(y, d) < b d_0 + b d_0^{1-n} m(\omega)$ при всіх $y \in \overline{\Omega}$, $|y - \hat{x}| < d_0$, $\tilde{b}, b$ – додатні сталі.

За заданим $\varepsilon > 0$, вибравши $d_0 < \min\{\frac{\varepsilon}{3a}, \frac{\varepsilon}{3b}\}$ та $m(\omega) < \delta = \frac{\varepsilon d_0^{n-1}}{3b}$, одержуємо $\sum\limits_{|\gamma| \leq r} \int\limits_{\omega} |\tilde{G}_{k\gamma}(x,y,\hat{x})|dx = I_1(y, d_0) + I_2(y, d_0) < \varepsilon$ при всіх $y \in \overline{\Omega}$, $|y - \hat{x}| < d_0$.

При $y \in \overline{\Omega}$, $|y - \hat{x}| \geq d_0$ розглянемо $J_\gamma(y, d_0) = J_{1\gamma}(y, d_0) + J_{2\gamma}(y, d_0) =$

$$= \int\limits_{\omega \cap \{x \in \Omega : |x-y| < \frac{1}{2} d_0\}} |\tilde{G}_{k\gamma}(x,y,\hat{x})|dx + \int\limits_{\omega \cap \{x \in \Omega : |x-y| > \frac{1}{2} d_0\}} |\tilde{G}_{k\gamma}(x,y,\hat{x})|dx.$$

Враховуючи оцінки (9), а також, що $\varrho^k(x, \hat{x}) \leq c d_0^k$ при $k < 0$ та $\varrho^k(x, \hat{x}) \leq 1$ при $k \geq 0$ ($c = c(k)$ – додатна стала), матимемо

$$J_{1\gamma}(y, d_0) \leq C_\gamma \int\limits_{\omega \cap \{x \in \Omega : |x-y| < \frac{1}{2} d_0\}} [1 + |x-y|^{2m-n-|\gamma|}] dx \cdot c d_0^{k+|\gamma|} \leq$$
$$\leq \tilde{c}_1 d_0^{k+|\gamma|+n} + \tilde{c}_2 d_0^{k+2m} < c_1 d_0$$

при $k + |\gamma| < 0$, де $C_\gamma = C_{\gamma\alpha j}$ при $|\alpha| = j = 0$, $c_1 = \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2$, $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2$ – додатні сталі,

$$J_{1\gamma}(y, d_0) \leq C_\gamma \int\limits_{\omega \cap \{x \in \Omega : |x-y| < \frac{1}{2} d_0\}} [1 + |x-y|^{2m-n-|\gamma|}] dx \leq \tilde{c}'_1 d_0^n + \tilde{c}'_2 d_0^{2m-|\gamma|} < c'_1 d_0$$

при $k + |\gamma| \geq 0$, де $c'_1 = \tilde{c}'_1 + \tilde{c}'_2$, $\tilde{c}'_1, \tilde{c}'_2$ – додатні сталі;

$$J_{2\gamma}(y, d_0) \leq 2C_\gamma (\tfrac{d_0}{2})^{2m-n-|\gamma|} \cdot \{ \int\limits_{\omega \cap \{x \in \Omega : |x-y| > \frac{1}{2} d_0, |x-\hat{x}| < \frac{1}{2} d_0\}} \varrho^{k+|\gamma|}(x, \hat{x}) dx +$$
$$+ c(k + |\gamma|) d_0^{k+|\gamma|} m(\omega)\} \leq \tilde{c}_2 d_0^{2m-n-|\gamma|} [d_0^{k+n+|\gamma|} + d_0^{k+|\gamma|} m(\omega)] =$$
$$= \tilde{c}_2 d_0^{k+2m} + \tilde{c}_2 d_0^{k+2m-n} m(\omega) < \tilde{c}_2 d_0 + \tilde{c}_2 d_0^{1-n} m(\omega)$$

при $k + |\gamma| < 0$,

$$J_{2\gamma}(y, d_0) \leq 2C_\gamma c(k + |\gamma|)(\tfrac{d_0}{2})^{2m-n-|\gamma|} m(\omega) \leq \tilde{c}'_2 d_0^{1-n} m(\omega)$$

при $k + |\gamma| \geq 0$, $\tilde{c}_2, \tilde{c}'_2$ – додатні сталі.

Отже, $J_\gamma(y, d_0) \leq C_1 d_0 + C_2 d_0^{1-n} m(\omega)$, додатні сталі C_1, C_2 виражаються через сталі $c_1, c'_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}'_2$, а тоді

$$J(y, d_0) = \sum\limits_{|\gamma| \leq r} J_\gamma(y, d_0) < C(r) d_0 + C(r) d_0^{1-n} m(\omega),\ C(r) \text{ –додатна стала.}$$

За заданим $\varepsilon > 0$, вибравши $d_0 < \min\{\frac{\varepsilon}{3a}, \frac{\varepsilon}{3b}, \frac{\varepsilon}{2C(r)}\}$ та $m(\omega) < \delta = \min\{\frac{\varepsilon}{3b}, \frac{\varepsilon}{2C(r)}\} d_0^{n-1}$, матимемо попередню оцінку $I(y, d_0) < \varepsilon$ при $|y - \hat{x}| < d_0$, а також $J(y, d_0) < \varepsilon$ при $|y - \hat{x}| > d_0$.

Теорема 2. *Нехай $k > \max\{\hat{k}, r + 1 - 2m\}$, функція f задовольняє умови:*

1) існує така додатна стала C_0, що для довільних сталої $C > C_0$, $v \in M_{k,r,C}(\Omega, \hat{x})$

$$2R_0 \int\limits_\Omega |f(y, D_r v(y))| dy < C; \tag{12}$$

2) існує додатна неперервна функція h, $h(0+) = 0$, така що

$$\int\limits_\Omega |f(y, D_r v_1(y)) - f(y, D_r v_2(y))| dy \leq h(||v_1 - v_2||_{k,r,\hat{x}}) \quad \forall v_1, v_2 \in M_{k,r,C}(\Omega, \hat{x}). \tag{13}$$

Тоді існує розв'язок $u \in M_{k,r}(\Omega, \hat{x})$ рівняння (10) та задачі (5) у формулюванні 2, який задовольняє умову (4).

Доведення. Використаємо теорему Шаудера [25, с.291]. Введемо оператор

$$H : (Hv)(x) = \int\limits_{\Omega} G_0(x,y)f(y, D_r v(y))dy + g(x),\ x \in \Omega,\ v \in M_{k,r}(\Omega, \hat{x}).$$

Маємо $||Hv||_{k,r,\hat{x}} = \int\limits_{\Omega} \sum\limits_{|\gamma|\le r} \varrho^{k+|\gamma|}(x,\hat{x})|D^\gamma\big(\int\limits_{\Omega} G_0(x,y)f(y,D_r v(y))dy + g(x)\big)|dx.$

Оскільки $\int_\Omega \varrho^{k+|\gamma|}(x,\hat{x})|D_x^\gamma G_0(x,y)|dx \le R_\gamma$, то з умови (12) за теоремою Фубіні одержуємо
$||Hv||_{k,r,\hat{x}} \le R_0 \int\limits_{\Omega} |f(y,D_r v(y))|dy + ||g||_{k,r,\hat{x}} \le \frac{C}{2} + ||g||_{k,r,\hat{x}},\ v \in M_{k,r}(\Omega,\hat{x}).$

За лемою 1 при $k > \hat{k}$ існує така додатна стала C_1, що $||g||_{k,r,\hat{x}} = C_1$. Вибираючи $C > \max(C_0, 2C_1)$, одержуємо $||Hv||_{k,r,\hat{x}} \le \frac{C}{2} + C_1 < C$ для всіх $v \in M_{k,r,C}(\Omega,\hat{x})$, так що при таких C

$$H : M_{k,r,C}(\Omega,\hat{x}) \to M_{k,r,C}(\Omega,\hat{x}). \tag{14}$$

Доведемо, що оператор H цілком неперервний на $M_{k,r,C}(\Omega,\hat{x})$.

Для довільних $v_1, v_2 \in M_{k,r,C}(\Omega,\hat{x})$ розглянемо

$$||Hv_1 - Hv_2||_{k,r,\hat{x}} = \sum_{|\gamma|\le r} \int\limits_{\Omega} \varrho^{k+|\gamma|}(x,\hat{x})|(D^\gamma Hv_1)(x) - (D^\gamma Hv_2)(x)|dx =$$

$$= \sum_{|\gamma|\le r} \int\limits_{\Omega} \varrho^{k+|\gamma|}(x,\hat{x})|\int\limits_{\Omega} D_x^\gamma G_0(x,y)[f(y,D_r v_1(y)) - f(y,D_r v_2(y))]dy|dx. \tag{15}$$

Оскільки $\sum\limits_{|\gamma|\le r} \int\limits_{\Omega} \varrho^{k+|\gamma|}(x,\hat{x})|D_x^\gamma G_0(x,y)|dx \le R_0$ при $y \in \overline{\Omega}$, то за умовою (13) та теоремою Фубіні одержуємо існування такої додатної сталої K_1, що
$||Hv_1 - Hv_2||_{k,r,\hat{x}} \le K_1 h(||v_1 - v_2||_{k,r,\hat{x}})$, а тоді H – неперервне відображення $\tilde{M}_{k,r,C}(\overline{\Omega},\hat{x})$ в себе.

За теоремою Рісса [25, с.242] для компактності H на $M_{k,r,C}(\overline{\Omega},\hat{x})$ необхідно і достатньо, щоб виконувались умови:

а) існує така додатна стала $\tilde{C} > 0$, що $||Hv||_{k,r,\hat{x}} \le \tilde{C}$ для всіх $v \in \tilde{M}_{k,r,C}(\overline{\Omega},\hat{x})$;

б) для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для довільних $v \in \tilde{M}_{k,r,C}(\overline{\Omega},\hat{x})$, $z \in \mathbb{R}^n$, $|z| < \delta$ $\quad ||(Hv)(x+z) - (Hv)(x)||_{k,r,\hat{x}} < \varepsilon$.

Перше твердження довели раніше. Доведемо виконання другого. Вважаємо $\varrho(x+$

$z, \hat{x}) = 0$ та $G_0(x+z, y) = 0$, якщо $x+z \notin \Omega$. При $z \in \mathbb{R}^n$, $v \in M_{k,r,C}(\overline{\Omega}, \hat{x})$ розглянемо

$$||(Hv)(x+z) - (Hv)(x)||_{k,r,\hat{x}} =$$

$$= \sum_{|\gamma|\le r} \int\limits_{\Omega} |\varrho^{k+|\gamma|}(x+z, \hat{x})(D^\gamma Hv)(x+z) - \varrho^{k+|\gamma|}(x, \hat{x})(D^\gamma Hv)(x)|dx \le$$

$$\le \sum_{|\gamma|\le r} \int\limits_{\Omega} |\varrho^{k+|\gamma|}(x+z, \hat{x}) D_x^\gamma g(x+z) - \varrho^{k+|\gamma|}(x, \hat{x}) D_x^\gamma g(x)|dx +$$

$$+ \sum_{|\gamma|\le r} \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_{\Omega} |\tilde{G}_{k\gamma}(x+z, y, \hat{x}) - \tilde{G}_{k\gamma}(x, y, \hat{x})||f(y, D_r v(y))|dy \right) dx = J_1(z) + J_2(z, D_r v).$$

Оскільки $g \in M_{k,r}(\Omega, \hat{x})$ (за лемою 1), а отже, $\varrho^{k+|\gamma|}(\cdot, \hat{x}) D^\gamma g \in L_1(\Omega)$ при всіх $\hat{x} \in S$, $|\gamma| \le r$, то за теоремою про неперервність у цілому функцій із $L_1(\Omega)$ [25] маємо: для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta' = \delta'(\varepsilon) > 0$, що для всіх $z \in \mathbb{R}^n$, $|z| < \delta'$,

$$J_1(z) = ||g(x+z) - g(x)||_{k,r,\hat{x}} < \tfrac{\varepsilon}{6}.$$

Через Ω_η позначаємо підобласть Ω, обмежену поверхнею S_η. Але $dist(\Omega_\eta, S) = \eta$, тому за лемою 3 для довільного $\varepsilon > 0$ існують такі числа $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon)$, $\eta_0 = \eta_0(\delta_0) > 0$, що $m(\Omega \setminus \Omega_{\eta_0}) < \delta_0$ та

$$I_{21}(y) = \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_{\eta_0}} \sum_{|\gamma|\le r} |\tilde{G}_{k\gamma}(x, y, \hat{x})|dx < \tfrac{R_0}{3C}\varepsilon \quad \text{для всіх } y \in \Omega.$$

Через ω^z позначимо зсув множини ω на вектор z. Оскільки $m(\omega^z) = m(\omega)$, то

$$I'_{21}(y, z) = \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_{\eta_0}} \sum_{|\gamma|\le r} |\tilde{G}_{k\gamma}(x+z, y, \hat{x})|dx =$$

$$= \int\limits_{(\Omega\setminus\Omega_{\eta_0})^{-z}} \sum_{|\gamma|\le r} |\tilde{G}_{k\gamma}(x, y, \hat{x})|dx < \frac{R_0}{3C}\varepsilon \text{ для всіх } y \in \Omega, z \in \mathbb{R}^n.$$

Розглянемо при $z \in \mathbb{R}^n$, $v \in M_{k,r,C}(\Omega, \hat{x})$

$$\int\limits_{\Omega}(\int\limits_{\Omega} \sum_{|\gamma|\le r} |\tilde{G}_{k\gamma}(x+z, y, \hat{x}) - \tilde{G}_{k\gamma}(x, y, \hat{x})|dx)|f(y, D_r v(y))|dy =$$

$$= \int\limits_{\Omega}(\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_{\eta_0}} \sum_{|\gamma|\le r} |\tilde{G}_{k\gamma}(x+z, y, \hat{x}) - \tilde{G}_{k\gamma}(x, y, \hat{x})|dx)|f(y, D_r v(y))|dy +$$

$$+ \int\limits_{\Omega}(\int\limits_{\Omega_{\eta_0}} \sum_{|\gamma|\le r} |\tilde{G}_{k\gamma}(x+z, y, \hat{x}) - \tilde{G}_{k\gamma}(x, y, \hat{x})|dx)|f(y, D_r v(y))|dy =$$

$$= \tilde{J}_{21}(z, D_r v) + \tilde{J}_{22}(z, D_r v).$$

Згідно з вибором чисел δ_0, η_0 та умовою (12),

$$\tilde{J}_{21}(z, D_r v) \le \int\limits_{\Omega}(I_{21}(y) + I'_{21}(y, z))|f(y, D_r v(y))|dy < 2 \cdot \tfrac{R_0}{3C}\varepsilon \int\limits_{\Omega} |f(y, D_r v(y))|dy < \tfrac{\varepsilon}{3}.$$

Знайдемо оцінку $\tilde{J}_{22}(z, D_r v)$. Запишемо

$$\tilde{J}_{22}(z, D_r v) = \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_{\frac{\eta_0}{4}}} (\int\limits_{\Omega_{\eta_0}} \sum_{|\gamma|\le r} |\tilde{G}_{k\gamma}(x+z, y, \hat{x}) - \tilde{G}_{k\gamma}(x, y, \hat{x})|dx)|f(y, D_r v(y))|dy +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_{\frac{\eta_0}{4}}} (\int\limits_{\Omega_{\eta_0}} \sum_{|\gamma|\le r} |\tilde{G}_{k\gamma}(x+z, y, \hat{x}) - \tilde{G}_{k\gamma}(x, y, \hat{x})|dx)|f(y, D_r v(y))|dy =$$

$$= \tilde{J}_{221}(z, D_r v) + \tilde{J}_{222}(z, D_r v).$$

Для всіх $y \in \overline{\Omega \setminus \Omega_{\frac{\eta_0}{4}}}$, $x \in \overline{\Omega}_{\eta_0}$, $|z| < \frac{\eta_0}{2}$ маємо $x + z \in \Omega_{\frac{1}{2}\eta_0}$, $|x - y| \geq \frac{3\eta_0}{4}$, $|x + z - y| \geq |x - y| - |z| \geq \frac{3\eta_0}{4} - |z| > \frac{\eta_0}{4}$. Тому за рівномірною неперервністю функцій $\tilde{G}_{k\gamma}(x, y, \hat{x})$ на замкненій множині $V : x \in \overline{\Omega_{\frac{\eta_0}{2}}}, y \in \overline{\Omega \setminus \Omega_{\frac{\eta_0}{4}}}, \hat{x} \in S$ для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) < \frac{\eta_0}{4}$, що для довільних $x \in \overline{\Omega_{\eta_0}}$, $y \in \overline{\Omega \setminus \Omega_{\frac{\eta_0}{4}}}$, $z \in \mathbb{R}^n$, $|z| < \delta_1$

$$\sum_{|\gamma| \leq r} |\tilde{G}_{k\gamma}(x + z, y, \hat{x}) - \tilde{G}_{k\gamma}(x, y, \hat{x})| < \frac{R_0}{Cm(\Omega)}\varepsilon.$$

Звідси та з умови (12)

$$\tilde{J}_{221}(z, D_r v) = \int\limits_{\Omega \setminus \Omega_{\frac{\eta_0}{4}}} (\int\limits_{\Omega_{\eta_0}} \sum_{|\gamma| \leq r} |\tilde{G}_{k\gamma}(x + z, y, \hat{x}) - \tilde{G}_{k\gamma}(x, y, \hat{x})|dx)|f(y, D_r v(y))|dy <$$

$$< \frac{R_0 m(\Omega_{\eta_0})}{Cm(\Omega)}\varepsilon \int\limits_{\Omega \setminus \Omega_{\frac{\eta_0}{4}}} |f(y, D_r v(y))|dy < \frac{R_0}{C}\varepsilon \int\limits_{\Omega \setminus \Omega_{\frac{\eta_0}{4}}} |f(y, D_r v(y))|dy.$$

Виберемо $\eta_1 < \min\{\frac{\eta_0}{4}, (\frac{\delta_0}{\sigma_n})^{\frac{1}{n}}\}$, де σ_n – площа поверхні одиничної сфери в $\mathbb{R}^n$. При $y \in \Omega_{\frac{\eta_0}{4}}$ множини $\omega_{\eta_1}(y) = \{\xi \in \Omega : |\xi - y| < \eta_1\}$ знаходяться всередині Ω. Оскільки $m(\omega_{\eta_1}) = \sigma_n \eta_1^n < \delta_0$, то за лемою 3 для всіх $y \in \overline{\Omega}_{\frac{\eta_0}{4}}$

$$I_{22}(y) = \int\limits_{\omega_{\eta_1}(y)} \sum_{|\gamma| \leq r} |\tilde{G}_{k\gamma}(x, y, \hat{x})|dx < \frac{R_0 \varepsilon}{3C},$$

а при $|z| < \delta_2 < \min\{\delta_0, \delta_1, \frac{\eta_1}{2}\}$ також

$$I'_{22}(y, z) = \int\limits_{\omega_{\eta_1}(y)} \sum_{|\gamma| \leq r} |\tilde{G}_{k\gamma}(x + z, y, \hat{x})|dx = \int\limits_{\omega_{\eta_1}^{-z}(y)} \sum_{|\gamma| \leq r} |\tilde{G}_{k\gamma}(x, y, \hat{x})|dx < \frac{R_0 \varepsilon}{3C}.$$

При $y \in \overline{\Omega}_{\frac{\eta_0}{4}}$, $x \in \overline{\Omega_{\eta_0} \setminus \omega_{\eta_1}(y)}$, та $|z| < \delta_2$ маємо $x + z \in \Omega_{\frac{7}{8}\eta_0} \subset \overline{\Omega_{\frac{\eta_0}{2}}}$, $|x - y| \geq \eta_1$, $|x + z - y| \geq |x - y| - |z| \geq \eta_1 - \delta_2 > \frac{\eta_1}{2}$. Тому за рівномірною неперервністю функцій $\tilde{G}_{k\gamma}(x, y, \hat{x})$ на замкненій множині $V_1 : y \in \overline{\Omega}_{\frac{\eta_0}{4}}, x \in \overline{\Omega_{\frac{\eta_0}{2}} \setminus \omega_{\eta_1}(y)}$ для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta_3 = \delta_3(\varepsilon) < \delta_2$, що для довільних $y \in \Omega_{\frac{\eta_0}{4}}$, $x \in \overline{\Omega_{\eta_0} \setminus \omega_{\eta_1}(y)}$, $|z| < \delta_3$

$$\sum_{|\gamma| \leq r} |\tilde{G}_{k\gamma}(x + z, y, \hat{x}) - \tilde{G}_{k\gamma}(x, y, \hat{x})| < \frac{R_0}{3Cm(\Omega)}\varepsilon,$$

звідки $I_{23}(y, z) = \int\limits_{\Omega_{\eta_0}} \sum\limits_{|\gamma| \leq r} |\tilde{G}_{k\gamma}(x + z, y, \hat{x}) - \tilde{G}_{k\gamma}(x, y, \hat{x})|dx < \frac{R_0 \varepsilon}{3C}$.

Враховуючи (12), при $|z| < \delta_3$ одержуємо

$$\tilde{J}_{222}(z, D_r v) < \int\limits_{\Omega_{\frac{\eta_0}{2}}} (I_{22}(z) + I'_{22}(y, z) + I_{23}(z))|f(y, D_r v(y))|dy < \frac{R_0 \varepsilon}{C} \int\limits_{\Omega_{\frac{\eta_0}{2}}} |f(y, D_r v(y))|dy.$$

Тоді $\tilde{J}_{22}(z, D_r v) \leq \frac{R_0 \varepsilon}{C}(\int\limits_{\Omega \setminus \Omega_{\frac{\eta_0}{2}}} |f|dy + \int\limits_{\Omega_{\frac{\eta_0}{2}}} |f|dy) = \frac{R_0 \varepsilon}{C} \int\limits_{\Omega} |f|dy < \frac{\varepsilon}{2}$, тому при $|z| < \delta_3$ $\tilde{J}_{21}(z, D_r v) + \tilde{J}_{22}(z, D_r v) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{5\varepsilon}{6}$.

За теоремою Фубіні також $J_2(z, D_r v) < \frac{5\varepsilon}{6}$. Отож, для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \min[\delta', \delta_3]$, що для всіх $z \in \mathbb{R}^n$, $|z| < \delta$ та для довільної $v \in M_{k,r,C}(\Omega, \hat{x})$

$$||(Hv)(x + z) - (Hv)(x)||_{k,r,\hat{x}} \leq J_1(z) + J_2(z, D_r v) < \frac{\varepsilon}{6} + \frac{5\varepsilon}{6} = \varepsilon.$$

За теоремою Шаудера одержуємо твердження теореми.

Зауваження 1. Умови теореми 2, зокрема, виконуються для функції

$$|f(y,z)| \leq \sum_{s=0}^{r} A_s \sum_{|\gamma|=s} |z_\gamma|^{q_s}, \quad y \in \Omega, \quad z \in \mathbb{R}^{M(r)}, \tag{16}$$

$$|f(y,z^1) - f(y,z^2)| \leq \sum_{s=0}^{r} A_s \sum_{|\gamma|=s} |z^1_\gamma - z^2_\gamma|^{q_s}, \quad y \in \Omega, \ z^1, z^2 \in \mathbb{R}^{M(r)} \tag{17}$$

при $A_s = const \geq 0, \quad 0 < q_s < \frac{n}{n+k+s}$, $s = \overline{0,r}$.

Справді, використовуючи нерівність Гельдера, для довільної $v \in M_{k,r,C}(\Omega,\hat{x})$ одержуємо

$$\int\limits_\Omega |f(y,D_r v(y))|dy \leq \sum_{s=0}^{r} A_s \sum_{|\gamma|=s} \int\limits_\Omega |D^\gamma v(y)|^{q_s} dy =$$

$$= \sum_{s=0}^{r} A_s \sum_{|\gamma|=s} \int\limits_\Omega \varrho^{-(k+s)q_s}(y,\hat{x})[\varrho^{k+s}(y,\hat{x})|D^\gamma v(y)|]^{q_s} dy \leq$$

$$\leq \sum_{s=0}^{r} A_s \sum_{|\gamma|=s} (\int\limits_\Omega \varrho^{-\frac{(k+s)q_s}{1-q_s}}(y,\hat{x})dy)^{1-q_s} \cdot (\int\limits_\Omega \varrho^{k+s}(y,\hat{x})|D^\gamma v(y)|dy)^{q_s} \leq \sum_{s=0}^{r} \tilde{A}_s ||v||^{q_s}_{k,r},$$

де $\tilde{A}_s = C(s)A_s(\int_\Omega \varrho^{-\frac{(k+s)q_s}{1-q_s}}(y,\hat{x})dy)^{1-q_s}$, $C(s)$ – додатна стала (кількість мультиіндексів γ з довжиною s), визначені при $0 < q_s < \frac{n}{n+k+s}, \quad s = \overline{0,r}$.

Тоді при $v \in M_{k,r,C}(\Omega,\hat{x})$ матимемо $\int\limits_\Omega |f(y,D_r v(y))|dy \leq \sum\limits_{s=0}^{r} \tilde{A}_s C^{q_s}$.

За властивостями степеневої функції at^q, $q \in (0,1)$ для довільного числа $\tilde{A}_s$ існує таке число $C_{s0} > 0$, що для всіх $C > C_{s0}$ виконується $2R_0\tilde{A}_s C^{q_s} < \frac{C}{r+1}$, тоді при всіх $C > \max\limits_{0\leq s\leq r} C_{s0} = C_0$ матимемо $2R_0 \sum\limits_{s=0}^{r} \tilde{A}_s C^{q_s} < C$. Отже, виконується (12).

Так само показуємо, що для довільних $v_1, v_2 \in M_{k,r,C}(\Omega,\hat{x})$

$$\int\limits_\Omega |f(y,D_r v_1(y)) - f(y,D_r v_2(y))|dy \leq \sum_{s=0}^{r} A_s \sum_{|\gamma|=s} \int\limits_\Omega |D^\gamma v_1(y) - D^\gamma v_2(y)|^{q_s} dy =$$

$$= \sum_{s=0}^{r} A_s \sum_{|\gamma|=s} \int\limits_\Omega \varrho^{-(k+s)q_s}(y,\hat{x})[\varrho^{k+s}(y,\hat{x})|D^\gamma v_1(y) - D^\gamma v_2(y)|]^{q_s} dy \leq$$

$$\leq \sum_{s=0}^{r} A_s \sum_{|\gamma|=s} (\int\limits_\Omega \varrho^{-\frac{(k+s)q_s}{1-q_s}}(y,\hat{x})dy)^{1-q_s} \cdot (\int\limits_\Omega \varrho^{k+s}(y,\hat{x})|D^\gamma v_1(y) - D^\gamma v_2(y)|dy)^{q_s} \leq$$

$$\leq \sum_{s=0}^{r} \tilde{A}_s ||v_1 - v_2||^{q_s}_{k,r}.$$

Функція $h(t) = \sum\limits_{s=0}^{r} \tilde{A}_s t^{q_s}$ задовольняє умови теореми.

Зауваження 2. Подібно доводимо, що при $F_j \in D'(S)$, $s(F_j) \leq s_j$, $s_j \geq 0$, $j = \overline{1,m}$, $k > k_0 + n - 1$ та виконанні умов, як у теоремі 2, але з заміною простору $M_{k,r}(\Omega,\hat{x})$ на $M_{k,r}(\Omega)$, задача (4) у формулюванні 2 має розв'язок $u \in M_{k,r}(\Omega)$. Зокрема, такі умови виконуються для функції f, яка задовольняє (16) та (17) при $q_s < \frac{1}{k+s+1}$, $s = \overline{1,r}$.

Приклад 1. Розглянемо узагальнену задачу Діріхле $(F_j \in Z'_{p_j}(S,\hat{x}), j=1,2)$

$$\Delta^2 u = \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|^q, \; u|_S = F_1, \; \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S = F_2. \tag{18}$$

Перевіримо виконання умов теореми 2 при $q \in (0,1)$: $r=2, \hat{m}=2$, при $k > \max(p_1-1, p_2-2, -1)$ виконуються умови лем 1, 3; при $0 < q < \frac{n}{n+k+2}$ права частина рівняння задовольняє умови (16) та (17), тому згідно з зауваженням 2 вона задовольняє умови теореми 2.

За теоремою 2 при

$$\max\{p_1-1, p_2-2, -1\} < k < \frac{n}{q} - n - 2, \tag{19}$$

а отже, при $0 < q < \frac{n}{n+1}$, $0 \le p_1 < \frac{n}{q} - n - 1$, $0 \le p_2 < \frac{n}{q} - n$ існує розв'язок $u \in M_{k,2}(\Omega,\hat{x})$ задачі (18), де k задовольняє умову (19). Бачимо, що числа p_1 та p_2 можуть набувати додатних значень, досить великих при малих значеннях q. Зокрема, $u \in L_1(\Omega)$ при $p_1 < 1$, $p_2 < 2$.

Теорема 3. *Нехай $k > \hat{k}$, $\int_\Omega |f(y,v(y))dy < +\infty$ для всіх $v \in M_k(\Omega,\hat{x})$ та існує така стала $K \in (0,1)$, що для довільних $v_1, v_2 \in M_k(\Omega,\hat{x})$*

$$2\max_{y\in\overline{\Omega}} \int_\Omega \varrho^k(x,\hat{x})|G_0(x,y)|dx \cdot \int_\Omega |f(y,v_1(y)) - f(y,v_2(y))|dy \le K||v_1-v_2||_k.$$

Тоді існує єдиний розв'язок $u \in M_k(\Omega,\hat{x})$ інтегродиференціального рівняння (10) та задачі (5) у формулюванні 2.

Твердження теореми 3 одержуємо на підставі принципу стискуючих відображень.

Зауваження 3. Як у [16], доводиться таке: якщо виконуються умови теореми 2 та для довільної підобласті Ω' області Ω, розміщеної строго всередині Ω, довільних $s \le r$, $x \in \overline{\Omega'}$ для розв'язку $u \in M_{k,r}(\Omega,\hat{x})$ задачі (5)

$$\int_{\Omega'} |x-y|^{2m-n-s}|f(y,D_r u(y))|dy < +\infty, \tag{20}$$

то $u \in C^{2m-1}(\Omega)$; якщо, крім того, $r \le 2m-2$ та функція $f(x,z)$ має неперервні похідні першого порядку за всіма аргументами $x \in \Omega, z \in \mathbb{R}^{M(r)}$, то $u \in C^{2m}(\Omega)$.

Функція f, яка задовольняє умови (16) та (17), при $0 < q_s < \min\{\frac{n}{k+n+s}, \frac{2m-s}{n}\}$, $s = \overline{0,r}$ також задовольняє (20).

---

1. *Крейн С.Г., Симонов А.С.* Теорема о гомеоморфизмах и квазилинейные уравнения // Докл. АН СССР. – 1966. – Т. 167, №6. – С. 1226-1229.
2. *Kondrat'ev V.A. and Nikishkin V.A.* Asymptotic, near the boundary, of a solution of a singular boundary-value problem for a semilinear elliptic equation // Diff. uravn. – 1990. – Vol. 26, №3. – P. 465-468.

3. *Похожаев С.* О задаче Дирихле для уравнения $\Delta u = u^2$ // Докл. АН СССР. – 1960. – Т. 134, №4. – P. 769-772.
4. *Gmira A., Veron L.* Boundary singularities of solutions of some nonlinear elliptic equation // Indiana Math. J. – 1991. – Vol. 64. – P. 271-324.
5. *Le Gall J.-F.* The Brounian snake and the solutions of $\Delta u = u^2$ in a domain // Probab. Theory Related Fields. – 1995. – Vol. 102. – P. 393-432.
6. *Dynkin E.B., Kuznetsov S.E.* Trace on the boundary for solutions of nonlinear equations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1998. – Vol. 350. – P. 4499-4519.
7. *Marcus M., Veron L.* Removable singularities and boundary traces // J. Math. Pures Appl. – 2001. – Vol. 80, №1. – P. 879-900.
8. *Boccardo L., Gallovet Th.* Non-linear elliptic equations with right-hand side measures // Comm. Partial Dif. Eqns. – 1992. – Vol. 17. – P. 641-655.
9. *Rakotoson J.M.* Generalized solutions in a new-type of sets for problems with measures as data // Diff. Integral Eqns. – 1993. – Vol. 6. – P. 27-36.
10. *Alvino A., Ferone V., Trombetti G.* Nonlinear elliptic equations with lower-order terms // Diff. Int. Equations. – 2001. – Vol. 14. – P. 1169-1180.
11. *Benilan Ph., Boccardo L.,Gallouet T., Gariepy R., Pierre M., Vazquez J.L.* An L_1-theory of existence and uniquenessof solutions of nonlinear elliptic equations // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. – 1995. – Vol. 22. – P. 241-273.
12. *Poretta A.* Nonlinear equations with natural growth terms and measure data // 2002-Fez Conference on Partial Differentials Equations. Electron. J. Diff. Eqns. Conf. 09, 2002. – P. 183-202.
13. *Kovalevskii A.A.* Integrability of solutions of nonlinear elliptic equations with right-hand sides from classes close to L^1 // Math Notes. – 2001. – Vol. 70. – P. 337-346.
14. *Лопушанська Г.П.* Крайові задачі у просторі узагальнених функцій D': Монографія. – Львів, 2002.
15. *Лопушанська Г.П.* Задача Діріхле для квазілінійних еліптичних рівнянь у просторі розподілів // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1990. – Вип. 35. – С. 26-31.
16. *Лопушанська Г.П., Жидик У.В.* Про узагальнені граничні значення розв'язків квазілінійного еліптичного рівняння 2-го порядку // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2001. – Вип. 59. – С. 126-138.
17. *Лопушанська Г.П.* Узагальнені крайові задачі для лінійних та напівлінійних еліптичних рівнянь // Укр. мат. вісник. – 2005. – Т. 2, №3. – С. 377-394.
18. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М., 1971.
19. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй спецкурс. – М., 1965.
20. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – М., 1981.
21. *Ройтберг Я.А.* Эллиптические граничные задачи в обобщенных функциях. I-IV. – Чернигов, 1990, 1991.
22. *Лопатинский Я.Б.* Граничные свойства решений дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа // Докл. АН СССР. – 1956. – N2.
23. *Березанский Ю.М., Ройтберг Я.А.* Теорема о гомеоморфизмах и функция Грина для общих эллиптических граничных задач // Укр. мат. журн. – 1967. – Т. 19, №5. – С. 3-32.
24. *Красовский Ю.П.* Свойства функций Грина и обобщенные решения эллиптических граничных задач // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1969. – Т. 33, №1. – С. 109-137.
25. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. – М., 1965.

GENERALIZED SOLUTIONS TO SEMILINEAR ELLIPTIC EQUATION WITH STRONG POWER SINGULARITIES AT FRONTIER

Halyna LOPUSHANSKA

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1,
e-mail: diffeq@franko.lviv.ua

The sufficient conditions of the existence of the solution of the boundary value problem for quasilinear with linear main part elliptic $2m$ order equation and given generalized functions with strong power singularities onto the frontier are obtained.

Key words: semilinear elliptic equation, generalized function, weight space, nonlinear integrodifferential equation.

Стаття надійшла до редколегії 12.05.2006

Прийнята до друку 24.10.2007

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 2007. Вип.67. С.191-199 Ser. Mech.-Math. 2007. Vol.67. P.191-199

УДК 517.53

ПРО ТРИЧЛЕННУ СТЕПЕНЕВУ АСИМПТОТИКУ ЛОГАРИФМА МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА ЦІЛОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ

Любомира ЛУГОВА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1

Досліджено тричленну степеневу асимптотику логарифма максимального члена цілого ряду Діріхле.

Ключові слова: ряд Діріхле, максимальний член, тричленна степенева асимптотика.

1. Нехай (λ_n) – зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел $(\lambda_0 = 0)$, ряд Діріхле $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, $z = \sigma + it$, є цілим, а $\mu(\sigma) = \max\{|a_n| \exp(\sigma\lambda_n) : n \geqslant 0\}$ – його максимальний член. У випадку, коли R-порядок цілого ряду Діріхле дорівнює нулеві, то для характеристики зростання $\ln \mu(\sigma)$ вводять логарифмічні R-порядок p_1 і R-тип T_1 (за умови $1 < p_1 < \infty$) за формулами $p_1 = \varlimsup\limits_{\sigma\to+\infty} \dfrac{\ln\ln\mu(\sigma)}{\ln\sigma}$, $T_1 = \varlimsup\limits_{\sigma\to+\infty} \dfrac{\ln\mu(\sigma)}{\sigma^{p_1}}$. З отриманої в [1] загальної теореми про умови на коефіцієнти та показники цілого ряду Діріхле, за яких $\ln\mu(\sigma) \sim \Phi(\sigma)$ $(\sigma \to +\infty)$ для додатної неперервної опуклої на $(-\infty, +\infty)$ функції Φ, легко отримати, що $\ln\mu(\sigma) \sim T_1\sigma^{p_1}$ $(\sigma \to +\infty)$ тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $\varepsilon > 0$:

1) існує $n_0 = n_0(\varepsilon)$ таке, що $\ln|a_n| \leq -T_1(p_1 - 1)(1 + \varepsilon)\left(\frac{\lambda_n}{T_1 p_1}\right)^{p_1/(p_1-1)}$ для всіх $n \geq n_0$;

2) існує зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що $\frac{\lambda_{n_{k+1}}}{\lambda_{n_k}} \to 1$ $(k \to \infty)$ і $\ln|a_{n_k}| \geq -T_1(p_1 - 1)(1 - \varepsilon)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1 p_1}\right)^{p_1/(p_1-1)}$.

Двочленну асимптотику вигляду $\ln\mu(\sigma) = T_1\sigma^{p_1} + (\tau + o(1))\sigma^p$, $\sigma \to +\infty$, де $0 < p < p_1$ і $\tau \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, у випадку, коли $\lambda_n = n$ (тобто для степеневих рядів) вивчено в [2]. Цей результат можна перенести на цілі ряди Діріхле з довільними показниками. Фактично, якщо $T_1 > 0$, $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $p_1 > 1$ і $0 < p < p_1$, то для того, щоб $\ln\mu(\sigma) = T_1\sigma^{p_1} + (1 + o(1))\tau\sigma^p$, $\sigma \to +\infty$, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$:

© Лугова Любомира, 2007

1) існувало $n_0 = n_0(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n \ge n_0$

$$\ln|a_n| \le -T_1(p_1-1)\Big(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)} + (\tau+\varepsilon)\Big(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{p/(p_1-1)};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$$\ln|a_{n_k}| \ge -T_1(p_1-1)\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)} + (\tau-\varepsilon)\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p/(p_1-1)}$$

і $\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o\Big(\lambda_{n_k}^{\frac{p_1+p-2}{2(p_1-1)}}\Big), \qquad k \to \infty.$

Тричленну степеневу асимптотику

$$\ln\mu(\sigma) = T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{p_2} + (\tau+o(1))\sigma^p, \quad \sigma \to +\infty, \tag{1}$$

де $p_1 > 1$, $0 < p < p_2 < p_1$, $T_1 > 0$, $T_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ і $\tau \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ досліджено в [3], де доведено таку теорему.

Теорема A. *Для того, щоб $\ln\mu(\sigma)$ мав тричленну степеневу асимптотику (1), необхідно, а у випадку, коли $p \ge 2p_2 - p_1$, і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$:*

1) існувало $n_0 = n_0(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n \ge n_0$

$$\ln|a_n| \le -T_1(p_1-1)\Big(\tfrac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)} + T_2\Big(\tfrac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{p_2/(p_1-1)} + \\ +(\tau^*+\varepsilon)\Big(\tfrac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{\frac{\max\{p,\,2p_2-p_1\}}{p_1-1}};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$$\ln|a_{n_k}| \ge -T_1(p_1-1)\Big(\tfrac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)} + T_2\Big(\tfrac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p_2/(p_1-1)} + \\ +(\tau^*-\varepsilon)\Big(\tfrac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{\frac{\max\{p,\,2p_2-p_1\}}{p_1-1}}$$

і $\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o\Big(\lambda_{n_k}^{\frac{p_1+\max\{p,\,2p_2-p_1\}-2}{2(p_1-1)}}\Big)$, при $k \to \infty$, де

$$\tau^* = \tau I_{\{p:p\ge 2p_2-p_1\}}(p) - \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)} I_{\{p:p\le 2p_2-p_1\}}(p),$$

а $I_E(p)$ – характеристична функція множини E, тобто $I_E(p) = 1$, коли $p \in E$, і $I_E(p) = 0$, коли $p \notin E$.

Коли $p < 2p_2 - p_1$, умови 1) і 2) у теоремі A не достатні для того, щоб $\ln\mu(\sigma)$ мав тричленну степеневу асимптотику (1). Якщо $p = 2p_2 - p_1$, $\tau = \dfrac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, а третій член асимптотики в (1) має вигляд $(\tau+o(1))\sigma^p = \tau\sigma^p + o(\sigma^s)$ при $\sigma \to +\infty$, де $s < p$, то теорему A можна уточнити. Правильною є така теорема.

Теорема B. *Нехай* $2p_2 - p_1 > 0$ *і* $(3p_2 - 2p_1)(3p_2 - 2p_1 + 1) \neq 0$. *Для того, щоб*

$$\ln \mu(\sigma) = T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{p_2} + \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}\sigma^{2p_2-p_1} + o(\sigma^{3p_2-2p_1}), \quad \sigma \to +\infty,$$

необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$:

1) існувало $n_0 = n_0(\varepsilon)$ *таке, що для всіх* $n \geq n_0$

$$\ln|a_n| \leq -T_1(p_1-1)\Big(\tfrac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)} + T_2\Big(\tfrac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{p_2/(p_1-1)} - \\ - \Big(\tfrac{(3p_2-2p_1+1)(T_2p_2)^3}{6(T_1p_1(p_1-1))^2} - \varepsilon\Big)\Big(\tfrac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{\frac{3p_2-2p_1}{p_1-1}};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) *натуральних чисел така, що*

$$\ln|a_{n_k}| \geq -T_1(p_1-1)\Big(\tfrac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)} + T_2\Big(\tfrac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p_2/(p_1-1)} - \\ - \Big(\tfrac{(3p_2-2p_1+1)(T_2p_2)^3}{6(T_1p_1(p_1-1))^2} + \varepsilon\Big)\Big(\tfrac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{\frac{3p_2-2p_1}{p_1-1}};$$

і $\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o\Big(\lambda_{n_k}^{\frac{3p_2-p_1-2}{2(p_1-1)}}\Big), \qquad k \to \infty.$

Тут продовжуємо дослідження тричленної степеневої асимптотики логарифма максимального члена цілого ряду Діріхле у випадку, коли

$$(3p_2 - 2p_1)(3p_2 - 2p_1 + 1) = 0.$$

Правильні такі теореми.

