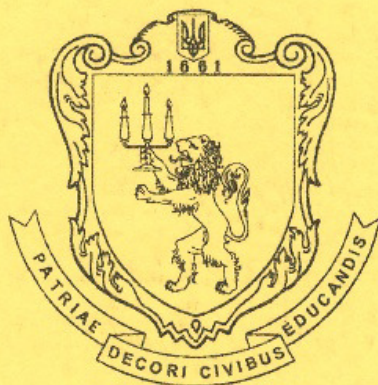


ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 68



Львів
Львівський національний університет імені Івана Франка
2008

ISSN 2078-3744

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 68



Львівський національний університет імені Івана Франка
2008

V I S N Y K
OF THE LVIV
UNIVERSITY

Series
Mechanics and Mathematics

Issue 68

Scientific journal

Published 1-2 issues per year

Published since 1965

Ivan Franko National
University of Lviv

В І С Н И К
ЛЬВІВСЬКОГО
УНІВЕРСИТЕТУ

Серія
механіко-математична

Випуск 68

Збірник наукових праць

Виходить 1-2 рази на рік

Видається з 1965 року

Львівський національний
університет імені Івана Франка

2008

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка
Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. – 2008. – Випуск 68.

Visnyk of the Lviv University. Series Mechanics and Mathematics. – 2008. – Vol. 68.

Вісник містить статті з теорії крайових задач для диференціальних рівнянь, алгебри, топології, теорії функцій комплексного змінного, функціонального аналізу, теорії ймовірності та статистики, проблем математичного моделювання фізико-механічних процесів і механіки.

Для наукових працівників, аспірантів і студентів старших курсів.

The issue contains articles on theory of boundary value problems for differential equations, algebra, topology, complex analysis, functional analysis, probability theory and statistics, problems of mathematical modelling of physical and mechanical processes and mechanics.

For scientists, post graduates and students.

Редакційна колегія: д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Зарічний* (відп. ред.); д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Комарницький* (заст. ред.); д-р фіз.-мат. наук, проф. *С. Лавренюк* (заст. ред.); канд. фіз.-мат. наук, доц. *О. Бугрій* (відп. секр.); д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Іванчов*; д-р фіз.-мат. наук, проф., член-кор. НАН України *О. Андрейків*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *В. Андрійчук*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *О. Артемович*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *Т. Банах*; д-р фіз.-мат. наук, проф., член-кор. НАН України *Я. Бурак*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *Я. Єлейко*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Заболоцький*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *А. Кондратюк*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *Б. Копитко*; канд. фіз.-мат. наук, проф. *Я. Прытупа*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *О. Скасків*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *О. Сторож*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *Г. Сулим*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Шеремета*.

Editorial board: M. Zarichny (executive editor-in-chief), M. Komarnitskyi (associate editor), S. Lavrenyuk (associate editor), O. Buhrii (executive secretary), M. Ivanchov, O. Andreykiv, V. Andriychuk, O. Artemovych, T. Banakh, Ya. Burak, Ya. Yeleyko, M. Zabolotskyi, A. Kondratyuk, B. Kopytko, Ya. Prytula, O. Skaskiv, O. Storozh, G. Sulym, M. Sheremeta.

Адреса редакційної колегії:

Львівський національний університет
імені Івана Франка,
механіко-математичний факультет,
вул. Університетська, 1 79000 Львів
Україна тел. (0322) 74-11-07

E-mail: lnu.visn.mm@gmail.com

Редактор *Н. Плиса*

Друкується за ухвалою Вченої Ради

Львівського національного університету імені Івана Франка

Editorial address:

Ivan Franko National University
of L'viv
Mechanical and Mathematical department
Universytets'ka st. 1 UA-79000 L'viv,
Ukraine tel. +(38) (0322) 74-11-07

© Львівський національний університет імені Івана Франка, 2008

ЗМІСТ

Світлій пам'яті професора С. П. Лавренюка	7
<i>Боднар Дмитро, Дмитришин Роман.</i> Про деякі ознаки збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними	22
<i>Бокало Микола, Дмитришин Юрій.</i> Задача без початкових умов для еволюційних варіаційних нерівностей на многовиді	31
<i>Бокало Тарас.</i> Мішана задача для параболічних рівнянь з нелокальною дією	43
<i>Волох Олександр, Мирослав Шеремета.</i> Про радіуси однолистості похідних Гельфонда-Леонтьєва лакунарних степеневих рядів	59
<i>Гаталевич Андрій, Кучма Марія.</i> I_2 -кільця та їхні властивості	68
<i>Гірник Маркіян.</i> Ціла функція з заданим індикатором	72
<i>Жерновий Юрій.</i> Стационарні характеристики одноканальної системи масового обслуговування з відмовами та можливістю виходу з ладу	75
<i>Жовнер Богдан, Колесніченко Мар'яна, Лопушанська Галина.</i> Узагальнені задачі Діріхле і Неймана для рівняння Лапласа в області зі щілиною	86
<i>Забавський Богдан.</i> Редукція матриць над 3-простою областю Безу	97
<i>Забавський Богдан, Кисіль Тетяна.</i> Праві кільця Безу, в яких радикал Джекобсона є цілком простим	104
<i>Кашуба Григорій, Комарницький Микола.</i> Скінченні за Дедекіндом диференціальні кільця і модулі та їхній первинний радикал	107
<i>Кирилич Володимир, Філімонов Андрій.</i> Локальна гладка розв'язність задачі з вільними межами для сингулярних гіперболічних систем квазілінійних рівнянь	115
<i>Копорж Катерина.</i> Простір фактороб'єктів компактного топологічного простору	152
<i>Лавренюк Сергій, Панат Оксана.</i> Задача на спряження для гіперболічних рівнянь другого та третього порядку	158
<i>Лозинська Віра, М'яус Ольга.</i> Функціональне числення для регулярних еліптичних диференціальних операторів	171
<i>Лугова Любомира.</i> Про зв'язок між максимумом модуля і максимальним членом цілого ряду Діріхле у термінах тричленної степеневі асимптотики	179
<i>Любицька Оlesia.</i> Про підсумовування двократних тригонометричних рядів узагальненими методами	186
<i>Опанасович Віктор, Дорош Мар'ян.</i> Комбінований згин і розтяг пластини, ослабленої двома колінеарними тріщинами, береги яких контактують	194
<i>Піпа Ганна.</i> Невід'ємні та акреативні збурення оператора третьої крайової задачі для диференціального виразу Штурма-Ліувілля з обмеженим операторним потенціалом	207
<i>Процак Наталія.</i> Мішана задача для ультрапараболічного рівняння з виродженням	215
<i>Снітко Галина.</i> Обернена задача для параболічного рівняння з невідомими молодшими коефіцієнтами в області з вільною межею	231
<i>Сулим Георгій, Цап Андрій.</i> Антиплоска задача для тріщини перпендикулярної до межі поділу двох анізотропних півпросторів	246
<i>Торган Галина.</i> Неіснування глобального розв'язку однієї гібридної системи еволюційних рівнянь	253
<i>Фединяк Степан, Шеремета Мирослав.</i> Про асимптотичні значення цілого ряду Діріхле стосовно його максимального члена	270

<i>Яцулка Петро.</i> Підсумовування логарифма модуля дзета-функції Рімана на критичній прямій	276
<i>Інформаційне повідомлення</i>	281

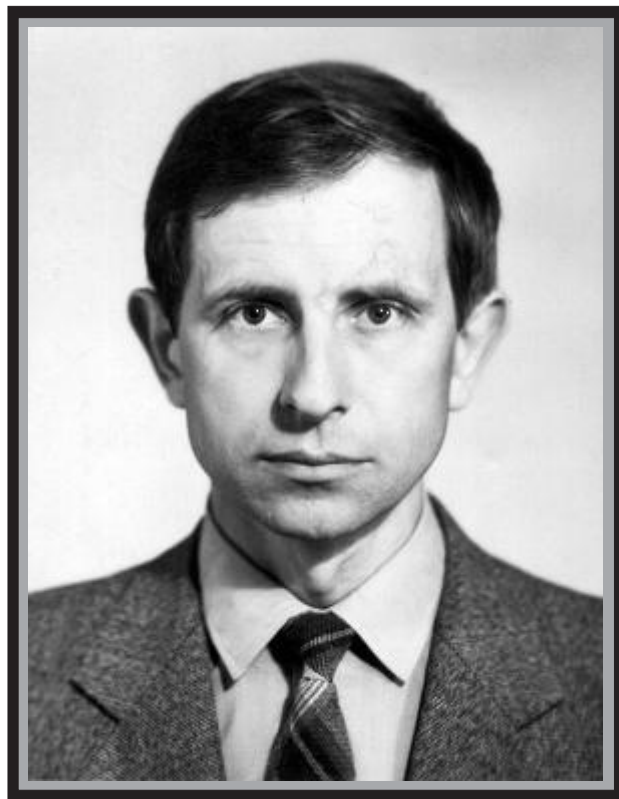
CONTENT

Scientific heritage S. P. Lavrenyuk.	7
<i>Bodnar Dmytro, Dmytryshyn Roman.</i> On some convergence criteria for branched continued fractions with nonequivalent variables	22
<i>Bokalo Mykola, Dmytryshyn Yuriy.</i> A problem without initial conditions for evolution variational inequalities on manifold	31
<i>Bokalo Taras.</i> Mixed problem for parabolic equation with dislocated action	43
<i>Volokh Oleksandr, Sheremeta Myroslav.</i> On the univalence radii of Gelfond-Leont'ev derivatives of gap power series	59
<i>Gatalevich Andriy, Kuchma Mariya.</i> I_2 -Rings and their properties	68
<i>Girnyk Markiiyan.</i> Entire function with prescribed indicator	72
<i>Zhernovyi Yuriy.</i> Stationary characteristics of the single-server queueing loss system with falling out possibility	75
<i>Jovner Bohdan, Kolesnichenko Maryana, Lopushanska Halyna.</i> Generalized Dirichlet and Neumann problems for a Laplace equation in domaine with a "gap"	86
<i>Zabavsky Bohdan.</i> Reduction of matrices over 3-simple Bezout domain	97
<i>Zabavsky Bohdan, Kisil Tetyana.</i> The right Bezout ring with completely prime Jakobson radical	104
<i>Kashuba Grygoryi, Komarnytckiy Mykola.</i> Dedekind finite differential rings and their prime radical	107
<i>Kyrylych Volodymyr, Filimonov Andriy.</i> Local differentiable solvability of the free boundary problem for singular hyperbolic systems of quasilinear equations	115
<i>Koporkh Kateryna.</i> A space of factor-objects of compact topological space	152
<i>Lavrenyuk Serhij</i> , <i>Panat Oksana.</i> Adjoint problem for hyperbolic equations of the second and third order	158
<i>Lozynska Vira, Myaus Olga.</i> Functional calculus for the regular elliptic differential operators	171
<i>Luhova Lyubomyra.</i> On connection between maximum modulus and maximal term of entire Dirichlet series in term of three-member asymptotics	179
<i>Lubytska Olesya.</i> About summability of double trigonometric series by generalized methods	186
<i>Opanasovych Viktor, Dorosh Maryan.</i> Combination of bending and strain of the plate, weaken of two collinear cracks with contacting edges	194
<i>Hanna Pipa.</i> Nonnegative and accretive perturbations of the operator of the third boundary problem for the Sturm-Liouville differential expression with the bounded operator potential	207
<i>Protsakh Nataliya.</i> Mixed problem for degenerate ultraparabolic equation	215
<i>Snitko Halyna.</i> Inverse problem for a parabolic equation with unknown minor coefficients in a free boundary domain	231
<i>Sulym Georgiy, Tsap Andriy.</i> Antiplane problem of two anisotropic half-spaces with a crack perpendicular to bimaterial interface	246
<i>Torhan Halyna.</i> Nonexistence of a global solution of one hybrid systems of evolution equations	253
<i>Fedynyak Stepan, Sheremeta Myroslav.</i> Asymptotic values of entire Dirichlet series with respect to its maximal term.	270

<i>Yatsulka Petro</i> Summation of the Riemann zeta-function mod logarithm on the critical	
line	276
<i>Erratum</i>	281

СВІТЛИЙ ПАМ'ЯТІ ПРОФЕСОРА С. П. ЛАВРЕНЮКА

(1946-2008)



4 червня 2008 року помер відомий український математик, професор, доктор фізико-математичних наук, заслужений професор Львівського національного університету імені Івана Франка – Сергій Павлович Лавренюк.

С. П. Лавренюк народився 4 листопада 1946 р. у селі Посива Острозького району Рівненської області в сім'ї селян. Після закінчення з золотою медаллю Кутянської середньої школи в 1964 р. він вступив на механіко-математичний факультет Львівського державного університету імені Івана Франка, який закінчив у 1969 р. за спеціальністю "Математика". З 1969 р. навчався в аспірантурі при кафедрі диференціальних рівнянь під керівництвом доц. Є. М. Парасюка. З 1972 р., після закінчення аспірантури, працював асистентом кафедри диференціальних рівнянь. У 1973 р. захистив кандидатську дисертацію "Про деякі обернені задачі теорії потенціалу", в якій досліджено умови єдиності та стійкості обернених задач теорії потенціалу. З 1974 р. С. П. Лавренюк працював на посаді старшого викладача, а з 1976 р. – на

посаді доцента кафедри диференціальних рівнянь. У 1983-1999 рр. С. П. Лавренюк – завідувач кафедри диференціальних рівнянь. У 1995 р. Сергій Павлович захистив докторську дисертацію "Задачі для еволюційних систем з виродженням, які містять другу похідну за часом", у якій побудовано класи коректності мішаних задач та задачі Фур'є для еволюційних систем з другою похідною за часом, частина рівнянь яких (або всі рівняння) вироджуються на деякій гіперплощині $\{t = \text{const}\}$.

1999-2006 рр. Сергій Павлович – професор кафедри диференціальних рівнянь. У 2004 році за особливі заслуги в розвитку науки і освіти, підготовку наукових кадрів вищої кваліфікації, багаторічну науково-педагогічну та громадську діяльність в університеті йому присвоїли почесне звання "Заслужений професор Львівського національного університету імені Івана Франка".

З 1999-2005 рр. Сергій Павлович одночасно з викладанням у Львівському національному університеті імені Івана Франка працював професором Краківської політехніки (Республіка Польща). Упродовж 2006-2008 рр. Сергій Павлович – завідувач кафедри математичної економіки та економетрії Львівського національного університету імені Івана Франка.

Протягом усього часу викладання на механіко-математичному факультеті Львівського національного університету імені Івана Франка професор Лавренюк С. П. читав лекції для студентів спеціальностей "Математика", "Економіка", "Механіка", "Прикладна математика та інформатика" з математичного аналізу, диференціальних рівнянь, методів оптимізації та варіаційного числення, рівнянь із частинними похідними, вищої математики, математичної економіки та економетрії. Його лекції вирізнялися чіткістю, логічно завершеною структурою, вмінням донести до слухача головні ідеї та принципи. С. П. Лавренюк прочитав у Львівському університеті також багато спеціальних курсів із диференціальних рівнянь, рівнянь математичної фізики та математичної економіки. Тематика цих спецкурсів розкривала широту його наукових інтересів: всі типи рівнянь із частинними похідними, варіаційні нерівності, економетрія, оптимальне керування в моделях макроекономіки. Студенти та співробітники механіко-математичного факультету на цих спецкурсах ознайомлювались з формулюванням та методикою дослідження багатьох задач і проблем. Часто їхні перші наукові спроби розпочинались із сформульованих Сергієм Павловичем задач.

Професор Лавренюк С. П. – автор близько 110 праць, серед яких є дев'ять навчальних посібників і підручників. Під його керівництвом захистили 13 кандидатських дисертацій.

Ми глибоко сумуємо з приводу смерті професора Лавренюка С. П., видатного вченого і педагога, надійного товариша і наставника. Віримо, що започатковані ним традиції, його ставлення до професійної математичної праці будуть продовжені у Львівському університеті та в багатьох наукових центрах України і Польщі теперішніми й майбутніми математиками.

НАУКОВА СПАДЩИНА С. П. ЛАВРЕНЮКА

Науковий шлях Сергія Павловича Лавренюка почався з дослідження обернених задач теорії потенціалу. Ці задачі коротко можна описати так. Нехай $E(x)$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ($n \geq 2$), – фундаментальний розв'язок деякого еліптичного оператора,

наприклад, оператора Лапласа, а $\mu(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, – задана функція (густина). Для довільної області $D \subset \mathbb{R}^n$ з гладкою межею S розглядається об'ємний (плоский при $n = 2$) потенціал

$$w(x; \mu, D) = \int_D \mu(y) E(x - y) dy$$

та потенціал простого шару

$$v(x; \mu, S) = \int_S \mu(y) E(x - y) dS_y.$$

Нехай G_0, G_1 – деякі підмножини простору $\mathbb{R}^n$, $G_0 \cap G_1 = \emptyset$, причому G_0 – область в $\mathbb{R}^n$. При заданій функції μ розглядають відображення

$$G_0 \supset D \rightarrow w(x; \mu, D), x \in G_1, \quad \text{та} \quad G_0 \supset S \rightarrow v(x; \mu, S), x \in G_1.$$

Виникають питання про існування та неперервність обернених до цих відображень. У цих питаннях – суть обернених задач теорії потенціалу. Якщо одне з цих відображень є ін'єктивним, то говорять про єдиність розв'язку відповідної задачі; якщо котресь з обернених відображень – неперервне, то кажуть, що відповідна задача є стійкою.

Сергій Павлович досліджував питання єдиності та стійкості обернених задач теорії потенціалу. Отримані ним результати [1]-[7] покладено в основу кандидатської дисертації "Про деякі обернені задачі теорії потенціалу", яку він виконав під науковим керівництвом доц. Є. М. Парасюка та успішно захистив у 1973 р.

Після захисту кандидатської дисертації Сергій Павлович шукав нові напрями наукових досліджень. "Пробним каменем" були праці [8], [9], де розглядали питання стійкості за Ляпуновим деяких систем звичайних диференціальних рівнянь. Потім з'явилися праці [10], [12], в яких таку саму проблему досліджували для рівняння коливання пластинки та його узагальнень. Сергій Павлович ще не раз повертався до цієї проблеми стосовно інших класів рівнянь і нерівностей [32], [33], [43], [45].

Питання стійкості за Ляпуновим розв'язків задач для еволюційних диференціальних рівнянь із частинними похідними тісно пов'язане з питанням про однозначну розв'язність таких задач. Тому Сергій Павлович почав розглядати і це питання. Першими у цьому напрямі є праці [11], [13], [14], [18], в яких досліджено однозначну розв'язність мішаних задач для рівняння коливання пластинки та подібні до нього. Далі С. П. Лавренюк дуже часто розглядав рівняння типу коливання пластинки. Він не раз говорив, що вони найулюбленіші для нього. Варто зауважити, що такі рівняння є важчими для дослідження порівняно з іншими еволюційними рівняннями.

Сергій Павлович продовжив наукові пошуки і в теорії параболічних рівнянь, які є представниками великого класу еволюційних рівнянь з похідною першого порядку за часом. Оскільки теорія розв'язності класичних задач у просторах гладких функцій для таких рівнянь вже тоді була досить добре розроблена, то Сергій Павлович звернувся до некласичних задач [15]-[17].

Починаючи з [19], усі наступні наукові праці Сергія Павловича – це значна ділянка на ниві теорії диференціальних рівнянь із частинними похідними, на якій він

успішно та плідно працював. Цю ділянку можна коротко описати так: еволюційні рівняння та асоційовані з ними варіаційні нерівності, які характеризуються хоча б однією з таких властивостей: виродженість, необмежена область задання, степенева нелінійність. Під виродженістю еволюційного рівняння розуміють перетворення його в стаціонарне на гіперплощинах $\{t = \text{const}\}$ для скінченної кількості значень часової змінної t . Необмеженість областей може бути або за просторовими змінними, або за часовою змінною (в напрямі $+\infty$ чи $-\infty$), або за всіма незалежними змінними. Для таких рівнянь і нерівностей С. П. Лавренюк розглядав питання існування та єдиності узагальнених розв'язків (із просторів Соболева) відповідних задач і досліджував деякі властивості цих розв'язків, зокрема, поведінка при $t \rightarrow +\infty$.

Рівняння та варіаційні нерівності, з якими працював Сергій Павлович, можна розбити на дві великі групи: 1) еволюційні рівняння та варіаційні нерівності з другою похідною за часом; 2) еволюційні рівняння та варіаційні нерівності з першою похідною за часом.

Перша група, якщо говорити точніше, складається з рівнянь та асоційованих з ними варіаційних нерівностей, модельними прикладами яких є частинні випадки рівняння

$$\varphi(t) u_{tt} + a(-\Delta)^m u + b(t)(-\Delta)^l u_t - c(t)\Delta_p u_t - d(t)\Delta_q u + g(t)|u_t|^{r-2}u_t + h(t)|u|^{s-2}u = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (1)$$

де $Q = \Omega \times I$, Ω – область (обмежена чи необмежена) в просторі $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$); I – числовий проміжок одного з типів $(0, T)$, $(0, +\infty)$ або $(-\infty, T)$; m, l – натуральні числа; $a = \text{const} > 0$; φ, b, c, d, g, h – неперервні та невід'ємні на I функції, причому $\varphi(t) > 0$ на множині $\bar{I} \setminus I_0$, де I_0 скінченна або порожня множина; p, q, r, s – числа, більші за 1, або функції від просторових змінних $x \in \Omega$ зі значеннями, більшими за 1; $\Delta_p v = \sum_{i=1}^n (|\nabla v|^{p-2} v_{x_i})_{x_i}$ – p -лапласіан, f – задана функція. Зокрема, частинними випадками рівняння (1) є хвильове рівняння $u_{tt} - \Delta u = f$, рівняння коливання пластинки $u_{tt} + \Delta^2 u + g u_t = f$, параболічне за Петровським рівняння з другою похідною за часом $u_{tt} + (-\Delta)^m u - \Delta u_t = f$.

Частинні випадки рівняння (1), в які входять обов'язково перші два члени його лівої частини, генерують певні підгрупи рівнянь і варіаційних нерівностей з першої групи. Методики досліджень об'єктів кожної з цих підгруп принципово не відрізняються, а між підгрупами існує принципова різниця в підходах до вивчення та й, зрештою, в результатах. Опишемо ці підгрупи та результати стосовно них.

До першої підгрупи належать еволюційні рівняння та системи з другою похідною за часом "гіперболічного типу" вигляду

$$\Phi(x, t) u_{tt} + A(t) u + G(x, t) u_t = F(x, t), \quad (2)$$

де Φ, G – матричні функції; u, F – векторні функції; $A(t)$ – сім'я лінійних еліптичних операторів [19]-[23], [25]-[28], [30], [31], [34], [35], [37]-[39], [66]. Типовим прикладом таких рівнянь є

$$t^\alpha u_{tt} + a(-\Delta)^m u + g(t) u_t = f(x, t), \quad \alpha \geq 0, \quad (3)$$

зокрема, рівняння коливання пластинки ($m = 2$).

Ці рівняння та системи розглядають у циліндрі $Q = \Omega \times I$, де Ω – обмежена область, а I може бути або інтервалом $(0, T)$, або променем $(-\infty, T)$. На бічній поверхні циліндра $S = \partial\Omega \times I$ задають однорідні крайові умови типу Діріхле. Коли $I = (0, T)$, то допускається, що рівняння вироджуються на деяких гіперплощинах $\{t = \text{const}\}$ в стаціонарні рівняння і ставляться початкові умови, причому, коли виродження відбувається при $t = 0$, то початкові умови мають спеціальний вигляд. Зокрема, у випадку рівняння (3) припускається, що $\alpha > 0$, і вимагається виконання початкових умов вигляду

$$u(x, 0) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +0} t^{\alpha/2} u_t(x, t) = 0.$$

Якщо ж $I = (-\infty, 0)$, то розглядаються не вироджені рівняння і задається поведінка розв'язку при $t \rightarrow -\infty$.

С. П. Лавренюк вперше дослідив розв'язність мішаних задач для рівнянь вигляду (2), які мають високий порядок за просторовими змінними і вироджуються [19]-[23], [25]-[27], [30], [31], [34], [35], [38], [66]. Під керівництвом Сергія Павловича цією тематикою займався також його учень Я. Сідельник.

У працях [28], [37], [39] вперше досліджено задачу Фур'є (задачу без початкових умов) для еволюційних рівнянь вигляду (2) та за певних умов на вихідні дані доведено її однозначну розв'язність.

Зауважимо, що праці [21]-[23], [25]-[28], [30], [31], [34], [35], [37]-[39] становили зміст докторської дисертації С. П. Лавренюка.

Другу підгрупу становлять еволюційні рівняння з другою похідною за часом "параболічного типу" вигляду

$$\Phi(x, t) u_{tt} + A(t) u + B(t) u_t + G(x, t) u_t = F(x, t),$$

де Φ, G – матричні функції; u, F – векторні функції; $A(t), B(t)$ – сім'ї еліптичних операторів, перша з яких складається з лінійних операторів [36], [42], [50], [51], [63], [101]. Типовими прикладами цієї підгрупи є

$$t^\alpha u_{tt} + a(-\Delta)^m u + b(t)(-\Delta)^l u_t + g(t) u_t = f(x, t), \quad \alpha \geq 0, \quad (4)$$

$$u_{tt} - a\Delta u - b(t)\Delta u_t - c(t)\Delta_{p(x)} u_t + g(t)|u_t|^{r(x)-2} u_t = f(x, t). \quad (5)$$

За тих самих припущень щодо областей задання, типу виродження, крайових і початкових умов, як і у випадку першої підгрупи, для рівнянь другої підгрупи, типовим прикладом яких є рівняння (4), С. П. Лавренюк вперше отримав класи однозначної розв'язності мішаних задач за наявності виродження (у вагових просторах Соболева) та задачі Фур'є для рівнянь без виродження.

У кінці XX ст. математики почали розглядати задачі для нелінійних рівнянь, в яких порядок нелінійності залежить від незалежних змінних. Під час їхнього дослідження виникають так звані узагальнені простори Лебега $L^{p(x)}$ та Соболева $W^{k,p(x)}$. Такі задачі зацікавили і С. П. Лавренюка. Він і О. М. Бугрій довели деякі нові властивості узагальнених просторів Лебега та Соболева. Використовуючи ці результати, С. П. Лавренюк для рівнянь, представником яких є рівняння (5), вперше дослідив

крайові задачі й одержав умови існування та єдиності їхніх розв'язків [89], [108], [109].

До третьої підгрупи входять гіперболічні рівняння та нерівності другого порядку [25], [77], [90], [97], [102], [103], [104], типові приклади яких отримують як частинні випадки рівняння

$$u_{tt} - \Delta u + g(t)|u_t|^{r-2}u_t + h(t)|u|^{s-2}u = f(x, t). \quad (6)$$

С. П. Лавренюк з учнями М. О. Колінко і П. Я. Пукачем вперше дослідили задачу Фур'є для класу нелінійних гіперболічних рівнянь другого порядку, модельним прикладом яких є рівняння (6) при $r > 2$, $h = 0$. У випадку обмежених за просторовими змінними областей задання рівнянь знайдено достатні умови існування та єдиності розв'язку цієї задачі в класі функцій, обмежених за часовою змінною.

Відомо, що при дослідженні лінійних рівнянь гіперболічного типу важливу роль відіграють поняття характеристичного конуса та поверхні. Проф. Лавренюк запропонував використати ці поняття для вивчення мішаної задачі в необмеженій області для класу нелінійних гіперболічних рівнянь другого порядку, модельним прикладом яких є рівняння (6) при $r > 2$, $h = 0$. У результаті отримано умови існування та єдиності розв'язку цієї задачі в класах функцій з довільною поведінкою на нескінченності, і при цьому показник нелінійності не зв'язаний з розмірністю області.

С. П. Лавренюк з учнем П. Я. Пукачем дослідили слабо нелінійні гіперболічні варіаційні нерівності другого порядку в обмеженій за часовою змінною та необмеженій за просторовими змінними області. Ці нерівності асоційовані з рівняннями, типовим прикладом яких є (6) при $r > 2$, $h = 0$. Такі нерівності у необмеженій області розглядали вперше, що зумовило певні труднощі з формулюванням задачі і з поняттям розв'язку. Сергій Павлович запропонував поняття слабого розв'язку варіаційної нерівності в необмеженій області як певну границю сильних розв'язків відповідних нерівностей в обмежених областях. При певних припущеннях на вихідні дані, зокрема, деякому співвідношенню між показником нелінійності та розмірністю простору, було доведено існування та єдиність слабких розв'язків досліджуваних нерівностей.

С. П. Лавренюк доволі часто повертався до своїх попередніх досліджень, уточнював та узагальнював отримані раніше результати. Він разом з ученицею О. Т. Панат розглянув мішану задачу для нелінійних зі змінними показниками нелінійності гіперболічних рівнянь, типовим прикладом яких є рівняння (6) при $r = r(x) > 2$, $s = s(x) > 2$, $x \in \Omega$, в області $Q = \Omega \times (0, T)$, де Ω – необмежена область в $\mathbb{R}^n$. За певних умов на коефіцієнти рівняння і початкові дані доводиться, що досліджувана задача має єдиний локально інтегровний узагальнений розв'язок.

Розглянемо тепер результати, які стосуються другої групи рівнянь, а саме, еволюційних рівнянь з першою похідною за часом. Тут можна виділити чотири підгрупи.

До першої з таких підгруп належать нелінійні параболічні рівняння та варіаційні нерівності [41], [48], [52], [55], [61], [70], [83], [91], [93], [100]. Типовим їхнім прикладом є рівняння

$$u_t - \Delta_{p(x)} u + b|u|^{q(x)-2}u = f(x, t),$$

де p, q – вимірні функції зі значеннями, більшими за 1, b – стала, f – деяка функція.

Було розглянуто системи параболічних варіаційних нерівностей без початкових умов в обмежених за просторовими змінними областях і отримано умови існування та єдиності розв'язку в класах функцій, які мають певну поведінку при $t \rightarrow -\infty$.

С. П. Лавренюк разом з учнями О. М. Бугрієм, І. М. Медведем і Г. П. Доманською вперше дослідив нелінійні параболічні варіаційні нерівності в необмежених за просторовими й обмежених за часовою змінними областях. Отримані ними результати стосовно однозначності розв'язності цих нерівностей є в певному сенсі непогіршуваними.

Другу підгрупу становлять псевдопараболічні рівняння та нерівності [40], [44], [47], [49], [54], [56], [57], [58], [62], [67], [69], [74], [92]. Псевдопараболічними називають рівняння, які можна подати у вигляді

$$M(t) u_t + A(t) u = F,$$

де $M(t)$, $A(t)$ – сім'ї еліптичних операторів, причому оператори сім'ї $M(t)$ є ін'єктивними.

С. П. Лавренюк і його учні М. О. Колінько, Г. П. Доманська та М. Б. Пташник вперше вивчили задачу без початкових умов у необмежених за часовою змінною (в напрямі $-\infty$) та мішану задачу в необмежених за просторовими змінними областях для нелінійних псевдопараболічних рівнянь і систем, а також для варіаційних псевдопараболічних нерівностей. Знайдено класи існування та єдиності узагальнених розв'язків таких задач.

До третьої підгрупи належать гіперболічні системи рівнянь і нерівностей першого порядку [59], [60], [68], [72], [75], [80], [81], [88].

С. П. Лавренюк та його учні І. Я. Кміть, М. О. Олісевич, Н. І. Гузіль і Л. Заремба (L. Zaręba) досліджували в необмежених областях мішані задачі та задачу Фур'є для півлінійних гіперболічних систем першого порядку з багатьма незалежними змінними

$$u_t + \sum_{i=1}^l A_i(x, t) u_{x_i} + C(x, t) u + g(t, u) = f(x, t), \quad (7)$$

де u, g, f – вектор-стовпці, A_i, C – квадратні матриці. Для цих задач отримано умови існування та єдиності розв'язку без припущень щодо поведінки даних задач і розв'язку на нескінченності. Це принципово нові результати для згаданих рівнянь. Також знайдено умови існування та єдиності розв'язку систем варіаційних гіперболічних нерівностей першого порядку в обмеженій області.

Четверту підгрупу становлять ультрапараболічні рівняння типу Колмогорова, до яких приводять імовірнісні моделі броунівського руху. До початку ХХІ століття для рівнянь такого типу здебільшого вивчали задачу Коші. Праці [71], [73], [76], [82], [84], [85], [87], [94], [96], [99], [105], [106] С. П. Лавренюка та його учнів Н. П. Процах, Н. І. Гузіль, Г. М. Барабаш, М. О. Олісевич присвячено розв'язності мішаних задач та задачі Фур'є в необмежених областях для нелінійних ультрапараболічних рівнянь і систем, які є певним узагальненням рівняння Колмогорова дифузії з інерцією:

$u_t - x u_y - a^2 u_{xx} = f(x, y, t)$, зокрема для системи рівнянь

$$u_t + \sum_{i=1}^l A_i(x, y, t) u_{y_i} - \sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x, y, t) u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n B_i(x, y, t) u_{x_i} + \\ + C(x, y, t) u + g(x, t, u) = f(x, y, t), \quad (5)$$

де u, g, f – вектор-стовпці, A_i, B_{sj}, B_j, C – квадратні матриці.

С. П. Лавренюк запропонував поняття сильного та слабкого розв'язку мішаних задач в необмежених областях для ультрапараболічних рівнянь, які подібні до тих, що є в теорії Р. Лакса стосовно гіперболічних операторів. Їх використано при вивченні розв'язності задач без початкових умов, мішаних задач і варіаційних нерівностей для нелінійних ультрапараболічних рівнянь, які містять нелінійності степеневого вигляду, в необмежених областях за часовою чи просторовими змінними. Вперше у випадку мішаних задач і варіаційних нерівностей для ультрапараболічних рівнянь доведено розв'язність у необмежених областях без припущень на зростання вихідних даних. Також доведено розв'язність мішаних задач та варіаційних нерівностей для ультрапараболічних рівнянь в узагальнених просторах Лебега у випадку обмежених областей. Знайдено певні оцінки розв'язків мішаних задач для ультрапараболічних рівнянь.

Варто зазначити, що Сергій Павлович мав великі плани щодо розширення тематики наукових досліджень. Про це можна стверджувати на підставі праць [100], [101], [108], [109], в яких він разом з учнями О. Є. Коркуною, О. Т. Панат і Г. Р. Торган досліджував нові класи рівнянь, а також проблему необмеженості розв'язків нелінійних рівнянь у скінченний момент часу. Сергій Павлович також цікавився питанням економетричного моделювання [98].

Р. В. Андрусак, Г. М. Барабаш, О. І. Бобик, М. М. Бокало, О. М. Бугрій, Ю. Д. Головатий, Г. Є. Грабчак, Н. М. Гринців, Г. П. Доманська, М. І. Іванчов, С. Д. Івасишен, П. І. Каленюк, В. М. Кирилич, І. Я. Кміть, В. А. Козицький, Г. П. Лопушанська, М. О. Олісевич, Н. П. Процах, П. Я. Пукач, Б. Й. Пташник, В. М. Флюд

СПИСОК КАНДИДАТСЬКИХ ДИСЕРТАЦІЙ, ЗАХИЩЕНИХ ПІД КЕРІВНИЦТВОМ С. П. ЛАВРЕНЮКА

1. *Сідельник Ярослав Іванович*. Змішані задачі для вироджених рівнянь типу коливання пластинки. 24.10.1990. Чернівці.
2. *Кміть Ірина Ярославівна*. Нелокальні задачі для гіперболічних систем першого порядку. 17.12.1992. Львів.
3. *Пукач Петро Ярославович*. Змішані задачі для параболічних рівнянь та систем з виродженням. 18.11.1993. Львів.
4. *Колінько Марія Омелянівна*. Задачі Фур'є для параболічних та псевдопараболічних рівнянь та систем. 15.02.1996. Львів.

5. *Барабаш Галина Михайлівна*. Стійкість за Ляпуновим деяких еволюційних рівнянь і систем з другою похідною за часом. 18.06.1998. Львів.
6. *Оліскевич Маріанна Олександрівна*. Стійкість розв'язків мішаних задач для гіперболічних рівнянь і систем. 19.11.1998. Львів.
7. *Lech Zareba*. Zagadnienia dla układów hiperbolicznych rzędu pierwszego. 5.05.2001. Kraków.
8. *Бугрій Олег Миколайович*. Параболічні варіаційні нерівності без початкових умов. 18.04.2002. Львів.
9. *Доманська Галина Петрівна*. Задачі для псевдопараболічних систем та варіаційних нерівностей в необмежених областях. 18.04.2002. Львів.
10. *Процак Наталія Петрівна*. Задачі для еволюційних рівнянь та систем високого порядку з виродженням. 20.02.2003. Львів.
11. *Katarzyna Urbanska*. Zagadnienia dla równań parabolicznych rzędu drugiego w obszarach nieograniczonych. 05.05.2004. Kraków.
12. *Гузіль Наталія Іванівна*. Задачі для гіперболічних систем першого порядку та ультрапараболічних систем у необмежених областях. 10.11.2005. Львів.
13. *Медвідь Іван Миколайович*. Задачі для параболічних та еліптичних рівнянь в необмежених областях. 08.05.2008. Львів.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ С. П. ЛАВРЕНЮКА

1. *Лавренюк С. П.* Єдиність розв'язку оберненої задачі потенціалу простого шару / *Лавренюк С. П.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 1972. – Вип. 7. – С. 98-99.
2. *Лавренюк С. П.* Про метод редукції для нелінійних систем / *Лавренюк С. П., Парасюк Є. М.* // Укр. мат. журн. – 1973. – Т. 25, № 4. – С. 546-549.
3. *Лавренюк С. П.* Інтегральні оцінки стійкості оберненої задачі метагармонічного потенціалу простого шару / *Лавренюк С. П., Парасюк Є. М.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 1973. – Вип. 8. – С. 51-54.
4. *Лавренюк С. П.* Об устойчивости обратных задач логарифмического потенциала / *Лавренюк С. П.* // Мат. физика. – 1973. – № 14. – С. 88-94.
5. *Лавренюк С. П.* Єдиність і стійкість деяких обернених задач теорії потенціалу / *Лавренюк С. П.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 1975. – Вип. 10. – С. 20-23.
6. *Лавренюк С. П.* Стійкість розв'язку оберненої задачі метагармонічного потенціалу простого шару / *Лавренюк С. П.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 1977. – Вип. 12. – С. 25-29.
7. *Лавренюк С. П.* Об одной обратной задаче теории потенциала / *Лавренюк С. П., Парасюк Е. Н.* // Мат. физика. – 1977. – № 21. – С. 85-91.
8. *Лавренюк С. П.* Стійкість в цілому однієї неавтономної системи другого порядку / *Лавренюк С. П.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 1978. – Вип. 13. – С. 16-19.
9. *Лавренюк С. П.* Про стійкість в цілому однієї системи рівнянь / *Лавренюк С. П.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 1979. – Вип. 14. – С. 66-69.

10. *Лавренюк С. П.* Стійкість за Ляпуновим нульового розв'язку рівняння коливання пластинки / *Лавренюк С. П.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 1981. – Вип. 18. – С. 3-6.
11. *Лавренюк С. П.* Існування і єдиність розв'язку рівняння коливання пластинки / *Лавренюк С. П.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 1981. – Вип. 18. – С. 6-11.
12. *Лавренюк С. П.* Стійкість за Ляпуновим однієї змішаної задачі для рівняння четвертого порядку / *Лавренюк С. П.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 1982. – Вип. 20. – С. 22-25.
13. *Івахненко Л. Я.* Існування узагальненого розв'язку однієї змішаної задачі для рівняння типу коливання пластинки / *Івахненко Л. Я., Лавренюк С. П.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 1983. – Вип. 21. – С. 68-73.
14. *Лавренюк С. П.* Існування узагальненого розв'язку однієї змішаної задачі для рівняння четвертого порядку / *Лавренюк С. П.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 1983. – Вип. 21. – С. 64-68.
15. *Лавренюк С. П.* Нелокальна задача для квазілінійного параболічного рівняння / *Лавренюк С. П.* // Вісн. Львів. ун-ту. – Сер. мех-мат. – 1985. – Вип. 24. – С. 3-6.
16. *Лавренюк С. П.* Нелокальні задачі для еліптичних рівнянь з параметром і параболічних рівнянь / *Лавренюк С. П.* // Вісн. Львів. ун-ту. – Сер. мех-мат. – 1986. – Вип. 25. – С. 3-5.
17. *Лавренюк С. П.* Нелокальні задачі для параболічних рівнянь другого порядку / *Лавренюк С. П.* // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1986. – № 12. – С. 3-5.
18. *Лавренюк С. П.* Задача Коші для рівняння типу коливання пластинки з невід'ємною характеристичною формою / *Лавренюк С. П.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 1987. – Вип. 28. – С. 7-9.
19. *Лавренюк С. П.* Існування розв'язку задачі Коші для рівняння типу поперечних коливань стержня з виродженням / *Лавренюк С. П.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 1988. – Вип. 30. – С. 3-5.
20. *Лавренюк С. П.* Про слабу збіжність узагальнених розв'язків рівняння типу поперечних коливань стержня / *Лавренюк С. П.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 1989. – Вип. 32. – С. 3-5.
21. *Лавренюк С. П.* Смешанная задача для вырождающегося уравнения типа колебания пластины / *Лавренюк С. П.* // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25, № 8. – С. 1375-1383.
22. *Лавренюк С. П.* О существовании обобщенных решений задачи Коши для вырождающегося уравнения типа колебания пластины / *Лавренюк С. П.* // Современный анализ и его приложение. – 1989. – С. 93-99.
23. *Лавренюк С. П.* Задача Коши для сильно вырождающегося уравнения типа колебания пластины / *Лавренюк С. П.* // Нелинейные граничные задачи. – 1989. – № 1. – С. 64-67.
24. *Лавренюк С. П.* Варіаційне числення й оптимальне керування / *Лавренюк С. П.* Київ, МНК, ВО 1990. – 108 с.
25. *Лавренюк С. П.* Змішана задача для майже лінійного гіперболічного рівняння з виродженням / *Лавренюк С. П.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 1990. – Вип. 34. – С. 34-36.
26. *Лавренюк С. П.* Задача Коши для вырождающегося уравнения типа колебания пластины / *Лавренюк С. П.* // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1990. – № 32. – С. 79-81.
27. *Лавренюк С. П.* Про задачу без початкових умов для рівняння типу коливання пластинки / *Лавренюк С. П.* // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1990. – № 6. – С. 26-28.

28. *Лавренюк С. П.* Задача для одного эволюционного уравнения в полуограниченном по времени цилиндре / *Лавренюк С. П.* // Укр. мат. журн. – 1990. – Т. 42, № 11. – С. 1481-1486.
29. *Лавренюк С. П.* Про одну змішану задачу для рівняння типу коливання пластинки / *Лавренюк С. П.* // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1991. – № 7. – С. 23-25.
30. *Лавренюк С. П.* Змішана задача для рівняння типу коливання пластинки, що сильно вироджується / *Лавренюк С. П.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 1991. – Вип. 36. – С. 3-5.
31. *Лавренюк С. П.* Смешанная задача для уравнения типа колебания пластинки, вырождающегося в конечный момент времени / *Лавренюк С. П.* // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27, № 12. – С. 2099-2106.
32. *Лавренюк С. П.* Про стійкість за Ляпуновим однієї еволюційної системи / *Лавренюк С. П.* // Доп. АН України. Сер. А. – 1992. – № 2. – С. 9-11.
33. *Лавренюк С. П.* Об устойчивости поперечных колебаний стержня с острым краем / *Лавренюк С. П.* // Нелинейные граничные задачи. – 1992. – № 4. – С. 12-20.
34. *Лавренюк С. П.* Змішана задача для однієї слабо виродженої еволюційної системи / *Лавренюк С. П.* // Доп. АН України. Сер. А. – 1993. – № 5. – С. 18-20.
35. *Лавренюк С. П.* Задача з видозміненими початковими умовами для однієї еволюційної системи, яка вироджується у початковий момент часу / *Лавренюк С. П.* // Доп. АН України. Сер. А. – 1993. – № 6. – С. 12-15.
36. *Лавренюк С. П.* Про єдиність розв'язку задачі без початкових умов для одного еволюційного рівняння / *Лавренюк С. П.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 1993. – Вип. 38. – С. 3-6.
37. *Лавренюк С. П.* Задача без начальных условий для одной эволюционной системы. Условия единственности / *Лавренюк С. П.* // Нелинейные граничные задачи. – 1993. – № 5. – С. 53-58.
38. *Лавренюк С. П.* Смешанная задача для сильно вырождающейся эволюционной системы / *Лавренюк С. П.* // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30, № 8. – С. 1405-1411.
39. *Лавренюк С. П.* Задача без начаткових умов для однієї еволюційної системи з другою похідною за часом / *Лавренюк С. П.* // Доп. НАН України. Сер. А. – 1995. – № 7. – С. 8-11.
40. *Бас М. О.* Про єдиність розв'язку задачі Фур'є для однієї системи типу Соболева-Гальперна / *Бас М. О., Лавренюк С. П.* // Укр. мат. журн. – 1996. – Т. 48, № 1. – С. 124-128.
41. *Лавренюк С. П.* Параболические вариационные неравенства без начальных условий / *Лавренюк С. П.* // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т. 32, № 10. – С. 1396-1400.
42. *Колінько М. О.* Задача Фур'є для однієї еволюційної системи з другою похідною за часом / *Колінько М. О., Лавренюк С. П.* // Математичні студії. – 1996. – № 6. – С. 73-84.
43. *Лавренюк С. П.* Стійкість за Ляпуновим нульового розв'язку одного нелінійного параболічного рівняння / *Лавренюк С. П., Онишкевич Г. М.* // Доп. НАН України. Сер. А. – 1996. – № 6. – С. 10-12.
44. *Колінько М. О.* Єдиність розв'язку задачі Фур'є для однієї нелінійної псевдопараболічної системи / *Колінько М. О., Лавренюк С. П.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 1996. – Вип. 45. – С. 71-77.
45. *Лавренюк С. П.* Стабілізація розв'язків задачі без початкових умов для системи типу Нав'є-Стокса / *Лавренюк С. П., Онишкевич Г. М.* // Препринт N 7. – Львів, Інститут прикладних проблем механіки і математики, 1996. – 38 с.

46. *Лавренюк С. П.* Курс диференціальних рівнянь / *Лавренюк С. П.* – Львів: Видавництво науково-технічної літератури, 1997. – 216 с.
47. *Колінко М. О.* Існування розв'язку однієї нелінійної псевдопараболічної системи / *Колінко М. О., Лавренюк С. П.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1997. – Вип. 48. – С. 44-49.
48. *Лавренюк С. П.* Системи параболічних варіаційних нерівностей без початкових умов / *Лавренюк С. П.* // Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 49, № 4. – С. 540-547.
49. *Лавренюк С. П.* Псевдопараболічні варіаційні нерівності без початкових умов / *Лавренюк С. П., Пташник М. Б.* // Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50, № 7. – С. 919-929.
50. *Лавренюк С. П.* Про єдиність розв'язку деяких еволюційних систем з виродженням / *Лавренюк С. П.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1998. – Вип. 51. – С. 55-60.
51. *Lavrenyuk S. P.* On the uniqueness of solution of a mixed problem for one degenerated evolutionary system / *Lavrenyuk S. P.* // Математичні студії. – 1998. – Т. 9, № 1. – С. 21-28.
52. *Лавренюк С. П.* Системи параболічних варіаційних нерівностей без початкових умов з довільною поведінкою розв'язку на нескінченності / *Лавренюк С. П.* // Доп. НАН України. – 1998. – № 2. – С. 40-43.
53. *Лавренюк С. П.* Збірник задач з диференціальних рівнянь / *Лавренюк С. П.* Львів, 1998. – 64 с.
54. *Lavrenyuk S. P.* Fourier problem for linear Sobolev-Halperin system / *Lavrenyuk S. P., Kolinko M. O.* // Demonstratio mathematica. – 1998. – Vol. 31, № 1. – P. 26-32.
55. *Lavrenyuk S. P.* Parabolic variational inequalities without initial data / *Lavrenyuk S. P.* // Нелинейные граничные задачи. – 1998. – № 8. – С. 173-178.
56. *Domans'ka H.* The Fourier problem for one nonlinear pseudoparabolic equation in unbounded domain / *Domans'ka H., Lavrenyuk S.* // Математичні студії. – 1999. – Т. 12, № 2. – С. 149-160.
57. *Лавренюк С. П.* Деякі нелінійні псевдопараболічні варіаційні нерівності без початкових умов / *Лавренюк С. П., Пташник М. Б.* // Укр. мат. журн. – 1999. – Т. 51, № 3. – С. 328-337.
58. *Лавренюк С. П.* Задача без начальных условий для нелинейной псевдопараболической системы / *Лавренюк С. П., Пташник М. Б.* // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36, № 5. – С. 667-673.
59. *Lavrenyuk S. P.* Nonlocal problem for the nonlinear hyperbolic system of the first order without initial conditions / *Lavrenyuk S. P., Zaręba L.* // Математичні студії. – 2000. – Т. 14, № 2. – С. 150-158.
60. *Lavrenyuk S.* The initial-boundary value problem for the first order degenerated hyperbolic system / *Lavrenyuk S., Zaręba L.* // Demonstratio Mathematica. – 2000. – Vol. 33, № 1. – P. 75-82.
61. *Бугрій О. М.* Мішана задача для параболічного рівняння, яке узагальнює рівняння політропної фільтрації / *Бугрій О. М., Лавренюк С. П.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 56. – С. 33-43.
62. *Лавренюк С. П.* Задача Фур'є для псевдопараболічного рівняння / *Лавренюк С. П., Пташник М. Б.* // Нелинейные граничные задачи. – 2000. – № 10. – С. 123-135.
63. *Лавренюк С. П.* Мішана задача для одного нелінійного параболічного рівняння / *Лавренюк С. П., Процак Н. П.* // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2000. – Т. 43, № 3. – С. 56-63.
64. *Лавренюк С. П.* Внутрішня гладкість розв'язку мішаної задачі для еволюційної системи з виродженням / *Лавренюк С. П., Процак Н. П.* // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". Сер. прикладна матем. – 2000. – № 411. – С. 200-202.

65. *Лавренюк С. П.* Математичні основи мікроекономіки: ч.1. Теорія споживання. – 80 с.; ч.2. Теорія виробництва – 70 с. ; ч.3. Теорія рівноваги. – 102 с. / *Лавренюк С. П.* – Львів: Вид. Львів. ун-ту, 2000.
66. *Лавренюк С. П.* Решение почти всюду смешанной задачи для одной вырождающейся линейной эволюционной системы / *Лавренюк С. П.* // Сиб. матем. журн. – 2001. – Т. 42, № 1. – С. 76-86.
67. *Доманська Г. П.* Мішана задача для однієї псевдопараболічної задачі в необмеженій області / *Доманська Г. П., Лавренюк С. П.* // Укр. мат. журн. – 2001. – Т. 53, № 1. – С. 123-129.
68. *Лавренюк С. П.* Мішана задача для слабо нелінійної системи гіперболічних рівнянь з виродженням / *Лавренюк С. П., Олісевич М. О.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 2001. – Вип. 59. – С. 139-147.
69. *Domanska G.* The initial-boundary value problem for some pseudoparabolic system in unbounded domain / *Domanska G., Lavrenyuk S.* // Acta mathematica (Universitatis Iagellonicae). – 2001. – Т. 39. – Р. 229-238.
70. *Бугрій О. М.* Параболічна варіаційна нерівність, що узагальнює рівняння політропної фільтрації / *Бугрій О. М., Лавренюк С. П.* // Укр. мат. журн. – 2001. – Т. 53, № 7 – С. 867-868.
71. *Лавренюк С. П.* Мішана задача для ультрапараболічного рівняння в необмеженій області / *Лавренюк С. П., Процак Н. П.* // Укр. мат. журн. – 2002. – Т. 54, № 8. – С. 1053-1066.
72. *Лавренюк С.* Задача Фур'є для однієї нелінійної системи гіперболічних рівнянь з трьома незалежними змінними / *Лавренюк С., Олісевич М.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 2002. – Вип. 60. – С. 80-91.
73. *Лавренюк С. П.* Задача Фур'є для ультрапараболічного рівняння / *Лавренюк С. П., Процак Н. П.* // Нелинейные граничные задачи. – 2002. – № 12. – С. 128 - 139.
74. *Domanska G. P.* The initial-boundary problem for nonlinear pseudoparabolic system / *Domanska G. P., Lavrenyuk S. P.* // Математичні студії. – 2002. – Т. 17, № 2. – С. 175-188.
75. *Лавренюк С. П.* Метод Гальоркіна для гіперболічних систем першого порядку з двома незалежними змінними / *Лавренюк С. П., Олісевич М. О.* // Укр. мат. журн. – 2002. – Т. 54, № 10. – С. 1356-1370.
76. *Барабаш Г. М.* Мішана задача для напівлінійного ультрапараболічного рівняння / *Барабаш Г. М., Лавренюк С. П., Процак Н. П.* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – Т. 45, № 4. – С. 27-34.
77. *Колінько М.* Задача Фур'є для нелінійного гіперболічного рівняння другого порядку / *Колінько М., Лавренюк С., Пукач П.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 2003. – Вип. 62. – С. 67-79.
78. *Лавренюк С. П.* Основи економетрії. / *Лавренюк С. П., Олісевич М. О.* Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2003. – 368 с.
79. *Козицький В. А.* Основи математичної економіки. Теорія споживання / *Козицький В. А., Лавренюк С. П., Олісевич М. О.* Львів, 2004. – 264 с.
80. *Лавренюк С. П.* Задача без начальных условий для вырождающейся гиперболической системы первого порядка / *Лавренюк С. П., Олисеви́ч М. А.* // Укр. матем. вісн. – 2004. – Т. 1, № 2. – С. 86-101.
81. *Гузіль Н. І.* Задача без початкових умов для гіперболічної системи першого порядку / *Гузіль Н. І., Лавренюк С. П.* // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2004. – Т. 47, № 2. – С. 108-115.

82. *Лавренюк С. П.* Варіаційні ультрапараболічні нерівності / *Лавренюк С. П., Процак Н. П.* // Укр. мат. журн. – 2004. – Т. 56, № 12. – С. 1616-1628.
83. *Доманська Г. П.* Параболічні варіаційні нерівності в необмежених областях зі зростаючими даними / *Доманська Г. П., Колінько М. О., Лавренюк С. П.* // Доп. НАН України – 2005. – № 6. – С. 28-32.
84. *Лавренюк С. П.* Варіаційні ультрапараболічні нерівності без початкових умов / *Лавренюк С. П., Процак Н. П.* // Математичні студії. – 2005. – Т. 23, № 1. – С. 57-67.
85. *Гузіль Н. І.* Мішана задача для напівлінійної ультрапараболічної системи в необмеженій області / *Гузіль Н. І., Лавренюк С. П.* // Доп. НАН України – 2005. – № 5. – С. 11-16.
86. *Козицький В. А.* Основи математичної економіки. Теорія фірми / *Козицький В. А., Лавренюк С. П., Олісевич М. О.* – Львів, 2005. – 324 с.
87. *Лавренюк С. П.* Ультрапараболічні варіаційні нерівності в необмеженій за просторовими змінними області / *Лавренюк С. П., Процак Н. П.* // Доп. НАН України. – 2005. – № 10. – С. 11-18.
88. *Гузіль Н. І.* Система гіперболічних варіаційних нерівностей першого порядку / *Гузіль Н. І., Лавренюк С. П.* // Укр. матем. вісник. – 2005. – Т.2, № 4. – С. 445-462.
89. *Доманська Г. П.* Задача для нелінійного гіперболічного рівняння третього порядку / *Доманська Г. П., Лавренюк С. П., Процак Н. П.* // Вісник Чернівецького ун-ту. Математика. – 2005. – Вип. 269. – С. 34-42.
90. *Лавренюк С. П.* Варіаційна гіперболічна нерівність у необмежених за просторовими змінними областях / *Лавренюк С. П., Пукач П. Я.* // Доп. НАН України. – 2006. – № 2. – С. 30-35.
91. *Доманская Г. П.* Параболическое вариационное неравенство в неограниченных областях / *Доманская Г. П., Колінько М. Е., Лавренюк С. П.* // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42, № 1. – С. 61-78.
92. *Доманська Г. П.* Задача без початкових умов для псевдопараболічного рівняння в узагальнених просторах Лебега / *Доманська Г. П., Колінько М. О., Лавренюк С. П.* // Математичні студії. – 2006. – Т. 25, № 1. – С. 73-86.
93. *Лавренюк С. П.* Параболічна варіаційна нерівність вищого порядку в необмежених областях / *Лавренюк С. П., Медвідь І. М.* // Доп. НАН України. – 2006. – № 7. – С. 12-18.
94. *Лавренюк С. П.* Мішана задача для нелінійного ультрапараболічного рівняння, яке узагальнює рівняння дифузії з інерцією / *Лавренюк С. П., Процак Н. П.* // Укр. мат. журн. – 2006. – Т. 58, № 9. – С. 1192-1210.
95. *Доманська Г. П.* Практикум з економетрії / *Доманська Г. П., Лавренюк С. П.* – Львів: Вид. ЛНУ імені Івана Франка, 2006. – 102 с.
96. *Лавренюк С. П.* Мішана задача для ультрапараболічного рівняння з нелокальною дією / *Лавренюк С. П., Олісевич М. О.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 2006. – Вип. 66. – С. 99-114.
97. *Lavrenyuk S.* The mixed problem for a semilinear hyperbolic equation in generalized Lebesgue spaces / *Lavrenyuk S., Panat O.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 2006. – Вип. 66. – С. 243-256.
98. *Лавренюк С. П.* Оцінювання економетричної моделі зі змінною варіацією / *Лавренюк С. П., Олісевич М. О.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. економ. – 2006. – Вип. 36. – С. 835-845.
99. *Гузіль Н. І.* Мішана задача для напівлінійної ультрапараболічної системи в області, необмеженій за просторовими змінними / *Гузіль Н. І., Лавренюк С. П.* // Математичні студії. – 2006. – Т. 26, № 2. – С. 162-173.

-
100. Коркуна О. Є. Про деякі властивості розв'язку мішаної задачі для нелінійного 2 b -параболічного рівняння / Коркуна О. Є., Лавренюк С. П. // Вісник Чернівецького ун-ту. Математика. – 2006. – Вип. 314-315. – С. 100-104.
 101. Лавренюк С. П. Необмеженість розв'язків у скінченний момент часу одного слабко нелінійного рівняння четвертого порядку / Лавренюк С. П., Торган Г. Р. // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – Т. 50, № 3. – С. 88-93.
 102. Lavrenyuk S. Variational hyperbolic inequality in the domains unbounded in spatial variables / Lavrenyuk S., Pukach P. // International Journal of Evolution Equations. – 2007. – Vol. 3, № 1. – P.103-122.
 103. Лавренюк С. П. Мішана задача для нелінійного гіперболічного рівняння в необмеженій області / Лавренюк С. П., Панат О. Т. // Доп. НАН України. – 2007. – № 1. – С. 12-17.
 104. Лавренюк С. П. Мішана задача для нелінійного гіперболічного рівняння в необмеженій за просторовими змінними області / Лавренюк С. П., Пукач П. Я. // Укр. мат. журн. – 2007. – Т. 59, № 11. – С. 1523-1531.
 105. Лавренюк С. П. Мішана задача для напівлінійного ультрапараболічного рівняння у необмеженій області / Лавренюк С. П., Оліскевич М. О. // Укр. мат. журн. – 2007. – Т. 59, № 12. – С. 1661-1673.
 106. Lavrenyuk S. Boundary value problem for nonlinear ultraparabolic equation in unbounded with respect to time variable domain / Lavrenyuk S., Protsakh N. // Tatra Mt. Math. Pull. – 2007. – Vol. 38. – P. 131-146.
 107. Коркуна О. Про носій розв'язку задачі Коші для нелінійного 2 b -параболічного рівняння / Лавренюк С., Коркуна О. // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 2007. – Вип. 67. – С. 153-165.
 108. Лавренюк С. П. Необмеженість розв'язків одного гіперболічного рівняння третього порядку / Лавренюк С. П., Панат О. Т. // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2008. – Т. 51, № 3. – С. 36-45.
 109. Лавренюк С. П. Задача на спряження для гіперболічних рівнянь другого та третього порядку / Лавренюк С. П., Панат О. Т. // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 2008. – Вип. 69. – С. 164-170.
 110. Лавренюк С. Додаткові розділи економетрії: Текст лекцій / Лавренюк С., Флюд В. Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2008. – 182 с.

УДК 517.524

ПРО ДЕЯКІ ОЗНАКИ ЗБІЖНОСТІ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ З НЕРІВНОЗНАЧНИМИ ЗМІННИМИ

Дмитро БОДНАР¹, Роман ДМИТРИШИН²

¹ Тернопільський державний економічний університет,
46000, Тернопіль, вул. Львівська, 11,
e-mail: dmytro_bodnar@hotmail.com

² Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
76000, Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57
e-mail: dmytryshynr@hotmail.com

З'ясовано ознаки збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, частинні ланки яких мають вигляд $\frac{g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})z_{i(k)}}{1}$.

Ключові слова: гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними, збіжність, мажоранта.

1. Одним з найважливіших питань в аналітичній теорії неперервних дробів та їхніх багатовимірних узагальнень є виявлення ефективних ознак збіжності таких дробів. Різні ознаки збіжності неперервних дробів з частинними ланками вигляду $\frac{g_k(1-g_{k-1})z_k}{1}$ наведено в монографії [8]. У працях [4, 5, 7] знайдено ознаки збіжності двовимірних неперервних дробів подібного типу, а в [2, 3, 6] – відповідних гіллястих ланцюгових дробів.