Теорема 1. *Нехай* $p_1 > 2$. *Для того, щоб*

$$\ln \mu(\sigma) = T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{(2p_1-1)/3} + \frac{(2p_1-1)^2T_2^2}{18T_1p_1(p_1-1)}\sigma^{(p_1-2)/3} + o(\sigma^{-(p_1+4)/3}), \quad \sigma \to +\infty, \tag{2}$$

необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$:

1) існувало $n_0 = n_0(\varepsilon)$ *таке, що для всіх* $n \geq n_0$

$$\ln|a_n| \leq -T_1(p_1-1)\Big(\tfrac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)} + T_2\Big(\tfrac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{(2p_1-1)/(3(p_1-1))} - \\ - \left(\frac{(p_1+1)(p_1-2)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3} - \varepsilon\right)\Big(\tfrac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{-(p_1+4)/(3(p_1-1))};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) *натуральних чисел така, що*

$$\ln|a_{n_k}| \geq -T_1(p_1-1)\Big(\tfrac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)} + T_2\Big(\tfrac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{(2p_1-1)/(3(p_1-1))} - \\ - \left(\frac{(p_1+1)(p_1-2)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3} - \varepsilon\right)\Big(\tfrac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{-(p_1+4)/(3(p_1-1))}$$

і $\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o\Big(\lambda_{n_k}^{(p_1-5)/(3(p_1-1))}\Big)$, $k \to \infty$.

Теорема 2. *Нехай* $(p_1-3)(p_1-6)\neq 0$. *Для того, щоб*

$$\ln\mu(\sigma)=T_1\sigma^{p_1}+T_2\sigma^{2p_1/3}+\frac{2p_1T_2^2}{9T_1(p_1-1)}\sigma^{p_1/3}+o(\sigma^{-p_1/3}),\quad \sigma\to+\infty,$$

необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon>0$*:*

1) *існувало* $n_0=n_0(\varepsilon)$ *таке, що для всіх* $n\geq n_0$

$$\ln|a_n|\leq -T_1(p_1-1)\Big(\tfrac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)}+T_2\Big(\tfrac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{2p_1/(3(p_1-1))}-\tfrac{4T_2^3}{81T_1^3(p_1-1)^3}-$$
$$-\left(\frac{2p_1(p_1-3)(p_1-6)T_2^4}{2187T_1^3(p_1-1)^3}-\varepsilon\right)\left(\tfrac{\lambda_n}{T_1p_1}\right)^{-p_1/(3(p_1-1))};$$

2) *існувала зростаюча послідовність* (n_k) *натуральних чисел така, що*

$$\ln|a_{n_k}|\geq -T_1(p_1-1)\Big(\tfrac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)}+T_2\Big(\tfrac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{(2p_1-1)/(3(p_1-1))}-$$
$$-\left(\frac{2p_1(p_1-3)(p_1-6)T_2^4}{2187T_1^3(p_1-1)^3}+\varepsilon\right)\left(\tfrac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\right)^{-(p_1+4)/(3(p_1-1))}$$

і $\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k}=o\Big(\lambda_{n_k}^{(p_1-3)/(3(p_1-1))}\Big)$, $k\to\infty$.

Теорема 3. *Для того, щоб* $\ln\mu(\sigma)=T_1\sigma^6+T_2\sigma^4+\dfrac{4T_2^2}{15T_1}\sigma^2+o(\sigma^{-4})$, $\sigma\to+\infty$, *необхідно і достатньо, щоб для будь-якого* $\varepsilon>0$*:*

1) *існувало* $n_0=n_0(\varepsilon)$ *таке, що для всіх* $n\geq n_0$

$$\ln|a_n|\leq -5T_1\Big(\frac{\lambda_n}{6T_1}\Big)^{6/5}+T_2\Big(\frac{\lambda_n}{6T_1}\Big)^{4/5}-\frac{8T_2^3}{675T_1^2}+\left(\frac{16T_2^5}{5(15T_1)^4}+\varepsilon\right)\left(\frac{\lambda_n}{6T_1}\right)^{-4/5};$$

2) *існувала зростаюча послідовність* (n_k) *натуральних чисел така, що*

$$\ln|a_{n_k}|\geq -5T_1\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)}+T_2\Big(\frac{\lambda_n}{6T_1}\Big)^{4/5}-\frac{8T_2^3}{675T_1^2}+\left(\frac{16T_2^5}{5(15T_1)^4}-\varepsilon\right)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{6T_1}\right)^{-4/5}$$

і $\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k}=o\Big(1\Big)$, $k\to\infty$.

Теорема 4. *Для того, щоб* $\ln\mu(\sigma)=T_1\sigma^3+T_2\sigma^2+\dfrac{T_2^2}{3T_1}\sigma+o(\sigma^{-2})$, $\sigma\to+\infty$, *необхідно і достатньо, щоб для будь-якого* $\varepsilon>0$*:*

1) *існувало* $n_0=n_0(\varepsilon)$ *таке, що для всіх* $n\geq n_0$

$$\ln|a_n|\leq -2T_1\Big(\frac{\lambda_n}{6T_1}\Big)^{3/2}+T_2\frac{\lambda_n}{6T_1}-\frac{T_2^3}{27T_1^2}+\varepsilon\Big(\frac{\lambda_n}{3T_1}\Big)^{-1};$$

2) *існувала зростаюча послідовність* (n_k) *натуральних чисел така, що*

$$\ln|a_{n_k}|\geq -2T_1\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{6T_1}\Big)^{3/2}+T_2\frac{\lambda_{n_k}}{6T_1}-\frac{T_2^3}{27T_1^2}-\varepsilon\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{3T_1}\Big)^{-1}$$

і $\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k}=o\Big(\lambda_{n_k}^{-1/4}\Big)$, $k\to\infty$.

2. Допоміжні результати. Нехай $\Omega(+\infty)$ – клас додатних на $(-\infty,+\infty)$ функцій Φ таких, що похідні $\Phi^{'}$ неперервно диференційовні, додатні і зростають до $+\infty$ на $(-\infty,+\infty)$. Через φ позначатимемо функцію, обернену до $\Phi^{'}$, і нехай $\Psi(\sigma)=\sigma-\Phi(\sigma)/\Phi^{'}(\sigma)$ – функція, асоційована з Φ за Ньютоном.

Лема 1 [4-5]. *Нехай* $\Phi\in\Omega(+\infty)$. *Для того, щоб* $\ln\mu(\sigma,F)\leqslant\Phi(\sigma)$ *для всіх* $\sigma\geqslant\sigma_0$, *необхідно і достатньо, щоб* $\ln|a_n|\leqslant-\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$ *для всіх* $n\geqslant n_0$.

Для $\Phi\in\Omega(+\infty)$ і $0<a<b<+\infty$ приймемо

$$G_1(a,b,\Phi)=\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{\Phi(\varphi(t))}{t^2}dt,\quad G_2(a,b,\Phi)=\Phi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi(t)dt\right).$$

Лема 2 [5]. *Нехай* $\Phi\in\Omega(+\infty)$ *i* $\ln|a_{n_k}|\leq-\lambda_{n_k}\Psi(\varphi(\lambda_{n_k}))$ *для деякої зростаючої послідовності* (n_k) *натуральних чисел. Тоді для всіх* $\sigma\in[\varphi(\lambda_{n_k}),\varphi(\lambda_{n_{k+1}})]$ *і всіх* $k\geqslant k_0$ *правильна нерівність*

$$\ln\mu(\sigma,F)\geq\Phi(\sigma)-(G_2(\lambda_{n_k},\lambda_{n_{k+1}},\Phi)-G_1(\lambda_{n_k},\lambda_{n_{k+1}},\Phi)).\tag{3}$$

Лема 3 [5]. *Нехай* $\Phi_1\in\Omega(+\infty)$, $\Phi_2\in\Omega(+\infty)$ *i для всіх* $\sigma\geqslant\sigma_0$

$$\Phi_1(\sigma)\leq\ln\mu(\sigma,F)\leqslant\Phi_2(\sigma).\tag{4}$$

Тоді

$$\ln|a_n|\leq-\lambda_n\Psi_2(\varphi_2(\lambda_n)),n\geqslant n_0,\tag{5}$$

та існує зростаюча послідовність (n_k) *натуральних чисел така, що*

$$\ln|a_{n_k}|\geq-\lambda_{n_k}\Psi_1(\varphi_1(\lambda_{n_k}))\tag{6}$$

і

$$G_1(\lambda_{n_k},\lambda_{n_{k+1}},\Phi_2)\geqslant\Phi_1\left(\frac{1}{\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k}}\int_{\lambda_{n_k}}^{\lambda_{n_{k+1}}}\varphi_2(t)dt\right),\tag{7}$$

де Ψ_j *і* φ_j *побудовані відповідно для* Φ_j.

Припустимо тепер, що

$$\Phi(\sigma)=T_1\sigma^{p_1}+T_2\sigma^{p_2}+\tau\sigma^p+\delta\sigma^s\quad(\sigma\geq\sigma_0),\tag{8}$$

де $T_1>0$, $p_1>1$, $0<p<p_2<p_1$, $s\leq p$, $T_2\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\tau\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ і $\delta\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, а

$$W(x)=T_1(p_1-1)\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}}-T_2\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1-1}}.$$

Тоді правильні дві леми.

Лема 4 [3]. *Нехай функція* $\Phi\in\Omega(+\infty)$ *задовольняє умову (8). Тоді при* $x\to+\infty$ *правильні такі асимптотичні рівності:*

1) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $s = 4p_2 - 3p_1$, $\tau = \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2 - 2p_1 + 1 = 0$ *і* $\delta \neq \frac{(p_1+1)(p_1-2)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3}$, *то*

$$x\Psi(\varphi(x)) = W(x) + \left(\frac{(p_1+1)(p_1-2)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3} - \delta + o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{4p_2-3p_1}{p_1-1}};$$

2) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $s = 4p_2 - 3p_1$, $3p_2 - 2p_1 = 0$, $(p_1-3)(p_1-6) \neq 0$, $\tau = \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$ *і* $\delta \neq \frac{(p_1-3)(p_1-6)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3}$, *то*

$$x\Psi(\varphi(x)) = W(x) + \frac{(T_2p_2)^3}{6(T_1p_1(p_1-1))^2} +$$
$$+\left(\frac{(p_1-3)(p_1-6)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3} - \delta + o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{4p_2-3p_1}{p_1-1}};$$

3) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $\tau = \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2 - 2p_1 = 0$, $p_1 = 6$, $s = -4 = 5p_2 - 4p_1$ *і* $\delta \neq -\frac{(2T_2)^5}{10(15T_1))^4}$, *то*

$$x\Psi(\varphi(x)) = 5T_1\left(\frac{x}{6T_1}\right)^{6/5} - T_2\left(\frac{x}{6T_1}\right)^{4/5} + 5T_1\left(\frac{2T_2}{15T_1}\right)^3 -$$
$$-\left(\frac{(2T_2)^5}{10(15T_1)^4} + \delta + o(1)\right)\left(\frac{x}{6T_1}\right)^{-4/5};$$

4) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $\tau = \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2 - 2p_1 = 0$, $p_1 = 3$ *і* $s = -2 = 5p_2 - 4p_1$, *то*

$$x\Psi(\varphi(x)) = 2T_1\left(\frac{x}{3T_1}\right)^{3/2} - T_2\frac{x}{3T_1} + T_1\left(\frac{T_2}{3T_1}\right)^3 - (\delta + o(1))\left(\frac{x}{3T_1}\right)^{-1}.$$

Лема 5 [3]. *Нехай функція* $\Phi \in \Omega(+\infty)$ *задовольняє умову (8). Якщо* $\theta_k \to 0$ $(k \to \infty)$, *то*

$$G_2(t_k, t_k(1+\theta_k), \Phi) - G_1(t_k, t_k(1+\theta_k), \Phi) = \tfrac{T_1p_1\theta_k^2}{8(p_1-1)}\left(\tfrac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}} +$$
$$+O\left(\theta_k^3 t_k^{\frac{p_1}{p_1-1}}\right) + O\left(\theta_k^2 t_k^{\frac{p_2}{p_1-1}}\right) + g(t_k, \theta_k),$$

де при $k \to \infty$ *правильні такі асимптотичні рівності:*

1) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $s = 4p_2 - 3p_1$, $\tau = \dfrac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2 - 2p_1 + 1 = 0$ *і* $\delta \neq \dfrac{(p_1+1)(p_1-2)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3}$, *то* $g(t_k, \theta_k) = o\left(t_k^{\frac{4p_2-3p_1}{p_1-1}}\right)$;

2) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $s = 4p_2 - 3p_1$, $\tau = \dfrac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2 - 2p_1 = 0$, $(p_1-3)(p_1-6) \neq 0$ *і* $\delta \neq \dfrac{(p_1-3)(p_1-6)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3}$, *то* $g(t_k, \theta_k) = o\left(t_k^{\frac{4p_2-3p_1}{p_1-1}}\right)$;

3) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $\tau = \dfrac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2 - 2p_1 = 0$, $p_1 = 6$, $s = -4 = 5p_2 - 4p_1$ *і* $\delta \neq -\dfrac{(2T_2)^5}{10(15T_1))^4}$, *то* $g(t_k, \theta_k) = o\left(t_k^{-4/5}\right)$;

4) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $\tau = \dfrac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2 - 2p_1 = 0$, $p_1 = 3$ *і* $s = -2 = 5p_2 - 4p_1$, *то* $g(t_k, \theta_k) = o\left(t_k^{-1}\right)$;

Нам треба також таку лему.

Лема 6 [3]. *Нехай* $\Phi_1(\sigma) = T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{p_2} + \tau\sigma^p - \delta\sigma^s \quad (\sigma \geq \sigma_0)$, $\Phi_2(\sigma) = T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{p_2} + \tau\sigma^p + \delta\sigma^s \quad (\sigma \geq \sigma_0)$, *де* $\delta > 0$ *і* $s \leq p$. *Припустимо, що* $t_{k+1} = (1+\theta_k)t_k$ *і* $G_1(t_k, t_{k+1}, \Phi_2) \geq \Phi_1(\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi_2))$. *Тоді* $\theta_k \to 0$ $(k \to \infty)$ *і*

$$\theta_k^2 \leq \frac{16(p_1-1)}{T_1p_1}(\delta + o(1))\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{s-p_1}{p_1-1}} + g^*(t_k, \theta_k),$$

де при $k \to \infty$ *правильні такі асимптотичні рівності:*

1) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $s = 4p_2 - 3p_1$, $\tau = \dfrac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2 - 2p_1 + 1 = 0$ *і* $\delta \neq \pm\dfrac{(p_1+1)(p_1-2)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3}$, *то* $g^*(t_k, \theta_k) = o\left(t_k^{\frac{4(p_2-p_1)}{p_1-1}}\right)$;

2) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $s = 4p_2 - 3p_1$, $\tau = \dfrac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2 - 2p_1 = 0$, $(p_1-3)(p_1-6) \neq 0$ *і* $\delta \neq \pm\dfrac{(p_1-3)(p_1-6)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3}$, *то* $g^*(t_k, \theta_k) = o\left(t_k^{\frac{4(p_2-p_1)}{p_1-1}}\right)$;

3) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $\tau = \dfrac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2 - 2p_1 = 0$, $p_1 = 6$, $s = -4 = 5p_2 - 4p_1$ *і* $\delta \neq \pm\dfrac{(2T_2)^5}{10(15T_1)^4}$, *то* $g^*(t_k, \theta_k) = o\left(t_k^{-2}\right)$;

4) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $\tau = \dfrac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2 - 2p_1 = 0$, $p_1 = 3$ *і* $s = -2 = 5p_2 - 4p_1$, *то* $g^*(t_k, \theta_k) = o\left(t_k^{-5/2}\right)$.

3. Доведення теорем. З огляду на подібність, розглянемо тільки доведення теореми 1. Нехай $0 < \delta < \frac{(p_1+1)(p_1-2)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3}$. Тоді з (2) для всіх $\sigma \geq \sigma_0(\delta)$ маємо (4) з $\Phi_1(\sigma) = T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{(2p_1-1)/3} + \frac{(2p_1-1)^2T_2^2}{18T_1p_1(p_1-1)}\sigma^{(p_1-2)/3} - \delta\sigma^{-(p_1+4)/3}$ і $\Phi_2(\sigma) = T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{(2p_1-1)/3} + \frac{(2p_1-1)^2T_2^2}{18T_1p_1(p_1-1)}\sigma^{(p_1-2)/3} + \delta\sigma^{-(p_1+4)/3}$. Тому за лемою 3 правильні нерівності (5) – (7). Але за твердженням 1) леми 4

$$\lambda_n\Psi_2(\varphi_2(\lambda_n)) = T_1(p_1-1)\Big(\tfrac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)} - T_2\Big(\tfrac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{p_2/(p_1-1)} +$$
$$+\left(\tfrac{(p_1+1)(p_1-2)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3} - \delta + o(1)\right)\left(\tfrac{\lambda_n}{T_1p_1}\right)^{\frac{4p_2-3p_1}{p_1-1}}, \quad n\to\infty,$$
$$\lambda_{n_k}\Psi_1(\varphi_1(\lambda_{n_k})) = T_1(p_1-1)\Big(\tfrac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)} - T_2\Big(\tfrac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p_2/(p_1-1)} +$$
$$+\left(\tfrac{(p_1+1)(p_1-2)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3} - \delta + o(1)\right)\left(\tfrac{\lambda_n}{T_1p_1}\right)^{\frac{4p_2-3p_1}{p_1-1}}, \quad k\to\infty,$$

а за твердженням 1) леми 6 з нерівності (7) випливає, що $\left(\frac{\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k}}{\lambda_{n_k}}\right)^2 \leq \frac{16(p_1-1)}{T_1p_1}(\delta+$ $+o(1))\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\right)^{\frac{4p_2-4p_1}{p_1-1}}$, $k\to\infty$. Тому, завдяки довільності δ, з цих співвідношень випливає необхідність умов 1) і 2) у теоремі 1. Щодо достатності, то з умови 1) за лемою 1 і твердженням 1) леми 4 отримуємо асимптотичну нерівність

$$\ln\mu(\sigma) \leq T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{(2p_1-1)/3} + \frac{(2p_1-1)^2T_2^2}{18T_1p_1(p_1-1)}\sigma^{(p_1-2)/3} + o(\sigma^{-(p_1+4)/3}),\ \sigma\to+\infty. \quad (9)$$

Далі, за лемою 2 і твердженням 1) леми 5 з умови 2) теореми 1 для всіх $\sigma \in [\varphi_1(\lambda_{n_k}), \varphi_1(\lambda_{n_{k+1}})]$ і всіх $k \geq k_0$ маємо

$$\ln\mu(\sigma) \geq \Phi_1(\sigma) - \tfrac{T_1p_1\theta_k^2}{8(p_1-1)}\left(\tfrac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}} + O\left(\theta_k^3\lambda_{n_k}^{\frac{p_1}{p_1-1}}\right) + O\left(\theta_k^2\lambda_{n_k}^{\frac{p_2}{p_1-1}}\right) +$$
$$+o\left(\lambda_{n_k}^{\frac{4p_2-3p_1}{p_1-1}}\right) = \Phi_1(\sigma) + o\left(\lambda_{n_k}^{\frac{4p_2-3p_1}{p_1-1}}\right), \quad k\to\infty, \quad (10)$$

бо $\theta_k = o(\lambda_{n_k}^{\frac{4p_2-4p_1}{2(p_1-1)}})$, $k\to\infty$. Оскільки $\varphi_1(\lambda_{n_k}) \leq \sigma \leq \varphi_1(\lambda_{n_{k+1}})$, то $\lambda_{n_k} \leq \Phi_1'(\sigma) \leq \lambda_{n_{k+1}}$ і з (10) маємо $\ln\mu(\sigma) \geq \Phi_1(\sigma) + o\left(\Phi_1'(\sigma)^{\frac{4p_2-3p_1}{p_1-1}}\right) = \Phi_1(\sigma) + o(\sigma^{4p_2-3p_1})$, $\sigma\to+\infty$, звідки, завдяки довільності δ, отримуємо асимптотичну нерівність

$$\ln\mu(\sigma) \geq T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{(2p_1-1)/3} + \frac{(2p_1-1)^2T_2^2}{18T_1p_1(p_1-1)}\sigma^{(p_1-2)/3} + o(\sigma^{-(p_1+4)/3}), \quad \sigma\to+\infty. \quad (11)$$

З (9) і (11) випливає (2). Теорему 1 доведено.

Решта теорем доводиться подібно, використовуючи пункти 2)-4) допоміжних результатів відповідно.

1. *Заболоцький М.В., Шеремета М.М.* Узагальнення теореми Ліндельофа // Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50, № 9. – С. 1177-1192.
2. *Тарасюк Р.І.* Про двочленну асимптотику цілих функцій, представлених степеневими рядами // Волинськ. матем. вісник. – 1995. – Вип. 2. – С. 162-164.
3. *Шеремета М.М., Лугова Л.Л.* Тричленна степенева асимптотика логарифма масимального члена цілого ряду Діріхле // Матем. студії. – 2006. – Т. 25, № 2. – С. 149-168.
4. *Шеремета М.Н., Федыняк С.И.* О производной ряда Дирихле // Сибирск. мат. журн. – 1998. – Т. 39, № 1. – С. 206-223.
5. *Шеремета М.М., Сумик О.М.* Зв'язок між зростанням спряжених за Юнгою функцій // Матем. студії. – 1999. – Т. 11, № 1. – С. 41-47.

ON THREE-TERM POWER ASYMPTOTIC FOR THE LOGARITHM OF THE MAXIMAL TERM OF ENTIRE DIRICHLET SERIES

Liubomyra LUHOVA

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka str., 1

It is investigated three-term power asymptotic for the logarithm of the maximal term of an entire Dirichlet series.

Key words: Dirichlet series, maximal term, three-term power asymptotic.

Стаття надійшла до редколегії 21.02.2007
Прийнята до друку 24.10.2007

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2007. Вип.67. С.200-206 *Ser. Mech.-Math. 2007. Vol.67. P.200-206*

УДК 517.537.72

ПРО НАЛЕЖНІСТЬ АБСОЛЮТНО ЗБІЖНИХ У ПІВПЛОЩИНІ РЯДІВ ДІРІХЛЕ СКІНЧЕННОГО R-ПОРЯДКУ ДО КЛАСУ ЗБІЖНОСТІ

Оксана МУЛЯВА[1], **Мирослав ШЕРЕМЕТА**[2]

[1]*Київський національний університет харчових технологій,*
01004, Київ, вул. Володимирська, 68
[2]*Львівський національний університет імені Івана Франка,*
79000, Львів, вул. Університетська, 1

Для ряду Діріхле $F(s)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}$ з абсцисою абсолютної збіжності $\sigma_a = 0$ нехай $M(\sigma) = \sup\{|F(\sigma+it)| : t\in\mathbb{R}\}$ і $\mu(\sigma) = \max\{|a_n|\exp(\sigma\lambda_n) : n\geq 0\}$ $(\sigma<0)$. Визначено умови на λ_n для еквівалентності співвідношень $\int\limits_{-1}^{0} \frac{\ln M(\sigma,F)}{|\sigma|^2\exp\{\varrho_R/|\sigma|\}}d\sigma < +\infty$ і $\int\limits_{-1}^{0} \frac{\ln \mu(\sigma,F)}{|\sigma|^2\exp\{\varrho_R/|\sigma|\}}d\sigma < +\infty$ $(\varrho>0)$.

Ключові слова: ряд Діріхле, максимум модуля, максимальний член, клас збіжності.

1. Нехай $\Lambda=(\lambda_n)_{n=0}^{\infty}$ – зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел $(\lambda_0=0)$, а $S^0(\Lambda)$ – клас рядів Діріхле

$$F(s)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}, \quad s=\sigma+it, \tag{1}$$

з абсцисою абсолютної збіжності $\sigma_a = 0$. Для $\sigma<0$ нехай $M(\sigma,F) = \sup\{|F(\sigma+it)| : t\in\mathbb{R}\}$, $\mu(\sigma,F)=\max\{|a_n|\exp(\sigma\lambda_n) : n\geq 0\}$ – максимальний член ряду (1), $\nu(\sigma,F)=\max\{n\geq 0 : |a_n|\exp(\sigma\lambda_n)=\mu(\sigma,F)\}$ – його центральний індекс, а $\varkappa_n = \dfrac{\ln|a_n|-\ln|a_{n+1}|}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}$.

Величина $\varrho_R = \overline{\lim\limits_{\sigma\uparrow 0}}|\sigma|\ln\ln M(\sigma,F)$ називається [1] R-порядком $F\in S^0(\Lambda)$. За умови $0<\varrho_R<+\infty$ клас збіжності означається [2] умовою

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{\ln M(\sigma,F)}{|\sigma|^2\exp\{\varrho_R/|\sigma|\}}d\sigma < +\infty. \tag{2}$$

© Мулява Оксана, Шеремета Мирослав, 2007

В [2] доведено таке: якщо $\ln n = O(\ln \lambda_n)$ $(n \to \infty)$, то для того, щоб ряд (1) належав до класу збіжності, необхідно, а у випадку, коли послідовність $(\varkappa_n)$ неспадна, достатньо, щоб $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lambda_n - \lambda_{n-1})\left(\frac{\ln^+|a_n|}{\lambda_n}\right)^2 \exp\left\{-\frac{\varrho_R\lambda_n}{\ln^+|a_n|}\right\} < +\infty$. Умову $\ln n = O(\ln \lambda_n)$ $(n \to \infty)$ у доведенні цього твердження використовували тільки для того, щоб показати, що співвідношення (2) рівносильне співвідношенню

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{|\sigma|^2 \exp\{\varrho_R/|\sigma|\}} d\sigma < +\infty. \tag{3}$$

Виникає запитання про істотність умови $\ln n = O(\ln \lambda_n)$ $(n \to \infty)$ для еквівалентності співвідношень (2) і (3). Цій проблемі присвячена наша стаття. Ми покажемо, що наведена умова досить вузька, зазначимо умову, близьку до необхідної. Іншими словами, доведемо таку теорему.

Теорема 1. *Для того, щоб для кожної функції $F \in S^0(\Lambda)$ співвідношення (2) і (3) були рівносильними, необхідно, щоб $\ln n = O(\lambda_n/\ln^2 \lambda_n)$ $(n \to \infty)$, і достатньо $\ln n \le \lambda_n/\ln^q \lambda_n$ $(n \ge n_0)$ з $q > 3$.*

Ця теорема є об'єднанням нижче доведених тверджень 1 і 2.

2. Необхідна умова еквівалентності співвідношень (2) і (3). Для визначення такої умови використовуватимемо такі леми.

Лема 1. (3) . *Нехай $\alpha : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ і $\gamma : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ – невід'ємні неперервні зростаючі до $+\infty$ функції і $\alpha(x + O(1)) \sim \alpha(x)$ при $x \to +\infty$. Якщо $\varlimsup\limits_{n\to+\infty}(\alpha(n)/\gamma(\lambda_n)) > 1$, то існує підпослідовність (λ_k^*) послідовності (λ_n) така, що $k \le \alpha^{-1}(\gamma(\lambda_k^*)) + 1$ для всіх $k \ge 1$ і $k_j \ge \alpha^{-1}(\gamma(\lambda_{k_j}^*))$ для деякої зростаючої послідовності (k_j) натуральних чисел.*

Лема 2. (4, с. 10) . *Якщо $\ln n = o(\lambda_n)$ при $n \to \infty$, то абсциса σ_a абсолютної збіжності ряду (1) обчислюється за формулою $\sigma_a = \varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|}$.*

Лема 3. *Співвідношення (3) рівносильне співвідношенню*

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{\lambda_{\nu(\sigma,F)}}{\exp\{\varrho_R/|\sigma|\}} d\sigma < +\infty. \tag{4}$$

Доведення. Справді, оскільки [4, с. 17] $\ln \mu(\sigma, F) = \ln \mu(-1, F) + \int\limits_{-1}^{\sigma} \lambda_{\nu(x,F)} dx$, то

$$l\int\limits_{-1}^{0} \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{|\sigma|^2 \exp\{\varrho_R/|\sigma|\}} d\sigma = \int\limits_{-1}^{0} \frac{d\sigma}{|\sigma|^2 \exp\{\varrho_R/|\sigma|\}} \int\limits_{-1}^{\sigma} \lambda_{\nu(x,F)} dx + K_1 =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} \lambda_{\nu(x,F)} dx \int\limits_{x}^{0} \frac{d\sigma}{|\sigma|^2 \exp\{\varrho_R/|\sigma|\}} + K_1 = \frac{1}{\varrho_R} \int\limits_{-1}^{0} \frac{\lambda_{\nu(x,F)}}{\exp\{\varrho_R/|x|\}} dx + K_1, K_1 \equiv \mathrm{const} > 0,$$

тобто співвідношення (3) і (4) рівносильні.

Тепер можемо довести таке твердження.

Твердження 1. *Умова* $\ln n = O(\lambda_n/\ln^2 \lambda_n)$ $(n \to \infty)$ *є необхідною для того, щоб для кожної функції* $F \in S^0(\Lambda)$ *співвідношення (2) і (3) були рівносильними.*

Доведення. Припустимо, що умова $\ln n = O(\lambda_n/\ln^2 \lambda_n)$ $(n \to \infty)$ не виконується. Тоді існує додатна неперервна повільно зростаюча до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функція l така, що $l(x) = o(\ln^2 x)$ $(x \to +\infty)$ і $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{\ln n}{\lambda_n l(\lambda_n)/\ln^2 \lambda_n} > 1$. За лемою 1 з $\alpha(x) = \ln x$ і $\gamma(x) = xl(x)/\ln^2 x$, $x \geq 1$, існує підпослідовність (λ_k^*) послідовності (λ_n) така, що $k \leq \exp\left\{\lambda_k^* l(\lambda_k^*)/\ln^2 \lambda_k^*\right\} + 1$ для всіх $k \geq 1$ і $k_j \geq \exp\left\{\lambda_{k_j}^* l(\lambda_{k_j}^*)/\ln^2 \lambda_{k_j}^*\right\}$ для деякої зростаючої послідовності (k_j) натуральних чисел.

Якщо $\lambda_n \neq \lambda_k^*$, то приймемо $a_n = 0$, а з метою скорочення запису в отриманому ряді Діріхле замінимо λ_k^* на λ_n. Прийдемо до ряду Діріхле (1), де послідовність (λ_n) така, що $\ln n \leq \lambda_n l(\lambda_n)/\ln^2 \lambda_n + 1$ для всіх $n \geq 1$ і $\ln n_j \geq \lambda_{n_j} l(\lambda_{n_j})/\ln^2 \lambda_{n_j}$ для деякої зростаючої послідовності (n_j) натуральних чисел. Послідовність (n_j) можемо вважати такою, що $\sum\limits_{j=j_0}^{\infty} \dfrac{1}{l(\lambda_{n_{j+1}})} < +\infty$ і $n_{j+1} > 2n_j$ для всіх $j \geq 1$.

Нехай (q_k) – зростаюча до $+\infty$ послідовність додатних чисел, а $m_j = [n_{j+1}/2]$. Приймемо $n_0 = 0$, $a_{n_0} = 1$, $a_n = 0$ для всіх $n_j < n < m_j$,

$$a_{n_{j+1}} = \prod_{k=0}^{j} \exp\{|q_k|(\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k})\}, \quad j = 1, 2, 3, \ldots, \tag{5}$$

і

$$a_n = a_{n_j} \exp\{|q_j|(\lambda_n - \lambda_{n_j})\}, \quad m_j \leq n < n_{j+1}, \tag{6}$$

тобто отримуємо ряд Діріхле

$$F^*(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(a_{n_j} \exp\{s\lambda_{n_j}\} + \sum_{n=m_j}^{n_{j+1}-1} a_n \exp\{s\lambda_n\} \right). \tag{7}$$

З (5) і (6) легко випливає, що

$$\frac{\ln a_{n_j} - \ln a_{n_{j+1}}}{\lambda_{n_{j+1}} - \lambda_{n_j}} = \frac{\ln a_{n_j} - \ln a_{m_j}}{\lambda_{m_j} - \lambda_{n_j}} = \frac{\ln a_n - \ln a_{n+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = q_j, \quad m_j \leq n < n_{j+1}.$$

Якщо $q_j \leq \sigma < q_{j+1}$, то $\nu(\sigma, F^*) = n_{j+1}$ і $\mu(\sigma, F^*) = a_{n_{j+1}} \exp\{\sigma\lambda_{n_{j+1}}\}$. Звідси випливає, що

$$\int\limits_{q_1}^{0} \frac{\lambda_{\nu(\sigma,F^*)}}{\exp\{\varrho_R/|\sigma|\}} d\sigma = \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{q_j}^{q_{j+1}} \frac{\lambda_{\nu(\sigma,F^*)}}{\exp\{\varrho_R/|\sigma|\}} d\sigma = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{n_{j+1}} \int\limits_{q_j}^{q_{j+1}} \frac{d\sigma}{\exp\{\varrho_R/|\sigma|\}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{n_{j+1}} \int\limits_{q_j}^{q_{j+1}} \frac{\sigma^2 d\sigma}{|\sigma|^2 \exp\{\varrho_R/|\sigma|\}} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{n_{j+1}} \frac{1}{\varrho_R} \int\limits_{q_j}^{q_{j+1}} \sigma^2 d\left(-\frac{1}{\exp\{\varrho_R/|\sigma|\}}\right) =$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{\varrho_R}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{n_{j+1}}\left(\frac{|q_j|^2}{\exp\{\varrho_R/|q_j|\}} - \frac{|q_{j+1}|^2}{\exp\{\varrho_R/|q_{j+1}|\}} - 2\int\limits_{q_j}^{q_{j+1}}\frac{|\sigma|d\sigma}{|\sigma|^2\exp\{\varrho_R/|\sigma|\}}\right) \le \\ &\le \frac{1}{\varrho_R}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n_{j+1}}|q_j|^2}{\exp\{\varrho_R/|q_j|\}}.\end{aligned} \tag{8}$$

З іншого боку, для всіх досить великих j

$$\begin{aligned}M(q_j, F^*) \ge \sum_{n=m_j}^{n_{j+1}} a_n\exp\{q_j\lambda_n\} = (n_{j+1} - m_j)\mu(q_j, F^*) \ge \\ \ge K_2 n_{j+1}, \quad K_2 \equiv \text{const} > 0.\end{aligned} \tag{9}$$

Виберемо $q_j = -\varrho_R\left(\ln\,\frac{\lambda_{n_{j+1}}l(\lambda_{n_{j+1}})}{\ln^2\,\lambda_{n_{j+1}}}\right)^{-1}$. Оскільки l – повільно зростаюча функція, то $\ln\,l(x) = o(\ln\,x)$ $(x \to +\infty)$, тому $|q_j| \le K_3/\ln\,\lambda_{n_{j+1}}$ $(j \ge j_0)$, $K_3 \equiv \text{const} > 0$.

З (9) отримуємо

$$\ln\,M(q_j, F^*) \ge \ln\,n_{j+1} + \ln\,K_2 \ge \frac{\lambda_{n_{j+1}}l(\lambda_{n_{j+1}})}{\ln^2\,\lambda_{n_{j+1}}} + \ln\,K_2 = \exp\left\{\frac{\varrho_R}{|q_j|}\right\} + \ln\,K_2,$$

тобто співвідношення (2) не виконується, бо з нього випливає, що $\ln\,M(\sigma, F) = o(\exp\{\varrho_R/|\sigma|\})$ $(\sigma \uparrow 0)$.

Водночас з (8) маємо

$$\int\limits_{q_1}^{0}\frac{\lambda_{\nu(\sigma,F^*)}}{\exp\{\varrho_R/|\sigma|\}}d\sigma \le \sum_{j=1}^{\infty}\frac{K_3^2\lambda_{n_{j+1}}}{\dfrac{\lambda_{n_{j+1}}l(\lambda_{n_{j+1}})}{\ln^2\,\lambda_{n_{j+1}}}\ln^2\,\lambda_{n_{j+1}}} = K_3^2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{l(\lambda_{n_{j+1}})} < +\infty,$$

тобто співвідношення (4), а за лемою 3 і співвідношення (3) правильні.

Залишилось довести, що ряд (7) має нульову абсцису абсолютної збіжності. Оскільки $|q_k| \downarrow 0$ $(k \to \infty)$, то з (5) випливає, що

$$\lim_{j\to\infty}\frac{\ln\,a_{n_{j+1}}}{\lambda_{n_{j+1}}} = \lim_{j\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{j}|q_k|(\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k})}{\sum\limits_{k=0}^{j}(\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k})} = 0,$$

а з (6) для $m_j \le n < n_{j+1}$ маємо

$$\frac{\ln\,a_n}{\lambda_n} \le \frac{\ln\,a_{n_j}}{\lambda_n} + |q_j| \le \frac{\ln\,a_{n_j}}{\lambda_{n_j}} + |q_j| \to 0, \quad j \to \infty.$$

Отже, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\dfrac{\ln\,a_n}{\lambda_n} = 0$ і, оскільки $\ln\,n \le \lambda_n l(\lambda_n)/\ln^2\,\lambda_n + 1 = o(\lambda_n)$ $(n \to \infty)$, то за лемою 2 $\sigma_a = 0$. Твердження 1 повністю доведено.

3. Достатня умова еквівалентності співвідношень (2) і (3). Будемо використовувати методику і результати зі статті [5]. Позначимо через $\Omega(0)$ клас додатних необмежених на $(-\infty, 0)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' неперервна, додатна і зростає до $+\infty$ на $(-\infty, 0)$. Нехай φ – функція, обернена до Φ', а $\Psi(\sigma) = \sigma - \dfrac{\Phi(\sigma)}{\Phi'(\sigma)}$ – функція, асоційована з Φ за Ньютоном. Тоді [5] функція Ψ неперервна і зростає до 0 на $(-\infty, 0)$, а функція φ неперервна і зростає до 0 на $(0, +\infty)$. Нарешті, нехай $n(t) = \sum_{\lambda_n \le t} 1$ – лічильна функція послідовності Λ.

Лема 4. *Нехай* $\Phi \in \Omega(0)$, $\ln \mu(\sigma, F) \le \Phi(\sigma)$ *для всіх* $\sigma \in [\sigma_0, 0)$ *і* $\ln n(t) = o(t)$ *при* $t \to +\infty$. *Припустимо, що додатна на* $(-\infty, 0)$ *функція* β *така, що* $\beta(\sigma) < |\sigma|$ *для всіх* $\sigma \in [\sigma_0, 0)$, *і позначимо* $\gamma(\sigma) = \Phi'(\Psi^{-1}(\sigma + \beta(\sigma)))$. *Тоді для всіх досить близьких до 0 значень* $\sigma < 0$

$$\sum_{\lambda_n > \gamma(\sigma)} |a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} \le \beta(\sigma) \int\limits_{\gamma(\sigma)}^{\infty} n(t) \exp\{t\beta(\sigma)\} dt.$$

Доведення цієї леми таке саме, як і леми 4 з [5]. Використовуючи лему 4, неважко (див. доведення теореми 2 з [5]) довести таку лему.

Лема 5. *Нехай* α *– неперервна, додатна і зростаюча до* $+\infty$ *на* $[0, +\infty)$ *функція така, що* $\alpha(t) = o(t), t \to +\infty$. *Припустимо, що* $\ln n(t) \le t/\alpha(t)$ *при* $t \ge t_0$, *а функція* $\Phi \in \Omega(0)$ *така, що*

$$\frac{2\Phi'(\sigma)}{\alpha(\Phi'(\sigma))} < \Phi(\sigma) + |\sigma|\Phi'(\sigma), \quad \sigma_0 \le \sigma < 0. \tag{10}$$

Якщо $\ln \mu(\sigma, F) \le \Phi(\sigma)$ *для всіх* $\sigma \in [\sigma_0, 0)$, $\beta(\sigma) = \dfrac{2}{\alpha(\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma)))}$ *і* $\gamma(\sigma) = \Phi'(\Psi^{-1}(\sigma + \beta(\sigma)))$, *то*

$$\sum_{\lambda_n > \gamma(\sigma)} |a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} \to 0, \quad \sigma \uparrow 0. \tag{11}$$

Тепер можемо довести таке твердження.

Твердження 2. *Умова* $\ln n \le \lambda_n / \ln^q \lambda_n$ $(n \ge n_0)$ *з* $q > 3$ *є достатньою для того, щоб для кожної функції* $F \in S^0(\Lambda)$ *співвідношення (2) і (3) були рівносильними.*

Доведення. Спочатку зауважимо, що з огляду на нерівність $\mu(\sigma, F) \le M(\sigma, F)$ з (2) випливає (3). Якщо ж виконується (3), то $\ln \mu(\sigma, F) \le \Phi(\sigma) = \exp\{\varrho_R/|\sigma|\}$ для всіх $\sigma \in [\sigma_0, 0)$. Зауважимо ще, що з умови $\ln n \le \lambda_n / \ln^q \lambda_n$ $(n \ge n_0)$ випливає нерівність $\ln n(t) \le t/\alpha(t)$ при $t \ge t_0$ з $\alpha(t) = \ln^q t$, $q > 3$.