Ми знайшли ознаки збіжності гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (ГЛДЗНЗ) вигляду

$$1 + \sum_{i_1=1}^N \frac{g_{i(1)}(1-g_0)z_{i(1)}}{1 + \prod_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})z_{i(k)}}{1}}, \quad (1)$$

і оберненого до нього ГЛДЗНЗ

$$1 + \sum_{i_1=1}^N \frac{1}{1 + \prod_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{g_{i(k)}(1 - g_{i(k-1)})z_{i(k)}}{1}}, \quad (2)$$

де $g_0, g_{i(k)}, i(k) \in \mathcal{J}$, — дійсні сталі такі, що $0 \leq g_0 \leq 1$ і $0 \leq g_{i(k)} \leq 1$ для всіх $i(k) \in \mathcal{J}$, $z_{i(k)}, i(k) \in \mathcal{J}$, — комплексні змінні,

$$\mathcal{J} = \{i(k) = i_1 i_2 \dots i_k : k \geq 1, 1 \leq i_n \leq i_{n-1}, 1 \leq n \leq k, i_0 = N\} \quad (3)$$

— множина мультиіндексів.

2. Головна частина. Для залишків дробу (1) введемо позначення

$$Q_{i(s)}^{(s)} = 1, \quad Q_{i(p)}^{(s)} = 1 + \prod_{r=p+1}^s \sum_{i_r=1}^{i_{r-1}} \frac{g_{i(r)}(1 - g_{i(r-1)})z_{i(r)}}{1},$$

де $s \geq 1, 1 \leq p \leq s-1, 1 \leq i_k \leq i_{k-1}, 1 \leq k \leq p, i_0 = N$. Отримаємо рекурентні співвідношення

$$Q_{i(p)}^{(s)} = 1 + \sum_{i_{p+1}=1}^{i_p} \frac{g_{i(p+1)}(1 - g_{i(p)})z_{i(p+1)}}{Q_{i(p+1)}^{(s)}}, \quad (4)$$

де $s \geq 1, 1 \leq p \leq s-1, 1 \leq i_k \leq i_{k-1}, 1 \leq k \leq p, i_0 = N$.

Теорема 1. Нехай елементи ГЛДЗНЗ (1) задовольняють умови

$$g_0 = 0, \quad 0 \leq g_{i(k)} < 1 \quad \text{для всіх } i(k) \in \mathcal{J}, \quad (5)$$

або

$$g_0 = 0, \quad 0 < g_{i(k)} \leq 1 \quad \text{для всіх } i(k) \in \mathcal{J}. \quad (6)$$

Тоді:

1) ГЛДЗНЗ (1) абсолютно і рівномірно збіжний, якщо

$$|z_{i(k)}| \leq i_{k-1}^{-1} \quad \text{для всіх } i(k) \in \mathcal{J}; \quad (7)$$

2) значення ГЛДЗНЗ (1) і всіх його підхідних дробів належать кругу $|z-1| \leq 1$.

Д о в е д е н н я проводять за схемою доведення теореми 1 [1]. $\square$

Теорема 2. Нехай елементи ГЛДЗНЗ (2) задовольняють умови (5) і (7). Тоді ГЛДЗНЗ (2) збіжний, якщо існують натуральне число n і мультиіндекс $i(n)$, $i(n) \in \mathcal{J}$ такі, що $g_{i(n)} = 0$ або

$$z_{i(n)} \neq -i_{n-1}^{-1}. \quad (8)$$

Д о в е д е н н я. Використовуючи рекурентні співвідношення (4), покажемо правильність нерівностей

$$|Q_{i(k)}^{(s)}| > g_{i(k)}, \quad s \geq 1, \quad 1 \leq k \leq s, \quad 1 \leq i_n \leq i_{n-1}, \quad 1 \leq n \leq k, \quad i_0 = N. \quad (9)$$

При $k = s$ нерівності (9) очевидні. Припускаючи правильність (9) при $k = p + 1$, де $p + 1 \leq s$, при $k = p$ маємо

$$|Q_{i(p)}^{(s)}| \geq 1 - \sum_{i_{p+1}=1}^{i_p} \frac{g_{i(p+1)}(1 - g_{i(p)})|z_{i(p+1)}|}{|Q_{i(p+1)}^{(s)}|} \geq 1 - \sum_{i_{p+1}=1}^{i_p} \frac{g_{i(p+1)}(1 - g_{i(p)})}{i_p |Q_{i(p+1)}^{(s)}|}.$$

Оскільки на підставі оцінок (9) $Q_{i(p+1)}^{(s)} \neq 0$, то, замінюючи $g_{i(p+1)}$ на $|Q_{i(p+1)}^{(s)}|$, отримаємо (9) при $k = p$. Згідно з теоремою 1 усі залишки ГЛДЗНЗ (2)

$$Q_0 = 1 + \sum_{i_1=1}^N \frac{g_{i(1)} z_{i(1)}}{1 + \prod_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{g_{i(k)}(1 - g_{i(k-1)})z_{i(k)}}{1}},$$

$$Q_{i(k)} = 1 + \prod_{n=k+1}^{\infty} \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{g_{i(n)}(1 - g_{i(n-1)})z_{i(n)}}{1},$$

де $i(k) \in \mathcal{J}$ збігаються і $|Q_0 - 1| \leq 1$. Доведемо правильність таких нерівностей:

$$|Q_{i(k)} - 1| \leq 1 - g_{i(k)} \quad \text{для всіх} \quad i(k) \in \mathcal{J}. \quad (10)$$

Використовуючи співвідношення (4) і (9), для фіксованого числа s , $s \geq 1$, і довільного мультиіндексу $i(k)$, $1 \leq k \leq s$, $1 \leq i_n \leq i_{n-1}$, $1 \leq n \leq k$, $i_0 = N$, маємо

$$|Q_{i(k)}^{(s)} - 1| \leq \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} \frac{g_{i(k+1)}(1 - g_{i(k)})|z_{i(k+1)}|}{|Q_{i(k+1)}^{(s)}|} < 1 - g_{i(k)},$$

звідки, переходячи до границі при $s \rightarrow \infty$, отримаємо нерівності (10).

Для розбіжності ГЛДЗНЗ (2) треба, щоб

$$Q_0 = 1 + \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{i_1=1}^N \frac{g_{i(1)} z_{i(1)}}{Q_{i(1)}^{(s)}} = 0. \quad (11)$$

Оскільки $|z_{i(1)}| \leq 1/N$ і згідно з нерівністю (9) $|Q_{i(1)}| \geq g_{i(1)}$, то рівність (11) рівносильна тому, що

$$|z_{i(1)}| = 1/N, \quad \frac{g_{i(1)}}{Q_{i(1)}} = 1 \quad \text{і} \quad \frac{g_{i(1)} z_{i(1)}}{Q_{i(1)}} = -1/N \quad \text{для всіх} \quad i(1) \in \mathcal{J}. \quad (12)$$

З умов (10) і (12) випливає, що

$$Q_{i(1)} = g_{i(1)}, \quad z_{i(1)} = -1/N \quad \text{для всіх} \quad i(1) \in \mathcal{J}. \quad (13)$$

Оскільки

$$Q_{i(1)} = 1 + (1 - g_{i(1)}) \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{g_{i(2)} z_{i(2)}}{Q_{i(2)}^{(s)}}, \quad 1 \leq i_1 \leq N,$$

то, враховуючи (13), маємо

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{g_{i(2)} z_{i(2)}}{Q_{i(2)}^{(s)}} = -1 \quad \text{для всіх } i(1) \in \mathcal{J},$$

звідки, повторюючи аналогічні міркування, отримаємо $Q_{i(2)} = g_{i(2)}$, $z_{i(2)} = -i_1^{-1}$ для всіх $i(2) \in \mathcal{J}$. Застосовуючи далі метод математичної індукції, доходимо висновку, що для розбіжності ГЛДЗНЗ (2) треба виконати умови

$$Q_{i(k)} = g_{i(k)}, \quad z_{i(k)} = -i_{k-1}^{-1} \quad \text{для всіх } i(k) \in \mathcal{J}. \quad (14)$$

Тому виконання умови (8) забезпечує збіжність ГЛДЗНЗ (2). Оскільки $Q_0 \neq 0$ і всі $Q_{i(k)} \neq 0$, то умови (14) не будуть виконуватися, якщо існують натуральне число n і мультиіндекс $i(n)$, $i(n) \in \mathcal{J}$, такі, що $g_{i(n)} = 0$. $\square$

Теорема 3. *Нехай елементи ГЛДЗНЗ (2) задовольняють умови*

$$0 < g_0 \leq 1, \quad 0 \leq g_{i(k)} < 1 \quad \text{для всіх } i(k) \in \mathcal{J}, \quad (15)$$

або

$$0 < g_0 \leq 1, \quad 0 < g_{i(k)} \leq 1 \quad \text{для всіх } i(k) \in \mathcal{J}. \quad (16)$$

Тоді:

- 1) ГЛДЗНЗ (2) абсолютно і рівномірно збіжний, якщо виконуються умови (7);
- 2) значення ГЛДЗНЗ (2) і всіх його підхідних дробів належать кругу

$$\left| z - \frac{1}{g_0(2 - g_0)} \right| \leq \frac{1 - g_0}{g_0(2 - g_0)}. \quad (17)$$

Д о в е д е н н я. Міркуючи так, як і при доведенні теореми 1 [1], можна показати, що мажорантою ГЛДЗНЗ (2) є ГЛДЗНЗ

$$1 + \sum_{i_1=1}^N \frac{1}{1 + \prod_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{-i_{k-1}^{-1} g_{i(k)} (1 - g_{i(k-1)})}{1}}. \quad (18)$$

Далі, записуючи ГЛДЗНЗ (18) або його довільну апроксиманту у вигляді

$$z = \frac{1}{1 - (1 - g_0)w}, \quad w = \sum_{i_1=1}^N \frac{N^{-1} g_{i(1)}}{1 + \prod_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{-i_{k-1}^{-1} g_{i(k)} (1 - g_{i(k-1)})}{1}},$$

згідно з твердженням 2 теореми 1 маємо $|w| \leq 1$, тому $|1 - 1/z| \leq 1 - g_0$, звідки за допомогою елементарних перетворень отримуємо (17). Абсолютна збіжність ГЛДЗНЗ (2) впливає з того, що апроксиманти ГЛДЗНЗ (18) утворюють монотонно зростаючу й обмежену зверху послідовність (див. дов. теор. 1 [1]). $\square$

Теорема 4. *Нехай елементи ГЛДЗНЗ (1) задовольняють умови (5) або (6). Тоді ГЛДЗНЗ (1) абсолютно збіжний, якщо виконуються умови*

$$\sum_{i_1=1}^N |z_{i(1)}| \leq 1 \quad \text{і} \quad \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} |z_{i(k+1)}| \leq 1 \quad \text{для всіх} \quad i(k) \in \mathcal{J}. \quad (19)$$

Якщо, крім того, виконується умова

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \nu_k}{\nu_k} = 0, \quad (20)$$

де

$$\nu_k = \min\{g_{i(k)} : 1 \leq i_n \leq i_{n-1}, 1 \leq n \leq k, i_0 = N\}, \quad (21)$$

то ГЛДЗНЗ (1) є абсолютно і рівномірно збіжним.

Д о в е д е н н я. Покажемо, що ГЛДЗНЗ

$$1 + \sum_{i_1=1}^N \frac{-g_{i(1)}|z_{i(1)}|}{1 + \prod_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{-g_{i(k)}(1 - g_{i(k-1)})|z_{i(k)}|}{1}} \quad (22)$$

є мажорантою ГЛДЗНЗ (1).

Для ГЛДЗНЗ (22) правильні співвідношення, аналогічні до (4),

$$\tilde{Q}_{i(s)}^{(s)} = 1, \quad \tilde{Q}_{i(p)}^{(s)} = 1 - \sum_{i_{p+1}=1}^{i_p} \frac{g_{i(p+1)}(1 - g_{i(p)})|z_{i(p+1)}|}{\tilde{Q}_{i(p+1)}^{(s)}},$$

де $s \geq 1$, $1 \leq p \leq s-1$, $1 \leq i_k \leq i_{k-1}$, $1 \leq k \leq p$, $i_0 = N$. Міркуючи так, як і при доведенні нерівностей (9), можна показати правильність нерівностей

$$|Q_{i(k)}^{(s)}| \geq \tilde{Q}_{i(k)}^{(s)} > g_{i(k)}, \quad s \geq 1, \quad 1 \leq k \leq s, \quad 1 \leq i_n \leq i_{n-1}, \quad 1 \leq n \leq k, \quad i_0 = N, \quad (23)$$

якщо виконуються умови (5), і

$$|Q_{i(k)}^{(s)}| \geq \tilde{Q}_{i(k)}^{(s)} \geq g_{i(k)}, \quad s \geq 1, \quad 1 \leq k \leq s, \quad 1 \leq i_n \leq i_{n-1}, \quad 1 \leq n \leq k, \quad i_0 = N, \quad (24)$$

якщо виконуються умови (6).

Отже, всі $Q_{i(k)}^{(s)} \neq 0$, $\tilde{Q}_{i(k)}^{(s)} > 0$ і при $n > m \geq 1$ маємо

$$\begin{aligned} |g_n - g_m| &\leq \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^{i_1} \cdots \sum_{i_{m+1}=1}^{i_m} \frac{g_{i(1)} |z_{i(1)}| \prod_{k=2}^{m+1} g_{i(k)} (1 - g_{i(k-1)}) |z_{i(k)}|}{\prod_{k=1}^{m+1} |Q_{i(k)}^{(n)}| \prod_{k=1}^m |Q_{i(k)}^{(m)}|} \leq \\ &\leq \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^{i_1} \cdots \sum_{i_{m+1}=1}^{i_m} \frac{g_{i(1)} |z_{i(1)}| \prod_{k=2}^{m+1} g_{i(k)} (1 - g_{i(k-1)}) |z_{i(k)}|}{\prod_{k=1}^{m+1} \tilde{Q}_{i(k)}^{(n)} \prod_{k=1}^m \tilde{Q}_{i(k)}^{(m)}} \leq -(\tilde{g}_n - \tilde{g}_m), \end{aligned}$$

де g_n , $\tilde{g}_n$ – n -і апроксиманти ГЛДЗНЗ (1) і (22) відповідно. Звідси випливає, що послідовність $\{\tilde{g}_n\}$ монотонно спадає і на підставі нерівностей (23) або (24) обмежена знизу

$$\tilde{g}_n = 1 - \sum_{i_1=1}^N \frac{g_{i(1)} |z_{i(1)}|}{\tilde{Q}_{i(1)}^{(n)}} \geq 0, \quad n \geq 1.$$

Тому існує скінченна границя $\tilde{g} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{g}_n$, а, отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |g_{n+1} - g_n|$ є збіжним, тобто ГЛДЗНЗ (1) – абсолютно збіжний.

Застосовуючи співвідношення (19) і (23) або (24) до формули різниці двох апроксимант ГЛДЗНЗ (22) і враховуючи, що $(1 - g_{i(k)})/g_{i(k)} \leq (1 - \nu_k)/\nu_k$ для всіх $i(k) \in \mathcal{J}$, при $n > m \geq 1$ отримаємо

$$\tilde{g}_m - \tilde{g}_n < \prod_{k=1}^m \frac{1 - \nu_k}{\nu_k}, \quad (25)$$

де ν_k – означені в (21), звідки випливає, що ГЛДЗНЗ (1) абсолютно і рівномірно збіжний. $\square$

Теорема 5. Нехай елементи ГЛДЗНЗ (2) задовольняють умови (15) або (16). Тоді ГЛДЗНЗ (2) абсолютно збіжний, якщо виконуються умови (19). Якщо, крім того, виконується умова (20), то ГЛДЗНЗ (2) абсолютно і рівномірно збіжний.

Д о в е д е н н я. Використовуючи співвідношення (23) або (24), які правильні для ГЛДЗНЗ (1), можна показати, що область значень ГЛДЗНЗ (1) є круг $|z - 1| \leq 1 - g_0$. Тому, міркуючи так, як і при доведенні теореми 3, переконуємося у правильності першої частини теореми. Друга частина теореми випливає з нерівності (25). $\square$

Нехай $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, N\}$ – множина індексів. Побудуємо такі множини мультиіндексів:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= \{i(1) : i_1 \in \mathcal{I}, g_{i(1)} \neq 0\}, \\ \mathcal{I}_k &= \{i(k) : i(k-1) \in \mathcal{J}, i(k-1) \in \mathcal{I}_{k-1}, g_{i(k)} \neq 0\}, \quad k \geq 2, \end{aligned}$$

де $\mathcal{J}$ – означено в (3), а також підмножини індексів множини $\mathcal{I}$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_0 &= \{i_1 : i_1 \in \mathcal{I}, g_{i(1)} \neq 0\}, \\ \mathcal{I}_{i(k)} &= \{i_{k+1} : i_{k+1} \in \mathcal{I}, g_{i(k+1)} \neq 0, i(k) \in \mathcal{I}_k\}, \quad i(k) \in \mathcal{J}. \end{aligned}$$

Вважатимемо, що множина $\mathcal{J}_n$ порожня, якщо $g_{i(n)} = 0$, $1 \leq i_n \leq i_{n-1}$, для всіх $i(n-1) \in \mathcal{J}_{n-1}$ при $n \geq 2$; підмножина $\mathcal{I}_{i(n)}$ порожня, якщо $g_{i(n+1)} = 0$, $1 \leq i_{n+1} \leq i_n$, або $i(n) \notin \mathcal{J}_n$ при $n \geq 1$.

Теорема 6. Нехай елементи ГЛДЗНЗ (2) задовольняють умови (5) і (19). Тоді ГЛДЗНЗ (2) збігається, якщо виконується одна з умов:

- 1) $\sum_{i_1 \in \mathcal{I}_0} z_{i(1)} \neq -1$ або $\sum_{i_1=1}^N g_{i(1)} = 0$;
- 2) існують натуральне число n і мультиіндекс $i(n)$, $i(n) \in \mathcal{J}_n$, такі, що $\sum_{i_{n+1} \in \mathcal{I}_{i(n)}} z_{i(n+1)} \neq -1$ або $\sum_{i_{n+1}=1}^{i_n} g_{i(n+1)} = 0$.

Д о в е д е н н я. Згідно з теоремою 4 усі залишки $Q_0, Q_{i(n)}, i(n) \in \mathcal{J}$, ГЛДЗНЗ (2) збігаються. Використовуючи співвідношення (23), які правильні для ГЛДЗНЗ (2), можна показати правильність нерівностей $|Q_0 - 1| \leq 1$ і (10).

Для розбіжності ГЛДЗНЗ (2) треба, щоб

$$Q_0 = 1 + \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{i_1=1}^N \frac{g_{i(1)} z_{i(1)}}{Q_{i(1)}^{(s)}} = 0.$$

Очевидно, що ГЛДЗНЗ (2) збігається, якщо $g_{i(1)} = 0$, $1 \leq i_1 \leq N$. Нехай $\mathcal{I}_0 \neq \emptyset$. Тоді, враховуючи нерівності (23), останнє співвідношення запишемо як

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{i_1 \in \mathcal{I}_0} \frac{g_{i(1)} z_{i(1)}}{Q_{i(1)}^{(s)}} = \sum_{i_1 \in \mathcal{I}_0} \frac{g_{i(1)} z_{i(1)}}{Q_{i(1)}} = -1. \quad (26)$$

Оскільки $\sum_{i_1=1}^N |z_{i(1)}| \leq 1$ і $|Q_{i(1)}| \geq g_{i(1)}$, $1 \leq i_1 \leq N$, то повинні виконуватися такі умови:

$$\sum_{i_1 \in \mathcal{I}_0} |z_{i(1)}| = 1, \quad \frac{g_{i(1)}}{Q_{i(1)}} = 1 \quad \text{для всіх } i_1 \in \mathcal{J}_1. \quad (27)$$

Зі співвідношень (10), (26) і (27) випливає, що $Q_{i(1)} = g_{i(1)}$ для всіх $i_1 \in \mathcal{J}_1$ і $\sum_{i_1 \in \mathcal{I}_0} z_{i(1)} = -1$. Оскільки

$$Q_{i(1)} = 1 + (1 - g_{i(1)}) \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{g_{i(2)} z_{i(2)}}{Q_{i(2)}^{(s)}}, \quad 1 \leq i_1 \leq N,$$

то

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{g_{i(2)} z_{i(2)}}{Q_{i(2)}^{(s)}} = -1 \quad \text{для всіх } i_1 \in \mathcal{J}_1.$$

Очевидно, що ГЛДЗНЗ (2) збігається, якщо існує індекс $i_p \in \mathcal{I}_0$ такий, що множина $\mathcal{I}_{i_p}$ порожня. Нехай $\mathcal{I}_{i(1)} \neq \emptyset$ для всіх $i_1 \in \mathcal{J}_1$. Тоді для розбіжності ГЛДЗНЗ (2) треба, щоб

$$\sum_{i_2 \in \mathcal{I}_{i(1)}} \frac{g_{i(2)} z_{i(2)}}{Q_{i(2)}} = -1 \quad \text{для всіх } i_1 \in \mathcal{J}_1,$$

звідки, як і вище, отримаємо, що $Q_{i(2)} = g_{i(2)}$ для всіх $i(2) \in \mathcal{J}_2$ і $\sum_{i_2 \in \mathcal{I}_{i(1)}} z_{i(2)} = -1$ для всіх $i_1 \in \mathcal{J}_1$. Застосовуючи далі метод математичної індукції при $\mathcal{I}_0 \neq \emptyset$ і

$\mathcal{I}_{i(k)} \neq \emptyset$ для всіх $i(k) \in \mathcal{J}_k$, $k \geq 1$, доходимо висновку, що для розбіжності ГЛДЗНЗ (2) необхідно виконати умови

$$\sum_{i_1 \in \mathcal{I}_0} z_{i(1)} = -1, \quad \sum_{i_k \in \mathcal{I}_{i(k-1)}} z_{i(k)} = -1 \quad \text{для всіх } i(k-1) \in \mathcal{J}_{k-1}, \quad k \geq 2.$$

Тому виконання умови 1 або 2 забезпечує збіжність ГЛДЗНЗ (2). $\square$

3. Висновки. Отримані у цій праці результати є багатовимірним узагальненням ознак збіжності неперервних дробів

$$1 + \prod_{k=1}^{\infty} \frac{g_k(1 - g_{k-1})z_k}{1} \quad \text{і} \quad \left(1 + \prod_{k=1}^{\infty} \frac{g_k(1 - g_{k-1})z_k}{1} \right)^{-1},$$

де g_n , $n \geq 0$, – дійсні сталі такі, що $0 \leq g_n \leq 1$, $n \geq 0$, z_k , $k \geq 1$, – комплексні змінні.

1. Баран О.Є. Деякі ознаки збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними / Баран О.Є. // Вісник ДУ "Львівська політехніка". – 1998. – №341. – С. 18-23.
2. Боднар Д.И. Ветвящиеся цепные дроби. / Боднар Д.И. – К.: Наук. думка, 1986. – 176 с.
3. Боднар Д.И. Признаки сходимости ветвящихся цепных дробей с частными звеньями вида $\frac{(1-g_{i_1, i_2, \dots, i_k})\widehat{g}_{i_1, i_2, \dots, i_k} x_{i_1, i_2, \dots, i_k}}{1}$ / Боднар Д.И. // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1982. – Вып. 15. – С. 30-35.
4. Боднар Д.И. Абсолютная сходимость четной и нечетной части двумерной соответствующей цепной дроби / Боднар Д.И., Кучминская Х.И. // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1983. – Вып. 18. – С. 30-34.
5. Возна С.М. Ознаки збіжності для двовимірного неперервного дробу спеціального вигляду / Возна С.М., Кучмінська Х.Й. // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Зб. наук. праць. Математика. – 2004. – Вип. 191-192. – С. 22-32.
6. Дмитришин Р.І. Про збіжність гіллястих ланцюгових дробів із частинними ланками вигляду $\frac{g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})z_{i_k}}{1}$ / Дмитришин Р.І. // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – Вип. 43., №4. – С. 12-16.
7. Kuchminskaia Ch. On the convergence of two-dimensional continued fractions / Kuchminskaia Ch. // Constructive theory of functions. – Sofia.: Publishing House of the Bulgarian Acad. Sci., 1984. – P. 501-506.
8. Wall H.S. Analytic theory of continued fractions. / Wall H.S. – New York: Van Nostrand, 1948. – 433 p.

ON SOME CONVERGENCE CRITERIA FOR BRANCHED CONTINUED FRACTIONS WITH NONEQUIVALENT VARIABLES

Dmytro BODNAR¹, Roman DMYTRYSHYN²

¹ *Ternopil State Economical University,
46000, Ternopil, L'vivs'ka Str., 11,
e-mail: dmytro_bodnar@hotmail.com*

² *Vasyl Stephanyk Precarpathian National University,
76000, Ivano-Frankivsk, Shevchenka Str., 57,
e-mail: dmytryshynr@hotmail.com*

We establish the convergence criteria of the branched continued fractions with nonequivalent variables with partial quotients of the form $\frac{g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})z_{i(k)}}{1}$.

Key words: branched continued fraction with nonequivalent variables, convergence, majorant.

Стаття надійшла до редколегії 14.04.2006

Прийнята до друку 22.10.2008

УДК 517.95

ЗАДАЧА БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ НА МНОГОВИДІ

Микола БОКАЛО, Юрій ДМИТРИШИН

Львівський національний університет ім. Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: yursee@yandex.ru

Досліджено односторонню крайову задачу для квазілінійного еліптичного рівняння другого порядку, заданого в циліндрі з твірними, паралельними до осі часової змінної, яка пробігає проміжок $(-\infty, T]$. Крайова умова на бічній поверхні циліндра має вигляд нелінійної еволюційної варіаційної нерівності, що містить похідні шуканої функції за часовою і просторовими змінними першого порядку. Визначено достатні умови для існування єдиного розв'язку цієї задачі та неперервної залежності від вихідних даних у разі відсутності умов на зростання вихідних даних і поведінку розв'язку при $t \rightarrow -\infty$.

Ключові слова: динамічна крайова задача, динамічна крайова умова, еволюційна варіаційна нерівність, квазілінійне еліптичне рівняння.

1. Динамічні крайові задачі виникають при математичному моделюванні багатьох фізичних і хімічних процесів [1]-[5]. Модельним прикладом таких задач є задача про відшукування функції $u(x, t)$, $(x, t) \in \Omega \times (T_0, T)$ (Ω – область в $\mathbb{R}^n$, $\Gamma = \partial\Omega$, $-\infty \leq T_0 < T \leq +\infty$), яка задовольняє співвідношення

$$\Delta_x u = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (T_0, T), \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \nu} = f, \quad (x, t) \in \Gamma \times (T_0, T), \quad (2)$$

$$u|_{\Gamma} \rightarrow u_0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow T_0, \quad x \in \Gamma, \quad (3)$$

де $\Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ – лапласіан, $\frac{\partial}{\partial \nu} = \sum_{i=1}^n \nu_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ – оператор диференціювання за нормаллю. Узагальнення задачі (1)-(3) на випадок $T_0 > -\infty$ і нелінійних рівнянь чи включень типу (1) та (2) досліджували у працях [1]-[7]. Щодо випадку

$T_0 = -\infty$ (задача Фур'є), то таку задачу розглядали, як нам відомо, тільки в [8], коли в умові (3) $u_0 = 0$ і рівняння типу (1) – майже лінійне. Ми досліджуємо задачу, яка є узагальненням задачі (1)-(3) на випадок, коли $T_0 = -\infty$, замість рівняння (1) – сильно нелінійне еліптичне рівняння, динамічна крайова умова (типу (2)) має вигляд нелінійної еволюційної варіаційної нерівності, а умови (3) – немає. Доведено коректність розглядуваної задачі в класах функцій з довільною поведінкою при $t \rightarrow -\infty$. Зауважимо, що наші результати подібні до результатів стосовно задачі Фур'є для нелінійних параболічних рівнянь і нерівностей з нединамічною крайовою умовою, які отримали в [9], [10].

Нехай n – натуральне число; $\mathbb{R}^n$ – евклідов простір, елементами якого є впорядковані набори $x = (x_1, \dots, x_n)$ з n дійсних чисел, зі скалярним добутком $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ і нормою $|x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$; Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею Γ класу C^2 (припускається, що Ω локально лежить по один бік від Γ); $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ – одиничний вектор зовнішньої до Γ нормалі; $T > 0$ – дійсне число. Прийнемо $Q \stackrel{\text{def}}{=} \Omega \times (-\infty, T)$, $S \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma \times (-\infty, T)$. Нехай $p \in (1, +\infty)$, а p' визначається з рівності $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Через $W_p^1(\Omega)$ позначимо простір Соболева, який складається з функцій простору $L_p(\Omega)$, що мають узагальнені похідні першого порядку з $L_p(\Omega)$, з нормою $\|w\|_{W_p^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n |w_{x_i}|^p + |w|^p \right) dx \right)^{1/p}$, а $\overset{\circ}{W}_p^1(\Omega)$ – підпростір простору $W_p^1(\Omega)$,

елементи якого мають рівний нулю слід на Γ . Під $W_p^{1/p'}(\Gamma)$ розумітимемо простір функцій з $L_p(\Gamma)$, які мають дробові похідні порядку $1/p'$ з $L_p(\Gamma)$ (див., наприклад, [3], [11]), а $W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma)$ – спряжений до $W_p^{1/p'}(\Gamma)$ простір. Через $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}$ позначимо канонічний добуток на $W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma) \times W_p^{1/p'}(\Gamma)$. Відомо, що простір $W_p^{1/p'}(\Gamma)$ можна ототожнити з простором слідів на Γ функцій з $W_p^1(\Omega)$. Нехай $\gamma_0 : W_p^1(\Omega) \rightarrow W_p^{1/p'}(\Gamma)$ – оператор сліду.

2. Допоміжні поняття та твердження. Нехай $\mathbb{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in \mathbb{R} : p > 1\}$. Розглянемо множину, яка складається з впорядкованих наборів з $n+1$ дійснозначних функцій, визначених на $Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, будь-який елемент $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ якої задовольняє умови:

- 1) для кожного $i \in \{0, \dots, n\}$ функція a_i є каратеодорівською, тобто для майже всіх $(x, t) \in Q$ функція $a_i(x, t, \cdot, \cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – неперервна і для всіх $s \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ функція $a_i(\cdot, \cdot, s, \xi) : Q \rightarrow \mathbb{R}$ – вимірна;
- 2) для майже всіх $(x, t) \in Q$ і довільних $s \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$|a_i(x, t, s, \xi)| \leq q_{1,a}(t)(|s|^{p-1} + |\xi|^{p-1}) + q_{2,a}(x, t), \quad i = \overline{0, n},$$

де $q_{1,a} \in L_{\infty, \text{loc}}((-\infty, T])$, $q_{2,a} \in L_{p', \text{loc}}(\overline{Q})$;

- 3) існують стала $K_1 > 0$ і функція $h_a \geq 0$ з $L_{1, \text{loc}}(\overline{Q})$ такі, що для майже всіх $(x, t) \in Q$

$$\sum_{i=1}^n a_i(x, t, s, \xi) \xi_i + a_0(x, t, s, \xi) s \geq K_1(|s|^p + |\xi|^p) - h_a(x, t) \quad \forall s \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^n;$$

- 4) для майже всіх $(x, t) \in Q$ і будь-яких $s, s' \in \mathbb{R}$, $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$, $s \neq s'$ або $\xi \neq \xi'$, маємо

$$\sum_{i=1}^n (a_i(x, t, s, \xi) - a_i(x, t, s', \xi')) (\xi_i - \xi'_i) + (a_0(x, t, s, \xi) - a_0(x, t, s', \xi')) (s - s') > 0.$$

На цій множині введемо відношення еквівалентності, вважаючи що два набори $a^1(x, t, s, \xi)$, $a^2(x, t, s, \xi)$, $(x, t, s, \xi) \in Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, еквівалентні, якщо $a^1(x, t, s, \xi) = a^2(x, t, s, \xi)$ для майже всіх $(x, t) \in Q$ і всіх $s \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Фактор-множину за цим відношенням еквівалентності позначатимемо через $\mathbb{A}_p$. Коли далі говоритимемо про якийсь елемент множини $\mathbb{A}_p$, то матимемо на увазі відповідного представника з класу еквівалентності, яким є цей елемент.

Нехай $\mathbb{P}^* \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in \mathbb{P} : p > 2\}$ і для кожного $p \in \mathbb{P}^*$ позначимо через $\mathbb{A}_p^*$ підмножину множини $\mathbb{A}_p$, складену з елементів $a \in \mathbb{A}_p$, які задовольняють умову:

- 5) існує стала $K_2 > 0$ така, що

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i(x, t, s, \xi) - a_i(x, t, s', \xi')) (\xi_i - \xi'_i) + (a_0(x, t, s, \xi) - a_0(x, t, s', \xi')) (s - s') &\geq \\ &\geq K_2(|s - s'|^p + |\xi - \xi'|^p) \quad \forall (x, t) \in Q, \quad s, s' \in \mathbb{R}, \quad \xi, \xi' \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Зауваження 1. Прикладом елемента множини $\mathbb{A}_p^*$ є набір функцій $a_0(x, t, s, \xi) = |s|^{p-2}s$, $a_k(x, t, s, \xi) = |\xi_k|^{p-2}\xi_k$, $k = \overline{1, n}$.

Відомо [3], [11], що для довільного $p \in \mathbb{P}$ і будь-якої функції $v \in W_p^1(\Omega)$ існує її слід $\gamma_0 v$ (на Γ) та $\gamma_0 v \in W_p^{1/p'}(\Gamma)$ і, навпаки, для довільної функції $\varphi \in W_p^{1/p'}(\Gamma)$ знайдеться (і не одна) функція $v \in W_p^1(\Omega)$ така, що $\gamma_0 v = \varphi$. Зрештою (див., наприклад, [12]), існує лінійний неперервний оператор $R : W_p^{1/p'}(\Gamma) \rightarrow W_p^1(\Omega)$ такий, що $\gamma_0(R(\varphi)) = \varphi$.

Нехай $p \in \mathbb{P}$ і $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ – який-небудь елемент множини $\mathbb{A}_p$. Для кожного $t \in (-\infty, T)$ визначимо форму

$$g_a(t; \cdot, \cdot) : W_p^1(\Omega) \times W_p^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

за правилом

$$g_a(t; v, w) = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, t, v, \nabla v) w_{x_i} + a_0(x, t, v, \nabla v) w \right\} dx, \quad v, w \in W_p^1(\Omega). \quad (4)$$

Приймемо для $t \in (-\infty, T)$

$$V_a(t) \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in W_p^1(\Omega) : g_a(t; v, w) = 0 \quad \forall w \in \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega)\}.$$

Очевидно, що елементами простору $V_a(t)$, де $t \in (-\infty, T)$, є узагальнені розв'язки з $W_p^1(\Omega)$ рівняння

$$-\sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i} a_i(x, t, v, \nabla v) + a_0(x, t, v, \nabla v) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (5)$$

Відоме (див., наприклад, [13, Глава III, теорема 2.1]) таке твердження.

Твердження 1. Нехай $a \in \mathbb{A}_p$, де $p \in \mathbb{P}$, і $t \in (-\infty, T)$. Тоді для будь-якої функції $\varphi \in W_p^{1/p'}(\Gamma)$ існує єдина функція $v \in V_a(t)$ така, що $\gamma_0 v = \varphi$, і, навпаки, для кожної функції $v \in V_a(t)$ її слід $\gamma_0 v$ належить $W_p^{1/p'}(\Gamma)$.

З цього твердження випливає, що для кожного $t \in (-\infty, T)$ між просторами $W_p^{1/p'}(\Gamma)$ і $V_a(t)$ існує взаємно однозначна відповідність. Позначимо через $J_a(t; \cdot)$ оператор, який реалізує цю відповідність, тобто оператор $J_a(t; \cdot) : W_p^{1/p'}(\Gamma) \rightarrow V_a(t)$ такий, що для кожного $w \in W_p^{1/p'}(\Gamma)$ $J_a(t; w) \stackrel{\text{def}}{=} v$, де v належить до $V_a(t)$ і задовольняє граничну умову

$$\gamma_0 v = w, \quad (6)$$

тобто, v – узагальнений розв’язок задачі Діріхле для рівняння (5) з граничною умовою (6).

Лема 1. Нехай $a \in \mathbb{A}_p$, де $p \in \mathbb{P}$. Тоді існують функції $d_a > 0$ з $L_{\infty, \text{loc}}((-\infty, T])$ та $\tilde{d}_a \geq 0$ з $L_{p, \text{loc}}((-\infty, T])$ такі, що

$$\|J_a(t; w)\|_{W_p^1(\Omega)} \leq d_a(t) \|w\|_{W_p^{1/p'}(\Gamma)} + \tilde{d}_a(t) \quad \forall w \in W_p^{1/p'}(\Gamma), \quad t \in (-\infty, T). \quad (7)$$

Доведення. Нехай w належить $W_p^{1/p'}(\Gamma)$, t належить $(-\infty, T)$ і значення $q_{1,a}(t)$, $\|q_{2,a}(\cdot, t)\|_{L_{p'}(\Omega)}$ та $\|h_{2,a}(\cdot, t)\|_{L_1(\Omega)}$ – скінченні. Прийнемо $v \stackrel{\text{def}}{=} J_a(t; w)$, $\tilde{v} \stackrel{\text{def}}{=} R(w)$. З означення оператора J_a одержуємо

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, t, v, \nabla v) (v - \tilde{v})_{x_i} + a_0(x, t, v, \nabla v) (v - \tilde{v}) \right\} dx = 0,$$

звідки

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, t, v, \nabla v) v_{x_i} + a_0(x, t, v, \nabla v) v \right\} dx = \\ = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, t, v, \nabla v) \tilde{v}_{x_i} + a_0(x, t, v, \nabla v) \tilde{v} \right\} dx. \end{aligned} \quad (8)$$

З (8) на підставі умов **2**, **3** і нерівності Гельдера, здобуваємо

$$K_1 \|v\|_{W_p^1(\Omega)}^p - \|h_a(\cdot, t)\|_{L_1(\Omega)} \leq C_1 \left(q_{1,a}(t) \|v\|_{W_p^1(\Omega)}^{p-1} + \|q_{2,a}(\cdot, t)\|_{L_{p'}(\Omega)} \right) \cdot \|\tilde{v}\|_{W_p^1(\Omega)},$$

де C_1 – деяка додатна стала.

Звідси, використовуючи нерівність Юнга, отримаємо

$$\begin{aligned} K_1 \|v\|_{W_p^1(\Omega)}^p - \|h_a(\cdot, t)\|_{L_1(\Omega)} &\leq \varepsilon \|v\|_{W_p^1(\Omega)}^p + \\ &+ C_2(\varepsilon) \|q_{2,a}(\cdot, t)\|_{L_{p'}(\Omega)}^{p'} + C_3(\varepsilon) (|q_{1,a}(t)| + 1)^p \|\tilde{v}\|_{W_p^1(\Omega)}^p, \end{aligned} \quad (9)$$

де $p' = \frac{p}{p-1}$, $\varepsilon > 0$ – довільна стала, $C_2(\varepsilon)$, $C_3(\varepsilon) > 0$ – деякі сталі, що залежить від ε , але не залежать від v , $\tilde{v}$ і t . З (9), взявши $\varepsilon = \frac{K_1}{2}$ і врахувавши, що $\|\tilde{v}\|_{W_p^1(\Omega)} \leq \|R\| \cdot \|w\|_{W_p^{1/p'}(\Gamma)}$, здобудемо (7) з $d_a(t) = C_4(|q_{1,a}(t)| + 1)^p$, $\tilde{d}_a(t) = C_5\left(\|h_a(\cdot, t)\|_{L_1(\Omega)} + \|q_{2,a}(\cdot, t)\|_{L_{p'}^p(\Omega)}^p\right)$, де C_4 , C_5 – деякі додатні сталі.

Лема 2. Нехай $a \in \mathbb{A}_p^*$, де $p \in \mathbb{P}^*$. Тоді існують функції $d_{a,1}$ з $L_{\infty, \text{loc}}((-\infty, T])$ та $d_{a,2}$ з $L_{1, \text{loc}}((-\infty, T])$ такі, що для $t \in (-\infty, T)$ правильна нерівність

$$\|J_a(t; w_1) - J_a(t; w_2)\|_{W_p^1(\Omega)} \leq d_{a,1}(t) \left(\|w_1\|_{W_p^{1/p'}(\Gamma)}^p + \|w_2\|_{W_p^{1/p'}(\Gamma)}^p + d_{a,2}(t) \right)^{(p-1)/p^2} \times \\ \times \|w_1 - w_2\|_{W_p^{1/p'}(\Gamma)}^{1/p} \quad \forall w_1, w_2 \in W_p^{1/p'}(\Gamma). \quad (10)$$

Доведення. Нехай w_1, w_2 належать $W_p^{1/p'}(\Gamma)$, t належить $(-\infty, T)$ і значення $q_{1,a}(t)$, $\|q_{2,a}(\cdot, t)\|_{L_{p'}(\Omega)}$ – скінченні. Прийемо $v_1 \stackrel{\text{def}}{=} J_a(t; w_1)$, $v_2 \stackrel{\text{def}}{=} J_a(t; w_2)$. Для довільної $\tilde{\varphi} \in \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega)$ на підставі означення оператора J_a одержимо

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n (a_i(x, t, v_1, \nabla v_1) - a_i(x, t, v_2, \nabla v_2)) \tilde{\varphi}_{x_i} + \right. \\ \left. + (a_0(x, t, v_1, \nabla v_1) - a_0(x, t, v_2, \nabla v_2)) \tilde{\varphi} \right\} dx = 0. \quad (11)$$

Нехай $\tilde{v}_1 \stackrel{\text{def}}{=} R(w_1)$, $\tilde{v}_2 \stackrel{\text{def}}{=} R(w_2)$. Прийемо в (11) $\tilde{\varphi} = (v_1 - v_2) - (\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2)$. Після простих перетворень отримаємо

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n (a_i(x, t, v_1, \nabla v_1) - a_i(x, t, v_2, \nabla v_2)) (v_{1,x_i} - v_{2,x_i}) + \right. \\ \left. + (a_0(x, t, v_1, \nabla v_1) - a_0(x, t, v_2, \nabla v_2)) (v_1 - v_2) \right\} dx = \\ = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n (a_i(x, t, v_1, \nabla v_1) - a_i(x, t, v_2, \nabla v_2)) (\tilde{v}_{1,x_i} - \tilde{v}_{2,x_i}) + \right. \\ \left. + (a_0(x, t, v_1, \nabla v_1) - a_0(x, t, v_2, \nabla v_2)) (\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2) \right\} dx. \quad (12)$$

Оцінюючи відповідно ліву та праву частину (12) на підставі умов **2**, **5**, та використовуючи нерівність Гельдера, одержимо

$$K_2 \int_{\Omega} \left\{ |v_1 - v_2|^p + |\nabla v_1 - \nabla v_2|^p \right\} dx \leq \int_{\Omega} \left\{ \left(q_{1,a}(t) (|v_1|^{p-1} + |v_2|^{p-1} + |\nabla v_1|^{p-1} + |\nabla v_2|^{p-1}) + \right. \right. \\ \left. \left. + 2|q_{2,a}(x, t)| \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n |\tilde{v}_{1,x_i} - \tilde{v}_{2,x_i}| + |\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2| \right) \right\} dx \leq C_6(|q_{1,a}(t)| + 1) \times$$

$$\times \left(\|v_1\|_{W_p^1(\Omega)}^p + \|v_2\|_{W_p^1(\Omega)}^p + \|q_{2,a}(\cdot, t)\|_{L_{p'}(\Omega)}^{p'} \right)^{1/p'} \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\|_{W_p^1(\Omega)}, \quad (13)$$

де $C_6 > 0$ – стала, що не залежить від $v_1, v_2, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2$. Звідси та з леми 1 і того, що оператор R є лінійним та неперервним, одержимо (10).

Зазначимо, що для $t \in (-\infty, T)$ правильним є твердження: для довільного елемента $v \in V_a(t)$ і будь-яких $w, \tilde{w} \in W_p^1(\Omega)$ таких, що $w - \tilde{w} \in W_p^1(\Omega)$ (тобто $\gamma_0 w = \gamma_0 \tilde{w}$) маємо $g_a(t; v, w) = g_a(t; v, \tilde{w})$, оскільки $g_a(t; v, w - \tilde{w}) = 0$. Звідси випливає, що для кожного $t \in (-\infty, T)$ і довільного $v \in V_a(t)$ функціонал

$$W_p^{1/p'}(\Gamma) \ni \varphi \rightarrow g_a(t; v, \tilde{\varphi}) \in \mathbb{R}, \quad \text{де } \tilde{\varphi} \in W_p^1(\Omega), \quad \gamma_0 \tilde{\varphi} = \varphi$$

(зокрема, $\tilde{\varphi} = R(\varphi)$), є коректно визначеним.

Легко показати, що цей функціонал лінійний. Доведемо, що він неперервний. Справді, з означення (див. (4)) та властивостей форми g_a і оператора R , використовуючи нерівність Гельдера, маємо

$$\begin{aligned} |g_a(t; v, \tilde{\varphi})| &= |g_a(t; v, R(\varphi))| \leq \left(\int_{\Omega} \sum_{i=0}^n |a_i(x, t, v, \nabla v)|^{p'} dx \right)^{1/p'} \|R(\varphi)\|_{W_p^1(\Omega)} \leq \\ &\leq \|R\| \left(\int_{\Omega} \sum_{i=0}^n |a_i(x, t, v, \nabla v)|^{p'} dx \right)^{1/p'} \|\varphi\|_{W_p^{1/p'}(\Gamma)} \quad \forall \varphi \in W_p^{1/p'}(\Gamma). \end{aligned} \quad (14)$$

Звідси випливає неперервність цього функціонала.

Отож, для кожного $t \in (-\infty, T)$ можна визначити оператор

$$G_a(t; \cdot) : V_a(t) \rightarrow W_p^{-1/p'}(\Gamma)$$

за правилом: для будь-якого $v \in V_a(t)$ значення $G_a(t; v)$ таке, що

$$\langle G_a(t; v), \varphi \rangle_{\Gamma} = g_a(t; v, \tilde{\varphi}) \quad \forall \varphi \in W_p^{1/p'}(\Gamma), \quad \tilde{\varphi} \in W_p^1(\Omega), \quad \gamma_0 \tilde{\varphi} = \varphi. \quad (15)$$

Згідно з (14), (15) і на підставі умови **2** маємо

$$\begin{aligned} \|G_a(t; v)\|_{W_p^{-1/p'}(\Gamma)} &\leq \|R\| \left(\int_{\Omega} \sum_{i=0}^n |a_i(x, t, v, \nabla v)|^{p'} dx \right)^{1/p'} \leq \\ &\leq (n+1)^{1/p'} \|R\| \cdot \|q_{1,a}(t)(|v|^{p-1} + |\nabla v|^{p-1}) + q_{2,a}(\cdot, t)\|_{L_{p'}(\Omega)} \leq \\ &\leq C_7 \left(q_{1,a}(t) \|v\|_{W_p^1(\Omega)}^{p-1} + \|q_{2,a}(\cdot, t)\|_{L_{p'}(\Omega)} \right), \end{aligned} \quad (16)$$

де $C_7 > 0$ – стала, яка від v не залежить.

Зауваження 2. Якщо $a_i(\cdot, t, v(\cdot), \nabla v(\cdot)) \in W_p^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $i = \overline{1, n}$, для деякого $t \in (-\infty, T)$ і $v \in V_a(t)$, то

$$G_a(t; v)(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x, t, v(x), \nabla v(x)) \cos(\nu(x), x_i), \quad x \in \Gamma, \quad (17)$$

тобто, $G_a(t; v) \in$ похідною v за конормаллю. Справді, з (4) і (15), використовуючи формулу Гаусса-Остроградського, одержуємо

$$\begin{aligned} \langle G_a(t; v), \varphi \rangle_\Gamma &= \int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, t, v(x), \nabla v(x)) \tilde{\varphi}_{x_i}(x) + a_0(x, t, v(x), \nabla v(x)) \tilde{\varphi}(x) \right\} dx = \\ &= \int_\Gamma \sum_{i=1}^n a_i(x, t, v(x), \nabla v(x)) \cdot \cos(\nu(x), x_i) \cdot \varphi(x) d\Gamma + \\ &+ \int_\Omega \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i} a_i(x, t, v(x), \nabla v(x)) + a_0(x, t, v(x), \nabla v(x)) \right\} \tilde{\varphi}(x) dx. \quad (18) \end{aligned}$$

Оскільки $v \in V_a(t)$, то (див. (5)) з (18) (з огляду на довільність $\varphi \in W_p^{1/p'}(\Gamma)$) маємо (17).

Для $p \in \mathbb{P}$ розглянемо множину функцій, будь-який елемент b якої визначений на $S \times \mathbb{R}$, набуває значення в $\mathbb{R}$ та задовольняє умови:

- 6) функція b є каратеодорівською, тобто для майже всіх $(x, t) \in S$ функція $b(x, t, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною і для будь-якого $\xi \in \mathbb{R}$ функція $b(\cdot, \cdot, \xi) : S \rightarrow \mathbb{R}$ – вимірна;
- 7) для майже всіх $(x, t) \in S$ і довільних $s \in \mathbb{R}$

$$|b(x, t, s)| \leq q_{1,b}(t) |s|^{p-1} + q_{2,b}(x, t),$$

де $q_{1,b} \in L_{\infty, \text{loc}}((-\infty, T])$, $q_{2,b} \in L_{p', \text{loc}}(S)$;

- 8) для майже всіх $(x, t) \in S$ і будь-яких $s, s' \in \mathbb{R}$

$$(b(x, t, s) - b(x, t, s'))(s - s') \geq 0.$$

На цій множині також введемо відношення еквівалентності, вважаючи що два набори $b^1(x, t, s)$, $b^2(x, t, s)$, $(x, t, s) \in S \times \mathbb{R}$, еквівалентні, якщо $b^1(x, t, s) = b^2(x, t, s)$ для майже всіх $(x, t) \in S$ і всіх $s \in \mathbb{R}$. Фактор-множину за цим відношенням еквівалентності позначатимемо через $\mathbb{B}_p$. Коли далі говоритимемо про якийсь елемент множини $\mathbb{B}_p$, то матимемо на увазі відповідного представника з класу еквівалентності, яким є цей елемент.

Нехай b – який-небудь елемент простору $\mathbb{B}_p$. Для кожного $t \in (-\infty, T)$ визначимо оператор $B_b(t; \cdot) : W_p^{1/p'}(\Gamma) \rightarrow W_p^{-1/p'}(\Gamma)$ за правилом

$$\langle B_b(t; \varphi), \psi \rangle = \int_\Gamma b(x, t, \varphi) \psi d\Gamma \quad \forall \varphi, \psi \in W_p^{1/p'}(\Gamma). \quad (19)$$

3. Формулювання задачі й основного результату. Введемо ще деякі позначення. Під $L_{q, \text{loc}}((-\infty, T]; X)$, де X – банахів простір, $q \in [1, +\infty]$, розумітимемо простір визначених на $(-\infty, T)$ зі значеннями в X функцій, звуження яких на будь-який скінченний інтервал $(t_1, t_2) \subset (-\infty, T]$ належить $L_q(t_1, t_2; X)$. Приймемо для $p \in \mathbb{P}$

- $\mathbb{F}_p \stackrel{\text{def}}{=} L_{p', \text{loc}}((-\infty, T]; W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma));$
- $\mathbb{U}_p \stackrel{\text{def}}{=} \{u : u \in L_{p, \text{loc}}((-\infty, T]; W_p^1(\Omega)), \gamma_0 u \in C((-\infty, T]; L_2(\Gamma))\};$
- $\mathbb{V}_p \stackrel{\text{def}}{=} \{v : v \in L_{p, \text{loc}}((-\infty, T]; W_p^{1/p'}(\Gamma)), v_t \in L_{p', \text{loc}}((-\infty, T]; W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma))\};$
- $\mathbb{H}_p$ – множина власних опуклих напівнеперервних знизу функціоналів на $W_p^{1/p'}(\Gamma)$ зі значеннями в $(-\infty, +\infty]$.

Сформулюємо задачу, яку будемо досліджувати. Нехай $\tilde{\mathbb{P}} \subset \mathbb{P}$ і для кожного $p \in \tilde{\mathbb{P}}$ маємо деякі підмножини $\tilde{\mathbb{D}}_p, \tilde{\mathbb{H}}_p, \tilde{\mathbb{U}}_p$ відповідно множин $\mathbb{D}_p \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}_p \times \mathbb{B}_p \times \mathbb{F}_p$, $\mathbb{H}_p$ та $\mathbb{U}_p$.

Задача

$$\mathbf{VI}(\tilde{\mathbb{D}}_p, \tilde{\mathbb{H}}_p, \tilde{\mathbb{U}}_p : p \in \tilde{\mathbb{P}})$$

(a variational inequality) така: для кожних $(a, b, f) \in \tilde{\mathbb{D}}_p$, $\Phi \in \tilde{\mathbb{H}}_p$ знайти множину

$$\mathbf{SVI}(a, b, f, \Phi)$$

(a set of solutions of the variational inequality) елементів u з $\tilde{\mathbb{U}}_p$ таких, що

- $u(\cdot, t) \in V_a(t)$ для майже всіх $t \in (-\infty, T)$;
- $\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \langle v_t + G_a(t; u) + B_b(t; \gamma_0 u) - f, v - \gamma_0 u \rangle_{\Gamma} + \Phi(v) - \Phi(\gamma_0 u) \right\} dt \geq$
 $\geq \frac{1}{2} \|v - \gamma_0 u\|_{L_2(\Gamma)}^2 \Big|_{t=t_1}^{t=t_2}$

для довільних t_1, t_2 , $(-\infty < t_1 < t_2 \leq T)$ і будь-якого $v \in \mathbb{V}_p$.

Скажемо, що задача $\mathbf{VI}(\tilde{\mathbb{D}}_p, \tilde{\mathbb{H}}_p, \tilde{\mathbb{U}}_p : p \in \tilde{\mathbb{P}})$ *однозначна (розв'язна, однозначно розв'язна)*, якщо для кожних $(a, b, f) \in \tilde{\mathbb{D}}_p$ і $\Phi \in \tilde{\mathbb{H}}_p$ множина $\mathbf{SVI}(a, b, f, \Phi)$ має *не більше одного елемента (не порожня, складається тільки з одного елемента)*.

Задача $\mathbf{VI}(\tilde{\mathbb{D}}_p, \tilde{\mathbb{H}}_p, \tilde{\mathbb{U}}_p : p \in \tilde{\mathbb{P}})$ називається *коректною*, якщо $\tilde{\mathbb{D}}_p, \tilde{\mathbb{U}}_p$ – простори зі збіжністю і ця задача *однозначно розв'язна, та для будь-якого елемента (a, b, f) класу $\tilde{\mathbb{D}}_p$, і довільної послідовності $\{(a^k, b^k, f_k)\}_{k=1}^{\infty}$ елементів $\tilde{\mathbb{D}}_p$ такої, що*

$$(a^k, b^k, f_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (a, b, f) \quad \text{в } \tilde{\mathbb{D}}_p,$$

маємо

$$u_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u \quad \text{в } \tilde{\mathbb{U}}_p,$$

де $u \in \mathbf{SVI}(a, b, f, \Phi)$, $u_k \in \mathbf{SVI}(a^k, b^k, f_k, \Phi)$, $k \in \mathbb{N}$. Прийнемо $\mathbb{D}_p^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}_p^* \times \mathbb{B}_p \times \mathbb{F}_p$, $p \in \mathbb{P}^*$. Введемо поняття збіжності послідовностей елементів $\mathbb{D}_p^*$ як збіжність компонент відповідно в $\mathbb{A}_p^*$, $\mathbb{B}_p$ та $\mathbb{F}_p$. Збіжність в просторі $\mathbb{F}_p$ є стандартною, тому пояснимо лише, що означає збіжність послідовностей у просторах $\mathbb{A}_p^*$ та $\mathbb{B}_p$. Скажемо, що послідовність $\{a^k\}_{k=1}^{\infty}$ збіжна до a в $\mathbb{A}_p^*$, якщо елементи a^k ($k \in \mathbb{N}$) і елемент a задовольняють умову **5** з тією самою сталою K_2 , а також

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{ess\,sup}_{(x,t) \in \Omega \times (t_0, T)} \sup_{(s, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}} \sum_{i=0}^n \frac{|a_i^k(x, t, s, \xi) - a_i(x, t, s, \xi)|}{|s|^{p-1} + |\xi|^{p-1} + 1} = 0 \quad \forall t_0 < T.$$

Послідовність $\{b^k\}_{k=1}^\infty$ збігається до b в $\mathbb{B}_p$, якщо для елементів b^k ($k \in \mathbb{N}$) і елемента b виконується рівність

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{ess\,sup}_{(x,t) \in \Gamma \times (t_0, T)} \sup_{s \in \mathbb{R}} \frac{|b^k(x, t, s) - b(x, t, s)|}{|s|^{p-1} + 1} = 0 \quad \forall t_0 < T.$$

Теорема 1. *Задача $\mathbf{VI}(\mathbb{D}_p^*, \mathbb{H}_p, \mathbb{U}_p : p \in \mathbb{P}^*)$ – коректна. Крім того, для довільного елемента u з $\mathbf{SVI}(a, b, f, \Phi)$ і будь-яких $t_1 < t_2 \leq T$, $\delta > 0$ правильною є оцінка*

$$\max_{[t_1, t_2]} |\gamma_0 u(t)|^2 + \int_{t_1}^{t_2} \|u(t)\|_{W_p^1(\Omega)}^p dt \leq C_{t_1, t_2} \int_{t_1 - \delta}^{t_2} \|f(t)\|_{W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma)}^{p'} dt + \tilde{C}_{t_1, t_2}(\delta),$$

де $C_{t_1, t_2} > 0$ і $\tilde{C}_{t_1, t_2}(\delta) > 0$ – деякі сталі.

Доведення. Нехай $p \in \mathbb{P}^*$, $(a, b, f) \in \mathbb{D}_p^*$ і $\Phi \in \mathbb{H}_p$. Зведемо задачу на відшукування множини $\mathbf{SVI}(a, b, f, \Phi)$ до знаходження розв'язків деякої параболічної варіаційної нерівності.

Прийmemo для всіх $t \in (-\infty, T)$

$$A_{a,b}(t; \cdot) \stackrel{\text{def}}{=} G_a(t; \cdot) \circ J_a(t; \cdot) + B_b(t; \cdot). \quad (20)$$

Очевидно, що $A_{a,b}(t; \cdot) : W_p^{1/p'}(\Gamma) \rightarrow W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma)$.

Розглянемо задачу: знайти функцію $w \in L_{p, \text{loc}}((-\infty, T]; W_p^{1/p'}(\Gamma)) \cap C((-\infty, T]; L_2(\Gamma))$, яка задовольняє варіаційну нерівність

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \langle v'(t) + A_{a,b}(t; w(t)) - f(t), v(t) - w(t) \rangle_\Gamma + \Phi(v(t)) - \Phi(w(t)) \right\} dt &\geq \\ &\geq \frac{1}{2} \|v(t) - w(t)\|_{L_2(\Gamma)}^2 \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} \end{aligned} \quad (21)$$

для будь-яких $t_1 < t_2 \leq T$ і довільних $v \in \mathbb{V}_p$. Зазначимо, що в (21) оператор $A_{a,b}$ діє з простору $L_{p, \text{loc}}((-\infty, T]; W_p^{1/p'}(\Gamma))$ в простір $L_{p', \text{loc}}((-\infty, T]; W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma))$. Цю задачу далі коротко називатимемо задачею (21), а функцію w – її розв'язком.

Легко переконатися, використовуючи лему 2 та лему 4.1 глави III монографії [8], в такому: $w(x, t)$, $(x, t) \in \Omega \times (-\infty, T)$, – розв'язок задачі (21), то функція

$$u(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} J_a(t; w(x, t)), \quad (x, t) \in \Omega \times (-\infty, T),$$

належить $\mathbf{SVI}(a, b, f, \Phi)$.

Доведемо існування розв'язку задачі (21), використавши теорему 2 [10]. Для цього покажемо, що оператор $A_{a,b}(t; \cdot) : W_p^{1/p'}(\Gamma) \rightarrow W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma)$ є рівномірно монотонним, коерцетивним, обмеженим і семінеперервним для $t \in (-\infty, T)$. Зауважимо, що згідно з [11] для довільної функції $\tilde{w} \in W_p^1(\Omega)$ правильною є така нерівність:

$$\|\tilde{w}\|_{W_p^1(\Omega)} \geq C_8 \|\gamma_0 \tilde{w}\|_{W_{p'}^{1/p'}(\Gamma)}, \quad (22)$$

де $C_8 > 0$ – деяка незалежна від $\tilde{w}$ стала.