Оскільки $\Phi'(\sigma) = \dfrac{\varrho_R \exp\{\varrho_R/|\sigma|\}}{|\sigma|^2}$, то неважко перевірити, що $\dfrac{2\Phi'(\sigma)}{\ln^q \Phi'(\sigma)} < \Phi(\sigma) + {}$ $+ |\sigma|\Phi'(\sigma)$, $\sigma_0 \le \sigma < 0$, тобто умова (10) виконується і за лемою 5 правильне співвідношення (11), де $\gamma(\sigma) = \Phi'(\Psi^{-1}(\sigma + \beta(\sigma)))$ і $\beta(\sigma) = \dfrac{2}{\ln^q \Phi'(\Psi^{-1}(\sigma))}$.

Оскільки $\Psi(\sigma) = \sigma - \dfrac{\Phi(\sigma)}{\Phi'(\sigma)} = \sigma - \dfrac{\sigma^2}{\varrho_R}$, то $\Psi^{-1}(\sigma) = \sigma + \dfrac{\sigma^2}{\varrho_R} + O(\sigma^3)$ $(\sigma \uparrow 0)$ і $1/\Psi^{-1}(\sigma) = -1/|\sigma| - 1/\varrho_R + O(\sigma)$ $(\sigma \uparrow 0)$. Тому $\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma)) = \dfrac{e\varrho_R(1+o(1))\exp\{\varrho_R/|\sigma|\}}{|\sigma|^2}$ при $\sigma \uparrow 0$, звідки випливає, що

$$\beta(\sigma) = \frac{2(1+o(1))|\sigma|^q}{\varrho_R^q} \text{ та } \frac{1}{\sigma+\beta(\sigma)} = \frac{1}{\sigma} - \frac{2(1+o(1))|\sigma|^{q-2}}{\varrho_R^q} \text{ при } \sigma \uparrow 0.$$

Звідси випливає, що

$$\gamma(\sigma) = \Phi'(\Psi^{-1}(\sigma+\beta(\sigma))) = \frac{e\varrho_R(1+o(1))\exp\{\varrho_R/|\sigma|\}}{|\sigma|^2}, \quad \sigma \uparrow 0.$$

Оскільки

$$\begin{aligned} M(\sigma,F) &\leq \left(\sum_{\lambda_n \leq \gamma(\sigma)} + \sum_{\lambda_n > \gamma(\sigma)}\right) |a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} \leq \\ &\leq \mu(\sigma,F)(n(\gamma(\sigma))+1) + \sum_{\lambda_n > \gamma(\sigma)} |a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\}, \end{aligned}$$

то з огляду на (11) нам залишається довести, що $\int\limits_{-1}^{0} \dfrac{\ln n(\gamma(\sigma))}{|\sigma|^2 \exp\{\varrho_R/|\sigma|\}} d\sigma < +\infty$. Але

$$\ln n(\gamma(\sigma)) \leq \gamma(\sigma)/\ln^q \gamma(\sigma) = e\varrho_R^{1-q}(1+o(1))|\sigma|^{q-2}\exp\{\varrho_R/|\sigma|\}, \quad \sigma \uparrow 0,$$

і, оскільки $q > 3$, то

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{\ln n(\gamma(\sigma))}{|\sigma|^2 \exp\{\varrho_R/|\sigma|\}} d\sigma \leq K_4 \int\limits_{-1}^{0} |\sigma|^{q-4} d\sigma < +\infty.$$

Твердження 2 доведено.

Зауваження 1. У доведенні твердження 2 використано нерівність $\ln \mu(\sigma,F) \leq \leq \exp\{\varrho_R/|\sigma|\}$ $(\sigma \in [\sigma_0, 0))$. Насправді ж із (3) випливає, що

$$\ln \mu(\sigma,F) = o(\exp\{\varrho_R/|\sigma|\}) \ (\sigma \uparrow 0).$$

Тому може бути правдоподібним таке твердження.

Гіпотеза 1. *Умова* $\ln n = O(\lambda_n/\ln^2 \lambda_n)$ $(n \to \infty)$ *є необхідною і достатньою для того, щоб для кожної функції* $F \in S^0(\Lambda)$ *співвідношення (2) і (3) були рівносильними.*

1. *Гайсин А.М.* Оценка роста функции, представленной рядом Дирихле, в полуплоскости // Мат. сб. – 1982. – Т. 117, №3. – С. 412-424.

2. *Мулява О.М.* Про класи збіжності рядів Діріхле // Укр. мат. журн. – 1999. – Т. 51, №11. – С. 1485-1494.
3. *Sumyk O.M., Sheremeta M.M.* On connection between the growth of maximum modulus and maximal term of entire Dirichlet series in term of m-member asymptotics // Matem. Studii. – Vol. 19, №1. – 2003. – P. 83-88.
4. *Шеремета М.М.* Цілі ряди Діріхле. – К., 1993.
5. *Шеремета М.Н., Федыняк С.И.* О производной ряда Дирихле // Сиб. мат. журн. – 1998. – Т. 39, №1. – С. 206-223.

ON THE BELONGING OF DIRICHLET SERIES ABSOLUTELY CONVERGENT IN HALF-PLANE TO A CONVERGENCE CLASS

Mulyava Oksana[1], **Sheremeta Myroslav**[2]

[1]*Kyiv National University of Food Technology,*
01004, Kyiv, Volodymyrska Str., 68
[2]*Ivan Franko National University of L'viv,*
79000, L'viv, Universytetska Str., 1

For a Dirichlet series $F(s) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}$ with the abscissa of absolute convergence $\sigma_a = 0$ let $M(\sigma) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$ and $\mu(\sigma) = \max\{|a_n| \exp(\sigma\lambda_n) : n \geq 0\}$ $(\sigma < 0)$. Conditions on λ_n for the equivalence of relations $\int\limits_{-1}^{0} \frac{\ln M(\sigma,F)}{|\sigma|^2 \exp\{\varrho_R/|\sigma|\}} d\sigma < +\infty$ and $\int\limits_{-1}^{0} \frac{\ln \mu(\sigma,F)}{|\sigma|^2 \exp\{\varrho_R/|\sigma|\}} d\sigma < +\infty$ $(\varrho > 0)$ are established.

Key words: Dirichlet series, maximum modulus, maximal term, convergence class.

Стаття надійшла до редколегії 26.10.2006

Прийнята до друку 24.10.2007

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2007. Вип.67. С.207-223 *Ser. Mech.-Math. 2007. Vol.67. P.207-223*

УДК 517.95

THE MIXED PROBLEM FOR A NONLINEAR COUPLED EVOLUTION SYSTEM IN A BOUNDED DOMAIN

Maksym NECHEPURENKO

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universitetska Str., 1

The purpose of this paper is to establish existence and uniqueness of solution of a nonlinear coupled system with variable coefficients of a nonlinear equation with the second order time derivative and a nonlinear equation with the first time derivative in a bounded domain of $\mathbb{R}^n$ with smooth boundary.

Key words: nonlinear system, mixed problem, Faedo-Galerkin method.

1. Problems for evolution system with the time variable derivatives of different orders is considered by many authors [1], [2]. Specifically, in domains which are bounded by spatial variables, the mixed problems for semilinear evolution coupled system with internal damping are quite well studied in [1] and there are established existence, uniqueness, and asymptotic behavior of solutions. Messaoudi [3] considered a multidimensional semilinear system of thermoelasticity and showed that the energy of any weak solution blows up in finite time if the initial energy is negative. Clark and Lima in [4] studied the existence of weak solutions of the nonlinear unilateral mixed problem.

The non-linearity $|v|^\rho v$ usually appears in relativistic quantum mechanic (see Schiff [5] or Segal [6]), and has been considered by various authors for hyperbolic, parabolic and elliptic equations. Lions [7] studied the wave equation with the same non-linearity, i.e., $|v|^\rho v$, in a smooth-bounded-open domain Ω of $\mathbb{R}^n$ with $n \in \mathbb{N}$ and proved existence and uniqueness of solution using Faedo-Galerkin's and compactness' methods.

Clark at al [2] investigated system (2.1)-(2.2) with equal to zero and feedback-homogeneous conditions over a part of the boundary. They established global existence of strong and weak solutions by Faedo-Galerkin's method using a particular basis of the space $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ introduced by Medeiros & Milla Miranda in [9] and the exponential stability of total energy associated to the weak solution using Komornik-Zuazua's method [10].

© Nechepurenko Maksym, 2007

In this article we study the initial boundary value problem for nonlinear evolution coupled system. Based in the theory developed in the papers of Clark at al [2] and Lions [7] (Theorems 1.1, 1.2 and 1.3), we will prove that problem (2.1)-(2.4) has a unique solution.

The outline of this article is as follows. In Section 2 the basic notations are laid out and existence of solution of nonlinear evolution coupled system in bounded domain are issued, existence and uniqueness of problem is aired in Sections 3, 4.

2. Problem formulation. Let Ω be any bounded domain in $\in \mathbb{R}^n$ with regular in Calderon's sense [11] boundary $\partial\Omega$ and let T be a positive number, $Q_T = (0,T) \times \Omega$, $0 < < T < +\infty$, $Q_{t_1,t_2} = (t_1,t_2) \times \Omega$, $\{t_1, t_2\} \in [0,T]$, $t_1 < t_2$; $Q_\tau = Q_{0,\tau}$; $\Omega_\tau = \{t = \tau\} \cap Q_T$; $S_T = (0,T) \times \partial\Omega$.

We will consider the following problem in the domain Q_T :

$$u_{tt}(t,x) - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} u_{x_i}(t,x))_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x) u_{x_i}(t,x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\theta_{x_i} +$$

$$+ \alpha_0(t,x)u(t,x) + \alpha_1(t,x)\theta(t,x) + \gamma_1(t,x)|u_t|^{p-2}u_t = f_1(t,x), \tag{2.1}$$

$$\theta_t(t,x) - \sum_{i,j=1}^{n} (c_{ij}\theta_{x_i}(t,x))_{x_j} - \sum_{i=1}^{n} (c_i(t,x)u_t)_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} d_i(t,x)u_{x_i}(t,x) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} e_i(t,x)\theta_{x_i} + \beta_0(t,x)u(t,x) + \beta_1(t,x)\theta(t,x) + \gamma_2(t,x)|\theta|^{q-2}\theta = f_2(t,x) \tag{2.2}$$

with boundary

$$u(x,t) = 0, \quad \theta(x,t) = 0 \quad \text{on} \quad S_T \tag{2.3}$$

and initial

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), \quad \theta(0,x) = \theta_0(x) \quad \text{on} \quad \Omega \tag{2.4}$$

conditions. Here $p, q \in (2, +\infty)$.

We will make the following assumptions concerning the coefficients, nonhomogeneous terms and initial data of problem (2.1)-(2.4):

(**A**) $\{a_{ij}, a_{ijt}\} \in L^\infty(Q_T)$, $a_{ij}(t,x) = a_{ji}(t,x)$ almost everywhere in Q_T;

$$a_0|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \leqslant a^0|\xi|^2$$

a.e. for $(t,x) \in Q_T$ and for every $\xi \in \mathbb{R}^n$, a_0 and a^0 are positive constants;

(**C**) $\{c_{ij}, c_{ijt}\} \in L^\infty(Q_T)$, $c_{ij}(t,x) = c_{ji}(t,x)$ almost everywhere in Q_T;

$$c_0|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \leqslant c^0|\xi|^2$$

a.e. for $(t,x) \in Q_T$ and for every $\xi \in \mathbb{R}^n$, c_0 and c^0 are positive constants;

(D) $\{a_i, , a_{it}, b_i, b_{it}, c_i, c_{it}, d_i, d_{it}, e_i, e_{it}\} \in L^\infty(Q_T)$;

(E) $\alpha_0, \alpha_{0t}, \alpha_1, \beta_0, \beta_1 \in L^\infty(Q_T)$;

(F) $\{f_1, f_2, f_{1t}, f_{2t}\} \in L^2(Q_T)$, $u_0 \in H^2(\Omega_0) \cap H_0^1(\Omega_0)$, $u_1 \in H_0^1(\Omega_0) \cap L^{2(p-1)}(\Omega_0)$, $\theta_0 \in H^2(\Omega_0) \cap H_0^1(\Omega_0) \cap L^{2(q-1)}(\Omega_0)$;

(G) $\gamma_1, \gamma_2 \in L^\infty(Q_T)$; $\gamma_1(t,x) \geqslant \tilde{\gamma}_1, \gamma_2(t,x) \geqslant \tilde{\gamma}_2$ almost everywhere in Q_T, $\tilde{\gamma}_1$ i $\tilde{\gamma}_2$ are positive constants.

Definition 1. *A pair of functions* (u, θ), *which* $u \in L^2(0,T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap$ $\cap C(0,T; L^2(\Omega))$, $u_t \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap L^p(Q_T) \cap C(0,T; L^2(\Omega))$, $\theta \in L^2(0,T; H^2(\Omega) \cap$ $\cap H_0^1(\Omega)) \cap L^q(Q_T) \cap C(0,T; L^2(\Omega))$, *is said to be a generalized solution of problem (2.1)-(2.4) if* (u, θ) *satisfies*

$$\int\limits_{\Omega_T} u_t v\, dx - \int\limits_{\Omega_0} u_1(x) v\, dx + \int\limits_{Q_T} \Big[-u_t v_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x) u_{x_i} v_{x_j} + \\ + \sum_{i=1}^n a_i(t,x) u_{x_i} v + \sum_{i=1}^n b_i(t,x) \theta_{x_i} v + \alpha_0(t,x) uv + \\ + \alpha_1(t,x)\theta v + \gamma_1(t,x)|u_t|^{p-2} u_t v \Big]\, dx\, dt = \int\limits_{Q_T} f_1(t,x) v\, dx\, dt, \tag{2.5}$$

$$\int\limits_{Q_T} \Big[\theta_t w + \sum_{i,j=1}^n c_{ij}(t,x) \theta_{x_i} w_{x_j} + \sum_{i=1}^n c_i(t,x) u_t w_{x_i} + \sum_{i=1}^n d_i(t,x) u_{x_i} w + \\ + \sum_{i=1}^n e_i(t,x) \theta_{x_i} w + \beta_0(t,x) uw + \beta_1(t,x)\theta w + \\ + \gamma_2(t,x)|\theta|^{q-2}\theta w \Big]\, dx\, dt = \int\limits_{Q_T} f_2(t,x) w\, dx\, dt \tag{2.6}$$

for all $v, w \in C^\infty(0,T; C_0^\infty(\Omega))$ *and initial conditions* $u(0,x) = u_0(x)$, $\theta(0,x) = \theta_0(x)$.

3. Existence of solution.

Theorem 1. *Let assumptions* $(\mathbf{A}) - (\mathbf{G})$ *hold and* $\{a_{ijtt}, c_{ijtt}, \alpha_{1t}, \beta_{0t}, \beta_{1t}, \gamma_{1t}, \gamma_{1tt}, \gamma_{2t}, \gamma_{2tt}\} \in L^\infty(Q_T)$. *Then problem (2.1)-(2.4) has a generalized solution* (u, θ).

Remark 1. Equations (2.1) and (2.2) are given in sense of distributions.

Proof. To show the existence of generalized solution of problem (2.1)-(2.4) we will use the Faedo-Galerkin method. We consider $(w^k)_{k\in\mathbb{N}}$ a complete sequence of linearly independent dense everywhere in $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \cap L^{2(\max\{p,q\}-1)}(\Omega)$ set of functions ("basis") which are orthonormal in $L^2(\Omega)$. Denote $W_m = [w_1, w_2, \ldots, w_m]$ the subspace of $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \cap L^{2(\max\{p,q\}-1)}(\Omega)$ spanned by the m first vectors of $(w^k)_{k\in\mathbb{N}}$. Let us consider sequences

$$u^m(t,x)=\sum_{k=1}^m c_k^m(t)v^m(x), \qquad \theta^m(t,x)=\sum_{l=1}^m z_l^m(t)w^m(x)$$

for $v^k, w^l, k, l = 1,\dots,m$ belonging to W_m. The approximated system associated to system (2.1)-(2.2), where c_k^m and z_l^m are solutions to the Cauchy problem, is given by

$$\int\limits_\Omega \Big[u_{tt}^m v^k+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)u_{x_i}^m v_{x_j}^k+\sum_{i=1}^n a_i(t,x)u_{x_i}^m v^k+\sum_{i=1}^n b_i(t,x)\theta_{x_i}^m v^k+\alpha_0(t,x)u^m v^k+$$

$$+\alpha_1(t,x)\theta^m v^k+\gamma_1(t,x)|u_t^m|^{p-2}u_t^m v^k\Big]\,dx=\int\limits_\Omega f_1(t,x)v^k\,dx, \tag{3.1}$$

$$\int\limits_\Omega \Big[\theta_t^m w^l+\sum_{i,j=1}^n c_{ij}(t,x)\theta_{x_i}^m w_{x_j}^l+\sum_{i=1}^n c_i(t,x)u_t^m w_{x_i}^l+\sum_{i=1}^n d_i(t,x)u_{x_i}^m w^l+$$

$$+\sum_{i=1}^n e_i(t,x)\theta_{x_i}^m w^l+\beta_0(t,x)u^m w^l+\beta_1(t,x)\theta^m w^l+$$

$$+\gamma_2(t,x)|\theta^m|^{q-2}\theta^m w^l\big]\,dx=\int\limits_\Omega f_2(t,x)w^l\,dx, \quad t\in(0,T), \tag{3.2}$$

$$u^m(0)=u_0^m,\ u_t^m(0)=u_1^m,\ \theta^m(0)=\theta_0^m,\ 1\leqslant k,l\leqslant m, \tag{3.3}$$

where v^k and w^l belong to W_m.

From (3.3) we see that u_0^m, u_1^m, θ_0^m belong to W_m and satisfy

$$u_0^m \longrightarrow u_0 \text{ strongly in } H^2(\Omega_0)\cap H_0^1(\Omega_0), \tag{3.4}$$

$$\theta_0^m \longrightarrow \theta_0 \text{ strongly in } H^2(\Omega_0)\cap H_0^1(\Omega_0)\cap L^{2(q-1)}(\Omega_0), \tag{3.5}$$

$$u_1^m \longrightarrow u_1 \text{ strongly in } H_0^1(\Omega_0)\cap L^{2(p-1)}(\Omega_0). \tag{3.6}$$

Thus, from the conditions of the theorem we can conclude that the functions (u,θ) satisfy the conditions of Caratheodory Theorem [12, p.54]. Then there exists continuously differentiable solution of problem (3.1)-(3.3) which is determined in some interval $[0,t^m]$, $t^m\leqslant T$ and has absolutely continuous derivative. This interval will be extended to any interval $(0,T)$ thanks to the first estimate below.

Estimate I. We will multiply equation (3.1) by the functions $c_{kt}^m(t)$ and equation (3.2) by the functions $z_l^m(t)$ respectively, summing over k and l from 1 to m respectively and integrating over t from 0 to $\tau,\ 0<\tau<t^m$. We get

$$\int\limits_{Q_\tau}\Big[u_{tt}^m u_t^m+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)u_{x_i}^m u_{tx_j}^m+\sum_{i=1}^n a_i(t,x)u_{x_i}^m u_t^m+\sum_{i=1}^n b_i(t,x)\theta_{x_i}^m u_t^m+$$
$$+\alpha_0(t,x)u^m u_t^m+\alpha_1(t,x)\theta^m u_t^m+\gamma_1(t,x)|u_t^m|^p\Big]\,dx\,dt=\int\limits_{Q_\tau} f_1 u_t^m\,dx\,dt, \qquad (3.7)$$

$$\int\limits_{Q_\tau}\Big[\theta_t^m\theta^m+\sum_{i,j=1}^n c_{ij}(t,x)\theta_{x_i}^m\theta_{x_j}^m+\sum_{i=1}^n c_i(t,x)u_t^m\theta_{x_i}^m+\sum_{i=1}^n d_i(t,x)u_{x_i}^m\theta^m+$$
$$+\sum_{i=1}^n e_i(t,x)\theta_{x_i}^m\theta^m+\beta_0(t,x)u^m\theta^m+\beta_1(t,x)\theta^m\theta^m+$$
$$+\gamma_2(t,x)|\theta^m|^q\Big]\,dx\,dt=\int\limits_{Q_\tau} f_2\theta^m\,dx\,dt. \qquad (3.8)$$

Let us transform and establish estimates for every term in (3.7) using assumptions of the Theorem 1. It is easy to show that

$$I_1^a=\int\limits_{Q_\tau} u_{tt}^m u_t^m\,dx\,dt=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}|u_t^m|^2\,dx-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}|u_1^m|^2\,dx.$$

By assumption (**A**), we have

$$I_2^a=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)u_{x_i}^m u_{x_jt}^m\,dx\,dt\geqslant\frac{a_0}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}|\nabla u^m|^2\,dx-\frac{a^0}{2}\int\limits_{\Omega_0}|\nabla u_0^m|^2\,dx-$$
$$-\frac{a^1}{2}\int\limits_{Q_\tau}|\nabla u^m|^2\,dx\,dt,\qquad \text{where } a^1=\operatorname*{ess\,sup}_{Q_T}\sum_{i,j=1}^n|a_{ijt}(t,x)|^2.$$

From (**D**) we obtain

$$I_3^a=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n a_i(t,x)u_{x_i}^m u_t^m\,dx\,dt\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left[\nu_a\delta_0^a|\nabla u^m|^2+\frac{1}{\delta_0^a}|u_t^m|^2\right]dx\,dt,$$
$$I_4^a=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n b_i(t,x)\theta_{x_i}^m u_t^m\,dx\,dt\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left[\nu_b\delta_1^a|\nabla\theta^m|^2+\frac{1}{\delta_1^a}|u_t^m|^2\right]dx\,dt,$$

where $\nu_a=\max\limits_i\operatorname{ess\,sup}_{Q_T}|a_i(t,x)|^2$, $\nu_b=\max\limits_i\operatorname{ess\,sup}_{Q_T}|b_i(t,x)|^2$, $\delta_0^a>0$, $\delta_1^a>0$ — any constants.

By assumption (**E**) we find

$$I_5^a = \int\limits_{Q_\tau} \alpha_0(t,x) u^m u_t^m \, dx \, dt \geqslant \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} \left(2\nu_{\alpha_0} \delta_2^a T^2 + \frac{1}{\delta_2^a} \right) |u_t^m|^2 \, dx \, dt +$$
$$+ \nu_{\alpha_0} \delta_2^a T \int\limits_{\Omega_0} |u_0^m| \, dx, \quad \text{where } \nu_{\alpha_0} = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} |\alpha_0(t,x)|^2, \ \delta_2^a > 0,$$

since

$$\int\limits_{Q_\tau} u^2(t,x) \, dx \, dt \leqslant 2T \int\limits_{\Omega_0} u_0^2(x) \, dx + 2T^2 \int\limits_{Q_\tau} u_t^2(t,x) \, dx \, dt. \tag{3.9}$$

Next

$$I_6^a = \int\limits_{Q_\tau} \alpha_1(t,x) \theta^m u_t^m \, dx \, dt \leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} \left[\nu_{\alpha_1} \delta_3^a |u_t^m|^2 + \frac{1}{\delta_3^a} |\theta^m|^2 \right] dx \, dt,$$

where $\nu_{\alpha_1} = \operatorname{ess\,sup}_{Q_T} |\alpha_1(t,x)|^2$, $\delta_3^a > 0$.

From (**F**), (**G**) we get

$$I_7^a = \int\limits_{Q_\tau} \gamma_1(t,x) |u_t^m|^p \, dx \, dt \geqslant \tilde{\gamma}_1 \int\limits_{Q_\tau} |u_t^m|^p \, dx \, dt,$$
$$I_8^a = \int\limits_{Q_\tau} f_1 u_t^m \, dx \, dt \leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} \left[\delta_4^a |f_1|^2 + \frac{1}{\delta_4^a} |u_t^m|^2 \right] dx \, dt, \delta_4^a > 0.$$

Constants $\delta_k^a > 0, \ k = 0, \dots, 4$.

Estimates of terms $1, 3-5, 7, 8$ from (3.8) can be obtained similarly to the estimates $I_1^a, I_3^a - I_5^a, I_7^a, I_8^a$. Making use of (**C**) we conclude that

$$I_2^c = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(t,x) \theta_{x_i}^m \theta_{x_j}^m \, dx \, dt \geqslant c_0 \int\limits_{Q_\tau} |\nabla \theta^m|^2 \, dx \, dt.$$

From assumption (**E**) and inequality (3.9) we get

$$I_6^c = \int\limits_{Q_\tau} \beta_0(t,x) u^m \theta^m \, dx \, dt \leqslant \nu_{\beta_0} \delta_3^c T^2 \int\limits_{Q_\tau} |u_t^m|^2 \, dx \, dt +$$
$$+ \frac{1}{2\delta_3^c} \int\limits_{Q_\tau} |\theta^m|^2 \, dx \, dt + \nu_{\beta_0} \delta_3^c T \int\limits_{\Omega_0} |u_0^m| \, dx,$$

where $\delta_3^c > 0$, $\nu_{\beta_0} = \operatorname{ess\,sup}_{Q_T} |\beta_0(t,x)|^2$.

Putting the estimates of all terms into (3.7)-(3.8) we obtain inequality

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \left[|u^m|^2 + |u_t^m|^2 + a_0|\nabla u^m|^2 + |\theta^m|^2\right]\, dx +$$
$$+ (2c_0 - \nu_b\delta_1^a - \nu_c\delta_0^c - \nu_e\delta_2^c) \int\limits_{Q_\tau} |\nabla\theta^m|^2\, dx\, dt + \tilde{\gamma}_1 \int\limits_{Q_\tau} |u_t^m|^p\, dx\, dt +$$
$$+ \tilde{\gamma}_2 \int\limits_{Q_\tau} |\theta^m|^q\, dx\, dt \leqslant \int\limits_{\Omega_0} \Big[(2\nu_{\alpha_0}\delta_2^a T + 2\nu_{\beta_0}\delta_3^c T)|u_0^m|^2 + |u_1^m|^2 +$$
$$+ a^0|\nabla u_0|^2 + |\theta_0^m|^2\Big]\, dx + \int\limits_{Q_\tau} \left[\delta_4^a|f_1|^2 + \delta_4^c|f_2|^2\right]\, dx\, dt +$$
$$+ \int\limits_{Q_\tau} \Bigg[2T|u^m|^2 + \left(\nu_{\alpha_0}\delta_2^a T^2 + \nu_{\beta_0}\delta_3^c T^2 + \nu_{\alpha_1}\delta_3^a + \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{\delta_k^a} + \frac{1}{\delta_0^c}\right)|u_t^m|^2 +$$
$$+ \left(a^1 + \nu_a\delta_0^a + \nu_d\delta_1^c\right)|\nabla u^m|^2 + \left(\frac{1}{\delta_3^a} + \sum_{k=1}^{4}\delta_k^c\right)|\theta^m|^2\Bigg]\, dx\, dt, \qquad (3.10)$$

where $\delta_0^a - \delta_4^a$ and $\delta_0^c - \delta_4^c$ are any positive constants. Now choose constants δ_1^a, δ_0^c, δ_2^c in such a way that the following condition holds: $2c_0 - \nu_b\delta_1^a - \nu_c\delta_0^c - \nu_e\delta_2^c > 0$.

Thus applying Gronwall's lemma from (3.10) we obtain

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \left[|u^m|^2 + |u_t^m|^2 + |\nabla u^m|^2 + |\theta^m|^2\right]\, dx + \int\limits_{Q_\tau} |\nabla\theta^m|^2\, dx\, dt +$$
$$+ \tilde{\gamma}_1 \int\limits_{Q_\tau} |u_t^m|^p\, dx\, dt + \tilde{\gamma}_2 \int\limits_{Q_\tau} |\theta^m|^q\, dx\, dt \leqslant C_1 \Bigg[\int\limits_{Q_\tau} \left[|f_1|^2 + |f_2|^2\right]\, dx\, dt +$$
$$+ \int\limits_{\Omega_0} \left[|u_0^m|^2 + |u_1^m|^2 + |\nabla u_0^m|^2 + |\theta_0^m|\right]\, dx\Bigg] \leqslant C, \quad \tau \in (0, T), \qquad (3.11)$$

where C_1, C are positive constants independent of m.

Next, in system (3.1)-(3.2) we will multiply the first equation (3.1) by $c_{ktt}^m(0)$, and the second equation (3.2) by $z_{lt}^m(0)$ as $t = 0$. Because of the choice of "basis" we have

$$\int\limits_{\Omega_0} |u_{tt}^m(0,x)|^2\, dx \leqslant C_2 \int\limits_{\Omega_0} \Bigg(a^0 \sum_{i=1}^{n} |u_{0x_ix_i}^m|^2 + \nu_a \sum_{i=1}^{n} |u_{0x_ix_i}^m|^2 + \nu_b|\nabla\theta_0^m|^2 +$$
$$+ \nu_{\alpha_0}|u_0^m|^2 + \nu_{\alpha_1}|\theta_0^m|^2 + \tilde{\gamma}_1|u_1^m|^{2(p-1)} + |f_1(0,x)|^2\Bigg)\, dx \leqslant C_3, \qquad (3.12)$$

$$\int\limits_{\Omega_0} |\theta_t^m(0,x)|^2\, dx \leqslant C_4 \int\limits_{\Omega_0} \Bigg(c^0 \sum_{i=1}^{n} |\theta^m_{0x_ix_i}|^2 + \mu_c|\nabla u_1^m|^2 + \nu_d|\nabla u_0^m|^2 + \nu_e|\nabla \theta_0^m|^2 + \\ + \nu_{\beta_0}|u_0^m|^2 + \nu_{\beta_1}|\theta_0^m|^2 + \tilde{\gamma}_2|\theta_0^m|^{2(q-1)} + |f_2(0,x)|^2 \Bigg)\, dx \leqslant C_5, \tag{3.13}$$

where $C_2,\ C_4$ are positive constants independent of m, and from (3.4)-(3.6) and system (3.1)-(3.2) there are positive constants $C_3,\ C_5$ independent of m such that right-hand-side integrals of (3.12), (3.13) are bounded.

Estimate II. Differentiating equations (3.1) and (3.2) with respect to t, multiplying the first equations (3.1) by $c^m_{ktt}(t)$ and the second equations (3.2) by $z^m_{lt}(t)$ respectively, summing over k and l respectively, integrating over t from 0 to τ, $0 < \tau < t^m \leqslant T$, we get

$$\int\limits_{Q_\tau} \Bigg[u^m_{ttt}u^m_{tt} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)u^m_{tx_i}u^m_{ttx_j} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ijt}(t,x)u^m_{x_i}u^m_{ttx_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)u^m_{tx_i}u^m_{tt} + \\ + \sum_{i=1}^{n} a_{it}(t,x)u^m_{x_i}u^m_{tt} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\theta^m_{tx_i}u^m_{tt} + \sum_{i=1}^{n} b_{it}(t,x)\theta^m_{x_i}u^m_{tt} + \\ + \alpha_0(t,x)u^m_t u^m_{tt} + \alpha_{0t}(t,x)u^m u^m_{tt} + \alpha_1(t,x)\theta^m_t u^m_{tt} + \alpha_{1t}(t,x)\theta^m u^m_{tt} + \\ + (p-1)\gamma_1(t,x)|u^m_t|^{p-2}(u^m_{tt})^2 + \gamma_{1t}(t,x)|u^m_t|^{p-1}u^m_t u^m_{tt} - \\ - f_{1t}(t,x)u^m_{tt} \Bigg]\, dx\, dt = 0, \tag{3.14}$$

$$\int\limits_{Q_\tau} \Bigg[\theta^m_{tt}\theta^m_t + \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(t,x)\theta^m_{tx_i}\theta^m_{tx_j} + \sum_{i,j=1}^{n} c_{ijt}(t,x)\theta^m_{x_i}\theta^m_{tx_j} + \sum_{i=1}^{n} c_i(t,x)u^m_{tt}\theta^m_{tx_i} + \\ + \sum_{i=1}^{n} c_i(t,x)u^m_t\theta^m_{tx_i} + \sum_{i=1}^{n} d_i(t,x)u^m_{tx_i}\theta^m_t + \sum_{i=1}^{n} d_{it}(t,x)u^m_{x_i}\theta^m_t + \\ + \sum_{i=1}^{n} e_i(t,x)\theta^m_{tx_i}\theta^m_t + \sum_{i=1}^{n} e_{it}(t,x)\theta^m_{x_i}\theta^m_t + \beta_0(t,x)u^m_t\theta^m_t + \beta_{0t}(t,x)u^m\theta^m_t + \\ + \beta_1(t,x)|\theta^m_t|^2 + \beta_{1t}(t,x)\theta^m\theta^m_t + (q-1)\gamma_2(t,x)|\theta^m|^{q-2}(\theta^m_t)^2 + \\ + \gamma_{2t}(t,x)|\theta^m|^{q-1}\theta^m\theta^m_t - f_{2t}(t,x)\theta^m_t \Bigg]\, dx\, dt = 0. \tag{3.15}$$

Now, we are going to make transform on the all terms of equations (3.14) -(3.15) using assumptions $(\mathbf{A})-(\mathbf{G})$ and conditions of Theorem 1. Owing to the fact that (3.11), (3.12) estimates of terms $2, 4-11, 14$ for equation (3.14) can be obtained similarly to the estimates from equation (3.7). Estimates of other terms of system (3.14) are

$$J_1^a = \int\limits_{Q_\tau} u_{ttt}^m u_{tt}^m \, dx\, dt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |u_{tt}^m|^2 \, dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} |u_{tt}^m(0,x)|^2 \, dx,$$

$$J_3^a = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^n a_{ijt}(t,x) u_{x_i}^m u_{ttx_j}^m \, dx\, dt \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} \left[\nu_a^1 |\nabla u_1^m|^2 + a^1 |\nabla u_0^m|\right] \, dx -$$

$$- a^1 \int\limits_{Q_\tau} |\nabla u_t^m|^2 \, dx\, dt - \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} \left[a^2 \delta_5^a |\nabla u_t^m|^2 + \frac{1}{\delta_5^a}|\nabla u^m|^2\right] \, dx\, dt,$$

$$\nu_a^1 = \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega_0} \sum_{i,j=1}^n |a_{ijt}(0,x)|^2, \quad a^2 = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} \sum_{i,j=1}^n |a_{ijtt}(t,x)|^2, \quad \delta_5^a > 0,$$

$$J_{12}^a = (p-1)\int\limits_{Q_\tau} \gamma_1(t,x) |u_t^m|^{p-2} (u_{tt}^m)^2 \, dx\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \tilde{\gamma}_1 \frac{4(p-1)}{p^2} \int\limits_{Q_\tau} \left[\left(\frac{d}{dt}\left(|u_t^m|^{\frac{p-2}{2}} u_t^m\right)\right)^2\right] \, dx\, dt,$$

$$J_{13}^a = \int\limits_{Q_\tau} \gamma_{1t}(t,x) |u_t^m|^{p-2} u_t^m u_{tt}^m \, dx\, dt \geqslant \frac{\mu_{\gamma_1}}{p}\int\limits_{\Omega_\tau} |u_t^m|^p \, dx - \frac{\nu_{\gamma_1}^1}{p}\int\limits_{\Omega_0} |u_1^m|^p \, dx -$$

$$- \frac{\mu_{\gamma_1}^1}{p}\int\limits_{Q_\tau} |u_t^m|^p \, dx\, dt, \quad \nu_{\gamma_1}^1 = \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega_0} |\gamma_{1t}(0,x)|^2, \ \mu_{\gamma_1}^1 = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} |\gamma_{1tt}(t,x)|^2.$$

In view of the fact that (3.11) and (3.13), estimates of terms $4-13, 16$ from (3.15) can be obtained similarly to the estimates from equality (3.8). In fact, we can easily see that estimates of other terms from equality (3.15)

$$J_1^c = \int\limits_{Q_\tau} \theta_{tt}^m \theta_t^m \, dx\, dt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |\theta_t^m|^2 \, dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} |\theta_t^m(0,x)|^2 \, dx,$$

$$J_2^c = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^n c_{ij}(t,x) \theta_{tx_i}^m \theta_{tx_j}^m \, dx\, dt \geqslant c_0 \int\limits_{Q_\tau} |\nabla \theta_t^m|^2 \, dx\, dt,$$

$$J_3^c = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{n} c_{ijt}(t,x)\theta_{x_i}^m \theta_{tx_j}^m \, dx\, dt \geqslant \frac{c^1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} |\nabla \theta^m|^2 \, dx - \frac{\nu_c^1}{2} \int\limits_{\Omega_0} |\nabla \theta_0^m|^2 \, dx\, dt -$$

$$- \frac{c^2}{2} \int\limits_{Q_\tau} |\nabla \theta^m|^2 \, dx\, dt, \quad \nu_c^1 = \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega_0} \sum_{i,j=1}^{n} |c_{ijt}(0,x)|^2,$$

$$c^1 = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} \sum_{i,j=1}^{n} |c_{ijt}(t,x)|^2, \quad c^2 = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} \sum_{i,j=1}^{n} |c_{ijtt}(t,x)|^2.$$

Also observe that

$$J_{14}^c = (q-1) \int\limits_{Q_\tau} \gamma_2(t,x) |\theta^m|^{q-2} (\theta_t^m)^2 \, dx\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \tilde{\gamma}_2 \frac{4(q-1)}{q^2} \int\limits_{Q_\tau} \left[\left(\frac{d}{dt} \left(|\theta^m|^{\frac{q-2}{2}} \theta^m \right) \right)^2 \right] dx\, dt,$$

$$J_{15}^c = \int\limits_{Q_\tau} \gamma_{2t}(t,x) |\theta^m|^{q-2} \theta^m \theta_t^m \, dx\, dt \geqslant \frac{\mu_{\gamma_2}}{q} \int\limits_{\Omega_\tau} |\theta^m|^q \, dx - \frac{\nu_{\gamma_2}^1}{q} \int\limits_{\Omega_0} |\theta_0^m|^q \, dx -$$

$$- \frac{\mu_{\gamma_2}^1}{q} \int\limits_{Q_\tau} |\theta^m|^q \, dx\, dt, \quad \nu_{\gamma_2}^1 = \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega_0} |\gamma_{2t}(0,x)|^2, \ \mu_{\gamma_2}^1 = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} |\gamma_{2tt}(t,x)|^2.$$

Putting the above estimations into (3.14)-(3.15), we obtain inequality

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \left[|u_{tt}^m|^2 + a_0 |\nabla u_t^m|^2 + \frac{2\mu_{\gamma_1}}{p} |u_t^m|^p + c^1 |\nabla \theta^m|^2 + |\theta_t^m|^2 + \frac{2\mu_{\gamma_2}}{q} |\theta^m|^q \right] dx +$$

$$+ (2c_0 - \nu_b \delta_6^a - \nu_c \delta_5^c - \mu_c \delta_6^c - \nu_e \delta_7^c) \int\limits_{Q_\tau} |\nabla \theta_t^m|^2 \, dx\, dt +$$

$$+ \tilde{\gamma}_1 \frac{8(p-1)}{p^2} \int\limits_{Q_\tau} \left(\frac{d}{dt} \left(|u_t^m|^{\frac{p-2}{2}} u_t^m \right) \right)^2 dx\, dt +$$

$$+ \tilde{\gamma}_2 \frac{8(q-1)}{q^2} \int\limits_{Q_\tau} \left(\frac{d}{dt} \left(|\theta^m|^{\frac{q-2}{2}} \theta^m \right) \right)^2 dx\, dt \leqslant C_6 +$$

$$+ \int\limits_{Q_\tau} \left[\delta_{10}^a |f_{1t}|^2 + \delta_{10}^c |f_{2t}|^2 \right] dx\, dt + \int\limits_{\Omega_0} \Big(|u_{tt}^m(0,x)|^2 + a^0 |\nabla u_1^m|^2 + \nu_{\alpha_0} \delta_8^a |u_1^m|^2 +$$

$$
\begin{aligned}
&+ a^1|\nabla u_0^m|^2 + \frac{2\nu_{\gamma_1}^1}{p}|u_1^m|^p + |\theta_t^m(0,x)|^2 + \nu_{\beta_1}^1|\theta_0^m|^2 + \frac{2\nu_{\gamma_2}^1}{q}|\theta_0^m|^q\Big)\,dx+\\
&+\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[\left(\delta^a + \nu_{\alpha_0}\delta_8^a + \frac{1}{\delta_4^c}\right)|u_{tt}^m|^2 + (a^2\delta_3^a + 2a^1 + \nu_a\delta_4^a + \nu_d\delta_6^c)|\nabla u_t^m|^2+\\
&+(\nu_{\beta_0}\delta_9^c + \frac{1}{\delta_5^c})|u_t^m|^2 + \frac{2\mu_{\gamma_1}^1}{p}|u_t^m|^p + +(\mu_b\delta_7^a + c^2 + \mu_c\delta_8^c)|\nabla\theta^m|^2+\\
&+(\delta^c + 2\nu_{\beta_1} + \nu_{\alpha_1}\delta_9^a)\,|\theta_t^m|^2 + \frac{2\mu_{\gamma_2}^1}{q}|\theta^m|^q\Bigg]\,dx\,dt, \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

where $C_6,\ \delta_3^a > 0,\ \delta_4^a > 0,\ \delta_k^a > 0\,(k = 6,\ldots,10),\ \delta_l^c > 0,\ (l = 4,\ldots,10),\ \delta^a > 0,\ \delta^c > 0$ and constants $\nu_{\beta_1},\ \nu_d,\ \mu_b,\ \mu_c$ dependent on functions $\beta_1,\ d_i,\ ,b_{it},\ c_{it}$ respectively and defined as

$$
\begin{aligned}
&\nu_{\beta_1} = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T}|\beta_1(t,x)|^2, \quad \mu_b = \max_i \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T}|b_{it}(t,x)|^2,\\
&\mu_c = \max_i \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T}|c_{it}(t,x)|^2, \quad \mu_d = \max_i \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T}|d_{it}(t,x)|^2.
\end{aligned}
$$

Choose any positive constants $\delta_6^a,\ \delta_5^c,\ \delta_6^c,\ \delta_8^c$ in such a way that the following condition hold: $(2c_0 - \nu_b\delta_6^a - \nu_c\delta_5^c - \mu_c\delta_6^c - \nu_e\delta_7^c) > 0$. From (3.12), (3.13), conditions of Theorem 1, Gronwall's lemma and from (3.16) implies that

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[|u_{tt}^m|^2 + |\nabla u_t^m|^2 + |u_t^m|^p + |\nabla\theta^m|^2 + |\theta_t^m|^2 + |\theta^m|^q\Big]\,dx+\\
&\quad+\int\limits_{Q_\tau}|\nabla\theta_t^m|^2\,dx\,dt + \int\limits_{Q_\tau}\left(\frac{d}{dt}\left(|u_t^m|^{\frac{p-2}{2}}u_t^m\right)\right)^2 dx\,dt+\\
&\quad+\int\limits_{Q_\tau}\left(\frac{d}{dt}\left(|\theta^m|^{\frac{q-2}{2}}\theta^m\right)\right)^2 dx\,dt \leqslant C_7, \quad \tau \in (0,T), \qquad (3.17)
\end{aligned}
$$

where C_7 is a positive constant independent of m.