Доведемо спочатку, що для будь-якого $t \in (-\infty, T)$ оператор $A_{a,b}(t; \cdot)$ – рівномірно монотонний. Нехай $w_1, w_2 \in W_p^{1/p'}(\Gamma)$. На підставі (4), (15), (19), (22) і умов **5** та **8** одержуємо

$$\begin{aligned} & \langle A_{a,b}(t; w_1) - A_{a,b}(t; w_2), w_1 - w_2 \rangle_\Gamma = \\ & = \langle G_a(t; J_a(t; w_1)) - G_a(t; J_a(t; w_2)), w_1 - w_2 \rangle_\Gamma + \langle B_b(t; w_1) - B_b(t; w_2), w_1 - w_2 \rangle_\Gamma = \\ & = \int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^n \left(a_i(x, t, J_a(t; w_1), \nabla J_a(t; w_1)) - a_i(x, t, J_a(t; w_2), \nabla J_a(t; w_2)) \right) \times \right. \\ & \times (J_a(t; w_1) - J_a(t; w_2))_{x_i} + \left(a_0(x, t, J_a(t; w_1), \nabla J_a(t; w_1)) - a_0(x, t, J_a(t; w_2), \nabla J_a(t; w_2)) \right) \times \\ & \times (J_a(t; w_1) - J_a(t; w_2)) \Big\} dx + \int_\Gamma (b(x, t, w_1) - b(x, t, w_2)) (w_1 - w_2) d\Gamma \geq \\ & \geq C_9 \|J_a(t; w_1) - J_a(t; w_2)\|_{W_p^1(\Omega)}^p \geq C_{10} \|w_1 - w_2\|_{W_p^{1/p'}(\Gamma)}^p, \end{aligned}$$

де C_9 і C_{10} – деякі додатні сталі.

Коерцетивність оператора $A_{a,b}(t; \cdot)$ при $t \in (-\infty, T)$, враховуючи зауваження 1.4 глави III монографії [13], випливає з його рівномірної монотонності.

Доведемо обмеженість оператора $A_{a,b}(t; \cdot)$ при $t \in (-\infty, T)$. Врахувавши лему 1 і співвідношення (16), (19), (20), на підставі **7** отримаємо

$$\begin{aligned} & \|A_{a,b}(t; w)\|_{W_p^{-1/p'}(\Gamma)} = \|G_a(t; J_a(t; w)) + B_b(t; w)\|_{W_p^{-1/p'}(\Gamma)} \leq \\ & \leq \|G_a(t; J_a(t; w))\|_{W_p^{-1/p'}(\Gamma)} + \|B_b(t; w)\|_{W_p^{-1/p'}(\Gamma)} \leq d_1(t) \|w\|_{W_p^{1/p'}(\Gamma)}^{p-1} + d_2(t), \end{aligned}$$

для довільних $w \in W_p^{1/p'}(\Gamma)$, де $d_1 > 0$, $d_2 \geq 0$ – деякі функції відповідно з $L_{\infty, \text{loc}}((-\infty, T])$ та $L_{p', \text{loc}}((-\infty, T])$. Тепер покажемо, що оператор $A_{a,b}(t; \cdot)$ для кожного $t \in (-\infty, T)$ семінеперервний, тобто функція

$$[0; 1] \ni s \xrightarrow{\Psi} \langle A_{a,b}(t; v + sw), w \rangle_\Gamma \in \mathbb{R}$$

є неперервною для будь-яких $v, w \in W_p^{1/p'}(\Gamma)$. Нехай $v, w \in W_p^{1/p'}(\Gamma)$ – довільні елементи. Прийmemo $w^s \stackrel{\text{def}}{=} v + sw$, $s \in (0; 1]$. Очевидно, що $w^s \xrightarrow{s \rightarrow 0} w$ в $W_p^{1/p'}(\Gamma)$, тому і в $L_p(\Gamma)$. Використовуючи це, на підставі умов **6**, **7** та наслідку 3.4 монографії [8] (ст. 49) одержимо

$$\int_\Gamma |b(x, t, w^s) - b(x, t, w)|^{p'} dS \xrightarrow{s \rightarrow 0} 0. \quad (23)$$

Прийmemo $\tilde{w} \stackrel{\text{def}}{=} J_a(t; w)$ і $\tilde{w}^s \stackrel{\text{def}}{=} J_a(t; w^s)$ для довільного $s \in (0, 1]$. З леми 2 випливає, що $\tilde{w}^s \xrightarrow{s \rightarrow 0} \tilde{w}$ в $W_p^1(\Omega)$, коли $w^s \xrightarrow{s \rightarrow 0} w$ в $W_p^{1/p'}(\Gamma)$. Тому, використовуючи **1**, **2** та наслідок 3.4 монографії [8] (ст. 49), одержимо

$$\int_\Omega |a_i(x, t, \tilde{w}^s, \nabla \tilde{w}^s) - a_i(x, t, \tilde{w}, \nabla \tilde{w})|^{p'} dx \xrightarrow{s \rightarrow 0} 0, \quad i = \overline{0, n}.$$

Звідси, використовуючи нерівність Гельдера, матимемо

$$\begin{aligned} & \left| \langle G_a(t; J_a(t; w^s)) - G_a(t; J_a(t; w)), w \rangle_\Gamma \right| = \\ & = \left| \int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^n (a_i(x, t, \tilde{w}^s, \nabla \tilde{w}^s) - a_i(x, t, \tilde{w}, \nabla \tilde{w})) \tilde{w}_{x_i} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (a_0(x, t, \tilde{w}^s, \nabla \tilde{w}^s) - a_0(x, t, \tilde{w}, \nabla \tilde{w})) \tilde{w} \right\} dx \right| \xrightarrow{s \rightarrow 0} 0. \quad (24) \end{aligned}$$

З (23) і (24) легко випливає, що $\Psi(s) \rightarrow \Psi(0)$ при $s \rightarrow 0$, що і треба було показати.

Отже, стосовно задачі (21) виконуються умови теореми 2 праці [10], тому ця задача має розв'язок. Єдиність цього розв'язку випливає з теореми 1 цієї ж статті. Це означає, що задача $\mathbf{VI}(\mathbb{D}_p^*, \mathbb{H}_p, \mathbb{U}_p : p \in \mathbb{P}^*)$ є однозначно розв'язною.

Покажемо тепер, що розв'язок задачі $\mathbf{VI}(\mathbb{D}_p^*, \mathbb{H}_p, \mathbb{U}_p : p \in \mathbb{P}^*)$ неперервно залежить від вихідних даних. Нехай $(a^k, b^k, f_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (a, b, f)$ в $\mathbb{D}_p^*$, де $u \in \mathbf{SVI}(a, b, f, \Phi)$, $u_k \in \mathbf{SVI}(a^k, b^k, f_k, \Phi)$, $k \in \mathbb{N}$. Тоді очевидно, що функція $w(t) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_0 u(\cdot, t)$, $t \in (-\infty; T)$, є розв'язком задачі (21), а функція $w_k(t) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_0 u_k(\cdot, t)$, $t \in (-\infty; T)$, ($k \in \mathbb{N}$) – розв'язком задачі, відмінної від (21) лише тим, що замість оператора $A_{a,b}$ стоїть оператор A_{a^k, b^k} , а функції f – функція f_k . Згідно з [10, теорема 3] маємо, що $w_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} w$ в просторі $L_{p, \text{loc}}((-\infty, T]; W_p^{1/p'}(\Gamma)) \cap C((-\infty, T]; L_2(\Gamma))$. Згідно з лемою 2 $u_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u$ в $L_{p, \text{loc}}((-\infty, T]; W_p^1(\Omega))$. Отже, маємо збіжність послідовності $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ до u в просторі $\mathbb{U}_p$. Оцінка розв'язку випливає безпосередньо з теореми 2 [10] та леми 1.

-
1. *Friedman A.* The initial value problem for the linearized equations of water-waves / *Friedman A., Shinbort M.* // J. Math. Mech. – 1967. – №17. – P.107-180.
 2. *Garipov R.M.* On the linear theory of gravity waves: the theorem of existence and uniqueness / *Garipov R.M.* // Archive Rat. Mech. Anal. – 1967. – №24 – P. 352-362.
 3. *Лионс Ж.-Л.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. / *Лионс Ж.-Л., Мадженес Е.* – М.: Мир, 1971. – 372 с.
 4. *Bejenaru I.* An abstract approximate controllability result and applications to elliptic and parabolic systems with dynamic boundary conditions / *Bejenaru I., Diaz J.I. and Vrabie I.I.* // Electron. J. Differential Equations. – 2001. – №50. – P. 1-19.
 5. *Andreu F.* A degenerate elliptic-parabolic problem with nonlinear dynamical boundary conditions / *Andreu F., Igbida N., Mazon J.M., Toledo J.* // Interfaces Free Bound. – 2006. – №4. – P. 447-479.
 6. *Fila M.* Global solutions of the Laplace equation with a nonlinear dynamical boundary condition / *Fila M., Quittner P.* // Math. Methods Appl. Sci. – 1997. – №20. – P. 1325-1333.
 7. *Vitillaro E.* On the Laplace equation with nonlinear dynamical boundary conditions / *Vitillaro E.* // Proc. London Math. Soc. – 2006. – Vol.3, №93. – P. 418-446.
 8. *Showalter R.E.* Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations. / *Showalter R.E.* – Providence: Amer. Math. Soc. – Vol 49. – 1997. – 278 p. (Mathematical Surveys and Monographs)

9. Бокало Н.М. О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений / Бокало Н.М. // Труды семинара им. И.Г. Петровского. – 1989. – Вып. 14. – С. 3-44.
10. Bokalo M.M. Well-posedness of problems without initial conditions for nonlinear parabolic variational inequalities / Bokalo M.M. // Nonlinear boundary value problems. – 1998. – №8. – P. 58-63.
11. Adams R.A. Sobolev spaces. / Adams R.A. – New York; San Francisco; London: Academic press, 1975. – 270 p.
12. Gagliardo E. Caratterizzazione delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili / Gagliardo E. // Rend. Sem Mat. Padova. – 1957. – №27. – P. 284-305.
13. Гавевский Х. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Гавевский Х., Грёгер К., Захаруас К. – М.: Мир, 1978. – 336 с.

A PROBLEM WITHOUT INITIAL CONDITIONS FOR EVOLUTION VARIATIONAL INEQUALITIES ON MANIFOLD

Mykola BOKALO, Yuriy DMYTRYSHYN

*Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka str., 1
e-mail: yuree@yandex.ru*

In this paper we consider a problem for the second order quasilinear equation, given on the cylinder with parallel to t -axis generatrices, where the time variable t runs through the interval $(-\infty, T]$. The boundary condition at the cylinder surface is given by a nonlinear evolutionary variational inequality, containing the first derivatives of search function with respect to time and space variables. We find a sufficient condition to existence of the unique solution of this problem, it's continuous dependence on initial data without restrictions on increasing of initial data and behavior of solution at $t \rightarrow -\infty$.

Key words: dynamic boundary-value problems, dynamic boundary conditions, evolution variational inequalities, quasilinear elliptic equations

Стаття надійшла до редколегії 05.09.2007

Прийнята до друку 22.10.2008

УДК 517.95

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З НЕЛОКАЛЬНОЮ ДІЄЮ

Тарас БОКАЛО

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1

Розглянуто мішану задачу для параболічного рівняння

$$u_t - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u + \int_0^t K(x,t,s)u(x,s)ds = f(x,t)$$

в необмеженій області. Одержано умови існування та єдиності розв'язку цієї задачі.

Ключові слова: параболічне рівняння, нелокальний доданок.

1. Перші результати стосовно єдиності розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності в класах зростаючих функцій отримали Е.Е. Леві (E.E. Levi) та Е. Хольмгрен (E. Holmgren). У праці [1] А.Н. Тихонов довів таке: якщо функція u є розв'язком задачі Коші

$$u_t - \Delta u = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T), \quad u|_{t=0} = 0, \quad (1)$$

і задовольняє оцінку

$$|u(x, t)| \leq C e^{a|x|^2}, \quad (2)$$

де $a \geq 0$, $C > 0$ – сталі, то $u \equiv 0$. Дещо ширший клас знайшов С. Теклінд (S. Taklind): розв'язок u задачі (1) тотожно рівний нулю, якщо $|u(x, t)| \leq C e^{|x|h(|x|)}$, де $h(|x|)$ – неспадна невід'ємна функція, що задовольняє умову $\int_1^\infty \frac{d\tau}{h(\tau)} = +\infty$.

Для крайових задач в необмежених областях результати про єдиність розв'язку в класах зростаючих функцій для параболічних рівнянь і систем отримали В.П. Лавренчук, С.Д. Івасишен, О.А. Олійник і Е.В. Радкевич [2]. Дослідження в цих працях побудовано на властивостях і оцінках функції Гріна та фундаментальних розв'язків.

У цій праці розглянуто мішану задачу в необмеженій області для параболічного рівняння з нелокальною дією.

2. Формулювання задачі й основних результатів. Нехай n – деяке натуральне число, Ω – необмежена область в $\mathbb{R}^n$ така, що для будь-якого $R \in \mathbb{N}$ множина $\Omega^R \stackrel{\text{def}}{=} \Omega \cap \{x : |x| \stackrel{\text{def}}{=} (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}} < R\}$ є областю з кусково-гладкою межею

$\partial\Omega^R$, а $T > 0$ – деяке дійсне число. Введемо такі позначення: $Q_\tau \stackrel{\text{def}}{=} \Omega \times (0, \tau)$, $S_\tau \stackrel{\text{def}}{=} \partial\Omega \times (0, \tau)$, $\Omega_\tau = \{(x, \tau) : x \in \Omega\}$, $Q_\tau^R \stackrel{\text{def}}{=} \Omega^R \times (0, \tau)$, $S_\tau^R \stackrel{\text{def}}{=} \partial\Omega^R \times (0, \tau)$, де $\tau \in (0, T]$, $R > 0$.

Розглянемо задачу

$$u_t - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x, t)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x, t)u_{x_i} + c(x, t)u + \int_0^t K(x, t, s)u(x, s)ds = f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (4)$$

$$u|_{S_T} = 0. \quad (5)$$

Припустимо, що виконуються умови:

- (A):** $a_{ij} \in L^\infty(Q_T)$; $a_{ij} = a_{ji}$ майже скрізь на Q_T ($i, j = \overline{1, n}$), $a_0|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_i\xi_j \leq a_1|\xi|^2$ для будь-яких $\xi \in \mathbb{R}^n$ і майже всіх $(x, t) \in Q_T$, $a_0 > 0$, $a_1 > 0$ – деякі сталі;
(B): $b_i \in L^\infty(Q_T)$ ($i = \overline{1, n}$) і нехай $b_0 \geq 0$ – стала, така, що $\sum_{i=1}^n b_i^2(x, t) \leq b_0$ для майже всіх $(x, t) \in \overline{Q_T}$;
(C): $c \in L^\infty(Q_T)$ і нехай $c_0 > 0$ – стала, для якої виконується нерівність $-c(x, t) \leq c_0$ для майже всіх $(x, t) \in \overline{Q_T}$;
(K): $K \in L^\infty(\Omega \times (0, T) \times (0, T))$ і нехай $K_0 \geq 0$ – стала, така, що $|K(x, t, s)| \leq K_0$ для майже всіх $(x, t, s) \in \Omega \times (0, T) \times (0, T)$;
(F): $f \in L_{\text{loc}}^2(\overline{Q_T})$, $u_0 \in L_{\text{loc}}^2(\overline{\Omega})$.

Означення 1. Нехай T_0 – число з проміжку $(0, T]$. Функцію u з простору $C([0, T_0]; L_{\text{loc}}^2(\overline{\Omega})) \cap L^2((0, T_0); \overset{\circ}{H}_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega}))$ називатимемо узагальненим розв'язком задачі (3)-(5) в області Q_{T_0} , якщо вона задовольняє рівність

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\tau} u \eta dx + \int_{Q_\tau} \left[-u \eta_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t)u_{x_i} \eta_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x, t)u_{x_i} \eta + c(x, t)u \eta + \right. \\ \left. + \eta \int_0^t K(x, t, s)u(x, s)ds \right] dx dt = \int_{\Omega_0} u_0 \eta dx + \int_{Q_\tau} f(x, t) \eta dx dt \end{aligned} \quad (6)$$

для будь-яких $\tau \in (0, T_0]$ і довільних $\eta \in C^1(\overline{Q_{T_0}})$ таких, що $\eta = 0$ на S_{T_0} і $\text{supp } \eta$ є обмеженою множиною.

Приймемо $R_k \stackrel{\text{def}}{=} 2^k$ для будь-якого натурального числа k , $M \stackrel{\text{def}}{=} 2((16a_1^2 + b_0)/a_0 + c_0 + K_0 T)$.

Визначимо для дійсних чисел $a \geq 0$ і $\nu \geq 0$ функцію $h_{a,\nu}(r)$, $r > 0$, за правилом: $h_{a,\nu}(r) = e^{ar^2}$, якщо $a > 0$, і $h_{a,\nu}(r) = r^\nu$, якщо $a = 0$.

Теорема 1. (існування розв'язку). Нехай виконуються умови (А), (В), (С), (К), (F) і, крім того, припустимо, що

$$\int_{\Omega^{R_k}} u_0^2 dx + \int_{Q_T^{R_k}} f^2 dx dt \leq C_1 h_{a,\nu}(R_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (7)$$

де $a \geq 0$, $\nu \geq 0$ і $C_1 > 0$ – деякі сталі.

Тоді у випадку $a > 0$ для будь-якого числа $T_0 \in (0, T]$ такого, що $T_0 < \frac{1}{512 Me} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{16^l a + 2}$, а у випадку $a = 0$ для $T_0 = T$, задача (3)-(5) має узагальнений розв'язок у області Q_{T_0} , який задовольняє оцінку

$$\max_{\tau \in [0, T_0]} \int_{\Omega_\tau^{R_k}} |u|^2 dx + \int_{Q_{T_0}^{R_k}} [|\nabla u|^2 + |u|^2] dx \leq C_2 h_{b,\nu}(R_k), \quad (8)$$

де $C_2 > 0$ – деяка стала, $b = 0$ при $a = 0$ і $b = 16^N a$ при $a > 0$, де N найменше натуральне число таке, що $T_0 < \frac{1}{512 Me} \sum_{l=0}^N \frac{1}{16^l a + 2}$.

Теорема 2. (єдиність розв'язку). Нехай виконуються умови (А), (В), (С), (К), (F) і T_0 – яке-небудь число з проміжку $(0, T]$. Тоді задача (3)-(5) не може мати більше одного узагальненого розв'язку в області Q_{T_0} у класі функцій v з $L^2_{loc}(Q_{T_0})$, які задовольняють умову

$$\int_{Q_{T_0}^{R_k}} |v|^2 dx dt \leq C_3 e^{dR_k^2} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (9)$$

де $d \geq 0$, C_3 – деякі (залежні від v) сталі.

3. Існування та єдиність узагальненого розв'язку мішаної задачі в обмеженій області. Нехай D – обмежена підобласть області Ω з кусково-гладкою межею ∂D . У цьому підрозділі використовуватимемо такі позначення: $G_\tau \stackrel{\text{def}}{=} D \times (0, \tau)$, $\Gamma_\tau \stackrel{\text{def}}{=} \partial D \times (0, \tau)$, $D_\tau \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, \tau) : x \in D\} \quad \forall \tau \in (0, T]$. Розглянемо задачу

$$u_t - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x, t) u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) u_{x_i} + c(x, t) u + \int_0^t K(x, t, s) u(x, s) ds = f(x, t), \quad (x, t) \in G_T, \quad (10)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in D, \quad (11)$$

$$u|_{\Gamma_T} = 0. \quad (12)$$

Означення 2. Функцію u з простору $C([0, T]; L^2(D)) \cap L^2((0, T); \overset{o}{H}^1(D))$ називатимемо узагальненим розв'язком задачі (10)-(12), якщо вона задовольняє рівність

$$\int_{D_\tau} u \eta dx + \int_{G_\tau} \left[-u \eta_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} \eta_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} \eta + c u \eta + \right.$$

$$+\eta \int_0^t K(x, t, s)u(x, s)ds \Big] dx dt = \int_{D_0} u_0 \eta dx + \int_{G_\tau} f \eta dx dt \quad (13)$$

для будь-яких $\tau \in (0, T]$ і довільних $\eta \in C^1(\overline{G}_T)$ таких, що $\eta = 0$ на Γ_T .

Твердження 1. Нехай виконуються умови (А), (В), (С), (К), (F). Тоді задача (10)-(12) має тільки один узагальнений розв'язок.

Доведення. Спочатку доведемо існування узагальненого розв'язку. Для цього використаємо метод Гальоркіна.

Виберемо систему функцій $\{\varphi^k\}_{k=1}^\infty$, яка є базисом в $\overset{o}{H}^1(D)$ і ортонормованим базисом в $L^2(D)$. Для кожного $m \in \mathbb{N}$ шукатимемо m -те гальоркінське наближення узагальненого розв'язку нашої задачі у вигляді

$$u^m(x, t) = \sum_{k=1}^m c_k^m(t) \varphi^k(x), \quad (x, t) \in G_T, \quad (14)$$

де $c_1^m, \dots, c_m^m$ — абсолютно неперервні функції такі, що виконуються рівності

$$\begin{aligned} L(u^m, \varphi^l)(t) \equiv & \int_D \left[u_t^m \varphi^l + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i}^m \varphi_{x_j}^l + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i}^m \varphi^l + \right. \\ & \left. + c u^m \varphi^l + \varphi^l \int_0^t K(x, t, s) u^m(x, s) ds - f \varphi^l \right] dx = 0, \quad l = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (15)$$

для майже всіх $t \in (0, T)$, і рівність

$$u^m|_{t=0} = u_0^m, \quad (16)$$

де u_0^m — m -та частинна сума ряду Фур'є функції u_0 за базисом $\{\varphi^k\}_{k=1}^\infty$, тобто $u_0^m(x) = \sum_{k=1}^m d_k \varphi^k(x)$, $x \in D$, де $d_k = \int_D u_0 \varphi^k dx$, $k = \overline{1, m}$.

На підставі співвідношення (14), рівності (15) і (16) еквівалентні рівностям

$$\begin{aligned} (c_l^m)' + \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^m c_k^m \int_D a_{ij} \varphi_{x_i}^k \varphi_{x_j}^l dx + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m c_k^m \int_D b_i \varphi_{x_i}^k \varphi^l dx + \\ + \sum_{k=1}^m c_k^m \int_D c \varphi^k \varphi^l dx + \int_D \sum_{k=1}^m \varphi^k(x) \varphi^l(x) \left(\int_0^t K(x, t, s) c_k^m(s) ds \right) dx - \\ - \int_D f \varphi^l dx = 0, \quad l = \overline{1, m}, \quad \text{для майже всіх } t \in (0, T), \end{aligned} \quad (17)$$

$$c_k^m(0) = d_k, \quad k = \overline{1, m}. \quad (18)$$

Отже, функції $c_1^m, \dots, c_m^m$ є розв'язками задачі (17), (18), яка є задачею Коші для нормальної системи звичайних диференціальних рівнянь. На підставі наших

припущень з [4] впливає, що існує єдиний непродовжуваний розв'язок c_k^m , $k = \overline{1, m}$, задачі (17), (18) визначений на проміжку $[0, T_1]$.

Для кожного $l \in \{1, \dots, m\}$ домножимо l -ту рівність системи (15) на c_l^m і підсумуємо по l від 1 до m . Отримаємо $L(u^m, u^m) = 0$ майже скрізь на $(0, T_1)$. Далі проінтегруємо цю рівність за t від 0 до $\tau \in (0, T_1)$. У результаті отримаємо

$$\begin{aligned} & \int_{G_\tau} u_t^m u^m dxdt + \int_{G_\tau} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i}^m u_{x_j}^m dxdt + \int_{G_\tau} \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i}^m u^m dxdt + \int_{G_\tau} c |u^m|^2 dxdt + \\ & + \int_{G_\tau} u^m(x, t) \int_0^t K(x, t, s) u^m(x, s) ds dxdt - \int_{G_\tau} f u^m dxdt = 0, \quad \tau \in (0, T_1). \end{aligned} \quad (19)$$

Перепишемо (19) у вигляді

$$\begin{aligned} & \int_{G_\tau} u_t^m u^m dxdt + \int_{G_\tau} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i}^m u_{x_j}^m dxdt = - \int_{G_\tau} \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i}^m u^m dxdt - \int_{G_\tau} c |u^m|^2 dxdt - \\ & - \int_{G_\tau} u^m(x, t) \int_0^t K(x, t, s) u^m(x, s) ds dxdt + \int_{G_\tau} f u^m dxdt, \quad \tau \in (0, T_1). \end{aligned} \quad (20)$$

Далі оцінимо кожний член рівності (20), враховуючи умови **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(K)**, **(F)** та використовуючи нерівності Коші та Коші-Буняковського

$$\int_{G_\tau} u_t^m u^m dxdt = \frac{1}{2} \int_D \left(|u^m(x, \tau)|^2 - |u^m(x, 0)|^2 \right) dx; \quad (21)$$

$$\int_{G_\tau} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i}^m u_{x_j}^m dxdt \stackrel{\text{(A)}}{\geq} a_0 \int_{G_\tau} |\nabla u^m|^2 dxdt; \quad (22)$$

$$- \int_{G_\tau} c |u^m|^2 dxdt \leq c_0 \int_{G_\tau} |u^m|^2 dxdt; \quad (23)$$

$$\int_{D_0} |u_0^m|^2 dx \leq \int_{D_0} |u_0|^2 dx; \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & - \int_{G_\tau} \sum_{i=1}^n b_i(x, t) u_{x_i}^m u^m dxdt \leq \int_{G_\tau} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\varepsilon}{2} |u_{x_i}^m|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b_i^2 |u^m|^2 \right) dxdt \stackrel{\text{(B)}}{\leq} \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{G_\tau} |\nabla u^m|^2 dxdt + \frac{b_0}{2\varepsilon} \int_{G_\tau} |u^m|^2 dxdt; \quad (25) \\ & - \int_{G_\tau} u^m \int_0^t K(x, t, s) u^m(x, s) ds dxdt \stackrel{\text{(K)}}{\leq} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq K_0 \left(\int_{G_\tau} |u^m|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{G_\tau} \left(\int_0^t |u^m(x, s)| ds \right)^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq K_0 \sqrt{T} \left(\int_{G_\tau} |u^m|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{G_\tau} \left(\int_0^t |u^m(x, s)|^2 ds \right) dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq T K_0 \int_{G_\tau} |u^m|^2 dx dt; \quad (26)
\end{aligned}$$

$$\int_{G_\tau} f u^m dx dt \leq \frac{1}{2} \int_{G_\tau} |f|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{G_\tau} |u^m|^2 dx dt. \quad (27)$$

З (20), враховуючи оцінки (21)-(27), отримаємо

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \int_{D_\tau} |u^m|^2 dx + \left(a_0 - \frac{\varepsilon}{2} \right) \int_{G_\tau} |\nabla u^m|^2 dx dt \leq \frac{1}{2} \int_{G_\tau} |f|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{D_0} |u_0|^2 dx + \\
&+ \left(c_0 + T K_0 + \frac{b_0}{2\varepsilon} + \frac{1}{2} \right) \int_{G_\tau} |u^m|^2 dx dt. \quad (28)
\end{aligned}$$

Виберемо $\varepsilon = a_0 > 0$. Тоді матимемо

$$\int_{D_\tau} |u^m|^2 dx + a_0 \int_{G_\tau} |\nabla u^m|^2 dx dt \leq \int_{G_\tau} |f|^2 dx dt + \int_{D_0} |u_0|^2 dx + C_4 \int_{G_\tau} |u^m|^2 dx dt, \quad (29)$$

де $C_4 > 0$ – стала, яка не залежить від m .

Прийmemo $C_5 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{G_\tau} |f|^2 dx dt + \int_{D_0} |u_0|^2 dx$ і, врахувавши, що $a_0 > 0$, з (29) отримаємо

$$\int_{D_\tau} |u^m|^2 dx \leq C_5 + C_4 \int_0^\tau \int_{D_t} |u^m|^2 dx dt. \quad (30)$$

За лемою Гронуолла-Белмана з (30) матимемо

$$\int_{D_\tau} |u^m|^2 dx \leq C_6, \quad \forall \tau \in [0, T_1], \quad (31)$$

де $C_6 > 0$ – стала, яка не залежить від m .

З (31), зокрема, випливає, що $[0, T_1] \subset [0, T]$. Перепишемо (29) у вигляді

$$\int_{D_\tau} |u^m|^2 dx + a_0 \int_{G_\tau} |\nabla u^m|^2 dx dt \leq C_5 + C_4 \int_0^\tau \int_{D_t} |u^m|^2 dx dt, \quad \tau \in (0, T]. \quad (32)$$

Додамо до правої та лівої частини (32) $a_0 \int_{G_\tau} |u^m|^2 dx dt$ і застосуємо (31) до правої частини

$$\int_{D_\tau} |u^m|^2 dx + a_0 \int_{G_\tau} [|\nabla u^m|^2 + |u^m|^2] dx dt \leq C_7, \quad \tau \in (0, T]. \quad (33)$$

де $C_7 > 0$ – стала, яка не залежить від m .

З (33) випливають оцінки

$$\|u^m\|_{C([0,T];L^2(D))} + \|u^m\|_{L^2((0,T);H^1_0(D))} \leq C_8, \quad (34)$$

де $C_8 > 0$ – стала, яка не залежить від τ і m .

З оцінки (34) випливає існування підпослідовності послідовності $\{u^m\}$ (цю підпослідовність так само позначатимемо через $\{u^m\}$) і функції $u \in L^\infty((0,T); L^2(D)) \cap L^2((0,T); H^1_0(D))$ таких, що

$$u^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} u \text{ — *слабо в } L^\infty((0,T); L^2(D)), \quad (35)$$

$$u^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} u \text{ — слабо в } L^2((0,T); H^1_0(D)). \quad (36)$$

Покажемо, що для будь-яких $\eta \in L_2(G_T)$

$$\int_{G_T} \eta(x,t) \int_0^t K(x,t,s) u^m(x,s) ds \, dx dt \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_{G_T} \eta(x,t) \int_0^t K(x,t,s) u(x,s) ds \, dx dt. \quad (37)$$

Справді, змінивши на підставі теореми Фубіні порядок інтегрування та використавши (36), матимемо

$$\begin{aligned} & \int_{G_T} \eta(x,t) \int_0^t K(x,t,s) u^m(x,s) ds \, dx dt = \int_D dx \int_0^T dt \int_0^t \eta(x,t) K(x,t,s) u^m(x,s) ds = \\ & = \int_D dx \int_0^T u^m(x,s) ds \int_s^T \eta(x,t) K(x,t,s) dt = \int_{G_T} u^m(x,s) \left(\int_s^T \eta(x,t) K(x,t,s) dt \right) dx ds \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \\ & \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_{G_T} u(x,s) \left(\int_s^T \eta(x,t) K(x,t,s) dt \right) dx ds = \int_{G_T} \eta(x,t) \int_0^t K(x,t,s) u(x,s) ds \, dx dt. \end{aligned} \quad (38)$$

Виберемо яке-небудь натуральне число j таке, що для кожного $l \in \{1, \dots, j\}$ домножимо l -ту рівність системи (15) на $d_l \in C^1[0,T]$, $d_l(T) = 0$. Отримані рівності підсумуємо та результати проінтегруємо за t від 0 до T . У результаті простих перетворень матимемо

$$\begin{aligned} & \int_{G_T} \left[-u^m \eta_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u^m_{x_i} \eta_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u^m_{x_i} \eta + c u^m \eta + \eta \int_0^t K(x,t,s) u^m(x,s) ds \right] dx dt = \\ & = \int_{D_0} u_0^m \eta dx + \int_{G_T} f \eta dx dt, \end{aligned} \quad (39)$$

де $\eta = \sum_{l=1}^j d_l(t) \varphi^l(x)$, $(x,t) \in \overline{G_T}$.

Перейдемо в (39) до границі при $m \rightarrow \infty$, врахувавши (36) і (3). У результаті отримаємо

$$\begin{aligned} \int_{G_T} \left[-u\eta_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}\eta_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_iu_{x_i}\eta + cu\eta + \eta \int_0^t K(x,t,s)u(x,s)ds \right] dxdt = \\ = \int_{D_0} u_0\eta dx + \int_{G_T} f\eta dxdt \end{aligned} \quad (40)$$

для будь-яких $\eta \in P = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{l=1}^j d_l(t)\varphi^l(x), (x,t) \in G_T : d_l \in C^1[0,T], d_l(T) = 0, l = \overline{1,j} \right\}$.

Оскільки будь-яку функцію $\eta \in C^1(\overline{G_T})$ таку, що $\eta(x,t) = 0$, коли $(x,t) \in \Gamma_T$ або $t = T$, можна отримати як границю послідовності функцій з P за нормою простору $H^1(G_T)$, то рівність (40) є правильною для будь-якої функції $\eta \in C^1(\overline{G_T})$, $\eta(x,t) = 0$, коли $(x,t) \in \Gamma_T$ або $t = T$.

Звідси та з зауваження 1 праці [3] випливає, що $u \in C([0,T]; L^2(D))$ і виконується тотожність (13). Отож, функція u є узагальненим розв'язком задачі (10)-(12).

Тепер доведемо єдиність узагальненого розв'язку задачі (10)-(12). Припустимо протилежне. Нехай існує два різні узагальнені розв'язки u^1 і u^2 . Розглянемо їхню різницю $v \stackrel{\text{def}}{=} u^1 - u^2$. Тоді v – узагальнений розв'язок задачі, яка відрізняється від задачі (10)-(12) тільки тим, що $u_0 = 0$, $f = 0$.

З відповідної тотожності типу (13) для v при $\eta = v$ матимемо

$$\frac{1}{2} \int_{D_\tau} v^2 dx + \int_{G_\tau} \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}v_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_iv_{x_i}v + c|v|^2 + v \int_0^t K(x,t,s)v(x,s)ds \right] dxdt = 0. \quad (41)$$

Звідси, аналогічно як при доведенні твердження 1, з (19) отримали (30), матимемо

$$\int_{D_\tau} |v|^2 dx \leq C_9 \int_0^\tau \int_{D_t} |v|^2 dxdt, \quad \tau \in [0, T], \quad (42)$$

де $C_9 > 0$ – деяка стала. За лемою Гронуолла-Белмана з (42) матимемо

$$\int_{D_\tau} |v|^2 dx \leq 0 \quad \forall \tau \in [0, T]. \quad (43)$$

Звідси випливає, що $v(x,t) = 0$ для майже всіх $(x,t) \in G_T$.

4. Допоміжні твердження. Введемо позначення $Q_{\tau_1, \tau_2} \stackrel{\text{def}}{=} \Omega \times (\tau_1, \tau_2)$, $Q_{\tau_1, \tau_2}^R \stackrel{\text{def}}{=} \Omega^R \times (\tau_1, \tau_2)$, де τ_1, τ_2 – довільні числа такі, що $0 \leq \tau_1 < \tau_2 \leq T$, вважаючи, що $Q_{0, \tau} \equiv Q_\tau$, $Q_{0, \tau}^R \equiv Q_\tau^R$.

Лема 1. Нехай виконуються умови (А), (В), (С), (К) і для деяких $R_* > 0$, $0 \leq \tau_1 < \tau_2 \leq T$ функція $v \in C([\tau_1, \tau_2]; L^2(\Omega^{R_*})) \cap L^2((\tau_1, \tau_2); H^1(\Omega^{R_*}))$ така, що $v = 0$ на $(\partial\Omega \cap \partial\Omega^{R_*}) \times (\tau_1, \tau_2)$ і

$$\int_{\Omega_\tau} v\eta dx + \int_{Q_{\tau_1, \tau_2}} \left[-v\eta_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}v_{x_i}\eta_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_iv_{x_i}\eta + cv\eta + \right.$$

$$+ \eta \int_{\tau_1}^t K(x, t, s) v(x, s) ds \Big] dx dt = 0 \quad (44)$$

для довільного числа $\tau \in (\tau_1, \tau_2]$ і функції $\eta \in H^1((\tau_1, \tau_2); L^2(\Omega^{R_*})) \cap L^2((\tau_1, \tau_2); H^1_0(\Omega^{R_*}))$. Тоді для будь-яких чисел r_1, r_2 і τ таких, що $0 \leq r_1 < r_2 \leq R_*$, $\tau_1 < \tau \leq \tau_2$ і функції $w(x, t) = v(x, t)e^{-\mu^2 t}$, $(x, t) \in Q_{\tau_1, \tau_2}^{R_*}$, де $\mu \geq 0$ – довільне число, правильна нерівність

$$\int_{\Omega_{\tau}^{r_1}} w^2 dx + \int_{Q_{\tau_1, \tau_2}^{r_1, r_2}} \mu^2 w^2 dx dt + a_0 \int_{Q_{\tau_1, \tau_2}^{r_1, r_2}} |\nabla w|^2 dx dt \leq \frac{M}{\rho^2} \int_{Q_{\tau_1, \tau_2}^{r_1, r_2}} w^2 dx dt, \quad (45)$$

де $0 < \rho \leq \min\{r_2 - r_1, 1\}$.

Доведення. Не втрачаючи загальності, доведемо лему при $\tau_1 = 0$. Виберемо функцію $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$ таку, що $0 \leq \Phi(t) \leq 1$ при $t \in \mathbb{R}$ і $\Phi(t) = 0$, якщо $t \geq 1$, $\Phi(t) = 1$, якщо $t \leq 0$, і $|\Phi'(t)| \leq 2 \forall t \in \mathbb{R}$. Прийнемо $h(x) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi\left(\frac{|x| - r_1}{r_2 - r_1}\right)$, $\varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=} h^2(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Очевидно, що

$$|\nabla \varphi|^2 = 4h^2 |\nabla h|^2 \leq \frac{16\varphi}{(r_2 - r_1)^2} \leq \frac{16\varphi}{\rho^2}. \quad (46)$$

Використовуючи зауваження 1 з [3], прийнемо в інтегральному співвідношенні (44) $\eta = we^{-\mu^2 t}$. У результаті простих перетворень отримаємо рівність

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\tau}^{r_2}} w^2 \varphi dx + \int_{Q_{\tau}^{r_2}} \left(\mu^2 w^2 \varphi + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} w_{x_i} w_{x_j} \varphi \right) dx dt = - \int_{Q_{\tau}^{r_2}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} w_{x_i} w \varphi_{x_j} dx dt - \\ & - \int_{Q_{\tau}^{r_2}} \sum_{i=1}^n b_i w_{x_i} w \varphi dx dt - \int_{Q_{\tau}^{r_2}} c w^2 \varphi dx dt - \int_{Q_{\tau}^{r_2}} w e^{-\mu^2 t} \varphi \int_0^t K w e^{\mu^2 s} ds dx dt. \end{aligned} \quad (47)$$

Далі зробимо оцінки членів рівності (47), враховуючи оцінку (46), умови **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(K)** і використовуючи нерівності Гельдера та Коші. Отож, для кожного $\tau \in (0, \tau_2]$ матимемо

$$\begin{aligned} & \int_{Q_{\tau}^{r_2}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} w_{x_i} w_{x_j} \varphi dx dt \stackrel{(\mathbf{A})}{\geq} a_0 \int_{Q_{\tau}^{r_2}} |\nabla w|^2 \varphi dx dt; \\ & - \int_{Q_{\tau}^{r_2}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} w_{x_i} w \varphi_{x_j} dx dt \leq \int_{Q_{\tau}^{r_2}} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} w_{x_i}^2 \varphi_{x_j} \varphi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \varphi_{x_i} \varphi_{x_j} w^2 \varphi^{-1} \right)^{\frac{1}{2}} dx dt \leq \\ & \leq \frac{\varepsilon_1}{2} \int_{Q_{\tau}^{r_2}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} w_{x_i} w_{x_j} \varphi dx dt + \frac{1}{2\varepsilon_1} \int_{Q_{\tau}^{r_2}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \varphi_{x_i} \varphi_{x_j} w^2 \varphi^{-1} dx dt \stackrel{(\mathbf{A});(3)}{\leq} \end{aligned} \quad (48)$$

$$\leq \frac{\varepsilon_1 a_1}{2} \int_{Q_\tau^{r_2}} |\nabla w|^2 \varphi dx dt + \frac{8a_1}{\varepsilon_1 \rho^2} \int_{Q_\tau^{r_2}} w^2 dx dt, \quad (49)$$

де ε_1 – довільна додатна стала;

$$\begin{aligned} - \int_{Q_\tau^{r_2}} \sum_{i=1}^n b_i w_{x_i} w \varphi dx dt &\leq \int_{Q_\tau^{r_2}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\varepsilon_2}{2} w_{x_i}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_2} b_i^2 w^2 \right) \varphi dx dt \stackrel{(B)}{\leq} \\ &\leq \frac{\varepsilon_2}{2} \int_{Q_\tau^{r_2}} |\nabla w|^2 \varphi dx dt + \frac{b_0}{2\varepsilon_2} \int_{Q_\tau^{r_2}} w^2 dx dt, \end{aligned} \quad (50)$$

де ε_2 – довільна додатна стала;

$$- \int_{Q_\tau^{r_2}} c w^2 \varphi dx dt \leq c_0 \int_{Q_\tau^{r_2}} w^2 \varphi dx dt \leq c_0 \int_{Q_\tau^{r_2}} w^2 dx dt, \quad (51)$$

$$\begin{aligned} - \int_{Q_\tau^{r_2}} w e^{-\mu^2 t} \varphi \int_0^t K w e^{\mu^2 s} ds dx dt &\leq \int_{Q_\tau^{r_2}} |w| \varphi \int_0^t |K w| ds dx dt \stackrel{(K)}{\leq} \\ &\leq K_0 \left(\int_{Q_\tau^{r_2}} w^2 \varphi dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{Q_\tau^{r_2}} \varphi \left(\int_0^t |w| ds \right)^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq K_0 \sqrt{T} \left(\int_{Q_\tau^{r_2}} w^2 \varphi dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{Q_\tau^{r_2}} \varphi \int_0^\tau w^2 ds dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq K_0 T \int_{Q_\tau^{r_2}} w^2 dx dt. \end{aligned} \quad (52)$$

На підставі оцінок (48)-(52) з (47) одержимо

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_{\Omega_\tau^{r_2}} w^2 \varphi dx + \int_{Q_\tau^{r_2}} \mu^2 w^2 \varphi dx dt + \left(a_0 - \frac{\varepsilon_1}{2} a_1 - \frac{\varepsilon_2}{2} \right) \int_{Q_\tau^{r_2}} |\nabla w|^2 \varphi dx dt \leq \\ &\leq \left(\frac{8a_1}{\varepsilon_1 \rho^2} + \frac{b_0}{2\varepsilon_2} + c_0 + K_0 T \right) \int_{Q_\tau^{r_2}} w^2 dx dt. \end{aligned} \quad (53)$$

Виберемо в (53) $\varepsilon_1 = \frac{a_0}{2a_1}$ й $\varepsilon_2 = \frac{a_0}{2}$ і в результаті, врахувавши, що $0 < \rho \leq 1$, отримаємо (45).

Лема 2. Нехай виконуються умови лемми 1. Тоді при довільних r_1, r_2, τ_1 і τ_2 таких, що $0 < r_1 < r_2 \leq R_*$, $0 \leq \tau_1 < \tau_2 \leq T$, для функції v правильна нерівність

$$\int_{Q_{\tau_1, \tau_2}^{r_1}} v^2 dx dt \leq e^{-q+2(\tau_2-\tau_1)\mu^2} \int_{Q_{\tau_1, \tau_2}^{r_2}} v^2 dx dt, \quad (54)$$

де сталі $q \in \mathbb{N}$ і $\mu \in \mathbb{R}_+$ такі, що

$$p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Mq^2}{\mu^2(r_2 - r_1)^2} \leq e^{-1}, \quad \frac{r_2 - r_1}{q} \leq 1. \quad (55)$$

Доведення. З нерівності (45) маємо

$$\int_{Q_{\tau_1, \tau_2}^{r_1}} w^2(x, t) dx dt \leq \frac{M}{\rho^2 \mu^2} \int_{Q_{\tau_1, \tau_2}^{r_2}} w^2(x, t) dx dt. \quad (56)$$

Нехай $\rho_q = \frac{r_2 - r_1}{q}$, $r_1(j) = r_1 + j\rho_q$, $r_2(j) = r_1(j) + \rho_q$, $j = \overline{0, q-1}$. Приймемо в (56)

$r_1 = r_1(j)$, $r_2 = r_2(j)$ та $\rho = \rho_q$. Отримаємо $\int_{Q_{\tau_1, \tau_2}^{r_1(j)}} w^2 dx dt \leq \frac{M}{\rho_q^2 \mu^2} \int_{Q_{\tau_1, \tau_2}^{r_2(j)}} w^2 dx dt$, тобто

$$\int_{Q_{\tau_1, \tau_2}^{r_1(j)}} w^2 dx dt \leq p \int_{Q_{\tau_1, \tau_2}^{r_1(j+1)}} w^2 dx dt, \quad (57)$$

зауваживши, що $r_2(j) = r_1(j+1)$.

Застосуємо послідовно нерівність (57), що відповідає $j = j_0 > 0$, для оцінки правої частини нерівності (57), що відповідає $j = j_0 - 1$, при $j_0 = 1, 2, \dots, q-1$. У результаті матимемо

$$\int_{Q_{\tau_1, \tau_2}^{r_1}} w^2 dx dt \leq p^q \int_{Q_{\tau_1, \tau_2}^{r_2}} w^2 dx dt. \quad (58)$$

Враховуючи, що $p \leq e^{-1}$, отримаємо

$$\int_{Q_{\tau_1, \tau_2}^{r_1}} w^2 dx dt \leq e^{-q} \int_{Q_{\tau_1, \tau_2}^{r_2}} w^2 dx dt. \quad (59)$$

Тепер згадаємо те, що $w(x, t) = v(x, t)e^{-\mu^2 t}$, $(x, t) \in Q_{\tau_1, \tau_2}^{R_*}$ і з нерівності (59) отримаємо (54).

5. Доведення основних результатів.

Доведення теореми 1. Нехай k – яке-небудь натуральне число. Позначимо через u^k функцію, яка в області $Q_T^{R_k}$ збігається з узагальненим розв'язком задачі (10)-(12) при $D = Q_T^{R_k}$, а на множині $Q_T \setminus Q_T^{R_k}$ дорівнює нулеві.

Оцінимо u^k . Для цього, використавши зауваження 1 праці [3], візьмемо $\eta = u^k$ в тотожності (13) для u^k . Отримаємо рівність

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_\tau^{R_k}} |u^k|^2 dx + \int_{Q_\tau^{R_k}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i}^k u_{x_j}^k dx dt = \int_{Q_\tau^{R_k}} \left[- \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i}^k u^k - c |u^k|^2 - \right.$$

$$-u^k \int_0^t K(x, t, s) u^k(x, s) ds \Big] dx dt + \int_{Q_\tau^{R_k}} f u^k dx dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega_0^{R_k}} |u_0|^2 dx, \quad \tau \in (0, T]. \quad (60)$$

Тоді аналогічно як при доведенні леми 1 отримаємо такі оцінки:

$$\int_{Q_\tau^{R_k}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i}^k u_{x_j}^k dx dt \geq a_0 \int_{Q_\tau^{R_k}} |\nabla u^k|^2 dx dt; \quad (61)$$

$$- \int_{Q_\tau^{R_k}} \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i}^k u^k dx dt \leq \frac{\varepsilon_3}{2} \int_{Q_\tau^{R_k}} |\nabla u|^2 dx dt + \frac{b_0}{2\varepsilon_3} \int_{Q_\tau^{R_k}} u^2 dx dt, \quad (62)$$

де $\varepsilon_3 > 0$ – довільна стала;

$$- \int_{Q_\tau^{R_k}} c |u^k|^2 dx dt \leq c_0 \int_{Q_\tau^{R_k}} |u^k|^2 dx dt; \quad (63)$$

$$- \int_{Q_\tau^{R_k}} u^k \int_0^t K u^k ds dx dt \leq K_0 T \int_{Q_\tau^{R_k}} |u^k|^2 dx dt; \quad (64)$$

$$\int_{Q_\tau^{R_k}} f u^k dx dt \leq \frac{1}{2} \int_{Q_\tau^{R_k}} |u^k|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{Q_\tau^{R_k}} |f|^2 dx dt. \quad (65)$$

На підставі (61)-(65) з (60) при $\varepsilon_3 = a_0$ матимемо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega_\tau^{R_k}} |u^k|^2 dx + \frac{a_0}{2} \int_{Q_\tau^{R_k}} |\nabla u^k|^2 dx dt &\leq \left(T K_0 + \frac{b_0}{2a_0} + c_0 + \frac{1}{2} \right) \int_{Q_\tau^{R_k}} |u^k|^2 dx dt + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega_0^{R(k)}} |u_0|^2 dx + \int_{Q_\tau^{R_k}} |f|^2 dx dt \right), \end{aligned} \quad (66)$$

З (66), зокрема, випливає

$$\int_{\Omega_\tau^{R_k}} |u^k|^2 dx \leq F_k(\tau) + C_{10} \int_0^\tau \int_{\Omega_t^{R_k}} |u^k|^2 dx dt, \quad (67)$$

де $C_{10} = \text{const} > 0$,

$$F_k(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_{\Omega_0^{R_k}} |u_0|^2 dx + \int_{Q_\tau^{R_k}} |f|^2 dx dt \right) \quad \forall \tau \in (0, T]. \quad (68)$$

Отже, застосувавши лему Гронуолла-Белмана до (67), отримаємо

$$\int_{\Omega_{\tau}^{R_k}} |u^k|^2 dx \leq C_{11} F_k(T), \quad \tau \in (0, T]. \quad (69)$$

З (69) і (7) отримаємо

$$\int_{\Omega_{\tau}^{R_k}} |u^k|^2 dx \leq C_{12} h_{a, \nu}(R_k), \quad (70)$$

де $C_{12} > 0$ – стала, яка від k не залежить.

З (66) і (70) випливає оцінка

$$\|u^k\|_{C([0, T]; L^2(\Omega^{R_k})) \cap L^2((0, T); H^1(\Omega^{R_k}))} \leq C_{13} \sqrt{h_{a, \nu}(R_k)}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (71)$$

Прийmemo $u^{k+2, k+l} \stackrel{\text{def}}{=} u^{k+2} - u^{k+l}$ для будь-яких $k \in \mathbb{N}$, $l > 2$. Очевидно, що функція $v = u^{k+2, k+l}$ задовольняє умови леми 1 при $R_* = R_{k+1}$. Звідси, взявши $r_1 = R_k$, $r_2 = R_{k+1}$ і $\mu = \sqrt{a_0}$, легко отримуємо нерівність

$$\int_{\Omega_{\tau}^{R_k}} |u^{k+2, k+l}|^2 dx + a_0 \int_{Q_{\tau}^{R_k}} [|u^{k+2, k+l}|^2 + |\nabla u^{k+2, k+l}|^2] dx dt \leq C_{14} \int_{Q_{\tau}^{R_{k+1}}} |u^{k+2, k+l}|^2 dx dt, \quad (72)$$

де $C_{14} > 0$ – стала, яка від k і l не залежить.

Тепер доведемо фундаментальність послідовності $\{u^k\}_{k=1}^{\infty}$ в $L_{\text{loc}}^2(Q_{T_1})$, де T_1 – деяке число з проміжку $(0, T]$.

З леми 2 випливає така оцінка:

$$\int_{Q_{\tau}^{R_{k+1}}} |u^{k+2, k+3}|^2 dx dt \leq e^{-q+2\tau\mu^2} \int_{Q_{\tau}^{R_{k+2}}} |u^{k+2, k+3}|^2 dx dt, \quad \tau \in (0, T]. \quad (73)$$

Нехай $\lambda_1 \stackrel{\text{def}}{=} 2[a] + 4$, $g \stackrel{\text{def}}{=} 8(Me)^{\frac{1}{2}}$, $T_1 \stackrel{\text{def}}{=} \min\{T, (4g^2\lambda_1)^{-1}\}$. Візьмемо в (73) $\tau = T_1$, $q = \lambda_1 2^{2(k+3)}$, $\mu = \lambda_1 g 2^{k+3}$. Тоді матимемо

$$\int_{Q_{T_1}^{R_{k+1}}} |u^{k+2, k+3}|^2 dx dt \leq e^{-\lambda_1 2^{2(k+3)} + 2(\lambda_1 g)^2 T_1 2^{2(k+3)}} \int_{Q_{T_1}^{R_{k+2}}} |u^{k+2, k+3}|^2 dx dt. \quad (74)$$

Тепер застосуємо оцінку (70) до правої частини (74), врахувавши, що $|u^{k+2, k+3}| \leq 2(|u^{k+2}|^2 + |u^{k+3}|^2)$. У результаті одержимо

$$\begin{aligned} \int_{Q_{T_1}^{R_{k+1}}} |u^{k+2, k+3}|^2 dx dt &\leq 4C_{12} e^{-\lambda_1 2^{2(k+3)} + 2(\lambda_1 g)^2 T_1 2^{2(k+3)}} e^{a 2^{2(k+3)}} = \\ &= C_{15} e^{(-\lambda_1 + 2(\lambda_1 g)^2 T_1 + a) 2^{2(k+3)}}, \end{aligned} \quad (75)$$

де $C_{15} = 4C_{12} > 0$ – стала, яка від k не залежить.

Легко перевірити, що $-\lambda_1 + 2(\lambda_1 g)^2 T_1 + a < -1$. Отож, з нерівності (75) випливає нерівність

$$\int_{Q_{T_1}^{R_{k+1}}} |u^{k+2, k+3}|^2 dx dt \leq C_{15} e^{-4^{k+3}} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (76)$$

Очевидно, що виконується ланцюжок нерівностей

$$\begin{aligned} \|u^{k+2, k+l}\|_{L^2(Q_{T_1}^{R_{k+1}})} &\leq \|u^{k+2, k+3}\|_{L^2(Q_{T_1}^{R_{k+1}})} + \|u^{k+3, k+4}\|_{L^2(Q_{T_1}^{R_{k+2}})} + \dots + \\ &+ \|u^{k+l-1, k+l}\|_{L^2(Q_{T_1}^{R_{k+l-2}})}. \end{aligned} \quad (77)$$

Оцінимо праву частину (77), використовуючи нерівність (76). Матимемо

$$\begin{aligned} \int_{Q_{T_1}^{R_{k+1}}} |u^{k+2, k+l}|^2 dx dt &\leq C_{15} (e^{-4^{k+3}} + e^{-4^{k+4}} + \dots + e^{-4^{k+l}}) = \\ &= C_{15} \sum_{i=3}^l (e^{-4^k})^{4^i} \leq C_{15} \sum_{i=1}^{\infty} (e^{-4^k})^i \leq C_{15} \frac{e^{-4^k}}{1 - e^{-4^k}} \leq 2C_{15} e^{-4^k}. \end{aligned} \quad (78)$$

З (72) і (78) маємо

$$\|u^{k+2, k+l}\|_{C([0, T_1]; L^2(\Omega^{R_k})) \cap L^2((0, T_1); H^1(\Omega^{R_k}))} \leq C_{16} e^{-2^{2k-1}}, \quad k, l \in \mathbb{N}, l > 2, \quad (79)$$

де $C_{16} > 0$ – стала, яка від k і l не залежить.

Звідси випливає фундаментальність послідовності $\{u^k\}$ в просторі $C([0, T_1]; L^2(\Omega^{R(k)})) \cap L^2((0, T_1); H^1(\Omega^{R(k)}))$. Отже, існує функція $u_1 \in C([0, T_1]; L^2_{\text{loc}}(\bar{\Omega})) \cap L^2((0, T_1); H^1_{\text{loc}}(\bar{\Omega}))$ така, що

$$u^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u_1 \quad \text{в } C([0, T_1]; L^2_{\text{loc}}(\bar{\Omega})) \cap L^2((0, T_1); H^1_{\text{loc}}(\bar{\Omega})). \quad (80)$$

Нагадаємо, що для u^k виконується рівність

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\tau} u^k \eta dx + \int_{Q_\tau} [-u^k \eta_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u^k_{x_i} \eta_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) u^k_{x_i} \eta + c(x, t) u^k \eta + \\ + \eta \int_0^t K(x, t, s) u^k(x, s) ds] dx dt = \int_{\Omega_0} u_0 \eta dx + \int_{Q_T} f(x, t) \eta dx dt \end{aligned} \quad (81)$$

для будь-якої функції $\eta \in C^1(\bar{Q}_{T_1})$ такої, що $\eta|_{S_{T_1}} = 0$, $\text{supp } \eta \subset \bar{Q}_{T_1}^{R_k}$.

Зафіксувавши η , спрямуємо k до $+\infty$. У результаті, враховуючи (80), отримаємо рівність (6) при $u = u_1$ і $T = T_1$.

Позначимо через $\|\cdot\|_k$ норму в просторі $C([0, T_1]; L^2(\Omega^{R_k})) \cap L^2((0, T_1); H^1(\Omega^{R_k}))$. Тоді на підставі (71) і (79) отримаємо

$$\begin{aligned} \|u\|_k &\leq \|u - u^{k+2}\|_k + \|u^{k+2}\|_k \leq \lim_{l \rightarrow \infty} \|u^{k+l} - u^{k+2}\|_k + \\ &+ \|u^{k+2}\|_k \leq C_{16} e^{-2^{2k-1}} + C_{13} \sqrt{h_{a, \nu}(R_{k+2})} \leq C_{17} \sqrt{h_{16a, \nu}(R_k)}, \end{aligned} \quad (82)$$

де $C_{17} > 0$ – стала, що від k не залежить.

Якщо $T_1 = T$, то u_1 – узагальнений розв’язок задачі (3)-(5) в області Q_T . Якщо ж $T_1 < T$, то розглянемо задачу

$$\begin{aligned} u_t - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x, t) u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) u_{x_i} + c(x, t) u + \int_{T_1}^t K(x, t, s) u(x, s) ds = \\ = f(x, t) - \int_0^{T_1} K(x, t, s) u_1(x, s) ds, \quad (x, t) \in Q_{T_1, T}, \end{aligned} \quad (83)$$

$$u(x, 0) = u_1(x, T_1), \quad x \in \Omega, \quad (84)$$

$$u|_{\partial\Omega \times (T_1, T)} = 0. \quad (85)$$

Тоді, міркуючи аналогічно, легко доводимо існування узагальненого розв’язку u_2 в області Q_{T_1, T_2} , де $T_2 = T_1 + \min\{T - T_1, (4g^2\lambda_2)^{-1}\}$, $\lambda_2 = 2[16a] + 4$.

Далі легко показати, що "склейка" функцій u_1 і u_2 , тобто функція $\widehat{u}_2(x, t)$, $(x, t) \in Q_{T_2}$, яка визначена за правилом

$$\widehat{u}_2(x, t) = u_1(x, t) \text{ для майже всіх } (x, t) \in Q_{T_1} \text{ і}$$

$$\widehat{u}_2(x, t) = u_2(x, t) \text{ для майже всіх } (x, t) \in Q_{T_1, T_2}$$

і буде шуканим узагальненим розв’язком розглянутої задачі. Якщо $T_2 < T$, то можна цей процес продовжити. У результаті ми дійдемо висновку про правильність нашого твердження.

Доведення теореми 2. Нехай існують два узагальнені розв’язки u^1 та u^2 задачі (3)-(5). Розглянемо функцію $v = u_1 - u_2$. Застосувавши лему 2 до v , отримаємо

$$\int_{Q_{\tau}^{r_1}} v^2 dx dt \leq e^{-q+2\tau\mu^2} \int_{Q_{\tau}^{r_2}} v^2 dx dt, \quad (86)$$

де r_1, r_2 – довільні числа, $0 < r_1 < r_2$ та $q \in \mathbb{N}$ і $\mu > 0$ такі, що $\frac{r_2 - r_1}{q} \leq 1$,

$$\frac{Mq^2}{\mu^2(r_2 - r_1)^2} \leq e^{-1}.$$

Тепер, вибравши $r_1 = R_k$, $r_2 = R_{k+1}$, $q = \lambda_1 2^{2(k+1)}$, $\tau = T_1$, $\mu = g\lambda_1 2^{k+1}$, де $k \in \mathbb{N}$ і $\lambda_1 = 2[a] + 4$ (так як у доведенні теореми 1) і, врахувавши (9), з (86) матимемо

$$\int_{Q_{T_1}^{R_k}} v^2 dx dt \leq C_{18} e^{-4^{k+1}}, \quad (87)$$

де $C_{18} > 0$ – деяка стала.

Перейшовши в (87) до границі при $k \rightarrow \infty$, отримаємо, що $v = 0$ майже всюди в $Q_T \cap \{(x, t) : 0 \leq t \leq T_1\}$. Проводячи послідовно міркування для скінченної кількості множин $Q_T \cap \{(x, t) : T_1 \leq t \leq 2T_1\}$, $Q_T \cap \{(x, t) : 2T_1 \leq t \leq 3T_1\}$, ..., $Q_T \cap \{(x, t) : mT_1 \leq t < T_0\}$, де $m \in \mathbb{N}$ таке, що $mT_1 < T_0 \leq (m+1)T_1$, отримаємо, що $v = 0$ майже всюди в Q_T .

-
1. Тихонов А.Н. Теоремы единственности для уравнения теплопроводности / Тихонов А.Н. // Матем. сб. – 1935. – Т. 42, №2. – С. 199-215.
 2. Олейник О.А. Аналитичность и теоремы типа Лиувилля и Фрагмена-Линделёфа для общих параболических систем дифференциальных уравнений / Олейник О.А., Радкевич Е.В. // Функ. анализ. – 1974. – Т. 8, №4. – С. 59-70.
 3. Лавренюк С. Мішана задача для ультрапараболічного рівняння з нелокальною дією / Лавренюк С., Олісевич М. // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2006. – Вип. 66. – С. 99-113.
 4. Коддингтон Э.А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Коддингтон Э.А., Левинсон Н. // М.: Изд-во иностранной литературы, 1958. – 474 с.

MIXED PROBLEM FOR PARABOLIC EQUATION WITH DISLOCATED ACTION

Taras BOKALO

*Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytetska Str., 1*

We examined mixed problem for parabolic equation

$$u_t - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u + \int_0^t K(x,t,s)u(x,s)ds = f(x,t)$$

in an unbounded domain and have obtained some conditions of existence and uniqueness of solution for this problem.

Key words: parabolic equation, dislocated term.

Стаття надійшла до редколегії 26.12.2007

Прийнята до друку 22.10.2008

УДК 517.53

ПРО РАДИУСИ ОДНОЛИСТОСТІ ПОХІДНИХ ГЕЛЬФОНДА-ЛЕОНТЬЄВА ЛАКУНАРНИХ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ

Олександр ВОЛОХ, Мирослав ШЕРЕМЕТА

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1*

Для лакунарного степеневих ряду досліджено поведінку послідовності радіусів однолистості послідовних похідних Гельфонда-Леонтьєва.

Ключові слова: степеневий ряд, похідні Гельфонда-Леонтьєва, радіус однолистості.

1. Для $0 < R \leq +\infty$ нехай $A(R)$ – клас аналітичних в крузі $\mathbb{D}_R = \{z : |z| < R\}$ функцій

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k, \quad (1)$$

а $A(0)$ – клас формальних степеневих рядів. Будемо говорити, що $f \in A^+(0)$, якщо $f \in A(0)$ і $f_k > 0$ для всіх $k \geq 0$. Для $f \in A(0)$ і $l(z) = \sum_{k=0}^{\infty} l_k z^k \in A^+(0)$ формальний степеневий ряд

$$D_l^n f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l_k}{l_{k+n}} f_{k+n} z^k = \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{l_{k-n+1}}{l_{k+1}} f_{k+1} z^{k-n+1}$$

називається [1] n -ю похідною Гельфонда-Леонтьєва. Якщо $l(z) = e^z$, тобто $l_k = 1/k!$, то $D_l^n f(z) = f^{(n)}(z)$ – звичайна n -на похідна функції f . Вважатимемо надалі $l_0 = 1$.

При означенні радіуса однолистості $\rho = \rho[f]$ функції $f \in A(R)$ маємо на увазі таке: якщо $f'(0) = 0$, то вважаємо $\rho = 0$, якщо $f'(0) \neq 0$, то ρ – радіус найбільшого круга з центром у точці $z = 0$, у якому функція f однолиста.

Дослідженню асимптотичного поведінку послідовності $\rho_n = \rho[f^{(n)}]$ радіусів однолистості звичайних похідних функції $f \in A(R)$, $R > 0$, присвячені статті [2 - 4], а похідних Гельфонда-Леонтьєва – статті [5 - 8].

Степеневий ряд (1) називається [3] лакунарним з лакунами довжиною не менше $k \in \mathbb{N}$, якщо з того, що $f_n \neq 0$, випливає, що $f_{n+j} = 0$ для $1 \leq j \leq k$ (f_{n+k+1} може також дорівнювати нулеві). В [3] доведено таку теорему.

Теорема А. *Існує зростаюча послідовність (x_k) додатних чисел, визначена рівностями $\sum_{p=1}^{\infty} x_k^{p^k} / (kp)! = 1$, з такими властивостями:*

- 1) $x_1 = \ln 2$, $x_2 = \ln(2 + \sqrt{3})$, $(k! \ln 2)^{1/k} \leq x_k \leq (k!)^{1/k}$ для всіх $k \geq 1$ і $\lim_{k \rightarrow \infty} ((k!)^{1/k} - x_k) = 0$;
- 2) якщо ряд (1) має радіус збіжності $R > 0$ та лакуни довжиною не менше $k \in \mathbb{N}$ і не зводиться до полінома, то $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \rho[f^{(n)}] \geq R x_k$.

Для похідних Гельфонда-Леонт'єва аналог теореми А отримано в [7], де доведено таку теорему.

Теорема Б. *Нехай ряд (1) має радіус збіжності $R > 0$ та лакуни довжиною не менше $k \in \mathbb{N}$ і не зводиться до полінома. Нехай $l \in A^+(0)$, $l_{n-1}/l_n \rightarrow \infty$ і $l_{n-1}l_{n+1}/l_n^2 \uparrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Тоді існує зростаюча послідовність (x_k) додатних чисел, визначена рівностями $\sum_{p=1}^{\infty} l_1 x_k^{p^k} / l_{kp+1} = 1$, така, що $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} l_{n-1} \rho[D_l^n f] / l_n \geq R x_k$.*

Мета нашої праці – результати про поводження радіусів однолистості похідних Гельфонда-Леонт'єва лакунарних степеневих рядів без умови на довжину лакун. Припустимо, що

$$f(z) = f_0 + \sum_{p=0}^{\infty} f_{n_p+1} z^{n_p+1}, \quad f_{n_p+1} \neq 0 \quad (p \geq 0). \quad (2)$$

Головним результатом статті є така теорема.

Теорема 1. *Якщо ряд (2) має радіус збіжності $R > 0$ і послідовність $(l_{p-1}l_{p+1}/l_p^2)$ неспадна, то*

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{l_{n_{j+1}-n_j+1}}{l_1} \frac{l_{n_j+1}}{l_{n_{j+1}+1}} \right)^{\frac{1}{n_{j+1}-n_j}} \rho[D_l^{n_j} f] \geq \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} R. \quad (3)$$

Якщо ж до того $|f_{n_p+1}/f_{n_{p+1}+1}|^{1/(n_{p+1}-n_p)} \nearrow R$ при $p \rightarrow \infty$, то

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} R &\leq \underline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{l_{n_{j+1}-n_j+1}}{l_1} \frac{l_{n_j+1}}{l_{n_{j+1}+1}} \right)^{\frac{1}{n_{j+1}-n_j}} \rho[D_l^{n_j} f] \leq \\ &\leq \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{l_{n_{j+1}-n_j+1}}{l_1} \frac{l_{n_j+1}}{l_{n_{j+1}+1}} \right)^{\frac{1}{n_{j+1}-n_j}} \rho[D_l^{n_j} f] \leq 2R. \end{aligned} \quad (4)$$

2. Попередні результати. Наші дослідження ґрунтуються на таких двох лемах з [8].

Лема 1. *Якщо функція $\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$ однолиста в крузі $\mathbb{D}_\rho$, то $|\alpha_k| \rho^{k-1} \leq k |\alpha_1|$ для всіх $k \geq 1$.*

Лема 2. *Якщо $\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$ і $\sum_{k=2}^{\infty} k |\alpha_k| \rho^{k-1} \leq |\alpha_1|$, то функція α однолиста в крузі $\mathbb{D}_\rho$.*

За означенням $D_l^n f$ маємо

$$D_l^n f(z) = \sum_{n_p \geq n-1} \frac{l_{n_p-n+1}}{l_{n_p+1}} f_{n_p+1} z^{n_p-n+1}. \quad (5)$$

Якщо $n_{j-1} < n < n_j$, то з (5) отримуємо $D_l^n f(z) = \sum_{p=j}^{\infty} \frac{l_{n_p-n+1}}{l_{n_p+1}} f_{n_p+1} z^{n_p-n+1}$ і

$$\begin{aligned} (D_l^n f(z))' &= \sum_{p=j}^{\infty} \frac{l_{n_p-n+1}}{l_{n_p+1}} f_{n_p+1} (n_p - n + 1) z^{n_p-n} = \\ &= z^{n_j-n} \sum_{p=j}^{\infty} \frac{l_{n_p-n+1}}{l_{n_p+1}} f_{n_p+1} (n_p - n + 1) z^{n_p-n_j}, \end{aligned}$$

тобто $(D_l^n f(z))'|_{z=0} = 0$ і $\rho[D_l^n f] = 0$. Звідси випливає, що $\rho[D_l^n f] = 0$ для всіх $n \neq n_j$, $j \geq 0$, так що нам треба досліджувати поведінку послідовності $(\rho[D_l^{n_j} f])$, а у цьому випадку з (5) отримуємо

$$\begin{aligned} D_l^{n_j} f(z) &= \sum_{n_p \geq n_j-1} \frac{l_{n_p-n_j+1}}{l_{n_p+1}} f_{n_p+1} z^{n_p-n_j+1} = \\ &= A_j + \frac{l_1}{l_{n_j+1}} f_{n_j+1} + \sum_{p=j+1}^{\infty} \frac{l_{n_p-n_j+1}}{l_{n_p+1}} f_{n_p+1} z^{n_p-n_j+1}, \end{aligned} \quad (6)$$

де $A_j = 0$, якщо $n_j > n_{j-1} + 1$, і $A_j = l_0 f_{n_j} / l_{n_j}$, якщо $n_j = n_{j-1} + 1$. Тому з леми 1 випливає таке твердження.

Твердження 1. Для радіуса однолистості функції $D_l^{n_j} f$ правильна оцінка

$$\rho[D_l^{n_j} f] \leq 2 \left(\frac{l_1 l_{n_{j+1}+1}}{l_{n_{j+1}-n_j+1} l_{n_j+1}} \left| \frac{f_{n_j+1}}{f_{n_{j+1}+1}} \right| \right)^{1/(n_{j+1}-n_j)}. \quad (7)$$

Доведення. Справді, застосовуючи лему 1 до ряду (6), отримуємо

$$\frac{l_{n_p-n_j+1}}{l_{n_p+1}} |f_{n_p+1}| (\rho[D_l^{n_j} f])^{n_p-n_j} \leq (n_p - n_j + 1) \frac{l_1}{l_{n_j+1}} |f_{n_j+1}|$$

для всіх $p \geq j$, звідки для $p = j+1$ маємо

$$\rho[D_l^{n_j} f] \leq (n_{j+1} - n_j + 1)^{1/(n_{j+1}-n_j)} \left(\frac{l_1 l_{n_{j+1}+1}}{l_{n_{j+1}-n_j+1} l_{n_j+1}} \right)^{1/(n_{j+1}-n_j)} \left| \frac{f_{n_j+1}}{f_{n_{j+1}+1}} \right|^{1/(n_{j+1}-n_j)}.$$

Оскільки $(k+1)^{1/k} \leq 2$ для всіх $k \geq 1$, то звідси отримуємо оцінку (7).

З леми 2 і рівності (6) легко випливає таке твердження.

Твердження 2. Якщо

$$\sum_{p=j+1}^{\infty} (n_p - n_j + 1) \frac{l_{n_p-n_j+1} l_{n_j+1}}{l_1 l_{n_p+1}} \frac{|f_{n_p+1}|}{|f_{n_j+1}|} \rho^{n_p-n_j} \leq 1, \quad (8)$$

то $\rho[D_l^{n_j} f] \geq \rho$.

Використовуючи твердження 1 і 2, доведемо ще одне твердження.

Твердження 3. *Якщо для всіх $p > j$*

$$\left(\frac{l_{n_{p+1}-n_j+1}}{l_{n_p-n_j+1}} \frac{l_{n_p+1}}{l_{n_{p+1}+1}} \frac{|f_{n_{p+1}+1}|}{|f_{n_p+1}|} \right)^{\frac{1}{n_{p+1}-n_p}} \leq \left(\frac{l_{n_{j+1}-n_j+1}}{l_1} \frac{l_{n_j+1}}{l_{n_{j+1}+1}} \frac{|f_{n_{j+1}+1}|}{|f_{n_j+1}|} \right)^{\frac{1}{n_{j+1}-n_j}}, \quad (9)$$

то

$$\rho[D_l^{n_j} f] \asymp \left(\frac{l_1 l_{n_{j+1}+1}}{l_{n_{j+1}-n_j+1} l_{n_j+1}} \left| \frac{f_{n_j+1}}{f_{n_{j+1}+1}} \right| \right)^{1/(n_{j+1}-n_j)}, \quad j \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Доведення. З умови (9) випливає, що для $p \geq j+2$

$$\begin{aligned} & \frac{l_{n_p-n_j+1} l_{n_j+1}}{l_1 l_{n_p+1}} \frac{|f_{n_p+1}|}{|f_{n_j+1}|} \leq \\ & \leq \frac{l_{n_{p-1}-n_j+1} l_{n_j+1}}{l_1 l_{n_{p-1}+1}} \frac{|f_{n_{p-1}+1}|}{|f_{n_j+1}|} \left(\frac{l_{n_{j+1}-n_j+1}}{l_1} \frac{l_{n_j+1}}{l_{n_{j+1}+1}} \frac{|f_{n_{j+1}+1}|}{|f_{n_j+1}|} \right)^{\frac{n_p-n_{p-1}}{n_{j+1}-n_j}} \leq \\ & \leq \frac{l_{n_{p-2}-n_j+1} l_{n_j+1}}{l_1 l_{n_{p-2}+1}} \frac{|f_{n_{p-2}+1}|}{|f_{n_j+1}|} \left(\frac{l_{n_{j+1}-n_j+1}}{l_1} \frac{l_{n_j+1}}{l_{n_{j+1}+1}} \frac{|f_{n_{j+1}+1}|}{|f_{n_j+1}|} \right)^{\frac{n_p-n_{p-1}}{n_{j+1}-n_j} + \frac{n_{p-1}-n_{p-2}}{n_{j+1}-n_j}} \leq \\ & \leq \dots \leq \left(\frac{l_{n_{j+1}-n_j+1}}{l_1} \frac{l_{n_j+1}}{l_{n_{j+1}+1}} \frac{|f_{n_{j+1}+1}|}{|f_{n_j+1}|} \right)^{\frac{n_p-n_j}{n_{j+1}-n_j}}, \end{aligned}$$

тобто умова (8) виконується, якщо

$$\sum_{p=j+1}^{\infty} (n_p - n_j + 1) \left\{ \left(\frac{l_{n_{j+1}-n_j+1}}{l_1} \frac{l_{n_j+1}}{l_{n_{j+1}+1}} \frac{|f_{n_{j+1}+1}|}{|f_{n_j+1}|} \right)^{\frac{1}{n_{j+1}-n_j}} \rho \right\}^{n_p-n_j} \leq 1. \quad (11)$$

Оскільки для $0 < r \leq (\sqrt{2}-1)/\sqrt{2}$

$$\sum_{p=j+1}^{\infty} (n_p - n_j + 1) r^{n_p-n_j} \leq \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) r^k \leq \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \right)^{k-1} - 1 = 1,$$

то (11) виконується, якщо

$$\left(\frac{l_{n_{j+1}-n_j+1}}{l_1} \frac{l_{n_j+1}}{l_{n_{j+1}+1}} \frac{|f_{n_{j+1}+1}|}{|f_{n_j+1}|} \right)^{\frac{1}{n_{j+1}-n_j}} \rho \leq \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}, \quad (12)$$

звідки за твердженням 2 випливає, що

$$\rho[D_l^{n_j} f] \geq \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \left(\frac{l_1 l_{n_{j+1}+1}}{l_{n_{j+1}-n_j+1} l_{n_j+1}} \left| \frac{f_{n_j+1}}{f_{n_{j+1}+1}} \right| \right)^{1/(n_{j+1}-n_j)}. \quad (13)$$

Співвідношення (10) випливає з (7) і (13). Твердження 3 доведено.

3. Доведення теореми 1. Припустимо спочатку, що

$$|f_{n_p+1}/f_{n_{p+1}+1}|^{1/(n_{p+1}-n_p)} \nearrow R \quad \text{при} \quad p \rightarrow \infty.$$

Тоді з (7) легко випливає права частина (4).

Доведемо її ліву частину. Оскільки $|f_{n_p+1}/f_{n_{p+1}+1}|^{1/(n_{p+1}-n_p)} \nearrow R$ при $p \rightarrow \infty$, то умова (9) твердження 3 виконується, якщо для всіх $p \geq j+1$

$$\left(\frac{l_{n_{p+1}-n_j+1}}{l_{n_p-n_j+1}} \frac{l_{n_p+1}}{l_{n_{p+1}+1}} \right)^{\frac{1}{n_{p+1}-n_p}} \leq \left(\frac{l_{n_{j+1}-n_j+1}}{l_1} \frac{l_{n_j+1}}{l_{n_{j+1}+1}} \right)^{\frac{1}{n_{j+1}-n_j}}. \quad (14)$$

Позначимо $\eta_p = (l_{p-1}l_{p+1})/l_p^2$. Тоді послідовність (η_p) неспадна,

$$\frac{l_{p+1}}{l_p} = \frac{l_p}{l_{p-1}} \eta_p = \frac{l_{p-1}}{l_{p-2}} \eta_p \eta_{p-1} = \dots = l_1 \prod_{m=1}^p \eta_m$$

і

$$\begin{aligned} \ln l_{p+1} &= \ln l_1 + \sum_{m=1}^p \ln \eta_m + \ln l_p = 2 \ln l_1 + \sum_{m=1}^p \ln \eta_m + \sum_{m=1}^{p-1} \ln \eta_m + \ln l_{p-1} = \dots = \\ &= (p+1) \ln l_1 + \sum_{k=1}^p \sum_{m=1}^k \ln \eta_m. \end{aligned}$$

Тому

$$\begin{aligned} &\ln l_{n_{p+1}-n_j+1} - \ln l_{n_p-n_j+1} + \ln l_{n_p+1} - \ln l_{n_{p+1}+1} = \\ &= \sum_{k=1}^{n_{p+1}-n_j} \sum_{m=1}^k \ln \eta_m - \sum_{k=1}^{n_p-n_j} \sum_{m=1}^k \ln \eta_m + \sum_{k=1}^{n_p} \sum_{m=1}^k \ln \eta_m - \sum_{k=1}^{n_{p+1}} \sum_{m=1}^k \ln \eta_m = \\ &= - \sum_{k=n_p+1}^{n_{p+1}} \sum_{m=1}^k \ln \eta_m + \sum_{k=n_p-n_j+1}^{n_{p+1}-n_j} \sum_{m=1}^k \ln \eta_m = - \sum_{k=n_p+1}^{n_{p+1}} \sum_{m=1}^k \ln \eta_m + \sum_{k=n_p+1}^{n_{p+1}} \sum_{m=1}^{k-n_j} \ln \eta_m = \\ &= - \sum_{k=n_p+1}^{n_{p+1}} \left(\sum_{m=1}^k \ln \eta_m - \sum_{m=1}^{k-n_j} \ln \eta_m \right) = - \sum_{k=n_p+1}^{n_{p+1}} \sum_{m=k-n_j+1}^k \ln \eta_m \end{aligned}$$

і подібно

$$\ln l_{n_{j+1}-n_j+1} - \ln l_1 + \ln l_{n_j+1} - \ln l_{n_{j+1}+1} = - \sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} \sum_{m=k-n_j+1}^k \ln \eta_m.$$

Отже, умова (14) виконується тоді і тільки тоді, коли для всіх $p \geq j+1$

$$\frac{1}{n_{p+1} - n_p} \sum_{k=n_p+1}^{n_{p+1}} \sum_{m=k-n_j+1}^k \ln \eta_m \geq \frac{1}{n_{j+1} - n_j} \sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} \sum_{m=k-n_j+1}^k \ln \eta_m. \quad (15)$$

Оскільки послідовність $(\ln \eta_m)$ неспадна, то і послідовність $\left(\sum_{m=k-n_j+1}^k \ln \eta_m \right)_{k=n_j}^{\infty}$ неспадна, а отже,

$$\frac{1}{n_{p+1}-n_p} \sum_{k=n_p+1}^{n_{p+1}} \sum_{m=k-n_j+1}^k \ln \eta_m \geq \frac{1}{n_{p+1}-n_p} \sum_{k=n_p+1}^{n_{p+1}} \sum_{m=n_p-n_j+2}^{n_{p+1}} \ln \eta_m = \sum_{m=n_p-n_j+2}^{n_{p+1}} \ln \eta_m$$

і

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_{j+1}-n_j} \sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} \sum_{m=k-n_j+1}^k \ln \eta_m &\leq \frac{1}{n_{j+1}-n_j} \sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} \sum_{m=n_{j+1}-n_j+1}^{n_{j+1}} \ln \eta_m = \\ &= \sum_{m=n_{j+1}-n_j+1}^{n_{j+1}} \ln \eta_m, \end{aligned}$$

тобто умова (14) виконується, якщо для всіх $p \geq j+1$

$$\sum_{m=n_p-n_j+2}^{n_{p+1}} \ln \eta_m \geq \sum_{m=n_{j+1}-n_j+1}^{n_{j+1}} \ln \eta_m.$$

З огляду на неспадання послідовності $(\ln \eta_m)$, остання нерівність є правильною. Отже, умова (9) виконується і тому, як у доведенні твердження 3, отримуємо нерівність (12) з $\rho = \rho[D_i^{n_j} f]$, з якої випливає ліва частина (4).

Залишилось довести нерівність (3). Нехай $r \in (0, R)$ – довільне число. Тоді $|f_{n_j+1}|r^{n_j+1} \rightarrow 0$ ($j \rightarrow \infty$) і тому існує зростаюча послідовність (j_k) натуральних чисел така, що $|f_{n_p+1}|r^{n_p+1} \leq |f_{n_j+1}|r^{n_j+1}$ для всіх $j = j_k$ і $p \geq j_k$. Звідси випливає, що для $j = j_k$ умова (8) виконується, якщо

$$\sum_{p=j+1}^{\infty} (n_p - n_j + 1) \frac{l_{n_p-n_j+1} l_{n_j+1}}{l_1 l_{n_p+1}} \left(\frac{\rho}{r} \right)^{n_p-n_j} \leq 1, \quad j = j_k.$$

Тому, повторюючи доведення твердження 3 з $f_{n_k+1} = 1$ для всіх k і ρ/r замість ρ , отримуємо

$$\left(\frac{l_{n_{j+1}-n_j+1}}{l_1} \frac{l_{n_j+1}}{l_{n_{j+1}+1}} \right)^{\frac{1}{n_{j+1}-n_j}} \frac{\rho}{r} \leq \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}, \quad j = j_k, \quad (16)$$

якщо тільки для всіх $p > j_k$ виконується умова

$$\left(\frac{l_{n_{p+1}-n_j+1}}{l_{n_p-n_j+1}} \frac{l_{n_p+1}}{l_{n_{p+1}+1}} \right)^{\frac{1}{n_{p+1}-n_p}} \leq \left(\frac{l_{n_{j+1}-n_j+1}}{l_1} \frac{l_{n_j+1}}{l_{n_{j+1}+1}} \right)^{\frac{1}{n_{j+1}-n_j}}, \quad j = j_k, \quad (17)$$

тобто умова (14) з $j = j_k$. З доведення правої частини (4) видно, що умова (17) виконується, якщо послідовність $(l_{p-1} l_{p+1} l_p^{-2})$ неспадна. З огляду на нерівність (16) і довільність числа $r \in (0, R)$, правильна нерівність (3). Теорему 1 повністю доведено.

4. Зауваження та доповнення. З наведених міркувань видно, що оцінки радіуса однолистості знизу та умови, за яких ці оцінки є правильними, залежать від методики, застосованої для оцінки ряду (8). Про це свідчить твердження, яке доповнює твердження 3.

Твердження 4. Якщо $l_{p-1}l_{p+1}l_p^{-2} \leq 1$, $p \geq 1$, а коефіцієнти ряду (2) такі, що послідовність $(c_{n_{p+1}}/c_{n_{p+1}+1})^{1/(n_{p+1}-n_p)}$ неспадна, де $c_n = |f_n|/l_n$, то правильне співвідношення (10).

Доведення. Справді, оскільки послідовність $(c_{n_{p+1}}/c_{n_{p+1}+1})^{1/(n_{p+1}-n_p)}$ неспадна, то умова (9) виконується, якщо для всіх $p \geq j+1$

$$\left(\frac{l_{n_{p+1}-n_j+1}}{l_{n_p-n_j+1}}\right)^{\frac{1}{n_{p+1}-n_p}} \leq \left(\frac{l_{n_{j+1}-n_j+1}}{l_1}\right)^{\frac{1}{n_{j+1}-n_j}}. \quad (18)$$

Позначимо $\eta_p = (l_{p-1}l_{p+1})/l_p^2$. Тоді $\ln \eta_p \leq 0$ і, як у доведенні теореми 1, отримуємо

$$\frac{\ln l_{n_{p+1}-n_j+1} - \ln l_{n_p-n_j+1}}{n_{p+1} - n_p} = \ln l_1 + \frac{1}{n_{p+1} - n_p} \sum_{k=n_p-n_j+1}^{n_{p+1}-n_j} \sum_{m=1}^k \ln \eta_m$$

і

$$\frac{\ln l_{n_{j+1}-n_j+1} - \ln l_1}{n_{j+1} - n_j} = \ln l_1 + \frac{1}{n_{j+1} - n_j} \sum_{k=1}^{n_{j+1}-n_j} \sum_{m=1}^k \ln \eta_m.$$

Тому умова (18) виконується тоді і тільки тоді, коли для всіх $p \geq j+1$

$$\frac{1}{n_{p+1} - n_p} \sum_{k=n_p-n_j+1}^{n_{p+1}-n_j} \sum_{m=1}^k \ln \eta_m \leq \frac{1}{n_{j+1} - n_j} \sum_{k=1}^{n_{j+1}-n_j} \sum_{m=1}^k \ln \eta_m. \quad (19)$$

З огляду на нерівність $\ln \eta_m \leq 0$ послідовність $\left(\sum_{m=1}^k \ln \eta_m\right)$ незростаюча, звідки, як у доведенні теореми 1, отримуємо правильність нерівності (19), а з цим і нерівності (13). З огляду на (7) твердження 4 доведено.

За умови, що ряд (2) має лагуни довжиною не менше k (тобто $n_{j+1}-n_j = k_j \geq k$), оцінку (3) і ліву нерівність (4) можна продовжити.

Справді, як і у доведенні теореми 1, маємо

$$\frac{\ln l_{k+1} + \ln l_n - \ln l_1 - \ln l_{n+k}}{k} = -\frac{1}{k} \sum_{q=1}^k \sum_{m=q+1}^{q+n-1} \ln \eta_m,$$

оскільки з неспадання послідовності $(\ln \eta_m)$ випливає неспадання послідовності $\left(\frac{1}{k} \sum_{q=1}^k \sum_{m=q+1}^{q+n-1} \ln \eta_m\right)$, то звідси випливає незростання послідовності $\left(\frac{l_{k+1}l_n}{l_1l_{k+n}}\right)$ для будь-якого $n \geq 2$. Отже, за умови $n_{j+1} - n_j = k_j \geq k$ одержуємо

$$\left(\frac{l_{n_{j+1}-n_j+1}}{l_1} \frac{l_{n_j+1}}{l_{n_{j+1}+1}}\right)^{\frac{1}{n_{j+1}-n_j}} = \left(\frac{l_{k_j+1}l_{n_j+1}}{l_1l_{n_j+k_j+1}}\right)^{\frac{1}{k_j}} \leq \left(\frac{l_{k+1}l_{n_j+1}}{l_1l_{n_j+k+1}}\right)^{\frac{1}{k}},$$

а з теореми 1 випливає такий наслідок.

Наслідок 1. Якщо ряд (2) має радіус збіжності $R > 0$ і лакуни довжиною не менше k , а послідовність $(l_{p-1}l_{p+1}/l_p^2)$ неспадна, то

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{l_{k+1}l_{n_j+1}}{l_1l_{n_j+k+1}} \right)^{\frac{1}{k}} \rho[D_l^{n_j} f] \geq \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} R. \quad (20)$$

Якщо ж до того $|f_{n_p+1}/f_{n_{p+1}+1}|^{1/(n_{p+1}-n_p)} \nearrow R$ при $p \rightarrow \infty$, то в (20) можна $\overline{\lim}$ замінити на $\underline{\lim}$.

Припустимо, що $l(z) = e^z$, тобто $l_k = 1/k!$. Тоді $l_{p-1}l_{p+1}/l_p^2 = p/(p+1) \uparrow 1$ ($p \rightarrow \infty$) і з (3) отримуємо

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{(n_{j+1}+1)!}{(n_{j+1}-n_j+1)!(n_j+1)!} \right)^{\frac{1}{n_{j+1}-n_j}} \rho[f^{(n_j)}] \geq \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} R. \quad (21)$$

Якщо ряд (2) має лакуни довжиною не менше k , то з (20) одержуємо

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{(n_j+k+1)!}{(k+1)!(n_j+1)!} \right)^{\frac{1}{k}} \rho[f^{(n_j)}] \geq \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} R,$$

тобто

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} n_j \rho[f^{(n_j)}] \geq \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \sqrt[k]{(k+1)!} R. \quad (22)$$

Оцінка (22) доповнює теорему А, а з загальної оцінки (21) у випадку великих лакун впливають результати, значно сильніші, ніж (22). Наприклад, якщо $n_{j+1} = kn_j$ ($j \geq 1$) з $k \geq 2$, то

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \rho[f^{(n_j)}] \geq \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \frac{k^{k/(k-1)}}{k-1} R. \quad (23)$$

Якщо $l(z) = 1/(1-z)$, тобто $l_k = 1$ (оператор D_l^n з такою функцією l використовували в [9]). У цьому випадку з (3) отримуємо нерівність

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \rho[D_l^{n_j} f] \geq \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} R, \quad (24)$$

для будь-якої зростаючої послідовності (n_j) натуральних чисел.

Якщо $l_k = e^{qk^2}$ ($q \in \mathbb{R}$), то $l_{p-1}l_{p+1}/l_p^2 = e^{2q}$, з (3) одержуємо нерівність

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} e^{-2qn_j} \rho[D_l^{n_j} f] \geq \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} R, \quad (25)$$

звідки, зокрема, випливає, що $\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \rho[D_l^{n_j} f] = +\infty$ для будь-якої зростаючої послідовності (n_j) натуральних чисел, якщо тільки $q > 0$.

Зауважимо таке: якщо $|f_{n_p+1}/f_{n_{p+1}+1}|^{1/(n_{p+1}-n_p)} \nearrow R$ при $p \rightarrow \infty$, то в оцінках (20) – (25) замість $\overline{\lim}$ можна поставити $\underline{\lim}$.

Нарешті, зауважимо, що з теореми 1 у випадку, коли $n_p = p$, випливає результат з [8].

Наслідок 2. Якщо ряд (1) має радіус збіжності $R > 0$ і $|f_p/f_{p+1}| \nearrow R$ при $p \rightarrow \infty$, а послідовність $(l_{p-1}l_{p+1}l_p^{-2})$ неспадна, то

$$\rho[D_l^{n_j} f] \asymp \frac{l_{n+2}}{l_{n+1}} \left| \frac{f_{n+1}}{f_{n+2}} \right|, \quad n \rightarrow \infty.$$

-
1. Гельфонд А.О. Об одном обобщении ряда Фурье / Гельфонд А.О., Леонт'ев А.Ф. // Матем. сб. – 1951. – Т. 29, №3. – С. 477-500.
 2. Shah S.M. Univalent functions with univalent derivatives II / Shah S.M., Trimble S.Y. // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – Vol. 144. – P. 313-320.
 3. Shah S.M. Univalence derivatives of functions defined by gap power series / Shah S.M., Trimble S.Y. // J. London. Math. Soc. (2). – 1975. – Vol. 9. – P. 501-512.
 4. Shah S.M. Univalence derivatives of functions defined by gap power series. II / Shah S.M., Trimble S.Y. // J. Math. Anal. and Appl. – 1976. – Vol. 56. – P. 26-40.
 5. Juneja O.P. Univalent functions with univalent Gelfond-Leont'ev derivatives / Juneja O.P., Shah S.M. // Bull. Austr. Math. Soc. – 1984. – Vol. 29. – P. 329-348.
 6. Kapoor G.P. Univalence of Gelfond-Leont'ev derivatives of analytic functions / Kapoor G.P., Juneja O.P., Patel J. // Bull. math. Soc. sci. math. RSR – 1989. – Vol. 33, №1. – P. 25-34.
 7. Kapoor G.P. Univalence of Gelfond-Leont'ev derivatives of functions defined by gap power series / Kapoor G.P., Patel J. // Rend. mat. e appl. – 1986. – Vol. 6, №4. – P. 491-502.
 8. Шеремета М.М. Про радіуси однолистості похідних Гельфонда-Леонт'єва / Шеремета М.М. // Укр. мат. журн. – 1995. – Т. 47, №3. – С. 390-399.
 9. Казьмин Ю.А. Об интерполяционной проблеме I / Казьмин Ю.А. // Сиб. мат. журн. – 1967. – С.293-312.

ON THE UNIVALENCE RADII OF GELFOND-LEONT'EV DERIVATIVES OF GAP POWER SERIES

Oleksandr VOLOKH, Myroslav SHEREMETA

*Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1*

For a gap power series the behaviour of the sequence of successive Gelfond-Leont'ev derivatives is investigated.

Key words: power series, Gelfond-Leont'ev derivatives, radius of univalence.

Стаття надійшла до редколегії 03.10.2007

Прийнята до друку 22.10.2008

УДК 512.8

 I_2 -КІЛЬЦЯ ТА ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ**Андрій ГАТАЛЕВИЧ¹, Марія КУЧМА²**¹ Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1² Львівський національний університет "Львівська Політехніка",
79013, Львів, вул. Бандери, 12

Введено до розгляду новий клас кілець – I_2 -кілця, який узагальнює I -кілця. Описано властивості та побудовано приклади таких кілець.

Ключові слова: I_2 -кілце, ідемпотент, кілце елементарних дільників.

Асоціативне кільце R з $1 \neq 0$ називається I_2 -кілцем, якщо для кожного елемента $a \in R$ такого, що $RaR = R$ правий ідеал aR містить ненульовий ідемпотент. Клас I_2 -кілець досить широкий. Відомо, що локальні кілця, напівдосконалі кілця, напіврегулярні, напів π -регулярні кілця є I_2 -кілцями [1, 2]. I_2 -кілця узагальнюють I -кілця, які введені в праці [1]. Варто зазначити, що публікацій, присвячених I -кілцям, досить мало.

Твердження 1. *Кільце R є I_2 -кілцем тоді і тільки тоді, коли для кожного $a \in R$ такого, що $RaR = R$ рівняння $axx = x$ має ненульовий розв'язок.*

Доведення. Нехай R – I_2 -кілце і елемент $a \in R$, $RaR = R$ такий, що правий ідеал aR містить ідемпотент $e = e^2$. Тоді $e = ab$, де $b \in R$. Розглянемо добутки

$$bababab = (bab)(abab) = (bab)ab = b(abab) = bab.$$

Прийнявши $x = bab$, одержуємо $axx = x$. Отже, рівняння $axx = x$ має розв'язок. Навпаки, нехай рівняння $axx = x$ має ненульовий розв'язок. Тоді

$$axax = ax, \quad ax = e, \quad e^2 = e.$$

Звідси випливає, що правий ідеал aR містить власний ідемпотент.

Твердження показує ліво-праву симетричність означення I_2 -кілця.

Твердження 2. *Нехай R – I_2 -кілце. Тоді для довільного $a \in R$ такого, що $RaR = R$ лівий ідеал Ra містить ненульовий ідемпотент.*

Доведення. Згідно з твердженням 1 рівняння $xax = x$ має ненульовий розв'язок. Тоді

$$xaxa = xa, \quad xa = e, \quad e^2 = e, \quad e \in R.$$

Безпосередньою перевіркою переконуємось у правильності твердження.

Твердження 3. *Нехай R – I_2 -кільце і $e^2 = e \in R$. Тоді кільця eRe і $(1-e)R(1-e)$ є I_2 -кільцями.*

Твердження 4. *Нехай R – редуковане I_2 -кільце. Тоді ідемпотенти кільця R центральні.*

Доведення. Нехай $e^2 = e \in R$. Доведення є наслідком таких рівностей:

$$ex(1-e)ex = 0, \quad ex - exe = 0, \quad ex = exe, \quad (1-e)xe = 0, \quad xe - exe = 0$$

Отже, $xe = ex$.

Будемо позначати через $diag(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_r)$ матрицю з елементами $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_r$ по головній діагоналі і нулями на інших місцях. Матриці A і B називаються еквівалентними, якщо $B = PAQ$, де P, Q – оборотні матриці відповідних розмірів. Якщо матриця A еквівалентна до деякої діагональної матриці $diag(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_r)$, де $\epsilon_i || \epsilon_{i+1}$ при довільному $i=1, 2, \dots, r-1$, то кажуть, що матриця A володіє діагональною редукцією. Елементи $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_r$ називаються елементарними дільниками матриці A . Кільце R називається кільцем елементарних дільників, якщо довільна матриця над R володіє діагональною редукцією [3].

Теорема 1 дає клас прикладів I_2 -кілець.

Теорема 1. *Нехай R -комутативна область елементарних дільників. Тоді кільце матриць $M_n(R)$ є I_2 -кільцем для довільного $n \geq 2$.*

Доведення. Розглянемо матрицю $A \in M_n(R)$ таку, що $M(R)AM_n(R) = M_n(R)$.

Оскільки R – кільце елементарних дільників, то згідно з вибором матриці A існують такі унімодулярні матриці P, Q , що

$$PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Тоді одержуємо:

$$\begin{aligned} & \left(AQ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} P \right)^2 = \\ & = AQ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} PAQ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} P = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= AQ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x_{n-1} \end{pmatrix} \times \\
&\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} P = AQ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} P.
\end{aligned}$$

Легко бачити, що матриця $AQ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} P$ – шуканий ідемпотент

в правому ідеалі $AM_n(R)$. Теорему доведено.

Теорема 2. Нехай R – комутативна область елементарних дільників. Тоді довільна одинично регулярна матриця в кільці R_2 є ідемпотентною матрицею.

Доведення. Нехай $A \in R_2$ і $AUA = A$, де U – оборотна. Матриця AU є ідемпотентною і згідно з [4, лема 3] має вигляд

$$AU = \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді існує матриця $P = \begin{pmatrix} 1 & -\delta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, що $AUP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, або $AW = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Звідси одержуємо, що матриця A має вигляд $A = \begin{pmatrix} 1 & \Delta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ для деякого елемента Δ . Отже, матриця A є ідемпотентною.

Наслідок 1. Нехай R – комутативна область Безу стабільного рангу 1. Тоді:

- 1) кільце $M_n(R)$ є I_2 -кільцем;
- 2) довільна регулярна матриця кільця $M_2(R)$ є ідемпотентною.

Доведення. Оскільки комутативна область Безу стабільного рангу 1 є областю елементарних дільників [5], то згідно з теоремою 5 перше твердження очевидне. Оскільки стабільний ранг матричного кільця $M_n(R)$ дорівнює 1 [6], тоді згідно з [7] довільна регулярна матриця є одинично регулярною, а отже, за теоремою 6 є ідемпотентною.

-
1. Джекобсон Н. Строение колец. / Джекобсон Н. – М.: Иностранная литература, 1961. – 392 с.
 2. Nicholson W.K. Lifting idempotents and exchange rings / Nicholson W. K. // Trans. Amer. Math. Soc. – 1977. – №229. – Р. 269-278.
 3. Kaplansky I. Elementary divisor rings and modules / Kaplansky I. // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – №66. – Р. 464-491.

4. Дубровин Н.И. Проективный предел колец с элементарными делителями / Дубровин Н.И. // Мат.сб. – 1982. – Т.119, №1. – С. 89-95.
5. Гаталевич А.І. Про дуо-кільця елементарних дільників / Гаталевич А.І. // Алгебра і топологія: Тематичний збірник наукових праць. – Львів, 1996. – С. 58-64.
6. Васерштейн Л.И. Стабильный ранг колец и размерность топологических пространств / Васерштейн Л.И. // Функц. анализ. – 1971. – Т.49. – С. 17-27.
7. Henriksen M. On a class of regular rings, that are elementary divisor rings / Henriksen M. // Arch. der Math. – 1973. – V.24. – P. 133-141.

I_2 -RINGS AND THEIR PROPERTIES

Andriy GATALEVICH¹, Mariya KUCHMA²

¹ Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1

² L'viv Polytechnic National University,
79013, L'viv, Bandery Str., 12

It is introduced a new class of rings – I_2 -rings, which are generalization of I -rings. We described the main properties and construct examples of these rings.

Key words: I_2 -ring, elementary divisor ring, idempotent.

Стаття надійшла до редколегії 27.12.2006

Прийнята до друку 22.10.2008

УДК 517.53

ENTIRE FUNCTION WITH PRESCRIBED INDICATOR

Markiyan GIRNYK

*L'viv Academy of Commerce,
79005, L'viv, Tuhan-Baranovskii Str., 10,
e-mail: hirnyk@lac.lviv.ua*

For an arbitrary $[\kappa_1, \rho_1]$ -trigonometrically convex function an entire function is found having it as the indicator with respect to $r^{l(r)}$, where $l(r)$ is a strong oscillate order, $0 < \kappa_1 < \kappa \leq l(r) \leq \rho < \rho_1 < \infty$.

Key words: indicator of entire function.

In this communication we present an example which shows nontriviality of the class of entire functions of completely regular growth by Kondratyuk (see [1] - [4]). That adds to Kondratyuk's results [4, P. 84-88, 144-150]. Our construction is new and simpler than latter. The notions used in this work can be found in [4] - [6].

Theorem 1. *Let a function $V(r) = r^{l(r)}$, where a function $l \in C^2[1, \infty)$, $0 < \kappa_1 < \kappa \leq l(r) \leq \rho < \rho_1 < \infty$, $l'(r)r \log r \rightarrow 0$ as $r \rightarrow \infty$, $l''(r)r^2 \log r \rightarrow 0$ as $r \rightarrow \infty$, a 2π -periodic function h be $[\kappa_1, \rho_1]$ -trigonometrically convex, a real number $\alpha > \rho$. Then there exists an entire function f , such that*

$$\log |f(re^{i\varphi})| = h(\varphi)V(r) + O(\log r), \quad E \not\rightarrow re^{i\varphi} \rightarrow \infty,$$

where an exceptional set $E \subset \cup_j \{z : |z - z_j| < r_j\}$, and $\sum_{|z_j| \geq r} r_j = o(r^{\rho-\alpha})$, as $r \rightarrow \infty$.

Proof. Let us consider the function $u(re^{i\varphi}) := h(\varphi)V(r)$. Its maximum $B(r, u) := \max\{u(re^{i\varphi}) : \varphi \in [0, 2\pi]\} = CV(r)$ is a convex function of $\log r$ since

$$\begin{aligned} \frac{d^2 V(r)}{(d \log r)^2} &= r(rV'(r))' = V(r)((l'(r)r \log(r) + l(r))^2 + l''(r)r^2 \log r + l'(r)r \log r + 2rl'(r)) = \\ &= V(r)(l(r)^2 + o(1)) > 0, \quad r > r_0. \end{aligned}$$

Next, the function u is subharmonic outside the disk $\{z : |z| > r_0\}$. At first, we prove that in the case $h \in C^2[0, 2\pi]$. Then the Laplacian

$$\Delta u = h(\varphi) \frac{1}{r^2} \frac{d^2 V(r)}{(d \log r)^2} + \frac{1}{r^2} h''(\varphi)V(r) = \frac{1}{r^2} V(r)((l(r)^2 + o(1))h(\varphi) + h''(\varphi)) \geq 0, \quad r > r_0,$$

because h is an ω -trigonometrically convex function for every $\omega \in [\kappa_1, \rho_1]$, i.e. the inequality $h''(\varphi) + \omega^2 h(\varphi) \geq 0$ holds, and $0 < \kappa_1 < \kappa \leq l(r) \leq \rho < \rho_1$.

Turn to the general case. An arbitrary $[\kappa_1, \rho_1]$ -trigonometrically convex function satisfies the condition

$$h(\theta_1)\sin(\omega(\theta_2 - \theta_3)) + h(\theta_2)\sin(\omega(\theta_3 - \theta_2)) + h(\theta_3)\sin(\omega(\theta_1 - \theta_2)) \leq 0$$

for all $\omega \in [\kappa_1, \rho_1]$, $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$, and $\theta_3 - \theta_1 < \pi/\omega$.

Let us consider the smoothed indicator

$$\tilde{h}(\theta) := \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta + x)\delta^{-1}K(x/\delta)dx = \int_{-\infty}^{\infty} h(y)\delta^{-1}K\left(\frac{y - \theta}{\delta}\right)dy,$$

where a function $K \in C^\infty(\mathbb{R})$; $K(x) = 0$, when $|x| \geq 1$; $K(x) > 0$, when $|x| < 1$; $\int_{-\infty}^{\infty} K(x)dx = 1$. It is well known that $\tilde{h} \in C^\infty(\mathbb{R})$, and it is easy to see that $\tilde{h}$ is also $[\kappa_1, \rho_1]$ -trigonometrically convex. Indeed,

$$\begin{aligned} & \tilde{h}(\theta_1)\sin(\omega(\theta_2 - \theta_3)) + \tilde{h}(\theta_2)\sin(\omega(\theta_3 - \theta_2)) + \tilde{h}(\theta_3)\sin(\omega(\theta_1 - \theta_2)) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta_1 + x)\sin(\omega(\theta_2 - \theta_3))\delta^{-1}K(x/\delta)dx + \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta_2 + x)\sin(\omega(\theta_3 - \theta_1))\delta^{-1}K(x/\delta)dx + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta_3 + x)\sin(\omega(\theta_1 - \theta_2))\delta^{-1}K(x/\delta)dx = \int_{-\infty}^{\infty} (h(\theta_1 + x)\sin(\omega(\theta_2 + x - \theta_3 - x)) + \\ &+ h(\theta_2 + x)\sin(\omega(\theta_3 + x - \theta_1 - x)) + h(\theta_3 + x)\sin(\omega(\theta_1 + x - \theta_2 - x)))\delta^{-1}K(x/\delta)dx \leq 0, \end{aligned}$$

as the integrand is negative. The subharmonic function $\tilde{h}(\varphi)V(r)$ converges uniformly on compacts outside the disk $\{z : |z| \leq r_0\}$ to the function $u(re^{i\varphi}) = h(\varphi)V(r)$ if δ tends to 0+, and because of this the function u is subharmonic outside the disk $\{z : |z| \leq r_0\}$ in the general case too. We extend the function u to a subharmonic function in the plane. Finally, applying to the extended function u the approximation theorem by Yulmukhametov [7, P. 278-282], we obtain the statement of Theorem 1. It should be noted that the function h coincides with the Kondratyuk indicator of the entire function f concerning $r^{l(r)}$.

I would like to thank the referee for a careful review of the article.

-
1. Кондратюк А.А. Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста / Кондратюк А.А. // Мат. сб. – 1978. – Т. 113, №1. – С. 386-408.
 2. Кондратюк А.А. Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста. II / Кондратюк А.А. // Мат. сб. – 1980. – Т. 106, №3. – С. 118-132.
 3. Кондратюк А.А. Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста. III / Кондратюк А.А. // Мат. сб. – 1983. – Т. 120, №3. – С. 331-343.
 4. Кондратюк А.А. Ряды Фурье и мероморфные функции / Кондратюк А.А. – Львів: Вища школа, 1988. – 196 с.

5. Hayman W.K., Kennedy P.B. Subharmonic functions. / Hayman W.K., Kennedy P.B. – London; New York; San Francisco: Academic Press, 1976. – Vol. 1 – 284 p.
6. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций / Левин Б.Я. – М.: ГИТТЛ. – 1956. – 632 с.
7. Юлмухаметов Р.С. Аппроксимация субгармонических функций / Юлмухаметов Р.С. // Anal. Math. – 1985. – Vol. 11, №3. – P. 257-282.

ЦІЛА ФУНКЦІЯ З ЗАДАНИМ ІНДИКАТОРОМ

Маркіян ГІРНИК

*Львівська комерційна академія,
79005, Львів, вул. Тугана-Барановського, 10
e-mail: hirnuk@iac.lviv.ua*

Для довільної $[\kappa_1, \rho_1]$ - тригонометрично опуклої функції знайдено цілу функцію з цим індикатором стосовно $r^{l(r)}$, де $l(r)$ – сильний коливний порядок, $0 < \kappa_1 < \kappa \leq l(r) \leq \rho < \rho_1 < \infty$.

Ключові слова: індикатор цілої функції.

Стаття надійшла до редколегії 17.09.2007

Прийнята до друку 22.10.2008

УДК 519.212

СТАЦІОНАРНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОДНОКАНАЛЬНОЇ СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ З ВІДМОВАМИ ТА МОЖЛИВІСТЮ ВИХОДУ З ЛАДУ

Юрій ЖЕРНОВИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1

Для системи масового обслуговування $G/G/1/0$ з можливостями виходу з ладу під час роботи і у вільному стані визначено ймовірності станів граничного стаціонарного процесу та знайдено розподіл часу перебування системи у вільному стані.

Ключові слова: система масового обслуговування з відмовами та можливістю виходу з ладу, граничний стаціонарний процес, ймовірності станів.

1. Дослідження ергодичних властивостей систем масового обслуговування (СМО) типу M/G успішно проводили за допомогою методу вкладених ланцюгів Маркова [1, с. 96]. Для систем типу G/G доведення існування граничного стаціонарного процесу виявилось проблематичним. Відомі лише спроби визначення стаціонарних характеристик таких СМО з використанням напівмарковських процесів зі спеціально побудованим фазовим простором [2, гл. 5].

У цій праці, припускаючи, що стаціонарний граничний процес існує, ми ставимо завдання визначити стаціонарні характеристики СМО $G/G/1/0$ з можливостями виходу з ладу каналу під час роботи і у вільному стані.

2. Загальні формули для стаціонарних ймовірностей. Вивчатимемо одноканальну СМО з відмовами, на вхід якої надходить стаціонарний ординарний потік замовлень, а випадкові величини T_λ (час між моментами надходження замовлень) і T_μ (час обслуговування одного замовлення) незалежні і довільно розподілені.

Припустимо, що працюючий канал може вийти з ладу (відмовити) через випадковий час T_ν , який відраховується від моменту початку обслуговування. У вільному стані канал також може стати недоступним для надходження замовлень через час T_{ν_0} після завершення обслуговування. В обох випадках відновлення (ремонт) каналу починається негайно після його виходу з ладу і триває протягом випадкового часу T_γ і T_{γ_0} відповідно. Замовлення, яке обслуговували в момент виходу каналу з ладу, покинуло систему не обслуженим.

Надалі вважатимемо, що випадкові величини T_λ , T_μ , T_ν , $T_{\nu 0}$, T_γ і $T_{\gamma 0}$ незалежні в сукупності, довільно розподілені і мають скінченні математичні сподівання m_λ , m_μ , m_ν , $m_{\nu 0}$, m_γ і $m_{\gamma 0}$ відповідно.

Введемо нумерацію станів системи: s_0 – канал вільний; s_1 – канал працює; s_2 – канал на ремонті (недоступний).

Спочатку розглянемо випадок, коли існує заборона повторного виходу з ладу вільного каналу. Припустимо, що після стану s_2 недоступності каналу, який настав у результаті переривання стану s_0 і тривав протягом випадкового часу $T_{\gamma 0}$, наступний перехід системи до стану s_2 можливий лише після її перебування у стані s_1 , тобто ланцюжок зміни станів $s_0 \rightarrow s_2 \rightarrow s_0 \rightarrow s_2$ неможливий.

Можливими є такі чотири варіанти ланцюжків зміни станів, які описують цикл між двома послідовними потрапляннями системи до стану s_1

$$\begin{aligned} \Pi_1 : s_1 \rightarrow s_0 \rightarrow s_1; \quad \Pi_2 : s_1 \rightarrow s_0 \rightarrow s_2 \rightarrow s_0 \rightarrow s_1; \\ \Pi_3 : s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow s_0 \rightarrow s_1; \quad \Pi_4 : s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow s_0 \rightarrow s_2 \rightarrow s_0 \rightarrow s_1. \end{aligned}$$

Тривалості циклів відповідно становлять

$$\begin{aligned} \tau_1 = T_{\mu\nu} + T_{0\mu\nu 0}; \quad \tau_2 = T_{\mu\nu} + T_{0\mu\nu 0} + T_{\gamma 0} + T_{0\gamma\mu}; \\ \tau_3 = T_{\mu\nu} + T_\gamma + T_{0\nu\nu 0}; \quad \tau_4 = T_{\mu\nu} + T_\gamma + T_{0\nu\nu 0} + T_{\gamma 0} + T_{0\gamma\nu}. \end{aligned}$$

Тут

$$T_{\mu\nu} = \min\{T_\mu, T_\nu\}, \quad T_{0\mu\nu 0} = \min\{T_{0\mu}, T_{\nu 0}\}, \quad T_{0\nu\nu 0} = \min\{T_{0\nu}, T_{\nu 0}\},$$

$T_{0\mu}$ – час перебування у стані s_0 у випадку ланцюжка Π_1 для системи з заборонаю виходу з ладу у стані s_0 ; $T_{0\nu}$ – час перебування у стані s_0 у випадку ланцюжка Π_3 для системи з заборонаю виходу з ладу у стані s_0 ; $T_{0\gamma\mu}$ – час перебування у стані s_0 після стану s_2 у випадку ланцюжка Π_2 ; $T_{0\gamma\nu}$ – час перебування у стані s_0 другий раз у випадку ланцюжка Π_4 .

Проаналізуємо роботу системи на дуже великому проміжку часу T , взявши за початок відліку часу момент надходження чергового замовлення у вільний канал.

Якщо $N(T)$ – кількість замовлень, що надійшли у систему за час T , $N_{\text{обс}}(T)$ – кількість обслужених за цей час замовлень, $N_{\text{пер}}(T)$ – кількість замовлень, обслуговування яких було перерване у зв'язку з виходом каналу з ладу, то для великих значень T виконується наближена рівність

$$\begin{aligned} T \approx N(T)m_\lambda \approx \\ \approx N_{\text{обс}}(T)(m_{\mu\nu} + m_{0\mu\nu 0} + P_{\text{пер } 0\mu}(T)(m_{\gamma 0} + m_{0\gamma\mu})) + \\ + N_{\text{пер}}(T)(m_{\mu\nu} + m_\gamma + m_{0\nu\nu 0} + P_{\text{пер } 0\nu}(T)(m_{\gamma 0} + m_{0\gamma\nu})), \end{aligned} \quad (1)$$

де

$$\begin{aligned} m_{\mu\nu} = M(T_{\mu\nu}), \quad m_{0\mu\nu 0} = M(T_{0\mu\nu 0}), \quad m_{0\gamma\mu} = M(T_{0\gamma\mu}), \\ m_{0\nu\nu 0} = M(T_{0\nu\nu 0}), \quad m_{0\gamma\nu} = M(T_{0\gamma\nu}), \\ P_{\text{пер } 0\mu}(T) = \frac{N_{\text{пер } 0\mu}(T)}{N_{\text{обс}}(T)}, \quad P_{\text{пер } 0\nu}(T) = \frac{N_{\text{пер } 0\nu}(T)}{N_{\text{обс}}(T)}, \end{aligned}$$

$N_{\text{пер}0\mu}(T)$ – кількість обслужених замовлень, після обслуговування яких канал вийшов з ладу у стані s_0 , $N_{\text{пер}0\nu}(T)$ – кількість замовлень, після переривання обслуговування яких у результаті виходу з ладу у стані s_1 , канал знову вийшов з ладу у стані s_0 , не розпочавши обслуговування нового замовлення.

Введемо позначення

$$P_{\text{пер}}(T) = \frac{N_{\text{пер}}(T)}{N_{\text{обс}}(T) + N_{\text{пер}}(T)}. \quad (2)$$

Якщо граничний стаціонарний процес існує, то $P_{\text{пер}} = \lim_{T \rightarrow \infty} P_{\text{пер}}(T) = P\{T_\nu < T_\mu\}$ – ймовірність переривання обслуговування у зв'язку з виходом каналу з ладу; $P_{\text{пер}0\mu} = \lim_{T \rightarrow \infty} P_{\text{пер}0\mu}(T) = P\{T_{\nu 0} < T_{0\mu}\}$ – ймовірність виходу каналу з ладу у стані s_0 , що йде після стану s_1 , який тривав до завершення обслуговування; $P_{\text{пер}0\nu} = \lim_{T \rightarrow \infty} P_{\text{пер}0\nu}(T) = P\{T_{\nu 0} < T_{0\nu}\}$ – ймовірність виходу каналу з ладу у стані s_0 , що йде після стану s_2 .

Рівність (1) виконується тим точніше, чим триваліший проміжок часу T розглядається. Виразивши з (2) $N_{\text{пер}}(T)$, а потім з (1) – відношення $N_{\text{обс}}(T)/N(T)$ і перейшовши у ньому до границі при $T \rightarrow \infty$, визначимо стаціонарне значення ймовірності обслуговування для замовлення, що надійшло у систему (відносну пропускну здатність СМО)

$$P_{\text{обс}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N_{\text{обс}}(T)}{N(T)} = \frac{m_\lambda(1 - P_{\text{пер}})}{M_{\mu\nu\gamma}}, \quad (3)$$

де

$$M_{\mu\nu\gamma} = m_{\mu\nu} + (1 - P_{\text{пер}})(m_{0\mu\nu 0} + (m_{\gamma 0} + m_{0\gamma\mu})P_{\text{пер}0\mu}) + \\ + P_{\text{пер}}(m_\gamma + m_{0\nu\nu 0} + (m_{\gamma 0} + m_{0\gamma\nu})P_{\text{пер}0\nu}).$$

Вигляд правої частини (3) дає підстави стверджувати, що необхідною умовою існування граничного стаціонарного процесу є існування скінченних математичних сподівань випадкових величин T_λ , T_μ , $T_{\mu\nu}$, $T_{0\mu\nu 0}$, $T_{0\nu\nu 0}$, T_γ , $T_{\gamma 0}$, $T_{0\gamma\mu}$ і $T_{0\gamma\nu}$.

Повертаючись до рівності (1), бачимо, що проміжок часу T складається з суми довжин проміжків T_0 (часу простою каналу), T_1 (часу зайнятості каналу) і T_2 (часу ремонту каналу), тобто $T \approx \sum T_0 + \sum T_1 + \sum T_2$, де

$$\sum T_0 \approx N_{\text{обс}}(T)(m_{0\mu\nu 0} + P_{\text{пер}0\mu}(T)m_{0\gamma\mu}) + \\ + N_{\text{пер}}(T)(m_{0\nu\nu 0} + P_{\text{пер}0\nu}(T)m_{0\gamma\nu}); \quad \sum T_1 \approx (N_{\text{обс}}(T) + N_{\text{пер}}(T))m_{\mu\nu}; \\ \sum T_2 \approx N_{\text{обс}}(T)P_{\text{пер}0\mu}(T)m_{\gamma 0} + N_{\text{пер}}(T)(m_\gamma + P_{\text{пер}0\nu}(T)m_{\gamma 0}).$$

Після переходу до границі при $T \rightarrow \infty$ у відношеннях $\sum T_i/T$ ($i = \overline{1,3}$) отримаємо

формули для ймовірностей станів граничного стаціонарного процесу

$$\begin{aligned}
 p_0 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sum T_0}{T} = \frac{P_{\text{обс}}}{m_\lambda(1 - P_{\text{пер}})} \times \\
 &\times ((1 - P_{\text{пер}})(m_{0\mu\nu 0} + P_{\text{пер } 0\mu} m_{0\gamma\mu}) + P_{\text{пер}}(m_{0\nu\nu 0} + P_{\text{пер } 0\nu} m_{0\gamma\nu})) = \\
 &= \frac{(1 - P_{\text{пер}})(m_{0\mu\nu 0} + P_{\text{пер } 0\mu} m_{0\gamma\mu}) + P_{\text{пер}}(m_{0\nu\nu 0} + P_{\text{пер } 0\nu} m_{0\gamma\nu})}{M_{\mu\nu\gamma}}; \quad (4) \\
 p_1 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sum T_1}{T} = \frac{P_{\text{обс}} m_{\mu\nu}}{m_\lambda(1 - P_{\text{пер}})} = \frac{m_{\mu\nu}}{M_{\mu\nu\gamma}}; \\
 p_2 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sum T_2}{T} = \frac{(1 - P_{\text{пер}})P_{\text{пер } 0\mu} m_{\gamma 0} + P_{\text{пер}}(m_\gamma + P_{\text{пер } 0\nu} m_{\gamma 0})}{M_{\mu\nu\gamma}}.
 \end{aligned}$$

Якщо потік замовлень найпростіший, тобто випадкова величина T_λ розподілена за показниковим законом з параметром λ , то внаслідок відсутності післядії випадкові величини $T_{0\mu}$, $T_{0\nu}$, $T_{0\gamma\mu}$ і $T_{0\gamma\nu}$ також розподілені за показниковим законом з параметром λ . Отже,

$$\begin{aligned}
 m_{0\gamma\mu} &= m_{0\gamma\nu} = 1/\lambda, \quad T_{0\mu\nu 0} = T_{0\nu\nu 0} = T_{\lambda\nu 0} = \min\{T_\lambda, T_{\nu 0}\}, \\
 m_{0\mu\nu 0} &= m_{0\nu\nu 0} = m_{\lambda\nu 0} = M(T_{\lambda\nu 0}); \\
 P_{\text{пер } 0\mu} &= P_{\text{пер } 0\nu} = P_{\text{пер } 0} = P\{T_{\nu 0} < T_\lambda\},
 \end{aligned}$$

і зі співвідношень (3), (4) отримаємо узагальнення формул Севастьянова [3] для системи M/G/1/0 з можливістю виходу з ладу

$$\begin{aligned}
 P_{\text{обс}} &= \frac{1 - P_{\text{пер}}}{M_\lambda}; \quad p_0 = \frac{P_{\text{обс}}(P_{\text{пер } 0} + \lambda m_{\lambda\nu 0})}{1 - P_{\text{пер}}} = \frac{P_{\text{пер } 0} + \lambda m_{\lambda\nu 0}}{M_\lambda}; \\
 p_1 &= \frac{\lambda P_{\text{обс}} m_{\mu\nu}}{1 - P_{\text{пер}}} = \frac{\lambda m_{\mu\nu}}{M_\lambda}; \quad p_2 = 1 - p_0 - p_1,
 \end{aligned}$$

де $M_\lambda = (\lambda m_{\gamma 0} + 1)P_{\text{пер } 0} + \lambda(m_{\mu\nu} + m_{\lambda\nu 0} + P_{\text{пер}} m_\gamma)$.