We still can obtain from (3.11), (3.17) the following subsequences u^m, θ^m (still denoted as the original sequences):

$$
\begin{array}{lll}
u^m \to u & *\text{-weak in} & L^\infty(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)),\\
u_t^m \to u_t & *\text{-weak in} & L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \text{ and weakly in } L^p(Q_T),\\
u_{tt}^m \to u_{tt} & *\text{-weak in} & L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),\\
\theta^m \to \theta & *\text{-weak in} & L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \text{ and weakly in } L^q(Q_T),\\
\theta_t^m \to \theta_t & *\text{-weak in} & L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),\\
|u_t^m|^{p-2}u_t^m \to \psi_1 & \text{weakly in} & L^{p/(p-1)}(Q_T),\\
|\theta^m|^{q-2}\theta^m \to \psi_2 & \text{weakly in} & L^{q/(q-1)}(Q_T). \qquad (3.18)
\end{array}
$$

By Lions' compactness theorem (cf. Lions [7, p.70, theorem 5.1])

$$\begin{aligned} &u_t^m \to u_t && \text{strongly in} && L^2(Q_T) \text{ and a.e. in } Q_T, \\ &\theta^m \to \theta && \text{strongly in} && L^2(Q_T) \text{ and a.e. in } Q_T \end{aligned} \tag{3.19}$$

as $m \to \infty$. From (3.18), (3.19) and Lions' lemma 1.3 (cf. Lions [7, p.25, lemma 1.3]) $\psi_1 \equiv |u_t|^{p-2}u_t$ and $\psi_2 \equiv |\theta|^{p-2}\theta$.

Remark 2. Moreover,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\left(|u_t^m|^{\frac{p-2}{2}}u_t^m\right) \text{ bounded in } L^2(Q_T), \\ &\frac{\partial}{\partial t}\left(|\theta^m|^{\frac{q-2}{2}}\theta^m\right) \text{ bounded in } L^2(Q_T). \end{aligned}$$

To complete the proof of the Theorem 1, we shall show that the pair of functions (u,θ) is a generalized solution of problem (2.1)-(2.4). From (3.1), (3.2) we obtain the following system of equations

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\Omega_T} u_t^m v^{m_0}\,dx - \int\limits_{\Omega_0} u_1^m(x)v^{m_0}\,dx + \int\limits_{Q_T}\Big[-u_t^m v_t^{m_0} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)u_{x_i}^m v_{x_j}^{m_0} + \\ &\quad + \sum_{i=1}^n a_i(t,x)u_{x_i}^m v^{m_0} + \sum_{i=1}^n b_i(t,x)\theta_{x_i}^m v^{m_0} + \alpha_0(t,x)u^m v^{m_0} + \\ &\quad + \alpha_1(t,x)\theta^m v^{m_0} + \gamma_1(t,x)|u_t^m|^{p-2}u_t^m v^{m_0}\Big]\,dx\,dt = \int\limits_{Q_T} f_1(t,x)v^{m_0}\,dx\,dt, \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned} &\int\limits_{Q_T}\Big[\theta^m w^{m_0} + \sum_{i,j=1}^n c_{ij}(t,x)\theta_{x_i}^m w_{x_j}^{m_0} + \sum_{i=1}^n c_i(t,x)u_t^m w_{x_i}^{m_0} + \sum_{i=1}^n d_i(t,x)u_{x_i}^m w^{m_0} + \\ &\quad + \sum_{i=1}^n e_i(t,x)\theta_{x_i}^m w^{m_0} + \beta_0(t,x)u^m w^{m_0} + \beta_1(t,x)\theta^m w^{m_0} + \\ &\quad + \gamma_2(t,x)|\theta^m|^{q-2}\theta^m w^{m_0}\Big]\,dx\,dt = \int\limits_{Q_T} f_2(t,x)w^{m_0}\,dx\,dt, \quad v^{m_0}, w^{m_0} \in W_{m_0}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Since v^{m_0}, w^{m_0} is a "basis" $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\cap L^{2(\max\{p,q\})-1}(\Omega)$, by denseness it follows that the last two equations are true for all v^{m_0}, $w^{m_0} \in W_{m_0}$. Taking limits in (3.20)-(3.21) as $m \to \infty$, using the fact that $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\cap L^{2(\max\{p,q\})-1}(\Omega)$ is dense in $H_0^1(\Omega)\cap L^{2(\max\{p,q\})-1}(\Omega)$, we obtain that (u,θ) satisfy (2.1), (2.2). By Lemma 1.2 [7, p.20] $\{u,u_t\} \in C(0,T;L^2(\Omega))$, whenever $\{u,u_t,u_{tt}\} \in L^2(Q_T)$. Also by Lemma 1.2 [7, p.20] $\theta \in C(0,T;L^2(\Omega))$, whenever $\{\theta,\theta_t\} \in L^2(Q_T)$.

It is easy to show, that the initial conditions hold. Using (3.18) and Lemma 1.2 [7, p.20] we see that $u^m(0,x) \to u(0,x)$, $\theta^m(0,x) \to \theta(0,x)$ weakly in $L^2(\Omega)$. As a result of the fact that $u^m(0,x) = u_0^m \to u_0$ in $H^2(\Omega_0)\cap H_0^1(\Omega_0)$ and $\theta_0^m \to \theta_0$ in $H^2(\Omega_0)\cap H_0^1(\Omega_0)\cap L^{2(q-1)}(\Omega_0)$ implyies the first and the third terms of (2.4).

Next, due to (3.18) $\int\limits_{\Omega} u_{tt}^m w^m \, dx \to \int\limits_{\Omega} u_{tt} w^m \, dx$ $*$-weakly in $L^\infty(0,T)$, consequently (cf. lemma 1.2, [7, c.20] with $X = \mathbb{R}$) we have

$$\int\limits_{\Omega_0} u_t^m(0,x) w^k \, dx \to \left(\int\limits_{\Omega} u_t w^k \, dx \right) \Bigg|_{t=0} = \int\limits_{\Omega} u_t(0,x) w^k \, dx,$$

and, inasmuch as $\int_{\Omega_0} u_t^m(0,x) w^k \, dx \to \int_\Omega u_1 w^k \, dx$, because $u_1^m \to u_1$ in $H_0^1(\Omega_0) \cap$ $\cap L^{2(p-1)}(\Omega_0)$, we obtain

$$\int\limits_{\Omega_0} u_t(0,x) w^k \, dx = \int\limits_{\Omega_0} u_1 w^k \, dx \text{ for any } k \in \mathbb{N}.$$

This implies the second term of (2.4).

Hence, (u, θ) is a generalized solution of problem (2.1)-(2.4). The proof of the Theorem is complete.

Remark 3. First and third parts of (2.3) follows from belonging u and θ to $L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega))$.

Corollary 1. (smoothness of solution). *Suppose that conditions of Theorem 1 are fulfilled. Moreover,* $\{a_{ijx_k}, \ c_{ijx_k}, \ a_{ix_k}, \ b_{ix_k}, \ c_{ix_k}, \ ,d_{ix_k}, \ e_{ix_k}, \ \alpha_{0x_k}, \ \alpha_{1x_k}, \ \beta_{0x_k}, \ \beta_{1x_k}, \ \gamma_{1x_k}, \ \gamma_{2x_k}\} \in L^\infty(Q_T)$, $k = 1, \ldots, n$ *and*

$$p, q \leqslant \frac{2n}{n-2}, \ n > 2; \ p, q \textit{ is an arbitrary when } n = 1, 2. \tag{3.22}$$

Under these assumptions, the generalized solution of problem (2.1)-(2.4) is the solution almost everywhere on Q_T.

Proof. In similar a way to Theorem 1 we will use the Faedo-Galerkin method with choosing a special "basis". Let w^k are eigenfunctions of Dirichlet problem for operator $-\Delta$:

$$-\Delta w^k = \lambda w^k, \ \ w^k = 0 \text{ on } \partial\Omega.$$

Suppose that the boundary of Ω is sufficiently smooth in such way that $w^k \in H^2(\Omega)$, $w^k \in H_0^1(\Omega)$ and $w^k \in L^{2(\max\{p,q\}-1)}$, especially $\partial\Omega \subset C^2$. Choose $u_0^m, , u_1^m, \theta_0^m \in [w^1, \ldots, w^m]$ in such a way, that $u_0^m \to u_0$ strongly in $H^2(\Omega_0) \cap H_0^1(\Omega_0)$, $\theta_0^m \to \theta_0$ strongly in $H^2(\Omega_0) \cap$ $\cap H_0^1(\Omega_0) \cap L^{2(q-1)}$, $u_1^m \to u_1$ strongly in $H_0^1(\Omega_0) \cap L^{2(p-1)}$.

Therefore by chosen "basis", in system (2.5)-(2.6), which is local soluble in some interval $[0, t^m]$, we will multiply the first equation by the function $-\Delta u_t^m(t,x)$ and the second equation by the function $-\Delta \theta^m(t,x)$, integrating over t from 0 to τ, $0 < \tau <$ $< t^m \leqslant T$. Taking into account (3.22) it follow that $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \cap L^{2(\max\{p,q\}-1)}$ is dense in $H_0^1(\Omega)$, hence this operation is true.

In the same manner as Theorem 1 and using Gronwall's lemma, we conclude that

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\left[|\nabla u_t^m|^2+|\Delta u^m|^2+\alpha_0|\nabla u_t|^2+|\nabla\theta^m|^2\right]\,dx+\int\limits_{Q_\tau}|\Delta\theta^m|\,dx\,dt+$$
$$+\tilde{\gamma_1}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|u_t^m|^{p-2}u_t^m\right)\frac{\partial u_t^m}{\partial x_i}\,dx\,dt+$$
$$+\tilde{\gamma_2}\int\limits_{Q_\tau}\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{i=1}^{n}\left(|\theta^m|^{q-2}\theta^m\right)\frac{\partial\theta^m}{\partial x_i}\,dx\,dt\leqslant C_8, \tag{3.23}$$

where C_8 is a positive constant independent of m.

From transformations, we have

$$\tilde{\gamma_1}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|u_t^m|^{p-2}u_t^m\right)\frac{\partial u_t^m}{\partial x_i}\,dx\,dt\geqslant(p-1)\tilde{\gamma_1}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}\left(|u_t^m|^{\frac{p-2}{2}}\frac{\partial u_t^m}{\partial x_i}\right)\,dx\,dt=$$
$$=\frac{4(p-1)}{p^2}\tilde{\gamma_1}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(|u_t^m|^{\frac{p-2}{2}}u_t^m)\right)\,dx\,dt,$$
$$\tilde{\gamma_2}\int\limits_{Q_\tau}\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{i=1}^{n}\left(|\theta^m|^{q-2}\theta^m\right)\frac{\partial\theta^m}{\partial x_i}\,dx\,dt\geqslant(p-1)\tilde{\gamma_2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}\left(|\theta^m|^{\frac{q-2}{2}}\frac{\partial\theta^m}{\partial x_i}\right)\,dx\,dt=$$
$$=\frac{4(q-1)}{q^2}\tilde{\gamma_2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(|\theta^m|^{\frac{q-2}{2}}\theta^m)\right)\,dx\,dt. \tag{3.24}$$

Comparing (3.23) and (3.24), it follows that

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\left[|\nabla u_t^m|^2+|\Delta u^m|^2+\alpha_0|\nabla u_t|^2+|\nabla\theta^m|^2\right]\,dx+\int\limits_{Q_\tau}|\Delta\theta^m|\,dx\,dt+$$
$$+\frac{4(p-1)}{p^2}\tilde{\gamma_1}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(|u_t^m|^{\frac{p-2}{2}}u_t^m)\right)\,dx\,dt+$$

$$+\frac{4(q-1)}{q^2}\tilde{\gamma_2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(|\theta^m|^{\frac{q-2}{2}}\theta^m)\right)\,dx\,dt\leqslant C_8. \tag{3.25}$$

From last inequality, we obtain that

$$
\begin{aligned}
&(u_t^m)_{m\in\mathbb{N}} \ \text{ is bounded in } \ L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)),\\
&(u^m)_{m\in\mathbb{N}} \ \text{ is bounded in } \ L^\infty(0,T;H^2(\Omega)),\\
&(\theta^m)_{m\in\mathbb{N}} \ \text{ is bounded in } \ L^\infty(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)),\\
&\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|u_t^m|^{\frac{p-2}{2}}u_t^m\right)\right)_{m\in\mathbb{N}} \ \text{ is bounded in } \ L^2(\Omega) \quad (\, i=1,\dots,n),\\
&\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\theta^m|^{\frac{q-2}{2}}\theta^m\right)\right)_{m\in\mathbb{N}} \ \text{ is bounded in } \ L^2(\Omega) \quad (\, i=1,\dots,n),
\end{aligned} \tag{3.26}
$$

The second result in (3.26) follows from the statement: $\Delta\phi \geqslant C\|\phi\|_{H^2(\Omega)}$, where $\phi\in H_0^1(\Omega),\ \Delta\phi\in L^2(\Omega)$, and true for a regular boundary $\partial\Omega$.

Hence, from Theorem 1 and (3.26) the generalized solution of problem (2.1)-(2.4) is the solution almost everywhere on Q_T

Remark 4. In view of (3.26) and Remark 2. we have $|u_t|^{(p-2)/2}u_t \in H^1(Q_T)$, $|\theta|^{(q-2)/2}\theta\in H^1(Q_T)$.

4. Uniqueness of solution.

Theorem 2. *Suppose that conditions* (**A**)$-$(**E**), (**G**) *hold. Then the generalized solution of initial-boundary value problem* (2.1) $-$ (2.4) *is unique.*

Proof. If (u^1,θ^1), (u^2,θ^2) are solutions of (2.1)-(2.4), then the pair of functions $(u,\theta)=(u^1-u^2,\theta^1-\theta^2)$ satisfies

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega_T}|u_t|^2\,dx+\int\limits_{Q_T}\Big[-|u_t|^2+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)u_{x_i}u_{tx_j}+\sum_{i=1}^n a_i(t,x)u_{x_i}u_t+\\
&\qquad+\sum_{i=1}^n b_i(t,x)\theta_{x_i}u_t+\alpha_0(t,x)uu_t+\alpha_1(t,x)\theta u_t+\\
&\qquad+\gamma_1(t,x)\left[(|u_t^1|^{p-2}u_t^1-|u_t^2|^{p-2}u_t^2)(u_t^1-u_t^2)\right]\Big]\,dx\,dt=0,
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega_T}|\theta|^2\,dx+\int\limits_{Q_T}\Big[-|\theta|^2+\sum_{i,j=1}^n c_{ij}(t,x)\theta_{x_i}\theta_{x_j}+\sum_{i=1}^n c_i(t,x)u_t\theta_{x_i}+\\
&\qquad+\sum_{i=1}^n d_i(t,x)u_{x_i}\theta+\sum_{i=1}^n e_i(t,x)\theta_{x_i}\theta+\beta_0(t,x)u\theta+\\
&\qquad+\beta_1(t,x)|\theta|^2+\gamma_2(t,x)\left[|\theta^1|^{q-2}\theta^1-|\theta^2|^{q-2}\theta^2(\theta^1-\theta^2)\right]\Big]\,dx\,dt=0.
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

Using the estimates from Theorem 1, it is easy to find estimates of terms 1-6 for the first equation and terms 1-7 for the second equation. Moreover, from monotonicity, we get

$$\int\limits_{Q_\tau} \gamma_1(t,x)\left[(|u_t^1|^{p-2}u_t^1 - |u_t^2|^{p-2}u_t^2)(u_t^1 - u_t^2)\right]\,dx\,dt \geqslant 0,$$

$$\int\limits_{Q_\tau} \gamma_2(t,x)\left[|\theta^1|^{q-2}\theta^1 - |\theta^2|^{q-2}\theta^2(\theta^1 - \theta^2)\right]\,dx\,dt \geqslant 0.$$

Thus, from (4.1), (4.2) in similar way to (3.11) we obtain estimate

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \left[|u|^2 + |u_t| + |\nabla u| + |\theta|^2\right]\,dx + \int\limits_{Q_\tau} |\nabla\theta|^2\,dx\,dt +$$
$$+\,\tilde{\gamma}_1 \int\limits_{Q_\tau} |u_t|^p\,dx\,dt + \tilde{\gamma}_2 \int\limits_{Q_\tau} |\theta|^q\,dx\,dt \leqslant 0$$

for any $\tau \in (0,T)$.

Finally, according to Gronwall's inequality it follows that $u = 0$, $\theta = 0$ on Q_T. Hence, Theorem 2 is established.

Acknowledgments. We thank the referee for his/her valuable suggestions.

1. *Apolaya R.F., Clark H.R., Feitosa A.J.* On a nonlinear coupled system with internal damping // Electronic Journal of Differential Equations. – Vol. 2000, №64. – P. 1-17.
2. *Clark H. R., San Gil Jutuca L. P.* & *Milla Miranda* On a mixed problem for a linear coupled system with variable coefficients // Electronic Journal of Differential Equations. – 1998. – Vol. 1. – №04. – P. 1-20.
3. *Salim A. Messaoudi.* A blowup result in a multidimensional semilinear thermoelastic system // Electronic Journal of Differential Equations. – 2001. – Vol. 2001, №30. – P. 1-9.
4. *Clark M.R.* & *Lima O.A.* On a mixed problem for a coupled nonlinear system // Electronic Journal of Differential Equations. – 1997. – Vol. 1997, №06. – P. 1–11.
5. *Schiff L. I.* Non-linear meson theory of nuclear forces // J. Physic. Rev. – 1951. – №84. – P. 1-9.
6. *Segal I. E.* The global Cauchy problem for a relativistic scalar field with power interaction // Bull. Soc. Math. France. – 1963. – №91. – P. 129-135.
7. *Лионс Ж.Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., 1972.
8. *Lions, J. L., Magenes, E.* Non-homogeneous boundary value problems and applications. – Vol. I. – Springer-Verlag, New York, 1972.
9. *Medeiros L. A., Milla Miranda M.* On a boundary value problem for wave equations: existence, uniqueness-asymptotic behavior // Revista de Matematicas Aplicadas, Universidade de Chile. – 1996. – №17. – P. 47-73.
10. *Komornik, V., Zuazua, E.* A direct method for boundary stabilization of the wave equation // J. Math. Pure et Appl. – 1990. – №69. – P. 33-54.
11. *Gajewski H., Groger K., Zacharias K.* Nichtlineare operatorgleichungen und operatordifferentialgleichungen. – Moscow, 1978. – 336 p. (in Russian)

12. *Coddington E.A., Levinson N.* Theory of ordinary differential equations. – Moscow, 1958. (in Russian)
13. *Нечепуренко М.О.* Мішана задача для системи рівнянь термопружності // Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка А.Я. Підстригача. Тези доп. – Львів. – 2005. – С. 336.
14. *Нечепуренко М.О.* Мішана задача для нелінійної еволюційної системи рівнянь в необмеженій області // Одинадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука. Тези доп. – Київ, – 2006. – С. 207.

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛІНІЙНОЇ ЗВ'ЯЗНОЇ ЕВОЛЮЦІЙНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ В ОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ

Максим НЕЧЕПУРЕНКО

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1

Визначено умови існування та єдиності розв'язку нелінійної зв'язної еволюційної системи зі змінними коефіцієнтами для нелінійного рівняння з другою похідною за часовою змінною та нелінійного рівняння з першою похідною за часовою змінною в обмеженій області $\mathbb{R}^n$ з гладкою межею.

Ключові слова: нелінійна система, мішана задача, метод Фаедо-Гальоркіна.

Стаття надійшла до редколегії 03.01.2006

Прийнята до друку 24.10.2007

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2005. Вип.63. С.224-232 *Ser. Mech.-Math. 2005. Vol.63. P.224-232*

УДК 512.46, 513.83

ON ISOMORPHISMS OF THE FREE PARATOPOLOGICAL GROUPS AND FREE HOMOGENEOUS SPACES I

Nazar PYRCH

Ukrainian Academy of Printing,
79020, L'viv, Pidholosky Str., 19
e-mail: pnazar@ukr.net

In the paper we consider an isomorphic classification of the free (abelian) paratopological groups and free homogeneous spaces. We give methods for constructing examples of nonhomeomorphic spaces with topologically isomorphic free (abelian) paratopological groups and free homogeneous spaces. We propose methods for constructing examples of M_p-equivalent mappings.

Key words: free paratopological group, free homogeneous space, isomorphism of paratopological groups, isomorphism of homogeneous spaces.

1. Preliminaries. Under a *paratopological group* we understand a pair (G,τ) consisting of a group G and a topology τ on G making the group operation $\cdot\colon G\times G\to G$ on G continuous. If, in addition, the operation $(\cdot)^{-1}: G\to G$ of taking the inverse is continuous with respect to the topology τ, then (G,τ) is a *topological group*.

In the paper the word "space" means "topological space".

Definition 1. *Let X be a subspace of a paratopological group G with the identity e such that $e\in X$. Suppose that*

1. *The set X generates G algebraically, that is $\langle X\rangle = G$,*

2. *Every continuous mapping $f\colon X\to H$ from X to an arbitrary paratopological group H satisfying $f(e)=e_H$, where e_H is the unit of the group H, extends to a continuous homomorphism $f^*\colon G\to H$.*

Then G is called the Graev free paratopological group on (X,e) and is denoted by $FG_p(X,e)$.

If we replace the word "group" by the words "abelian group" in the above definition we obtain the definition of *Graev free abelian paratopological group* on (X,e), which we denote by $AG_p(X,e)$.

Definition 2. *Let X be a subspace of a paratopological group G. Suppose that*

1. The set X generates G algebraically, that is $\langle X\rangle = G$,

---

© Pyrch Nazar, 2005

2. Every continuous mapping $f\colon X \to H$ of X to an arbitrary paratopological group H extends to a continuous homomorphism $f^*\colon G \to H$.

Then G is called Markov free paratopological group *on X and is denoted by $F_p(X)$.*

If we replace the word "group" by the words "abelian group" in the above definition we obtain the definition of *Markov free abelian paratopological group* on X which we denote by $A_p(X)$.

Proposition 1 *([14]). Let X be a space.*

1. Let e be an arbitrary point of the space X. Then free paratopological groups $FP(X,e)$ and $AP(X,e)$ exist.

2. Let e_1 and e_2 be arbitrary points of the space X. Then the free paratopological groups $FP(X,e_1)$ and $FP(X,e_2)$ are topologically isomorphic. The free paratopological groups $AP(X,e_1)$ and $AP(X,e_2)$ are topologically isomorphic as well.

Let X be a space. Similarly to the case of free topological groups we can prove that the group $F_p(X)$ is topologically isomorphic to the group $FG_p(X^+)$ and the group $A_p(X)$ is topologically isomorphic to the group $AG_p(X^+)$, where X^+ is the space obtained from X by adding one isolated point.

Proposition 2 *([12]). For each space X the following claims hold.*

1. The free paratopological groups $F_p(X)$ and $A_p(X)$ exist.

2. Let G_1, G_2 be arbitrary Markov free paratopological groups on X. Then there exists a topological isomorphism $i\colon G_1 \to G_2$ such that $i(x) = x$ for each point $x \in X$.

3. Let G_1, G_2 be arbitrary Markov free abelian paratopological groups on X. Then there exists a topological isomorphism $i\colon G_1 \to G_2$ such that $i(x) = x$ for each point $x \in X$.

In [3] V.K. Bel'nov have defined the category of homogeneous spaces and their morphisms.

Definition 3. *A triple (Y,G,h) is a homogeneous space, if Y is a topological space and G is a topological group which acts effectively and transitively on Y by the continuous mapping h.*

Definition 4. *A morphism of two homogeneous spaces $p\colon (Y_1,G_1,h_1) \to (Y_2,G_2,h_2)$ is a pair $p = (f,\psi)$, where $f\colon Y_1 \to Y_2$ is a continuous mapping, $\psi\colon G_1 \to G_2$ is a continuous homomorphism such that the diagram*

$$\begin{tikzcd}
G_1 \times Y_1 \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "\psi\times f"'] & Y_1 \arrow[d, "f"] \\
G_2 \times Y_2 \arrow[r, "h_2"'] & Y_2
\end{tikzcd}$$

is commutative.

One may naturally define the composition of morphisms and the identity morphism. A morphism $p\colon (Y_1,G_1,h_1) \to (Y_2,G_2,h_2)$ is called an isomorphism, if there exists a morphism $p'\colon (Y_2,G_2,h_2) \to (Y_1,G_1,h_1)$ such that $p \circ p'$ and $p' \circ p$ are the identity morphisms.

Definition 5. *Let* (Y, G, h) *be a homogeneous space. We say that a subset* $Y_0 \subseteq Y$ *generates* (Y, G, h)*, if any morphism* $p = (f, \psi)\colon (Y, G, h) \to (Y, G, h)$ *is the identity morphism provided* $f(Y_0) = Y_0$ *and* $f|_{Y_0}$ *is the identity mapping.*

Definition 6. *A homogeneous space* (Y, G, h) *is called a free homogeneous space on the space* X*, if the following holds:*

1) X *is a subspace of* Y*;*

2) X *generates* (Y, G, h)*;*

3) for any homogeneous space (Y_1, G_1, h_1) *and any continuous mapping* $f_0\colon X \to Y_1$ *there exists a continuous morphism* $p = (f, \psi)\colon (Y, G, h) \to (Y_1, G_1, h_1)$ *such that* $f|_X = f_0$.

In [3] it was proved that for every topological space X the free homogeneous space on X exists and is unique up to the natural isomorphism.

In [8] Megrelishvili constructed examples of the nonhomeomorphic spaces with isomorphic free homogeneous spaces. We will denote by $H(X)$ the free homogeneous space of a topological space X.

Definition 7. *Topological spaces* X *and* Y *are called* B*-equivalent* ($X \overset{B}{\sim} Y$) *if free homogeneous spaces* $H(X)$ *and* $H(Y)$ *are isomorphic.*

Definition 8. *Topological spaces* X *and* Y *are called* M_p*-equivalent* ($X \overset{M_p}{\sim} Y$) *if the Markov free paratopological groups* $F_p(X)$ *and* $F_p(Y)$ *are topologically isomorphic.*

Definition 9. *Let* X_1, X_2, Y_1, Y_2 *be topological spaces. A mapping* $f\colon X_1 \to Y_1$ *is called* M_p-equivalent *to a mapping* $g\colon X_2 \to Y_2$ *if there exist topological isomorphisms* $i\colon F_p(X_1) \to F_p(X_2)$ *and* $j\colon F_p(Y_1) \to F_p(Y_2)$ *such that* $j \circ f^* = g^* \circ i$ *where* $f^*\colon F_p(X_1) \to \to F_p(Y_1)$ *and* $g^*\colon F_p(X_2) \to F_p(Y_2)$ *are homomorphisms extending the mappings* f *and* g *respectively.*

If we replace the words “free paratopological group” by the words “free abelian paratopological group” in Definitions 1.10 and 1.11 we obtain the definitions of A_p-equivalent spaces and A_p-equivalent mappings.

Similarly to the case of free topological groups, the M_p-equivalence of two spaces implies the A_p-equivalence (see [12, Proposition 2.8]).

The problem of isomorphic classification of free topological groups has been studied by many authors. Important results in this direction were obtained by Baars [2], Okunev [9], [10] and Tkachuk [15]. In [12] Pyrch and Ravsky have considered the basic properties of free paratopological groups related mostly to the separation properties. In this paper the author continues the investigation of free paratopological groups, focusing on their isomorphic classification.

The second section contains the methods for constructing the examples of nonhomeomorphic spaces with topologically isomorphic free paratopological (abelian) groups and free homogeneous spaces.

The third section contains the method for constructing the examples of M_p-equivalent mappings.

Some results of the paper were announced in [1] and [11].

2. On the method for constructing examples of M_p-equivalent and B-equivalent spaces. Let X be space. Denote by $G(X)$ the subgroup of the abstract group

$F(X)$ (here $F(X)$ is an abstract free group with the set of generators X) generated by the set $\{xy^{-1} \in F(X)|x, y \in X\}$ and $H(X) = \{gx \in F(X)|g \in G(X), x \in X\}$. Taking on $G(X)$ the discrete topology, we can consider the natural mapping $P\colon G(X)\times X \to H(X)$ defined by $P(g, x) = gx$. The set $H(X)$ equipped with quotient topology generated by the mapping P is denoted by $H_B(X)$. The group $G(X)$ acts on $H_B(X)$ by the continuous mapping h, where $h(g, x) = gx$. The triple $(H_B(X), G(X), h)$ is a free homogeneous space on X (see [3]). Sometimes we shall write shortly that the set $H(X)$ is a free homogeneous space on X. Consider on $F(X)$ the topology of the free paratopological group $F_p(X)$. Since $H(X) \subset F(X)$, the set $H(X)$ equipped with the subspace topology of $F_p(X)$ is denoted by $H_p(X)$.

Retractions r_1 and r_2 of a topological space X are called parallel provided $r_1 \circ r_2 = r_1$ and $r_2 \circ r_1 = r_2$. By $X \oplus Y$ we denote the disjoint sum of topological spaces X and Y.

Let X, Y be spaces, $f\colon X \to Y$ be a continuous mapping. Then we can consruct a morphism of homogeneous spaces $\overline{f}\colon H(X) \to H(Y)$ by the following way. The morphism $\overline{f}$ is a pair (f^*, ψ), where

$$f^*(x_1x_2^{-1}...x_{2n}^{-1}x_{2n+1}) = f(x_1)f(x_2)^{-1}...f(x_{2n})^{-1}f(x_{2n+1}) \text{ and}$$
$$\psi(x_1x_2^{-1}...x_{2n}^{-1}) = f(x_1)f(x_2)^{-1}...f(x_{2n})^{-1}, \text{ for all } x_1, x_2, ..., x_{2n+1} \in X.$$

Proposition 3. *Let $r_i\colon X \to K_i$, $i = 1, 2$, be parallel retractions of a topological space X onto its discrete subspaces K_1 and K_2 and $p_i\colon X \to X/K_i$ be the quotient mappings. Then the quotient spaces X/K_1 and X/K_2 are B-equivalent.*

Proof. Let $K_1 = \bigoplus_{s\in S}\{a_s\}$, then $K_2 = \bigoplus_{s\in S}\{b_s\}$, where $b_s = r_2(a_s)$. Put $X_s = r_1^{-1}(a_s) = r_2^{-1}(b_s)$. Then $X = \bigoplus_{s\in S} X_s$. Consider the mappings $f_1, f_2\colon X \to H(X)$ defined by $f_1(x) = b_sa_s^{-1}x$ and $f_2(x) = a_sb_s^{-1}x$ if $x \in X_s$. Obviously, these mappings are continuous on each X_s, thus they are continuous on X. Let $\overline{f}_i\colon H(X) \to H(X)$ be the morphisms constructed from the mappings f_i as described before the proposition. It was proved in [10] that (f_1^*, ψ_1) is inverse to (f_2^*, ψ_2), hence (f_1^*, ψ_1) is an isomorphism. Let $\overline{p_i}\colon H(X) \to H(X/K_i)$ be the morphisms constructed from the mappings p_i as described before the proposition. Similarly to [10] one can easily check that there exists an isomorphism $j\colon H(X/K_1) \to H(X/K_2)$ such that $j \circ p_1^* = p_2^* \circ f_1^*$. Thus $X/K_1 \overset{B}{\sim} X/K_2$.

Lemma 1. *Let X be a topological space. Then the natural mapping $h\colon H_B(X) \to H_p(X)$ is continuous.*

Proof. Consider the mapping $P_1\colon G(X) \times X \to H_p(X)$, defined as $P_1(g, a) = ga$ and the quotient mapping $P\colon G(X) \times X \to H_B(X)$ defined as $P(g, a) = ga$ (see [8]). Since for each $g \in G(X)$ the restriction $P_1|_{g\times X}\colon g \times X \to H_p(X)$ is continuous and $G(X) \times X = \bigoplus_{g\in G(X)} g \times X$. Then we see that the mapping P_1 is continuous on $G(X) \times X$. The continuity of the mapping h follows from the fact that the mapping $P_1 = h \circ P$ and the quotience of the mapping P.

Theorem 1. *Let X, Y be topological spaces with isomorphic free homogeneous spaces. Then Markov free paratopological groups of the spaces X and Y are topologically isomorphic.*

Proof. Let $(i,\psi)\colon (H_B(X), G(X), h_1) \to (H_B(Y), G(Y), h_2)$ be an isomorphism of homogeneous spaces. Denote by $p_X\colon H_B(X) \to H_p(X)$ and $p_Y\colon H_B(Y) \to H_p(Y)$ the natural mappings. Consider the mapping $g\colon X \to H_p(Y)$ defined by $g = p_Y \circ i|_X$. Let us extend the mapping g to a continuous homomorphism $g^*\colon F_p(X) \to F_p(Y)$. Since $G(X)$ acts transitively on $H(X)$, we obtain $p_Y \circ i = g^* \circ p_X$. Similarly, consider the mapping $f = p_X \circ i^{-1}|_Y$. Let us extend f to a continuous homomorphism $f^*\colon F_p(Y) \to F_p(X)$ satisfying the property $p_X \circ i^{-1} = f^* \circ p_Y$. From the last two equalities it follows that $p_X \circ i^{-1} \circ i|_X = f^* \circ g \circ p_X$, therefore $f^* \circ g(x) = x$ for all $x \in X$. Thus $f^* \circ g^* = 1_{F_p(X)}$. Similarly, we can check that $g^* \circ f^* = 1_{F_p(Y)}$, therefore g^* is a topological isomorphism.

In [6] free (abelian) topological groups on functionally Hausdorff spaces were considered.

Definition 10. *[6] Markov free topological group on a space X is a pair consisting of a topological group $F_M(X)$ and a continuous function $\eta_X\colon X \to F_M(X)$ such that any continuous function from X to a topological group G "lifts" to a unique continuous group homomorphism $\overline{f}\colon F_M(X) \to G$ such that $\overline{f} \circ \eta_X = f$.*

In the classic definitions of the free objects the mapping η_X is an embedding, in the above definition η_X need not to be an embedding.

If X is a Tychonoff space then the mapping η_X is a closed embedding and $F_M(X)$ is free topological group of X in the sense of [7].

If we change the word "group" to the words "abelian group" in the above definition we obtain the definition of *Markov free abelian topological group* on X which we denote by $A_M(X)$.

The next propositions follows from [12, proposition 2.2].

Proposition 4. *Let X and Y be functionally Hausdorff spaces with topologically isomorphic free paratopological groups. Then the groups $F_M(X)$ and $F_M(Y)$ on spaces X and Y are topologically isomorphic.*

Proposition 5. *Let X and Y be functionally Hausdorff spaces with topologically isomorphic free abelian paratopological groups. Then the groups $A_M(X)$ and $A_M(Y)$ on spaces X and Y are topologically isomorphic.*

The following proposition provides a method for constructing examples of nonhomeomorphic spaces with topologically isomorphic free (abelian) paratopological groups.

Proposition 6. *Let X_k, Y_k be topological spaces and $p_k\colon X_k \to Y_k$, $k = 1, 2$, be quotient mappings and $p_k^*\colon F_p(X_k) \to F_p(Y_k)$ be the homomorphic extensions of the mappings p_k. If there exists a topological isomorphism $i\colon F_p(X_1) \to F_p(X_2)$ such that $i(\ker p_1^*) = \ker p_2^*$ then the mappings p_1 and p_2 are M_p-equivalent.*

Proof. Suppose that such the mapping i exists. Let us define a mapping $j\colon F_p(Y_1) \to F_p(Y_2)$ by putting $j(a) = p_2^* \circ i(p_1^*)^{-1}(a)$ for each $a \in F_p(Y_1)$. One can easy check that j is well defined and is a topological isomorphism such that $j \circ p_1^* = p_2^* \circ i$. By [12, Proposition 2.10], the homomorphism p_1^* is open. The composition $p_2^* \circ i$ is continuous, thus the mapping j is continuous. The continuity of j^{-1} can be checked similarly.

Proposition 7. *Let* $r_i\colon X \to K_i$ $i = 1, 2$, *be parallel retractions of the topological space* X *onto its subspaces* K_1 *and* K_2 *such that* $F_p(K_1)$ *and* $F_p(K_2)$ *are topological groups and* $p_i\colon X \to X/K_i$ *be quotient mappings. Then* $p_1 \overset{M_p}{\sim} p_2$. *In particular,* $X/K_1 \overset{M_p}{\sim} X/K_2$.

Proof. Since $F_p(K_i)$ are topological groups, then the mappings $r_1(x)^{-1}\colon X \to F_p(K_1)$, $r_2(x)^{-1}\colon X \to F_p(K_2)$ are continuous. Since K_i are retracts of X, the embeddings $K_i \hookrightarrow X$ extend to embeddings $t_i\colon F_p(K_i) \hookrightarrow F_p(X)$ [12], so the mappings

$$t_1 \circ r_1(x)^{-1}\colon X \to F_p(X), \quad t_2 \circ r_2(x)^{-1}\colon X \to F_p(X)$$

are continuous. Let us define the mapping $j\colon X \to F_p(X)$ by putting $j(x) = r_1(x)^{-1}xr_2(x)^{-1}$. The mappings $x \longmapsto r_i(x)^{-1}$ are continuous because $F_p(K_i)$ are topological groups, thus the mapping j is continuous. Denote by $J\colon F_p(X) \to F_p(X)$ the homomorphic extension of the mapping j. It was proved in [10] that $J \circ J = 1_{F_p(X)}$. Denote by $p_i\colon X \to X/K_i$ the quotient mappings and by $p_i^*\colon F_p(X) \to F_p(X/K_i)$ their homomorphic extensions. It was proved in [10] that $J(K_1) = K_2$, therefore $J(\ker p_1^*) = \ker p_2^*$. And now the proof follows from Proposition 6.

Let us characterize the spaces for which their free (abelian) paratopological group is a topological group.

Proposition 8. *The following conditions are equivalent for a topological space* X*:*

i) the paratopological group $F_p(X)$ *is the disjoint sum* $\underset{s\in S}{\oplus} Z_s$ *of its antidiscrete subspaces* Z_s*,*

i') the paratopological group $A_p(X)$ *is the disjoint sum* $\underset{s\in S}{\oplus} A_s$ *of its antidiscrete subspaces* A_s*,*

ii) the paratopological group $F_p(X)$ *is a topological group,*

ii') the paratopological group $A_p(X)$ *is a topological group,*

iii) the topological space X *is the disjoint sum* $\underset{s\in S}{\oplus} X_s$ *of its antidiscrete subspaces* X_s.

Proof. The implications $(i \Longrightarrow ii)$ and $(i' \Longrightarrow ii')$ follows from the fact that each locally compact paratopological group is a topological group (see [13]).

$(ii \Longrightarrow iii)$,$(ii' \Longrightarrow iii)$ Let U be an open subset of the space X. If the assumption (ii) holds then [12, theorem 2.4] implies that U is a closed subset of X. If the assumption (ii') holds then similarly to [12, theorem 2.4] we can prove that U is a closed subset of X. Therefore, each open subset of X is clopen. Define the relation "$\sim$" on X by the following. Let $x, y \in X$. We put $x \sim y$ if and only if there is no open subset of the space X containing exactly one of the points x and y. Let T_0X be the quotient space of X determined by the relation "$\sim$" and $q\colon X \to T_0X$ be the quotient mapping. Let U be a closed subspace of T_0X. Then $q^{-1}(U)$ is closed and hence open subset in X. By the quotience of q we see that the set U is open in T_0X. Let $a, b \in T_0X$ be an arbitrary distinct points. Then there exists an open subset V of T_0X containing exactly one of these points. The set $X \setminus V$ is also open and contains the other point. Thus the topological space T_0X is a T_2 space. So every point is closed, and hence is open in T_0X, that is the topological space T_0X is discrete. Hence X is a disjoint sum of its antidiscrete subspaces.

$(iii \Longrightarrow i)$,$(iii \Longrightarrow i')$ Consider the quotient mapping $q\colon X \to Y$, where the image of each X_s is a singleton. The topological space Y is discrete, therefore $\ker q^*$ is a clopen antidiscrete subgroup of the paratopological group $F_p(X)$, that is $F_p(X)$ is the disjoint sum $\underset{s\in S}{\oplus} Z_s$ of its antidiscrete subspaces Z_s.

Example 1. [5] Let $X = C\times\mathbb{N}$, where C is a convergent sequence with the limit point c_0, $\mathbb{N}$ is a countable discrete space, $a \in C\setminus\{c_0\}$. Then the sets $K_1 = \{c_0\}\times\mathbb{N}$, $K_2 = \{a\}\times\mathbb{N}$ are discrete parallel retracts of the topological space X. The quotient space X/K_1 is homeomorphic to the Fréchet fan, and the quotient space X/K_2 is homeomorphic to X. Thus, local compactness, metrizability, the first and second axioms of countability, Čech completeness are not preserved by the relation of M_p-equivalence. The quotient mapping $p_1\colon X \to X/K_1$ is not open, and has no right inverse, while the quotient mapping $p_2\colon X \to X/K_2$ is open and has a right inverse.