3. Аналіз випадкових величин $T_{0\mu}$, $T_{0\nu}$, $T_{0\gamma\mu}$ і $T_{0\gamma\nu}$. Випадкові величини $T_{0\mu}$, $T_{0\nu}$, $T_{0\gamma\mu}$ і $T_{0\gamma\nu}$ об'єднує те, що вони задають інтервал часу, протягом якого система вільна, і цей проміжок часу починається після інтервалу тривалістю T_β зайнятості або недоступності каналу. Для спрощення аналізу цих випадкових величин введемо для них спільне позначення

$$T_0 = \begin{cases} T_{0\mu}, & \text{якщо } T_\beta = T_{\mu\nu}; \\ T_{0\nu}, & \text{якщо } T_\beta = T_{\mu\nu} + T_\gamma; \\ T_{0\gamma\mu}, & \text{якщо } T_\beta = T_{\mu\nu} + T_{0\mu\nu 0} + T_{\gamma 0}; \\ T_{0\gamma\nu}, & \text{якщо } T_\beta = T_{\mu\nu} + T_\gamma + T_{0\nu\nu 0} + T_{\gamma 0}. \end{cases} \quad (5)$$

Тривалість часу T_0 залежить від кількості замовлень, які надходять у систему за час T_β . Нехай $T_\lambda^{(k)}$ – k -разова композиція випадкових величин T_λ , $T_\lambda^{(0)} = 0$,

$T_\lambda^{(1)} = T_\lambda$, а $q_k = P(A_k) = P\{T_\lambda^{(k-1)} \leq T_\beta < T_\lambda^{(k)}\}$ ($k = 1, 2, \dots$). Тоді

$$T_0 = \begin{cases} T_\lambda - T_\beta, & \text{з імовірністю } q_1; \\ T_\lambda^{(2)} - T_\beta, & \text{з імовірністю } q_2; \\ \dots\dots\dots \\ T_\lambda^{(k)} - T_\beta, & \text{з імовірністю } q_k; \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Отже, випадкова величина T_0 залежить від появи однієї і лише однієї з попарно несумісних подій A_k , ($k = 1, 2, \dots$), які утворюють повну групу. Тому математичне сподівання $m_0 = M(T_0)$ можна обчислити за формулою повного математичного сподівання

$$m_0 = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) M(T_0|A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k (k m_\lambda - m_\beta) = m_\lambda S_q - m_\beta; \quad (6)$$

$$S_q = \sum_{k=1}^{\infty} k q_k, \quad m_\beta = M(T_\beta).$$

Тут враховано, що $\sum_{k=1}^{\infty} q_k = 1$, оскільки події A_k ($k = 1, 2, \dots$) утворюють повну групу попарно несумісних подій.

Якщо збігається числовий ряд S_q , то математичне сподівання m_0 існує. Оскільки $S_q = M(X) + 1$, де X – стаціонарне значення кількості замовлень, які надходять у систему за час T_β , то збіжність ряду S_q означає, що середня кількість замовлень, які надходять у систему за час недоступності каналу T_β , є скінченною. У монографії [2, с. 238] для випадку, коли вхідний потік є рекурентним, а випадкові величини T_λ і T_β мають абсолютно неперервні функції розподілу, то $M(X)$ визначено через $h_\lambda(t)$ – щільність функції відновлення для випадкової величини T_λ

$$M(X) = \int_0^{\infty} h_\lambda(t) (1 - F_\beta(t)) dt,$$

де $F_\beta(t)$ – функція розподілу випадкової величини T_β .

Отже, якщо функції розподілу випадкових величин T_λ і T_β абсолютно неперервні, то

$$S_q = 1 + \int_0^{\infty} h_\lambda(t) (1 - F_\beta(t)) dt. \quad (7)$$

Розглянемо випадок, коли вхідний потік регулярний, тобто $T_\lambda = T = const$, і формула (7) непридатна для знаходження S_q . Безпосередньо обчислюючи суму ряду

S_q , можемо записати

$$\begin{aligned} S_q &= \sum_{k=1}^{\infty} k q_k = 1 + q_2 + q_3 + \dots = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (q_{k+1} + q_{k+2} + \dots) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (1 - S_k), \end{aligned}$$

де $S_k = \sum_{i=1}^k q_i$. Оскільки

$$\begin{aligned} S_k &= \sum_{i=1}^k P\{T_{\lambda}^{(i-1)} \leq T_{\beta} < T_{\lambda}^{(i)}\} = \sum_{i=1}^k P\{(i-1)T \leq T_{\beta} < iT\} = \\ &= \sum_{i=1}^k (F_{\beta}(iT) - F_{\beta}((i-1)T)) = F_{\beta}(kT), \end{aligned}$$

то для регулярного вхідного потоку

$$S_q = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (1 - F_{\beta}(kT)).$$

Для обчислення математичних сподівань $m_{0\mu\nu 0}$, $m_{0\nu\nu 0}$, $m_{0\gamma\mu}$ і $m_{0\gamma\nu}$, які входять у співвідношення (3), (4) для стаціонарних характеристик системи, треба знати закони розподілу випадкових величин $T_{0\mu}$ і $T_{0\nu}$. Згідно з (5) для цього достатньо знайти закон розподілу випадкової величини T_0 – часу перебування у вільному стані для звичайної системи G/G/1/0.

Нехай T_{β} – час, протягом якого система недоступна для надходження замовлень (у випадку системи G/G/1/0 без можливості виходу з ладу $T_{\beta} = T_{\mu}$ – часу обслуговування одного замовлення). Якщо функції розподілу випадкових величин T_{λ} і T_{β} абсолютно неперервні, то згідно з [2, с. 238] щільність розподілу випадкової величини $T_{\beta+0} = T_{\beta} + T_0$ – інтервалу часу між потрапляннями замовлень у вільну систему можна визначити за формулою

$$p_{\beta+0}(t) = p_{\lambda}(t)F_{\beta}(t) + \int_0^t \int_0^{\tau} h_{\lambda}(y)p_{\beta}(\tau)p_{\lambda}(t-y) dy d\tau,$$

де $p_{\lambda}(t)$, $p_{\beta}(t)$ – щільності розподілу випадкових величин T_{λ} і T_{β} відповідно.

Припустимо, що $p_{\lambda}(t) \neq 0$, $p_{\beta}(t) \neq 0 \forall t \in [0, \infty)$, а $p_0(t)$ – щільність розподілу випадкової величини T_0 . Тоді за формулою згортки для щільностей розподілу випадкових величин T_{β} і T_0 отримаємо

$$\int_0^t p_0(\tau)p_{\beta}(t-\tau) d\tau = p_{\beta+0}(t). \quad (8)$$

Нехай функції $q_\beta(t) = dp_\beta(t)/dt$, $q_{\beta+0}(t) = dp_{\beta+0}(t)/dt$ – кусково неперервні $\forall t \in [0, \infty)$, і $p_\beta(0) \neq 0$. Тоді, продиференціювавши обидві частини рівності (8) за змінною t , одержимо інтегральне рівняння Вольтерра другого роду стосовно функції $p_0(t)$

$$p_\beta(0)p_0(t) + \int_0^t q_\beta(t-\tau)p_0(\tau) d\tau = q_{\beta+0}(t). \quad (9)$$

Розв'язок цього рівняння згідно з [4, с. 96] має вигляд

$$p_0(t) = \frac{q_{\beta+0}(t)}{p_\beta(0)} - \frac{1}{p_\beta(0)} \int_0^t R_\beta(t-\tau)q_{\beta+0}(\tau) d\tau. \quad (10)$$

Тут $R_\beta(t)$ – резольвента ядра $q_\beta(t-\tau)$ рівняння (9), яку можна знайти або за допомогою перетворення Лапласа, застосувавши його до рівняння (9), або методом ітерованих ядер

$$R_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_\beta^{(k)}(t),$$

де $q_\beta^{(k)}(t)$ – k -разова згортка функції $q_\beta(t)$, $q_\beta^{(1)}(t) = q_\beta(t)$.

Якщо випадкова величина T_β розподілена за показниковим законом з параметром β , то рівняння (9) набуває вигляду

$$p_0(t) - \int_0^t \beta e^{-\beta(t-\tau)} p_0(\tau) d\tau = \frac{q_{\beta+0}(t)}{\beta}.$$

У цьому випадку $R_\beta(t) = \beta$, і з (10) отримаємо

$$p_0(t) = \frac{q_{\beta+0}(t)}{\beta} + p_{\beta+0}(t) - p_{\beta+0}(0).$$

Зокрема, якщо випадкова величина T_λ розподілена за законом Ерланга другого порядку з параметром λ , то

$$p_0(t) = \left(\frac{\lambda^2(2\lambda + \beta)}{(\lambda + \beta)^2} + \frac{\lambda^2\beta t}{(\lambda + \beta)} \right) e^{-\lambda t} - \frac{\lambda^2(2\lambda + \beta)}{(\lambda + \beta)^2} e^{-(2\lambda + \beta)t}, \quad t > 0.$$

Знайдемо закон розподілу випадкової величини T_0 для випадку регулярного вхідного потоку, коли формула (10) стає непридатною для визначення $p_0(t)$. Якщо $T_\lambda = T = \text{const}$, то можливі значення випадкової величини T_0 зосереджені на відрізку $[0, T]$ і

$$T_0 = \begin{cases} T - T_\beta, & \text{з імовірністю } q_1; \\ 2T - T_\beta, & \text{з імовірністю } q_2; \\ \dots\dots\dots \\ kT - T_\beta, & \text{з імовірністю } q_k; \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

де $q_k = P(A_k) = P\{(k-1)T \leq T_\beta < kT\}$ ($k = 1, 2, \dots$). Визначимо умовні щільності розподілу T_0 за умови, що $T_\beta \in [(k-1)T, kT)$, припускаючи, що випадкова величина T_β неперервна, а її щільність розподілу $p_\beta(t) \neq 0 \forall t \in (0, \infty)$.

Функції розподілу випадкових величин $Y_k = kT - T_\beta$ визначають як

$$F_{Y_k}(t) = 1 - F_\beta(kT - t), \quad 0 \leq t \leq kT \quad (k = 1, 2, \dots),$$

а їхні щільності розподілу відповідно становлять

$$p_{Y_k}(t) = p_\beta(kT - t), \quad 0 < t < kT \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Тому умовні щільності розподілу випадкової величини T_0 за умови, що $T_\beta \in [(k-1)T, kT)$ можемо визначити у вигляді

$$p_{0k}(t) = \frac{p_{Y_k}(t)}{N_k} = \frac{p_\beta(kT - t)}{N_k}, \quad 0 < t < T \quad (k = 1, 2, \dots),$$

де $N_k = \int_0^T p_\beta(kT - t) dt$.

За формулою повної ймовірності

$$F_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_{0k}(t) q_k, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Тут $F_0(t)$ – функція розподілу випадкової величини T_0 , а $F_{0k}(t) = \int_0^t p_{0k}(\tau) d\tau$. Звідси отримаємо формулу для визначення щільності розподілу випадкової величини T_0

$$p_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{0k}(t) q_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_\beta(kT - t)}{N_k} q_k, \quad 0 < t < T. \quad (11)$$

Перейшовши до змінної інтегрування $\tau = kT - t$ в інтегралі, який визначає нормувальну сталу N_k , одержимо, що

$$N_k = \int_0^T p_\beta(kT - t) dt = \int_{(k-1)T}^{kT} p_\beta(\tau) d\tau = q_k.$$

Отже, з (11) матимемо

$$p_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_\beta(kT - t), \quad 0 < t < T. \quad (12)$$

Якщо функція $p_\beta(t) \neq 0$ лише для $t \in (a, \infty)$, де $a > 0$, але відношення $p_\beta(kT - t)/N_k$ не залежить від k , то з (11) одержимо

$$p_0(t) = \frac{p_\beta(kT - t)}{N_k}, \quad 0 < t < T. \quad (13)$$

Наприклад, якщо щільність розподілу випадкової величини T_β має вигляд $p_\beta(t) = \beta e^{-\beta(t-a)}$, $t > a \geq 0$, то

$$N_k = \int_0^T \beta e^{-\beta(kT-t-a)} dt = e^{-\beta((k-1)T-a)} - e^{-\beta(kT-a)},$$

і за допомогою (13) отримуємо

$$p_0(t) = \frac{\beta e^{-\beta(T-t)}}{1 - e^{-\beta T}}, \quad 0 < t < T.$$

Такий самий результат матимемо, якщо випадкова величина T_β розподілена за показниковим законом з параметром β .

Формулою (12) зручно користуватись, зокрема, якщо випадкова величина T_β розподілена за узагальненим законом Ерланга довільного порядку. Наприклад, у випадку узагальненого закону Ерланга другого порядку з параметрами β_1 і β_2

$$p_0(t) = \frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_2 - \beta_1} \left(\frac{e^{-\beta_1(T-t)}}{1 - e^{-\beta_1 T}} - \frac{e^{-\beta_2(T-t)}}{1 - e^{-\beta_2 T}} \right), \quad 0 < t < T.$$

4. Приклад обчислення стаціонарних характеристик системи. Нехай вхідний потік – регулярний ($T_\lambda = T = \text{const}$), випадкові величини T_μ , T_ν , $T_{\nu 0}$ розподілені за показниковими законами з параметрами μ , ν , ν_0 відповідно, а інтервали часу ремонту детерміновані $T_\gamma = \text{const}$, $T_{\gamma 0} = \text{const}$. Опишемо на цьому прикладі послідовність визначення величин, які входять у формули (3), (4) для стаціонарних характеристик системи.

Спочатку, враховуючи співвідношення (5), за формулою (13) знайдемо розподіл випадкових величин $T_{0\mu}$ і $T_{0\nu}$

$$p_{0\mu}(t) = p_{0\nu}(t) = \frac{\alpha e^{-\alpha(T-t)}}{1 - e^{-\alpha T}}, \quad \alpha = \mu + \nu; \quad 0 < t < T.$$

Тепер обчислимо математичні сподівання випадкових величин $T_{0\mu\nu 0}$ і $T_{0\nu\nu 0}$

$$\begin{aligned} m_{0\mu\nu 0} &= m_{0\nu\nu 0} = \int_0^\infty t p_{0\mu}(t) (1 - F_{\nu 0}(t)) dt + \int_0^\infty t p_{\nu 0}(t) (1 - F_{0\mu}(t)) dt = \\ &= \frac{1}{1 - e^{-\alpha T}} \left(\frac{e^{-\alpha T} + (\alpha T - \nu_0 T - 1)e^{-\nu_0 T}}{\alpha - \nu_0} + \frac{1 - (\nu_0 T + 1)e^{-\nu_0 T}}{\nu_0} \right). \end{aligned}$$

Наступний крок – визначення математичних сподівань $m_{0\gamma\mu}$ і $m_{0\gamma\nu}$. Знову враховуючи (5), з (6) одержимо

$$\begin{aligned} m_{0\gamma\mu} &= m_\lambda S_{q\gamma\mu} - (m_{\mu\nu} + m_{0\mu\nu 0} + m_{\gamma 0}), \\ m_{0\gamma\nu} &= m_\lambda S_{q\gamma\nu} - (m_{\mu\nu} + m_\gamma + m_{0\nu\nu 0} + m_{\gamma 0}), \end{aligned}$$

де

$$S_{q\gamma\mu} = \sum_{k=1}^{\infty} k q_{\gamma\mu k}, \quad S_{q\gamma\nu} = \sum_{k=1}^{\infty} k q_{\gamma\nu k},$$

$$q_{\gamma\mu k} = P\{(k-1)T \leq T_{\mu\nu} + T_{0\mu\nu 0} + T_{\gamma 0} < kT\},$$

$$q_{\gamma\nu k} = P\{(k-1)T \leq T_{\mu\nu} + T_{\gamma} + T_{0\nu\nu 0} + T_{\gamma 0} < kT\}.$$

Для розподілів, які розглядають у цьому прикладі,

$$m_{\lambda} = T, \quad m_{\gamma} = T_{\gamma}, \quad m_{\gamma 0} = T_{\gamma 0},$$

$$S_{q\gamma\mu} = s + e^{-\alpha(sT - T_{\gamma 0})} + \frac{\alpha e^{-\alpha T} (e^{-\alpha(sT - T_{\gamma 0})} - e^{(\alpha - \nu_0)(sT - T_{\gamma 0})})}{(2\alpha - \nu_0)(1 - e^{-\alpha T})} +$$

$$+ \frac{\alpha (e^{-\nu_0(sT - T_{\gamma 0})} - e^{-\alpha(sT - T_{\gamma 0})})}{(\alpha - \nu_0)(1 - e^{-\alpha T})} + \frac{e^{-\alpha((s+1)T - T_{\gamma 0})}}{1 - e^{-\alpha T}} +$$

$$+ \frac{\alpha e^{-\alpha((s+1)T - T_{\gamma 0})}}{(1 - e^{-\alpha T})^2} \left(\frac{e^{-\alpha T} - e^{-(\nu_0 - \alpha)T}}{2\alpha - \nu_0} - \frac{1 - e^{-(\nu_0 - \alpha)T}}{\alpha - \nu_0} \right),$$

$$(s-1)T \leq T_{\gamma 0} \leq sT \quad (s = 1, 2, \dots).$$

Формулу для $S_{q\gamma\nu}$ отримаємо з виразу для $S_{q\gamma\mu}$, замінивши у ньому $T_{\gamma 0}$ на $T_{\gamma} + T_{\gamma 0}$.

Залишається зауважити, що $m_{\mu\nu} = 1/(\mu + \nu)$, $P_{\text{пер } 0\nu} = \nu/(\mu + \nu)$,

$$P_{\text{пер } 0\mu} = P_{\text{пер } 0\nu} = \frac{\alpha - \nu_0 + \nu_0 e^{-\alpha T} - \alpha e^{-\nu_0 T}}{(\alpha - \nu_0)(1 - e^{-\alpha T})},$$

і стаціонарні характеристики системи за формулами (3), (4) цілковито визначені.

5. Випадок відсутності обмеження на кількість виходів з ладу вільного каналу. Розглянемо лише випадок найпростішого вхідного потоку, коли випадкова величина T_{λ} розподілена за показниковим законом з параметром λ . Тоді

$$m_{\lambda} = m_{0\gamma\mu} = m_{0\gamma\nu} = 1/\lambda, \quad T_{0\mu\nu 0} = T_{0\nu\nu 0} = T_{\lambda\nu 0} = \min\{T_{\lambda}, T_{\nu 0}\},$$

$$m_{0\mu\nu 0} = m_{0\nu\nu 0} = m_{\lambda\nu 0} = M(T_{\lambda\nu 0});$$

$$P_{\text{пер } 0\mu} = P_{\text{пер } 0\nu} = P_{\text{пер } 0} = P\{T_{\nu 0} < T_{\lambda}\},$$

і наближена рівність (1) набуває вигляду

$$T \approx N(T)m_{\lambda} \approx N_{\text{обс}}(T)(m_{\mu\nu} + m_{\lambda\nu 0} + \pi_{\text{пер } 0}(T)) +$$

$$+ N_{\text{пер}}(T)(m_{\mu\nu} + m_{\gamma} + m_{\lambda\nu 0} + \pi_{\text{пер } 0}(T)),$$

де

$$\pi_{\text{пер } 0}(T) = P_{\text{пер } 0}(T)(m_{\gamma 0} + m_{\lambda\nu 0} + P_{\text{пер } 0}(T)(m_{\gamma 0} + m_{\lambda\nu 0} +$$

$$+ P_{\text{пер } 0}(T)(m_{\gamma 0} + m_{\lambda\nu 0} + \dots))) = (m_{\gamma 0} + m_{\lambda\nu 0}) \sum_{k=1}^{\infty} (P_{\text{пер } 0}(T))^k =$$

$$= (m_{\gamma 0} + m_{\lambda\nu 0}) \frac{P_{\text{пер } 0}(T)}{1 - P_{\text{пер } 0}(T)}.$$

Для $T \rightarrow \infty$ одержимо

$$\begin{aligned} P_{\text{обс}} &= \frac{1 - P_{\text{пер}}}{\lambda M_{\infty}}; & p_0 &= \frac{m_{\lambda\nu 0}}{M_{\infty}(1 - P_{\text{пер}0})}; \\ p_1 &= \frac{m_{\mu\nu}}{M_{\infty}}; & p_2 &= \frac{m_{\gamma 0} P_{\text{пер}0} + m_{\gamma} P_{\text{пер}}(1 - P_{\text{пер}0})}{M_{\infty}(1 - P_{\text{пер}0})}, \end{aligned} \quad (14)$$

де $M_{\infty} = m_{\mu\nu} + m_{\lambda\nu 0} + m_{\gamma} P_{\text{пер}} + (m_{\gamma 0} + m_{\lambda\nu 0}) \frac{P_{\text{пер}0}}{1 - P_{\text{пер}0}}$, $P_{\text{пер}} = P\{T_{\nu} < T_{\mu}\}$.

У випадку показниково розподілених випадкових величин T_{μ} , T_{ν} , $T_{\nu 0}$, T_{γ} і $T_{\gamma 0}$ формули (14) переходять у співвідношення, отримані в [5, с. 362].

-
1. *Ивченко Г.И.* Теория массового обслуживания. / *Ивченко Г.И., Каштанов В.А., Коваленко И.Н.* – М.: Высшая школа, 1982. – 256 с.
 2. *Корлат А.Н.* Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания. / *Корлат А.Н., Кузнецов В.Н., Новиков М.М., Турбин А.Ф.* – Кишинев, 1991.
 3. *Севастьянов Б.А.* Эргодическая теорема для марковских процессов и ее применение к телефонным системам с отказами / *Севастьянов Б.А.* // Теория вероятн. и ее применения. – 1957. – Т. 2, №2. – С. 106-116.
 4. *Верлань А.Ф.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. / *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* – К.: Наук. думка, 1986. – 542 с.
 5. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Прикладные задачи теории вероятностей / *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* – М.: Радио и связь, 1983. – 416 с.

STATIONARY CHARACTERISTICS OF THE SINGLE-SERVER QUEUEING LOSS SYSTEM WITH FALLING OUT POSSIBILITY

Yuriy ZHERNOVYI

*Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytetska Str., 1*

The statistical-equilibrium state probabilities distribution and distribution of time of stay in a free state for the G/G/1/0 queueing system with falling out possibilities of the working and free server are obtained.

Key words: queueing loss system with falling out possibility, statistical-equilibrium state, probabilities distribution.

Стаття надійшла до редколегії 04.04.2007

Прийнята до друку 22.10.2008

УДК 517.956

УЗАГАЛЬНЕНІ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ І НЕЙМАНА ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА В ОБЛАСТІ ЗІ ЩІЛИНОЮ

Богдан ЖОВНЕР, Мар'яна КОЛЕСНІЧЕНКО, Галина ЛОПУШАНСЬКА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1

Визначено однозначну розв'язність задач Діріхле і Неймана для рівняння Лапласа в області з "розрізом", коли на межі задано узагальнені функції.

Ключові слова: рівняння Лапласа, узагальнена функція, узагальнені крайові значення, система інтегральних рівнянь.

1. Лінійні еліптичні крайові задачі в обмеженій області або в області ззовні обмеженої замкнутої гладкої поверхні при заданих на її (компактній) межі узагальнених функцій досить детально вивчені (див. [1-3] та бібліогр.). Доведено теореми існування та єдиності розв'язку, визначено його зображення за допомогою вектор-функції Гріна чи узагальнених потенціалів.

Водночас навіть при гладких даних крайові задачі в областях з некомпактною межею мало вивчені.

Мета нашої праці – поширювати результати [4-7] на випадок області зі щілиною, а саме – доведенню розв'язності крайової задачі при заданих узагальнених функціях на розімкненій поверхні в одному з формулювань та визначенню характеру росту розв'язку біля цієї поверхні. Дослідження поведінки регулярних всередині області розв'язків лінійних однорідних еліптичних рівнянь біля замкнутої гладкої межі області, на якій задано узагальнені функції, виконували у працях [6], [8] та інших (див. бібліогр. у [3]). Тут одержано подібний результат для області зі щілиною.

2. Основні позначення та формулювання задач. Нехай $S \subset \mathbb{R}^3$ – обмежена гладка поверхня, S_0 – її гладка межа, S_+ – верхня частина поверхні S , а S_- – її нижня частина, $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{S}$ – область ззовні S (іншими словами, простір з розрізом вздовж S).

Використовуємо функційні простори $D(S_+) = C^\infty(S_+)$, $D(S_-) = C^\infty(S_-)$.

Через $D'(S_\pm)$ позначимо простір лінійних неперервних функціоналів на просторі $D(S_\pm)$ гладких функцій (простір узагальнених функцій [9],[10]), через (φ, F) – значення узагальненої функції $F \in D'(S_\pm)$ на основній функції $\varphi \in D(S_\pm)$. Зауважимо, що узагальнені функції із $D'(S_\pm)$ мають компактні носії на $S_\pm$ (теорема 1.1 із [11]) та скінчені порядки сингулярностей.

Введемо позначення $S_{\pm\epsilon} = \{x_{\pm\epsilon} \in \mathbb{R}^3 : x_{\pm\epsilon} = x \pm \epsilon\nu(x), x \in S_{\pm}\}$, де $\nu(x)$ – орт нормалі до S_+ , направленої в Ω , $S_{0,\epsilon}$ – трубчаста поверхня, що з'єднує $S_{+\epsilon}$ та $S_{-\epsilon}$, $S_{\epsilon} = S_{+\epsilon} \cup S_{-\epsilon} \cup S_{0,\epsilon}$, тобто S_{ϵ} – " ϵ -оболонка" множини S .

Для довільних $\varphi \in D(S_{\pm})$ визначимо функції $\varphi(x_{\pm\epsilon}) = \varphi(x)$ при $x_{\pm\epsilon} = x \pm \epsilon\nu(x)$, $x \in S_{\pm}$, через $\varphi(x_{\epsilon})$ при $x_{\epsilon} \in S_{0,\epsilon}$ позначаємо довільне гладке продовження функцій $\varphi(x_{\epsilon})$ та $\varphi(x_{-\epsilon})$ на $S_{0,\epsilon}$. Так для довільних $\varphi \in D(S_{\pm})$ визначено функції $\varphi \in D(S_{\epsilon})$.

Формулювання задачі D (узагальненої задачі Діріхле).

Нехай $F_+ \in D'(S_+)$, $F_- \in D'(S_-)$. Знайти гармонічну функцію $u(x)$ в області Ω , яка задовольняє умови:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_{+\epsilon}} \varphi(x_{+\epsilon}) u(x_{+\epsilon}) dS = (\varphi, F_+) \quad \forall \varphi \in D(S_+), \quad (1)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_{-\epsilon}} \varphi(x_{-\epsilon}) u(x_{-\epsilon}) dS = (\varphi, F_-), \quad \forall \varphi \in D(S_-), \quad (2)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_{0,\epsilon}} \varphi(x) u(x) dS = 0 \quad \forall \varphi \in D(S_+) \cup D(S_-), \quad (3)$$

тобто

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_{\epsilon}} \varphi(x) u(x) dS = (\varphi, F) \quad \forall \varphi \in D(S_+) \cup D(S_-),$$

де $F = F_+$ на S_+ , $F = F_-$ на S_- , $F = 0$ на S_0 .

Формулювання задачі N (узагальненої задачі Неймана).

Нехай $B_{\pm} \in D'(S_{\pm})$ – задані узагальнені функції на $D(S_{\pm})$. Знайти гармонічну функцію $u(x)$ в області Ω , нормальна похідна якої на S_+ та S_- набуває узагальнених крайових значень відповідно B_+ та B_- , а саме

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_{+\epsilon}} \frac{\partial u(x_{+\epsilon})}{\partial \nu} \varphi_+(x_{+\epsilon}) dS_{+\epsilon} = (\varphi, B_+) \quad \forall \varphi \in D(S_+), \quad (4)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_{-\epsilon}} \frac{\partial u(x_{-\epsilon})}{\partial \nu} \varphi_-(x_{-\epsilon}) dS_{-\epsilon} = (\varphi, B_-) \quad \forall \varphi \in D(S_-) \quad (5)$$

та

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_{0,\epsilon}} \varphi(x) \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} dS = 0 \quad \forall \varphi \in D(S_+) \cup D(S_-), \quad (6)$$

тобто

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_{\epsilon}} \varphi(x) \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} dS = (\varphi, B) \quad \forall \varphi \in D(S_+) \cup D(S_-),$$

де $B = B_+$ на S_+ , $B = B_-$ на S_- , $B = 0$ на S_0 .

3. Розв'язок узагальненої задачі Діріхле. Нехай $\omega(x, y) = -\frac{1}{4\pi|x-y|}$ фундаментальна функція оператора Лапласа.

Розв'язок задачі D шукатимемо у вигляді

$$u(x) = \left(\frac{\partial \omega(x, y_+)}{\partial \nu_y}, R_+(y_+) \right) + \left(\frac{\partial \omega(x, y_-)}{\partial \nu_y}, R_-(y_-) \right), \quad x \in \Omega, \quad (7)$$

де R_+, R_- – невідомі узагальнені функції відповідно з $D'(S_+), D'(S_-)$.

Покажемо, що функція (7) при певних узагальнених функціях $R_{\pm} \in D'(S_{\pm})$ є розв'язком узагальненої задачі Діріхле для рівняння Лапласа.

Оскільки R_+ та R_- – лінійні і неперервні функціонали відповідно на $D(S_+)$ і $D(S_-)$, то, використовуючи властивості узагальнених функцій, залежних від параметрів, для $x \in \Omega$ матимемо

$$\Delta u(x) = (\Delta_x \frac{\partial \omega(x, y_+)}{\partial \nu_y}, R_+(y_+)) + (\Delta_x \frac{\partial \omega(x, y_-)}{\partial \nu_y}, R_-(y_-)) = 0, \quad x \in \Omega.$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = (\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\partial \omega(x, y_+)}{\partial \nu_y}, R_+(y_+)) + (\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\partial \omega(x, y_-)}{\partial \nu_y}, R_-(y_-)) = 0.$$

Отже, u – гармонічна в Ω .

Враховуючи інтегровність функції $\varphi(y_{\varepsilon}) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \omega(x, y_{\varepsilon})$ на $S_{0,\varepsilon}$ і те, що елемент трубчатой поверхні буде величиною порядку ε при $\varepsilon \rightarrow 0$, отримаємо

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_{0,\varepsilon}} \varphi(y_{\varepsilon}) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \omega(x, y_{\varepsilon}) dS_{y_{\varepsilon}} = 0, \quad x \in \Omega, \quad (8)$$

звідки

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_{0,\varepsilon}} \varphi(x) u(x) dS &= (\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_{0,\varepsilon}} \varphi(y_{\varepsilon}) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \omega(x, y_{\varepsilon}) dS_{y_{\varepsilon}}, R_+(y_+)) + \\ &+ (\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_{0,\varepsilon}} \varphi(y_{\varepsilon}) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \omega(x, y_{\varepsilon}) dS_{y_{\varepsilon}}, R_-(y_-)) = 0 \quad \forall \varphi \in D(S_+) \cup D(S_-), \end{aligned}$$

а отже, функція (7) задовольняє умову (3).

За допомогою формул крайових значень на двосторонній поверхні S для нормальної похідної потенціалу простого шару (див. [12]) та леми 1.5 із [3] одержуємо

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_{+\varepsilon}} \varphi_+(x_{+\varepsilon}) u(x_{+\varepsilon}) dS &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_{+\varepsilon}} \varphi_+(x_{+\varepsilon}) \left(\frac{\partial \omega(x_{+\varepsilon}, y_+)}{\partial \nu_y}, R_+(y_+) \right) + \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_{+\varepsilon}} \varphi_+(x_{+\varepsilon}) \left(\frac{\partial \omega(x_{+\varepsilon}, y_-)}{\partial \nu_y}, R_-(y_-) \right) dS = \\ &= (\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_{+\varepsilon}} \varphi_+(x_{+\varepsilon}) \frac{\partial \omega(x_{+\varepsilon}, y_+)}{\partial \nu_y} dS, R_+(y_+)) + (\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_{+\varepsilon}} \varphi_+(x_{+\varepsilon}) \frac{\partial \omega(x_{+\varepsilon}, y_-)}{\partial \nu_y} dS, R_-(y_-)) = \\ &= (-\frac{1}{2} \varphi_+(y_+) + \int_{S_+} \varphi_+(x) \frac{\partial \omega(x, y_+)}{\partial \nu_y} dS, R_+(y_+)) + (\int_{S_+} \varphi_-(x) \frac{\partial \omega(x, y_-)}{\partial \nu_y} dS, R_-(y_-)) = \end{aligned}$$

$$= (\varphi_+(y_+), F_+(y_+)), \quad \varphi_+ \in D(S_+).$$

Аналогічно

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_{-\varepsilon}} \varphi_-(x_{-\varepsilon}) u(x_{-\varepsilon}) dS &= \left(\int_{S_-} \varphi_-(x) \frac{\partial \omega(x, y_+)}{\partial \nu_y} dS, R_+(y_+) \right) + \\ &+ \left(\frac{1}{2} \varphi_-(y_-) + \int_{S_-} \varphi_-(x) \frac{\partial \omega(x, y_-)}{\partial \nu_y} dS, R_-(y_-) \right) = (\varphi_-(y_-), F_-(y_-)), \quad \varphi_- \in D(S_-). \end{aligned}$$

Додавши ці рівності, отримаємо

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{1}{2} \varphi_+(y_+) + \int_{S_+} \varphi_+(x) \frac{\partial \omega(x, y_+)}{\partial \nu_y} dS + \int_{S_-} \varphi_-(x) \frac{\partial \omega(x, y_+)}{\partial \nu_y} dS, R_+(y_+) \right) + \\ &+ \left(\frac{1}{2} \varphi_-(y_-) + \int_{S_-} \varphi_-(x) \frac{\partial \omega(x, y_-)}{\partial \nu_y} dS + \int_{S_+} \varphi_+(x) \frac{\partial \omega(x, y_-)}{\partial \nu_y} dS, R_-(y_-) \right) = \\ &= (\varphi_+(y_+), F_+(y_+)) + (\varphi_-(y_-), F_-(y_-)). \end{aligned}$$

Це рівносильно умові

$$(g_+(y_+), R_+(y_+)) + (g_-(y_-), R_-(y_-)) = (\varphi_{g_+}(y_+), F_+(y_+)) + (\varphi_{g_-}(y_-), F_-(y_-)), \quad (9)$$

де $g_+ \in D(S_+)$, $g_- \in D(S_-)$, а $(\varphi_{g_+}, \varphi_{g_-})$ – розв’язок системи інтегральних рівнянь

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \varphi_+(y_+) + \int_{S_+} \varphi_+(x) \frac{\partial \omega(x, y_+)}{\partial \nu_y} dS + \int_{S_-} \varphi_-(x) \frac{\partial \omega(x, y_+)}{\partial \nu_y} dS = g_+(y_+), \\ \frac{1}{2} \varphi_-(y_-) + \int_{S_-} \varphi_-(x) \frac{\partial \omega(x, y_-)}{\partial \nu_y} dS + \int_{S_+} \varphi_+(x) \frac{\partial \omega(x, y_-)}{\partial \nu_y} dS = g_-(y_-). \end{cases} \quad (10)$$

Отже, ми отримали систему інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду таку саму, до якої зводиться задача Неймана при неперервних даних $g_{\pm}$ на $S_{\pm}$, якщо її розв’язок шукати у вигляді $\int_{S_+} g_+(y) \omega(x, y) dS + \int_{S_-} g_-(y) \omega(x, y) dS$, $x \in \Omega$, і яка досліджена в [12]. Згідно з [12] при довільних $g_{\pm} \in C(S_{\pm})$ система (10) має єдиний розв’язок $\varphi_{g_{\pm}} \in C(S_{\pm})$.

Для доведення розв’язності задачі D при $F_{\pm} \in D'(S_{\pm})$ треба ще довести, що при $g_{\pm} \in D(S_{\pm})$ розв’язок $(\varphi_{g_+}, \varphi_{g_-})$ системи інтегральних рівнянь (10) є нескінченно диференційовним, а саме $\varphi_{g_{\pm}} \in D(S_{\pm})$. Це випливає з леми.

Лема 1. Оператори $(K_0^{\pm} \varphi)(x) = \int_{S_{\pm}} \varphi(y_{\pm}) \omega(x, y_{\pm}) dS_{\pm}$,

$$(K_1^{\pm} \varphi)(x) = \int_{S_{\pm}} \varphi(y_{\pm}) \frac{\partial}{\partial \nu_x} \omega(x, y_{\pm}) dS_{\pm}, \quad (K_2^{\pm} \varphi)(x) = \int_{S_{\pm}} \varphi(y_{\pm}) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \omega(x, y_{\pm}) dS$$

діють у $D(S_{\pm})$.

Доведення. Покриємо поверхню S системою околів $\cup_{j=1}^M U_j$ та розглянемо в кожному такому крайовому координатному околі U_j області Ω функції

$$v_{0\pm}(x) = (K_0^\pm \varphi)(x) = \int_{S_\pm} \varphi(y) \omega(x, y) dS, \quad \varphi \in D(S_\pm), \quad x \in U_j$$

у розпрямляючих координатах $x = \xi$, де $\xi' = (\xi_1, \xi_2)$ лежать у дотичній площині довільно взятої точки $x_0 \in S_\pm$, ξ_3 на нормалі $\nu(x_0)$ (або її продовженні), σ^j – проекція $S_\pm \cap U_j$ на дотичну площину $\xi_1 O \xi_2$, $S_\pm \cap U_j$ задана рівнянням $\xi_3 = G^j(\xi_1, \xi_2)$, $(\xi_1, \xi_2) \in \sigma^j$, $G^j \in C^\infty(\sigma^j)$.

Використовуємо позначення

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^k = D^k = \frac{\partial^{k_1+k_2+k_3}}{\partial \xi_1^{k_1} \partial \xi_2^{k_2} \partial \xi_3^{k_3}}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{k'} = D^{k'} = \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial \xi_1^{k_1} \partial \xi_2^{k_2}}, \quad |k'| = k_1 + k_2, \quad |k| = |k'| + k_3.$$

Тепер при $i = 1, 2$ знайдемо $\frac{\partial}{\partial \xi_i} \int_{S_\pm \cap U_j} \varphi(y) \omega(\xi, y) dS_y =$

$$\begin{aligned} & - \int_{\sigma^j} \varphi(y', G^j(y')) \frac{\partial}{\partial y_i} \omega(\xi, y', G^j(y')) \sqrt{1 + (G_{y_1}^j(y'))^2 + (G_{y_2}^j(y'))^2} dy' = \\ & = - \int_{\sigma^j} \frac{\partial}{\partial y_i} [\varphi(y', G^j(y')) \sqrt{1 + (G_{y_1}^j(y'))^2 + (G_{y_2}^j(y'))^2} \omega(\xi, y', G^j(y'))] dy' + \\ & + \int_{\sigma^j} \frac{\partial}{\partial y_i} [\varphi(y', G^j(y')) \sqrt{1 + (G_{y_1}^j(y'))^2 + (G_{y_2}^j(y'))^2}] \omega(\xi, y', G^j(y')) dy'. \end{aligned}$$

Використовуючи формулу Гріна та метод математичної індукції, доводимо, що для довільного мультиіндексу β'

$$D_\xi^{\beta'} \int_{S_\pm} \varphi(y) \omega(\xi, y) dS_y = \quad (11)$$

$$= \int_{S_\pm} H_{\beta'} \left(y, \frac{\partial}{\partial y'} \right) \varphi(y) \omega(\xi, y) dS_y + \int_{S_0} H_{0\beta'} \left(y, \frac{\partial}{\partial y'} \right) \varphi(y) \omega(\xi, y) dS_0,$$

де $H_{\beta'}(y, \frac{\partial}{\partial y'})$, $H_{0\beta'}(y, \frac{\partial}{\partial y'})$ – лінійні диференціальні вирази відповідно порядків $|\beta'|$, $|\beta'| - 1$, "дотичний" диференціальний вираз $H_{\beta'}(y, \frac{\partial}{\partial y'}) = ((-1)^{|\beta'|} D^{\beta'})^*$ називається спряженим до $(-1)^{|\beta'|} D^{\beta'}$ на $S_\pm \cap U_j$. З наведеного бачимо, що

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)^* \varphi(y) = \frac{\partial}{\partial y_i} [\varphi(y', G^j(y')) \sqrt{1 + (G_{y_1}^j(y'))^2 + (G_{y_2}^j(y'))^2}].$$

Якщо $x \in \Omega \setminus S$ і лежить на нормалі до S у точці $x_0 \in S$, то для довільного мультиіндексу k

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k v_{0\pm}(x) = \int_{S_\pm} \varphi(y) \left(-\frac{\partial}{\partial y}\right)^k \omega(x, y) dS.$$

Оскільки $\left(-\frac{\partial}{\partial y}\right)^k = \sum_{q=0}^{|k|} \tilde{h}_{kq} \left(y, \frac{\partial}{\partial y'}\right) \left(\frac{\partial}{\partial \nu_y}\right)^q$, де $\tilde{h}_{kq}$ – "дотичні" диференціальні вирази порядків $|k| - q$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial \nu_y}\right)^q \omega(x, y) = \widetilde{M}_{1q} \left(y, \frac{\partial}{\partial y'}\right) \frac{\partial}{\partial \nu_x} \omega(x, y) + \widetilde{M}_{2q} \left(y, \frac{\partial}{\partial y'}\right) \omega(x, y),$$

де $\widetilde{M}_{1q} \left(y, \frac{\partial}{\partial y'}\right)$, $\widetilde{M}_{2q} \left(y, \frac{\partial}{\partial y'}\right)$ – "дотичні" диференціальні вирази порядків $q - 1$ та q відповідно, то в результаті одержимо

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k v_{0\pm}(x) = \int_{S_{\pm}} \varphi(y) [M_{1k}(y, \frac{\partial}{\partial y'}) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \omega(x, y) + M_{2k}(y, \frac{\partial}{\partial y'}) \omega(x, y)] dS.$$

Тут $M_{1k} \left(y, \frac{\partial}{\partial y'}\right)$, $M_{2k} \left(y, \frac{\partial}{\partial y'}\right)$ – "дотичні" диференціальні вирази порядків $|k| - 1$ та $|k|$ відповідно. За формулою (11)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k v_{0\pm}(x) &= \int_{S_{\pm}} M_{1k}^*(y, \frac{\partial}{\partial y'}) \varphi(y) \cdot \frac{\partial}{\partial \nu_x} \omega(x, y) dS_y + \\ &+ \int_{S_{\pm}} M_{2k}^*(y, \frac{\partial}{\partial y'}) \varphi(y) \cdot \omega(x, y) dS_y + \int_{S_0} H_{0k} \left(y, \frac{\partial}{\partial y'}\right) \varphi(y) \omega(x, y) dS. \end{aligned}$$

За властивостями поверхневих потенціалів подвійного і простого шарів

$$\lim_{x \rightarrow x_0 \in S_{\pm}} \int_{S_{\pm}} (M_{1k}^* \varphi)(y) \frac{\partial}{\partial \nu_x} \omega(x, y) dS_y = \int_{S_{\pm}} (M_{1k}^* \varphi)(y) \cdot \frac{\partial}{\partial \nu_x} \omega(x_0, y) dS_y \pm \frac{1}{2} (M_{1k}^* \varphi)(x_0),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 \in S_{\pm}} \int_{S_{\pm}} (M_{2k}^* \varphi)(y) \omega(x, y) dS_y = \int_{S_{\pm}} (M_{2k}^* \varphi)(y) \omega(x_0, y) dS_y,$$

звідки $\lim_{x \rightarrow x_0 \in S_{\pm}} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k v_{0\pm}(x)$ – неперервна функція на $S_{\pm}$ для довільного мультиіндексу k . Отже, $v_{0\pm} \in D(S_{\pm})$.

Так само доводимо, що $K_i^{\pm} \varphi \in D(S_{\pm})$ при $\varphi \in D(S_{\pm})$, $i = 1, 2$.

Шукаючи розв'язок системи інтегральних рівнянь методом послідовних наближень та враховуючи, що ітерації ядра цієї системи мають слабшу особливість, ніж саме ядро, на підставі леми 1 одержуємо $\varphi_{n\pm} \in D(S_{\pm})$ при $g_{\pm} \in D(S_{\pm})$ для довільного наближення $\varphi_{n\pm}$ розв'язку системи (10), а отже, $\varphi_{g\pm}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{n\pm}(x) \in D(S_{\pm})$. З леми 1 та наведеного вище випливає правильність теореми.

Теорема 1. Нехай $F_{\pm} \in D'(S_{\pm})$, узагальнені функції $R_{\pm} \in D'(S_{\pm})$ визначаються співвідношенням (9), де $(\varphi_{g+}, \varphi_{g-})$ – розв'язок системи (10). Тоді функція (7) є розв'язком задачі D .

Зауваження 1. Теорема 1 стверджує існування розв'язку узагальненої задачі Діріхле у такому формулюванні: при заданих $F_{+} \in D'(S_{+})$, $F_{-} \in D'(S_{-})$ знайти гармонічну функцію $u(x)$ в області Ω , яка задовольняє умови (1) та (2). Умова (3) у формулюванні задачі D забезпечує єдиність її розв'язку.

Теорема 2. Розв'язок задачі D єдиний.

Доведення. Якщо u_1, u_2 – розв’язки задачі D, то функція $u = u_1 - u_2$ гармонічна в Ω та

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \varphi(x) u(x) dS = 0 \quad \forall \varphi \in D(S_+) \cup D(S_-). \quad (12)$$

Нехай Ω_ε – підобласть $\tilde{\Omega}$, розміщена ззовні S_ε . Для гармонічної в області Ω_ε функції $u(x)$ правильне зображення

$$u(z) = \int_{S_\varepsilon} \mu_\varepsilon(y_\varepsilon) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \omega(z, y_\varepsilon) dS + \frac{C_\varepsilon}{|z - x_0|}, \quad z \in \Omega, \quad (13)$$

де x_0 – довільна точка на S , μ_ε – розв’язок інтегрального рівняння

$$\frac{1}{2} \mu_\varepsilon(y_\varepsilon) + \int_{S_\varepsilon} \mu_\varepsilon(x_\varepsilon) \frac{\partial}{\partial \nu_{x_\varepsilon}} \omega(x_\varepsilon, y_\varepsilon) dS = u(y_\varepsilon) - \frac{C_\varepsilon}{|y_\varepsilon - x_0|},$$

$C_\varepsilon = \int_{S_\varepsilon} u \mu_\varepsilon^* dS$, μ_ε^* – розв’язок відповідного спряженого однорідного інтегрального рівняння такий, що $\int_{S_\varepsilon} \frac{\mu_\varepsilon^*(y)}{|y - x_0|} dS = 1$.

Запишемо розв’язок μ_ε (визначений однозначно з точністю до довільної адитивної сталої C) за допомогою резольвенти $\Gamma(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ ядра $\frac{\partial}{\partial \nu_{x_\varepsilon}} \omega(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$

$$\mu_\varepsilon(y_\varepsilon) = u_\varepsilon(y_\varepsilon) + \int_{S_\varepsilon} u_\varepsilon(x_\varepsilon) \Gamma(x_\varepsilon, y_\varepsilon) dS_{x_\varepsilon} + C, \quad \text{де } u_\varepsilon(y_\varepsilon) = u(y_\varepsilon) - \frac{C_\varepsilon}{|y_\varepsilon - x_0|},$$

і підставимо одержаний вираз у (13). Матимемо

$$\begin{aligned} u(z) &= \int_{S_\varepsilon} [u_\varepsilon(y_\varepsilon) + \int_{S_\varepsilon} u_\varepsilon(x_\varepsilon) \Gamma(x_\varepsilon, y_\varepsilon) dS_{x_\varepsilon}] \frac{\partial}{\partial \nu_{y_\varepsilon}} \omega(z, y_\varepsilon) dS_{y_\varepsilon} + \\ &\quad + C \int_{S_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu_{y_\varepsilon}} \omega(z, y_\varepsilon) dS_{y_\varepsilon} + \frac{C_\varepsilon}{|z - x_0|} = \\ &= \int_{S_\varepsilon} u_\varepsilon(x_\varepsilon) \frac{\partial}{\partial \nu_{x_\varepsilon}} \omega(z, x_\varepsilon) dS_{x_\varepsilon} + \int_{S_\varepsilon} u_\varepsilon(x_\varepsilon) \left(\int_{S_\varepsilon} \Gamma(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \frac{\partial}{\partial \nu_{y_\varepsilon}} \omega(z, y_\varepsilon) dS_{y_\varepsilon} \right) dS_{x_\varepsilon} + \frac{C_\varepsilon}{|z - x_0|} = \\ &= \int_{S_\varepsilon} u_\varepsilon(x_\varepsilon) \left[\frac{\partial}{\partial \nu_{x_\varepsilon}} \omega(z, x_\varepsilon) + \int_{S_\varepsilon} \Gamma(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \frac{\partial}{\partial \nu_{y_\varepsilon}} \omega(z, y_\varepsilon) dS_{y_\varepsilon} \right] dS_{x_\varepsilon} + \frac{C_\varepsilon}{|z - x_0|} = \\ &= \int_{S_\varepsilon} u(x_\varepsilon) \Phi_\varepsilon(x_\varepsilon, z) dS - C_\varepsilon \int_{S_\varepsilon} \frac{1}{|x_\varepsilon - x_0|} \Phi_\varepsilon(x_\varepsilon, z) dS + \frac{C_\varepsilon}{|z - x_0|}, \quad z \in \Omega, \end{aligned}$$

$$\text{де } \Phi_\varepsilon(x_\varepsilon, z) = \frac{\partial}{\partial \nu_{x_\varepsilon}} \omega(z, x_\varepsilon) + \int_{S_\varepsilon} \Gamma(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \frac{\partial}{\partial \nu_{y_\varepsilon}} \omega(z, y_\varepsilon) dS_{y_\varepsilon}, \quad z \in \Omega. \quad \text{Маємо}$$

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon(x_\varepsilon, z) = \frac{\partial}{\partial \nu_x} \omega(z, x_\varepsilon) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_+} \Gamma(x_\varepsilon, y + \varepsilon \nu(y)) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \omega(z, y + \varepsilon \nu(y)) W_{+\varepsilon}(y) dS +$
 $+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_-} \Gamma(x_\varepsilon, y - \varepsilon \nu(y)) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \omega(z, y - \varepsilon \nu(y)) W_{-\varepsilon}(y) dS$ ($\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_{0,\varepsilon}} \Gamma(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \omega(z, y_\varepsilon) dS_{y_\varepsilon} = 0$
 згідно з (8)). Тут $W_{\pm\varepsilon}(y)$ – якобіан перетворення $y_\varepsilon = y \pm \varepsilon \nu(y)$, $y \in S$, $W_{\pm\varepsilon}(y) \rightarrow 1$
 при $\varepsilon \rightarrow 0$.

За властивостями функцій Γ та ω для довільного $z \in \Omega$ існує

$$\Phi(x_\pm, z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon(x_\varepsilon, z), z \in \Omega, \Phi(\cdot, z) \in D(S_\pm).$$

Згідно з (12) існує

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_{\pm\varepsilon}} \Phi(x_\varepsilon, z) u(x_\varepsilon) dS = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\pm} \Phi(x, z) u(x \pm \varepsilon \nu(x)) W_\varepsilon(x) dS = 0. \text{ Тоді за лемою із}$$

[10] на с. 70 також існує

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_{\pm\varepsilon}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi(x_\varepsilon, z) u(x_\varepsilon) dS = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\pm} \Phi(x, z) u(x \pm \varepsilon \nu(x)) W_\varepsilon(x) dS = 0.$$

З тих самих міркувань за умови (3) існує

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} u \mu_\varepsilon^* dS = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_+} u(x + \varepsilon \nu(x)) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_\varepsilon^*(x + \varepsilon \nu(x)) W_{+\varepsilon}(x) dS +$$

$$+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_-} u(x - \varepsilon \nu(x)) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_\varepsilon^*(x - \varepsilon \nu(x)) W_{-\varepsilon}(x) dS = 0.$$

Отже,

$$u(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{S_+} \Phi(x, z) u(x + \varepsilon \nu(x)) W_{+\varepsilon}(x) dS + \int_{S_-} \Phi(x, z) u(x - \varepsilon \nu(x)) W_{-\varepsilon}(x) dS \right] = 0,$$

$z \in \Omega$, тобто $u_1(z) = u_2(z)$, $z \in \Omega$. Єдиність розв'язку доведена.

4. Характер поведінки розв'язку біля межі області. Дослідимо швидкість росту розв'язку при наближенні до поверхні S .

Нехай $\rho(x)$ – додатна нескінченно диференційована та фінітна в Ω функція, яка має порядок функцій $d_\pm(x) = \text{dist}(x, S_\pm)$ при $d_\pm(x) \rightarrow 0$, $x \in \Omega$, $\rho(x) = 0$ при $x \in \bar{S}$.

Теорема 3. Якщо $F_+ \in D'(S_+)$ та $F_- \in D'(S_-)$ – узагальнені функції, які мають порядки сингулярностей відповідно $s(F_+) \leq p_+$, $s(F_-) \leq p_-$, $p = \max\{p_+, p_-\}$, $u(x)$ – розв'язок задачі D , то існує таке число $k > -1 + p$, що

$$\int_{\Omega} \rho^k(x) |u(x)| dx < \infty. \quad (14)$$

Доведення. За теоремою про структуру узагальненої функції [7, с.92] існують такі додатні сталі $C_\pm$, що

$$|(\varphi, F_\pm)| \leq C_\pm \sum_{|\alpha| \leq p_\pm} \sup_{y \in S} |D^\alpha \varphi(y)| \quad \forall \varphi \in D(S_\pm).$$

Використовуючи зображення розв'язку задачі, матимемо

$$\int_{\Omega} \rho^k(x) u(x) dx = \int_{\Omega} \rho^k(x) \left(\frac{\partial \omega(x, y_+)}{\partial \nu_y}, R_+(y_+) \right) + \left(\frac{\partial \omega(x, y_-)}{\partial \nu_y}, R_-(y_-) \right) dx =$$

$$= \left(\int_{\Omega} \rho^k(x) \frac{\partial \omega(x, y_+)}{\partial \nu_y} dx, R_+(y_+) \right) + \left(\int_{\Omega} \rho^k(x) \frac{\partial \omega(x, y_-)}{\partial \nu_y} dx, R_-(y_-) \right) = (\varphi_+, F_+) + (\varphi_-, F_-),$$

де (φ_+, φ_-) – розв’язок системи інтегральних рівнянь (10) при $g_{\pm}(y_{\pm}) = \int_{\Omega} \rho^k(x) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \omega(x, y_{\pm}) dx$. За схемою доведення лема 1 можна показати, що $g_{\pm} \in D(S_{\pm})$.

Записуємо зображення розв’язку $(\varphi_{g_+}, \varphi_{g_-})$ через резольвенту її ядра та оцінюємо похідні інтегралів вигляду

$$\int_{S_{\pm}} \int_{\Omega} \rho^k(x) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \omega(x, z_{\pm}) dx \Gamma_{\pm}(z_{\pm}, y) dS = \int_{\Omega} \rho^k(x) \left(\int_{S_{\pm}} \frac{\partial}{\partial \nu_y} \omega(x, z_{\pm}) \Gamma_{\pm}(z_{\pm}, y) dS \right) dx,$$

де $\Gamma_{\pm}(x_{\pm}, y)$ – функції порядку компонент цієї резольвенти при $|x_{\pm} - y| \rightarrow 0$.

Оскільки $|D_y^{\alpha} \int_{S_{\pm}} \frac{\partial}{\partial \nu_y} \omega(x, z_{\pm}) \Gamma_{\pm}(z_{\pm}, y) dS| \leq C|x - y|^{-2-|\alpha|}$ при $|x - y| \leq 1$, то при $k - 2 - |\alpha| > -3$, тобто $k > -1 + |\alpha|$ для всіх $|\alpha| \leq p$, виконується (14).

5. Розв’язок узагальненої задачі Неймана. Розв’язок задачі N шукаємо у вигляді

$$u(x) = (\omega(x, y_+), R_+(y_+)) + (\omega(x, y_-), R_-(y_-)), \quad x \in \Omega, \quad (15)$$

де R_+, R_- – невідомі узагальнені функції відповідно з $D'(S_+), D'(S_-)$.

Функція u – гармонічна в Ω . Застосувавши формули крайових значень на поверхні S "зсередини" і "ззовні" для нормальної похідної потенціалу простого шару, подібно до випадку задачі D після підставлення функції (15) в крайові умови задачі отримуємо

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_{+\varepsilon}} \varphi_+(x_{+\varepsilon}) \frac{\partial}{\partial \nu_x} u(x_{+\varepsilon}) dS &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_{+\varepsilon}} \varphi_+(x_{+\varepsilon}) \left(\frac{\partial \omega(x_{+\varepsilon}, y_+)}{\partial \nu_x}, R_+(y_+) \right) + \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_{+\varepsilon}} \varphi_+(x_{+\varepsilon}) \left(\frac{\partial \omega(x_{+\varepsilon}, y_-)}{\partial \nu_x}, R_-(y_-) \right) dS = \\ &= \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_{+\varepsilon}} \varphi_+(x_{+\varepsilon}) \frac{\partial \omega(x_{+\varepsilon}, y_+)}{\partial \nu_x} dS, R_+(y_+) \right) + \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_{+\varepsilon}} \varphi_+(x_{+\varepsilon}) \frac{\partial \omega(x_{+\varepsilon}, y_-)}{\partial \nu_x} dS, R_-(y_-) \right) = \\ &= \left(\frac{1}{2} \varphi_+(y_+) + \int_{S_+} \varphi_+(x) \frac{\partial \omega(x, y_+)}{\partial \nu_x} dS, R_+(y_+) \right) + \left(\int_{S_+} \varphi_-(x) \frac{\partial \omega(x, y_-)}{\partial \nu_x} dS, R_-(y_-) \right) = \\ &= (\varphi_+(y_+), F_+(y_+)), \quad \varphi_+ \in D(S_+). \end{aligned}$$

Аналогічно

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_{-\varepsilon}} \varphi_-(x_{-\varepsilon}) \frac{\partial}{\partial \nu_x} u(x_{-\varepsilon}) dS &= \left(\int_{S_-} \varphi_-(x) \frac{\partial \omega(x, y_+)}{\partial \nu_x} dS, R_+(y_+) \right) + \\ &+ \left(-\frac{1}{2} \varphi_-(y_-) + \int_{S_-} \varphi_-(x) \frac{\partial \omega(x, y_-)}{\partial \nu_x} dS, R_-(y_-) \right) = (\varphi_-(y_-), F_-(y_-)), \quad \varphi_- \in D(S_-). \end{aligned}$$

Додавши ці рівності, матимемо

$$\left(\frac{1}{2} \varphi_+(y_+) + \int_{S_+} \varphi_+(x) \frac{\partial \omega(x, y_+)}{\partial \nu_x} dS + \int_{S_-} \varphi_-(x) \frac{\partial \omega(x, y_+)}{\partial \nu_x} dS, R_+(y_+) \right) -$$

$$- \left(-\frac{1}{2}\varphi_-(y_-) + \int_{S_-} \varphi_-(x) \frac{\partial \omega(x, y_-)}{\partial \nu_x} dS + \int_{S_+} \varphi_+(x) \frac{\partial \omega(x, y_-)}{\partial \nu_x} dS, R_-(y_-) \right) = \\ = (\varphi_+(y_+), F_+(y_+)) + (\varphi_-(y_-), F_-(y_-)),$$

тобто

$$\left(\frac{1}{2}\varphi_+(y_+) + \int_{S_+} \varphi_+(x) \frac{\partial \omega(x, y_+)}{\partial \nu_x} dS + \int_{S_-} \varphi_-(x) \frac{\partial \omega(x, y_+)}{\partial \nu_x} dS, R_+(y_+) \right) + \\ + \left(-\frac{1}{2}\varphi_-(y_-) + \int_{S_-} \varphi_-(x) \frac{\partial \omega(x, y_-)}{\partial \nu_x} dS + \int_{S_+} \varphi_+(x) \frac{\partial \omega(x, y_-)}{\partial \nu_x} dS, R_-(y_-) \right) = \\ = (\varphi_+(y_+), B_+(y_+)) + (\varphi_-(y_-), B_-(y_-)).$$

Далі, як при доведенні теорем 1, 2, одержуємо правильність таких результатів.

Теорема 4. Нехай $B_{\pm} \in D'(S_{\pm})$, узагальнені функції $R_{\pm} \in D'(S_{\pm})$ визначаються співвідношенням

$$(g_+(y_+), R_+(y_+)) + (g_-(y_-), R_-(y_-)) = (\varphi_{g_+}(y_+), F_+(y_+)) + (\varphi_{g_-}(y_-), F_-(y_-)), \quad (16)$$

де $g_+ \in D(S_+)$, $g_- \in D(S_-)$, а $(\varphi_{g_+}, \varphi_{g_-})$ – розв’язок системи інтегральних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\varphi_+(y_+) + \int_{S_+} \varphi_+(x) \frac{\partial \omega(x, y_+)}{\partial \nu_x} dS + \int_{S_-} \varphi_-(x) \frac{\partial \omega(x, y_+)}{\partial \nu_x} dS = g_+(y_+), \\ -\frac{1}{2}\varphi_-(y_-) + \int_{S_-} \varphi_-(x) \frac{\partial \omega(x, y_-)}{\partial \nu_x} dS + \int_{S_+} \varphi_+(x) \frac{\partial \omega(x, y_-)}{\partial \nu_x} dS = g_-(y_-). \end{cases} \quad (17)$$

Тоді функція (15) є єдиним розв’язком задачі N .

Зауважимо, що система інтегральних рівнянь (17) є такою самою, до якої зводиться задача Діріхле при неперервних даних $g_{\pm}$ на $S_{\pm}$, якщо її розв’язок шукати у вигляді $\int_{S_+} g_+(y) \omega(x, y) \frac{\partial \omega(x, y_-)}{\partial \nu_y} dS + \int_{S_-} g_-(y) \frac{\partial \omega(x, y_-)}{\partial \nu_y} \omega(x, y) dS$, $x \in \Omega$, і яка досліджена в [12]. Згідно з [12] та лемою 1 при довільних $g_{\pm} \in D(S_{\pm})$ система (17) має єдиний розв’язок $\varphi_{g_{\pm}} \in D(S_{\pm})$.

Теорема 5. Якщо $B_+ \in D'(S_+)$, $B_- \in D'(S_-)$, $s(B_+) \leq p_+$, $s(B_-) \leq p_-$, $p = \max\{p_+, p_-\}$, $u(x)$ – розв’язок задачі N , то при $k > p$ $\int_{\Omega} \rho^k(x) |u(x)| dx < +\infty$.

1. Лионс Ж.-Л. Неоднородные граничные задачи и их приложения. / Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. – М.: Мир, 1971. – 372 с.
2. Ройтберг Я.А. Эллиптические граничные задачи в обобщенных функциях. I-IV. / Ройтберг Я.А. – Чернигов: Изд-во Чернигов. пед. ин-та, 1990-1991.
3. Лопушанська Г.П. Крайові задачі у просторі узагальнених функцій D' . / Лопушанська Г.П. – Львів: видавництво ЛНУ ім. Івана Франка, 2002. – 285 с.

4. *Szmydt Z.* Sui problemi di Dirichlet e di Neumann con dati al contorno generalizzato / *Szmydt Z.* // Atti della Accadem. Naz. dei Lincl. – 1962. – Vol.32, №3. – P. 867-872.
5. *Хуснутдинова Н.В.* Об одной краевой задаче / *Хуснутдинова Н.В.* // Уч. зап. Казанского университета. – 1957. – Т. 177, №2. – С. 45-48.
6. *Гупало Г.С.* Про узагальнену задачу Діріхле / *Гупало Г.С.* // Доп. АН УРСР. – 1966. – №7. – С. 843-846.
7. *Гупало Г.С.* Про узагальнену задачу Неймана / *Гупало Г.С.* // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1967. – №3. – С. 199-201.
8. *Грушин В.В.* О поведении решений дифференциальных уравнений вблизи границы / *Грушин В.В.* // Докл. АН СССР. – 1964. – №158. – С. 264-267.
9. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. / *Владимиров В.С.* – М.: Наука, 1971. – 512 с.
10. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй спецкурс. / *Шилов Г.Е.* – М.: Наука, 1965. – 327 С.
11. *Егоров Ю.В.* Линейные дифференциальные уравнения главного типа / *Егоров Ю.В.* – М.: Наука, 1984. – 360 С.
12. *Мартиненко М.Д.* Про тривимірні гармонічні функції в областях зі "щілинами" / *Мартиненко М.Д., Мартиненко М.Д.* // Вісн. Львів. ун-ту. – 1971. – Вип. 5. – С. 3-6.

GENERALIZED DIRICHLET AND NEUMANN PROBLEMS FOR LAPLACE EQUATION IN DOMAINE WITH A "GAP"

Bohdan JOVNER, Maryana KOLESNICHENKO, Halyna LOPUSHANSKA

*Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1*

The unique solvability of Dirichlet and Neumann problems for Laplace equation in domaine with a "gap" and generalized functions given on the "gap" is established.

Key words: Laplace equation, generalized function, generalized boundary values, integral equations' system.

Стаття надійшла до редколегії 16.11.2007

Прийнята до друку 22.10.2008

УДК 512.552.12

РЕДУКЦІЯ МАТРИЦЬ НАД 3-ПРОСТОЮ ОБЛАСТЮ БЕЗУ

Богдан ЗАБАВСЬКИЙ*Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1*

Побудовано можливу діагональну редукцію матриць над 3-простою областю Безу.

Ключові слова: n -проста область Безу, редукція матриць, кільця Ерміта.

У праці [1] автор показав, що проста область Безу є областю елементарних дільників тоді і тільки, коли вона є 2-простою. У [2] описано результати, які показують можливу діагональну редукцію матриць над n -простою областю Безу. Мета нашої праці – показати можливу діагональну редукцію матриць над 3-простою областю Безу.

Введемо необхідні позначення і відомі факти. Під кільцем будемо розуміти асоціативне кільце $1 \neq 0$. Позначимо через R_n кільце $n \times n$ -матриць з елементами з кільця R , а через $GL_n(R)$ групу одиниць кільця R_n . Матриці A та B над кільцем R назвемо *еквівалентними*, якщо над R існують оборотні матриці P і Q відповідних розмірів такі, що $B = PAQ$. Нагадаємо, що кільце R є *правим (лівим) ермітовим*, якщо довільна $1 \times 2(2 \times 1)$ матриця над R еквівалентна діагональній матриці. *Кільце Ерміта* – це кільце, яке є правим і лівим ермітовим кільцем. *Кільце Безу* – це кільце, в якому довільний односторонній скінченнопороджений ідеал є головним. Зауважимо, що згідно з [3] область Безу є кільцем Ерміта і всяке кільце Ерміта є кільцем Безу.

Нехай R – просте кільце, тоді $RaR = R$ для довільного ненульового елемента $a \in R$. Звідси, оскільки $1 \in R$, то існують такі елементи $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n \in R$, що $u_1av_1 + \dots + u_nav_n = 1$. Якщо знайдеться таке натуральне число n , що для всіх ненульових елементів $a \in R$ виконується $u_1av_1 + \dots + u_nav_n = 1$, для деяких елементів $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n \in R$, і n є найменшим зі всіх можливих, тоді кільце R називається n -простим [2]. В [4] наведено різноманітні приклади n -простих кілець, які не є $n-1$ -простими. В праці [1] наведено цікавий результат, який стосується n -простих кілець.

Твердження 1. Якщо R – n - проста область, тоді для довільних ненульових елементів $a_1, \dots, a_n \in R$ існують такі елементи $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n \in R$, що $u_1 a_1 v_1 + u_2 a_2 v_2 + \dots + u_n a_n v_n = 1$.

Сформулюємо наш головний результат, що стосується 3-простих областей Безу.

Теорема 1. Довільна матриця $A \in R_n$ $n > 3$ над 3-простою областю Безу еквівалентна матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & & & \\ 0 & 1 & \dots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & & & \\ & & & & A_1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & A_k \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

де $A_1, \dots, A_k$ – деякі трикутні матриці порядку 2.

Доведення. Доведення проведемо за числом n . Нехай A – довільна матриця порядку 3. Оскільки область Безу є ермітовим кільцем [3], то з точністю до еквівалентності матриць можна вважати, що матриця A має вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Можливі випадки.

1. Нехай $a_{11} = 0$, тобто матриця A з точністю до еквівалентності матриць має вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Розглянемо матрицю

$$A' = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Оскільки R – кільце Ерміта [3], тоді для матриці A' існує матриця $Q' \in GL_2(R)$ така, що

$$A'Q' = \begin{pmatrix} a'_{21} & 0 \\ a'_{31} & a'_{32} \end{pmatrix}$$

для деяких елементів $a'_{21}, a'_{31}, a'_{32} \in R$. Тоді

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a'_{21} & 0 & 0 \\ a'_{31} & a'_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що

$$\begin{pmatrix} Q' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(R).$$

Тобто з точністю до еквівалентності матриць ми можемо вважати, що матриця A має вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a'_{21} & 0 & 0 \\ a'_{31} & a'_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Згідно з ермітовістю кільця R для рядка $(a'_{32} \ a_{33})$ існує матриця $Q'' \in GL_2(R)$ така, що з

$$(a_{32} \ a_{33}) Q'' = (a''_{32} \ 0)$$

для деякого елемента $a''_{32} \in R$. Тоді

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a'_{21} & 0 & 0 \\ a'_{31} & a'_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & Q'' & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a'_{21} & 0 & 0 \\ a'_{31} & a''_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & Q'' & \end{pmatrix} \in GL_3(R).$$

Тобто з точністю до еквівалентності матриць ми можемо вважати, що матриця A має вигляд

$$\begin{pmatrix} a'_{21} & 0 & 0 \\ a'_{31} & a''_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

що й доводить наше твердження.

2. Нехай $a_{22} = 0$, тобто матриця A з точністю до еквівалентності матриць має вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Оскільки R – кільце Ерміта, тоді для рядка $(a_{32} \ a_{33})$ існує матриця $Q' \in GL_2(R)$ така, що

$$(a_{32} \ a_{33}) Q' = (a'_{32} \ 0)$$

для деякого елемента $a'_{32} \in R$. Тоді

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & Q' & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a'_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & Q' \end{pmatrix} \in GL_3(R),$$

тобто з точністю до еквівалентності матриць, можемо вважати, що матриця A має вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a'_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки R ермітове кільце, то для стовпчика $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ існує така оборотна матриця $P' \in GL_2(R)$, що

$$P' \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a'_{21} \end{pmatrix}$$

для деякого елемента $a'_{21} \in R$. Тоді

$$\begin{pmatrix} P' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a'_{32} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a'_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a'_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що

$$\begin{pmatrix} P' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(R),$$

тобто з точністю до еквівалентності матриць можемо вважати, що матриця A має вигляд

$$\begin{pmatrix} a'_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a'_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

що й доводить твердження.

3. Нехай $a_{33} = 0$, тобто з точністю до еквівалентності матриць матриця A має вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки R – ермітове кільце, то для стовпчика $\begin{pmatrix} a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$ існує оборотна матриця $P' \in GL_2(R)$ така, що

$$P' \begin{pmatrix} a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a'_{32} \end{pmatrix}$$

для деякого елемента $a'_{32} \in R$. Тоді

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & P' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a'_{21} & 0 & 0 \\ a'_{31} & a'_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

для деяких елементів $a'_{21}, a'_{31}, a'_{32} \in R$. Зауважимо, що

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & P' \end{pmatrix} \in GL_3(R),$$

тобто з точністю до еквівалентності матриць можемо вважати, що матриця A має вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a'_{21} & 0 & 0 \\ a'_{31} & a'_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

Завдяки міркуванням з пункту 2 отримаємо, що матриця A еквівалентна шуканій матриці.

4. Нехай (з точністю до еквівалентності) матриця A має вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

де $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0, a_{33} \neq 0$. Покажемо, що тоді існує матриця $T \in R_3$ така, що

$$AT = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix},$$

для деяких ненульових елементів $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in R$. Нехай $a_{21} \neq 0$, тоді згідно з тим, що область Безу є областю Оре [5], для елементів $a_{21}, a_{22} \in R$ існують ненульові елементи $x, y \in R$ такі, що $a_{21}x = -a_{22}y$. Тоді

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

де $a'_{31} = a_{31}x + a_{32}y$.

Очевидно, що $a_{11}x \neq 0$. Отже, випадок $a'_{21} \neq 0$ зводиться до випадку, коли $a_{21} = 0$. Тобто, ми можемо вважати, що для матриці A існує матриця $T_1 \in R_3$ така, що

$$AT_1 = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},$$

де $b_{11} \neq 0, b_{22} \neq 0, b_{33} \neq 0$. Якщо $b_{31} \neq 0$, тоді, аналогічно, існують ненульові елементи $r, s \in R$ такі, що $b_{31}r = -b_{33}s$. Тоді

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}r & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що $b_{11}r \neq 0$. Отож, ми можемо вважати, що для матриці AT_1 існує матриця $T_2 \in R_3$ така, що

$$AT_1T_2 = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix},$$

де $c_{11} \neq 0, c_{22} \neq 0, c_{33} \neq 0$. Якщо $c_{32} \neq 0$, то аналогічно існують ненульові елементи $k, t \in R$, що $c_{32}k = -c_{33}t$. Тоді

$$\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22}k & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що $c_{22}k \neq 0$. Тобто, ми довели, що для матриці A існує матриця $T \in R_3$ така, що

$$AT = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix},$$

для деяких ненульових елементів $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in R$. Позаяк область R є 3-простою, то згідно з твердженням 1, існують елементи $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 \in R$ такі, що

$$u_1\varepsilon_1v_1 + u_2\varepsilon_2v_2 + u_3\varepsilon_3v_3 = 1.$$

Тоді

$$(u_1 \quad u_2 \quad u_3) \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 1. \quad (1)$$

Звідси

$$(u_1 \quad u_2 \quad u_3) AT \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 1.$$

Нехай $T \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ для деяких елементів $w_1, w_2, w_3 \in R$. З рівності 1 випливає, що

$$u_1R + u_2R + u_3R = R,$$

$$Rw_1 + Rw_2 + Rw_3 = R.$$

Оскільки R – кільце Ерміта, то згідно з [6] рядок $(u_1 \quad u_2 \quad u_3)$ і стовпчик $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ можна доповнити до оборотних матриць $U, W \in GL_3(R)$ відповідно. Тоді

$$UAW = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що матрицю UAW елементарними перетвореннями можна привести до вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & A' \end{pmatrix}.$$

Оскільки R – кільце Ерміта, то A' з точністю до еквівалентності матриць можна вважати верхньою трикутною матрицею.

Індукція по числу n завершує доведення.

-
1. *Забавський Б.В.* Простые кольца элементарных делителей. / *Забавський Б.В.* // Математичні студії. – 2004. – Т. 22, №2. – С. 219-221.
 2. *Zabavsky B.V.* Almost diagonal matrices over n -simple Bezout domains / *Zabavsky B.V.* // Groups and group rings XI, Bedlewo, Poland, June 4-11, 2005. – P. 22.
 3. *Kaplansky I.* Elementary divisors and modules / *Kaplansky I.* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – Vol. 66. – P. 464-491.
 4. *Olszenski J.* On ideals of products of rings / *Olszenski J.* // Demonstrativ mathematica. – 1994. – Vol. 1 – P. 1-7.
 5. *Stenstrom Bo.* Rings of quotients / *Stenstrom Bo.* // Berlin; New-York: Springer-Verlag, 1971. – 309 p.
 6. *Zabavsky B.V.* Diagonalization of matrices over ring with finite stable rank / *Zabavsky B.V.* // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2003. – Вип. 61. – С. 206-210.

REDUCTION OF MATRICES OVER 3-SIMPLE BEZOUT DOMAIN

Bohdan ZABAVSKY

*Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1*

It is proved the possibility of an almost diagonal reduction of matrices over 3-simple Bezout domain.

Key words: n -simple Bezout domain, Hermite ring, reduction of matrices.

Стаття надійшла до редколегії 04.10.2006

Прийнята до друку 22.10.2008

УДК УДК 512.552.12

ПРАВИ КІЛЬЦЯ БЕЗУ, В ЯКИХ РАДИКАЛ ДЖЕКОБСОНА Є ЦІЛКОМ ПРОСТИМ

Богдан ЗАБАВСЬКИЙ¹, Тетяна КИСІЛЬ²

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1

¹e-mail: b_zabava@franko.lviv.ua

²e-mail: kysil_tanya@mail.ru

Доведено, що праве кільце Безу, в якому радикал Джекобсона є цілком простим, є правим ермітовим кільцем.

Ключові слова: кільце Безу, ермітове кільце, радикал Джекобсона, цілком простий ідеал.

В [1] доводиться, що комутативне кільце Безу, в якому радикал Джекобсона є простим ідеалом, є кільцем Ерміта. В цій праці аналогічний результат поширюється на випадок некомутативних кілець, зокрема показано, що праве кільце Безу, в якому радикал Джекобсона цілком простий, є правим кільцем Ерміта.

Наведемо необхідні означення та факти. Під кільцем R розуміємо асоціативне кільце з $1 \neq 0$. Скажемо, що кільце R є правим кільцем Ерміта, якщо для довільних елементів $a, b \in R$ існують елемент $d \in R$ та зворотна матриця P такі, що $(a, b)P = (d, 0)$. Праве кільце Безу – це кільце R , в якому довільний скінченнопо-роджений правий ідеал є головним правим ідеалом [2]. Ідеал I кільця R називається цілком простим, якщо R/I – кільце без дільників нуля. Рядок $(a_1, \dots, a_n)$ називається унімодулярним, якщо $a_1R + \dots + a_nR = R$. Позначимо через $J(R)$ радикал Джекобсона, а через $GL_n(R)$ повну лінійну групу кільця R .

Теорема 1. *Нехай R – праве кільце Безу. Якщо в кільці R радикал Джекобсона $J(R)$ є цілком простим, тоді R – праве кільце Ерміта.*

Доведення. Зауважимо, якщо $J(R) = \{0\}$, то з умови теореми випливає, що кільце R є кільцем без дільників нуля, тому згідно з [4], є правим кільцем Ерміта. Якщо ж $J(R) \neq \{0\}$, то з обмежень, накладених на кільце R , фактор-кільце $R/J(R)$ є кільцем без дільників нуля, а отже – правим кільцем Ерміта [4].

Спочатку покажемо, що довільний унімодулярний рядок над кільцем R може бути доповнений до зворотної матриці.

Нехай $\overline{R} = R/J(R)$ і $aR + bR = R$. Тоді $\overline{aR} + \overline{bR} = \overline{R}$. Оскільки $\overline{R}$ праве кільце Ерміта, то згідно з [3], [5] рядок $(\overline{a}, \overline{b})$ над кільцем $\overline{R}$ можна доповнити до зворотної матриці

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{u} & \overline{v} \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\overline{AC} = \overline{CA} = \overline{I}, \quad (1)$$

де $\overline{I}$ – одинична матриця над кільцем $\overline{R}$, а $\overline{C} = \begin{pmatrix} \overline{c} & \overline{x} \\ \overline{d} & \overline{y} \end{pmatrix}$ – деяка матриця.

Тоді згідно з (1) маємо $ac + bd = 1 + j_1$, $ax + by = j_2$, $uc + zd = j_3$, $ux + zy = 1 + j_4$, для деяких елементів $j_1, j_2, j_3, j_4 \in J(R)$.

Прийmemo $A = \begin{pmatrix} a & b \\ u & z \end{pmatrix}$ та $C = \begin{pmatrix} c & x \\ d & y \end{pmatrix}$. Тоді

$$AC = \begin{pmatrix} 1 + j_1 & j_2 \\ j_3 & 1 + j_4 \end{pmatrix} = J,$$

де $1 + j_1 = u_1$, $1 + j_4 = u_4$ – зворотні елементи кільця R , згідно з властивостями радикала Джекобсона. Доведемо, що для матриці $J = AC$ існує така матриця W , що $JW = WJ = I$ – одинична матриця над R .

Розглянемо

$$\begin{pmatrix} u_1 & j_2 \\ j_3 & u_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{-1} & 0 \\ 0 & u_4^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & j'_2 \\ j'_3 & 1 \end{pmatrix},$$

де, очевидно, $j'_2, j'_3 \in J(R)$. Тоді

$$\begin{pmatrix} 1 & j'_2 \\ j'_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -j_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j'_3 & 1 + j \end{pmatrix},$$

для деякого елемента $j \in J(R)$. Звідси

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j'_3 & 1 + j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1 + j)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j'_3 & 1 \end{pmatrix}$$

та $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j'_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -j'_3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тобто, для матриці J ми знайшли матрицю $W \in GL_2(R)$ таку, що $JW = I$ – одинична матриця.

Аналогічно доводиться, що $SJ = I$ для деякої матриці $S \in GL_2(R)$. Отож, ми довели, що $AC = J$ – зворотна матриця. Звідси $ACJ^{-1} = I$. Аналогічно доводиться, що і матриця $CA = V$ – зворотна. Тоді $V^{-1}CA = I$. Отже, матриця A – зворотна.

Доведемо, що R – праве кільце Ерміта. Нехай a, b – довільні елементи кільця R . Оскільки R – праве кільце Безу, то

$$aR + bR = R$$

для деякого елемента $d \in R$. Нехай $a = da_0$, $b = db_0$ та $d = au + bv$ для деяких елементів $a_0, b_0, u, v \in R$. Звідси $d(a_0u + b_0v - 1) = 0$ та $a_0R + b_0R + c_0R = R$, для деякого елемента $c_0 \in R$ такого, що $dc_0 = 0$. Оскільки $\overline{R}$ праве кільце Ерміта,

то згідно з [3], [5] стабільний ранг $\overline{R}$ не перевищує 2. З [5] стабільний ранг R не перевищує 2 також. Тоді $(a_0 + c_0x)R + (b_0 + c_0y)R = R$ для деяких елементів $x, y \in R$. Враховуючи доведене вище, існує зворотна матриця P вигляду

$$P = \begin{pmatrix} a_0 + c_0x & b_0 + c_0y \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що $(d, 0)P = (a, b)$, а звідси $(a, b)P^{-1} = (d, 0)$, тобто R є правим ермітовим кільцем. Теорему доведено.

Як наслідок, для випадку комутативних кілець отримуємо відомий результат праці [1].

Теорема 2. *Комутативне кільце Безу, в якому радикал Джекобсона є простим ідеалом, є кільцем Ерміта.*

-
1. *Larsen M.* Elementary divisors rings and finitely presented modules / *Larsen M., Lewis W., Shores T.* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – Vol. 187. – P. 231-248.
 2. *Kaplansky I.* Elementary divisors and modules / *Kaplansky I.* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – Vol. 66. – P. 464-491.
 3. *Zabavsky B.V.* Diagonalization of matrices over ring with finite stable rank / *Zabavsky B.V.* // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2003. – Вип. 61. – С. 206-211.
 4. *Amitsur S.A.* Remarks of principal ideal rings / *Amitsur S.A.* // Osaka Math. Journ. – 1963. – Vol. 15. – P. 59-69.
 5. *Zabavsky B.V.* Diagonalizability theorems for matrices over rings with finite stable range / *Zabavsky B.V.* // Alg. and Discr. Math. – 2005. – №1. – P.134-148.

THE RIGHT BEZOUT RING WITH COMPLETELY PRIME JAKOBSON RADICAL

Bohdan ZABAVSKY¹, Tetyana KISIL²

*Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytetska str., 1*

¹*e-mail: b_zabava@franko.lviv.ua*

²*e-mail: kysil_tanya@mail.ru*

It is proved, that the right Bezout ring with completely prime Jakobson radical is the right Hermit ring.

Key words: Bezout ring, Hermit ring, Jakobson radical, completely prime ideal.

Стаття надійшла до редколегії 27.04.2007

Прийнята до друку 22.10.2008

УДК 515.553

СКІНЧЕННІ ЗА ДЕДЕКІНДОМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ КІЛЬЦЯ І МОДУЛІ ТА ЇХНІЙ ПЕРВИННИЙ РАДИКАЛ

Григорій КАШУБА, Микола КОМАРНИЦЬКИЙ

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1*

Досліджено скінченні за Дедекіндом диференціальні кільця та модулі. Отримано характеристики скінченності за Дедекіндом диференціальних модулів аналогічні до тих, які відомі для звичайних модулів.

Ключові слова: диференціальний модуль, диференціальне кільце, дедекіндово-скінченна множина, первинний диференціальний модуль.

1. Поняття скінченної за Дедекіндом множини є цікавим об'єктом дослідження в теорії множин [6]. Природно, що властивість скінченності за Дедекіндом привертає увагу дослідників, які працюють з іншими категоріями. Скінченні за Дедекіндом кільця систематично вивчав Лері в [1]. Він визначив необхідні та достатні умови скінченності за Дедекіндом асоціативних кілець з одиницею, розглянув також напівпрості модулі, які є скінченними за Дедекіндом. Окремий пункт цієї праці присвячено абелевим групам, які є скінченними за Дедекіндом. Скінченні за Дедекіндом та ультраскінченні об'єкти в елементарних топосах досліджували Стут [2], Окуна-Ортега [3] та ін. Скінченним за Дедекіндом регулярним та одинично регулярним кільцям присвячено окремий розділ відомої монографії Гудерла "Регулярні кільця" [4]. Скінченні за Дедекіндом кільця фігурують під назвою прямоскінченних. Гудерл розглядав умови скінченності за Дедекіндом регулярних і одинично-регулярних кілець та досліджував скінченно-породжені проективні модулі над ними. Зокрема виявлено, що в цій ситуації такі модулі поведуть себе не зовсім традиційно.

Ми започатковуємо дослідження скінченних за Дедекіндом диференціальних кілець і диференціальних модулів над ними. Зазначимо, що задача описання скінченних за Дедекіндом диференціальних кілець еквівалентна задачі описання тих диференціальних кілець, кільця лінійних диференціальних операторів над якими є скінченними за Дедекіндом як звичайні кільця. Взаємозв'язки між властивостями диференціального кільця коефіцієнтів і його кільця лінійних диференціальних операторів далеко не очевидні та зрозумілі лише в дуже примітивних випадках, тому отримати результати про диференціальні скінченні за Дедекіндом кільця з

результатів Лері (як наслідки) набагато важче, ніж застосувати відомі міркування до випадку диференціальних кілець. У зв'язку з цим ці розгляди, на нашу думку, мають право на існування. Водночас враховуватимемо відомий факт природної ізоморфності категорії лівих диференціальних модулів над диференціальним кільцем і категорії лівих модулів над кільцем лінійних диференціальних операторів з коефіцієнтами з цього диференціального кільця. Завдяки цьому ізоморфізмові деякі твердження про диференціальні модулі є тривіальними наслідками властивостей звичайних модулів і у таких випадках, коли ця ситуація є, ми не будемо проводити ніяких міркувань, що імітують доведення такого типу.

2. Попередні відомості. Всі розглядувані кільця припускати асоціативними з одиницею, а всі модулі лівими й унітарними. Диференціальні кільця і модулі здебільшого будуть одинарними. Домовимось, що символ $\mathbb{N}$ позначає невід'ємні цілі числа.

Нехай R – диференціальне кільце з диференціюванням $\delta : R \rightarrow R$ (скорочено δ -кільце). Тоді лівий R -модуль M називається диференціальним модулем (скорочено d -модулем), якщо на ньому задано деяке d -диференціювання. Тут під δ -диференціюванням розуміємо таке відображення $d : M \rightarrow M$, що для довільних елементів $m, m_1, m_2 \in M$, $r \in R$ виконуються рівності $d(m_1 + m_2) = d(m_1) + d(m_2)$ і $d(r \cdot m) = \delta(r) \cdot m + r \cdot d(m)$. Елементи $\delta(a), \delta^2(a), \dots, \delta^n(a), \dots$ кільця R скорочено позначатимемо через $a', a'', \dots, a^{(n)}, \dots$. Домовимось також позначати через $(\delta(a))^{(0)}$ тотожний оператор на кільці R . Зокрема $(\delta)^{(0)}(a) = a$ і $(a)^{(0)} = a$. Аналогічні позначення вживатимемо також і у випадку елемента m модуля M . Елемент m модуля M називається константою, якщо $d(m) = 0$. Диференціальним гомоморфізмом між диференціальними модулями M_1 і M_2 зі структурними диференціюваннями d_1 і d_2 відповідно називаємо таке відображення $f : M_1 \rightarrow M_2$, для якого виконуються умови: $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$, $f(d_1(m)) = d_2(f(m))$, де $m_1, m_2 \in M_1, f(m_1), f(m_2) \in M_2$. Диференціальним ендоморфізмом модуля M називається диференціальний гомоморфізм $f : M \rightarrow M$. Категорію всіх лівих диференціальних R -модулів і всіх диференціальних гомоморфізмів позначатимемо через $R - Dmod$.

Об'єкт A деякої категорії називається скінченним за Дедекіндом, якщо в ній кожний мономорфізм $f : A \rightarrow A$ є автоморфізмом. Називатимемо кільце R скінченним за Дедекіндом, коли воно є скінченним за Дедекіндом як лівий регулярний R -модуль.

Комутативне кільце, в якому кожний регулярний елемент є зворотним, називається кільцем дробів.

Непорожню множину $S \subseteq R$ називають dm -системою, якщо для довільних $a, b \in S$ існують такі $n \in \mathbb{N}$ і $r \in R$, що $arb^{(n)} \in S$.

Кажуть, що множина $S \subseteq R$ є dn -системою, якщо для всіх $a \in S$ існують $n \in \mathbb{N}$ і $r \in R$ такі, що $ara^{(n)} \in S$.

Для будь-якого елемента $m \in M$ можна розглядати d -підмодуль $[m] = Rm + Rm' + Rm'' + \dots \subseteq M$. Цей d -підмодуль називатимемо диференціально-циклічним підмодулем модуля M . Зрозуміло, що $[m]$ є найменшим диференціальним підмодулем в M , серед тих, які містять елемент m . Аналогічно, найменший диференціальний підмодуль d -модуля M , серед усіх тих, що містять задану підмножину X ,

називається диференціальним підмодулем, породженим множиною елементів X і позначається $[X]$. Зокрема, $[m_1, m_2, \dots, m_n]$ є диференціальним модулем зі скінченною множиною диференціальних твірних $m_1, m_2, \dots, m_n$.

Під d -нільпотентним елементом розуміємо такий елемент x d -кільця R , для якого виконується рівність $[x]^n = 0$ для деякого $n \in \mathbb{N}$. Позначимо через N_d^0 множину d -нільпотентних елементів d -кільця R . Надалі, у випадку комутативного диференціального кільця, називатимемо диференціальний ідеал N_d^0 його диференціальним нільрадикалом.

3. Скінченні за Дедекіндом диференціальні кільця та модулі. Відомо, що кожний модульний гомоморфізм $f : R \rightarrow R$ асоціативного кільця R з одиницею, є множенням справа на фіксований елемент $f(1) = a \in R$, тобто для всіх елементів r кільця R маємо $f(r) = r \cdot a$. По-іншому можна сказати, що кожний ендоморфізм з R в R є гомотетією. Аналогічна властивість для диференціальних гомоморфізмів зводить всі диференціальні ендоморфізми диференціального кільця R з одиницею до гомотетій з коефіцієнтами, які є константами.

Сформулюємо перший результат.

Теорема 1. *Асоціативне диференціальне кільце R з одиницею є скінченним за Дедекіндом тоді і тільки тоді, коли кожна регулярна константа a з R є зворотною.*

Доведення. Нехай $f : R \rightarrow R$ – диференціальний модульний ендоморфізм кільця R . Тоді $f(1) = a = \text{const}$. Це означає, що $DH\text{om}_R(R, R) \cong \text{Const}(R)$, де $DH\text{om}_R(-, -)$ – диференціальний Ном-функтор, Const – множина констант кільця R . Тоді f буде ізоморфізмом тоді і тільки тоді, коли a є зворотним.

Це твердження в комутативному випадку можна сформулювати так: диференціальне комутативне кільце R є скінченним за Дедекіндом тоді і тільки тоді, коли його кільце констант є кільцем дробів.

Наступні теореми доводимо аналогічно до відповідних теорем для звичайних скінченних за Дедекіндом модулів.

Теорема 2. *Нехай M – скінченний за Дедекіндом об'єкт у категорії лівих диференціальних R -модулів, який розкладається в пряму суму (добуток) сім'ї $\{M_i\}_{i \in I}$ нетривіальних диференціальних R -підмодулів. Тоді кожний M_i є скінченним за Дедекіндом у диференціальному сенсі.*

Доведення. Нехай при деякому $j \in I$ M_j не є скінченним за Дедекіндом у диференціальному сенсі. Тоді існує ін'єктивний диференціальний гомоморфізм $f_j : M_j \rightarrow M_j$, який не є диференціальним ізоморфізмом. Нехай $f_i = 1_{M_i}$ для кожного $i \in I, i \neq j$. Тоді $\bigoplus_i f_i (\prod_i f_i)$ є ін'єктивним R -модульним диференціальним ендоморфізмом, який не є диференціальним ізоморфізмом. Це суперечить тому, що M є скінченним за Дедекіндом у диференціальному сенсі.

Теорема 3. *Нехай $\{M_i\}_{i \in I}$ – сім'я нетривіальних диференціальних R -модулів. Припустимо, що $DH\text{om}(M_i, M_j) = DH\text{om}(M_j, M_i) = \{0\}$, де $i \neq j$. Якщо M_i скінченні за Дедекіндом як диференціальні модулі, то і пряма сума (добуток) всіх M_i також буде скінченним за Дедекіндом диференціальним модулем.*

Доведення. Нехай $M = \bigoplus M_i$. Якщо $f : M \rightarrow M$ є R -модульним диференціальним ендоморфізмом модуля M , то наше припущення гарантує "діагоналізацію" f як $\bigoplus f_i$, де f_i – R -модульний диференціальний ендоморфізм, отриманий обмеженням f на M_i . Якщо f ін'єктивний, то кожний f_i буде ін'єктивним. Оскільки всі M_i скінченні за Дедекіндом, то всі f_i будуть ізоморфізмами. Тому M є скінченним за Дедекіндом. Випадок прямого добутку доводиться аналогічно.

Теорема 4. *Кожний гомоморфний образ скінченного за Дедекіндом диференціального модуля стосовно довільного диференціального гомоморфізму є скінченним за Дедекіндом як диференціальний модуль.*

Доведення. Нехай $f : M_1 \rightarrow M_2$ – довільний диференціальний гомоморфізм між диференціальними модулями M_1 і M_2 . Припустимо, що $g : M_1 \rightarrow M_1$ – довільний диференціальний ендоморфізм d -модуля M_1 . Тоді існує ендоморфізм h d -модуля M_2 , який робить цю діаграму комутативною

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \\ g \downarrow & & \downarrow h \\ M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \end{array}$$

Оскільки диференціальний ендоморфізм $g : M_1 \rightarrow M_1$ є атоморфізмом (бо M_1 скінченний за Дедекіндом), то і ендоморфізм $h : M_2 \rightarrow M_2$ теж є диференціальним атоморфізмом. Отже, M_2 буде скінченним за Дедекіндом як диференціальний модуль.

4. Первинні диференціальні модулі. Нехай M – лівий диференціальний модуль над диференціальним кільцем R з одиницею.

Ненульовий d -модуль M називається диференціально простим (скорочено d -простим), якщо він не має жодних диференціальних підмодулів, крім M і 0 .

Ідеал M називатимемо d -максимальним тоді і тільки тоді, коли R/M є d -простим модулем. Наступне твердження є очевидним.

Твердження 1. *Модуль M є d -простим тоді і тільки тоді, коли для кожного ненульового елемента $m \in M$ виконується рівність $[m] = M$.*

Нехай $L \subseteq M$ – підмножина d -модуля M . Позначимо через $DAnn_R L$ лівий диференціальний ідеал $\{a \in R \mid a \cdot l^{(k)} = 0, \forall l \in L, \forall k \in \mathbb{N}\}$. Цей диференціальний ідеал називається диференціальним лівим анулятором підмножини L .

Модуль M називається диференціально первинним (d -первинним), якщо для будь-якого ненульового диференціального підмодуля N в M виконується рівність: $DAnn_R N = DAnn_R M$. Кажуть, що d -підмодуль N є диференціально первинним підмодулем d -модуля M , якщо M/N є d -первинним d -модулем.

Зауважимо, що d -підмодуль N d -модуля M є d -первинним тоді і тільки тоді, коли для будь-яких $r \in R$ і $m \in M$ з того, що $r \cdot m \in N$ випливає таке: або $[r]M \subseteq N$, або $m \in N$.

Позначимо через $r_d(N)$ – перетин всіх d -первинних підмодулів модуля M , які містять N . Отриманий d -підмодуль $r_d(N)$ називатимемо d -первинним радикалом підмодуля N [5].

Назвемо диференціально первинний радикал нульового підмодуля d -первинним радикалом всього d -модуля M . Цей d -первинний радикал позначатимемо через $r_d(M)$. Якщо модуль не містить первинних підмодулів, то вважаємо, що $r_d(M) = M$.

Твердження 2. *Кожний d -скінченно-породжений d -модуль M над d -кільцем з одиницею ($1 \neq 0$) має принаймні один максимальний диференціальний підмодуль.*

Доведення. Нехай $L_d(R)$ – множина всіх d -підмодулів d -модуля M , частково впорядкована за включенням. Якщо F – цілком впорядкована підмножина в $L_d(R)$, то нехай $\overline{N}$ – сума всіх $N \in F$. Якщо покажемо, що $\overline{N} \neq M$, то $\overline{N}$ – верхня грань F в $L_d(R)$ і можна застосувати лему Цорна для знаходження максимального d -підмодуля d -модуля M . Якщо $\overline{N} = M$, то $\overline{N}$ містить скінченно-породжуючу множину $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ для d -модуля M . Кожний x_i лежить у d -модулі, який належить до F . Тому $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq N$ для деякого $N \in F$. Звідси випливає, що $N = M$. Отримана суперечність доводить те, що $\overline{N} \neq M$.

Твердження 3. *Нехай N – d -підмодуль d -модуля M , причому $N \neq M$. Тоді перелічені твердження еквівалентні:*

- 1) N – d -первинний d -підмодуль;
- 2) для будь-яких $a \in R$ і $m \in M$ з умови $[a] \cdot [m] \subseteq N$ випливає таке: або $m \in N$, або $[a]M \subseteq N$;
- 3) для будь-яких $a \in R$ і $m \in M$ з того, що включення $(a^{(k)}R)m^{(n)} \subseteq N$ виконується при всіх $k, n \in \mathbb{N}$, випливає, що $m \in N$ або $[a]M \subseteq N$;
- 4) для будь-яких $a \in R$, $m \in M$ і $n \in \mathbb{N}$ з умови $(aR)m^{(n)} \subseteq N$ випливає, що $m \in N$ або $[a]M \subseteq N$.

Доведення. Імплікація (1) $\implies$ (2) випливає з означення d -первинного d -підмодуля. Доведемо, що (2) $\implies$ (1). Припустимо, що N задовольняє твердження (2), і нехай $A \subset R$, $B \in L_d(R)$, $A \cdot B \subseteq N$. Якщо $A \not\subseteq N$ і $B \not\subseteq N$, то існують $a \in A$ і $b \in B$ такі, що $a \notin R$ і $b \notin N$. Отже, $[a] \cdot [b] \subseteq A \cdot B \subseteq N$. Це суперечність. Отож, (2) $\implies$ (1) і (1) $\implies$ (2).

Позначимо через $\sum$ – супремум всіх d -підмодулів d -модуля M . Доведемо, що (2) $\implies$ (3). З рівностей

$$[a] = \sum_{k \in \mathbb{N}} Ra^{(k)}R, \quad [m] = \sum_{n \in \mathbb{N}} Rm^{(n)}R$$

отримуємо, що

$$[a] \cdot [m] = \sum_{k, n \in \mathbb{N}} Ra^{(k)}Rm^{(n)}R.$$

Отже, (2) $\iff$ (3).

Якщо в (3) прийняти $k = 0$, то отримаємо імплікацію (3) $\implies$ (4).

Припустимо, що $(aR)m^{(n)} \subseteq N$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Доведемо, що $(a^{(k)}R)m^{(n)} \subseteq N$ для всіх $k, n \in \mathbb{N}$.

Приймемо $l = k + n$. Якщо $l = 0$, то $(aR)m = (a^{(0)}R)m^{(0)} \subseteq N$. Звідси $((aR)m)^{(1)}m \subseteq N$ і $(a^{(1)}R)m = ((aR)m)^{(1)} - (aR)m^{(1)}m \subseteq N$.

Припустимо, що $(a^{(k)}R)m^{(n)} \subseteq N$ для всіх $k, n \in \mathbb{N}$, $k + n < l$. Тоді

$$(a^{(1)}R)m^{(l)} = ((aR)m^{(l)})^{(1)} - (aR)m^{(l+1)} - (aR)^{(1)}m^{(l)} \subseteq N.$$

Далі $(a^{(2)}R)m^{(l-1)} = ((a^{(1)}R)m^{(l-1)})^{(1)} - (a^{(1)}R)m^{(l-1)}$ і т. д. Тоді (4) $\implies$ (3).

dm -Система, асоційована з d -первинним d -підмодулем N d -модуля M , це dm -система d -первинного ідеала $DAnn_R N$.

Твердження 4. Для будь-якого d -підмодуля N d -модуля M перелічені множини рівні.

1. Перетин всіх d -первинних d -підмодулів модуля M , які містять N .
2. Множина тих $r \in R$, що кожна dm -система S , яка містить r , має ненульовий переріз з N .

Доведення. Позначимо через $D_1(N)$ і $D_2(N)$ – множини, означені в умовах (1) і (2) відповідно. Доведемо, що $D_1(H) \supseteq D_2(H)$.

Нехай $r \in D_2(N)$ і P – будь-який d -первинний d -підмодуль, який містить N . Тоді $DAnn_R P$ – dm -система. Якщо $r \in DAnn_R P$, то $r \in N$ за умовою (2). Це суперечить тому, що $r \notin P, N \subseteq P$. Отже, $r \notin DAnn_R P$. Тоді $r \in P$. Звідки $r \in D_1(N)$. Отож, $D_2(H) \subseteq D_1(H)$.

Ненульовий d -підмодуль N d -модуля M називається d -суттєвим, якщо $N \cap K \neq 0$ для кожного ненульового d -підмодуля K d -модуля M .

Кажуть, що d -модуль M є однорідним, якщо кожний його ненульовий d -підмодуль є d -суттєвим.

Якщо для довільного d -підмодуля N в d -модулі M і будь-якого d -гомоморфізму $f : N \rightarrow Q$ існує такий d -гомоморфізм $\bar{f} : M \rightarrow Q$, що $\bar{f}|_N = f$, то Q називається d -ін'єктивним.

Твердження 5. Диференціальний модуль Q буде d -ін'єктивним тоді і тільки тоді, коли для будь-якого диференціального лівого ідеалу I і для довільного диференціального гомоморфізму $f : I \rightarrow Q$ існує такий d -гомоморфізм $\bar{f} : R \rightarrow Q$, що $\bar{f}|_I = f$.

Диференціальне кільце R називатимемо dV -кільцем, якщо кожний d -простий модуль над R є d -ін'єктивним.

Твердження 6. Над комутативним диференціальним кільцем R всі d -прості модулі є d -ін'єктивними тоді і тільки тоді, коли воно є dV -кільцем. По-іншому це можна сформулювати так: над комутативним диференціальним кільцем R всі d -прості модулі є d -ін'єктивними тоді і тільки тоді, коли кожний d -ідеал в R є ідемпотентним.

Доведення тверджень 5 і 6 проводять повторенням відповідних міркувань, які виконуються у випадку тривіального диференціювання, з врахуванням диференціальної специфіки, і ми його тут не наводимо.

5. Диференціальний аналог теореми Васконселоса. Нехай R – диференціальне комутативне кільце. Тоді згідно з теоремою Васконселоса з [7] кожний ін'єктивний ендоморфізм будь-якого скінченно породженого R -модуля є ізоморфізмом тоді і тільки тоді, коли R має вимірність Крулля 0, тобто кожний його первинний ідеал є максимальним.

Для комутативного диференціального кільця R маємо аналогічний факт, який сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 5. *Кожний диференціально скінченно породжений R -модуль над комутативним диференціальним кільцем R є диференціально скінченим за Дедекіндом тоді і тільки тоді, коли кільце констант кільця R має нульову вимірність Крулля.*

Доведення. Проведемо доведення за схемою Васконселоса.

Зрозуміло, що необхідність тривіальна. Справді, якщо $P \subset Q$ – два різні первинні ідеали в $K = \text{Const}(R)$, то $PR \subset QR$ будуть різними диференціально первинними ідеалами в R . Тому при множенні на будь-який константний елемент $x \in Q - P$ отримуємо диференціальну ін'єкцію диференціального модуля R/PR в себе, яка не є сюр'єктивною. Оскільки R/PR є диференціально циклічним модулем, то бачимо, що існують не Дедекіндово скінченні диференціально скінченно породжені модулі.

Зворотне твердження доводити довшо, але також достатньо легко. Розглянемо диференціальне кільце R , яке володіє зазначеною вище властивістю, тобто $\text{Const}(R)$ має вимірність Крулля 0 і нехай f – диференціальна ін'єкція диференціально скінченно породженого R -модуля M . Цей модуль можна перетворити в $R[x]$ -модуль, прийнявши $x \cdot m = f(m)$ для $m \in M$. Ми стверджуємо, що $R[x]$ -модуль M має анулятор I настільки великий, що $S = R[x]/I$ є нульвимірним. Для цього припустимо, що $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ множина твірних для M як диференціального R -модуля. Тоді маємо $xm_i = \sum r_{ij}m_j$, де $r_{ij} \in R$. Ці рівності можна записати у вигляді системи рівнянь

$$r_{1i}m_1 + \dots + (r_{ii} - x)m_i + \dots + r_{in}m_n = 0, i = 1, \dots, n.$$

Припустимо, що визначник $\det(\alpha \cdot M) = (0)$, де α – матриця з елементами з $R[x]$. Це свідчить про те, що I містить унітальний поліном $p(x) = \det \alpha$ і зокрема, що $S_0 = R[x]/p(x)$ є областю, яка містить R і, як легко бачити, має вимірність Крулля 0. Оскільки S – гомоморфний образ S_0 при диференціальному гомоморфізмі, то S теж має диференціальну вимірність Крулля 0.

Позначимо через u образ x в S . Якщо u є одиницею, то все гаразд. Якщо ні, то J анулятор $u \neq (0)$. (Доведення: якщо $u \in P$ диференціальний первинний ідеал в S , то образ u в локалізації S_p є нільпотентним, тому очевидно $J \neq (0)$). В останньому випадку з $uJM = (0)$ випливає, що $JM = (0)$, і отже, $J = (0)$, оскільки M є S -точним.

-
1. Leary F.C. Dedekind finite object in module categories / Leary F.C. // J. Pure Appl. Algebra. – 1992. – Vol. 82. – P. 71-80.
 2. Stout L.N. Dedekind finiteness in topoi / Stout L.N. // J. Pure Appl. Algebra. – 1987. – Vol. 49. – P. 219-225.
 3. Acuna Ortega O. Una caracterización de objetos K-finitis decidables / Acuna Ortega O. // Ciens. y technol. – 1982. – Vol. 6. – P. 3-16.
 4. Goodearl K.R. Von Neumann regular rings / Goodearl K.R. – London: Pitman, 1979. – 369 p.
 5. Hadjsev D. On a differential analog of the prime-radical and properties of the lattice of radical differential ideals in associative differential rings / Hadjsev D., Çallsalp F. // Tr. J. of Mathematics. – 1996. – Vol. 20. – P. 571-582.

6. *Ellentuck E.* The universal properties of Dedekind finite cardinals / *Ellentuck E.* // Ann. of Math. – 1965. – Vol. 82, №2. – P. 225-228.
7. *Vasconcelos W.V.* Injective endomorphisms of finitely generated modules / *Vasconcelos W.V.* // An. Acad. Brasil. Ci. – 1970. – Vol. 6. – P. 900-901.
8. *Brown W.C.* Matrices over commutative rings / *Brown W.C.* – New York; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker Inc. – 1993. – 281 p.

DEDEKIND FINITE DIFFERENTIAL RINGS AND THEIR PRIME RADICAL

Grygoryi KASHUBA, Mykola KOMARNYTCKYI

*Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1*

In this note we investigate Dedekind finite differential rings and modules. Some characterization of such differential rings and modules are obtained.

Key words: differential module, differential ring, Dedekind finite module, differential prime radical.

Стаття надійшла до редколегії 24.10.2006

Прийнята до друку 22.10.2008

УДК 517.95

ЛОКАЛЬНА ГЛАДКА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ З ВІЛЬНИМИ МЕЖАМИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНИХ ГІПЕРБОЛІЧНИХ СИСТЕМ КВАЗІЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Володимир КИРИЛИЧ¹, Андрій ФІЛІМОНОВ²

¹ Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1

² Московський державний університет шляхів сполучення,
27994, Росія, Москва, вул. Образцова, 15

За допомогою методу характеристик і принципу стискуючих відображень доведено класичну локальну розв'язність задачі з невідомими межами для сингулярних квазілінійних гіперболічних систем першого порядку.

Ключові слова: гіперболічні системи, квазілінійні рівняння, задача Стефана.

Для А.Філімонова робота підтримана РФФД, номер ґранту 06-01-00356а.

Запропонована праця є продовженням [1] і містить умови, за яких узагальнений неперервний розв'язок наведеної нижче задачі буде класичним.

У несингулярному випадку квазілінійних гіперболічних систем подібні задачі для знаходження класичних розв'язків досліджувались в [2-4].

1. Формулювання задачі, основні позначення та припущення. У прямокутнику $\Pi(T_0) = \{(x, t) | 0 \leq x \leq \ell, 0 \leq t \leq T_0\}$, де $\ell > 0$, $T_0 > 0$ – деякі константи, розглядаємо систему

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x, t, u, v) \frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(x, t, u, v), \quad i = 1, \dots, m, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial x} = q_j(x, t, u, v), \quad j = 1, \dots, n, \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} s_j = r_j(t, s(t), u(s_j(t), t), v(s_j(t), t)), \quad j = 1, \dots, n, \quad (3)$$

де $u = (u_1, \dots, u_m)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$, $s = (s_1, \dots, s_n)$, $s(t)$ – невідомі функції.

Початкові та крайові умови мають вигляд

$$u(x, 0) = \alpha(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (4)$$

$$s_j(0) = c_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad 0 \leq c_j \leq \ell, \quad (5)$$

$$u_i(0, t) = \gamma_i^0(t, u(0, t)), \quad i \in I_+^0 = \{i \mid \operatorname{sgn}(\lambda_i(0, 0, 0, 0)) = 1\}, \quad (6)$$

$$u_i(\ell, t) = \gamma_i^\ell(t, u(\ell, t)), \quad i \in I_-^\ell = \{i \mid \operatorname{sgn}(\lambda_i(\ell, 0, 0, 0)) = -1\}, \quad (7)$$

$$v_j(s_j(t), t) = \beta_j(t), \quad j = 1, \dots, n, \quad (8)$$

де функції $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, γ_i^0 ($i \in I_+^0$), γ_i^ℓ ($i \in I_-^\ell$) і константи c_j ($j = 1, \dots, n$) є заданими.

Позначивши $w = (u, v)$, розглянемо такі множини:

$$D(T_0, P_0) = \Pi(T_0) \times \{w \mid w \in \mathbb{R}^{m+n}, \|w\| \leq P_0\},$$

$$D^1(T_0, P_0) = [0, T_0] \times \{w \mid w \in \mathbb{R}^{m+n}, \|w\| \leq P_0\},$$

$$D^2(T_0, P_0) = [0, T_0] \times [0, \ell]^n \times \{w \mid w \in \mathbb{R}^{m+n}, \|w\| \leq P_0\},$$

де $P_0 > 0$ – деяка стала.

Введемо позначення

$$|u| = \max_i |u_i|, \quad |v| = \max_j |v_j|, \quad |s| = \max_j |s_j|, \quad |w| = \max\{|u|, |v|\}.$$

Припускаємо, що виконуються такі умови.

A1. В області $D^1(T_0, P_0)$ для $i = 1, \dots, m$

$$\operatorname{sgn}(\lambda_i(0, t, u, v)) = \operatorname{const}, \quad \operatorname{sgn}(\lambda_i(\ell, t, u, v)) = \operatorname{const}. \quad (9)$$

A2. Функції $\lambda_i(x, t, w)$, $f_i(x, t, w)$ для $i = 1, \dots, m$, $q_j(x, t, w)$ для $j = 1, \dots, n$ визначені в області $D(T_0, P_0)$, а функції $r_j(x, t, w)$ для $j = 1, \dots, n$ визначені в області $D^2(T_0, P_0)$. Всі ці функції обмежені за модулем деякими константами Λ, F, Q, R відповідно. Крім того, функції $q_j(x, t, w)$ для $j = 1, \dots, n$ неперервні за t .

A3. Існують невід'ємні, сумовні на $[0, T_0]$ (і $[0, \ell]$ відповідно) функції $\Lambda_1(t)$, $\Lambda_2(t)$, $F_1(t)$, $F_2(t)$, $R_1(t)$, $R_2(t)$, $Q_2(x)$, причому $Q_2(x)$, крім того, сумовна з квадратом такі, що майже для всіх $t \in [0, T_0]$ ($x \in [0, \ell]$) при $(x_1, t, w_1) \in D(T_0, P_0)$, $(x_2, t, w_2) \in D(T_0, P_0)$, $(x^1, t, w_1) \in D^2(T_0, P_0)$, $(x^2, t, w_2) \in D^2(T_0, P_0)$ (і при $(x, t, w_1) \in D(T_0, P_0)$, $(x, t, w_2) \in D(T_0, P_0)$ відповідно) для $i = 1, \dots, m$ та $j = 1, \dots, n$ виконуються нерівності

$$\begin{aligned} |\lambda_i(x_1, t, w_1) - \lambda_i(x_2, t, w_2)| &\leq \Lambda_1(t)|x_1 - x_2| + \Lambda_2(t)|w_1 - w_2|, \\ |f_i(x_1, t, w_1) - f_i(x_2, t, w_2)| &\leq F_1(t)|x_1 - x_2| + F_2(t)|w_1 - w_2|, \\ |r_j(x^1, t, w_1) - r_j(x^2, t, w_2)| &\leq R_1(t)|x^1 - x^2| + R_2(t)|w_1 - w_2|, \\ |q_j(x, t, w_1) - q_j(x, t, w_2)| &\leq Q_2(x)|w_1 - w_2|. \end{aligned} \quad (10)$$

A4. Функції $\lambda_i(x, t, w)$, $f_i(x, t, w)$, $r_j(x, t, w)$, $q_j(x, t, w)$ вимірні в області $D(T_0, P_0)$ для всіх $i = 1, \dots, m$ та $j = 1, \dots, n$ відповідно.

З умов А2, А3, А4 випливає, що в області $D(T_0, P_0)$ функції $\lambda_i(x, t, w)$, $f_i(x, t, w)$ для $i = 1, \dots, m$ (та функції $r_j(x, t, w)$, $q_j(x, t, w)$ при $j = 1, \dots, n$ відповідно) неперервні за сукупністю x, w (за t, w) для майже всіх $t \in [0, T_0]$ ($x \in [0, \ell]$) і сумовні за t (за x) на $[0, T_0]$ ($[0, \ell]$) при фіксованих x, w (та t, w відповідно). Звідси випливає таке: якщо $w : \Pi^{T_0} \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ і $x : [0, T_0] \rightarrow [0, \ell]$ – неперервні функції, то функції $\lambda_i(x(t), t, w(x(t), t))$, $f_i(x(t), t, w(x(t), t))$, $i = 1, \dots, m$, та $r_j(x(t), t, w(x(t), t))$, $j = 1, \dots, n$, будуть сумовні на $[0, T_0]$.

А5. Виконуються умови погодження нульового порядку

$$\gamma_i^0(0, \alpha(0)) = \alpha_i(0), \quad i \in I_+^0, \quad \gamma_i^\ell(0, \alpha(\ell)) = \alpha_i(\ell), \quad i \in I_-^\ell. \quad (11)$$

А6. Функції $(x, t, u, v) \rightarrow q_j(x, t, u, v)$, $j = 1, \dots, n$, не залежать від тих v_k , для яких $c_k \neq c_j$.

А7. Функції $r_j(t, 0, u, v) \geq 0$, якщо $c_j = 0$, і нехай $r_j(t, \ell, u, v) \leq 0$ при $c_j = \ell$.

А8. Нехай існує невід'ємна сумовна на $[0, \ell]$ функція $x \rightarrow M(x)$ така, що

$$|q_j(x, t, w)| \leq M(x)|v|, \quad j = 1, \dots, n.$$

Крім того, припускаємо, що квадрат $M(x)$ також є сумовною функцією.

А9. Функції $x \rightarrow \alpha_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, ліпшицеві з константою A_1 та обмежені за модулем зверху константою A .

А10. Функції $(t, u) \rightarrow \gamma_i^0(t, u)$ ($i \in I_+^0$), $(t, u) \rightarrow \gamma_i^\ell(t, u)$ ($i \in I_-^\ell$), $t \rightarrow \beta_j(t)$ локально ліпшицеві за t, u з константами Γ_1, Γ_2 і B_1 відповідно.

А11. Нехай $\gamma_i^0(t, u)$, $i \in I_+^0$, не залежить від тих u_k , для яких $k \in I_+^0$, а $\gamma_i^\ell(t, u)$, $i \in I_-^\ell$, не залежить від тих u_k , для яких $k \in I_-^\ell$. Вважаємо, що $T \in (0, T_0]$.

А12. Існують такі сталі $\varepsilon_0 \in (0, \ell)$ і $\Lambda_0 > 0$, що всі значення $\lambda_i(x, t, w)$ ($i \in I_+^0$) при $0 \leq x \leq \varepsilon_0$ та $-\lambda_i(x, t, w)$ ($i \in I_-^\ell$) при $\ell - \varepsilon_0 \leq x \leq \ell$ не менші за величину Λ_0 при $(t, w) \in D^1(T_0, P_0)$.

Введемо позначення: $\delta = \min_j \min\{c_j, \ell - c_j \mid c_j \neq 0, c_j \neq \ell\}$.

Якщо $c_j \neq 0$ і $c_j \neq \ell$, то для таких j приймемо

$$D_j^0 = \{(x, t) \in \Pi(T) \mid 0 \leq x \leq c_j - RT; 0 \leq t \leq T\},$$

$$D_j^\ell = \{(x, t) \in \Pi(T) \mid c_j + RT \leq x \leq \ell; 0 \leq t \leq T\},$$

$$D_j^c = \Pi(T) \setminus (D_j^0 \cup D_j^\ell) = \{(x, t) \in \Pi(T) \mid c_j - RT \leq x \leq c_j + RT; 0 \leq t \leq T\}.$$

Якщо ж $c_j = 0$, то приймемо $D_j^0 = \emptyset$,

$$D_j^\ell = \{(x, t) \in \Pi(T) \mid c_j + RT \leq x \leq \ell; 0 \leq t \leq T\}, \quad D_j^c = \Pi(T) \setminus D_j^\ell.$$

Аналогічні позначення, коли $c_j = \ell$. Також позначимо

$$\begin{aligned} \|v\| = \max_j \max\{ \max_{D_j^0} (|v_j(x, t)| \exp(-H(c_j - RT - x))), \max_{D_j^c} |v_j(x, t)|, \\ \max_{D_j^\ell} (|v_j(x, t)| \exp(-H(x - c_j - RT))) \}, \end{aligned}$$

$\|u\| = \max_{\Pi(T)} |u|$, $\|w\| = \max\{\|u\|, \|v\|\}$, $\|s\| = \max_{\Pi(T)} |s|$, де константа $H > 0$ буде означена пізніше.

Розглянемо простір $\mathbb{E}$ неперервних функцій $w : \Pi(T) \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$, причому функції $(x, t) \rightarrow u(x, t)$ будемо вважати ліпшицевими за x, t , а функції $(x, t) \rightarrow v(x, t)$ – ліпшицевими за x . Нехай $\mathbb{E}_0(T)$ – куля $\|w\| \leq P_0 = \max\{U, V\}$ в цьому просторі.

Через $\mathbb{E}_1(T, L)$ позначимо множину функцій $(u, v) \in \mathbb{E}_0(T)$ таких, що константи Ліпшиця для функції $(x, t) \rightarrow u(x, t)$ (за x, t) і для функції $(x, t) \rightarrow v(x, t)$ (за x) обмежені зверху величиною $L > 0$. Розв'язок задачі

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_i(x, t, w(x, t)), \quad i = 1, \dots, m, \quad x(\check{t}) = \check{x}, \quad w \in \mathbb{E}_0(T), \quad (12)$$

(де рівність розуміємо в значенні рівності майже всюди) будемо називати характеристикою i -ї сім'ї, що відповідає функції w , і позначати через $\varphi_i(t; \check{x}, \check{t}, w)$. Розв'язок задачі

$$\frac{ds_j}{dt} = r_j(t, s(t), w(s_j(t), t)), \quad j = 1, \dots, n, \quad s_j(0) = c_j, \quad w \in \mathbb{E}_0(T), \quad (13)$$

(де рівність розуміємо в значенні рівності майже всюди) будемо позначати через $s_j(t; w)$ і називати j -ю (внутрішньою) границею.

Через $\chi_i(\check{x}, \check{t}, w)$ позначимо найменше значення аргумента t , для якого визначений розв'язок $\varphi_i(t; \check{x}, \check{t}, w)$.

Для $i = 1, \dots, m$ введемо множини: $\Pi_i^\alpha(w) = \{(x, t) \in \Pi(T) \mid \chi_i(x, t, w) = 0\}$,

$\Pi_i^0(w) = \{(x, t) \in \Pi(T) \mid \chi_i(x, t, w) > 0, \varphi_i(\chi_i(x, t, w); x, t, w) = 0\}$,

$\Pi_i^\ell(w) = \{(x, t) \in \Pi(T) \mid \chi_i(x, t, w) > 0, \varphi_i(\chi_i(x, t, w); x, t, w) = \ell\}$.