Let X, Y be topological spaces. A mapping $f\colon X \to Y$ is called a *local homeomorphism* if for each $x \in X$ there exists an open neighborhood $U(x)$ such that the restriction $f|_{U(x)}$ is a homeomorphism from $U(x)$ onto an open subspace of Y.

Example 2. Let $C_i = \{x_i, y_i\}$, $\tau_i = \{\{\emptyset\}, \{x_i\}, \{x_i, y_i\}\}$ for $i = 1, 2$. Denote by X the disjoint sum of the topological spaces (C_1, τ_1) and (C_2, τ_2). The subsets $K_1 = \{x_1, x_2\}$ and $K_2 = \{y_1, y_2\}$ are discrete parallel retracts of X, so the quotient mappings $p_1\colon X \to X/K_1$ and $p_2\colon X \to X/K_2$ are M_p-equivalent. The mapping p_1 is open not closed, local homeomorphism. The mapping p_2 is closed not open and it is not a local homeomorphism.

A topological space X is called *resolvable* (respectively *ω-resolvable)* if X can be partitioned into two (respectively countably many) dense subsets.

Example 3. Let $X = [0, 1] \cup [2, 3] \cup \{4\}$ be a subspace of the reals with the natural topology. Then the subspaces $K_1 = \{1, 4\}$ and $K_2 = \{1, 2\}$ are discrete parallel retracts of X. Then $X/K_1 = I \oplus I$, $X/K_2 = I \oplus \{x\}$, where I is the closed unit interval. Thus $I \oplus I \overset{M_p}{\sim} I \oplus \{x\}$. The space $I \oplus I$ is ω-resolvable, while $I \oplus \{x\}$ is not resolvable. Hence resolvability and ω-resolvability are not preserved by the relation of M_p-equivalence.

3. On the method for constructing examples of M_p-equivalent mappings.

Proposition 9. *Let X be a Tychonoff space and $r_i\colon X \to K$, $i = 1, 2$, its retractions onto the same retract K such that $F_p(K)$ is a topological group. Then $r_1 \overset{M_p}{\sim} r_2$.*

Proof. Obviously $r_1 \circ r_2 = r_2$ and $r_2 \circ r_1 = r_1$.

Consider the mappings $h(x), g(x)\colon X \to F_p(X)$ defined by the formulas
$h(x) = xr_1(x)^{-1}r_2(x)$, $g(x) = xr_2(x)^{-1}r_1(x)$.

Since $F_p(K)$ is topological group, the mappings $r_1(x)^{-1}\colon X \to F_p(K)$, $r_2(x)^{-1}\colon X \to F_p(K)$ are continuous. Since K is a retract of X, the embedding $K \hookrightarrow X$ extends to an embedding $t\colon F_p(K) \hookrightarrow F_p(X)$ [12], so the mappings $t \circ r_1(x)^{-1}\colon X \to F_p(X)$, $t\circ r_2(x)^{-1}\colon X \to F_p(X)$ are continuous. Thus the mappings h and g are also continuous. Let $h^*, g^*\colon F_p(X) \to F_p(X)$ be a homomorphic extensions of the mappings h and g. If $x \in X$ then

$$h^* \circ g(x) = [xr_2(x)^{-1}r_1(x)] \times r_1[xr_2(x)^{-1}r_1(x)]^{-1} \times r_2[xr_2(x)^{-1}r_1(x)] =$$
$$= x \times r_2(x)^{-1} \times r_1(x) \times r_1(r_1(x))^{-1} \times r_1(r_2(x)) \times r_1(x)^{-1} \times r_2(x)\times$$
$$\times r_2(r_2(x))^{-1} \times r_2(r_1(x)) = x$$

So, $h^* \circ g^* = 1_{F_p(X)}$. Similarly one can check that $g^* \circ h^* = 1_{F_p(X)}$. Hence, h^* is a topological isomorphism. Moreover,
$r_2(g(x)) = r_2(x) \times r_2(r_2(x))^{-1} \times r_2(r_1(x)) = r_2(x) \times r_2(x)^{-1} \times r_1(x) = r_1(x)$
$r_1(h(x)) = r_1(x) \times r_1(r_1(x))^{-1} \times r_1(r_2(x)) = r_1(x) \times r_1(x)^{-1} \times r_2(x) = r_2(x)$

From these facts we conclude that $r_1 \overset{M_p}{\sim} r_2$.

Let X and Y be spaces. A map $f\colon X \to Y$ is called monotone (respectively easy, zero-dimensional) if any $f^{-1}(y)$ is connected (respectively hereditary disconnected, zero-dimensional) for each point $y \in Y$ [4, p. 526, 538].

Example 4. Let X be the space of reals. Consider on X the following topology: the set $(-\infty, 0]$ is equipped with the standart topology and $[0, +\infty)$ is an antidiscrete subset of X. Then the mappings f, g defined as $f(x) = |x|$ and $g(x) = x^+ = (x + f(x))/2$ for $x \in \mathbb{R}$ are retractions from $\mathbb{R}$ onto $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$. So, by Proposition 9 we obtain that $f \overset{M_p}{\sim} g$. The mapping f is not monotone, easy, zero-dimensional, the mapping g is monotone, not easy, not zero-dimensional.

---

1. *Banakh T. O. and Pyrch N. M.* Free paratopological groups: isomorphical classification // International conference dedicated to125-th anniversary of Hans Hahn. – Chernivtsi. – June 27-July 3, 2004. – P. 122-123.
2. *Baars J.* Equivalence of certain free topological groups // Comment. Math. Univ. Carolinae. – 1992. – Vol. 33. – P. 125-130.
3. *Bel'nov V. K.* On the dimension of the topologically homogenous spaces and free homogeneous spaces // Dokl. Acad. Nauk SSSR. – 1978. – Vol. 238. – 4 – P. 781-784.
4. *Engelking R.* General topology. Moscow. Mir, 1986, 751p.
5. *Graev M. I.* Free topological groups // Izvestiya Akad. Nauk SSSR Ser.Mat., – 1948. – Vol. 12. – P. 279-381.
6. *Fay T.H., Ordman E.T., SmithThomas B.V.* The free topological groups over rationals // General Topology and its Applications – 1979. – Vol. 10. – P. 33-47.
7. *Markov A.A.* On free topological groups // Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. – 1945. – Vol. 9, №4. – P. 3-64.
8. *Megrelishvili M. G.* Topological spaces with isomorphic free homogeneous spaces // Bulletin of the academy of sciences of the Georgian SSR. – 1981. – Vol. 103. – 3 – P. 549-552.
9. *Okunev O. G.* A method for constructing examples of M-equivalent spaces // Topology Appl. – 1990. – Vol. 36. – P. 157-171.
10. *Okunev O. G.* M-equivalence of products // Trans. of the Moscow Math. Soc. – 1995. – Vol. 56 – P. 149-158.
11. *Pyrch N. M.* Continuity of the inverse in free paratopological groups // Fourth Summer School in Algebra, Topology, Functional and Stochastic Analysis. – Kozeva. – July 17-29, 2006. – P. 146-147.
12. *Pyrch N. M. Ravsky O. V.* Free paratopological groups // Matem. Studii. – 2006. – Vol. 25. – P. 115-125.
13. *Ravsky O. V.* The topological and algebraical properties of paratopological groups // Phd thesis, Lviv, 2002. (in Ukrainian).
14. *Romaguera S., Sanchis M., Tkachenko M.* Free paratopological groups // Topology Proceedings. – 2002. – Vol. 27. – P. 1-28.
15. *Tkachuk V. V.* On a method of constructing examples of M-equivalent spaces // Usp. Matem. Nauk, – 1983. – Vol. 38. – 6. – P. 127-128.

ІЗОМОРФІЗМИ ВІЛЬНИХ ПАРАТОПОЛОГІЧНИХ ГРУП ТА ВІЛЬНИХ ОДНОРІДНИХ ПРОСТОРІВ І

Назар ПИРЧ

Українська Академія друкарства,
79020, м. Львів, вул. Підголоски, 19
e-mail: pnazar@ukr.net

Розглянуто ізоморфну класифікацію вільних (абелевих) паратопологічних груп і вільних однорідних просторів. Подано методи для побудови негомеоморфних просторів з топологічно ізоморфними вільними (абелевими) паратопологічними групами та вільними однорідними просторами. Подано також методи побудови M_p - еквівалентних відображень.

Ключові слова: вільна паратопологічна група, вільний однорідний простір, ізоморфізм паратопологічних груп, ізоморфізм однорідних просторів.

Стаття надійшла до редколегії 03.05.2006

Прийнята до друку 24.10.2007

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2007. Вип.67. С.233-247 *Ser. Mech.-Math. 2007. Vol.67. P.233-247*

УДК 517.95

ВИЗНАЧЕННЯ НЕВІДОМОГО МНОЖНИКА В КОЕФІЦІЄНТІ ПРИ ПЕРШІЙ ПОХІДНІЙ В ПАРАБОЛІЧНОМУ РІВНЯННІ В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ

Галина СНІТКО

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
79060, Львів, вул. Наукова, 3б

Визначено умови існування та єдиності розв'язку оберненої задачі для параболічного рівняння з невідомим множником у коефіцієнті при першій похідній в області з вільною межею.

Ключові слова: обернена задача, фукція Гріна, вільна межа, параболічне рівняння.

1. Мета нашої праці – дослідити обернену задачу визначення залежного від часу множника в коефіцієнті при першій похідній невідомої функції в параболічному рівнянні другого порядку загального вигляду в області з невідомою рухомою частиною межі. Згадана задача поєднує два типи задач: коефіцієнтна обернена задача та задача з вільною межею, прикладом якої є задача Стефана [1]. Обернені задачі визначення молодших коефіцієнтів у параболічному рівнянні досліджували у [2, 3]. Задача з вільною межею з інтегральною умовою перевизначення досліджена в [4], а з умовою Стефана – в [5].

В області $\Omega_T = \{(x,t) : 0 < x < h(t), 0 < t < T\}$, де $x = h(t)$ – невідома межа, розглядаємо параболічне рівняння з невідомим множником $b = b(t)$ в коефіцієнті при першій похідній

$$u_t = a(x,t)u_{xx} + b(t)b_0(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

початкову умову

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant h(0), \tag{2}$$

крайові умови

$$u(0,t) = \mu_1(t), \qquad u(h(t),t) = \mu_2(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

© Снітко Галина, 2007

та умови перевизначення

$$h'(t) = -k(t)u_x(h(t),t) + \mu_3(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4}$$

$$\int\limits_0^{h(t)} u(x,t)dx = \mu_4(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{5}$$

Вводячи нову змінну $y = \dfrac{x}{h(t)}$, зводимо задачу (1)-(5) до оберненої стосовно невідомих $h(t), b(t), v(y,t)$, де $v(y,t) = u(yh(t),t)$, в області $Q_T = \{(y,t) : 0 < y < 1, 0 < t < T\}$

$$v_t = \frac{a(yh(t),t)}{h^2(t)}\, v_{yy} + \frac{b(t)b_0(yh(t),t) + y\,h'(t)}{h(t)} v_y + c(yh(t),t)\,v + f(yh(t),t), \tag{6}$$

де $(y,t) \in Q_T$,

$$v(y,0) = \varphi(yh(0)), \qquad 0 \leqslant y \leqslant 1, \tag{7}$$

$$v(0,t) = \mu_1(t), \qquad v(1,t) = \mu_2(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{8}$$

$$h'(t) = -\frac{k(t)}{h(t)} v_y(1,t) + \mu_3(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{9}$$

$$h(t)\int\limits_0^1 v(y,t)dy = \mu_4(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{10}$$

Під розв'язком задачі (6)-(10) будемо розуміти трійку функцій $(h(t), b(t), v(y,t))$ з класу $C^1[0,T] \times C[0,T] \times C^{2,1}(\overline{Q}_T), h(t) > 0, t \in [0,T]$, що задовольняє рівняння (6) та умови (7)-(10).

1. Існування розв'язку задачі (6)-(10).

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються умови:*
$A1)$ $\quad a, b_0, c, f \in C([0,\infty) \times [0,T]), \quad a, b_0, c, f \in C^{1,0}([0,H_1] \times [0,T]), \quad \varphi \in C[0,\infty),$
$\varphi \in C^2[0,h_0], \quad \mu_i \in C^1[0,T], \, i = 1,2,4, \quad \mu_3 \in C[0,T];$
$A2)$ $\quad a(x,t) > 0, \quad c(x,t) < 0, \quad f(x,t) \geqslant 0, \ (x,t) \in [0,\infty) \times [0,T], \quad b_0(x,t) \neq 0,$
$(x,t) \in [0,H_1] \times [0,T], \quad \varphi(x) \geqslant \varphi_0 > 0, \ x \in [0,\infty), \quad \varphi'(x) > 0, \ x \in [0,h_0],$
$\mu_i(t) > 0, \ i = \overline{1,4}, \ t \in [0,T],$

де $h_0 = h(0) > 0$ *є розв'язком рівняння* $\displaystyle\int\limits_0^{h(0)} \varphi(x)dx = \mu_4(0),$

$H_1 = \max\limits_{[0,T]} \mu_4(t)(\min\{\min\limits_{[0,h_0]} \varphi(x), \ \min\limits_{[0,T]} \mu_1(t), \ \min\limits_{[0,T]} \mu_2(t)\})^{-1};$
$A3)$ $\quad \varphi(0) = \mu_1(0), \quad \varphi(h_0) = \mu_2(0),$

$$\mu_1'(0)=\frac{a(0,0)}{h_0^2}\,\varphi''(0)+\frac{b(0)b_0(0,0)}{h_0}\,\varphi'(0)+c(0,0)\varphi(0)+f(0,0),$$
$$\mu_2'(0)=\frac{a(h_0,0)}{h_0^2}\,\varphi''(h_0)+\frac{b(0)b_0(h_0,0)+h'(0)}{h_0}\varphi'(h_0)+c(h_0,0)\varphi(h_0)+f(h_0,0),\ \textit{де}$$

$$b(0)=\Big(\int\limits_0^1 b_0(yh_0,0)\varphi'(yh_0)dy\Big)^{-1}\Big[\mu_4'(0)-\mu_3(0)\mu_2(0)+\frac{1}{h_0}\Big((k(0)\mu_2(0)-a(h_0,0))\times$$
$$\times\varphi'(h_0)+a(0,0)\varphi'(0)\Big)+\int\limits_0^1\Big(a_x(yh_0,0)\varphi'(yh_0)-h_0(c(yh_0,0)\,\varphi(yh_0)+f(yh_0,0))\Big)dy\Big],$$

$$h'(0)=-\frac{k(0)}{h_0}\varphi'(h_0)+\mu_3(0).$$

Тоді можна зазначити таке число $T_0: 0<T_0\leqslant T$*, яке визначається вихідними даними, що розв'язок задачі (6)-(10) існує при* $0\leqslant y\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant T_0$.

Доведення. Враховуючи умови (2), (5) та припущення теореми 1, одержимо існування єдиного значення $h(0)=h_0$, яке задовольняє рівняння

$$\int\limits_0^{h(0)}\varphi(x)dx=\mu_4(0).$$

Доведення теореми 1 ґрунтується на застосуванні теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Зведемо задачу (6)-(10) до системи рівнянь. Тимчасово припустимо, що функції $h(t), b(t)$ відомі. Використовуючи функцію Гріна $G_1(y,t,\eta,\tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$v_t=\frac{a(yh(t),t)}{h^2(t)}v_{yy}+c(yh(t),t)\,v,$$

зводимо пряму задачу (6)-(8) до рівняння

$$v(y,t)\ \ =\ \ v_0(y,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\frac{b(\tau)b_0(\eta h(\tau),\tau)+\eta\,h'(\tau)}{h(\tau)}v_\eta(\eta,\tau)d\eta d\tau,\ (11)$$

де $v_0(y,t)$ визначається формулою [6]

$$v_0(y,t)=\int\limits_0^1 G_1(y,t,\eta,0)\,\varphi(\eta h_0)d\eta+\int\limits_0^t G_{1\eta}(y,t,0,\tau)\,\frac{a(0,\tau)}{h^2(\tau)}\mu_1(\tau)\,d\tau-$$
$$-\int\limits_0^t G_{1\eta}(y,t,1,\tau)\,\frac{a(h(\tau),\tau)}{h^2(\tau)}\mu_2(\tau)\,d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\,f(\eta h(\tau),\tau)\,d\eta\,d\tau.$$

Введемо позначення $p(t) = h'(t)$, $w(y,t) = v_y(y,t)$. Тоді (11) подамо у вигляді

$$v(y,t) \quad = \quad v_0(y,t) + \int\limits_0^t \int\limits_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau) \frac{b(\tau)b_0(\eta h(\tau),\tau) + \eta\, p(\tau)}{h(\tau)} w(\eta,\tau) d\eta d\tau. \quad (12)$$

Випишемо задачу для знаходження $w(y,t)$. Продиференціювавши (6), (7) по y та використавши (8), одержимо

$$w_t = \frac{a(yh(t),t)}{h^2(t)}\, w_{yy} + \frac{a_x(yh(t),t) + b(t)b_0(yh(t),t) + y\,h'(t)}{h(t)} w_y + \biggl(\frac{h'(t)}{h(t)} +$$

$$+ b(t)b_{0x}(yh(t),t) + +c(yh(t),t)\biggr) w + h(t)c_x(yh(t),t)v + h(t)f_x(yh(t),t), \ (y,t) \in Q_T,$$

$$w(y,0) = h_0\varphi'(yh_0), \qquad\qquad y \in [0,1], \qquad (13)$$

$$w_y(0,t) = \frac{h^2(t)}{a(0,t)} \biggl[\mu_1'(t) - c(0,t)\mu_1(t) - f(0,t) - \frac{b(t)b_0(0,t)}{h(t)}\, w(0,t)\biggr], \quad t \in [0,T],$$

$$w_y(1,t) = \frac{h^2(t)}{a(h(t),t)} \biggl[\mu_2'(t) - c(h(t),t)\mu_2(t) - f(h(t),t) - \frac{b(t)b_0(h(t),t) + h'(t)}{h(t)}\, w(1,t)\biggr],$$

$t \in [0,T]$.

Задача (13) у випадку довільних неперервних на $[0,T]$ функцій $h(t), h'(t)$, $b(t)$ еквівалентна рівнянню

$$w(y,t) = h_0 \int\limits_0^1 G_2(y,t,\eta,0)\, \varphi'(\eta h_0) d\eta - \int\limits_0^t G_2(y,t,0,\tau) \biggl[\mu_1'(\tau) - c(0,\tau)\mu_1(\tau) - f(0,\tau) -$$

$$- \frac{b(\tau)b_0(0,\tau)}{h(\tau)}\, w(0,\tau)\biggr] d\tau + \int\limits_0^t G_2(y,t,1,\tau) \biggl[\mu_2'(\tau) - c(h(\tau),\tau)\mu_2(\tau) - f(h(\tau),\tau) -$$

$$- \frac{b(\tau)b_0(h(\tau),\tau) + h'(\tau)}{h(\tau)}\, w(1,\tau)\biggr] d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_0^1 G_2(y,t,\eta,\tau) \biggl[\frac{b(\tau)b_0(\eta h(\tau),\tau) + \eta h'(\tau)}{h(\tau)} \times$$

$$\times w_\eta(\eta,\tau) + \biggl(b(\tau)b_{0x}(\eta h(\tau),\tau) + \frac{h'(\tau)}{h(\tau)} + c(\eta h(\tau),\tau)\biggr) w(\eta,\tau) + h(\tau)\, c_x(\eta h(\tau),\tau) \times$$

$$\times v(\eta,\tau) + h(\tau) f_x(\eta h(\tau),\tau)\biggr] d\eta\, d\tau, \qquad (14)$$

де $G_2(y,t,\eta,\tau)$ – функція Гріна другої крайової задачі для рівняння

$$w_t = \frac{a(yh(t),t)}{h^2(t)}\, w_{yy} + \frac{a_x(yh(t),t)}{h(t)} w_y. \qquad (15)$$

Інтегруючи частинами у виразі $\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_2(y,t,\eta,\tau)\dfrac{b(\tau)b_0(\eta h(\tau),\tau)+\eta h'(\tau)}{h(\tau)}w_\eta(\eta,\tau)d\eta d\tau$, подамо (14) у вигляді

$$w(y,t)=h_0\int\limits_0^1 G_2(y,t,\eta,0)\,\varphi'(\eta h_0)d\eta-\int\limits_0^t G_2(y,t,0,\tau)\Big[\mu_1'(\tau)-c(0,\tau)\mu_1(\tau)-f(0,\tau)\Big]d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t G_2(y,t,1,\tau)\Big[\mu_2'(\tau)-c(h(\tau),\tau)\mu_2(\tau)-f(h(\tau),\tau)\Big]d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_2(y,t,\eta,\tau)\times$$
$$\times(c(\eta h(\tau),\tau)\,w(\eta,\tau)+h(\tau)(c_x(\eta h(\tau),\tau)\,v(\eta,\tau)+f_x(\eta h(\tau),\tau)))d\eta\,d\tau-$$
$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{2\eta}(y,t,\eta,\tau)\frac{b(\tau)b_0(\eta h(\tau),\tau)+\eta p(\tau)}{h(\tau)}w(\eta,\tau)d\eta\,d\tau. \qquad (16)$$

З умови (9) матимемо

$$p(t)=-\frac{k(t)}{h(t)}w(1,t)+\mu_3(t). \qquad (17)$$

З умови (10) отримаємо

$$h(t)=\frac{\mu_4(t)}{\int\limits_0^1 v(y,t)dy}. \qquad (18)$$

Продиференціювавши (10) по t і використавши (6), одержимо

$$b(t)=\left(\int\limits_0^1 b_0(yh(t),t)w(y,t)dy\right)^{-1}\Bigg[\mu_4'(t)-\mu_3(t)\mu_2(t)+\frac{k(t)\mu_2(t)-a(h(t),t)}{h(t)}w(1,t)+$$
$$+\frac{a(0,t)}{h(t)}w(0,t)+\int\limits_0^1\Big(a_x(yh(t),t)w(y,t)-h(t)(c(yh(t),t)\,v(y,t)+f(yh(t),t))\Big)dy\Bigg]. \qquad (19)$$

Розглянемо рівняння (15) з початковою та крайовими умовами

$$w(y,0)=1,\qquad w_y(0,t)=w_y(1,t)=0.$$

За допомогою функції Гріна другої крайової задачі для рівняння (15) розв'язок задачі можемо подати у вигляді

$$w(y,t)=\int\limits_0^1 G_2(y,t,\eta,0)d\eta.$$

З іншого боку, розв'язком такої задачі є $w(y,t)=1$. Отже, можемо зробити висновок, що $\int\limits_0^1 G_2(y,t,\eta,0)d\eta=1$, та про додатність першого доданка з (16). Оскільки в (16) решта доданків при $t=0$ дорівнює нулю, то існує деяке число $t_0,\ 0<t_0\leqslant T$, таке що

$$w(y,t)\geqslant\frac{1}{2}\min_{[0,1]}\varphi'(yh_0)\int\limits_0^1 G_2(y,t,\eta,0)d\,\eta=\frac{M_0}{2}>0,\quad 0\leqslant y\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant t_0.$$

Отже, $\int\limits_0^1 b_0(yh(t),t)w(y,t)dy\neq 0$, коли $0\leqslant y\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant t_0$.

Отож, задачу (6)-(10) зведено до системи інтегральних рівнянь (12), (16)-(19) з невідомими $h(t),p(t),b(t),v(y,t),w(y,t)$. Якщо $(h(t),b(t),v(y,t))$ є розв'язком задачі (6)-(10) у сенсі наведеного означення, то функції $(h(t),p(t),b(t),v(y,t),\ w(y,t))$ є неперервним розв'язком системи (12), (16)-(19). Правильним є і обернене твердження: якщо $(h,p,b,v,w)\in(C[0,T])^3\times(C(\overline{Q}_T))^2$ є розв'язком системи (12), (16)-(19), то функції $(h(t),b(t),v(y,t))$ є розв'язком задачі (6)-(10).

Нехай $(h,p,b,v,w)\in(C[0,T])^3\times(C(\overline{Q}_T))^2$ є розв'язком системи (12), (16)-(19). Припущення теореми 1 допоможуть нам продиференціювати рівність (12) по y та з єдиності розв'язку інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду отримати $w(y,t)=$ $=v_y(y,t)$. Тоді робимо висновок, що $v(y,t)$ має потрібну гладкість і задовольняє рівняння

$$v_t=\frac{a(yh(t),t)}{h^2(t)}v_{yy}+\frac{b(t)b_0(yh(t),t)+yp(t)}{h(t)}v_y+c(yh(t),t)v+f(yh(t),t)\qquad(20)$$

і умови (7), (8), (10) для довільних неперервних на $[0,T]$ функцій $b(t)$ і $h(t)$. Оскільки $v\in C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ і $\mu_4\in C^1[0,T]$, то $h\in C^1[0,T]$. Враховуючи те, що функція $v(y,t)$ є розв'язком рівняння (20), продиференціюємо рівність (18) по t

$$b(t)=\left(\int\limits_0^1 b_0(yh(t),t)v_y(y,t)dy\right)^{-1}\Bigg[\mu_4'(t)-p(t)\mu_2(t)-\frac{a(h(t),t)}{h(t)}v_y(1,t)+\frac{a(0,t)}{h(t)}v_y(0,t)+$$

$$+\frac{\mu_4(t)}{h(t)}\Big(p(t)-h'(t)\Big)+\int\limits_0^1\Big(a_x(yh(t),t)v_y(y,t)-h(t)(c(yh(t),t)\,v(y,t)+f(yh(t),t))\Big)dy\Bigg].$$

Віднімаючи від цієї рівності (19), отримаємо

$$\big(p(t)-h'(t)\big)\frac{\mu_4(t)}{h(t)}=0.$$

Звідси матимемо

$$p(t)=h'(t).$$

Отже, еквівалентність задачі (6)-(10) та системи рівнянь (12), (16)-(19) у зазначеному сенсі доведено.

Визначимо апріорні оцінки розв'язків системи рівнянь (12), (16)-(19). Згідно з принципом максимуму [7] для розв'язку задачі (6)-(8) матимемо

$$v(y,t) \geqslant \min\{\min_{[0,h_0]}\varphi(x),\ \min_{[0,T]}\mu_1(t),\ \min_{[0,T]}\mu_2(t)\} \equiv M_1 > 0, \quad (y,t) \in \overline{Q}_T.$$

Згідно з (18) отримаємо

$$h(t) \leqslant \frac{\max\limits_{[0,T]}\mu_4(t)}{M_1} \equiv H_1 < \infty, \quad t \in [0,T].$$

Знайдемо оцінку функції $v(y,t)$ зверху. Для цього знову використаємо принцип максимуму

$$v(y,t) \leqslant \max\{\max_{[0,h_0]}\varphi(x),\ \max_{[0,T]}\mu_1(t),\ \max_{[0,T]}\mu_2(t),\ \max_{[0,H_1]\times[0,T]} f(x,t)\} \equiv M_2 < \infty.$$

Звідси з врахуванням (18) маємо

$$h(t) \geqslant \frac{\min\limits_{[0,T]}\mu_4(t)}{M_2} \equiv H_0 > 0, \quad t \in [0,T].$$

Отже,

$$0 < M_1 \leqslant v(y,t) \leqslant M_2 < \infty, \quad (y,t) \in \overline{Q}_T, \qquad 0 < H_0 \leqslant h(t) \leqslant H_1 < \infty, \quad t \in [0,T].$$

Позначимо $W(t) = \max\limits_{y\in[0,1]} |w(y,t)|$. Тоді з (17), (19) матимемо

$$|p(t)| \leqslant C_1 + C_2 W(t), \tag{21}$$

$$|b(t)| \leqslant C_3 + C_4 W(t). \tag{22}$$

Згідно з (21), (22) та оцінками функції Гріна [7] з (16) одержимо таку нерівність:

$$W(t) \leqslant C_5 + C_6 \int\limits_0^t \frac{W(\tau) + W^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau.$$

Позначивши $W_1(t) = W(t) + 1$, попередню нерівність перепишемо в такому вигляді:

$$W_1(t) \leqslant C_7 + C_8 \int\limits_0^t \frac{W_1^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau.$$

Метод розв'язування останньої нерівності подано в [6]. Отже, отримаємо оцінку

$$W(t) \leqslant M_3 < \infty, \quad t \in [0,t_1],$$

де t_1, $0 < t_1 \leqslant T$, визначається сталими C_7, C_8. Використовуючи це в (21), (22), одержимо

$$|p(t)| \leqslant C_9 < \infty, \qquad |b(t)| \leqslant C_{10} < \infty, \qquad t \in [0, t_1].$$

Отже, апріорні оцінки розв'язків системи (12), (16)–(19) знайдено.

Подамо систему (12), (16)–(19) у вигляді операторного рівняння

$$\omega = P\omega,$$

де $\omega = (h(t), b(t), p(t), v(y,t), w(y,t))$, а оператор P визначається правими частинами рівнянь (12), (16)–(19). Позначимо $N = \{(h, b, p, v, w) \in (C[0, T_0])^3 \times (C(\overline{Q}_{T_0}))^2 : H_0 \leqslant h(t) \leqslant H_1, |b(t)| \leqslant C_{10}, |p(t)| \leqslant C_9, M_1 \leqslant v(y,t) \leqslant M_2, |w(y,t)| \leqslant M_3\}$, де $T_0 = \min\{t_0, t_1\}$. Очевидно, що множина N задовольняє умови теореми Шаудера.

Доведення компактності операторів, що утворюють P, покажемо на прикладі оператора P_5, де P_5 визначається правою частиною (16). Зауважимо, що в [6] визначено компактність подібних операторів з функцією Гріна другої крайової задачі для рівняння теплопровідності.

Задамо $\varepsilon > 0$ і розглянемо різницю

$$\Delta_1 = \left| \int\limits_0^1 G_2(y_2, t_2, \eta, 0)\varphi'(\eta h_0)d\eta - \int\limits_0^1 G_2(y_1, t_1, \eta, 0)\varphi'(\eta h_0)d\eta \right|$$

з довільними точками $(y_i, t_i) \in \overline{Q}_{T_0}, (y_1, t_1) \neq (y_2, t_2)$.
Очевидно, що

$$\Delta_1 \leqslant \left| \int\limits_0^1 G_2(y_2, t_2, \eta, 0)\varphi'(\eta h_0)d\eta - \int\limits_0^1 G_2(y_1, t_2, \eta, 0)\varphi'(\eta h_0)d\eta \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_0^1 G_2(y_1, t_2, \eta, 0)\varphi'(\eta h_0)d\eta - \int\limits_0^1 G_2(y_1, t_1, \eta, 0)\varphi'(\eta h_0)d\eta \right| = \Delta_{1,1} + \Delta_{1,2}.$$

З властивостей теплових потенціалів [1] випливає, що для заданого $\varepsilon > 0$ існує таке $\overline{t}$, $0 < \overline{t} \leqslant T_0$, що

$$\left| \int\limits_0^1 G_2(y, t, \eta, 0)\varphi'(\eta h_0)d\eta - \varphi'(yh_0) \right| < \frac{\varepsilon}{5}, \text{ коли } 0 \leqslant t \leqslant \overline{t},\ 0 \leqslant y \leqslant 1. \tag{23}$$

Тому при $t_2 \leqslant \overline{t}$ маємо

$$\Delta_{1,1} \leqslant \left| \int\limits_0^1 G_2(y_2, t_2, \eta, 0)\varphi'(\eta h_0)d\eta - \varphi'(y_2 h_0) \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_0^1 G_2(y_1, t_2, \eta, 0)\varphi'(\eta h_0)d\eta - \varphi'(y_1 h_0) \right| + \left| \varphi'(y_2 h_0) - \varphi'(y_1 h_0) \right|.$$

З рівномірної неперервності функції φ на $[0,h_0]$ випливає існування такого $\delta_1>0$, що

$$|\varphi(y_2h_0)-\varphi(y_1h_0)|<\frac{\varepsilon}{5},$$

коли $|y_2-y_1|<\delta_1$. Звідси і з (23) маємо $\Delta_{1,1}<\dfrac{3\varepsilon}{5}$, якщо $t_2\leqslant\overline{t}$. Якщо ж і $t_1\leqslant\overline{t}$, то $\Delta_{1,2}<\dfrac{2\varepsilon}{5}$, і отримуємо $\Delta_1<\varepsilon$ за умови $|y_2-y_1|<\delta$ і t_1 та t_2 досить малі $t_1\leqslant\overline{t},t_2\leqslant\overline{t}$.

Нехай тепер $t_2>\overline{t}$, $t_1>\overline{t}$ і, для визначеності, $t_2>t_1$. Тоді згідно з оцінками функції Гріна [7]

$$\Delta_{1,1}=\left|\int\limits_0^1\varphi'(\eta h_0)d\eta\int\limits_{y_1}^{y_2}G_{2y}(y,t_2,\eta,0)dy\right|\leqslant\frac{C_{11}|y_2-y_1|}{\sqrt{\overline{t}}}\max_{[0,1]}|\varphi'(yh_0)|.$$

Це означає, що існує таке число $\delta_2>0$, що $\Delta_{1,1}<\dfrac{\varepsilon}{2}$ при $|y_2-y_1|<\delta_2$. Аналогічно визначаємо існування $\delta_3>0$ такого, що $\Delta_{1,2}<\dfrac{\varepsilon}{2}$, коли $|t_2-t_1|<\delta_3$.

Отже, необхідні нерівності визначено у випадку $t_i\leqslant\overline{t}$, $i=1,2$, і випадку $t_i\geqslant\overline{t}$, $i=1,2$. Якщо ж, наприклад, $t_1\leqslant\overline{t}$, а $t_2>\overline{t}$, то подамо $\Delta_{1,2}$ у вигляді

$$\Delta_{1,2}=\left|\int\limits_0^1G_2(y_1,t_2,\eta,0)\varphi'(\eta h_0)d\eta-\int\limits_0^1G_2(y_1,\overline{t},\eta,0)\varphi'(\eta h_0)d\eta\right|+$$

$$+\left|\int\limits_0^1G_2(y_1,\overline{t},\eta,0)\varphi'(\eta h_0)d\eta-\int\limits_0^1G_2(y_1,t_1,\eta,0)\varphi'(\eta h_0)d\eta\right|.$$

Другий доданок оцінимо, враховуючи (23), а перший – як у випадку $t_1>\overline{t}$, $t_2>\overline{t}$. Отже, ми довели, що $\Delta_1<\varepsilon$.

Розглянемо різницю

$$\Delta_2=\left|\int\limits_0^{t_2}G_2(y_2,t_2,0,\tau)\widetilde{\mu}_1(\tau)d\tau-\int\limits_0^{t_1}G_2(y_1,t_1,0,\tau)\widetilde{\mu}_1(\tau)d\tau\right|,$$

де $\widetilde{\mu}_1(t)=\mu_1'(t)-c(0,t)\mu_1(t)-f(0,t)$.
Очевидно, що

$$\Delta_2\leqslant\left|\int\limits_0^{t_2}G_2(y_2,t_2,0,\tau)\widetilde{\mu}_1(\tau)d\tau-\int\limits_0^{t_2}G_2(y_1,t_2,0,\tau)\widetilde{\mu}_1(\tau)d\tau\right|+$$

$$+\left|\int\limits_0^{t_2}G_2(y_1,t_2,0,\tau)\widetilde{\mu}_1(\tau)d\tau-\int\limits_0^{t_1}G_2(y_1,t_1,0,\tau)\widetilde{\mu}_1(\tau)d\tau\right|=\Delta_{2,1}+\Delta_{2,2}.$$

Оцінимо перший доданок, зробивши заміну змінних $t_2-\tau=\sigma$

$$\Delta_{2,1}\leqslant C_{12}\int\limits_0^{t_2}|G_2(y_2,t_2,0,t_2-\sigma)-G_2(y_1,t_2,0,t_2-\sigma)|\,d\sigma.$$

Згідно з оцінками функції Гріна [7], для заданого $\varepsilon>0$ можна зазначити $\overline{t}>0$, що

$$\int\limits_0^{\overline{t}}|G_2(y,t_2,0,\tau)|d\tau<\frac{\varepsilon}{6C_{12}},\quad y\in[0,1]. \tag{24}$$

Якщо $t_2\leqslant\overline{t}$, то з (24) маємо $\Delta_{2,1}<\dfrac{\varepsilon}{3}$. Якщо ж $t_2>\overline{t}$, то, розбиваючи інтеграл на суму двох інтегралів і застосовуючи (24), отримуємо

$$\Delta_{2,1}\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+C_{12}\int\limits_{\overline{t}}^{t_2}|G_2(y_2,t_2,0,t_2-\sigma)-G_2(y_1,t_2,0,t_2-\sigma)|\,d\sigma\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+C_{12}\int\limits_{\overline{t}}^{t_2}\int\limits_{y_1}^{y_2}|G_{2y}(y,t_2,0,t_2-\sigma)|dy\,d\sigma.$$

Звідси, використовуючи оцінки функції Гріна [7], маємо

$$\Delta_{2,1}\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+C_{13}|y_2-y_1|.$$

Вибираючи $\delta_4<\dfrac{\varepsilon}{6C_{13}}$, визначаємо оцінку $\Delta_{2,1}<\dfrac{\varepsilon}{2}$, коли $|y_2-y_1|<\delta_4$.

Вважаючи для визначеності $t_2>t_1$, оцінимо другий доданок

$$\Delta_{2,2}\leqslant\left|\int\limits_{t_1}^{t_2}G_2(y_1,t_2,0,\tau)\widetilde{\mu}_1(\tau)d\tau\right|+\left|\int\limits_0^{t_1}(G_2(y_1,t_2,0,\tau)-G_2(y_1,t_1,0,\tau))\widetilde{\mu}_1(\tau)d\tau\right|=$$

$$=\Delta_{2,2,1}+\Delta_{2,2,2}.$$

Оцінимо $\Delta_{2,2,1}$, провівши заміну змінних $t_2-\tau=\sigma$

$$\Delta_{2,2,1}\leqslant C_{12}\int\limits_0^{t_2-t_1}|G_2(y_1,t_2,0,t_2-\sigma)|d\sigma.$$

Враховуючи (24), робимо висновок про існування такого $\delta_5>0$, що $\Delta_{2,2,1}<\dfrac{\varepsilon}{6}$ при $|t_2-t_1|<\delta_5$.

Для оцінки $\Delta_{2,2,2}$ зробимо заміну змінних $t_1-\tau=\sigma$

$$\Delta_{2,2,2}\leqslant C_{12}\int\limits_0^{t_1}|G_2(y_1,t_2,0,t_1-\sigma)-G_2(y_1,t_1,0,t_1-\sigma)|d\sigma.$$

Враховуючи (24), доходимо висновку про існування такого $\overline{t}>0$, що $\Delta_{2,2,2}<\frac{\varepsilon}{6}$ при $t_1 \leqslant \overline{t}$. У випадку $t_1 > \overline{t}$ маємо

$$\Delta_{2,2,2} \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + C_{12} \int\limits_{\overline{t}}^{t_1} \left| \int\limits_{t_1}^{t_2} G_{2t}(y_1, t, 0, t_1 - \sigma) dt \right| d\sigma.$$

Звідси випливає існування такого $\delta_6 > 0$, що при $|t_2 - t_1| < \delta_6$ матимемо $\Delta_{2,2,2} < \frac{\varepsilon}{6}$. Отже, $\Delta_2 < \varepsilon$.

Наведені міркування використовують для оцінок

$$\Delta_3 = \left| \int\limits_0^{t_2} G_2(y_2, t_2, 1, \tau) \widetilde{\mu}_2(\tau) d\tau - \int\limits_0^{t_1} G_2(y_1, t_1, 1, \tau) \widetilde{\mu}_2(\tau) d\tau \right|,$$

$$\Delta_4 = \left| \int\limits_0^{t_2} \int\limits_0^1 G_2(y_2, t_2, \eta, \tau) f(\eta, \tau) d\eta \, d\tau - \int\limits_0^{t_1} \int\limits_0^1 G_2(y_1, t_1, \eta, \tau) f(\eta, \tau) d\eta \, d\tau \right|.$$

Отже, компактність оператора P доведено.

Тоді за теоремою Шаудера існує розв'язок $(h(t), b(t), p(t), v(y,t), w(y,t))$ системи рівнянь (12), (16)-(19) з класу $(C[0,T_0])^3 \times (C(\overline{Q}_{T_0}))^2$, а отже, і розв'язок задачі (6)-(10) $(h(t), b(t), v(y,t))$ з класу $C^1[0,T_0] \times C[0,T_0] \times C^{2,1}(\overline{Q}_{T_0})$.

Теорему 1 доведено.

2. Єдиність розв'язку задачі (6)-(10).

Теорема 2. *У випадку виконання умов*
*B*1) $a \in C^{2,0}([0,H_1] \times [0,T])$, $b_0, c, f \in C^{1,0}([0,H_1] \times [0,T])$, $\varphi \in C[0,\infty)$;
*B*2) $a(x,t) > 0$, $(x,t) \in [0,\infty) \times [0,T]$, $b_0(x,t) \neq 0$, $(x,t) \in [0,H_1] \times [0,T]$, $\varphi(x) \geqslant \varphi_0 > 0$, $x \in [0,\infty)$, $\varphi'(x) > 0$, $x \in [0,h_0]$, $\mu_4(t) > 0$, $t \in [0,T]$
можна зазначити таке число $t_0 : 0 < t_0 \leqslant T$, *що розв'язок задачі (6)-(10) єдиний при* $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$.

Доведення. Нехай $(h_i(t), b_i(t), v_i(y,t))$, $i = 1,2$, – два розв'язки задачі (6)-(10). Позначимо

$$\frac{b_i(t)}{h_i(t)} = q_i(t), \qquad \frac{h_i'(t)}{h_i(t)} = s_i(t), \quad i = 1,2,$$

$$q(t) = q_1(t) - q_2(t), \qquad s(t) = s_1(t) - s_2(t) \qquad v(y,t) = v_1(y,t) - v_2(y,t).$$

Функції $q(t), s(t), v(y,t)$ задовольняють умови

$$v_t = \frac{a(yh_1(t),t)}{h_1^2(t)} v_{yy} + (q_1(t) b_0(yh_1(t),t) + y s_1(t)) v_y + c(yh_1(t),t) v +$$
$$+ \left(\frac{a(yh_1(t),t)}{h_1^2(t)} - \frac{a(yh_2(t),t)}{h_2^2(t)} \right) v_{2yy} + (q_1(t) b_0(yh_1(t),t) - q_2(t) b_0(yh_2(t),t) + y s(t)) v_{2y}$$
$$+ (c(yh_1(t),t) - c(yh_2(t),t)) v_2 + f(yh_1(t),t) - f(yh_2(t),t), \qquad (y,t) \in Q_T, \qquad (25)$$

$$v(y,0)=0, \qquad 0\leqslant y\leqslant 1, \tag{26}$$

$$v(0,t)=v(1,t)=0, \qquad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{27}$$

$$h'(t)=-k(t)\left(\frac{v_{1y}(1,t)}{h_1(t)}-\frac{v_{2y}(1,t)}{h_2(t)}\right), \qquad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{28}$$

$$\int\limits_0^1 v(y,t)dy=\mu_4(t)\left(\frac{1}{h_1(t)}-\frac{1}{h_2(t)}\right), \qquad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{29}$$

За допомогою функції Гріна $G_1^*(y,t,\eta,\tau)$ для рівняння

$$v_t=\frac{a(yh_1(t),t)}{h_1^2(t)}v_{yy}+(q_1(t)b_0(yh_1(t),t)+ys_1(t))v_y+c(yh_1(t),t)v$$

з врахуванням умов (26), (27) функцію $v(y,t)$ подамо в такому вигляді

$$v(y,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_1^*(y,t,\eta,\tau)\left[\left(\frac{a(\eta h_1(\tau),\tau)}{h_1^2(\tau)}-\frac{a(\eta h_2(\tau),\tau)}{h_2^2(\tau)}\right)v_{2\eta\eta}(\eta,\tau)+\right.$$
$$+(q_1(\tau)b_0(\eta h_1(\tau),\tau)-q_2(\tau)b_0(\eta h_2(\tau),\tau)+\eta s(\tau))v_{2\eta}(\eta,\tau)+$$
$$\left.+(c(\eta h_1(\tau),\tau)-c(\eta h_2(\tau),\tau))v_2(\eta,\tau)+f(\eta h_1(\tau),\tau)-f(\eta h_2(\tau),\tau)\right]d\eta d\tau. \tag{30}$$

Оскільки $(h_i(t),b_i(t),v_i(y,t)),\ i=1,2,$ – розв'язки задачі (6)-(10), то для $h_i(t),b_i(t)$, $i=1,2$, справджуються рівності, аналогічні (17), (19)

$$\frac{h_i'(t)}{h_i(t)}=-\frac{k(t)}{h_i^2(t)}v_{iy}(1,t)+\frac{\mu_3(t)}{h_i(t)}, \tag{31}$$

$$\frac{b_i(t)}{h_i(t)}=\left(h_i(t)\int\limits_0^1 b_0(yh_i(t),t)v_{iy}(y,t)dy\right)^{-1}\left[\mu_4'(t)-\mu_3(t)\mu_2(t)+\frac{a(0,t)}{h_i(t)}v_{iy}(0,t)+\right.$$
$$+\frac{k(t)\mu_2(t)-a(h_i(t),t)}{h_i(t)}v_{iy}(1,t)+\int\limits_0^1\left(a_x(yh_i(t),t)v_{iy}(y,t)-h_i(t)(c(yh_i(t),t)\times\right.$$
$$\left.\left.\times v_i(y,t)+f(yh_i(t),t))\right)dy\right],\ i=1,2. \tag{32}$$

З умов теореми можемо зробимо висновок про існування деякого числа $t_0, 0<t_0\leqslant T$, такого що

$$v_{iy}\geqslant\frac{M_0}{2}>0, \quad 0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant t\leqslant t_0, \quad i=1,2.$$

Тоді $\int\limits_0^1 b_0(yh_i(t),t)v_{iy}(y,t)dy \neq 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant t_0, \quad i=1,2.$

З (31), (32) матимемо

$$\begin{aligned} s(t) \;=\; & -k(t)\Bigg(v_{1y}(1,t)\Bigg(\frac{1}{h_1^2(t)}-\frac{1}{h_2^2(t)}\Bigg)+\frac{1}{h_2^2(t)}\Bigg(v_{1y}(1,t)-v_{2y}(1,t)\Bigg)\Bigg)+ \\ & +\mu_3(t)\Bigg(\frac{1}{h_1(t)}-\frac{1}{h_2(t)}\Bigg), \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} & q(t)=\Bigg[\int\limits_0^1(b_0(yh_1(t),t)v_y(y,t)+(b_0(yh_1(t),t)-b_0(yh_2(t),t))v_{2y}(y,t))dy\Bigg(h_1(t)\times \\ & \times\int\limits_0^1 b_0(yh_1(t),t)v_{1y}(y,t)dy\int\limits_0^1 b_0(yh_2(t),t)v_{2y}(y,t)dy\Bigg)^{-1}+\Bigg(\frac{1}{h_1(t)}-\frac{1}{h_2(t)}\Bigg)\times \\ & \times\Bigg(\int\limits_0^1 b_0(yh_2(t),t)v_{2y}(y,t)dy\Bigg)^{-1}\Bigg]\Bigg[\mu_4'(t)-\mu_3(t)\mu_2(t)+\frac{k(t)\mu_2(t)-a(h_2(t),t)}{h_2(t)}v_{2y}(1,t)+ \\ & +\frac{a(0,t)}{h_2(t)}v_{2y}(0,t)+\int\limits_0^1\Bigg(a_x(yh_2(t),t)v_{2y}(y,t)-h_2(t)(c(yh_2(t),t)\,v_2(y,t)+f(yh_2(t),t))\Bigg)dy\Bigg]+ \\ & +\Bigg(h_1(t)\int\limits_0^1 b_0(yh_1(t),t)v_{1y}(y,t)dy\Bigg)^{-1}\Bigg[\frac{k(t)\mu_2(t)-a(h_1(t),t)}{h_1(t)}v_y(1,t)+\frac{a(0,t)}{h_1(t)}v_y(0,t)- \\ & -\frac{a(h_1(t),t)-a(h_2(t),t)}{h_1(t)}v_{2y}(1,t)+\Bigg(\frac{1}{h_1(t)}-\frac{1}{h_2(t)}\Bigg)\Bigg((k(t)\mu_2(t)-a(h_2(t),t))v_{2y}(1,t)+ \\ & +a(0,t)v_{2y}(0,t)\Bigg)+\int\limits_0^1\Bigg(a_x(yh_1(t),t)v_y(y,t)+(a_x(yh_1(t),t)-a_x(yh_2(t),t))v_{2y}(y,t)- \\ & -h_1(t)c(yh_1(t),t)\,v(y,t)-(h_1(t)(c(yh_1(t),t)-c(yh_2(t),t))+h(t)c(yh_2(t),t))v_2(y,t)- \\ & \qquad -h_1(t)(f(yh_1(t),t)-f(yh_2(t),t))+h(t)f(yh_2(t),t)\Bigg)dy\Bigg]. \end{aligned} \tag{34}$$

Використаємо таке перетворення:

$$f(yh_1(t),t)-f(yh_2(t),t)=y(h_1(t)-h_2(t))\int\limits_0^1 f_x(y(h_2(t)+\sigma(h_1(t)-h_2(t))),t)d\sigma. \tag{35}$$

Перетворення (35) можемо використати для різниць $a(yh_1(t),t) - a(yh_2(t),t)$, $a_x(yh_1(t),t) - a_x(yh_2(t),t)$, $c(yh_1(t),t) - c(yh_2(t),t)$, $b_0(yh_1(t),t) - b_0(yh_2(t),t)$. Виразимо $h_i(t)$ через $s_i(t)$

$$h_i(t) = h_i(0)\exp\left(\int_0^t s_i(\tau)d\tau\right), \quad i = 1,2,$$

де $h_1(0) = h_2(0) = h_0$.
Тоді

$$\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)} = \frac{1}{h_0}\left(\exp\left(-\int_0^t s_1(\tau)d\tau\right) - \exp\left(-\int_0^t s_2(\tau)d\tau\right)\right).$$

Використавши

$$e^x - e^y = (x-y)\int_0^1 e^{y+\tau(x-y)}d\tau,$$

отримаємо

$$\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)} = -\frac{1}{h_0}\int_0^t s(\tau)d\tau\int_0^1 \exp\left(-\int_0^t(\sigma s(\tau) + s_2(\tau))d\tau\right)d\sigma. \tag{36}$$

Аналогічно

$$\frac{1}{h_1^2(t)} - \frac{1}{h_2^2(t)} = -\frac{2}{h_0^2}\int_0^t s(\tau)d\tau\int_0^1 \exp\left(-2\int_0^t(\sigma s(\tau) + s_2(\tau))d\tau\right)d\sigma. \tag{37}$$

Використавши (35)–(37) і підставивши (30) в (33), (34), одержимо систему однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду стосовно невідомих $s(t)$, $q(t)$. З єдиності розв'язків таких систем випливає, що $s(t) = 0$, $q(t) = 0$, $t \in [0,t_0]$. Звідси отримаємо $s_1(t) = s_2(t)$, $q_1(t) = q_2(t)$, $t \in [0,t_0]$, а отже, $h_1(t) = h_2(t)$, $b_1(t) = b_2(t)$, $t \in [0,t_0]$. Використовуючи це в задачі (25)–(27), знаходимо, що $v_1(y,t) = v_2(y,t)$, $(y,t) \in \overline{Q}_{t_0}$, що завершує доведення теореми 2.

1. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М., 1968.
2. *Cannon J.R., Perez-Esteva S.* Determination of the coefficient of u_x in a linear parabolic equation // Inverse Problems. – 1994. – Vol. 10, No. 3. – P. 521-531.
3. *Пабирівська Н. В.* Теплові моменти в оберненій задачі для параболічного рівняння // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 56. – С. 142-149.
4. *Іванчов М.І.* Обернена задача з вільною межею для рівняння теплопровідності // Укр. мат. журн. – 2003. – Т.55, № 7. – С. 901-910.
5. *Lorenzi L.* An identification problem for a one-phase Stefan problem // J. Inv. Ill-Posed Problems. – 2001. – Vol. 9, No. 6. – P. 1-27.
6. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. – VNTL Publishers, 2003.
7. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М., 1967.

DETERMINATION OF UNKNOWN MULTIPLIER IN THE COEFFICIENT AT THE FIRST DERIVATIVE IN A PARABOLIC EQUATION IN A FREE BOUNDARY DOMAIN

Halyna SNITKO

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
National Academy of Sciences of Ukraine,
79060, Lviv, Naukova Str., 3b

We established conditions of existence and uniqueness of the solution to the inverse problem for a parabolic equation with unknown multiplier in the coefficient at the first derivative in a domain with free boundary.

Key words: inverse problem, Green's function, free boundary, parabolic equation.

Стаття надійшла до редколегії 25.12.2006

Прийнята до друку 24.10.2007

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2007. Вип.67. С.248-267 *Ser. Mech.-Math. 2007. Vol.67. P.248-267*

УДК 517.95

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ ТИПУ ЕЙДЕЛЬМАНА В НЕОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ

Галина ТОРГАН

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1

Одержано достатні умови існування і єдиності узагальненого розв'язку в класі типу Тихонова мішаної задачі для рівняння

$$u_{tt}+\sum_{i,j,s,l=1}^{k}(a_{ij}^{sl}(z,t)u_{x_ix_j})_{x_sx_l}-\sum_{i,j=1}^{k}(a_{ij}(z,t)u_{x_i})_{x_j}-\sum_{i,j=1}^{k}(b_{ij}(z,t)u_{tx_i})_{x_j}-$$

$$-\sum_{i,j=1}^{m}(c_{ij}(z,t)u_{y_i})_{y_j}+a_0(z,t)u+b(z,u_t)=\sum_{i,j=1}^{k}(f_{ij}(z,t))_{x_ix_j}-$$

$$-\sum_{i=1}^{k}(f_i(z,t))_{x_i}+f_0(z,t)-\sum_{i=1}^{m}(g_i(z,t))_{y_i}$$

в необмеженій області за просторовими змінними.

Ключові слова: еволюційне рівняння, задача в необмеженій області.

У 1960 р. С. Д. Ейдельман [1] розглянув узагальнення параболічних за Петровським систем, ввівши термін "$\overrightarrow{2b}$-параболічні системи". У цих системах диференціюванню за різними просторовими змінними приписують різну вагу стосовно диференціювання за змінною t. За цей час було достатньо детально розроблено теорію задачі Коші для лінійних систем зазначеного типу (див. праці [2-21]).

Зазначимо, що параболічне рівняння з другою похідною за часом і четвертими похідними за просторовими змінними моделюють процеси фазового переходу у в'язкопружних середовищах з капілярністю. Зокрема, задачі для нелінійних рівнянь такого типу досліджено в [22-25].

У цій праці розглянуто еволюційне рівняння з другою похідною за часом, четвертими похідними за однією групою просторових змінних і другою похідною за другою групою просторових змінних. Такі рівняння можна зарахувати до $\overrightarrow{2b}$-параболічних рівнянь Ейдельмана. Досліджено мішану задачу в необмеженій області за просторовими змінними.

© Торган Галина, 2007

Нехай Ω_x – необмежена область в просторі $\mathbb{R}^k$ з межею $\partial\Omega_x \in C^1$, Ω_y – необмежена область в просторі $\mathbb{R}^m$ з межею $\partial\Omega_y \in C^1$, $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, де $T < \infty$, $\Omega_\tau = Q_T \cap \{t = \tau\}$, $\tau \in [0,T]$, $k + m = n$, $z = (x,y)$, $x \in \Omega_x$, $y \in \Omega_y$.

Розглянемо обмежені області $\Omega_x^R = \Omega_x \cap B_x^R$, $\Omega_y^R = \Omega_y \cap B_y^R$, де $B_x^R = \big\{x \in \mathbb{R}^k\colon |x| < R\big\}$ і $B_y^R = \big\{y \in \mathbb{R}^m : \ |y| < R\big\}$, $\Omega^R = \Omega_x^R \times \Omega_y^R$, $Q_T^R = \Omega^R \times (0,T)$, $\Omega_\tau^R = Q_T^R \cap \{t = \tau\}$, $\tau \in [0,T]$.

У необмеженій області Q_T розглянемо задачу для рівняння з дійснозначними коефіцієнтами і вільним членом

$$A(u) \equiv u_{tt} + \sum_{i,j,s,l=1}^{k} (a_{ij}^{sl}(z,t) u_{x_i x_j})_{x_s x_l} - \sum_{i,j=1}^{k} (a_{ij}(z,t) u_{x_i})_{x_j} - \sum_{i,j=1}^{k} (b_{ij}(z,t) u_{t x_i})_{x_j} -$$

$$- \sum_{i,j=1}^{m} (c_{ij}(z,t) u_{y_i})_{y_j} + a_0(z,t) u + b(z,u_t) = \sum_{i,j=1}^{k} (f_{ij}(z,t))_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^{k} (f_i(z,t))_{x_i} +$$

$$+ f_0(z,t) - \sum_{i=1}^{m} (g_i(z,t))_{y_i} \tag{1}$$

з початковими умовами

$$u(z,0) = u_0(z), \quad u_t(z,0) = u_1(z) \tag{2}$$

і крайовими умовами

$$u\big|_{\partial\Omega \times (0,T)} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\partial\Omega_x \times \Omega_y \times (0,T)} = 0, \tag{3}$$

де ν – зовнішня нормаль до поверхні $\partial\Omega_x \times \Omega_y \times (0,T)$.

Введемо простори:

$$L^p((0,T);B) = \left\{ u : \int_0^T ||u(\cdot,t)||_B^p dt < \infty \right\}, \ ||u||_{L^p((0,T);B)} = \left(\int_0^T ||u(\cdot,t)||_B^p dt \right)^{1/p},$$

де $p \in (1, +\infty)$, B – деякий банахів простір;

$$L^p_{loc}(\overline{\Omega}) = \Big\{ u : \ \forall K - \ \text{компактної множини з} \ \overline{\Omega} \ \ u \in L^p(K) \Big\};$$

$$V_0^{1,0}(\Omega^R) = \Big\{ u : \ u, \ u_{x_i} \in L^2(\Omega^R), \ i \in \{1,...,k\}, \ u\big|_{\partial\Omega_x^R} = 0 \Big\},$$

$$V_0^{2,1}(\Omega^R) = \Big\{ u : \ u, \ u_{x_i}, \ u_{x_i x_j}, u_{y_l} \in L^2(\Omega^R), \ i,j \in \{1,...,k\}, \ l \in \{1,...,m\},$$

$$u\big|_{\partial\Omega^R} = 0, \ \frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{\partial\Omega_x^R \times \Omega_y^R} = 0 \Big\},$$

з відповідними нормами

$$||u||^2_{V_0^{1,0}(\Omega^R)} = \int\limits_{\Omega^R} \left(\sum_{i=1}^{k} u^2_{x_i} + u^2 \right) dz,$$

$$||u||^2_{V_0^{2,1}(\Omega^R)} = \int\limits_{\Omega^R} \left(\sum_{i=1}^{k} u^2_{x_i} + u^2 + \sum_{i,j=1}^{k} u^2_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{m} u^2_{y_i} \right) dz;$$

$$V^{1,0}_{0,loc}(\overline{\Omega}) = \Big\{ u : \ u, \ u_{x_i} \in L^2_{loc}(\overline{\Omega}), \ i \in \{1, ..., k\}, \ u|_{\partial\Omega_x} = 0 \Big\},$$

$$V^{2,1}_{0,loc}(\overline{\Omega}) = \Big\{ u : \ u, \ u_{x_i}, \ u_{x_i x_j} \in L^2_{loc}(\overline{\Omega}), \ i, j \in \{1, ..., k\}, \ u_{y_l} \in L^2_{loc}(\overline{\Omega}), \ l \in \{1, ..., m\},$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \ \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega_x \times \partial\Omega_y} = 0 \Big\},$$

$$V_0^{2,1}(\Omega) = \Big\{ u : \ u, \ u_{x_i}, \ u_{x_i x_j}, u_{y_l} \in L^2(\Omega), \ i, j \in \{1, ..., k\}, \ l \in \{1, ..., m\},$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \ \frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{\partial\Omega_x \times \Omega_y} = 0 \Big\},$$

$$H^{i,j}(\Omega^R) = \big\{ u : \ u \in L^2(\Omega^R_y; H^i(\Omega^R_x)) \cap L^2(\Omega^R_x; H^j(\Omega^R_y)), \ i, j \in \mathbb{N} \big\},$$

$$W_0(\Omega^R) = V_0^{2,1}(\Omega^R) \cap H^{1,2}(\Omega^R) \cap L^{2p-2}(\Omega^R).$$

Припустимо виконання таких умов:

(A): a^{sl}_{ij}, a^{sl}_{ijt}, a^{sl}_{ijtt}, a_{ij}, a_{ijt}, a_{ijtt}, a_0, $a_{0t} \in L^\infty(Q_T)$, $D^4_x a^{sl}_{ij}(\cdot, 0)$, $D^2_x a_{ij}(\cdot, 0)$, $a_0(\cdot, 0) \in L^\infty(\Omega)$, де $D^\alpha_x = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_k^{\alpha_k}}$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_k$,

$$A_0 \sum_{i,j=1}^{k} |\xi_{ij}|^2 \leqslant \sum_{i,j,s,l=i}^{k} a^{sl}_{ij}(z,t) \xi_{ij} \xi_{sl}, \quad A_0 > 0,$$

для майже всіх $(z,t) \in Q_T$ і всіх $\xi_{ij} \in \mathbb{R}$ таких, що $\xi_{ij} = \xi_{ji}$,

$$a^{sl}_{ij}(z,t) = a^{ij}_{sl}(z,t), \quad a_{ij}(z,t) = a_{ji}(z,t) \quad \text{майже для всіх} \quad (z,t) \in Q_T;$$

(B): Функція $b : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ і її похідна b_ξ вимірні в Ω для всіх $\xi \in \mathbb{R}$; $b(z, \cdot)$ неперервна на $\mathbb{R}$ майже для всіх $z \in \Omega$; $b_\xi(z, \cdot)$ неперервна на $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ майже для всіх $z \in \Omega$; для всіх ξ, $\widetilde{\xi} \in \mathbb{R}$ і майже всіх $z \in \Omega$ виконуються такі нерівності:

$$(b(z,\xi) - b(z,\widetilde{\xi}))(\xi - \widetilde{\xi}) \geqslant b_0 |\xi - \widetilde{\xi}|^p,$$

де $b_0 = 0$ при $p \in (1, 2]$ і $b_0 > 0$ при $p > 2$,

$$|b(z,\xi)| \leqslant b^0 |\xi|^{p-1};$$

$$b_{ij},\ b_{ijt} \in L^{\infty}(Q_T),\ D_x^2 b_{ij}(\cdot,0) \in L^{\infty}(\Omega),\ i,j \in \{1,...,k\},$$

$$\sum_{i,j=1}^{k} b_{ij}(z,t)\xi_i\xi_j \geqslant B_0 \sum_{i=1}^{k} |\xi_i|^2, B_0 > 0$$

для всіх $\xi \in \mathbb{R}^k$ і майже всіх $(z,t) \in Q_T$;

(C): $c_{ij},\ c_{ijt},\ c_{ijtt} \in L^{\infty}(Q_T),\ D_y^2 c_{ij}(\cdot,0) \in L^{\infty}(\Omega)$, де $D_y^{\beta} = \dfrac{\partial^{|\beta|}}{\partial y_1^{\beta_1}...\partial y_m^{\beta_m}}$, $|\beta| = \beta_1 + ... + \beta_m$,

$$C_0 \sum_{i=1}^{m} |\xi_i|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{m} c_{ij}(z,t)\xi_i\xi_j, \quad C_0 > 0$$

для всіх $\xi \in \mathbb{R}^m$ і майже всіх $(z,t) \in Q_T$, $c_{ij}(z,t) = c_{ji}(z,t),\ i,j \in \{1,...,m\}$.

Означення 1. *Функцію $u \in L^2((0,T);V^{2,1}_{0,loc}(\overline{\Omega}))$ таку, що $u_t \in L^2((0,T);V^{1,0}_{0,loc}(\overline{\Omega}))\cap$ $\cap L^p((0,T);L^p_{loc}(\overline{\Omega}))$, $u_{tt} \in L^2((0,T);L^2_{loc}(\overline{\Omega}))$ і и задовольняє початкові умови (2) і рівність*

$$\int\limits_{Q_\tau}\Big[u_{tt}v + \sum_{i,j,s,l=1}^{k} a_{ij}^{sl}(z,t)u_{x_ix_j}v_{x_sx_l} + \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t)u_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i,j=1}^{k} b_{ij}(z,t)u_{tx_i}v_{x_j} +$$
$$+\sum_{i,j=1}^{m} c_{ij}(z,t)u_{y_i}v_{y_j} + a_0(z,t)uv + b(z,u_t)v - \sum_{i,j=1}^{k} f_{ij}(z,t)v_{x_ix_j} - \sum_{i=1}^{k} f_i(z,t)v_{x_i} -$$
$$-f_0(z,t)v - \sum_{i=1}^{m} g_i(z,t)v_{y_i}\Big]dzdt = 0 \tag{4}$$

для довільних $\tau \in (0,T]$ і функцій $v \in L^2((0,T);V_0^{2,1}(\Omega)) \cap L^p((0,T);L^p(\Omega))$, які мають обмежений носій в Q_T, називаємо узагальненим розв'язком задачі (1)-(3).

Розглянемо спочатку задачу в обмеженій області Q_T^R для рівняння

$$A(u) = \sum_{i,j=1}^{k} (f_{ij}^R(z,t))_{x_ix_j} - \sum_{i=1}^{k}(f_i^R(z,t))_{x_i} + f_0^R(z,t) - \sum_{i=1}^{m}(g_i^R(z,t))_{y_i} \tag{5}$$

з початковими умовами

$$u(z,0) = u_0^R(z), \quad u_t(z,0) = u_1^R(z) \tag{6}$$

і крайовими умовами

$$u\big|_{\partial\Omega^R\times(0,T)} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega_x^R\times\Omega_y^R\times(0,T)} = 0, \tag{7}$$

де ν – зовнішня нормаль до поверхні $\partial\Omega_x^R \times \Omega_y^R \times (0,T)$.

Накладемо на вільний член умову

(F): $f_{ij}^R,\ f_{ijt}^R,\ f_{ijtt}^R,\ f_i^R,\ f_{it}^R,\ g_l^R,\ g_{lt}^R,\ g_{ltt}^R,\ f_0^R,\ f_{0t}^R \in L^2(Q_T^R)$, $(f_{ij}^R(\cdot,0))_{x_ix_j},\ (f_i^R(\cdot,0))_{x_i},\ (g_l^R(\cdot,0))_{y_l} \in L^2(\Omega^R),\ l \in \{1,...,m\},\ i,j \in \{1,...,k\}$.

Означення 2. *Функцію* $u \in L^2((0,T);V_0^{2,1}(\Omega^R))$ *таку, що* $u_t \in L^2((0,T);V_0^{1,0}(\Omega^R)) \cap$ $\cap L^p((0,T);L^p(\Omega^R))$, $u_{tt} \in L^2((0,T);L^2(\Omega^R))$ *і* u *задовольняє початкові умови (6) і рівність*

$$\int\limits_{Q_\tau^R} \Big[u_{tt}v + \sum_{i,j,s,l=1}^{k} a_{ij}^{sl}(z,t)u_{x_ix_j}v_{x_sx_l} + \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t)u_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i,j=1}^{k} b_{ij}(z,t)u_{tx_i}v_{x_j} +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{m} c_{ij}(z,t)u_{y_i}v_{y_j} + a_0(z,t)uv + b(z,u_t)v - \sum_{i,j=1}^{k} f_{ij}^R(z,t)v_{x_ix_j} - \sum_{i=1}^{k} f_i^R(z,t)v_{x_i} -$$

$$-f_0^R(z,t)v - \sum_{i=1}^{m} g_i^R(z,t)v_{y_i} \Big] dzdt = 0 \qquad (8)$$

для довільних $\tau \in (0,T]$ *і* $v \in L^2((0,T);V_0^{2,1}(\Omega^R)) \cap L^p((0,T);L^p(\Omega^R))$, *називаємо узагальненим розв'язком задачі (5)-(7).*

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* (A), (B), (C), (F) *і* $u_0^R \in V_0^{2,1}(\Omega^R) \cap$ $\cap H^{4,2}(\Omega^R)$, $u_1^R \in V_0^{1,0}(\Omega^R) \cap L^{2p-2}(\Omega^R) \cap H^{2,2}(\Omega^R)$. *Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (5)-(7).*

Доведення. Методом Фаедо-Гальоркіна побудуємо наближений розв'язок. Оскільки простір $W_0(\Omega^R)$ – сепарабельний банахів, то в ньому існує така зліченна множина $\{\varphi_h\}$, що будь-яка скінченна кількість елементів цієї множини лінійно незалежна і замикання її лінійної оболонки в $W_0(\Omega^R)$ збігається з цим простором. Можемо прийняти, що $\{\varphi_h\}$ ортонормована в $L^2(\Omega^R)$.

Розглянемо функції

$$u^N(z,t) = \sum_{h=1}^{N} c_h^N(t)\varphi_h(z), \quad N = 1,2,...,$$

де $c_1^N, c_2^N, ..., c_N^N$ – розв'язки відповідних задач Коші

$$\int\limits_{\Omega^R} \Big[u_{tt}^N\varphi_h + \sum_{i,j,s,l=1}^{k} a_{ij}^{sl}(z,t)u_{x_ix_j}^N(\varphi_h)_{x_sx_l} + \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t)u_{x_i}^N(\varphi_h)_{x_j} + a_0(z,t)u^N\varphi_h +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{k} b_{ij}(z,t)u_{tx_i}^N(\varphi_h)_{x_j} + \sum_{i,j=1}^{m} c_{ij}(z,t)u_{y_i}^N(\varphi_h)_{y_j} + b(z,u_t^N)u_t^N\varphi_h \Big] dz =$$

$$= \int\limits_{\Omega^R} \Big[\sum_{i,j=1}^{k} f_{ij}^R(\varphi_h)_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{k} f_i^R(\varphi_h)_{x_i} + f_0^R\varphi_h + \sum_{i=1}^{m} g_i^R(\varphi_h)_{y_i} \Big] dz, \quad t \in [0,T], \qquad (9)$$

$$c_h^N(0) = u_{0,h}^{R,N}, \quad c_{ht}^N(0) = u_{1,h}^{R,N}, \quad h = 1,...,N, \qquad (10)$$

де

$$u_0^N(z) = \sum_{h=1}^{N} u_{0,h}^{R,N}\varphi_h(z), \quad \|u_0^{R,N} - u_0^R\|_{V_0^{2,1}(\Omega^R)\cap H^{4,2}(\Omega^R)} \to 0,$$

$$u_1^N(z) = \sum_{h=1}^{N} u_{1,h}^{R,N} \varphi_h(z), \quad \|u_1^{R,N} - u_1^R\|_{V_0^{1,0}(\Omega^R)\cap L^{2p-2}(\Omega^R)\cap H^{2,2}(\Omega^R)} \to 0 \ \text{ при } \ N \to \infty.$$

На підставі теореми Каратеодорі [26, с. 54] існує розв'язок задачі (9), (10), який має абсолютно неперервну похідну на проміжку $[0, t_m]$. З оцінок, одержаних нижче, випливає, що $t_m = T$.

Домножимо (9) на $c_{ht}^N(t)$, підсумуємо за h від 1 до N і проінтегруємо за t від 0 до τ, де $\tau \in (0, T]$

$$\int\limits_{Q_\tau^R} \Bigg[u_{tt}^N u_t^N + \sum_{i,j,s,l=1}^{k} a_{ij}^{sl}(z,t) u_{x_i x_j}^N u_{t x_s x_l}^N + \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t) u_{x_i}^N u_{t x_j}^N + a_0(z,t) u^N u_t^N +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} b_{ij}(z,t) u_{t x_i}^N u_{t x_j}^N + \sum_{i,j=1}^{m} c_{ij}(z,t) u_{y_i}^N u_{t y_j}^N + b(z, u_t^N) u_t^N \Bigg] dz dt = \int\limits_{Q_\tau^R} \Bigg[\sum_{i,j=1}^{k} f_{ij}^R u_{t x_i x_j}^N +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} f_i^R u_{t x_i}^N + f_0^R u_t^N + \sum_{i=1}^{m} g_i^R u_{t y_i}^N \Bigg] dz dt. \tag{11}$$

На підставі умов (A), (B), (C), (F) з останньої рівності легко отримати оцінку

$$||u_t^N||_{V_0^{1,0}(Q_T^R)\cap L^p(Q_T^R)} \leqslant K_1, \ ||u^N||_{V_0^{2,1}(Q_T^R)} \leqslant K_1, \tag{12}$$

де K_1 – додатна константа, яка не залежить від N.

Диференціюючи за t рівність (9) і враховуючи умови теореми (A), (B), (C), (F), можемо переконатися в правильності оцінок

$$||u_{tt}^N||_{V_0^{1,0}(Q_T^R)} \leqslant K_2, \ ||u_t^N||_{V_0^{2,1}(Q_T^R)\cap L^p(Q_T^R)} \leqslant K_2, \ ||u^N||_{V_0^{2,1}(Q_T^R)} \leqslant K_2, \ K_2 > 0. \tag{13}$$

Оскільки $u_t^N \in L^p(Q_T^R)$, то

$$\int\limits_{Q_T^R} |b(z, u_t^N)|^{p'} dz dt \leqslant |b^0|^{p'} \int\limits_{Q_T^R} |u_t^N|^p dz dt \leqslant K_3, \quad K_3 > 0.$$

На підставі (13) з послідовності $\{u^N\}$ можна вибрати таку підпослідовність $\{u^{N_k}\}$, що

$$u_{tt}^{N_k} \to u_{tt} \ \text{ слабко в } \ L^\infty((0,T); V_0^{1,0}(\Omega^R)),$$

$$u_t^{N_k} \to u_t \ \text{ слабко в } \ L^\infty((0,T); L^p(\Omega^R) \cap V_0^{2,1}(\Omega^R)),$$

$$b(z, u_t^{N_k}) \to \chi \ \text{ слабко в } \ L^{p'}(Q_T^R) \ \text{ при } \ N_k \to \infty. \tag{14}$$

Доведемо, що $b(z, u_t) = \chi$. З оцінки (14) випливає, що $u_{tt}^N \in L^2((0,T); L^2(\Omega^R))$, $u_t^N \in L^2((0,T); H_0^1(\Omega^R))$, тому u_t^N належить обмеженій множині в $H^1(Q_T^R)$. Але $H^1(Q_T^R) \subset L^2(Q_T^R)$ компактно. Не зменшуючи загальності, позначимо підпослідовність $u_t^{N_k}$, вибрану з підпослідовності u_t^N таку, що $u_t^{N_k} \to u_t$ сильно в $L^2(Q_T^R)$ і $u_t^{N_k} \to u_t$

майже всюди в Q_T^R. Оскільки функція $b(z,\cdot)$ – неперервна, то $b(\cdot,u_t^{N_k})\to b(\cdot,u_t)$ слабко в $L^{p'}(Q_T^R)$, але на підставі (14) робимо висновок, що

$$b(z,u_t)=\chi. \tag{15}$$

Залишилося показати, що виконуються початкові умови. З оцінок одержаних раніше і леми 1.2 [27, с. 20] випливає, що

$$u^{N_k}(\cdot,0)\to u(\cdot,0)\ \text{ слабко в }\ L^2(\Omega^R),$$

$$\text{але }\ u^{N_k}(\cdot,0)=u_0^{R,N_k}(\cdot)\to u_0^R(\cdot)\ \text{ в }\ V_0^{2,1}(\Omega^R),$$

тому $u(z,0)=u_0^R(z)$.

Оскільки $u_{tt}^{N_k}\to u_{tt}$ слабко в $L^2(Q_T^R)$, з леми 1.2 [27, с. 20] випливає, що

$$u_t^{N_k}(z,0)\to u_t(z,t)|_{t=0}=u_t(z,0),\ z\in\Omega^R,$$

але відомо, що $u_t^{N_k}(\cdot,0)=u_1^{R,N_k}(\cdot)\to u_1^R(\cdot)$ в $V_0^{1,0}(\Omega^R)$, тому $u_t(z,0)=u_1^R(z)$. Отож, виконуються початкові умови (6). Отже, розв'язок існує.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* (A), (B), (C), $p\in(1,2]$, $u_0\in V_{0,loc}^{2,1}(\overline{\Omega})$, $u_1\in L_{loc}^2(\overline{\Omega})$, $f_{ij},\ f_{ijt},\ f_i,\ f_0,\ g_l,\ g_{lt}\in L^2((0,T);L_{loc}^2(\overline{\Omega}))$, $i,j\in\{1,...,k\}$, $l\in\{1,...,m\}$ *і нерівність*

$$\int\limits_{\Omega_0^R}\left[|u_1(z)|^2+\sum_{i,j=1}^k|u_{0x_ix_j}(z)|^2+\sum_{i=1}^k|u_{0x_i}(z)|^2+|u_0(z)|^2+\sum_{i=1}^m|u_{0y_i}(z)|^2\right]dz+$$

$$+\sup_{t\in[0,T]}\int\limits_{\Omega_t^R}\left[\sum_{i,j=1}^k|f_{ij}(z,t)|^2+\sum_{i=1}^m|g_i(z,t)|^2\right]dz+\int\limits_{Q_T^R}\left[\sum_{i,j=1}^k|f_{ij}(z,t)|^2+\sum_{i,j=1}^k|f_{ijt}(z,t)|^2+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^k|f_i(z,t)|^2+\sum_{i=1}^m|g_i(z,t)|^2+\sum_{i=1}^m|g_{it}(z,t)|^2+|f_0(z,t)|^2\right]dzdt\leqslant ae^{bR^2}.$$

для довільного $R>1$, *де* a, b *– деякі додатні сталі. Тоді існує* $T_0\leqslant T$, *що задача (1)-(3) має узагальнений розв'язок у необмеженій області* Q_{T_0}.

Доведення. Розглянемо в області Q_T^R, де R набуває значення 2^h, $h\in\mathbb{N}$ (для спрощення запису цю область позначимо через Q_T^h) допоміжну задачу

$$A(u)=F^{h,h},\quad (z,t)\in Q_T^h,$$

$$u|_{\partial\Omega^h\times(0,T)}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega_x^h\times\Omega_y^h\times(0,T)}=0, \tag{16}$$

$$u(z,0)=u_0^{h,h}(z),\quad u_t(z,0)=u_1^{h,h}(z),\quad z\in\Omega^h,$$

де початкові умови мають такий вигляд $u_0^{h,h}(z) = u_0^h(z)\chi^h(z)$, $u_1^{h,h}(z) = u_1^h(z)\chi^h(z)$ з

$$\chi^h(z) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad |x| < h-1, \quad |y| < h-1, \\ 0 & \text{при} \quad |x| \geqslant h, \quad |y| \geqslant h, \end{cases}$$

і $0 \leqslant \chi^h(z) \leqslant 1,\ z \in \mathbb{R}^n,\ \chi^h \in C^2(\mathbb{R}^n)$, а вільний член

$$F^{h,h}(z,t) = \sum_{i,j=1}^{k} (f_{ij}^{h,h})_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^{k} (f_i^{h,h})_{x_i} + f_0^{h,h} - \sum_{i=1}^{m} (g_i^{h,h})_{y_i},$$

$$f_{ij}^{h,h}(z,t) = \begin{cases} f_{ij}^h(z,t), & (z,t) \in Q_T^h, \\ 0, & (z,t) \in Q_T \setminus Q_T^h, \end{cases} \quad f_i^{h,h}(z,t) = \begin{cases} f_i^h(z,t), & (z,t) \in Q_T^h, \\ 0, & (z,t) \in Q_T \setminus Q_T^h, \end{cases}$$

$$f_0^{h,h}(z,t) = \begin{cases} f_0^h(z,t), & (z,t) \in Q_T^h, \\ 0, & (z,t) \in Q_T \setminus Q_T^h, \end{cases} \quad g_i^{h,h}(z,t) = \begin{cases} g_i^h(z,t), & (z,t) \in Q_T^h, \\ 0, & (z,t) \in Q_T \setminus Q_T^h. \end{cases}$$

Нехай виконуються такі умови:

$f_{ij}^h,\ f_{ijt}^h,\ f_i^h,\ f_0^h,\ g_l^h,\ g_{lt}^h$ вимірні в Q_T і в кожній області Q_T^h задовольняють умову (F);

$$u_1^h \in V_{0,loc}^{2,1}(\overline{\Omega}) \cap H_{loc}^2(\overline{\Omega}),\ h \in \mathbb{N},\ u_1^h \to u_1 \quad \text{в} \quad L_{loc}^2(\overline{\Omega}) \quad \text{при} \quad h \to \infty;$$

$$u_0^h \in V_{0,loc}^{2,1}(\overline{\Omega}) \cap H_{loc}^4(\overline{\Omega}),\ u_0^h \to u_0 \quad \text{в} \quad V_{loc}^{2,1}(\overline{\Omega}) \quad \text{при} \quad h \to \infty;$$

$$f_{ij}^h \to f_{ij} \quad \text{в} \quad L^2((0,T); L_{loc}^2(\overline{\Omega})),\ f_{ijt}^h \to f_{ijt} \quad \text{в} \quad L^2((0,T); L_{loc}^2(\overline{\Omega})),$$

$$f_i^h \to f_i \quad \text{в} \quad L^2((0,T); L_{loc}^2(\overline{\Omega})), f_0^h \to f_0 \quad \text{в} \quad L^2((0,T); L_{loc}^2(\overline{\Omega})),$$

$$g_l^h \to g_l \quad \text{в} \quad L^2((0,T); L_{loc}^2(\overline{\Omega})), g_{lt}^h \to g_{lt} \quad \text{в} \quad L^2((0,T); L_{loc}^2(\overline{\Omega})) \tag{17}$$

при $h \to \infty$, $i,j \in \{1,...,k\}$, $l \in \{1,...,m\}$.