Позначимо

$$\mathfrak{R}_i[w](x, t) = \begin{cases} \alpha_i(\varphi_i(0; x, t, w)), & i = \overline{1, m}, \quad (x, t) \in \Pi_i^\alpha(w); \\ \gamma_i^0(\chi_i(x, t, w), u(0, \chi_i(x, t, w))), & i \in I_+^0, \quad (x, t) \in \Pi_i^0(w); \\ \gamma_i^\ell(\chi_i(x, t, w), u(\ell, \chi_i(x, t, w))), & i \in I_-^\ell, \quad (x, t) \in \Pi_i^\ell(w); \end{cases} \quad (14)$$

$$\mathfrak{I}_i[w](x, t) = \int_{\chi_i(x, t, w)}^t f_i(\varphi_i(\tau; x, t, w), \tau, w(\varphi_i(\tau; x, t, w), \tau)) d\tau; \quad (15)$$

$$\mathfrak{A}_i[w](x, t) = \mathfrak{R}_i[w](x, t) + \mathfrak{I}_i[w](x, t), \quad i = 1, \dots, m; \quad (16)$$

$$\mathfrak{B}_j[w](x, t) = \beta_j(t) + \int_{s_j(t; w)}^x q_j(\xi, t, w(\xi, t)) d\xi, \quad j = 1, \dots, n. \quad (17)$$

Очевидно, що неперервна функція $w = (u, v) : \Pi(T) \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ задовольняє систему

$$\begin{cases} u_i(x, t) = \mathfrak{A}_i[w](x, t), & i = 1, \dots, m, \\ v_j(x, t) = \mathfrak{B}_j[w](x, t), & j = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (18)$$

Наведені вище умови A1-A12 забезпечують існування та єдиність узагальненого неперервного розв'язку задачі (1)-(8) [1].

Звідси, зокрема, випливає, що на підставі умов А2-А4 та за умови, що $w \in \mathbb{E}_0(T)$, неперервний розв'язок задачі (13) існує, єдиний та може бути продовжений до границі $\Pi(T)$. Розглянемо тепер умови, за яких неперервний узагальнений розв'язок задачі (1)-(8) буде класичним.

Вважатимемо, що додатково виконуються ще такі умови.

А13. Функції $\lambda_i(x, t, w)$, $f_i(x, t, w)$, $\alpha_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, $\gamma_i^0(t, u)$ ($i \in J_0$), $\gamma_i^\ell(t, u)$ ($i \in J_\ell$), $q_j(x, t, w)$, $r_j(x, t, w)$, $\beta_j(t)$ ($j = 1, \dots, n$) неперервно диференційовні в тих областях, де вони були визначені, і, крім того, λ_i та f_i задовольняють умову Ліпшиця за t з деякими константами Λ_3 , F_3 відповідно, а q_j задовольняє умову Ліпшиця за t з константою Q_3 і за x з константою Q_1 , а також $Q_2\ell < 1$. Нехай, нарешті, функції $f_i(x, t, w)$, $\lambda_i(x, t, w)$ ($i = 1, \dots, m$), $r_j(x, t, w)$ ($j = 1, \dots, n$) задовольняють таку саму умову, що і функції $q_j(x, t, w)$ ($j = 1, \dots, n$) у припущенні А6, і, крім того, функції $q_j(x, t, w)$ ($j = 1, \dots, n$) не залежать від тих u_k , для яких $c_k \neq c_j$.

А14. Частинні похідні $(f_i)'_x$, $(f_i)'_t$, $(f_i)'_{v_j}$, $(f_i)'_{u_i}$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) задовольняють умову Ліпшиця в області $\Pi(T) \cup \mathbb{E}_0(T)$ за змінними x, t, w відповідно з константами F_1^1, F_3^1, F_2^1 , крім того, всі ці похідні обмежені зверху за модулем константою F^1 .

Позначимо: $\check{F}_1 = \max\{F_1, F_2, F_3, F_1^1, F_2^1, F_3^1\}$, $\check{F} = \max\{F, F^1\}$.

А15. Частинні похідні $(\lambda_i)'_x$, $(\lambda_i)'_t$, $(\lambda_i)'_{v_j}$, $(\lambda_i)'_{u_i}$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) задовольняють умову Ліпшиця в області $\Pi(T) \cup \mathbb{E}_0(T)$ за змінними x, t, w відповідно з константами $\Lambda_1^1, \Lambda_3^1, \Lambda_2^1$, крім того, всі ці похідні обмежені зверху за модулем константою Λ^1 .

Позначимо: $\check{\Lambda}_1 = \max\{\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_1^1, \Lambda_2^1, \Lambda_3^1\}$, $\check{\Lambda} = \max\{\Lambda, \Lambda^1\}$.

А16. Частинні похідні $(q_j)'_x$, $(q_j)'_t$, $(q_j)'_{v_i}$, $(q_j)'_{u_i}$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) задовольняють умову Ліпшиця в області $\Pi(T) \cup \mathbb{E}_0(T)$ за змінними t, w відповідно з константами Q_1^1, Q_2^1 , крім того, всі ці похідні обмежені зверху за модулем константою Q^1 .

Позначимо: $\check{Q}_1 = \max\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_1^1, Q_2^1\}$, $\check{Q} = \max\{Q, Q^1\}$.

А17. Похідні $\alpha'_i(x)$ ($i = 1, \dots, m$) є ліпшицевими з константою A_1^1 при $0 \leq x \leq \ell$.

Позначимо: $A^1 = \max_{[0, \ell]} |\alpha'(x)|$, $\check{A}_1 = \max\{A_1, A_1^1\}$; $\check{A} = \max\{A, A^1\}$.

А18. Похідні $\beta'_j(x)$ ($j = 1, \dots, n$) є ліпшицевими з константою B_1^1 при $0 \leq t \leq T$.

Позначимо: $B^1 = \max_{[0, T]} |\beta'(x)|$, $\check{B}_1 = \max\{B_1, B_1^1\}$; $\check{B} = \max\{B, B^1\}$.

А19. Частинні похідні $(\gamma_i^0)'_t$, $(\gamma_i^0)'_{u_j}$ ($i \in I_+^0, j \in I_+^0$), $(\gamma_i^\ell)'_t$, $(\gamma_i^\ell)'_{u_j}$ ($i \in I_-^\ell, j \in I_-^\ell$) задовольняють умову Ліпшиця в області $[0, T] \cup \mathbb{E}_0(T)$ за аргументами t і u відповідно з константами Γ_1^1 та Γ_2^1 .

Позначимо: $\check{\Gamma} = \max_{[0, T] \cup \mathbb{E}_0(T)} \{ |(\gamma_i^0)'_t|, |(\gamma_i^0)'_{u_j}|, |(\gamma_i^\ell)'_t|, |(\gamma_i^\ell)'_{u_j}| \}$, $\check{R}_1 = \max\{R_1, R_2\}$.

А20. Виконуються умови погодження першого порядку:

$$\begin{aligned} (\gamma_i^0)'_t(0, \alpha(0)) + \sum_{j \in I_+^0} (\gamma_i^0)'_{u_j}(0, \alpha(0)) [f_j(0, 0, \alpha(0), v(0, 0)) - \lambda_j(0, 0, \alpha(0), v(0, 0))\alpha'_j(0)] = \\ = f_i(0, 0, \alpha(0), v(0, 0)) - \lambda_i(0, 0, \alpha(0), v(0, 0))\alpha'_i(0), \quad i \in I_+^0; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} (\gamma_i^\ell)'_t(0, \alpha(\ell)) + \sum_{j \in I_-^\ell} (\gamma_i^\ell)'_{u_j}(0, \alpha(\ell)) [f_j(\ell, 0, \alpha(\ell), v(\ell, 0)) - \lambda_j(\ell, 0, \alpha(\ell), v(\ell, 0))\alpha'_j(\ell)] = \\ = f_i(\ell, 0, \alpha(\ell), v(\ell, 0)) - \lambda_i(\ell, 0, \alpha(\ell), v(\ell, 0))\alpha'_i(\ell), \quad i \in I_-^\ell. \end{aligned} \quad (20)$$

Тут значення функції $v(x, t)$ в точках $(0, 0)$, $(\ell, 0)$ знаходимо з розв'язку системи

$$v_j(x, 0) = \beta_j(0) + \int_{c_j}^x q_j(\xi, 0, \alpha(\xi), v(\xi, 0)) d\xi, \quad j = 1, \dots, n.$$

A21. Нехай існує невід'ємна неперервна функція $x \rightarrow M^1(x)$ така, що

$$|(q_j)'_t(x, t, w)| \leq M^1(x)|v|, \quad j = 1, \dots, n;$$

$$|(q_j)'_{u_i}(x, t, w)| \leq M^1(x)|v|, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m.$$

Крім того, припускаємо, що функція $M(x)$ з умови A8 неперервна.

Розглянемо простір $\check{\mathbb{E}}_0(T)$ вектор-функцій $\check{w} = (u, u^1, v, v^{(2)}) : \Pi(T) \rightarrow \mathbb{R}^{2m+2n}$, де $u = (u_1, \dots, u_m)$, $u^1 = (u_1^1, \dots, u_m^1)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$, $v^{(2)} = (v_1^{(2)}, \dots, v_n^{(2)})$, причому кожна компонента вектор-функцій u , u^1 та v є ліпшицевою за двома змінними, а кожна компонента вектор-функції $v^{(2)}$ є ліпшицевою за x , причому $(u, v) \in \mathbb{E}_0(T)$ і, крім того, v ліпшицева за t . Нехай виконуються умови:

$$\|w^1\| = \max\{\|u^1\|, \|v^{(2)}\|\} \leq P_0^1, \quad v^{(2)}(x, t) = \frac{\partial v(x, t)}{\partial t}, \quad \left\| \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right\| \leq Q,$$

де P_0^1 — деяка стала, причому будемо вважати, що $Q \leq P_0^1$, $\|u^1\| = \max |u_i^1|$,

$$\|v^{(2)}\| = \max_j \max\{\max_{D_j^0} |v_j^{(2)}(x, t)| e^{-H(c_j - RT - x)}, \max_{D_j^c} |v_j^{(2)}(x, t)|,$$

$$\max_{D_j^\ell} |v_j^{(2)}(x, t)| e^{-H(x - c_j - RT)}\}.$$

Позначимо $\check{P}_0 = \max\{P_0, P_0^1\}$, $\|\check{w}\| = \max\{\|w\|, \|w^1\|\}$.

В просторі $\check{\mathbb{E}}_0(T)$ введемо метрику $\check{\rho}$ за формулою:

$$\check{\rho}(\check{w}_1, \check{w}_2) = \max\{\rho(w_1, w_2), \quad \rho^1(w_1^1, w_2^1)\},$$

$$\text{де } \rho(w_1, w_2) = \max\{\max_{\Pi(T)} \|u_1(x, t) - u_2(x, t)\|, \max_{\Pi(T)} \|v_1(x, t) - v_2(x, t)\|\},$$

$$\rho^1(w_1^1, w_2^1) = \max\{\max_{\Pi(T)} \|u_1^1(x, t) - u_2^1(x, t)\|, \max_{\Pi(T)} \|v_1^{(2)}(x, t) - v_2^{(2)}(x, t)\|\}.$$

Нехай $L_1^1(u^1)$, $L_2^1(u^1)$ константи Ліпшиця за x і t відповідно для функції $u^1(x, t)$, а $L_1^1(v^{(2)})$ константа Ліпшиця за x для функції $v^{(2)}(x, t)$. Позначимо $\check{L} = \max\{L, \max\{L_1^1(u^1), L_2^1(u^1), L_1^1(v^{(2)})\} = L^1\}$, де замість L візьмемо таку саму константу Ліпшиця для функцій u, v , що й вище, з урахуванням ліпшицевості функції v за t .

Позначимо через $\check{\mathbb{E}}_1(T, \check{L})$ множину функцій $\check{w} \in \check{\mathbb{E}}_0(T)$, для яких константами Ліпшиця за x і t відповідно слугують L для u, v ; L^1 для $u^1, v^{(2)}$ (для функції $v^{(2)}$ ліпшицевість тільки за x).

Введемо такі позначення для $(i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n)$:

$$v_j^1(x, t) = q_j(x, t, w); \quad \|v^1\| \leq Q;$$

$$u_i^{(2)}(x, t) = f_i(x, t, u(x, t), v(x, t)) - \lambda_i(x, t, u(x, t), v(x, t)) u_i^1(x, t); \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
\varphi_i^1(\tau; x, t, \check{w}) &= \exp \int_t^\tau [(\lambda_i)'_x(\varphi_i(\theta; x, t, w), \theta, w(\varphi_i(\theta; x, t, w), \theta)) + \\
&+ \sum_{k=1}^m (\lambda_i)'_{u_k}(\varphi_i(\theta; x, t, w), \theta, w(\varphi_i(\theta; x, t, w), \theta)) u_k^1(\varphi_i(\theta; x, t, w), \theta) + \\
&+ \sum_{r=1}^n (\lambda_i)'_{v_r}(\varphi_i(\theta; x, t, w), \theta, w(\varphi_i(\theta; x, t, w), \theta)) v_r^1(\varphi_i(\theta; x, t, w), \theta)] d\theta; \quad (22)
\end{aligned}$$

$$\chi_i^1(x, t, \check{w}) = \begin{cases} -\frac{\varphi_i^1(\chi_i(x, t, w); x, t, \check{w})}{\lambda_i(0, \chi_i(x, t, w), w(0, \chi_i(x, t, w)))}, & (x, t) \in \Pi_i^0(w), \\ -\frac{\varphi_i^1(\chi_i(x, t, w); x, t, \check{w})}{\lambda_i(\ell, \chi_i(x, t, w), w(\ell, \chi_i(x, t, w)))}, & (x, t) \in \Pi_i^\ell(w). \end{cases} \quad (23)$$

Зауваження 1. Якщо розв'язок задачі (1)-(8) є гладким, то: $u^1 = u_x$, $u^{(2)} = u_t$, $\varphi_i^1(\tau; x, t, \check{w}) = \frac{\partial}{\partial x} \varphi_i(\tau; x, t, w)$, $\chi_i^1(x, t, \check{w}) = \frac{\partial}{\partial x} \chi_i(x, t, w)$, $v^1 = v_x$, $v^{(2)} = v_t$.

Тепер розглянемо систему, яку отримують з (16)-(17) формальним диференціюванням перших m рівнянь системи (16) за x , а інших n рівнянь системи (17) за t , замінюючи u_x на u^1 , v_x на v^1 та всіма іншими відповідними замінами на основі зауваження 1. До одержаної системи приєднуємо систему (16)-(17). Тоді з урахуванням (18) матимемо

$$u_i(x, t) = \Re_i[w](x, t) + \Im_i[w](x, t), \quad i = 1, \dots, m, \quad (24)$$

$$u_i^1(x, t) = \Re_i^1[\check{w}](x, t) + \Im_i^1[\check{w}](x, t) + \mathfrak{Y}_i^1[\check{w}](x, t), \quad i = 1, \dots, m, \quad (25)$$

$$v_j(x, t) = \beta_j(t) + \int_{s_j(t; w)}^x q_j(\xi, t, w(\xi, t)) d\xi, \quad j = 1, \dots, n, \quad (26)$$

$$v_j^{(2)}(x, t) = \beta_j'(t) + \Im_{1j}^1[\check{w}](x, t) + \mathfrak{Y}_{1j}^1[w](t), \quad j = 1, \dots, n, \quad (27)$$

де введено позначення:

$$\Re_i^1[\check{w}](x, t) = \begin{cases} [(\gamma_i^0)'_t(\chi_i(x, t, w), u(0, \chi_i(x, t, w))) + \sum_{j \in I_+^0} (\gamma_j^0)'_{u_j}(\chi_i(x, t, w), \\ u(0, \chi_i(x, t, w))) u_j^{(2)}(0, \chi_i(x, t, w))] \chi_i^1(x, t, \check{w}), & (x, t) \in \Pi_i^0(w); \\ \alpha_i'(\varphi_i(0; x, t, w)) \varphi_i^1(0; x, t, \check{w}), & (x, t) \in \Pi_i^\alpha(w); \\ [(\gamma_i^\ell)'_t(\chi_i(x, t, w), u(\ell, \chi_i(x, t, w))) + \sum_{j \in I_-^\ell} (\gamma_j^\ell)'_{u_j}(\chi_i(x, t, w), \\ u(\ell, \chi_i(x, t, w))) u_j^{(2)}(\ell, \chi_i(x, t, w))] \chi_i^1(x, t, \check{w}), & (x, t) \in \Pi_i^\ell(w); \end{cases} \quad (28)$$

$$\Im_i^1[\check{w}](x, t) = \begin{cases} -f_i(0, \chi_i(x, t, w), w(0, \chi_i(x, t, w))) \chi_i^1(x, t, \check{w}), & (x, t) \in \Pi_i^0(w); \\ 0, & (x, t) \in \Pi_i^\alpha(w); \\ -f_i(\ell, \chi_i(x, t, w), w(\ell, \chi_i(x, t, w))) \chi_i^1(x, t, \check{w}), & (x, t) \in \Pi_i^\ell(w). \end{cases} \quad (29)$$

$$\mathfrak{Y}_i^1[\check{w}](x, t) = \int_{\chi_i(x, t, w)}^t [(f_i)'_x(\varphi_i(\tau; x, t, w), \tau, w(\varphi_i(\tau; x, t, w), \tau)) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^m (f_i)'_{u_j}(\varphi_i(\tau; x, t, w), \tau, w(\varphi_i(\tau; x, t, w), \tau)) u_j^1(\varphi_i(\tau; x, t, w), \tau) + \\
& + \sum_{k=1}^n (f_i)'_{v_k}(\varphi_i(\tau; x, t, w), \tau, w(\varphi_i(\tau; x, t, w), \tau)) v_k^1(\varphi_i(\tau; x, t, w), \tau) \varphi_i^1(\tau; x, t, \check{w}) d\tau, \quad (30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}_{1j}^1[\check{w}](x, t) = & \int_{s_j(t; w)}^x [(q_j)'_t(\xi, t, w(\xi, t)) + \sum_{i: c_i = c_j} (q_j)'_{u_i}(\xi, t, w(\xi, t)) u_i^{(2)}(\xi, t) + \\
& + \sum_{k: c_k = c_j} (q_j)'_{v_k}(\xi, t, w(\xi, t)) v_k^{(2)}(\xi, t)] d\xi, \quad (31)
\end{aligned}$$

$$\mathfrak{Y}_{1j}^1[w](t) = r_j(t, s(t), w(s_j(t), t)) q_j(s_j(t; w), t, w(s_j(t; w), t)). \quad (32)$$

Розглянемо оператор $\check{\mathfrak{S}} = (\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^1)$, визначений на $\check{\mathbb{E}}_0(T)$, значення якого $\check{\mathfrak{S}}[\check{w}] = (\mathfrak{S}[w], \mathfrak{S}^1[\check{w}])$ на функціях $\check{w} = (w, w^1)$ обчислюють за правилом

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S} &= (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_m; \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_n); \\
\mathfrak{S}^1 &= (\mathfrak{A}_1^1, \mathfrak{A}_2^1, \dots, \mathfrak{A}_m^1; \mathfrak{B}_1^1, \mathfrak{B}_2^1, \dots, \mathfrak{B}_n^1); \\
\mathfrak{A}_i[w](x, t) &= \mathfrak{R}_i[w](x, t) + \mathfrak{I}_i[w](x, t); \quad i = 1, \dots, m; \quad (33)
\end{aligned}$$

$$\mathfrak{B}_j[w](x, t) = \beta_j(t) + \int_{s_j(t; w)}^x q_j(\xi, t, w(\xi, t)) d\xi; \quad j = 1, \dots, n; \quad (34)$$

$$\mathfrak{A}_i^1[\check{w}](x, t) = \mathfrak{R}_i^1[\check{w}](x, t) + \mathfrak{I}_i^1[\check{w}](x, t) + \mathfrak{Y}_i^1[\check{w}](x, t); \quad i = 1, \dots, m; \quad (35)$$

$$\mathfrak{B}_j^1[\check{w}](x, t) = \beta_j'(t) + \mathfrak{I}_{1j}^1[\check{w}](x, t) + \mathfrak{Y}_{1j}^1[w](t); \quad j = 1, \dots, n. \quad (36)$$

Позначимо також $\check{\mathfrak{A}} = (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_m; \mathfrak{A}_1^1, \mathfrak{A}_2^1, \dots, \mathfrak{A}_m^1);$
 $\check{\mathfrak{B}} = (\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_n; \mathfrak{B}_1^1, \mathfrak{B}_2^1, \dots, \mathfrak{B}_n^1).$

2. Локальна класична розв'язність задачі.

Теорема. Для досить малого $T > 0$, при виконанні наведених вище припущень та умов A1-A21, існує єдиний класичний розв'язок задачі (1)-(8).

Доведення теореми розіб'ємо на допоміжні леми.

Лема 1. Функція $\check{\mathfrak{S}}[\check{w}](x, t)$ неперервна в $\Pi(T)$.

Доведення. Неперервність функції $\mathfrak{S}[w](x, t)$ і $\mathfrak{A}_i^1[\check{w}](x, t)$ в кожній із областей $\bar{\Pi}_i^\alpha(w)$, $\bar{\Pi}_i^0(w)$, $\bar{\Pi}_i^\ell(w)$ випливає з їхнього визначення. Тому перевіримо, наприклад, неперервність функцій $\mathfrak{A}_i^1[\check{w}](x, t)$ на лініях $\varphi_i(\tau; 0, 0, w)$ та $\varphi_i(\tau; \ell, 0, w)$. Розглянемо неперервність $\mathfrak{A}_i^1[\check{w}](x, t)$ на лінії $\varphi_i(\tau; 0, 0, w)$ (неперервність функції $\mathfrak{A}_i^1[\check{w}](x, t)$ на лінії $\varphi_i(\tau; \ell, 0, w)$ розглядається аналогічно). На цій лінії $\chi_i(x, t, w) = 0$, тому з (23) матимемо

$$\chi_i^1(x, t, \check{w}) = -\frac{\varphi_i^1(0; x, t, \check{w})}{\lambda_i(0, 0, w(0, 0))}. \quad (37)$$

Знайдемо тепер різницю $[\mathfrak{S}_i^1[\check{w}](x, t)]_{\text{лів}} - [\mathfrak{S}_i^1[\check{w}](x, t)]_{\text{пр}}$. Оскільки $\chi_i(x, t, w) = 0$, то з (30) отримуємо, що

$$[\mathfrak{I}_i^1[\check{w}](x, t)]_{\text{лів}} - [\mathfrak{I}_i^1[\check{w}](x, t)]_{\text{пр}} = 0. \quad (38)$$

З (29), (37) випливає рівність

$$[\mathfrak{Y}_i^1[\check{w}](x, t)]_{\text{лів}} - [\mathfrak{Y}_i^1[\check{w}](x, t)]_{\text{пр}} = f_i(0, 0, w(0, 0)) \frac{\varphi_i^1(0; x, t, \check{w})}{\lambda_i(0, 0, \alpha(0))}. \quad (39)$$

Далі, з (28), (21), (37) та з урахуванням умов погодження першого порядку (19), одержимо

$$\begin{aligned} & [\mathfrak{R}_i^1[\check{w}](x, t)]_{\text{лів}} - [\mathfrak{R}_i^1[\check{w}](x, t)]_{\text{пр}} = [(\gamma_i^0)'_t(0, \alpha(0)) + \sum_{j \in I_+^0} (\gamma_i^0)'_{u_j}(0, \alpha(0)) \times \\ & \times (f_j(0, 0, \alpha(0), v(0, 0)) - \lambda_j(0, 0, \alpha(0), v(0, 0))\alpha'_j(0))] \left(-\frac{\varphi_i^1(0; x, t, \check{w})}{\lambda_i(0, 0, \alpha(0))} \right) - \\ & - \alpha'_i(0) \varphi_i^1(0; x, t, \check{w}) = -\frac{\varphi_i^1(0; x, t, \check{w})}{\lambda_i(0, 0, \alpha(0))} [f_i(0, 0, \alpha(0), v(0, 0)) - \lambda_i(0, 0, \alpha(0), v(0, 0))\alpha'_i(0)] - \\ & - \alpha'_i(0) \varphi_i^1(0; x, t, \check{w}) = -\frac{\varphi_i^1(0; x, t, \check{w})}{\lambda_i(0, 0, \alpha(0))} f_i(0, 0, \alpha(0), v(0, 0)). \end{aligned} \quad (40)$$

Отже, з (35), (38), (39) і (40) отримуємо, що на лінії $\varphi_i(\tau; 0, 0, w)$ виконується

$$[\mathfrak{A}_i^1[\check{w}](x, t)]_{\text{лів}} - [\mathfrak{A}_i^1[\check{w}](x, t)]_{\text{пр}} = 0.$$

Неперервність функції $\mathfrak{B}_j^1[\check{w}](x, t)$ випливає з її визначення.

Отож, матимемо

$$[\mathfrak{S}_i^1[\check{w}](x, t)]_{\text{лів}} - [\mathfrak{S}_i^1[\check{w}](x, t)]_{\text{пр}} = 0. \quad (41)$$

Зауваження 2. Через N_i, N^i ($i = 1, \dots$) надалі позначатимемо сталі, залежні тільки від вихідних даних задачі, тобто від констант $\check{\Lambda}, \check{\Lambda}_0, \check{\Lambda}_1, \check{F}, \check{F}_1, \check{\Gamma}, \check{\Gamma}_1, \check{A}, \check{A}_1, T_0, \check{P}, m, n, \check{B}, \check{B}_1, \check{R}, \check{R}_1, \check{Q}, \check{Q}_1$, і не залежні від $T, \check{L}$.

Лема 2. Для $\tau \in [\max\{\chi_i(x_1, t, w), \chi_i(x_2, t, w)\}, t]$ правильна оцінка

$$|\varphi_i^1(\tau; x_1, t, \check{w}) - \varphi_i^1(\tau; x_2, t, \check{w})| \leq N_2(1 + \check{L})T|x_1 - x_2|. \quad (42)$$

Доведення. З (22) випливає, що

$$\begin{aligned} & |\varphi_i^1(\tau; x_1, t, \check{w}) - \varphi_i^1(\tau; x_2, t, \check{w})| = \left| \exp\left(\int_{\tau}^t [(\lambda_i)'_x(\varphi_i(\theta; x_1, t, w), \theta, \right. \right. \\ & \left. \left. w(\varphi_i(\theta; x_1, t, w), \theta)) + \sum_{k=1}^m (\lambda_i)'_{u_k}(\varphi_i(\theta; x_1, t, w), \theta, w(\varphi_i(\theta; x_1, t, w), \theta)) \times \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times u_k^1(\varphi_i(\theta; x_1, t, w), \theta) + \sum_{r=1}^n (\lambda_i)'_{v_r}(\varphi_i(\theta; x_1, t, w), \theta, w(\varphi_i(\theta; x_1, t, w), \theta)) \times \\
& \quad \times v_r^1(\varphi_i(\theta; x_1, t, w), \theta) d\theta - \exp\left(\int_{\tau}^t [(\lambda_i)'_x(\varphi_i(\theta; x_2, t, w), \theta, \right. \\
& \quad \left. w(\varphi_i(\theta; x_2, t, w), \theta)) + \sum_{k=1}^m (\lambda_i)'_{u_k}(\varphi_i(\theta; x_2, t, w), \theta, w(\varphi_i(\theta; x_2, t, w), \theta)) \times \right. \\
& \quad \left. \times u_k^1(\varphi_i(\theta; x_2, t, w), \theta) + \sum_{r=1}^n (\lambda_i)'_{v_r}(\varphi_i(\theta; x_2, t, w), \theta, w(\varphi_i(\theta; x_2, t, w), \theta)) \times \right. \\
& \quad \left. \times v_r^1(\varphi_i(\theta; x_2, t, w), \theta) d\theta\right] \leq N_1 \int_{\tau}^t \{(\Lambda_1^1 + \Lambda_2^1 L) |\varphi_i(\theta; x_1, t, w) - \varphi_i(\theta; x_2, t, w)| + \\
& \quad + \sum_{k=1}^m |(\lambda_i)'_{u_k}(\varphi_i(\theta; x_1, t, w), \theta, w(\varphi_i(\theta; x_1, t, w), \theta)) u_k^1(\varphi_i(\theta; x_1, t, w), \theta) - \\
& \quad - (\lambda_i)'_{u_k}(\varphi_i(\theta; x_1, t, w), \theta, w(\varphi_i(\theta; x_1, t, w), \theta)) u_k^1(\varphi_i(\theta; x_2, t, w), \theta)| + \\
& \quad + \sum_{k=1}^m |(\lambda_i)'_{u_k}(\varphi_i(\theta; x_1, t, w), \theta, w(\varphi_i(\theta; x_1, t, w), \theta)) u_k^1(\varphi_i(\theta; x_2, t, w), \theta) - \\
& \quad - (\lambda_i)'_{u_k}(\varphi_i(\theta; x_2, t, w), \theta, w(\varphi_i(\theta; x_2, t, w), \theta)) u_k^1(\varphi_i(\theta; x_2, t, w), \theta)| + \\
& \quad + \sum_{r=1}^n [\Lambda^1 |v_r^1(\varphi_i(\theta; x_1, t, w), \theta) - v_r^1(\varphi_i(\theta; x_2, t, w), \theta)| + Q(\Lambda_1^1 + \Lambda_2^1 L) \times \\
& \quad \times |\varphi_i(\theta; x_1, t, w) - \varphi_i(\theta; x_2, t, w)|] d\theta \leq N_1 \int_{\tau}^t \{\Lambda_1^1 + \Lambda_2^1 L + m\Lambda^1 L^1 + mP_0^1(\Lambda_1^1 + \\
& \quad + \Lambda_2^1 L) + n\Lambda^1(Q_1 + Q_2 L) + nQ(\Lambda_1^1 + \Lambda_2^1 L)\} |\varphi_i(\theta; x_1, t, w) - \varphi_i(\theta; x_2, t, w)| d\theta,
\end{aligned}$$

де $N_1 = \exp(T_0 \Lambda^1 (1 + P_0^1 m + nQ))$. Крім того, тут і надалі будемо використовувати формулу $|e^a - e^b| \leq e^c |a - b|$, $a \leq c \leq b$.

Отже, одержуємо

$$\begin{aligned}
& |\varphi_i^1(\tau; x_1, t, \check{w}) - \varphi_i^1(\tau; x_2, t, \check{w})| \leq N_1 M_1 (\Lambda^1 L^1 m + \Lambda^1 n(Q_1 + Q_2 L) + \\
& \quad + (\Lambda_1^1 + \Lambda_2^1 L)(1 + P_0^1 m + Qn)) T |x_1 - x_2| \leq N_2 (1 + \check{L}) T |x_1 - x_2|, \quad (43)
\end{aligned}$$

де $N_2 = N_1 M_1 [\check{\Lambda}_1 (1 + P_0^1 m + Qn) + \Lambda^1 m + \Lambda^1 n \check{Q}_1]$.

Лема 3. Нехай $\check{w}_1, \check{w}_2 \in \check{\mathbb{E}}_1(T, \check{L})$. Тоді для $\tau \in [\max\{\chi_i(x, t, w_1), \chi_i(x, t, w_2)\}, t]$ правильна оцінка

$$|\varphi_i^1(\tau; x, t, \check{w}_1) - \varphi_i^1(\tau; x, t, \check{w}_2)| \leq N_3 (1 + \check{L}) T \check{\rho}. \quad (44)$$

Доведення. Розглянемо

$$\begin{aligned}
& |\varphi_i^1(\tau; x, t, \check{w}_1) - \varphi_i^1(\tau; x, t, \check{w}_2)| \leq N_1 \int_{\tau}^t \{ \Lambda_1^1 |\varphi_i(\theta; x, t, w_1) - \varphi_i(\theta; x, t, w_2)| + \\
& + \Lambda_2^1 |w_1(\varphi_i(\theta; x, t, w_1), \theta) - w_2(\varphi_i(\theta; x, t, w_2), \theta)| + \sum_{k=1}^m \Lambda^1 |u_{1k}^1(\varphi_i(\theta; x, t, w_1), \theta) - \\
& - u_{2k}^1(\varphi_i(\theta; x, t, w_2), \theta)| + \sum_{k=1}^m P_0^1 (\Lambda_1^1 |\varphi_i(\theta; x, t, w_1) - \varphi_i(\theta; x, t, w_2)| + \\
& \Lambda_2^1 |w_1(\varphi_i(\theta; x, t, w_1), \theta) - w_2(\varphi_i(\theta; x, t, w_2), \theta)|) + \sum_{r=1}^n \Lambda^1 |v_{1r}^1(\varphi_i(\theta; x, t, w_1), \theta) - \\
& - v_{2r}^1(\varphi_i(\theta; x, t, w_2), \theta)| + \sum_{r=1}^n Q (\Lambda_1^1 |\varphi_i(\theta; x, t, w_1) - \varphi_i(\theta; x, t, w_2)| + \\
& + \Lambda_2^1 |w_1(\varphi_i(\theta; x, t, w_1), \theta) - w_2(\varphi_i(\theta; x, t, w_2), \theta)|) \} d\theta \leq N_1 \int_{\tau}^t \{ (\Lambda_1^1 + \Lambda_2^1 L) M_1 \times \\
& \times \nu_0 \rho + \Lambda_2^1 e^{H\ell} \rho + m(\Lambda^1 L^1 M_1 \nu_0 \rho + \Lambda^1 \rho^1) + P_0^1 m(\Lambda_1^1 + \Lambda_2^1 L) M_1 \nu_0 \rho + m P_0^1 \Lambda_2^1 e^{H\ell} \rho + \\
& + n \Lambda^1 [(Q_1 + Q_2 L) M_1 \nu_0 \rho + Q_2 e^{H\ell} \rho] + Q n (\Lambda_1^1 + \Lambda_2^1 L) M_1 \nu_0 \rho + n Q \Lambda_2^1 e^{H\ell} \rho \} d\theta \leq \\
& \leq N_3 (1 + \check{L}) T \check{\rho}, \tag{45}
\end{aligned}$$

де $N_3 = N_1 (\check{L}_1 (M_1 \nu_0 + e^{H\ell} + P_0^1 m M_1 \nu_0 + m P_0^1 e^{H\ell} + Q n M_1 \nu_0 + Q n e^{H\ell}) + m \Lambda^1 (M_1 \nu_0 + 1) + n \Lambda^1 (M_1 Q_1 \nu_0 + Q_2 e^{H\ell}))$.

Лема 4. Для $\tau_1, \tau_2 \in [\chi_i(x, t, w), t]$ правильна оцінка

$$|\varphi_i^1(\tau_1; x, t, \check{w}) - \varphi_i^1(\tau_2; x, t, \check{w})| \leq N_4 |\tau_1 - \tau_2|. \tag{46}$$

Доведення. Нехай для визначеності $\tau_1 \leq \tau_2$. Тоді з (22) одержуємо, що

$$|\varphi_i^1(\tau_1; x, t, \check{w}) - \varphi_i^1(\tau_2; x, t, \check{w})| \leq N_1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \Lambda^1 (1 + P_0^1 m + n Q) d\theta = N_4 |\tau_1 - \tau_2|, \tag{47}$$

де $N_4 = N_1 \Lambda^1 (1 + P_0^1 m + n Q)$.

Наслідок 1. З леми 4 та з леми 2 випливає, що при $(x_1, t), (x_2, t) \in \Pi_i^0(w)$ (або $(x_1, t), (x_2, t) \in \Pi_i^\ell(w)$) матимемо оцінку

$$\begin{aligned}
& |\varphi_i^1(\chi_i(x_1, t, w); x_1, t, \check{w}) - \varphi_i^2(\chi_i(x_2, t, w); x_2, t, \check{w})| \leq N_2 (1 + \check{L}) T |x_1 - x_2| + \\
& + N_4 |\chi_i(x_1, t, w) - \chi_i(x_2, t, w)| \leq N_5 (1 + \check{L} T) |x_1 - x_2|, \tag{48}
\end{aligned}$$

де $N_5 = N_2 (1 + T_0) + N_4 M_2$.

Напишемо нерівності, які використовуватимемо далі

$$|\varphi_i^1(\tau; x, t, \check{w})| \leq N_1; |\chi_i^1(x, t, \check{w})| \leq N_1 \Lambda_0^{-1};$$

$$|u_i^{(2)}(x, t)| \leq P_0^{(2)} \stackrel{def}{=} F + \Lambda P_0^1. \quad (49)$$

Ці нерівності відразу випливають із визначення відповідних функцій.

Лема 5. *Функція $u_i^{(2)}(x, t)$ ($i = 1, \dots, m$) задовольняє нерівність*

$$|u_i^{(2)}(0, t_1) - u_i^{(2)}(0, t_2)| \leq N_6(1 + \check{L})|t_1 - t_2|. \quad (50)$$

Доведення. З (21) маємо

$$\begin{aligned} |u_i^{(2)}(0, t_1) - u_i^{(2)}(0, t_2)| &\leq |f_i(0, t_1, u(0, t_1), v(0, t_1)) - f_i(0, t_2, u(0, t_2), v(0, t_2))| + \\ &+ \Lambda |u_i^1(0, t_1) - u_i^1(0, t_2)| + P_0^1 |\lambda_i(0, t_1, u(0, t_1), v(0, t_1)) - \lambda_i(0, t_2, u(0, t_2), v(0, t_2))| \leq \\ &\leq [F_3 + F_2 L + \Lambda L^1 + P_0^1 (\Lambda_3 + \Lambda_2 L)] |t_1 - t_2| \leq N_6(1 + \check{L}) |t_1 - t_2|, \end{aligned} \quad (51)$$

де $N_6 = \check{F}_1 + \Lambda + P_0^1 \check{\Lambda}^1$.

Лема 6. *Нехай $(x_1, t), (x_2, t) \in \Pi_i^0(w)$ (або $(x_1, t), (x_2, t) \in \Pi_i^\ell(w)$). Тоді*

$$|\chi_i^1(x_1, t, \check{w}) - \chi_i(x_2, t, \check{w})| \leq N_7(1 + \check{L})|x_1 - x_2|. \quad (52)$$

Доведення. З леми 2, наслідку 1 та нерівності (49) можемо записати

$$\begin{aligned} |\chi_i^1(x_1, t, \check{w}) - \chi_i(x_2, t, \check{w})| &\leq \left| \frac{\varphi_i^1(\chi_i(x_1, t, w); x_1, t, \check{w})}{\lambda_i(0; \chi_i(x_1, t, w), w(0, \chi_i(x_1, t, w)))} - \right. \\ &- \left. \frac{\varphi_i^1(\chi_i(x_2, t, w); x_2, t, \check{w})}{\lambda_i(0; \chi_i(x_2, t, w), w(0, \chi_i(x_2, t, w)))} \right| \leq \left| \frac{\varphi_i^1(\chi_i(x_1, t, w); x_1, t, \check{w})}{\lambda_i(0; \chi_i(x_1, t, w), w(0, \chi_i(x_1, t, w)))} - \right. \\ &- \left. \frac{\varphi_i^1(\chi_i(x_2, t, w); x_2, t, \check{w})}{\lambda_i(0; \chi_i(x_1, t, w), w(0, \chi_i(x_1, t, w)))} \right| + \left| \frac{\varphi_i^1(\chi_i(x_2, t, w); x_2, t, \check{w})}{\lambda_i(0; \chi_i(x_1, t, w), w(0, \chi_i(x_1, t, w)))} - \right. \\ &- \left. \frac{\varphi_i^1(\chi_i(x_2, t, w); x_2, t, \check{w})}{\lambda_i(0; \chi_i(x_2, t, w), w(0, \chi_i(x_2, t, w)))} \right| \leq \Lambda_0^{-1} |\varphi_i^1(\chi_i(x_1, t, w); x_1, t, \check{w}) - \\ &- \varphi_i^1(\chi_i(x_2, t, w); x_2, t, \check{w})| + N_1 \Lambda_0^{-2} |\lambda_i(0; \chi_i(x_1, t, w), w(0, \chi_i(x_1, t, w))) - \\ &- \lambda_i(0; \chi_i(x_2, t, w), w(0, \chi_i(x_2, t, w)))| \leq (\Lambda_0^{-1} N_5(1 + \check{L}T) + N_1 \Lambda_0^{-2} (\Lambda_3 + \\ &+ \Lambda_2 L) M_2) |x_1 - x_2| \leq N_7(1 + \check{L}) |x_1 - x_2|, \end{aligned} \quad (53)$$

де $N_7 = N_1 \Lambda_0^{-2} \check{\Lambda}_1 M_2 + \Lambda_0^{-1} N_5(1 + T_0)$.

Лема 7. *Нехай $(x, t) \in \Pi_i^0(w_1) \cap \Pi_i^0(w_2)$ або $(x, t) \in \Pi_i^\ell(w_1) \cap \Pi_i^\ell(w_2)$. Тоді*

$$|\chi_i^1(x, t, \check{w}_1) - \chi_i^1(x, t, \check{w}_2)| \leq N_8(1 + \check{L}T)\check{\rho}. \quad (54)$$

Доведення. Нехай для визначеності $(x, t) \in \Pi_i^0(w_1) \cap \Pi_i^0(w_2)$ (випадок $(x, t) \in \Pi_i^\ell(w_1) \cap \Pi_i^\ell(w_2)$ розглядають аналогічно).

На підставі лем 3, 4 отримаємо

$$\begin{aligned} |\chi_i^1(x, t, \check{w}_1) - \chi_i^1(x, t, \check{w}_2)| &\leq \Lambda_0^{-1} |\varphi_i^1(\chi_i(x, t, w_1); x, t, \check{w}_1) - \varphi_i^1(\chi_i(x, t, w_2); x, t, \check{w}_2)| + \\ &+ N_1 \Lambda_0^{-2} (\Lambda_3 |\chi_i(x, t, w_1) - \chi_i(x, t, w_2)| + \Lambda_2 |w_1(0, \chi_i(x, t, w_1)) - w_2(0, \chi_i(x, t, w_2))|) \leq \\ &\leq \Lambda_0^{-1} (N_3(1 + \check{L})T\check{\rho} + N_4 |\chi_i(x, t, w_1) - \chi_i(x, t, w_2)|) + \\ &+ N_1 \Lambda_0^{-2} (\Lambda_3 + \Lambda_2 L) \check{M}_2 T \rho + \Lambda_2 N_1 \Lambda_0^{-2} e^{H\ell} \rho \leq N_8(1 + \check{L}T)\check{\rho}, \end{aligned} \quad (55)$$

де $\check{M}_2 = M_2 e^{H\ell} \Lambda_2$, $N_8 = \Lambda_0^{-1} N_3(T_0 + 1) + N_4 \check{M}_2 \Lambda_0^{-1} T_0 + N_1 \Lambda_0^{-2} \check{M}_2 \check{\Lambda}_1(T_0 + 1) + \Lambda_2 N_1 \Lambda_0^{-2} e^{H\ell}$.

Лема 8. На множині $\Pi_i^\alpha(w)$ функція $\check{\mathfrak{A}}_i[\check{w}](x, t)$ задовольняє умову Ліпшиця за x з константою $N_{12}(1 + \check{L}T)$.

Доведення. Нехай $(x_1, t), (x_2, t) \in \bar{\Pi}_i^\alpha(w)$. Тоді $\mathfrak{Y}_i^1[\check{w}](x_1, t) = \mathfrak{Y}_i^1[\check{w}](x_2, t) = 0$. З леми 2 випливає

$$\begin{aligned} |\mathfrak{R}_i^1[\check{w}](x_1, t) - \mathfrak{R}_i^1[\check{w}](x_2, t)| &= |\alpha'_i(\varphi_i(0; x_1, t, w))\varphi_i^1(0; x_1, t, \check{w}) - \\ &- \alpha'_i(\varphi_i(0; x_2, t, w))\varphi_i^1(0; x_2, t, \check{w})| \leq A^1 |\varphi_i^1(0; x_1, t, \check{w}) - \varphi_i^1(0; x_2, t, \check{w})| + \\ &+ N_1 A_1^1 |\varphi_i(0; x_1, t, w) - \varphi_i(0; x_2, t, w)| \leq (A^1 N_2(1 + \check{L})T + \\ &+ N_1 A_1^1 M_1) |x_1 - x_2| \leq N_9(1 + \check{L}T) |x_1 - x_2|, \end{aligned} \quad (56)$$

де $N_9 = A^1 N_2(1 + T_0) + N_1 A_1^1 M_1$. Далі, $\chi_i(x_1, t, w) = \chi_i(x_2, t, w) = 0$ при $(x_1, t), (x_2, t) \in \Pi_i^\alpha(w)$. Отже,

$$\begin{aligned} |\mathfrak{I}_i^1[\check{w}](x_1, t) - \mathfrak{I}_i^1[\check{w}](x_2, t)| &\leq \int_0^t \{N_1(F_1^1 + F_2^1 L) |\varphi_i(\tau; x_1, t, w) - \varphi_i(\tau; x_2, t, w)| + \\ &+ N_1 \sum_{j=1}^m (F^1 |u_j^1(\varphi_i(\tau; x_1, t, w), \tau) - u_j^1(\varphi_i(\tau; x_2, t, w), \tau)| + P_0^1(F_1^1 + F_2^1 L) \times \\ &\times |\varphi_i(\tau; x_1, t, w) - \varphi_i(\tau; x_2, t, w)|) + N_1 \sum_{k=1}^n (F^1 |v_k^1(\varphi_i(\tau; x_1, t, w), \tau) - \\ &- v_k^1(\varphi_i(\tau; x_2, t, w), \tau)| + Q(F_1^1 + F_2^1 L) |\varphi_i(\tau; x_1, t, w) - \varphi_i(\tau; x_2, t, w)|) + (F^1 + \\ &+ F^1(P_0^1 m + Qn)) |\varphi_i^1(\tau; x_1, t, \check{w}) - \varphi_i^1(\tau; x_2, t, \check{w})| \} d\tau \leq \int_0^t \{N_1(F_1^1 + F_2^1 L) M_1 \times \\ &\times |x_1 - x_2| + (N_1 m(F^1 L^1 + P_0^1(F_1^1 + F_2^1 L)) + N_1 n(F^1(Q_1 + Q_2 L) + Q(F_1^1 + \\ &+ F_2^1 L))) M_1 |x_1 - x_2| + (F^1 + F^1(P_0^1 m + Qn)) N_2(1 + \check{L})T |x_1 - x_2| \} d\tau \leq \\ &\leq N_{10}(1 + \check{L})T |x_1 - x_2|, \end{aligned} \quad (57)$$

де $N_{10} = \check{F}_1 N_1 M_1 + M_1 N_1 m(F^1 + P_0^1 \check{F}_1) + (F^1 + F^1(P_0^1 m + Qn))N_2 T_0 + N_1 n(F^1 \check{Q}_1 + Q\check{F}_1)M_1$.

Тоді з (56), (57), (35) матимемо

$$|\mathfrak{A}_i^1[\check{w}](x_1, t) - \mathfrak{A}_i^1[\check{w}](x_2, t)| \leq N_{11}(1 + \check{L}T)|x_1 - x_2|, \quad (58)$$

де $N_{11} = N_9 + N_{10}(1 + T_0)$.

Зрештою, з (58) одержуємо

$$|\check{\mathfrak{A}}_i^1[\check{w}](x_1, t) - \check{\mathfrak{A}}_i^1[\check{w}](x_2, t)| \leq N_{12}(1 + \check{L}T)|x_1 - x_2|, \quad (59)$$

де $N_{12} = \max\{N_{11}, (A_1 M_1 + M_1 \check{F}_1(T_0 + 1)) = N^1\}$.

Лема 9. На множині $\Pi_i^\alpha(w)$ функція $\check{\mathfrak{A}}_i[\check{w}](x, t)$ задовольняє умову Ліпшиця за t з константою $\max\{N^2(1 + LT), N_{13} + N_{12}\Lambda(1 + \check{L}T)\}$.

Доведення. В $\Pi_i^\alpha(w)$ функція $\mathfrak{A}_i[w](x, t)$ задовольняє умову Ліпшиця за t з константою $N^2(1 + LT)$, де $N^2 = F + \max\{1, \Lambda\}N^1$.

Нехай для визначеності $t_1 \leq t_2$ і $(x, t_1), (x, t_2) \in \Pi_i^\alpha(w)$. Тоді, очевидно, що знайдеться точка $(x_3, t_1) \in \Pi_i^\alpha(w)$ така, що $\varphi_i(t_1; x, t_2, w) = x_3$. Звідси

$$|\mathfrak{A}_i^1[\check{w}](x_3, t_1) - \mathfrak{A}_i^1[\check{w}](x, t_2)| \leq N_1(F^1 + F^1(Qn + P_0^1 m))|t_1 - t_2| = N_{13}|t_1 - t_2|, \quad (60)$$

де $N_{13} = N_1(F^1 + F^1(P_0^1 m + Qn))$.

Тому на підставі леми 8 одержимо оцінку

$$\begin{aligned} |\mathfrak{A}_i^1[\check{w}](x, t_1) - \mathfrak{A}_i^1[\check{w}](x, t_2)| &\leq |\mathfrak{A}_i^1[\check{w}](x, t_1) - \mathfrak{A}_i^1[\check{w}](x_3, t_1)| + |\mathfrak{A}_i^1[\check{w}](x_3, t_1) - \\ &\quad - \mathfrak{A}_i^1[\check{w}](x, t_2)| \leq N_{12}(1 + \check{L}T)|x - x_3| + N_{13}|t_1 - t_2|. \end{aligned}$$

Оскільки $|x_3 - x| = |\varphi_i(t_1; x, t_2, w) - x| \leq \int_{t_1}^{t_2} \Lambda d\tau \leq \Lambda|t_1 - t_2|$, то

$$|\mathfrak{A}_i^1[\check{w}](x, t_1) - \mathfrak{A}_i^1[\check{w}](x, t_2)| \leq (N_{13} + N_{12}(1 + \check{L}T)\Lambda)|t_1 - t_2|. \quad (61)$$

Звідси і випливає твердження леми.

Наслідок 2. З лем 8 і 9 одержуємо, що функція $\check{\mathfrak{A}}_i[\check{w}](x, t)$ на множині $\Pi_i^\alpha(w)$ задовольняє умову Ліпшиця за двома змінними з константою

$$\check{L}_\alpha^\mathfrak{A} = N_{14}(1 + \check{L}T), \quad (62)$$

де $N_{14} = \max\{N_{11}, N^2, N_{13} + N_{12}\Lambda\}$.

Лема 10. На множині $\Pi_i^0(w)$ і $\Pi_i^\ell(w)$ функція $\check{\mathfrak{A}}_i[\check{w}](x, t)$ задовольняє умову Ліпшиця за x з константою $N_{19}(1 + \check{L})$.

Доведення. Нехай для визначеності $(x_1, t), (x_2, t) \in \Pi_i^0(w)$, $x_1 \leq x_2$. Тоді з ліпшицевості функції $\mathfrak{A}_i[w](x, t)$ в $\Pi_i^0(w) \cup \Pi_i^\ell(w)$ за x з константою $N^3(1 + L)$, де $N^3 = \max\{\Gamma_1, \Gamma_2\}M_2 + F_1 T_0 M_1 + F M_2$, і на підставі лем 5, 6 отримаємо

$$|\mathfrak{A}_i^1[\check{w}](x_1, t) - \mathfrak{A}_i^1[\check{w}](x_2, t)| \leq N_1 \Lambda_0^{-1} \{(\Gamma_1^1 + \Gamma_2^1 L)|\chi_i(x_1, t, w) - \chi_i(x_2, t, w)| +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j \in I_+^0} (P_0^{(2)}(\Gamma_1^1 + \Gamma_2^1 L) |\chi_i(x_1, t, w) - \chi_i(x_2, t, w)| + \Gamma^1 |u_j^{(2)}(0, \chi_i(x_1, t, w)) - \\
& - u_j^{(2)}(0, \chi_i(x_2, t, w))|) + (\Gamma^1 + m\Gamma^1 P_0^{(2)}) |\chi_i^1(x_1, t, \check{w}) - \chi_i^1(x_2, t, \check{w})| \leq \\
& \leq N_1 \Lambda_0^{-1} \{(\Gamma_1^1 + \Gamma_2^1 L) M_2 |x_1 - x_2| + m P_0^{(2)} (\Gamma_1^1 + \Gamma_2^1 L) M_2 |x_1 - x_2| + \\
& + \Gamma^1 m N_6 (1 + \check{L}) M_2 |x_1 - x_2|\} + (\Gamma^1 + m\Gamma^1 P_0^{(2)}) N_7 (1 + \check{L}) |x_1 - x_2| \leq [N_{15} + \Gamma^1 (1 + \\
& + m P_0^{(2)}) N_7] (1 + \check{L}) |x_1 - x_2| \leq N_{16} (1 + \check{L}) |x_1 - x_2|, \tag{63}
\end{aligned}$$

де $N_{15} = N_1 \Lambda_0^{-1} M_2 (\check{\Gamma}_1 (1 + m P_0^{(2)}) + \Gamma^1 m N_6)$, $N_{16} = N_{15} + \Gamma^1 (1 + m P_0^{(2)}) N_7$.

Далі

$$\begin{aligned}
& |\mathfrak{Y}_i^1[\check{w}](x_1, t) - \mathfrak{Y}_i^1[\check{w}](x_2, t)| \leq N_1 \Lambda_0^{-1} (F_3 + F_2 L) |\chi_i(x_1, t, w) - \chi_i(x_2, t, w)| + \\
& + F |\chi_i^1(x_1, t, \check{w}) - \chi_i^1(x_2, t, \check{w})| \leq N_1 \Lambda_0^{-1} (F_1 + F_2 L) M_2 |x_1 - x_2| + \\
& + F N_7 (1 + \check{L}) |x_1 - x_2| \leq N_{17} (1 + \check{L}) |x_1 - x_2|, \tag{64}
\end{aligned}$$

де $N_{17} = N_1 M_2 \Lambda_0^{-1} F_1 + F N_7$.

Оскільки $x_1 \leq x_2$, то $\chi_i(x_1, t, w) \geq \chi_i(x_2, t, w)$. Тоді, використавши (57), отримаємо

$$\begin{aligned}
& |\mathfrak{J}_i^1[\check{w}](x_1, t) - \mathfrak{J}_i^1[\check{w}](x_2, t)| \leq \int_{\chi_i(x_1, t, w)}^t \{N_1 (F_1^1 + F_2^1 L) M_1 |x_1 - x_2| + N_1 m (F^1 L^1 + \\
& + P_0^1 (F_1^1 + F_2^1 L)) M_1 |x_1 - x_2| + N_1 n (F^1 (Q_1 + Q_2 L) + Q (F_1^1 + F_2^1 L)) M_1 |x_1 - x_2| + \\
& + (F^1 + F^1 (P_0^1 m + Q n)) N_2 (1 + \check{L}) T |x_1 - x_2|\} d\tau + \int_{\chi_i(x_2, t, w)}^{\chi_i(x_1, t, w)} (F^1 + F^1 (P_0^1 m + \\
& + Q n)) N_1 d\tau \leq N_{18} (1 + \check{L} T) |x_1 - x_2|, \tag{65}
\end{aligned}$$

де $N_{18} = N_{10} (1 + T_0) + M_2 (F^1 + F^1 (P_0^1 m + Q n))$.

Об'єднуючи (63), (64) і (65), приходимо до потрібного результату, де $N_{19} = \max\{N^3, N_{16} + N_{17} + N_{18} (T_0 + 1)\}$.

Наслідок 3. З леми 8 та леми 10 випливає, що функція $\check{\mathfrak{A}}_i[\check{w}](x, t)$ ($i = 1, \dots, m$) в $\Pi(T)$ задовольняє умову Ліпшиця за x з константою $\check{L}_1^{\mathfrak{A}} = \max\{N_{19}, N_{12} (T_0 + 1)\} (1 + \check{L})$.

Справді, якщо точки (x_1, t) , (x_2, t) належать різним множинам $\Pi_i^\alpha(w)$ і $\Pi_i^0(w)$ (або ж $\Pi_i^\alpha(w)$ і $\Pi_i^\ell(w)$), то, ввівши проміжну точку і скориставшись лемою 1, отримаємо потрібне твердження. Якщо ж точки (x_1, t) , (x_2, t) належать різним множинам $\Pi_i^0(w)$ і $\Pi_i^\ell(w)$, то, ввівши проміжну точку $(x_3, t) \in \Pi_i^\alpha(w)$, задача зводиться до тільки що описаного випадку, який знову приводить до потрібного твердження.

Лема 11. У прямокутнику $\Pi(T)$ функція $\check{\mathfrak{A}}[\check{w}](x, t)$ є ліпшицевою за t з константою $\max\{M_9 (1 + L), (N_{13} + \check{L}_1^{\mathfrak{A}} \Lambda)\}$.

Доведення. Ліпшицевість функції $\check{\mathfrak{A}}_i[\check{w}](x, t)$ в $\Pi_i^\alpha(w)$ за t і ліпшицевість функції $\mathfrak{A}_i[w](x, t)$ в $\Pi(T)$ за t з константою $M_9(1+L)$ зразу ж випливає з леми 9. Нехай тепер $(x_1, t), (x_2, t) \in \Pi_i^0(w)$ (випадок $(x_1, t), (x_2, t) \in \Pi_i^\ell(w)$ розглядається аналогічно), крім того, нехай для визначеності $t_1 \geq t_2$. Тоді знайдеться точка (x_3, t_1) така, що $x_3 = \varphi_i(t_1; x, t_2, w)$. Далі, міркуючи так само, як при доведенні леми 9, матимемо

$$|\mathfrak{A}_i^1[\check{w}](x, t_1) - \mathfrak{A}_i^1[\check{w}](x, t_2)| \leq |\mathfrak{A}_i^1[\check{w}](x, t_1) - \mathfrak{A}_i^1[\check{w}](x_3, t_1)| + |\mathfrak{A}_i^1[\check{w}](x_3, t_1) - \mathfrak{A}_i^1[\check{w}](x, t_2)| \leq (N_{13} + \check{L}_1^{\mathfrak{A}}\Lambda)|t_1 - t_2|. \quad (66)$$

Якщо ж $(x, t_1) \in \Pi_i^0(w)$, $(x, t_2) \in \Pi_i^\alpha(w)$ (випадок $(x, t_1) \in \Pi_i^\ell(w)$, $(x, t_2) \in \Pi_i^\alpha(w)$ розглядається аналогічно), то, ввівши проміжну точку (x, t_3) , приходимо до того самого результату.

Отже, отримуємо потрібне твердження з константою Ліпшиця $\check{L}_2^{\mathfrak{A}} = \max\{M_9(1+L), (N_{13} + \check{L}_1^{\mathfrak{A}}\Lambda)\}$.

Отже, функція $\check{\mathfrak{A}}_i[\check{w}](x, t)$ ліпшицева за x, t з константою $\check{L}^{\mathfrak{A}} = N_{20}(1 + \check{L})$, де $N_{20} = \max\{M_9, (N_{13} + \max\{1, \Lambda\} \max\{N_{19}, N_{12}(T_0 + 1)\})\}$.

Лема 12. В $\Pi(T)$ функція $\check{\mathfrak{B}}_j[\check{w}](x, t)$ задовольняє умову Ліпшиця за x з константою $N_{22} = \max\{Q, Q^1(1 + P_0^{(2)}m + nP_0^1)\}$, а функція $\mathfrak{B}_j[w](x, t)$, крім того, є ліпшицевою за t з константою $B_1 + RQ + \ell(Q_3 + Q_2L)$.

Доведення. Нехай $(x, t_1), (x, t_2) \in \Pi(T)$ і нехай для визначеності $t_2 \geq t_1$, $s_j(t_2; w) \leq s_j(t_1; w) \leq x$. Тоді для функції $\mathfrak{B}_j[w](x, t)$ виконується нерівність

$$\begin{aligned} |\mathfrak{B}_j[w](x, t_1) - \mathfrak{B}_j[w](x, t_2)| &\leq B_1|t_2 - t_1| + \int_{s_j(t_1; w)}^x |q_j(\xi, t_1, w(\xi, t_1)) - \\ &- q_j(\xi, t_2, w(\xi, t_2))| d\xi + \int_{s_j(t_1; w)}^{s_j(t_2; w)} |q_j(\xi, t_2, w(\xi, t_2))| d\xi \leq (B_1 + RQ)|t_1 - t_2| + \\ &+ \int_{s_j(t_1; w)}^x (Q_3 + Q_2L)|t_1 - t_2| d\xi \leq (B_1 + RQ + \ell(Q_3 + Q_2L))|t_1 - t_2|, \end{aligned} \quad (67)$$

звідки й отримуємо другу частину твердження леми.

Розглянемо тепер ліпшицевість за x функції $\mathfrak{B}_j^1[\check{w}](x, t)$.

Нехай $(x_1, t), (x_2, t) \in \Pi(T)$ і $x_1 \leq x_2$. Тоді з (36) маємо

$$|\mathfrak{B}_j^1[\check{w}](x_1, t) - \mathfrak{B}_j^1[\check{w}](x_2, t)| \leq \int_{x_1}^{x_2} (Q^1 + Q^1P_0^{(2)}m + Q^1P_0^1n) d\xi = N_{21}|x_1 - x_2|, \quad (68)$$

де $N_{21} = Q^1(1 + P_0^{(2)}m + nP_0^1)$.

В просторі $\check{\mathbb{E}}_1(T, \check{L})$ розглянемо кулю $\check{\mathbb{E}}_2(T, \check{L}, P, P^1)$, яка містить функції $\check{w}$ такі, що $\max\{\|u(x, t) - \alpha(x)\|, \|v(x, t)\|\} \leq P$, $\max\{\|u^1(x, t) - \alpha'(x)\|, \|v^{(2)}(x, t)\|\} \leq P^1$, де P^1 – деяка константа, причому $P^1 > \max\{A^1, B^1\}$.

Лема 13. При достатньо малому T оператор $\check{\mathfrak{S}}$ відображає кулю $\check{\mathbb{E}}_2(T, \check{L}, P, P^1)$ в кулю $\check{\mathbb{E}}_2(T, \check{L}^{\check{\mathfrak{S}}}, P, P^1)$.

Доведення. Зрозуміло, що оператор $\mathfrak{S}$ відображає кулю $\mathbb{E}_2(T, L, P)$ в кулю $\mathbb{E}_2(T, M_{10}(1+L), P)$. Розглянемо тепер дію оператора $\mathfrak{S}^1$.