Розглянемо u^α, u^β – розв'язки задачі (16) при $\alpha > h+1$, $\beta > h+1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$. З попередньої теореми випливає, що ця задача має узагальнений розв'язок в сенсі означення 2. Підставимо u^α, u^β в рівність (8), отримані рівності віднімемо і приймемо, що

$$v = u_t^{\alpha\beta} \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t},$$

де $u^{\alpha\beta} = u^\alpha - u^\beta$,

$$\varphi_{R\chi}(x) = (h_{R\chi}(x))^\gamma = \left(\rho\left(\frac{|x|-R}{\chi}\right)\right)^\gamma, \quad \psi_{R\chi}(y) = (\widehat{h}_{R\chi}(y))^{\gamma_1} = \left(\rho\left(\frac{|y|-R}{\chi}\right)\right)^{\gamma_1},$$

$\gamma > 2,\ \gamma_1 > 2,\ \chi > 0,\ 0 \leqslant \rho(\xi) \leqslant 1,\ \xi \in \mathbb{R},\ \rho(\xi) = 1,\ \xi < 0,\ \rho(\xi) = 0,\ \xi \geqslant 1.$

Тоді одержимо рівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau} |u_t^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu\tau} dz + \int\limits_{Q_\tau} \Big[-u_t^{\alpha\beta} u_{tt}^{\alpha\beta} \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} + \mu |u_t^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) \times$$

$$\times \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} + \sum_{i,j,s,l=1}^{k} a_{ij}^{sl}(z,t) u_{x_i x_j}^{\alpha\beta} \Big(u_{txsx_l}^{\alpha\beta} \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} + u_{tx_s}^{\alpha\beta} (\varphi_{R\chi}(x))_{x_l} \times$$

$$\times u_{tx_l}^{\alpha\beta}(\varphi_{R\chi}(x))_{x_s}\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}+u_t^{\alpha\beta}(\varphi_{R\chi}(x))_{x_sx_l}\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}\Big)+\sum_{i,j=1}^{k}a_{ij}(z,t)u_{x_i}^{\alpha\beta}\times$$

$$\times\Big(u_{tx_i}^{\alpha\beta}\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}+u_t^{\alpha\beta}(\varphi_{R\chi}(x))_{x_j}\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}\Big)+a_0(z,t)u^{\alpha\beta}u_t^{\alpha\beta}\varphi_{R\chi}(x)\times$$

$$\times\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}+\sum_{i,j=1}^{k}b_{ij}(z,t)u_{tx_i}^{\alpha\beta}\Big(u_{tx_j}^{\alpha\beta}\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}+u_t^{\alpha\beta}(\varphi_{R\chi}(x))_{x_j}\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}\Big)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{m}c_{ij}(z,t)u_{y_i}^{\alpha\beta}\Big(u_{ty_j}^{\alpha\beta}\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}+u_t^{\alpha\beta}\varphi_{R\chi}(x)(\psi_{R\chi}(y))_{y_j}e^{-\mu t}\Big)+$$

$$+(b(z,u_t^{\alpha})-b(z,u_t^{\beta}))u_t^{\alpha\beta}\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}\Big]dzdt=\int\limits_{\Omega_0}|u_1^{\alpha,\alpha}-u_1^{\beta,\beta}|^2\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)dz+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\Big[\sum_{i,j=1}^{k}(f_{ij}^{\alpha,\alpha}-f_{ij}^{\beta,\beta})\Big(u_{tx_ix_j}^{\alpha\beta}\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}+u_{tx_i}^{\alpha\beta}(\varphi_{R\chi}(x))_{x_j}\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}+$$

$$+u_{tx_j}^{\alpha\beta}(\varphi_{R\chi}(x))_{x_i}\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}+u_t^{\alpha\beta}(\varphi_{R\chi}(x))_{x_ix_j}\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}\Big)+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}(f_i^{\alpha,\alpha}-f_i^{\beta,\beta})\Big(u_{tx_i}^{\alpha\beta}\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}+u_t^{\alpha\beta}(\varphi_{R\chi}(x))_{x_i}\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}\Big)+$$

$$+(f_0^{\alpha,\alpha}-f_0^{\beta,\beta})u_t^{\alpha\beta}\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}+\sum_{i=1}^{m}(g_i^{\alpha,\alpha}-g_i^{\beta,\beta})\Big(u_{ty_i}^{\alpha\beta}\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}+$$

$$+u_t^{\alpha\beta}\varphi_{R\chi}(x)(\psi_{R\chi}(y))_{y_i}e^{-\mu t}\Big)\Big]dzdt,\quad \tau\in(0,T]. \tag{18}$$

Оцінимо доданки цієї рівності. Очевидно,

$$J_1:=-\int\limits_{Q_\tau}u_t^{\alpha\beta}u_{tt}^{\alpha\beta}\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt=-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}|u_t^{\alpha\beta}|^2\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu\tau}dz+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}|u_1^{\alpha,\beta}|^2\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)dz+\frac{\mu}{2}\int\limits_{Q_\tau}|u_t^{\alpha\beta}|^2\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt.$$

На підставі умови (A)

$$J_2:=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j,s,l=1}^{k}a_{ij}^{sl}(z,t)u_{x_ix_j}^{\alpha\beta}u_{tx_sx_l}\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt\geqslant\frac{A_0}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i,j=1}^{k}|u_{x_ix_j}^{\alpha\beta}|^2\varphi_{R\chi}(x)\times$$

$$\times\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu\tau}dx-\frac{A^0+1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i,j=1}^{k}|u_{x_ix_j}^{\alpha\beta}|^2\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)dx-\frac{A_1+1-\mu A_0}{2}\times$$

$$\times \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{k} |u^{\alpha\beta}_{x_i x_j}|^2 \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dxdt;$$

$$J_3 := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j,s,l=1}^{k} a^{sl}_{ij}(z,t)u^{\alpha\beta}_{x_i x_j}u^{\alpha\beta}_t(\varphi_{R\chi}(x))_{x_s x_l}\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{d}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left[\frac{A_2 k^2}{\chi^2}|u^{\alpha\beta}_t|^2[h_{R\chi}(x)]^{\gamma-2} + \frac{1}{\chi^2}\sum_{i,j=1}^{k}|u^{\alpha\beta}_{x_i x_j}|^2[h_{R\chi}(x)]^{\gamma-2}\right]\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt,$$

де $|(h_{R\chi})_{x_i x_j}(x)| \leqslant \frac{d}{\chi^2}$;

$$J_4 := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j,s,l=1}^{k} a^{sl}_{ij}(z,t)u^{\alpha\beta}_{x_i x_j}u^{\alpha\beta}_{tx_s}(\varphi_{R\chi}(x))_{x_l}\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{d}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left[A_2 k\delta\sum_{i=1}^{k}|u^{\alpha\beta}_{tx_i}|^2\varphi_{R\chi}(x) + \frac{1}{\chi^2\delta}\sum_{i,j=1}^{k}|u^{\alpha\beta}_{x_i x_j}|^2[h_{R\chi}(x)]^{\gamma-2}\right]\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt,$$

де $|(h_{R\chi})_{x_i}(x)| \leqslant \frac{d}{\chi}$, $\delta > 0$.
Інтеграл

$$\int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j,s,l=1}^{k} a^{sl}_{ij}(z,t)u^{\alpha\beta}_{x_i x_j}u^{\alpha\beta}_{tx_l}(\varphi_{R\chi}(x))_{x_s}\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt$$

оцінюється аналогічно.
Далі

$$J_5 := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t)u^{\alpha\beta}_{x_i}u^{\alpha\beta}_{tx_j}\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left[A_3\delta\sum_{i=1}^{k}|u^{\alpha\beta}_{tx_i}|^2 + \frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^{k}|u^{\alpha\beta}_{x_i}|^2\right]\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt;$$

$$J_6 := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t)u^{\alpha\beta}_{x_i}u^{\alpha\beta}_t(\varphi_{R\chi}(x))_{x_j}\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{d}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left[\frac{A_3 k}{\chi^2}|u^{\alpha\beta}_t|^2[h_{R\chi}(x)]^{\gamma-2} + \sum_{i=1}^{k}|u^{\alpha\beta}_{x_i}|^2\varphi_{R\chi}(x)\right]\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt;$$

$$J_7 := \int\limits_{Q_\tau} a_0(z,t)u^{\alpha\beta}u^{\alpha\beta}_t\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{A_4}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left[|u^{\alpha\beta}|^2 + |u^{\alpha\beta}_t|^2\right]\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt.$$

З умови (B) маємо

$$J_8 := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{k} b_{ij}(z,t) u_{tx_i}^{\alpha\beta} u_{tx_j}^{\alpha\beta} \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dzdt \geqslant$$

$$\geqslant B_0 \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{k} |u_{tx_i}^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dzdt;$$

$$J_9 := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{k} b_{ij}(z,t) u_{tx_i}^{\alpha\beta} u_t^{\alpha\beta} (\varphi_{R\chi}(x))_{x_j} \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dzdt \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{d}{2} \int\limits_{Q_\tau} \left[\delta \sum_{i=1}^{k} |u_{tx_i}^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) + \frac{B_1 k}{\delta \chi^2} |u_t^{\alpha\beta}|^2 [h_{R\chi}(x)]^{\gamma-2} \right] \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t};$$

$$J_{10} := \int\limits_{Q_\tau} (b(z, u_t^\alpha) - b(z, u_t^\beta)) u_t^{\alpha\beta} \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dzdt \geqslant 0.$$

З умови (C) одержимо

$$J_{11} := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{m} c_{ij}(z,t) u_{y_i}^{\alpha\beta} u_{ty_j}^{\alpha\beta} \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dzdt \geqslant \frac{C_0}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^{m} |u_{y_i}^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) \times$$

$$\times e^{-\mu\tau} dz - \frac{C^0}{2} \int\limits_{\Omega_0} \sum_{i=1}^{m} |u_{y_i}^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) dz + \frac{\mu C_0 - C_1}{2} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{m} |u_{y_i}^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dzdt;$$

$$J_{12} := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{m} c_{ij}(z,t) u_{y_i}^{\alpha\beta} u_t^{\alpha\beta} \varphi_{R\chi}(x) (\psi_{R\chi}(y))_{y_j} e^{-\mu t} dzdt \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{d}{2} \int\limits_{Q_\tau} \left[\frac{1}{\chi^2} \sum_{i=1}^{m} |u_{y_i}^{\alpha\beta}|^2 [\widehat{h}_{R\chi}(y)]^{\gamma_1 - 2} + C_2 m |u_t^{\alpha\beta}|^2 \psi_{R\chi}(y) \right] \varphi_{R\chi}(x) e^{-\mu t} dzdt,$$

$$|(h_{R\chi})_{y_i}(y)| \leqslant \frac{h}{\chi}.$$

Крім того,

$$J_{13} := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{k} (f_{ij}^{\alpha,\alpha} - f_{ij}^{\beta,\beta}) u_{tx_i x_j}^{\alpha\beta} \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dzdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\delta} \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i,j=1}^{k} |f_{ij}^{\alpha,\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu\tau} dz + \frac{\delta}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i,j=1}^{k} |u_{x_i x_j}^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x) \psi_{R\chi}(y) e^{-\mu\tau} dz +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i,j=1}^{k}|f_{ij}^{\alpha,\beta}|^2\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)dz+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i,j=1}^{k}|u_{x_ix_j}^{\alpha\beta}|^2\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)dz+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{k}\left(\frac{\mu}{\delta}|f_{ij}^{\alpha,\beta}|^2+|f_{ijt}^{\alpha,\beta}|^2\right)\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt+\frac{(\delta\mu+1)}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{k}|u_{x_ix_j}^{\alpha\beta}|^2\times$$

$$\times\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt,$$

де $f_{ij}^{\alpha,\beta}=f_{ij}^{\alpha,\alpha}-f_{ij}^{\beta,\beta}$;

$$J_{14}:=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{k}(f_{ij}^{\alpha,\alpha}-f_{ij}^{\beta,\beta})u_{tx_i}^{\alpha\beta}(\varphi_{R\chi}(x))_{x_j}\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt\leqslant\frac{d}{2\delta}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{k}|f_{ij}^{\alpha,\beta}|^2\times$$

$$\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt+\frac{d\delta}{2\chi^2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{k}|u_{tx_i}^{\alpha\beta}|^2[h_{R\chi}(x)]^{\gamma-2}\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt;$$

$$J_{15}:=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{k}(f_{ij}^{\alpha,\alpha}-f_{ij}^{\beta,\beta})u_{t}^{\alpha\beta}(\varphi_{R\chi}(x))_{x_ix_j}\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{d}{2\chi^2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{k}|f_{ij}^{\alpha,\beta}|^2\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt+\frac{dk^2}{\chi^2}\int\limits_{Q_\tau}|u_{t}^{\alpha\beta}|^2[h_{R\chi}(x)]^{\gamma-4}\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt;$$

$$J_{16}:=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{k}(f_{i}^{\alpha,\alpha}-f_{i}^{\beta,\beta})u_{tx_i}^{\alpha\beta}\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\delta}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{k}|f_{i}^{\alpha,\beta}|^2\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt+\frac{\delta}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{k}|u_{tx_i}^{\alpha\beta}|^2\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt;$$

$$J_{17}:=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{k}(f_{i}^{\alpha,\alpha}-f_{i}^{\beta,\beta})u_{t}^{\alpha\beta}(\varphi_{R\chi}(x))_{x_i}\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{d}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{k}|f_{i}^{\alpha,\beta}|^2\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt+\frac{d}{2\chi^2}\int\limits_{Q_\tau}|u_{t}^{\alpha\beta}|^2[h_{R\chi}(x)]^{\gamma-2}\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt;$$

$$J_{18}:=\int\limits_{Q_\tau}(f_{0}^{\alpha,\alpha}-f_{0}^{\beta,\beta})u_{t}^{\alpha\beta}\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}|f_{0}^{\alpha,\beta}|^2\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt+\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}|u_{t}^{\alpha\beta}|^2\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt;$$

$$J_{19} := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{m} (g_i^{\alpha,\alpha} - g_i^{\beta,\beta}) u^{\alpha\beta}_{ty_i} \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dzdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\delta}\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^{m} |g_i^{\alpha,\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) e^{-\mu\tau} dz + \frac{\delta}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^{m} |u^{\alpha\beta}_{y_i}|^2 \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) e^{-\mu\tau} dz +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} \sum_{i=1}^{m} |g_i^{\alpha,\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) dz + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} \sum_{i=1}^{m} |u^{\alpha\beta}_{0y_i}|^2 \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) dz +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{m} (\mu|g_i^{\alpha,\beta}|^2 + |g_{it}^{\alpha,\beta}|^2) \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dzdt + \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{m} |u^{\alpha\beta}_{y_i}|^2 \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dzdt;$$

$$J_{20} := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{m} (g_i^{\alpha,\alpha} - g_i^{\beta,\beta}) u^{\alpha\beta}_{t} \varphi_{R\chi}(x)(\psi_{R\chi}(y))_{y_i} e^{-\mu t} dzdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{d}{2}\int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{m} |g_i^{\alpha,\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dzdt + \frac{d}{2\chi^2}\int\limits_{Q_\tau} |u_t^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x)[\widehat{h}_{R\chi}(y)]^{\gamma-2} e^{-\mu t} dzdt.$$

Подібно як в лемі [28] легко довести оцінку

$$\int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{k} |u_{x_i}|^2 \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dzdt \leqslant \delta_1 \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{k} u^2_{x_i x_j} \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dzdt +$$

$$+\frac{k}{\delta_1}\int\limits_{Q_\tau} u^2 \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dzdt + \frac{d^2 k}{\chi^2}\int\limits_{Q_\tau} u^2 [h_{R\chi}(x)]^{\gamma-2}\psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dzdt, \quad \delta_1 > 0.$$

Приймемо $\delta_1 = 1$. Крім того,

$$\int\limits_{Q_\tau} |u(z,t)|^2 \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dzdt \leqslant T^2 \int\limits_{Q_\tau} u_t^2 \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dzdt +$$

$$+2T \int\limits_{\Omega_0} u_0^2 \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) dz.$$

Аналогічно отримуємо таку оцінку:

$$\int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{k} |u^{\alpha\beta}_{x_i}|^2 \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dzdt \leqslant \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{k} |u^{\alpha\beta}_{x_i x_j}|^2 \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dzdt +$$

$$+kT^2 \int\limits_{Q_\tau} |u_t^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) e^{-\mu t} dzdt + \frac{d^2 k T^2}{\chi^2}\int\limits_{Q_\tau} |u_t^{\alpha\beta}|^2 [h_{R\chi}(x)]^{\gamma-2}\psi_{R\chi} e^{-\mu t} dzdt +$$

$$+2kT \int\limits_{\Omega_0} |u_0^{\alpha\beta}|^2 \varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y) dz + \frac{2kd^2 T}{\chi^2}\int\limits_{\Omega_0} |u_0^{\alpha\beta}|^2 [h_{R\chi}(x)]^{\gamma-2}\psi_{R\chi}(y) dz.$$

Використовуючи одержані оцінки, з (18) маємо

$$
\begin{gathered}
\int\limits_{\Omega_\tau}\Bigg[|u_t^{\alpha\beta}|^2+(A_0-\delta)\sum_{i,j=1}^{k}|u_{x_ix_j}^{\alpha\beta}|^2+(C_0-\delta)\sum_{i=1}^{m}|u_{y_i}^{\alpha\beta}|^2\Bigg]\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu\tau}dz+\\
+\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[|u_t^{\alpha\beta}|^2\left(\mu-A_4-A_4\tau^2-\frac{k\tau^2}{\delta}-dk\tau^2-dmC_2-1\right)+\\
+\sum_{i,j=1}^{k}|u_{x_ix_j}^{\alpha\beta}|^2\left(\mu A_0-A_1-\frac{1}{\delta}-d-\mu\delta-1\right)+\sum_{i=1}^{m}|u_{y_i}^{\alpha\beta}|^2\left(\mu C_0-C_1-2\right)+\\
+\sum_{i=1}^{k}|u_{tx_i}^{\alpha\beta}|^2\left(2B_0-2dkA_2\delta-A_3\delta-d\delta-\delta-\frac{2d\delta}{\chi^2}\right)\Bigg]\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt\leqslant\\
\leqslant\int\limits_{\Omega_0}\Bigg[\left(2TA_4+\frac{2kT}{\delta}+2kTd\right)|u_0^{\alpha\beta}|^2+|u_1^{\alpha\beta}|^2+\sum_{i,j=1}^{k}|u_{0x_ix_j}^{\alpha\beta}|^2(A^0+1)+\sum_{i=1}^{m}|u_{0y_i}^{\alpha\beta}|^2(C^0+1)\Bigg]\times\\
\times\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)dz+\int\limits_{\Omega_0}\left(\frac{2d^2kT}{\chi^2\delta}+\frac{2d^3kT}{\chi^2}\right)|u_0^{\alpha\beta}|^2[h_{R\chi}(x)]^{\gamma-2}\psi_{R\chi}(y)dz+\\
+\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[\sum_{i,j=1}^{k}|u_{x_ix_j}^{\alpha\beta}|^2[h_{R\chi}(x)]^{\gamma-2}\psi_{R\chi}(y)\left(\frac{2d}{\delta\chi^2}+\frac{d}{\chi^2}\right)+\sum_{i=1}^{m}|u_{y_i}^{\alpha\beta}|^2[\widehat{h}_{R\chi}(y)]^{\gamma-2}\varphi_{R\chi}(x)\frac{d}{\chi^2}+\\
+|u_t^{\alpha\beta}|^2\left(\frac{d^2k\tau^2}{\chi^2\delta}+\frac{d^3k\tau^2}{\chi^2}+\frac{A_1k^2d}{\chi^2}+\frac{B_1kd}{\delta\chi^2}+\frac{dA_3k}{\chi^2}\right)[h_{R\chi}(x)]^{\gamma-2}\psi_{R\chi}(y)+\\
+|u_t^{\alpha\beta}|^2[\widehat{h}_{R\chi}(y)]^{\gamma-2}\varphi_{R\chi}(x)\frac{d}{\chi^2}\Bigg]e^{-\mu t}dzdt+\int\limits_{\Omega_0}\Bigg[\sum_{i,j=1}^{k}|f_{ij}^{\alpha\beta}|^2+\sum_{i=1}^{m}|g_i^{\alpha\beta}|^2\Bigg]\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)dz+\\
+\int\limits_{\Omega_\tau}\Bigg[\frac{1}{\delta}\sum_{i,j=1}^{k}|f_{ij}^{\alpha\beta}|^2+\sum_{i=1}^{m}|g_i^{\alpha\beta}|^2\Bigg]\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu\tau}dz+\\
+\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[\frac{\mu}{\delta}\sum_{i,j=1}^{k}|f_{ij}^{\alpha\beta}|^2+\sum_{i,j=1}^{k}|f_{ijt}^{\alpha\beta}|^2+\frac{2d}{\delta}\sum_{i,j=1}^{k}|f_{ij}^{\alpha\beta}|^2+\frac{d}{\chi^2}\sum_{i,j=1}^{k}|f_{ij}^{\alpha\beta}|^2+\frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^{k}|f_i^{\alpha\beta}|^2+\\
+d\sum_{i=1}^{k}|f_i^{\alpha\beta}|^2+|f_0^{\alpha\beta}|^2+d\sum_{i=1}^{m}|g_i^{\alpha\beta}|^2+\mu\sum_{i=1}^{m}|g_i^{\alpha\beta}|^2+\sum_{i=1}^{m}|g_{it}^{\alpha\beta}|^2\Bigg]\varphi_{R\chi}(x)\psi_{R\chi}(y)e^{-\mu t}dzdt.
\end{gathered}
$$

Нехай $R=R_0$, $R_0+\chi=R_1$, $\mu=\mu_0+\mu_1$, де $R_0=2^h$, $R_1=2^{h-1}$, $\chi=2^h$, $h\in\mathbb{N}$,

$$
\mu_1=\max\left\{A_4(1+T^2)+dkT^2+dmC_2+1+\frac{kT^2}{\delta};\quad\frac{(A_1+1)\delta+1}{\delta(A_0+\delta)};\quad\frac{C_1+2}{C_0}\right\},
$$

$2B_0 - (2dkA_2 + A_3 + d + \frac{2d}{\chi^2} + 1)\delta \leqslant B_0$. Тоді з останньої нерівності одержимо

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega_\tau^{R_0}} \Big[|u_t^{\alpha\beta}|^2 + \sum_{i,j=1}^{k} |u_{x_ix_j}^{\alpha\beta}|^2 + \sum_{i=1}^{m} |u_{y_i}^{\alpha\beta}|^2\Big] e^{-\mu_0\tau} dz + \int\limits_{Q_\tau^{R_0}} \Big[\mu_0 |u_t^{\alpha\beta}|^2 + \mu_0 \sum_{i,j=1}^{k} |u_{x_ix_j}^{\alpha\beta}|^2 + \\ + \sum_{i=1}^{k} |u_{tx_i}^{\alpha\beta}|^2 + \mu_0 \sum_{i=1}^{m} |u_{y_i}^{\alpha\beta}|^2\Big] e^{-\mu_0 t} dzdt \leqslant \frac{M_1}{(R_1 - R_0)^2} \int\limits_{Q_\tau^{R_1}} \Big[\sum_{i,j=1}^{k} |u_{x_ix_j}^{\alpha\beta}|^2 + |u_t^{\alpha\beta}|^2 + \\ + \sum_{i=1}^{m} |u_{y_i}^{\alpha\beta}|^2\Big] e^{-\mu_0 t} dzdt + M_2\mu_0,\end{aligned} \tag{19}$$

$M_1 > 0$, M_2 – константа, яка обмежує інтеграли від початкових функцій і вільного члена. З умови (17) випливає, що M_2 можемо зробити як завгодно малою.

Отже, виконується і така нерівність:

$$\begin{aligned}\int\limits_{Q_\tau^{R_0}} \Big[|u_t^{h+3,h+2}|^2 + \sum_{i,j=1}^{k} |u_{x_ix_j}^{h+3,h+2}|^2 + \sum_{i=1}^{m} |u_{y_i}^{h+3,h+2}|^2\Big] e^{-\mu_0 t} dzdt \leqslant \\ \leqslant \frac{M_1}{\mu_0\chi^2} \int\limits_{Q_\tau^{R_1}} \Big[|u_t^{h+3,h+2}|^2 + \sum_{i,j=1}^{k} |u_{x_ix_j}^{h+3,h+2}|^2 + \sum_{i=1}^{m} |u_{y_i}^{h+3,h+2}|^2\Big] e^{-\mu_0 t} dzdt + M_2.\end{aligned}$$

Поділимо відрізок $[R_0, R_0 + \chi]$ на q частин, де $q = \lambda 2^{2h}$, $\frac{\lambda^2 M_1 2^{2h}}{\mu_0} \leqslant e^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{N}$. Одержимо

$$\begin{aligned}\int\limits_{Q_\tau^{R_0}} \Big[|u_t^{h+3,h+2}|^2 + \sum_{i,j=1}^{k} |u_{x_ix_j}^{h+3,h+2}|^2 + \sum_{i=1}^{m} |u_{y_i}^{h+3,h+2}|^2\Big] dzdt \leqslant e^{-q+\mu_0\tau} \times \\ \times \int\limits_{Q_\tau^{R_1}} \Big[|u_t^{h+3,h+2}|^2 + \sum_{i,j=1}^{k} |u_{x_ix_j}^{h+3,h+2}|^2 + \sum_{i=1}^{m} |u_{y_i}^{h+3,h+2}|^2\Big] dzdt + M_2 \sum_{i=0}^{q-1} e^{-i+\mu_0\tau}.\end{aligned} \tag{20}$$

Оцінимо елементи послідовності $\{u^h\}$. Враховуючи означення узагальненого розв'язку, для u^h одержимо нерівність

$$\begin{aligned}\int\limits_{Q_\tau^{R_0}} \Big[|u_t^h|^2 + \sum_{i,j=1}^{k} |u_{x_ix_j}^h|^2 + \sum_{i=1}^{m} |u_{y_i}^h|^2 + \sum_{i=1}^{k} |u_{tx_i}^h|^2\Big] dzdt \leqslant \\ \leqslant M_3 \Bigg(\int\limits_{\Omega_0^{R_0}} \Big[|u_1^{h,h}(z)|^2 + \sum_{i,j=1}^{k} |u_{0x_ix_j}^{h,h}(z)|^2 + \sum_{i=1}^{k} |u_{0x_i}^{h,h}(z)|^2 + |u_0^{h,h}(z)|^2 + \\ + \sum_{i=1}^{m} |u_{0y_i}^{h,h}(z)|^2\Big] dz + \int\limits_{\Omega_\tau^{R_0}} \Big[\sum_{i,j=1}^{k} |f_{ij}^{h,h}|^2 + \sum_{i=1}^{m} |g_i^{h,h}|^2\Big] dz + \int\limits_{\Omega_0^{R_0}} \Big[\sum_{i,j=1}^{k} |f_{ij}^{h,h}|^2 +\end{aligned}$$

$$+\sum_{i=1}^{m} |g_i^{h,h}|^2\Bigg] dz + \int\limits_{Q_\tau^{R_0}} \Bigg[\sum_{i,j=1}^{k} |f_{ij}^{h,h}|^2 + \sum_{i,j=1}^{k} |f_{ijt}^{h,h}|^2 + \sum_{i=1}^{k} |f_i^{h,h}|^2 + \sum_{i=1}^{m} |g_i^{h,h}|^2 +$$

$$+\sum_{i=1}^{m} |g_{it}^{h,h}|^2 + |f_0^{h,h}|^2\Bigg] dzdt\Bigg).$$

Отже, на підставі умови теореми з останньої нерівності маємо оцінку

$$\int\limits_{Q_\tau^{R(h)}} \Bigg[|u_t^h|^2 + \sum_{i,j=1}^{k} |u_{x_i x_j}^h|^2 + \sum_{i=1}^{m} |u_{y_i}^h|^2\Bigg] dzdt \leqslant M_4 e^{b(R(h))^2}, \tag{21}$$

де M_4 – додатна константа, яка не залежить від $h,\ h \in \mathbb{N}$. З нерівності $|u^{h+3,h+2}|^2 \leqslant$ $\leqslant 2(|u^{h+3}|^2 + |u^{h+2}|^2)$ і з (21) випливає

$$\int\limits_{Q_\tau^{R(h+1)}} \Bigg[|u_t^{h+3,h+2}|^2 + \sum_{i,j=1}^{k} |u_{x_i x_j}^{h+3,h+2}|^2 + \sum_{i=1}^{m} |u_{y_i}^{h+3,h+2}|^2\Bigg] dzdt \leqslant 4M_4 e^{b(R(h+4))^2}.$$

З (20) одержимо

$$\int\limits_{Q_\tau^{R(h)}} \Bigg[|u_t^{h+3,h+2}|^2 + \sum_{i,j=1}^{k} |u_{x_i x_j}^{h+3,h+2}|^2 + \sum_{i=1}^{m} |u_{y_i}^{h+3,h+2}|^2\Bigg] dzdt \leqslant M_5 e^{-q+\mu_0\tau+b(R(s+4))^2} +$$

$$+\frac{eM_2}{e-1} e^{\mu_0\tau+b(R(s+4))^2},$$

де $\sum\limits_{i=0}^{q-1} e^{-i} \leqslant \sum\limits_{i=0}^{\infty} e^{-i} = \dfrac{e}{e-1}$ і $e^{\mu_0\tau} \leqslant e^{\mu_0\tau+b(R(s+4))^2}$.

Враховуючи збіжність послідовностей $f_{ij}^h,\ f_{ijt}^h,\ f_i^h,\ f_0^h,\ g_l^h,\ g_{lt}^h$, де $i,j \in \{1,...,k\}$, $l \in \{1,...,m\}$, можемо вибрати таке $h_1 \geqslant h_0$, що для всіх $h > h_1$ буде виконуватися нерівність $M_2 < e^{-q}$. З останньої нерівності одержимо

$$\int\limits_{Q_\tau^{R(h)}} \Bigg[|u_t^{h+3,h+2}|^2 + \sum_{i,j=1}^{k} |u_{x_i x_j}^{h+3,h+2}|^2 + \sum_{i=1}^{m} |u_{y_i}^{h+3,h+2}|^2\Bigg] dzdt \leqslant M_6 e^{-q+\mu_0\tau+b(R(s+4))^2}, \tag{22}$$

де M_6 – додатна константа, яка не залежить від h.

Візьмемо $\lambda = 2^8([b]+1)$. Але $\frac{\lambda^2 M_1 2^{2h}}{\mu_0} \leqslant e^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{N}$, тому $\mu_0 = b_1 2^{2h}$, де $b_1 = eM_1 2^{16}([b]+1)$. Оскільки

$$-q + \mu_0\tau + b(R(h+4))^2 = -\lambda 2^{2h} + b_1 2^{2h}\tau + b2^{2h+8} = 2^{2h}\left(-([b]+1)2^8 + b_1\tau + 2^8 b\right) =$$

$$= -2^{2h}\left((1+[b]-b)2^8 - b_1\tau\right) \leqslant -2^{2h}\left((1-\{b\})2^8 - \lambda\tau_0\right)$$

для всіх $\tau \in [0,\tau_0]$, де $\tau_0 = \frac{(1-\{b\})2^8-\beta_0}{b_1}$, $(1-\{b\})2^8 > \beta_0 > 0$, тоді з (22) випливає оцінка

$$\int\limits_{Q_\tau^{R(h)}} \left[|u_t^{h+3,h+2}|^2 + \sum_{i,j=1}^{k} |u_{x_ix_j}^{h+3,h+2}|^2 + \sum_{i=1}^{m} |u_{y_i}^{h+3,h+2}|^2\right] dzdt \leqslant M_6 e^{-\beta_0 2^{2h}},\ \tau \in [0,\tau_0]. \tag{23}$$

На підставі (23) для довільного $N \in \mathbb{N}$ одержимо

$$||u^{h+1,h+N}||_{V_0^{2,1}(Q_{\tau_0}^{R_h})} \leqslant \sum_{i=1}^{N-1} ||u^{h+1,h+i+1}||_{V_0^{2,1}(Q_{\tau_0}^{R_h})} \leqslant \sum_{i=1}^{N-1} ||u^{h+1,h+i+1}||_{V_0^{2,1}(Q_{\tau_0}^{R_{h+i-1}})} \leqslant$$

$$\leqslant M_6 e^{-\beta_0 2^{2h}} \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\beta_0 2^{2(i-1)}} = M_7 e^{-\beta_0 2^{2h}}.$$

Нехай $\varepsilon > 0$ – довільне фіксоване як завгодно мале число, R_0 – довільне фіксоване додатне число. Тоді згідно з останньою оцінкою існує таке $h_2 \in \mathbb{N}$, що для всіх $h > h_2$ і N натуральних

$$||u^{h+1,h+N}||_{V_0^{2,1}(Q_{\tau_0}^{R_h})} \leqslant \varepsilon,$$

тобто послідовність $\{u^h\}$ фундаментальна в просторі $V_0^{2,1}(Q_{\tau_0}^{R_0})$.

Отже, з (19) випливає фундаментальність $\{u^h\}$ у просторі $L^2((0,\tau_0);V_0^{2,1}(\Omega^{R_0}))$ і фундаментальність $\{u_t^h\}$ у просторі $L^2((0,\tau_0);V_0^{1,0}(\Omega^{R_0}))$. Тому $\{u^h\}$ сильно збігається до функції u, u_t^h сильно збігається до функції u_t у відповідних просторах при $h \to \infty$. Оскільки кожна функція u^h задовольняє рівність

$$\int\limits_{Q_\tau} \Bigg[u_{tt}^h v + \sum_{i,j,s,l=1}^{k} a_{ij}^{sl}(z,t) u_{x_ix_j}^h v_{x_sx_l} + \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t) u_{x_i}^h v_{x_j} + \sum_{i,j=1}^{k} b_{ij}(z,t) u_{tx_i}^h v_{x_j} +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{m} c_{ij}(z,t) u_{y_i}^h v_{y_j} + a_0(z,t) u^h v + b(z,u_t^h) v - \sum_{i,j=1}^{k} f_{ij}^h(z,t) v_{x_ix_j} - \sum_{i=1}^{k} f_i^h(z,t) v_{x_i} -$$

$$- f_0^h(z,t) v - \sum_{i=1}^{m} g_i^h(z,t) v_{y_i}\Bigg] dzdt = 0 \tag{24}$$

для довільної $v \in L^2((0,\tau_0);V_0^{2,1}(\Omega^{R_h})) \cap L^p((0,\tau_0);L^p(\Omega^{R_h}))$, *supp* $v \subset Q_{\tau_0}^{R_h}$ і виконується (17), то перейшовши в (24) до границі при $h \to \infty$, одержимо рівність з означення узагальненого розв'язку задачі (1)-(3) в необмеженій області. Отже, теорема доведена.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* (A), (B), (C) *і* $u_0 \in V_{0,loc}^{2,1}(\overline{\Omega})$, $u_1 \in L_{loc}^2(\overline{\Omega})$, f_{ij}, f_{ijt}, f_i, f_0, g_l, $g_{lt} \in L_{loc}^2(\overline{\Omega})$, $i,j \in \{1,...,k\}$, $l \in \{1,...,m\}$. *Тоді в класі функцій, які задовольняють оцінку*

$$\int\limits_{Q_T^R} \left[|u_t|^2 + \sum_{i,j=1}^{k} |u_{x_ix_j}|^2 + \sum_{i=1}^{m} |u_{y_i}|^2\right] e^{-\mu t} dzdt \leqslant a e^{bR^2} \tag{25}$$

для довільного $R > 1$, де a, b – додатні сталі, задача (1)-(3) не може мати більше одного узагальненого розв'язку.

Доведення. Припустимо, що існує два узагальнені розв'язки u^1 і u^2 задачі (1)-(3), які задовольняють (25). Позначимо $u^{1,2} = u^1 - u^2$. Тоді аналогічно як при доведенні теореми 2 для довільного $\tau \in [0, T]$ випливає оцінка

$$\int\limits_{Q_\tau^{R_0}} \Big[|u_t^{1,2}|^2 + \sum_{i,j=1}^{k} |u_{x_i x_j}^{1,2}|^2 + \sum_{i=1}^{m} |u_{y_i}^{1,2}|^2\Big] dzdt \leqslant e^{-q+\mu_0\tau} \times \tag{26}$$

$$\times \int\limits_{Q_\tau^{R_1}} \Big[|u_t^{1,2}|^2 + \sum_{i,j=1}^{k} |u_{x_i x_j}^{1,2}|^2 + \sum_{i=1}^{m} |u_{y_i}^{1,2}|^2\Big] dzdt. \tag{27}$$

Зазначимо, що q, R_0, R_1, μ_0, λ такі самі як у теоремі 2. Тому з (27) маємо

$$\int\limits_{Q_\tau^{R_0}} \Big[|u_t^{1,2}|^2 + \sum_{i,j=1}^{k} |u_{x_i x_j}^{1,2}|^2 + \sum_{i=1}^{m} |u_{y_i}^{1,2}|^2\Big] dzdt \leqslant M_8 e^{-2^{2h+8}(1-\{b\})-2^{2h}b_1\tau_0)}. \tag{28}$$

Вибравши $\tau_0 < \frac{2^8(1-\{b\})}{b_1}$, з (28) одержимо

$$\int\limits_{Q_{\tau_0}^{R_0}} \Big[|u_t^{1,2}|^2 + \sum_{i,j=1}^{k} |u_{x_i x_j}^{1,2}|^2 + \sum_{i=1}^{m} |u_{y_i}^{1,2}|^2\Big] dzdt \leqslant M_8 e^{-\beta_0 2^{2h}}, \text{ де } \beta_0 > 0.$$

Нехай R_0 – довільне фіксоване додатне число, ε – як завгодно мале число. Тоді існує таке $h_3 \in \mathbb{N}$, що для всіх $h > h_3$

$$\int\limits_{Q_{\tau_0}^{R_0}} \Big[|u_t^{1,2}|^2 + \sum_{i,j=1}^{k} |u_{x_i x_j}^{1,2}|^2 + \sum_{i=1}^{m} |u_{y_i}^{1,2}|^2\Big] dzdt \leqslant \varepsilon.$$

Звідси $u^1(z,t) = u^2(z,t)$ майже всюди в $Q_{\tau_0}^{R_0}$. Враховуючи довільність R_0, маємо єдиність розв'язку в області Q_{τ_0}. Тоді, проводячи аналогічні міркування для скінченного числа множин вигляду $\Omega \cap (\tau_0, 2\tau_0), ..., \Omega \cap (p\tau_0, T)$, де $p\tau_0 < T \leqslant (p+1)\tau_0$, $p \in \mathbb{N}$, доводимо єдиність узагальненого розв'язку в області Q_T.

---

1. *Эйдельман С. Д.* Об одном классе параболических систем // Докл. АН СССР. – 1960. – Т. 133. – №1. – С. 40-43.
2. *Матійчук М. І.* Фундаментальні матриці розв'язків загальних $\overrightarrow{2b}$-параболічних і $\overrightarrow{2b}$-еліптичних систем, коефіцієнти яких задовольняють інтегральну умову Гельдера // Доп. НА УРСР. – 1964. – №8. – С. 1010-1013.
3. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – М., 1964.

4. *Матийчук М. И., Эйдельман С. Д.* О фундаментальных решениях и задаче Коши для параболических систем, коэффициенты которых удовлетворяют условию Дини // Труды семинара по функциональному анализу. – Воронеж, 1967. – Вып. 9. – С. 54-83.
5. *Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.* $\overrightarrow{2b}$-параболические системы // Труды семинара по функциональному анализу. – Киев, 1968. – Вып. 1. – С. 3-175, 271-173.
6. *Мартыненко М. Д., Бойко Д. Ф.* $\overrightarrow{2b}$-параболические граничные задачи // Дифференциальные уравнения. – 1978. – Т. 14. – №12. – С. 2212-2222.
7. *Ивасишен С. Д.* Интегральное представление и начальные значения решений $\overrightarrow{2b}$-параболических систем // Укр. мат. журн. – 1990. – Т. 42. – №4. – С. 500-506.
8. *Березан Л. П., Івасишен С. Д.* Фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Доп. НАН України. – 1998. – №12. – С. 7-12.
9. *Березан Л. П., Івасишен С. Д.* Про сильно вироджені на початковій гіперплощині $\overrightarrow{2b}$-параболічні системи // Вісник держ. ун-ту "Львівська політехніка". Прикладна математика. – 1998. – №337. – С. 73-76.
10. *Матійчук М. І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – К., 1999.
11. *Івасишен С. Д., Пасічник Г. С.* Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для дисипативних $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Доп. НАН України. – 1999. – №6. – С. 18-22.
12. *Пасічник Г. С.* Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для дисипативних $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1999. – Вип. 54. – С. 140-151.
13. *Пасічник Г. С.* Про розв'язність задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – Т. 42, №3. – С. 61-65.
14. *Березан Л. П.* Інтегральне зображення розв'язків задачі Коші для сильно виродженої на початковій гіперплощині $\overrightarrow{2b}$-параболічної системи // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Зб. наук. праць. Вип. 46. Математика. – Чернівці – 1999. – С. 13-18.
15. *Березан Л. П.* Деякі властивості фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Зб. наук. праць. Вип. 76. Математика. – Чернівці – 2000. – С.5-10.
16. *Івасишен С. Д., Пасічник Г. С.* Про задачу Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2000. – Т. 52, №11. – С. 1484-1496.
17. *Івасишен С. Д., Пасічник Г. С.* Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для одного класу параболічних систем з необмеженими коефіцієнтами і виродженням на початковій площині // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Зб. наук. праць. Вип. 76. Математика. – Чернівці. – 2000. – С. 82-91.
18. *Івасишен С. Д., Кондур О. С.* Про матрицю Гріна задачі Коші та характеризацію деяких класів розв'язків для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем довільного порядку // Мат. студії. – 2000. – Т. 14, №1. – С. 73-84.
19. *Балабушенко Т. М.* Оцінки фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем у необмежених відносно часової змінної областях та їх застосування // Вісник нац. ун-ту "Львівська політехніка". – N 411. Прикладна математика. – 2000. – С. 6-11.
20. *Балабушенко Т. М.* Про оцінки в необмежених відносно часової змінної областях фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем // Мат. студії. – 2002. – Т. 17, №2. – С. 163-174.
21. *Балабушенко Т. М., Івасишен С. Д.* Про властивості розв'язків $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем у необмежених за часовою змінною областях // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002.

– Т. 45, №4. – С. 19-26.
22. *R. Abeyaratne and J. K. Knowles.* Kinetic relations and propagation of phase boundaries in solids, // *Arch. Rational Mech. Anal.* **114** (1991), 119-154.
23. *R. Abeyaratne and J. K. Knowles.* Implications of viscosity and strain gradient effects for the kinetics of propagating phase boundaries in solids // SIAM J. *Appl. Math.* **51** (1991), 1205-1221.
24. *M.Slemrod.* Admissibility criteria for propagating phase boundaries in a van der Waals fluid // *Arch. Rational Mech. Anal.* **81** (1983), 37-85.
25. *Трускиновский Л. М.* Равновесные межфазные границы // Докл. АН СССР. – 1982. – Т. 265, №2. – С. 306-310.
26. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М., 1958.
27. *Ж.-Л. Лионс.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., 1972.
28. *Bernis F.* Qualitative properties for some nonlinear higher order degenerate parabolic equations // Huston J. Mathem. – 1988. – Vol. 14, №3. – P. 319-352.
29. *Гаевський Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные дифференциальные уравнения. – М., 1978.
30. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Уравнения линейные и квазилинейные параболическово типа. – М., 1967.

MIXED PROBLEM FOR EIDELMAN TYPE EVOLUTION EQUATION IN THE UNBOUNDED REGION

Halyna TORHAN

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1

The conditions of existence and singularity of the generalized solution in the class of the Tykhonov type mixed many-dimensional problem for the equation

$$u_{tt}+\sum_{i,j,s,l=1}^{k}(a_{ij}^{sl}(z,t)u_{x_ix_j})_{x_sx_l}-\sum_{i,j=1}^{k}(a_{ij}(z,t)u_{x_i})_{x_j}-\sum_{i,j=1}^{k}(b_{ij}(z,t)u_{tx_i})_{x_j}-$$
$$-\sum_{i,j=1}^{m}(c_{ij}(z,t)u_{y_i})_{y_j}+a_0(z,t)u+b(z,u_t)=\sum_{i,j=1}^{k}(f_{ij}(z,t))_{x_ix_j}-$$
$$-\sum_{i=1}^{k}(f_i(z,t))_{x_i}+f_0(z,t)-\sum_{i=1}^{m}(g_i(z,t))_{y_i}$$

in the unbounded region have been obtained.

Key words: evolution equation, problem in the unbounded region.

Стаття надійшла до редколегії 01.02.2007
Прийнята до друку 24.10.2007

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2007. Вип.67. С.268-280 *Ser. Mech.-Math. 2007. Vol.67. P.268-280*

УДК 517.95

ВИЗНАЧЕННЯ НЕВІДОМОГО КОЕФІЦІЄНТА ПРИ ПОХІДНІЙ ЗА ЧАСОМ У ПАРАБОЛІЧНОМУ РІВНЯННІ З НЕЛОКАЛЬНОЮ УМОВОЮ ПЕРЕВИЗНАЧЕННЯ

Уляна ФЕДУСЬ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1

З'ясовано умови існування та єдиності розв'язку оберненої задачі для одновимірного параболічного рівняння загального вигляду з невідомим коефіцієнтом при похідній за часом у випадку крайових умов другого роду та нелокальної умови перевизначення.

Ключові слова: обернена задача, параболічне рівняння, нелокальна умова перевизначення.

1. Формулювання результатів. Дослідження обернених задач зумовлене необхідністю розв'язання певних проблем у геофізиці, медицині, астрономії, біології, сейсмології тощо. Типовим прикладом оберненої задачі є задача визначення невідомих коефіцієнтів параболічного рівняння – в цьому випадку говорять про коефіцієнтну обернену задачу. Для одновимірних параболічних рівнянь поширенішою є задача визначення невідомого коефіцієнта при другій похідній за просторовою змінною. Випадок такого розміщення невідомого коефіцієнта у параболічному рівнянні загального вигляду з нелокальною додатковою умовою досліджено в [1], для однорідного рівняння теплопровідності з локальною умовою перевизначення – в [2]. Серед задач з невідомим коефіцієнтом, розміщеним при похідній за часом, виділимо працю Прилєпка О.І. та Костіна А.Б. [3], в якій було розглянуто питання ідентифікації коефіцієнта $\rho(x)$ у рівнянні

$$\rho(x)u_t - Lu = g, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad t \in (0,T),$$

де L – рівномірно еліптичний оператор. Визначення двох невідомих коефіцієнтів в однорідному рівнянні теплопровідності досліджував Іванчов М.І. [4]. Єдиність розв'язку задачі для нелінійного рівняння

$$c(u)u_t = (k(u)u_x)_x, \quad 0<x<1, \quad t\in[0,T],$$

з невідомими коефіцієнтами $c(u)$ та $k(u)$ довів Музильов М.В. [5].

© Федусь Уляна, 2007

Мета нашої праці – дослідити можливість однозначного визначення невідомого коефіцієнта $c(t)$ у рівнянні

$$c(t)u_t = a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + d(x,t)u + f(x,t), \quad 0<x<h, \quad 0<t<T, \qquad (1)$$

з нелокальною умовою перевизначення. Доведення існування розв'язку полягає у зведенні цієї задачі до системи операторних рівнянь стосовно невідомих функцій і застосуванні до неї теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Доведення єдиності розв'язку задачі ґрунтується на використанні властивостей інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду.

В області $Q_T = (0,h)\times(0,T)$ розглядаємо рівняння (1) з невідомим коефіцієнтом $c(t)>0$, початковою умовою

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad x\in[0,h], \qquad (2)$$

крайовими умовами

$$u_x(0,t)=\mu_1(t), \quad u_x(h,t)=\mu_2(t), \quad t\in[0,T], \qquad (3)$$

та умовою перевизначення вигляду

$$\nu_1(t)u(0,t)+\nu_2(t)u(h,t)=\mu_3(t), \quad t\in[0,T]. \qquad (4)$$

Теорема 1. *При виконанні умов*

(A1) $\varphi\in C^2([0,h])$, $\mu_i\in C^1([0,T])$, $i=\overline{1,3}$, $\nu_i\in C^1([0,T])$, $i=1,2$, a, b, d, $f\in C^{1,0}(\overline{Q_T})$,

(A2) $\varphi''(x)>0$, $\varphi(x)\geqslant 0$, $x\in[0,h]$, $\mu_1(t)\leqslant 0$, $\mu_2(t)\geqslant 0$, $t\in[0,T]$, $f(x,t)\geqslant 0$, $a(x,t)>0$, $(x,t)\in\overline{Q}_T$, $\nu_1(t)+\nu_2(t)>0$, $\nu_1(t)\geqslant 0$, $\nu_2(t)\geqslant 0$, $\nu_1'(t)\leqslant 0$, $\nu_2'(t)\leqslant 0$, $d(0,t)\mu_3(t)+\nu_1(t)b(0,t)\mu_1(t)+\nu_2(t)b(h,t)\mu_2(t)+\nu_1(t)f(0,t)+\nu_2(t)f(h,t)>0$, $d(h,t)-d(0,t)\geqslant 0$, $\mu_3'(t)>0$, $t\in[0,T]$,

(A3) $\varphi'(0)=\mu_1(0)$, $\varphi'(h)=\mu_2(0)$, $\nu_1(0)\varphi(0)+\nu_2(0)\varphi(h)=\mu_3(0)$,

можна зазначити таке число t_0, $0<t_0\leqslant T$, *що розв'язок* $(c,u)\in C([0,t_0])\times C^{2,1}(\overline{Q}_{t_0})$ *задачі (1)-(4) існує.*

Теорема 2. *Нехай виконуються умови (A2), (A3) і*

(A4) $\varphi\in H^{2+\gamma}([0,h])$, $\mu_i\in H^{1+\gamma/2}([0,T])$, $i=\overline{1,3}$, $\nu_i\in H^{1+\gamma/2}([0,T])$, $i=1,2$, a, b, d, $f\in H^{1,\gamma/2}(\overline{Q}_T)$,

Тоді розв'язок (c,u) *задачі (1)-(4) належить класу* $H^{\gamma/2}([0,t_0])\times H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{Q}_{t_0})$.

Теорема 3. *Якщо*

a, b, $d\in H^{\gamma,0}(\overline{Q}_T)$,
$\varphi(x)\geqslant 0, x\in[0,h]$, $\mu_3'(t)>0$, $\nu_1'(t)\leqslant 0$, $\nu_2'(t)\leqslant 0$, $\mu_1(t)\leqslant 0$, $\mu_2(t)\geqslant 0, t\in[0,T]$,
$f(x,t)\geqslant 0, (x,t)\in\overline{Q}_T$,

то розв'язок $(c,u)\in H^{\gamma/2}([0,T])\times H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{Q}_T)$ *задачі (1)-(4) єдиний.*

2. Доведення теореми 1.

Зафіксуємо довільну точку $y \in [0, h]$ і подамо рівняння (1) у такому вигляді

$$c(t)u_t = a(y,t)u_{xx} + (a(x,t) - a(y,t))u_{xx} + b(x,t)u_x + d(x,t)u + f(x,t). \tag{5}$$

При відомій функції $c(t)$ знаходження розв'язку задачі (5), (2), (3) зводиться до інтегро-диференціального рівняння

$$\begin{aligned} u(x,t) = {} & \int_0^h \varphi(\xi) G_2(x,t,\xi,0;y)\, d\xi - \int_0^t \frac{a(y,\tau)\mu_1(\tau)}{c(\tau)}\, G_2(x,t,0,\tau;y)\, d\tau + \int_0^t \frac{a(y,\tau)\mu_2(\tau)}{c(\tau)} \times \\ & \times G_2(x,t,h,\tau;y) d\tau + \int_0^t\int_0^h \frac{f(\xi,\tau)}{c(\tau)}\, G_2(x,t,\xi,\tau;y) d\xi\, d\tau + \int_0^t\int_0^h \frac{G_2(x,t,\xi,\tau;y)}{c(\tau)} \big((a(\xi,\tau) - \\ & - a(y,\tau))u_{\xi\xi} + b(\xi,\tau)u_\xi + d(\xi,\tau)u) d\xi\, d\tau, \end{aligned} \tag{6}$$

де

$$\begin{aligned} G_2(x,t,\xi,\tau;y) = {} & \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t,y)-\theta(\tau,y))}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\exp\Big(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t,y)-\theta(\tau,y))} \Big) + \right. \\ & \left. + \exp\Big(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t,y)-\theta(\tau,y))} \Big) \right), \quad \theta(t,y) = \int_0^t \frac{a(y,\tau)}{c(\tau)}\, d\tau. \end{aligned}$$

Введемо позначення $v(x,t) = u_x(x,t)$, $w(x,t) = u_{xx}(x,t)$. Диференціюючи (6) двічі по x з врахуванням рівності

$$G_{2xx}(x,t,\xi,\tau;y) = -\frac{c(\tau)}{a(y,\tau)}\, G_{2\tau}(x,t,\xi,\tau;y),$$

інтегруючи частинами, врахувавши умови (A3) і прийнявши $y = x$, отримаємо

$$\begin{aligned} w(x,t) = {} & \int_0^h \varphi''(\xi) G_2(x,t,\xi,0;x)\, d\xi - \int_0^t \mu_1'(\tau) G_2(x,t,0,\tau;x)\, d\tau + \int_0^t \mu_2'(\tau) G_2(x,t,h,\tau;x) d\tau + \\ & + \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)} \int_0^h (a(\xi,\tau) - a(x,\tau)) w(\xi,\tau) G_{2\xi\xi}(x,t,\xi,\tau;x) d\xi - \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)} \int_0^h \Big(f_\xi(\xi,\tau) + d_\xi(\xi,\tau)u + \\ & + (d(\xi,\tau) + b_\xi(\xi,\tau))v + b(\xi,\tau)w \Big) G_{2\xi}(x,t,\xi,\tau;x) d\xi \equiv \sum_{k=1}^{5} I_k(x,t). \end{aligned} \tag{7}$$

Знайдемо рівняння стосовно невідомої функції $c(t)$. Для цього продиференціюємо умову перевизначення по t і використаємо рівняння (1) для знаходження $u_t(0,t)$,

$u_t(h,t)$. Отримаємо

$$\nu_1'(t)u(0,t)+\nu_2'(t)u(h,t)+\frac{\nu_1(t)}{c(t)}\left(a(0,t)w(0,t)+b(0,t)\mu_1(t)+d(0,t)u(0,t)+f(0,t)\right)+$$
$$+\frac{\nu_2(t)}{c(t)}(a(h,t)w(h,t)+b(h,t)\mu_2(t)+d(h,t)u(h,t)+f(h,t))=\mu_3'(t).$$

Звідси приходимо до такого рівняння стосовно $c(t)$

$$c(t)=\big(\nu_1(t)a(0,t)w(0,t)+\nu_2(t)a(h,t)w(h,t)+\nu_1(t)d(0,t)u(0,t)+\nu_2(t)d(h,t)u(h,t)+$$
$$+\nu_1(t)b(0,t)\mu_1(t)+\nu_2(t)b(h,t)\mu_2(t)+\nu_1(t)f(0,t)+\nu_2(t)f(h,t)\big)\big(\mu_3'(t)-\nu_1'(t)u(0,t)-$$
$$-\nu_2'(t)u(h,t)\big)^{-1}$$

або, використовуючи умову перевизначення (4),

$$c(t)=\big(\nu_1(t)a(0,t)w(0,t)+\nu_2(t)a(h,t)w(h,t)+\nu_2(t)u(h,t)(d(h,t)-d(0,t))+d(0,t)\mu_3(t)+$$
$$+\nu_1(t)b(0,t)\mu_1(t)+\nu_2(t)b(h,t)\mu_2(t)+\nu_1(t)f(0,t)+\nu_2(t)f(h,t)\big)\big(\mu_3'(t)-\nu_1'(t)u(0,t)-$$
$$-\nu_2'(t)u(h,t)\big)^{-1}. \qquad (8)$$

З очевидних рівностей

$$u(x,t)=u(0,t)+\int_0^x v(x,t)dx,\ u(x,t)=u(h,t)-\int_x^h v(x,t)dx$$

маємо

$$u(x,t)=\frac{1}{\nu_1(t)+\nu_2(t)}\Big(\mu_3(t)+\nu_1(t)\int_0^x v(x,t)dx-\nu_2(t)\int_x^h v(x,t)dx\Big), \qquad (9)$$

оскільки

$$v(x,t)=v(0,t)+\int_0^x w(x,t)dx=\mu_1(t)+\int_0^x w(x,t)dx, \qquad (10)$$

то задача (1)-(4) зводиться до системи інтегральних рівнянь (7), (8) щодо невідомих c та w.

Доведення існування розв'язку задачі (1)-(4) ґрунтується на використанні теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора, тому треба визначити апріорні оцінки розв'язків системи (7), (8).

Визначимо спочатку оцінку $c(t)$ знизу. З умов (А2) маємо

$$\nu_1(t)a(0,t)I_1(0,t)+\nu_2(t)a(h,t)I_1(h,t)\geqslant$$
$$\geqslant(\nu_1(t)a(0,t)+\nu_2(t)a(h,t))\min_{[0,h]}\varphi''(x)\geqslant C_1>0. \qquad (11)$$

Оскільки у виразі $\nu_1(t)a(0,t)w(0,t) + \nu_2(t)a(h,t)w(h,t)$ всі доданки, крім доданка $\nu_1(t)a(0,t)I_1(0,t)+\nu_2(t)a(h,t)I_1(h,t)$, прямують до нуля при $t \to 0$, то існує такий проміжок $[0,T_0]$, $0 < T_0 \leqslant T$, на якому буде виконуватись нерівність

$$\nu_1(t)a(0,t)I_1(0,t)+\nu_2(t)a(h,t)I_1(h,t) \geqslant -\sum_{k=2}^{5}(\nu_1(t)a(0,t)I_k(0,t)+\nu_2(t)a(h,t)I_k(h,t)), \tag{12}$$

звідки $\nu_1(t)a(0,t)w(0,t)+\nu_2(t)a(h,t)w(h,t) \geqslant 0$. Згідно з припущеннями (A2) маємо $u(x,t) \geqslant 0$. З рівності (9) приходимо до оцінки

$$|u(x,t)| \leqslant C_2+C_3V(t), \tag{13}$$

де $V(t)=\max\limits_{x\in[0,h]}|v(x,t)|$. Тоді

$$c(t) \geqslant \frac{C_4}{C_5 + C_6V(t)} > 0. \tag{14}$$

Запишемо задачу стосовно функції $v(x,t)$. Продиференціювавши (1) і (2) по x, в області Q_T отримаємо рівняння

$$c(t)v_t = a(x,t)v_{xx}+(a_x(x,t)+b(x,t))v_x+(b_x(x,t)+d(x,t))v+d_x(x,t)u+f_x(x,t) \tag{15}$$

з умовами

$$v(x,0)=\varphi'(x),\ x\in[0,h], \quad v(0,t)=\mu_1(t),\ v(h,t)=\mu_2(t),\ t\in[0,T]. \tag{16}$$

Розв'язок цієї задачі подамо у вигляді

$$v(x,t)=v_0(x,t)+\int_0^t\frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h\big((b_\xi(\xi,\tau)+d(\xi,\tau))v(\xi,\tau)+d_\xi(\xi,\tau)u(\xi,\tau)\big)\widetilde{G}_1(x,t,\xi,\tau)d\xi. \tag{17}$$

Тут $\widetilde{G}_1$ – функція Гріна для рівняння

$$c(t)v_t = a(x,t)v_{xx}+(a_x(x,t)+b(x,t))v_x \tag{18}$$

з однорідними умовами першого роду, а v_0 задовольняє рівняння

$$c(t)v_{0t} = a(x,t)v_{0xx}+(a_x(x,t)+b(x,t))v_{0x}+(b_x(x,t)+d(x,t))v_0+f_x(x,t)$$

й умови (16). Згідно з принципом максимуму [8, с. 20] маємо $|v_0(x,t)| \leqslant C_7 < \infty$.

Розв'язком задачі для рівняння (18) з умовами

$$v(x,0) = 1, \quad v(0,t) = 1, \quad v_0(h,t) = 1$$

буде

$$1 = \int_0^h\widetilde{G}_1(x,t,\xi,0)\,d\xi+\int_0^t\frac{a(0,\tau)}{c(\tau)}\,\widetilde{G}_{1\xi}(x,t,0,\tau)\,d\tau-\int_0^t\frac{a(h,\tau)}{c(\tau)}\widetilde{G}_{1\xi}(x,t,h,\tau)d\tau.$$

Згідно з властивостями функції $\widetilde{G}_1$ кожен член у правій частині цієї рівності є невід'ємною функцією, тому виконується оцінка $\int\limits_0^h \widetilde{G}_1(x,t,\xi,\tau)d\xi \leqslant 1$. Тоді, продовжуючи з (17), отримаємо

$$V(t) \leqslant C_7 + C_8 \int\limits_0^t \frac{V(\tau)}{c(\tau)}\, d\tau.$$

За нерівністю Гронуолла-Белмана [10, с. 188],

$$V(t) \leqslant C_7 \exp C_8 \theta_0(t), \tag{19}$$

де $\theta_0(t) = \int\limits_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)}$. Враховуючи (14), приходимо до нерівності

$$c(t) \geqslant \frac{C_4}{C_5 + C_9 \exp C_8 \theta_0(t)}, \quad t \in [0, T_0]. \tag{20}$$

Подамо (20) у вигляді

$$\frac{1}{c(t)(C_5 + C_9 \exp C_8 \theta_0(t))} \leqslant C_{10}.$$

Скористаємося методом доведення нерівності Біхарі [10]. Приймемо в цій нерівності $t = \tau$ і проінтегруємо від 0 до t. Отримаємо

$$\int\limits_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)(C_5 + C_9 \exp C_8 \theta_0(\tau))} \leqslant C_{10} t.$$

Зробивши заміну $\theta_0(\tau) = \sigma$, прийдемо до нерівності

$$\int\limits_0^{\theta_0(t)} \frac{d\sigma}{C_5 + C_9 \exp C_8 \sigma} \leqslant C_{10} t. \tag{21}$$

Якщо розглянути функцію

$$r(s) = \int\limits_0^s \frac{d\sigma}{C_5 + C_9 \exp C_8 \sigma} = \frac{1}{C_5 C_8} \ln \frac{(C_5 + C_9) \exp C_8 s}{C_5 + C_9 \exp C_8 s} = \frac{1}{C_5 C_8} \ln \frac{C_5 + C_9}{C_5 \exp(-C_8 s) + C_9},$$

то (21) можна подати у вигляді

$$r(\theta_0(t)) \leqslant C_{10} t. \tag{22}$$

Позначимо $R_0 = \sup\limits_{[0,\infty)} r(s)$. Очевидно, що $r(s)$−монотонно зростаюча неперервна на $[0, \infty)$, тому існує обернена монотонно зростаюча неперервна функція $r^{-1}(\sigma)$, визначена на проміжку $[0, R_0)$. Тоді з (22) маємо

$$\theta_0(t) \leqslant r^{-1}(C_{10}t) \leqslant C_{11}, \quad t \in [0, T_1],$$

де число T_1, $0 < T_1 \leqslant T$, задовольняє нерівність

$$C_{10}T_1 < R_0.$$

Використовуючи оцінку $\theta_0(t)$ в (20), (19), визначаємо

$$c(t) \geqslant A_0 > 0, \quad V(t) \leqslant C_{12}, \quad t \in [0, T_1]. \tag{23}$$

Звідси

$$|u(x,t)| \leqslant C_{13}, \quad (x,t) \in Q_{T_1}. \tag{24}$$

Знайдемо оцінку $c(t)$ зверху. Введемо позначення $W(t) = \max\limits_{x\in[0,h]} |w(x,t)|$. Оскільки за умовами (A2)

$$\mu_3'(t) - \nu_1'(t)u(0,t) - \nu_2'(t)u(h,t) \geqslant \min_{[0,T]} \mu_3'(t),$$

то з (8) отримаємо

$$c(t) \leqslant C_{14} + C_{15}W(t), \quad t \in [0, T]. \tag{25}$$

Оцінимо $W(t)$. З відомих співвідношень [9, с. 12]

$$\int_0^h G_2(x,t,\xi,0;x)\,d\xi = 1, \quad G_2(x,t,\xi,\tau;x) \leqslant C_{16} + \frac{C_{17}}{\sqrt{\theta(t,x) - \theta(\tau,x)}} \tag{26}$$

маємо

$$\left|\sum_{k=1}^{3} I_k(x,t)\right| \leqslant C_{18} + C_{19}\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t,x) - \theta(\tau,x)}}.$$

Оскільки

$$\int_0^t \frac{a(x,\tau)d\tau}{c(\tau)\sqrt{\theta(t,x) - \theta(\tau,x)}} = 2\sqrt{\theta(t,x)},$$

то, враховуючи (25) і оцінку $\theta_0(t)$ зверху, одержимо

$$\left|\sum_{k=1}^{3} I_k(x,t)\right| \leqslant C_{18} + C_{20}\sqrt{\theta(t,x)} + C_{21}\int_0^t \frac{W(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta(t,x) - \theta(\tau,x)}}\,d\tau \leqslant C_{22} +$$

$$+ C_{21}\int_0^t \frac{W(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta(t,x) - \theta(\tau,x)}}\,d\tau.$$

Використаємо нерівність

$$z^p\exp(-qz^2)\leqslant C_{p,q}<\infty,\quad \forall z\in[0,\infty),\quad p\geqslant 0,\quad q>0, \tag{27}$$

для оцінки $|G_{2\xi}(x,t,\xi,\tau;x)|$:

$$|G_{2\xi}(x,t,\xi,\tau;x)|\leqslant\frac{1}{4\sqrt{\pi(\theta(t,x)-\theta(\tau,x))^3}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Bigg(|x-\xi+2nh|\times$$

$$\times\exp\Big(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t,x)-\theta(\tau,x))}\Big)+|x+\xi+2nh|\exp\Big(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t,x)-\theta(\tau,x))}\Big)\Bigg)\leqslant\frac{C_{23}}{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}\times$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Bigg(\exp\Big(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{8(\theta(t,x)-\theta(\tau,x))}\Big)+\exp\Big(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{8(\theta(t,x)-\theta(\tau,x))}\Big)\Bigg).$$

Оскільки

$$\frac{1}{\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^h\Bigg(\exp\Big(\frac{-(x-\xi+2nh)^2}{8(\theta(t,x)-\theta(\tau,x))}\Big)+\exp\Big(\frac{-(x+\xi+2nh)^2}{8(\theta(t,x)-\theta(\tau,x))}\Big)\Bigg)d\xi\leqslant C_{24},$$

то

$$\left|-\int\limits_0^t\frac{d\tau}{c(\tau)}\int\limits_0^h f_\xi(\xi,\tau)G_{2\xi}(x,t,\xi,\tau;x)d\xi\right|\leqslant C_{25}\int\limits_0^t\frac{d\tau}{c(\tau)\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}}\leqslant C_{26}.$$

Тоді, враховуючи (24), (23) та визначену оцінку $|G_{2\xi}(x,t,\xi,\tau;x)|$, отримаємо

$$|I_5(x,t)|\leqslant C_{27}\sqrt{\theta(t,x)}+C_{28}\int\limits_0^t\frac{W(\tau)d\tau}{c(\tau)\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}}\leqslant C_{29}+C_{28}\int\limits_0^t\frac{W(\tau)d\tau}{c(\tau)\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}}.$$

Для оцінки інтеграла $I_4(x,t)$ обчислимо $G_{2\xi\xi}(x,t,\xi,\tau;x)$

$$G_{2\xi\xi}(x,t,\xi,\tau;x)=-\frac{1}{4\sqrt{\pi(\theta(t,x)-\theta(\tau,x))^3}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t,x)-\theta(\tau,x))}\right)+\right.$$

$$\left.+\exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t,x)-\theta(\tau,x))}\right)\right)+\frac{1}{8\sqrt{\pi(\theta(t,x)-\theta(\tau,x))^5}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left((x-\xi+2nh)^2\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t,x)-\theta(\tau,x))}\right)+(x+\xi+2nh)^2\exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t,x)-\theta(\tau,x))}\right)\right). \tag{28}$$

Оскільки $|x-\xi|\leqslant|x-\xi+2nh|$ і $|x-\xi|\leqslant|x+\xi+2nh|$ при $n\geqslant 1$, то, використовуючи нерівність (27), одержуємо

$$\left|\int\limits_0^h(a(\xi,\tau)-a(x,\tau))w(\xi,\tau)G_{2\xi\xi}(x,t,\xi,\tau;x)d\xi\right|\leqslant\frac{C_{30}W(\tau)}{\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}}.$$

Звідси

$$|I_4(x,t)| \leqslant C_{30} \int\limits_0^t \frac{W(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}}\, d\tau.$$

Отже, враховуючи всі визначені оцінки, отримаємо

$$|w(x,t)| \leqslant C_{31} + C_{32} \int\limits_0^t \frac{W(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}}\, d\tau,$$

звідки приходимо до нерівності

$$W(t) \leqslant C_{31} + C_{33} \int\limits_0^t \frac{W(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}\, d\tau.$$

Використавши лему 2.2.1 [9, с.22] та оцінку $\theta_0(t)$ зверху, одержуємо

$$W(t) \leqslant C_{31} \exp(C_{33}\theta_0(t)) \leqslant C_{34}, \quad t \in [0, T_1]. \tag{29}$$

Звідси

$$c(t) \leqslant A_1 < \infty, \quad t \in [0, T_1]. \tag{30}$$

При відомих оцінках $c(t)$ і $w(x,t)$ справджується нерівність

$$\left| -\sum_{k=2}^{5} (\nu_1(t) a(0,t) I_k(0,t) + \nu_2(t) a(h,t) I_k(h,t)) \right| \leqslant C_{35}\sqrt{t} + C_{36} t,$$

тоді з (11) і (12) маємо таке обмеження на T_0

$$C_{35}\sqrt{T_0} + C_{36} T_0 \leqslant C_1.$$

Виберемо $t_0 = \min\{T_0, T_1\}$. Тоді оцінки (23), (29), (30) виконуються на проміжку $[0, t_0]$. У визначених оцінках $C_i (i = \overline{1,36}), A_0, A_1$ – відомі величини.

Розглянемо систему рівнянь (8), (7) як операторне рівняння

$$\omega = P\omega,$$

де ω=(c, w), P=(P_1, P_2), а оператори P_1, P_2 визначаються рівняннями (8), (7), відповідно. Нехай $N = \{(c, w) \in C[0, t_0] \times C(\overline{Q}_{t_0}) \, : \, 0 < A_0 \leqslant c(t) \leqslant A_1, \; |w(x,t)| \leqslant C_{34}\}$. Внаслідок апріорних оцінок (23), (29), (30) оператор P переводить множину N в себе. Компактність оператора вигляду P доведено в [9, с. 27]. Застосовуючи теорему Шаудера до оператора P, отримуємо існування неперервного розв'язку системи рівнянь (8), (7), а отже, й існування розв'язку задачі (1)-(4).

3. Доведення теореми 2. В умовах теореми 1 маємо існування розв'язку $(c,u)\in C([0,t_0])\times C^{2,1}(\overline{Q}_{t_0})$ задачі (1)-(4). Доведемо, що при зроблених припущеннях (c,u) належатиме до класу $H^{\gamma/2}([0,t_0])\times H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{Q}_{t_0})$.

При відомих u і v рівняння (7) можна розглядати як інтегральне стосовно функції w з ядром

$$K(x,t,\xi,\tau)=\frac{a(\xi,\tau)-a(x,\tau)}{c(\tau)}G_{2\xi\xi}(x,t,\xi,\tau;x)-\frac{b(\xi,\tau)}{c(\tau)}\,G_{2\xi}(x,t,\xi,\tau;x)=$$
$$=K_1(x,t,\xi,\tau)+K_2(x,t,\xi,\tau)$$

і вільним членом

$$\widetilde{f}(x,t)=\sum_{k=1}^{3}I_k(x,t)-\int_0^t\frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h\Big(f_\xi(\xi,\tau)+d_\xi(\xi,\tau)u+(d(\xi,\tau)+b_\xi(\xi,\tau))v\Big)G_{2\xi}(x,t,\xi,\tau;x)d\xi,$$

де I_k – раніше введені позначення. Тоді (7) перепишемо у вигляді

$$w(x,t)=\widetilde{f}(x,t)+\int_0^t\int_0^h K(x,t,\xi,\tau)w(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Розв'язок цього інтегрального рівняння шукаємо методом послідовних наближень

$$w_0(x,t)=\widetilde{f}(x,t),\ w_k(x,t)=\widetilde{f}(x,t)+\sum_{i=1}^{k}\int_0^t\int_0^h K_i(x,t,\xi,\tau)\widetilde{f}(\xi,\tau)d\xi d\tau,\ k=1,2,...$$

$$K_1(x,t,\xi,\tau)=K(x,t,\xi,\tau), K_{i+1}(x,t,\xi,\tau)=\int_\tau^t\int_0^h K(x,t,\eta,\sigma)K_i(\eta,\sigma,\xi,\tau)d\eta\, d\sigma, i=1,2,..$$

Згідно з оцінками теплових потенціалів [8, с. 318] маємо, що $\widetilde{f}\in H^{\gamma,\gamma/2}(\overline{Q}_{t_0})$. Можна стверджувати, що для ядра K виконується лема.

Лема 1. *Для* $x,\xi\in[0,h]$, $\tau,t\in[0,T]$ *та* $\forall\beta$, $0<\beta<\gamma$, *правильна нерівність*

$$|K_1(x,t,\xi,\tau)-K_1(y,t,\xi,\tau)|\leqslant\frac{C_1|x-y|^\beta}{c(\tau)(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))^{(3-\alpha)/2}}\times$$
$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left(-\frac{\widetilde{\lambda}(x-\xi+2nh)^2}{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}\right)+\exp\left(-\frac{\widetilde{\lambda}(y-\xi+2nh)^2}{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}\right)\right),$$

де $\widetilde{\lambda}$ *– довільна додатна стала, а* $\alpha=\gamma-\beta$.

Доведення цієї леми проводиться аналогічно до доведення теореми 7 [11, с. 29-31].

Оцінимо, враховуючи визначену оцінку $G_{2\xi}$ та оцінки $\theta(t)$, наступну різницю

$$\Delta=|K_2(x,t,\xi,\tau)-K_2(y,t,\xi,\tau)|\leqslant\frac{C_2}{c(\tau)(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Big(\exp\Big(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{8a_1(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))}\Big)+$$
$$+\exp\Big(-\frac{(y-\xi+2nh)^2}{8a_1(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))}\Big).$$

Отже,

$$\Delta \leqslant \frac{C_3|x-y|^\gamma}{c(\tau)(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))^{1+\gamma/2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\exp\Big(\frac{-(x-\xi+2nh)^2}{8a_1(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))}\Big)+\exp\Big(\frac{-(y-\xi+2nh)^2}{8a_1(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))}\Big)\right).$$

Тоді, враховуючи лему, маємо

$$|K(x,t,\xi,\tau)-K(y,t,\xi,\tau)| \leqslant \frac{C_4|x-y|^\gamma}{c(\tau)(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))^{\gamma/2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\exp\Big(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{8a_1(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))}\Big)+\right.$$

$$\left.+\exp\Big(-\frac{(y-\xi+2nh)^2}{8a_1(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))}\Big)\right),$$

звідки

$$|w_1(x,t)-w_1(y,t)| \leqslant C_5|x-y|^\gamma \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))^{\frac{\gamma-1}{2}}} = C_6|x-y|^\gamma \theta_0(t)^{\frac{3-\gamma}{2}} \leqslant C_7|x-y|^\gamma,$$

тобто $w_1 \in H^{\gamma,\gamma/2}(\overline{Q}_{t_0})$. Аналогічно доводиться, що $w_k \in H^{\gamma,\gamma/2}(\overline{Q}_{t_0}), k = 2, 3, ..$ Оскільки інтегральні оператори типу Вольтерра не мають власних значень, то послідовність w_k рівномірно збігається до w. Звідси маємо, що $w \in H^{\gamma,\gamma/2}(\overline{Q}_{t_0})$ як границя послідовності функцій з класу Гельдера. Тоді з (8) матимемо $c \in H^{\gamma/2}([0, t_0])$, а з (10), (9) – $u \in H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{Q}_{t_0})$. Тут $C_i, i = \overline{1,7}$, – довільні додатні сталі. Теорему доведено.

4. Доведення теореми 3. Припустимо, що існують два розв'язки (c_1, u_1) і (c_2, u_2) задачі (1)-(4) з класу $H^{\gamma/2}([0,T]) \times H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{Q}_T)$. Нехай $c(t) = c_1(t) - c_2(t)$, $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$. Утворимо задачу для (c, u):

$$c_1(t)u_t = a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + d(x,t)u - c(t)u_{2t}, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{31}$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in [0,h], \tag{32}$$

$$u_x(0,t) = u_x(h,t) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{33}$$

$$\nu_1(t)u(0,t) + \nu_2(t)u(h,t) = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{34}$$

За допомогою функції Гріна $\widetilde{G}_2$ запишемо розв'язок задачі (31) – (33)

$$u(x,t) = -\int_0^t\int_0^h \widetilde{G}_2(x,t,\xi,\tau)\,\frac{c(\tau)u_{2\tau}(\xi,\tau)}{c_1(\tau)}\,d\xi d\tau. \tag{35}$$

Продиференціювавши умову (34) по t і використавши рівняння (31) для знаходження $u_t(0,t)$, $u_t(h,t)$, отримаємо

$$c(t)(\nu_1(t)u_{2t}(0,t)+\nu_2(t)u_{2t}(h,t)) - (c_1(t)\nu_1'(t)+\nu_1(t)d(0,t))\,u(0,t) - (c_1(t)\nu_2'(t)+$$

$$+\nu_2(t)d(h,t))u(h,t) - \nu_1(t)a(0,t)u_{xx}(0,t) - \nu_2(t)a(h,t)u_{xx}(h,t) = 0. \tag{36}$$

З того, що $(c_2(t), u_2(t))$– розв'язок задачі (1)-(4), одержуємо

$$\nu_1(t)u_{2t}(0,t)+\nu_2(t)u_{2t}(h,t)=\mu_3'(t)-\nu_1'(t)u_2(0,t)-\nu_2'(t)u_2(h,t).$$

Тоді (36) можемо переписати у вигляді

$$c(t)(\mu_3'(t)-\nu_1'(t)u_2(0,t)-\nu_2'(t)u_2(h,t))-(c_1(t)\nu_1'(t)+\nu_1(t)d(0,t))u(0,t)-(c_1(t)\nu_2'(t)+ \\ +\nu_2(t)d(h,t))u(h,t)-\nu_1(t)a(0,t)u_{xx}(0,t)-\nu_2(t)a(h,t)u_{xx}(h,t)=0$$

або

$$c(t)(\mu_3'(t)-\nu_1'(t)u_2(0,t)-\nu_2'(t)u_2(h,t))+\int\limits_0^t c(\tau)K(t,\tau)d\tau=0, \tag{37}$$

де

$$K(t,\tau)=\frac{1}{c_1(\tau)}\int\limits_0^h\Bigg(\nu_1(t)a(0,t)\widetilde{G}_{2xx}(0,t,\xi,\tau)+\nu_2(t)a(h,t)\widetilde{G}_{2xx}(h,t,\xi,\tau)+(c_1(t)\nu_1'(t)+ \\ +\nu_1(t)d(0,t))\widetilde{G}_2(0,t,\xi,\tau)+(c_1(t)\nu_2'(t)+\nu_2(t)d(h,t))\widetilde{G}_2(h,t,\xi,\tau)\Bigg)u_{2\tau}(\xi,\tau)d\xi.$$

З припущень теореми отримаємо, що $\mu_3'(t)-\nu_1'(t)u_2(0,t)-\nu_2'(t)u_2(h,t)>0$, а це означає, що (37) – однорідне інтегральне рівняння Вольтерра другого роду. Тоді з того, що $u_2\in H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{Q_T})$ та з властивостей об'ємних теплових потенціалів [8, с. 318] випливає, що ядро $K(t,\tau)$ рівняння (37) має інтегровну особливість

$$|K(t,\tau)|\leqslant\frac{C_1}{(t-\tau)^{1-\gamma/2}}.$$

Тут C_1 – деяка додатна стала. Оскільки рівняння (37) має єдиний розв'язок $c(t)\equiv 0$ на $[0,T]$, то, повертаючись до задачі (31)-(33), отримаємо $u(x,t)\equiv 0$. Тобто, $c_1(t)=c_2(t)$ і $u_1(x,t)=u_2(x,t)$, що і доводить єдиність розв'язку задачі.

1. *Березницька І.Б.* Обернена задача для параболічного рівняння з нелокальною умовою перевизначення // Мат. методи та фіз. мех. поля. – 2001. – Т. 44, № 1. – С. 54-62.
2. *Jones B.F.* Various methods for finding unknown coefficient in parabolic equations // Comm. Pure Appl. Math. – 1963. – Vol. 16. – P. 33-34.
3. *Прилепко А.И., Костин А.Б.* Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении // Сиб. мат. журн. – 1993. – Т. 34, № 5. – С. 147-162.
4. *Иванчов Н.И.* Об обратной задаче одновременного определения коэффициентов теплопроводности и теплоемкости // Сиб. мат. журн. – 1994. – Т. 35, № 3. – С. 612-621.
5. *Музылев Н.В.* Теоремы единственности для некоторых обратных задач теплопроводности // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. – 1980. – Т. 20, № 2. – С.388-400.
6. *Іванчов М.І.* Обернені задачі теплопровідності з нелокальними умовами. – К., 1995.

7. *Гуль О., Дорожовець У., Іванчов М.* Обернені задачі визначення залежного від часу коефіцієнта при похідній за часом у параболічному рівнянні // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2003. – Вип. 62. – С. 27-37.
8. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М., 1967.
9. *Ivanchov M.I.* Inverse problems for equations of parabolic type. VNTL Publishers, 2003.
10. *Беккенбах Э. Беллман Р.* Неравенства. – М., 1965.
11. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М., 1967.

ON INVERSE PROBLEM FOR PARABOLIC EQUATION WITH UNKNOWN COEFFICIENT AT THE DERIVATIVE WITH RESPECT TO TIME VARIABLE

Ulyana FEDUS

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1

We establish conditions for existence and uniqueness of solution of the inverse problem for one-dimentional parabolic equation of general type with unknown coefficient at the derivative with respect to time variable and nonlocal overdetermination condition.

Key words: inverse problem, parabolic equation, nonlocal overdetermination condition, Green function.

Стаття надійшла до редколегії 02.04.2007

Прийнята до друку 24.10.2007

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

1. Стаття повинна містити результати нових досліджень автора з повним їхнім доведенням. Не доцільно робити великі огляди вже опублікованих результатів. Робити посилання на неопубліковані праці не можна.

2. Текст статті набирають на комп'ютері українською мовою. До редакційної колегії потрібно подавати:

два примірники статті з підписом автора (співавторів) на останній сторінці;

резюме та ключові слова українською й англійською мовами, ім'я, прізвище автора та назву статті англійською мовою (резюме повинно передавати зміст основних результатів статті, а не лише повторювати її назву);

електронний варіант статті та резюме на дискеті 3,5" (редколегія повертає авторові дискету; тексти можна надіслати за адресою *diffeq@franko.lviv.ua*);

довідка про автора (співавторів), у якій треба зазначити ім'я, по батькові та прізвище автора, місце роботи, посаду, домашню адресу, телефон та електронну адресу.

Оптимальний обсяг статті до 12 сторінок. Розмір шрифтів 10pt, висота сторінки – 190 mm, ширина – 135 mm.

3. Вимоги до набору.

> Текст статті створювати у версії LaTeX з кодуванням кириличних шрифтів „Кирилиця (Windows)“ (кодова сторінка 1251).
>
> На першій сторінці статті потрібно зазначити номер УДК.
>
> Номери формул ставити з правого боку і нумерувати лише формули, на які є посилання.
>
> У посиланнях на теорему з монографії зазначити сторінку, на якій вона описана.
>
> Рисунки до статті подавати у графічному форматі BMP чи PCX. Назва рисунка чи його номер не входять у зображення їх треба створювати засобами LaTeX'у. Вибираючи розмір графічного зображення, належить врахувати, що воно буде надруковане на принтері з роздільною здатністю 600 dpi.
>
> Літературу подавати загальним списком у порядку посилань на джерела в тексті статті.

Зразки бібліографічного опису книги, статті, препринту, дисертації, депонованого рукопису, тез доповідей конференцій (з'їздів та ін.):

1. *Грабович А.І.* Назва. – К., 1985.
2. *Кравчук О.М.* Назва // Укр. мат. журн. – 1985. – Т. 2, №2. – С. 4-20.
3. *Михайленко Г.Д.* Назва. – М., 1993. – 9 с. (Препринт/НАН України. ІППММ; N80.1).
4. *Коваленко О.В.* Назва: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – К., 1977.
5. *Сенів С.М.* Назва. – К., 1992. – 17 с. – Деп. в ДНТБ України, В2020-1995.
6. *Муравський В.К.* Назва // Нелінійні диференціальні рівняння: Тези доп. Київ, 27 серпня - 2 вересня 1994 р. – К., 1994. – С. 540-551.