Нехай $(x, t) \in \Pi_i^\alpha(w)$, тоді $\mathfrak{Y}_i^1[\check{w}](x, t) = 0$, тому отримуємо

$$\begin{aligned} |\mathfrak{R}_i^1[\check{w}](x, t) - \alpha'_i(x)| &\leq |\alpha'_i(\varphi_i(0; x, t, w))\varphi_i^1(0; x, t, \check{w}) - \alpha'_i(x)| \leq \\ &\leq |\alpha'_i(\varphi_i(0; x, t, w))\varphi_i^1(0; x, t, \check{w}) - \alpha'_i(x)\varphi_i^1(0; x, t, \check{w})| + |\alpha'_i(x)\varphi_i^1(0; x, t, \check{w}) - \alpha'_i(x)| \leq \\ &\leq A^1|\varphi_i^1(0; x, t, \check{w}) - 1| + N_1 A_1^1 |\varphi_i(0; x, t, w) - x| \leq A_1^1 N_1 \Lambda T + A^1 |\varphi_i^1(0; x, t, \check{w}) - e^0| \leq \\ &\leq N_1 A_1^1 \Lambda T + A^1 N_1 \int_0^t (\Lambda^1 + \Lambda^1(mP_0^1 + Qn)) d\tau \leq (A_1^1 \Lambda N_1 + A^1 \Lambda^1 N_1 (1 + mP_0^1 + Qn)) T. \end{aligned} \quad (69)$$

Далі

$$|\mathfrak{I}_i^1[\check{w}](x, t)| \leq \int_0^t N_1 (F^1 + F^1(P_0^1 m + Qn)) d\tau \leq N_1 (F^1 + F^1(P_0^1 m + Qn)). \quad (70)$$

Об'єднуючи (69) і (70), одержимо, що при $(x, t) \in \Pi_i^\alpha(w)$ виконується нерівність

$$|\mathfrak{A}_i^1[\check{w}](x, t) - \alpha'_i(x)| \leq N'_{22} T, \quad (71)$$

де $N'_{22} = N_1(A_1^1 \Lambda + A^1 \Lambda(1 + mP_0^1 + Qn) + F^1 + F^1(P_0^1 m + Qn))$.

Нехай далі $(x, t) \in \Pi_i^0(w)$ (випадок $(x, t) \in \Pi_i^\ell(w)$ розглядається аналогічно). Тоді, помноживши рівність (19) на $\chi_i^1(x, t, \check{w})$, перенісши всі одержані члени цієї рівності в ліву частину і віднявши все це від $\mathfrak{R}_i^1[\check{w}](x, t) + \mathfrak{Y}_i^1[\check{w}](x, t) - \alpha'_i(x)$, отримаємо

$$\begin{aligned} |\mathfrak{R}_i^1[\check{w}](x, t) + \mathfrak{Y}_i^1[\check{w}](x, t) - \alpha'_i(x)| &\leq \chi_i^1(x, t, \check{w})[(\Gamma_1^1 + \Gamma_2^1 L)\chi_i(x, t, w) + \\ &+ \sum_{j \in I_+^0} |(\gamma_i^0)'_{u_j}(\chi_i(x, t, w), u(0, \chi_i(x, t, w)))u_j^{(2)}(0, \chi_i(x, t, w)) - \\ &- (\gamma_i^0)'_{u_j}(0, u(0, 0))u_j^{(2)}(0, 0)| + | - f_i(0, \chi_i(x, t, w), w(0, \chi_i(x, t, w))) + \\ &+ f_i(0, 0, w(0, 0))|] + \left| \frac{\varphi_i^1(\chi_i(x, t, w); x, t, \check{w})}{\lambda_i(0, \chi_i(x, t, w), w(0, \chi_i(x, t, w)))} \lambda_i(0, 0, \alpha(0))\alpha'_i(0) - \alpha'_i(x) \right|. \end{aligned}$$

Оскільки $|\chi_i(x, t, w)| \leq T$, а також $\Pi_i^0(w)$ в області $x \leq \Lambda T$, то, з урахуванням леми 5, маємо

$$\begin{aligned} |\mathfrak{R}_i^1[\check{w}](x, t) + \mathfrak{Y}_i^1[\check{w}](x, t) - \alpha'_i(x)| &\leq N_1 \Lambda_0^{-1} ((\Gamma_1^1 + \Gamma_2^1 L)T + P_0^{(2)} m (\Gamma_1^1 + \Gamma_2^1 L)T + \\ &+ \Gamma^1 m N_6 (1 + \check{L})T + (F_3 + F_2 L)T) + \left| \frac{\varphi_i^1(\chi_i(x, t, w); x, t, \check{w})}{\lambda_i(0, \chi_i(x, t, w), w(0, \chi_i(x, t, w)))} \times \right. \\ &\times \lambda_i(0, 0, \alpha(0))\alpha'_i(0) - \frac{\varphi_i^1(\chi_i(x, t, w); x, t, \check{w})}{\lambda_i(0, \chi_i(x, t, w), w(0, \chi_i(x, t, w)))} \lambda_i(0, 0, \alpha(0))\alpha'_i(x) \left. \right| + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left| \frac{\varphi_i^1(\chi_i(x, t, w); x, t, \check{w})}{\lambda_i(0, \chi_i(x, t, w), w(0, \chi_i(x, t, w)))} \lambda_i(0, 0, \alpha(0)) \alpha'_i(x) - \alpha'_i(x) \right| \leq \\
& \leq N_1 \Lambda_0^{-1} (\Gamma_1^1 + \Gamma_2^1 L + P_0^{(2)} m (\Gamma_1^1 + \Gamma_2^1 L) + \Gamma^1 m N_6 (1 + \check{L}) + F_3 + F_2 L) T + \\
& + A_1^1 \Lambda \Lambda_0^{-1} N_1 \Lambda T + A^1 \Lambda_0^{-1} |\varphi_i^1(\chi_i(x, t, w); x, t, \check{w}) \lambda_i(0, 0, \alpha(0)) - \\
& - \lambda_i(0; \chi_i(x, t, w), w(0, \chi_i(x, t, w)))| \leq N_1 \Lambda_0^{-1} (\Gamma_1^1 + \Gamma_2^1 L + P_0^{(2)} m (\Gamma_1^1 + \Gamma_2^1 L) + \\
& + \Gamma^1 m N_6 (1 + \check{L}) + F_3 + F_2 L) T + A_1^1 \Lambda^2 \Lambda_0^{-1} N_1 T + A^1 \Lambda_0^{-1} N_1 (\Lambda_3 + \Lambda_2 L) T + \\
& + A^1 \Lambda_0^{-1} \Lambda |\varphi_i^1(\chi_i(x, t, w); x, t, \check{w}) - 1| \leq N_1 \Lambda_0^{-1} (\Gamma_1^1 + \Gamma_2^1 L + P_0^{(2)} m (\Gamma_1^1 + \Gamma_2^1 L) + \\
& + \Gamma^1 m N_6 (1 + \check{L}) + F_3 + F_2 L) T + A_1^1 \Lambda^2 \Lambda_0^{-1} N_1 T + A^1 \Lambda_0^{-1} N_1 (\Lambda_3 + \Lambda_2 L) T + \\
& + A^1 \Lambda_0^{-1} \Lambda^1 \Lambda N_1 (1 + m P_0^1 + Q n) T \leq A_1^1 \Lambda^2 \Lambda_0^{-1} N_1 T + \\
& + A^1 \Lambda_0^{-1} \Lambda^1 \Lambda N_1 (1 + m P_0^1 + Q n) T + N_{23} (1 + \check{L}) T, \tag{72}
\end{aligned}$$

де $N_{23} = N_1 \Lambda_0^{-1} (\check{\Gamma}_1 + P_0^{(2)} m \check{\Gamma}_1 + \Gamma^1 m N_6 + \check{F}_1) + A^1 \Lambda_0^{-1} N_1 \check{\Lambda}_1$. Зауважимо, що при $(x, t) \in \Pi_i^0(w)$ нерівність (70) також правильна, тому з (71) отримуємо, що в $\Pi(T)$ виконуються співвідношення

$$|\mathfrak{A}_i^1[\check{w}](x, t) - \alpha'_i(x)| \leq N_{24} (1 + \check{L}) T, \tag{73}$$

де $N_{24} = N'_{22} + N_{23} + A_1^1 \Lambda^2 \Lambda_0^{-1} N_1 + A^1 \Lambda_0^{-1} \Lambda^1 \Lambda N_1 (1 + m P_0^1 + Q n)$.

Розглянемо оператор $\mathfrak{B}^1[\check{w}](x, t)$.

Нехай $(x, t) \in D_j^c$, тоді

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{B}_j^1[\check{w}](x, t)| & \leq B^1 + \left| \int_{s_j(t; w)}^x [(q_j)'_t(\xi, t, w(\xi, t)) + \right. \\
& + \sum_{i: c_i = c_j} (q_j)'_{u_i}(\xi, t, w(\xi, t)) u_i^{(2)}(\xi, t) + \sum_{k: c_k = c_j} (q_j)'_{v_k}(\xi, t, w(\xi, t)) v_k^{(2)}(\xi, t) \left. d\xi \right| + \\
& + RQ \leq B^1 + \int_{c_j - RT}^{c_j + RT} (Q^1 + m Q^1 (F + \Lambda P_0^1) + n Q^1 P_0^1 e^{H\ell}) d\xi + RQ \leq \\
& \leq B^1 + RQ + 2Q^1 RT (1 + m(F + \Lambda P_0^1) + n P_0^1 e^{H\ell}).
\end{aligned}$$

Нехай $(x, t) \in D_j^\ell$ (випадок $(x, t) \in D_j^0$ розглядають аналогічно). Тоді згідно з умовою A21 матимемо

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{B}_j^1[\check{w}](x, t)| & \leq B^1 + \left| \int_{s_j(t; w)}^x [(q_j)'_t(\xi, t, w(\xi, t)) + \right. \\
& + \sum_{i: c_i = c_j} (q_j)'_{u_i}(\xi, t, w(\xi, t)) u_i^{(2)}(\xi, t) + \sum_{k: c_k = c_j} (q_j)'_{v_k}(\xi, t, w(\xi, t)) v_k^{(2)}(\xi, t) \left. d\xi \right| +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +RQ \leq B^1 + RQ + \int_{s_j(t;w)}^{c_j+RT} |[(q_j)'_t(\xi, t, w(\xi, t))] + \sum_{i:c_i=c_j} (q_j)'_{u_i}(\xi, t, w(\xi, t))u_i^{(2)}(\xi, t) + \\
& + \sum_{k;c_k=c_j} (q_j)'_{v_k}(\xi, t, w(\xi, t))v_k^{(2)}(\xi, t)]|d\xi + \int_{c_j+RT}^x |[(q_j)'_t(\xi, t, w(\xi, t)) + \\
& + \sum_{i:c_i=c_j} (q_j)'_{u_i}(\xi, t, w(\xi, t))u_i^{(2)}(\xi, t) + \sum_{k;c_k=c_j} (q_j)'_{v_k}(\xi, t, w(\xi, t))v_k^{(2)}(\xi, t)]|d\xi \leq \\
& \leq B^1 + RQ + 2Q^1RT(1 + m(F + \Lambda P_0^1) + nP_0^1e^{H\ell}) + \int_{c_j+RT}^x [(1 + m(F + \Lambda P_0^1)) \times \\
& \times M^1(\xi) \max_{k;c_k=c_j} |v_k(\xi, t)| + Q^1n \max_{k;c_k=c_j} |v_k^{(2)}(\xi, t)|]d\xi \leq B^1 + RQ + 2Q^1RT(1 + m \times \\
& \times (F + \Lambda P_0^1) + nP_0^1e^{H\ell}) + \int_{c_j+RT}^x [(1 + m(F + \Lambda P_0^1))M^1(\xi) \{ \max_{k;c_k=c_j} |v_k(\xi, t)| \times \\
& \times e^{-H(\xi-c_j-RT)} \} + Q^1n \{ \max_{k;c_k=c_j} |v_k^{(2)}(\xi, t)| e^{-H(\xi-c_j-RT)} \}]e^{H(\xi-c_j-RT)}d\xi \leq B^1 + \\
& + RQ + 2Q^1RT(1 + m(F + \Lambda P_0^1) + nP_0^1e^{H\ell}) + [(1 + m(F + \Lambda P_0^1)) \max_x M^1(x) \|v\| + \\
& + Q^1n \|v^{(2)}\|] \int_{c_j+RT}^x e^{H(\xi-c_j-RT)}d\xi \leq B^1 + RQ + 2Q^1RT(1 + m(F + \Lambda P_0^1) + \\
& + nP_0^1e^{H\ell}) + [(1 + m(F + \Lambda P_0^1)) \max_x M^1(x)P_0 + Q^1nP_0^1]H^{-1}(e^{H(x-c_j-RT)} - 1).
\end{aligned}$$

Помноживши отриману нерівність на $e^{-H(x-c_j-RT)}$ і перейшовши до максимуму по D_j^ℓ , одержимо

$$\begin{aligned}
& \max_{D_j^\ell} \{ |\mathfrak{B}_j^1[\check{w}](x, t)| e^{-H(x-c_j-RT)} \} \leq B^1 + RQ + 2Q^1RT(1 + m(F + \Lambda P_0^1) + nP_0^1e^{H\ell}) + \\
& + [(1 + m(F + \Lambda P_0^1)) \max_x M^1(x)P_0 + Q^1nP_0^1]H^{-1}(1 - e^{-H\ell}) \leq B^1 + RQ + 2Q^1RT(1 + \\
& + m(F + \Lambda P_0^1) + nP_0^1e^{H\ell}) + [(1 + m(F + \Lambda P_0^1)) \max_x M^1(x)P_0 + Q^1nP_0^1]H^{-1}. \quad (74)
\end{aligned}$$

Отже, для $(x, t) \in \Pi(T)$ правильна оцінка

$$\begin{aligned}
& \|\mathfrak{B}^1[\check{w}](x, t)\| \leq B^1 + RQ + 2Q^1RT(1 + m(F + \Lambda P_0^1) + nP_0^1e^{H\ell}) + \\
& + [(1 + m(F + \Lambda P_0^1)) \max_x M^1(x)P_0 + Q^1nP_0^1]H^{-1}. \quad (75)
\end{aligned}$$

Об'єднуючи результати (73) і (75), отримуємо, що при виконанні нерівностей

$$B^1 + RQ + 2Q^1RT(1 + m(F + \Lambda P_0^1) + nP_0^1e^{H\ell}) + \\ + [(1 + m(F + \Lambda P_0^1)) \max_x M^1(x)P_0 + Q^1nP_0^1]H^{-1} < P^1, \quad (76)$$

$$N_{24}(1 + \check{L})T < P^1, \quad (77)$$

оператор $\check{\mathfrak{S}}$ відображає кулю $\check{\mathbb{E}}_2(T, \check{L}, P, P^1)$ в кулю $\check{\mathbb{E}}_2(T, \check{L}^{\mathfrak{S}}, P, P^1)$, що й завершує доведення лема.

Зауваження 3. Взагалі кажучи, $\check{L}^{\mathfrak{S}} \geq L$ і $\check{L}^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}} \geq \check{L}^{\mathfrak{S}}$ ($\check{L}^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}}$ - константа Ліпшиця функції $\check{\mathfrak{S}}[\check{\mathfrak{S}}\check{w}](x, t)$). Тому: $\check{\mathbb{E}}_2(T, \check{L}, P, P^1) \xrightarrow{\check{\mathfrak{S}}} \check{\mathbb{E}}_2(T, \check{L}^{\mathfrak{S}}, P, P^1) \xrightarrow{\check{\mathfrak{S}}} \check{\mathbb{E}}_2(T, \check{L}^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}}, P, P^1)$.

Далі будемо вивчати властивості оператора $\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}} = \check{\mathfrak{S}}^3$.

Лема 14. *Оператор $\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}$ при досить малому $T > 0$ і досить великому $\check{L}$ відображає кулю $\check{\mathbb{E}}_2(T, \check{L}, P, P^1)$ в себе.*

Доведення. Функції $\mathfrak{A}[\mathfrak{S}w](x, t)$ за x, t і $\mathfrak{B}[\mathfrak{S}w](x, t)$ за x є ліпшицевими з константою

$$L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}} = N^4(1 + L^{\mathfrak{S}}T) = N^4(1 + M_{10}(1 + L)T) \leq N^5(1 + LT), \quad (78)$$

де $N^4 = F + \max\{1, \Lambda\}[Q + FM_2 + M_1\check{F}_1(1 + T_0) + \Gamma_1M_2 + \max\{1; \Gamma_2M_2\}(F + \max\{1, \Lambda\}(A_1M_1 + \check{F}_1M_1(1 + T_0)))]$, $N^5 = N^4 + N^4M_{10}(T_0 + 1)$.

Крім того, з лема 12 випливає, що функція $\mathfrak{B}[w](x, t)$ є ліпшицевою за t з константою $B_1 + RQ + \ell(Q_3 + Q_2L_t)$. Якщо спочатку взяти $L_t \geq \frac{B_1 + RQ + \ell Q_3}{1 - Q_2\ell}$, то з урахуванням A13 константа Ліпшиця за t для функції $\mathfrak{B}[w](x, t)$, а отже, і для функції $\mathfrak{B}[\mathfrak{S}w](x, t)$, буде меншою за L_t .

З лем 11, 12 отримуємо, що функція $\check{\mathfrak{S}}[\check{\mathfrak{S}}\check{w}](x, t)$ в $\Pi(T)$ є ліпшицевою за двома змінними (функція $\mathfrak{B}^1[\check{\mathfrak{S}}\check{w}](x, t)$ ліпшицева тільки за x , це зауваження стосується всіх подальших викладок) з константою

$$\check{L}^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}} = N_{25}(1 + \check{L}^{\mathfrak{S}}) = N_{25}(1 + N_{25}(1 + \check{L})) \leq N_{26}(1 + \check{L}), \quad (79)$$

де $N_{25} = \max\{N_{20}, N_{22}, \frac{B_1 + RQ + \ell Q_3}{1 - Q_2\ell}\}$, $N_{26} = N_{25}(1 + N_{25})$.

З наслідку 2 і лема 12 будемо мати, що функція $\check{\mathfrak{S}}_i[\check{\mathfrak{S}}\check{w}](x, t)$ в $\Pi_i^\alpha(w)$ є ліпшицевою з константою

$$\check{L}_\alpha^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}} = N_{26}(1 + \check{L}^{\mathfrak{S}}T) \leq N_{26}(1 + N_{25}(1 + \check{L})T) \leq N_{27}(1 + \check{L}T), \quad (80)$$

де $N_{26} = \max\{N_{22}, N_{14}, \frac{B_1 + RQ + \ell Q_3}{1 - Q_2\ell}\}$, $N_{27} = N_{26}(1 + N_{25}(T_0 + 1))$.

Згідно з лемами 8-12, функція $\check{\mathfrak{S}}[\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w}](x, t)$ задовольняє умову Ліпшиця за двома змінними з деякою константою $\check{L}^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}\mathfrak{S}}$. З огляду на те, що аргументами оператора $\check{\mathfrak{S}}$ у випадку, який розглядають, є функції вигляду $\check{\mathfrak{S}}[\check{\mathfrak{S}}\check{w}](x, t)$, то величину константи Ліпшиця для функції $\check{\mathfrak{S}}[\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w}](x, t)$ можна уточнити.

Нехай $(x_1, t), (x_2, t) \in \Pi_i^\alpha(\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w])$, тоді на підставі лема 8 одержимо

$$|\mathfrak{A}_i^1[\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w}](x_1, t) - \mathfrak{A}_i^1[\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w}](x_2, t)| \leq N_{22}(1 + \check{L}^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}}T)|x_1 - x_2| \leq \\ \leq N_{22}(1 + N_{26}(1 + \check{L})T)|x_1 - x_2|. \quad (81)$$

Нехай тепер $(x_1, t), (x_2, t) \in \Pi_i^0(\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w])$ (аналогічно розглядають випадок $(x_1, t), (x_2, t) \in \Pi_i^\ell(\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w])$). Тоді зауважимо, що

$$\begin{aligned} & |\chi_i^1(x_1, t, \check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w}) - \chi_i^1(x_2, t, \check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w})| \leq \Lambda_0^{-1} |\varphi_i^1(\chi_i^1(x_1, t, \check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w}); x_1, t, \check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w}) - \\ & - \varphi_i^1(\chi_i^1(x_2, t, \check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w}); x_2, t, \check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w})| + N_1 \Lambda_0^{-2} |\lambda_i(0, \chi_i(x_1, t, \mathfrak{S}\mathfrak{S}w), \\ & \mathfrak{S}\mathfrak{S}w(0, \chi_i(x_1, t, \mathfrak{S}\mathfrak{S}w))) - \lambda_i(0, \chi_i(x_2, t, \mathfrak{S}\mathfrak{S}w), \mathfrak{S}\mathfrak{S}w(0, \chi_i(x_2, t, \mathfrak{S}\mathfrak{S}w)))| \leq \\ & \leq \Lambda_0^{-1} N_5 (1 + \check{L}^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}} T) |x_1 - x_2| + N_1 \Lambda_0^{-2} (\Lambda_3 + \Lambda_2 L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}}) |\chi_i(x_1, t, \mathfrak{S}\mathfrak{S}w) - \\ & - \chi_i(x_2, t, \mathfrak{S}\mathfrak{S}w)| \leq (\Lambda_0^{-1} N_5 (1 + \check{L}^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}} T) + N_1 \Lambda_0^{-2} (\Lambda_3 + \Lambda_2 L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}}) M_2) |x_1 - x_2| \leq \\ & \leq N'_{27} (1 + \check{L}^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}} T + L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}}) |x_1 - x_2|, \end{aligned} \quad (82)$$

де $N'_{27} = \Lambda_0^{-1} N_5 + N_1 \Lambda_0^{-2} \check{\Lambda}_1 M_2$.

Оскільки $(x_1, t), (x_2, t) \in \Pi_i^0(\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w])$, то $i \in I_+^0$, а отже, точки з координатами $(0, t)$ для $j \in I_+^0$ належать множині $\Pi_j^\alpha(\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w])$. Тому з леми 9 отримуємо, що для $j \in I_+^0$ виконується оцінка

$$|\check{\mathfrak{A}}_j[\check{\mathfrak{S}}\check{w}](0, t_1) - \check{\mathfrak{A}}_j[\check{\mathfrak{S}}\check{w}](0, t_2)| \leq \check{L}_\alpha^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}} |t_1 - t_2|. \quad (83)$$

Введемо позначення

$$\mathfrak{A}_i^{(2)}[\check{\mathfrak{S}}\check{w}](x, t) = f_i(x, t, \mathfrak{S}\mathfrak{S}w(x, t)) - \Lambda_i(x, t, \mathfrak{S}\mathfrak{S}w(x, t)) \mathfrak{A}_i^1[\check{\mathfrak{S}}\check{w}](x, t),$$

$i = 1, \dots, m$.

Тоді для $j \in I_+^0$ на підставі (83) будемо мати

$$\begin{aligned} & |\mathfrak{A}_j^{(2)}[\check{\mathfrak{S}}\check{w}](0, t_1) - \mathfrak{A}_j^{(2)}[\check{\mathfrak{S}}\check{w}](0, t_2)| \leq (F_3 + F_2 L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}}) |t_1 - t_2| + P_0^1 (\Lambda_3 + \Lambda_2 L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}}) \times \\ & \times |t_1 - t_2| + \check{L}_\alpha^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}} |t_1 - t_2| \leq N_{28} (1 + L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}} + \check{L}_\alpha^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}}) |t_1 - t_2| \leq [\check{F}_1 (1 + N^5 (1 + LT)) + \\ & + P_0^1 \check{\Lambda}_1 (1 + N^5 (1 + LT)) + \Lambda N_{27} (1 + \check{L} T)] |t_1 - t_2| \leq N_{29} (1 + \check{L} T) |t_1 - t_2|, \end{aligned} \quad (84)$$

де $N_{28} = \max\{\check{F}_1; P_0^1 \check{\Lambda}_1; \Lambda\}$, $N_{29} = N_{28} (1 + N^5 + N_{27})$.

Оскільки при $i \in I_+^0$ функції $\gamma_i^0(t, \mathfrak{A}[\mathfrak{S}w])$ не залежать від $\mathfrak{A}_j[\mathfrak{S}w]$, коли $j \in I_+^0$, то при $(x_1, t), (x_2, t) \in \Pi_i^0(\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w])$, з урахуванням (82) і (84) матимемо

$$\begin{aligned} & |\mathfrak{R}_i^1[\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w}](x_1, t) - \mathfrak{R}_i^1[\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w}](x_2, t)| \leq N_1 \Lambda_0^{-1} [(\Gamma_1^1 + \Gamma_2^1 L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}}) (1 + m P_0^{(2)}) \times \\ & \times |\chi_i(x_1, t, \mathfrak{S}\mathfrak{S}w) - \chi_i(x_2, t, \mathfrak{S}\mathfrak{S}w)| + \Gamma^1 \sum_{j \in I_+^0} |\mathfrak{A}_j^{(2)}[\mathfrak{S}w](0, \chi_i(x_1, t, \mathfrak{S}\mathfrak{S}w)) - \\ & - \mathfrak{A}_j^{(2)}[\mathfrak{S}w](0, \chi_i(x_2, t, \mathfrak{S}\mathfrak{S}w))|] + (\Gamma^1 + \Gamma^1 m P_0^{(2)}) |\chi_i^1(x_1, t, \check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w}) - \\ & - \chi_i^1(x_2, t, \check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w})| \leq [N_1 \Lambda_0^{-1} M_2 (\Gamma_1^1 + \Gamma_2^1 L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}}) (1 + m P_0^{(2)}) + m N_{29} M_2 \Gamma^1 (1 + \check{L} T) \times \\ & \times N_1 \Lambda_0^{-1} + \Gamma^1 (1 + m P_0^{(2)}) N'_{27} (1 + \check{L}^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}} T + L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}})] |x_1 - x_2| \leq [N_1 \Lambda_0^{-1} M_2 (1 + \\ & + m P_0^{(2)}) \check{\Gamma}_1 (1 + N^5 (1 + LT)) + m N_{29} M_2 N_1 \Lambda_0^{-1} (1 + \check{L} T) + \Gamma^1 (1 + m P_0^{(2)}) N'_{27} (1 + \end{aligned}$$

$$+N_{26}(1+\check{L})T+N^5(1+LT))]|x_1-x_2|\leq N_{30}(1+\check{L}T)|x_1-x_2|, \quad (85)$$

де $N_{30} = N_1\Lambda_0^{-1}M_2(1+mP_0^{(2)})\check{F}_1(1+N^5) + mN_{29}M_2N_1\Lambda_0^{-1} + \Gamma^1(1+mP_0^{(2)})N_{27}'(1+N_{26}(T_0+1)+N^5)$.

Далі, враховуючи (82), одержуємо

$$\begin{aligned} |\mathfrak{Y}_i^1[\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w}](x_1, t) - \mathfrak{Y}_i^1[\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w}](x_2, t)| &\leq N_1\Lambda_0^{-1}(F_3 + F_2L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}})|\chi_i(x_1, t, \mathfrak{S}\mathfrak{S}w) - \\ &- \chi_i(x_2, t, \mathfrak{S}\mathfrak{S}w)| + F|\chi_i^1(x_1, t, \check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w}) - \chi_i^1(x_2, t, \check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w})| \leq [N_1M_2\Lambda_0^{-1}\check{F}_1(1+ \\ &+ L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}}) + FN_{27}'(1+\check{L}^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}}T + L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}})]|x_1-x_2| \leq [N_1M_2\Lambda_0^{-1}\check{F}_1(1+N^5(1+LT)) + \\ &+ FN_{27}'(1+N_{26}(1+\check{L})T + N^5(1+LT))]|x_1-x_2| \leq N_{31}(1+\check{L}T)|x_1-x_2|, \quad (86) \end{aligned}$$

де $N_{31} = N_1M_2\Lambda_0^{-1}\check{F}_1(1+N^5) + FN_{27}'(1+N_{26}(T_0+1)+N^5)$.

Нехай для визначеності $x_1 \leq x_2$. Тоді $\chi_i(x_1, t, \mathfrak{S}\mathfrak{S}w) \geq \chi_i(x_2, t, \mathfrak{S}\mathfrak{S}w)$ і маємо оцінку

$$\begin{aligned} |\mathfrak{J}_i^1[\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w}](x_1, t) - \mathfrak{J}_i^1[\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w}](x_2, t)| &\leq \int_{\chi_i(x_1, t, \mathfrak{S}\mathfrak{S}w)}^t [N_1((F_1 + F_2L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}}) \times \\ &\times |\varphi_i(\tau; x_1, t, \mathfrak{S}\mathfrak{S}w) - \varphi_i(\tau; x_2, t, \mathfrak{S}\mathfrak{S}w)| + (P_0^1m + Qn)(F_1 + F_2L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}}) \times \\ &\times |\varphi_i(\tau; x_1, t, \mathfrak{S}\mathfrak{S}w) - \varphi_i(\tau; x_2, t, \mathfrak{S}\mathfrak{S}w)| + (F^1m\check{L}^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}} + F^1n(Q_1 + Q_2\check{L}^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}})) \times \\ &\times |\varphi_i(\tau; x_1, t, \mathfrak{S}\mathfrak{S}w) - \varphi_i(\tau; x_2, t, \mathfrak{S}\mathfrak{S}w)|) + (F^1 + F^1(P_0^1m + Qn)) \times \\ &\times |\varphi_i^1(\tau; x_1, t, \check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w}) - \varphi_i^1(\tau; x_2, t, \check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w})|] d\tau + \int_{\chi_i(x_2, t, \mathfrak{S}\mathfrak{S}w)}^{\chi_i(x_1, t, \mathfrak{S}\mathfrak{S}w)} F^1N_1(1 + P_0^1m + \\ &+ Qn) d\tau \leq [N_1\check{F}_1(1 + L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}})TM_1 + N_1(P_0^1m + Qn)M_1\check{F}_1(1 + L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}})T + \\ &+ F^1m\check{L}^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}}M_1TN_1 + F^1n(Q_1 + Q_2L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}})M_1TN_1 + F^1(1 + P_0^1m + Qn)TN_2(1 + \\ &+ \check{L}^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}})T]|x_1-x_2| + F^1N_1(1 + P_0^1m + Qn)M_2|x_1-x_2| \leq [N_1\check{F}_1(1 + N^5(1 + LT)) \times \\ &\times TM_1 + N_1(P_0^1 + Qn)M_1\check{F}_1(1 + N^5(1 + LT))T + F^1mN_{26}(1 + \check{L})TM_1N_1 + \\ &+ F^1n\check{Q}_1(1 + N^5(1 + LT))M_1TN_1 + F^1(1 + P_0^1m + Qn)TN_2(1 + \\ &+ N_{26}(1 + \check{L}))T + F^1N_1(1 + P_0^1m + Qn)M_2]|x_1-x_2| \leq N_{32}(1 + N_{33}(1 + \check{L})T)|x_1-x_2|, \quad (87) \end{aligned}$$

де $N_{32} = (N_1\check{F}_1M_1 + N_1(P_0^1m + Qn)M_1\check{F}_1 + F^1mM_1N_1 + F^1n\check{Q}_1M_1N_1 + F^1(1 + P_0^1m + Qn)N_2 + F^1N_1(1 + P_0^1m + Qn)M_2)(T_0 + 1)$, $N_{33} = N^5 + N_{26}$.

Об'єднуючи результати (85), (86) і (87), отримуємо, що при $(x_1, t), (x_2, t) \in \Pi_i^0(\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w])$ виконується нерівність

$$|\mathfrak{A}_i^1[\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w}](x_1, t) - \mathfrak{A}_i^1[\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w}](x_2, t)| \leq N_{34}(1 + \check{L}T)|x_1 - x_2|, \quad (88)$$

де $N_{34} = N_{30} + N_{31} + N_{32} + N_{32}N_{33}(T_0 + 1)$. Якщо тепер точки (x_1, t) і (x_2, t) належать різним множинам $\Pi_i^\alpha(\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w])$ і $\Pi_i^0(\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w])$ або ж $\Pi_i^\alpha(\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w])$ та $\Pi_i^\ell(\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w])$,

то, ввівши проміжну точку і позначивши $N_{35} = \max\{N_{22} + N_{22}N_{26}(T_0 + 1), N_{34}\}$, отримуємо, що функція $\mathfrak{A}^1[\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w}](x, t)$ задовольняє в цих областях умову Ліпшиця за x з константою $N_{35}(1 + \check{L}T)$. Якщо ж точки $(x_1, t), (x_2, t)$ належать множинам $\Pi_i^0(\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w])$ і $\Pi_i^\ell(\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w])$, то, ввівши проміжну точку $(x_3, t) \in \Pi_i^\alpha(\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w])$, аналогічно отримуємо ліпшицевість функції $\mathfrak{A}^1[\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w}](x, t)$ за x з тією самою константою. Отож, функція $\mathfrak{A}^1[\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w}](x, t)$ в $\Pi(T)$ задовольняє за x умову Ліпшиця з константою $N_{35}(1 + \check{L}T)$. Із (78) випливає, що функція $\mathfrak{A}[\mathfrak{S}\mathfrak{S}w](x, t)$ в $\Pi(T)$ задовольняє умову Ліпшиця за x, t з константою $L^{\mathfrak{A}\mathfrak{S}\mathfrak{S}} = N^6(1 + \check{L}T)$, де $N^6 = N^4(1 + N^5T_0)$. Отже, в $\Pi(T)$ функція $\mathfrak{A}[\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w}](x, t)$ задовольняє умову Ліпшиця за x з константою $\check{L}_x^{\mathfrak{A}\mathfrak{S}\mathfrak{S}} = N_{36}(1 + \check{L}T)$, де $N_{36} = \max\{N^6; N_{35}\}$. З леми 11 отримуємо ліпшицевість в $\Pi(T)$ функції $\mathfrak{A}[\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w}](x, t)$ за t з константою $\max\{L^{\mathfrak{A}\mathfrak{S}\mathfrak{S}}; N_{13} + \check{L}_x^{\mathfrak{A}\mathfrak{S}\mathfrak{S}}\Lambda\} \leq N_{37}(1 + \check{L}T)$, де $N_{37} = \max\{N^6, N_{13} + \Lambda N_{36}\}$.

Отже, в $\Pi(T)$ функція $\mathfrak{A}[\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w}](x, t)$ є ліпшицевою за x, t з константою $\check{L}^{\mathfrak{A}\mathfrak{S}\mathfrak{S}} = N_{38}(1 + \check{L}T)$, де $N_{38} = \max\{N^6; N_{13} + \max\{1, \Lambda\}N_{36}\}$. З леми 12 випливає, що функція $\mathfrak{B}[\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w}](x, t)$ в $\Pi(T)$ є ліпшицевою за x з константою N_{22} . Тоді з одержаних вище результатів та на підставі леми 14 робимо висновок про те, що в $\Pi(T)$ функція $\check{\mathfrak{S}}[\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w}](x, t)$ задовольняє за x, t (функція $\mathfrak{B}^1[\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w}](x, t)$ тільки за x) умову Ліпшиця з константою $\check{L}^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}\mathfrak{S}} = \max\{N_{22}; N_{38}(1 + \check{L}T); \frac{B_1 + RQ + \ell Q_3}{1 - Q_2\ell}\}$.

Вибираючи тепер з самого початку досить велике значення $\check{L} > \max\{N_{22}; N_{38}; \frac{B_1 + RQ + \ell Q_3}{1 - Q_2\ell}\}$, отримуємо, що при досить малому $T > 0$ виконується $\check{L} \geq \check{L}^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}\mathfrak{S}}$ тому

$$\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}} : \check{\mathbb{E}}_2(T, \check{L}, P, P^1) \rightarrow \check{\mathbb{E}}_2(T, \check{L}, P, P^1). \quad (89)$$

Надалі вважатимемо, що величини $\check{L}$ і T вибрано так, що справджується (89). Перейдемо до вивчення стискуючих властивостей оператора $\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}$.

Введемо позначення $r^1 = \rho^1(\mathfrak{S}^1\check{w}_1, \mathfrak{S}^1\check{w}_2)$; $\check{r} = \check{\rho}(\check{\mathfrak{S}}\check{w}_1, \check{\mathfrak{S}}\check{w}_2)$;
 $r = \rho(\mathfrak{S}w_1, \mathfrak{S}w_2)$; $\varrho = \rho(\mathfrak{S}\mathfrak{S}w_1, \mathfrak{S}\mathfrak{S}w_2)$; $\check{\varrho} = \check{\rho}(\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w}_1, \check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w}_2)$.

Лема 15. Нехай $\check{w}_1, \check{w}_2 \in \check{\mathbb{E}}_2(T, \check{L}, P, P^1)$ і $(x, t) \in \Pi_i^\alpha(w_1) \cap \Pi_i^\alpha(w_2)$. Тоді справджується нерівність

$$\|\check{\mathfrak{A}}[\check{w}_1](x, t) - \check{\mathfrak{A}}[\check{w}_2](x, t)\| \leq N_{42}(1 + \check{L})T\check{\rho}. \quad (90)$$

Доведення. Враховуючи, що

$$\|\mathfrak{A}[w_1](x, t) - \mathfrak{A}[w_2](x, t)\| \leq N^7(1 + L)T\|w_1 - w_2\|, \quad (91)$$

де $N^7 = A_1\check{M}_1 + \check{F}_1\check{M}_1T_0 + e^{H\ell}F_2$, $\check{M}_1 = M_1e^{H\ell}\Lambda_2$, на підставі леми 3 маємо

$$\begin{aligned} |\mathfrak{R}_i^1[\check{w}_1](x, t) - \mathfrak{R}_i^1[\check{w}_2](x, t)| &\leq |\alpha'_i(\varphi_i(0; x, t, w_1))\varphi_i^1(0; x, t, \check{w}_1) - \\ &- \alpha'_i(\varphi_i(0; x, t, w_2))\varphi_i^1(0; x, t, \check{w}_2)| \leq A^1|\varphi_i^1(0; x, t, \check{w}_1) - \varphi_i^1(0; x, t, \check{w}_2)| + \\ &+ N_1A_1^1|\varphi_i(0; x, t, w_1) - \varphi_i(0; x, t, w_2)| \leq A^1N_3(1 + \check{L})T\check{\rho} + \\ &+ N_1A_1^1\check{M}_1T\|w_1 - w_2\| \leq N_{39}(1 + \check{L})T\check{\rho}, \end{aligned} \quad (92)$$

де $N_{39} = A^1N_3 + N_1A_1^1\check{M}_1$.

Оскільки $(x, t) \in \Pi_i^\alpha(w_1) \cap \Pi_i^\alpha(w_2)$, то $\mathfrak{Y}_i^1[\check{w}_1](x, t) = \mathfrak{Y}_i^1[\check{w}_2](x, t) = 0$ і, крім того, $\chi_i(x, t, w_1) = \chi_i(x, t, w_2) = 0$. Тому виконується нерівність

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{J}_i^1[\check{w}_1](x, t) - \mathfrak{J}_i^1[\check{w}_2](x, t)| &\leq \int_0^t (N_1[F_1^1|\varphi_i(\tau; x, t, w_1) - \varphi_i(\tau; x, t, w_2)| + F_2^1 \times \\
&\times |w_1(\varphi_i(\tau; x, t, w_1), \tau) - w_2(\varphi_i(\tau; x, t, w_2), \tau)| + P_0^1 \sum_{j=1}^m (F_1^1|\varphi_i(\tau; x, t, w_1) - \\
&- \varphi_i(\tau; x, t, w_2)| + F_2^1|w_1(\varphi_i(\tau; x, t, w_1), \tau) - w_2(\varphi_i(\tau; x, t, w_2), \tau)|) + \\
&+ Q \sum_{k=1}^n (F_1^1|\varphi_i(\tau; x, t, w_1) - \varphi_i(\tau; x, t, w_2)| + F_2^1|w_1(\varphi_i(\tau; x, t, w_1), \tau) - \\
&- w_2(\varphi_i(\tau; x, t, w_2), \tau)|) + F^1 \sum_{j=1}^m |u_{1j}^1(\varphi_i(\tau; x, t, w_1), \tau) - \\
&- u_{2j}^1(\varphi_i(\tau; x, t, w_2), \tau)| + F^1 \sum_{k=1}^n |v_{1k}^1(\varphi_i(\tau; x, t, w_1), \tau) - \\
&- v_{2k}^1(\varphi_i(\tau; x, t, w_2), \tau)|) + (F^1 + F^1(P_0^1 m + Qn))|\varphi_i^1(\tau; x, t, \check{w}_1) - \\
&- \varphi_i^1(\tau; x, t, \check{w}_2)|) d\tau \leq \int_0^t [N_1(F_1^1 \check{M}_1 T \rho + F_2^1 L \check{M}_1 T \rho + F_2^1 \rho e^{H\ell} + (P_0^1 m + Qn) \times \\
&\times (F_1^1 \check{M}_1 T \rho + F_2^1 L \check{M}_1 T \rho + F_2^1 \rho e^{H\ell}) + F^1 m(L^1 \check{M}_1 T \rho + \rho^1) + F^1 n((Q_1 + Q_2 L) \times \\
&\times \check{M}_1 T \rho + Q_2 \rho e^{H\ell})) + F^1(1 + P_0^1 m + Qn)N_3(1 + \check{L})T\check{\rho}] d\tau \leq \int_0^t (N_1[(F_1^1 + F_2^1 L) \times \\
&\times \check{M}_1 T \rho + F_2^1 \rho e^{H\ell} + (P_0^1 m + Qn)((F_1^1 + F_2^1 L)\check{M}_1 T \rho + F_2^1 \rho e^{H\ell}) + F^1 m(L^1 \check{M}_1 T \rho + \\
&+ \rho^1 e^{H\ell})] + F^1(1 + P_0^1 m + Qn)N_3(1 + \check{L})T\check{\rho} + F^1 n(\check{Q}_1(1 + L)\check{M}_1 T \rho + \\
&+ Q_2 \rho e^{H\ell})N_1) d\tau \leq N_{40}(1 + \check{L})T\check{\rho}, \tag{93}
\end{aligned}$$

де $N_{40} = T_0 N_1 \check{F}_1 \check{M}_1 + F_2^1 e^{H\ell} N_1 + N_1(P_0^1 m + Qn)(\check{F}_1 \check{M}_1 T_0 + F_2^1 e^{H\ell}) + N_1 F^1 m(M_1 T_0 + e^{H\ell}) + F^1(1 + P_0^1 m + Qn)N_3 T_0 + N_1 F^1(\check{Q}_1 \check{M}_1 + Q_2 e^{H\ell})$.

Об'єднуючи результати (92) і (93), отримуємо, що при $(x, t) \in \Pi_i^\alpha(w_1) \cap \Pi_i^\alpha(w_2)$ правильне співвідношення

$$|\mathfrak{A}_i^1[\check{w}_1](x, t) - \mathfrak{A}_i^1[\check{w}_2](x, t)| \leq N_{41}(1 + \check{L})T\check{\rho}, \tag{94}$$

де $N_{41} = N_{39} + N_{40}$. Об'єднуючи цей результат з (91), приходимо до потрібного результату з константою $N_{42} = \max\{N^7, N_{41}\}$.

Лема 16. Для $i = 1, \dots, m$ виконується

$$|u_{1i}^{(2)}(0, t_1) - u_{2i}^{(2)}(0, t_2)| \leq N_{43}(\check{\rho} + (1 + \check{L})|t_1 - t_2|). \quad (95)$$

Доведення. З леми 5 отримуємо

$$\begin{aligned} |u_{1i}^{(2)}(0, t_1) - u_{2i}^{(2)}(0, t_2)| &\leq |u_{1i}^{(2)}(0, t_1) - u_{1i}^{(2)}(0, t_2)| + |u_{1i}^{(2)}(0, t_2) - u_{2i}^{(2)}(0, t_2)| \leq \\ &\leq N_6(1 + \check{L})|t_1 - t_2| + |f_i(0, t_2, u_1(0, t_2), v_1(0, t_2)) - f_i(0, t_2, u_2(0, t_2), v_2(0, t_2))| + \\ &\quad + |\lambda_i(0, t_2, u_1(0, t_2), v_1(0, t_2))u_{1i}^1(0, t_2) - \lambda_i(0, t_2, u_2(0, t_2), v_2(0, t_2))u_{2i}^1(0, t_2)| \leq \\ &\leq N_6(1 + \check{L})|t_1 - t_2| + F_2|w_1(0, t_2) - w_2(0, t_2)| + \Lambda|u_{1i}^1(0, t_2) - u_{2i}^1(0, t_2)| + \\ &\quad + P_0^1\Lambda_2|w_1(0, t_2) - w_2(0, t_2)| \leq N_6(1 + \check{L})|t_1 - t_2| + F_2e^{H\ell}\rho + \Lambda\rho^1 + P_0^1\Lambda_2e^{H\ell}\rho \leq \\ &\leq N_{43}(|t_1 - t_2|(1 + \check{L}) + \check{\rho}), \end{aligned} \quad (96)$$

де $N_{43} = \max\{N_6, F_2e^{H\ell} + \Lambda + P_0^1\Lambda_2e^{H\ell}\}$.

Лема 17. Якщо $\check{w}_1, \check{w}_2 \in \check{\mathbb{E}}_2(T, \check{L}, P, P^1)$ і або $(x, t) \in \Pi_i^0(w_1) \cap \Pi_i^0(w_2)$, або $(x, t) \in \Pi_i^\ell(w_1) \cap \Pi_i^\ell(w_2)$, то виконується нерівність

$$|\check{\mathfrak{A}}_i[\check{w}_1](x, t) - \check{\mathfrak{A}}_i[\check{w}_2](x, t)| \leq N_{47}(1 + \check{L}T)\check{\rho}. \quad (97)$$

Доведення. Нехай для визначеності $(x, t) \in \Pi_i^0(w_1) \cap \Pi_i^0(w_2)$. Тоді на підставі лем 7, 16 та оцінки

$$|\mathfrak{A}_i[w_1](x, t) - \mathfrak{A}_i[w_2](x, t)| \leq N^8(1 + LT)\rho, \quad (98)$$

де $N^8 = T_0(\Gamma_1\check{M}_2 + F_1\check{M}_1T_0 + F_2\check{M}_1 + F_2e^{H\ell} + F\check{M}_2) + \Gamma_2\check{M}_2 + \Gamma_2$, матимемо

$$\begin{aligned} |\mathfrak{R}_i^1[\check{w}_1](x, t) - \mathfrak{R}_i^1[\check{w}_2](x, t)| &\leq N_1\Lambda_0^{-1}[(\Gamma_1^1 + \Gamma_2^1L)|\chi_i(x, t, w_1) - \chi_i(x, t, w_2)| + \\ &\quad + \Gamma_2^1\rho + \Gamma^1 \sum_{j \in I_+^0} |u_{1j}^{(2)}(0, \chi_i(x, t, w_1)) - u_{2j}^{(2)}(0, \chi_i(x, t, w_2))| + P_0^{(2)} \sum_{j \in I_+^0} [(\Gamma_1^1 + \Gamma_2^1L) \times \\ &\quad \times |\chi_i(x, t, w_1) - \chi_i(x, t, w_2)| + \Gamma_2^1\rho]] + \Gamma^1(1 + mP_0^{(2)})|\chi_i^1(x, t, \check{w}_1) - \chi_i^1(x, t, \check{w}_2)| \leq \\ &\leq N_1\Lambda_0^{-1}[(\Gamma_1^1 + \Gamma_2^1L)\check{M}_2T\rho + \Gamma_2^1\rho + \Gamma^1mN_{43}(\check{\rho} + (1 + \check{L})|\chi_i(x, t, w_1) - \\ &\quad - \chi_i(x, t, w_2)|) + P_0^{(2)}m((\Gamma_1^1 + \Gamma_2^1L)\check{M}_2T\rho + \Gamma_2^1\rho)] + \Gamma^1(1 + mP_0^{(2)})N_8(1 + \check{L}T)\check{\rho} \leq \\ &\leq N_1\Lambda_0^{-1}[(1 + P_0^{(2)}m)(\check{\Gamma}_1(1 + L)\check{M}_2T\rho + \Gamma_2^1\rho) + \Gamma^1mN_{43}\check{\rho}(1 + (1 + \check{L})\check{M}_2T)] + \\ &\quad + \Gamma^1(1 + mP_0^{(2)})N_8(1 + \check{L}T)\check{\rho} \leq N_{44}(1 + \check{L}T)\check{\rho}, \end{aligned} \quad (99)$$

де $N_{44} = N_1\Lambda_0^{-1}[(\check{\Gamma}_1\check{M}_2(T_0 + 1) + \Gamma_2^1)(1 + P_0^{(2)}m) + \Gamma^1mN_{43}(1 + \check{M}_2(T_0 + 1))] + \Gamma^1(1 + mP_0^{(2)})N_8$.

Далі

$$|\mathfrak{V}_i^1[\check{w}_1](x, t) - \mathfrak{V}_i^1[\check{w}_2](x, t)| \leq N_1\Lambda_0^{-1}[(F_3 + F_2L)|\chi_i(x, t, w_1) - \chi_i(x, t, w_2)| +$$

$$+F_2e^{H\ell}\rho] + F|\chi_i^1(x, t, \check{w}_1) - \chi_i^1(x, t, \check{w}_2)| \leq N_1\Lambda_0^{-1}[\check{F}_1(1+L)\check{M}_2T\rho + F_2e^{H\ell}\rho] + \\ + FN_8(1+\check{L}T)\check{\rho} \leq N_{45}(1+\check{L}T)\check{\rho}, \quad (100)$$

де $N_{45} = N_1\Lambda_0^{-1}[\check{F}_1\check{M}_2(T_0+1) + F_2e^{H\ell}] + FN_8$.

Нехай для визначеності $\chi_i(x, t, w_1) \leq \chi_i(x, t, w_2)$. Тоді

$$|\mathfrak{I}_i^1[\check{w}_1](x, t) - \mathfrak{I}_i^1[\check{w}_2](x, t)| \leq \int_{\chi_i(x, t, w_2)}^t (N_1[(F_1^1 + F_2^1L)|\varphi_i(\tau; x, t, w_1) - \\ - \varphi_i(\tau; x, t, w_2)| + F_2^1e^{H\ell}\rho + F^1 \sum_{j=1}^m |u_{1j}^1(\varphi_i(\tau; x, t, w_1), \tau) - \\ - u_{2j}^1(\varphi_i(\tau; x, t, w_2), \tau)| + P_0^1m[(F_1^1 + F_2^1L)|\varphi_i(\tau; x, t, w_1) - \varphi_i(\tau; x, t, w_2)| + \\ + F_2^1e^{H\ell}\rho] + F^1 \sum_{k=1}^n |v_{1k}^1(\varphi_i(\tau; x, t, w_1), \tau) - v_{2k}^1(\varphi_i(\tau; x, t, w_2), \tau)| + Qn[(F_1^1 + \\ + F_2^1L)|\varphi_i(\tau; x, t, w_1) - \varphi_i(\tau; x, t, w_2)| + F_2^1e^{H\ell}\rho]) + (F^1 + F^1(P_0^1m + Qn)) \times \\ \times |\varphi_i^1(\tau; x, t, \check{w}_1) - \varphi_i^1(\tau; x, t, \check{w}_2)|) d\tau + \int_{\chi_i(x, t, w_1)}^{\chi_i(x, t, w_2)} N_1F^1(1 + P_0^1m + Qn) d\tau \leq \\ \leq \int_{\chi_i(x, t, w_2)}^t (N_1[\check{F}_1(1+L)\check{M}_1T\rho + F_2e^{H\ell}\rho + F^1mL^1\check{M}_1T\rho + F^1m\rho + (P_0^1m + Qn) \times \\ \times (\check{F}_1(1+L)\check{M}_1T\rho + F_2^1e^{H\ell}\rho) + F^1n(Q_1 + Q_2L)\check{M}_1T\rho + F^1Q_2ne^{H\ell}\rho] + F^1(1 + \\ + P_0^1m + Qn)N_3(1+\check{L}T)\check{\rho}) d\tau + N_1F^1(1 + P_0^1m + Qn)\check{M}_2T\rho \leq N_{46}(1+\check{L}T)\check{\rho}, \quad (101)$$

де $N_{46} = N_1[\check{F}_1\check{M}_1T_0 + F_2^1e^{H\ell} + F^1m\check{M}_1T_0 + F^1m + (P_0^1m + Qn)(\check{F}_1\check{M}_1T_0 + F_2^1e^{H\ell}) + \\ + F^1n\check{M}_1\check{Q}_1T_0 + Q_2F^1ne^{H\ell}] + T_0F^1(1 + P_0^1m + Qn)N_3 + N_1F^1(1 + P_0^1m + Qn)\check{M}_2$.

Об'єднуючи результати (99)-(101), отримуємо таке: оскільки $\Pi_i^0(w_1) \cap \Pi_i^\ell(w_2) = \Pi_i^\ell(w_1) \cap \Pi_i^0(w_2) = \emptyset$, то в $(\bar{\Pi}_i^0(w_1) \cap \bar{\Pi}_i^0(w_2)) \cup (\bar{\Pi}_i^\ell(w_1) \cap \bar{\Pi}_i^\ell(w_2))$ виконується

$$|\check{\mathfrak{A}}_i[\check{w}_1](x, t) - \check{\mathfrak{A}}_i[\check{w}_2](x, t)| \leq N_{47}(1+\check{L}T)\check{\rho}, \quad (102)$$

де $N_{47} = \max\{N^8, N_{44} + N_{45} + N_{46}(T_0+1)\}$.

Лема 18. *Нехай $\check{w}_1, \check{w}_2 \in \check{\mathbb{E}}_2(T, \check{L}, P, P^1)$ і або $(x, t) \in \Pi_i^\alpha(w_1) \cap \Pi_i^0(w_2)$, або $(x, t) \in \Pi_i^0(w_1) \cap \Pi_i^\alpha(w_2)$, або $(x, t) \in \Pi_i^\alpha(w_1) \cap \Pi_i^\ell(w_2)$, або $(x, t) \in \Pi_i^\ell(w_1) \cap \Pi_i^\alpha(w_2)$. Тоді правильна нерівність*

$$|\check{\mathfrak{A}}_i[\check{w}_1](x, t) - \check{\mathfrak{A}}_i[\check{w}_2](x, t)| \leq N_{51}(1+\check{L}T)\check{\rho}. \quad (103)$$

Доведення. Легко бачити, що

$$|\mathfrak{A}_i[w_1](x, t) - \mathfrak{A}_i[w_2](x, t)| \leq N^9(1 + L)T\rho, \quad (104)$$

де $N^9 = A_1\check{M}_1 + \check{\Gamma}_1\check{M}_2 + \check{F}_1T_0\check{M}_1 + F_2e^{H\ell} + F\check{M}_2$.

Нехай тепер для визначеності $(x, t) \in \Pi_i^\alpha(w_1) \cap \Pi_i^0(w_2)$ (інші випадки розглядають аналогічно). Оскільки $(x, t) \in \Pi_i^\alpha(w_1)$, то $\chi_i(x, t, w_1) = 0$. З іншого боку, $(x, t) \in \Pi_i^0(w_2)$, тому $x \leq \Lambda T$. Отже, отримуємо оцінку

$$|\chi_i(x, t, w_2)| \leq \check{M}_2T\rho. \quad (105)$$

Оскільки $(x, t) \in \Pi_i^0(w_2)$, то $i \in I_+^0$, $\lambda_i(x, t, w_1) \geq \Lambda_0$, тому функція $\varphi_i(\tau; x, t, w_1)$ при $0 \leq \tau \leq t$ буде зростаючою за τ . Отже,

$$\varphi_i(0; x, t, w_1) \leq \varphi_i(\chi_i(x, t, w_2); x, t, w_1). \quad (106)$$

Також зауважимо, що $\varphi_i(\chi_i(x, t, w_2); x, t, w_2) = 0$, тому правильна оцінка

$$|\varphi_i(\chi_i(x, t, w_2); x, t, w_1) - \varphi_i(\chi_i(x, t, w_2); x, t, w_2)| \leq \check{M}_1T\rho. \quad (107)$$

Із (106) і (107) випливає

$$\varphi_i(0; x, t, w_1) \leq \check{M}_1T\rho. \quad (108)$$

Зауважимо таке: оскільки $(x, t) \in \Pi_i^\alpha(w_1)$, то $\mathfrak{Y}_i^1[\check{w}_1](x, t) = 0$. Помноживши умови узгодження (19) на $\chi_i^1(x, t, \check{w}_2)$ та використавши отримані співвідношення, матимемо

$$\begin{aligned} & |\mathfrak{R}_i^1[\check{w}_1](x, t) - \mathfrak{R}_i^1[\check{w}_2](x, t) + \mathfrak{Y}_i^1[\check{w}_1](x, t) - \mathfrak{Y}_i^1[\check{w}_2](x, t)| = \\ & = |\alpha'_i(\varphi_i(0; x, t, w_1))\varphi_i^1(0; x, t, \check{w}_1) - [(\gamma_i^0)'_t(\chi_i(x, t, w_2), u_2(0, \chi_i(x, t, w_2)))] + \\ & + \sum_{j \in I_+^0} (\gamma_i^0)'_{u_{2j}}(\chi_i(x, t, w_2), u_2(0, \chi_i(x, t, w_2)))u_{2j}^{(2)}(0, \chi_i(x, t, w_2))\chi_i^1(x, t, \check{w}_2) + \\ & + 0 - (-f_i(0, \chi_i(x, t, w_2), w_2(0, \chi_i(x, t, w_2)))\chi_i^1(x, t, \check{w}_2)) + \chi_i^1(x, t, \check{w}_2) \times \\ & \times [(\gamma_i^0)'_t(0, \alpha(0)) + \sum_{j \in I_+^0} (\gamma_i^0)'_{u_{2j}}(0, \alpha(0))[f_j(0, 0, \alpha(0), v_2(0, 0)) - \\ & - \lambda_j(0, 0, \alpha(0), v_2(0, 0))\alpha'_j(0)] - f_i(0, 0, \alpha(0), v_2(0, 0)) + \lambda_i(0, 0, \alpha(0), v_2(0, 0)) \times \\ & \times \alpha'_i(0)] \leq N_1\Lambda_0^{-1} [(\gamma_i^0)'_t(0, \alpha(0)) - (\gamma_i^0)'_t(\chi_i(x, t, w_2), u_2(0, \chi_i(x, t, w_2)))] + \\ & + \sum_{j \in I_+^0} |(\gamma_i^0)'_{u_{2j}}(0, \alpha(0))u_{2j}^{(2)}(0, 0) - (\gamma_i^0)'_{u_{2j}}(\chi_i(x, t, w_2), u_2(0, \chi_i(x, t, w_2))) \times \\ & \times u_{2j}^{(2)}(0, \chi_i(x, t, w_2))| + |\chi_i^1(x, t, \check{w}_2)| |f_i(0, \chi_i(x, t, w_2), w_2(0, \chi_i(x, t, w_2))) - \\ & - f_i(0, 0, \alpha(0), v_2(0, 0))| + |\alpha'_i(\varphi_i(0; x, t, w_1))\varphi_i^1(0; x, t, \check{w}_1) + \chi_i^1(x, t, \check{w}_2) \times \\ & \times \lambda_i(0, 0, \alpha(0), v_2(0, 0))\alpha'_i(0)| \leq N_1\Lambda_0^{-1}[(\Gamma_1^1 + \Gamma_2^1L)|\chi_i(x, t, w_2)| + P_0^{(2)} \sum_{j \in I_+^0} (\Gamma_1^1 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\Gamma_2^1 L)|\chi_i(x, t, w_2)| + \Gamma^1 \sum_{j \in I_+^0} |u_{2j}^{(2)}(0, 0) - u_{2j}^{(2)}(0, \chi_i(x, t, w_2))| + N_1 \Lambda_0^{-1} (F_3 + \\
& + F_2 L)|\chi_i(x, t, w_2)| + |\alpha'_i(\varphi_i(0; x, t, w_1))\varphi_i^1(0; x, t, \check{w}_1) - \\
& - \frac{\varphi_i^1(\chi_i(x, t, w_2); x, t, \check{w}_2)}{\lambda_i(0, \chi_i(x, t, w_2), w_2(0, \chi_i(x, t, w_2)))} \lambda_i(0, 0, \alpha(0), v_2(0, 0))\alpha'_i(0)| \leq N_1 \Lambda_0^{-1} \times \\
& \times [\check{\Gamma}_1(1 + L)\check{M}_2 T \rho + P_0^{(2)} \sum_{j \in I_+^0} \check{\Gamma}_1(1 + L)\check{M}_2 T \rho + \Gamma^1 \sum_{j \in I_+^0} N_6(1 + \check{L})\check{M}_2 T \rho] + N_1 \Lambda_0^{-1} \times \\
& \times \check{F}_1(1 + L)\check{M}_2 T \rho + N_1 |\alpha'_i(\varphi_i(0; x, t, w_1)) - \alpha'_i(0)| + A^1 |\varphi_i^1(0; x, t, \check{w}_1) - \\
& - \frac{\varphi_i^1(\chi_i(x, t, w_2); x, t, \check{w}_2) \lambda_i(0, 0, w_2(0, 0))}{\lambda_i(0, \chi_i(x, t, w_2), w_2(0, \chi_i(x, t, w_2)))}| \leq N_1 \Lambda_0^{-1} \check{M}_2 (\check{\Gamma}_1(1 + mP_0^{(2)}) + \\
& + \Gamma^1 mN_6)(1 + \check{L})T \rho + N_1 \Lambda_0^{-1} \check{F}_1(1 + L)\check{M}_2 T \rho + N_1 A_1^1 |\varphi_i(0; x, t, w_1)| + A^1 \Lambda \Lambda_0^{-1} \times \\
& \times |\varphi_i^1(0; x, t, \check{w}_1) - \varphi_i^1(\chi_i(x, t, w_2); x, t, \check{w}_2)| + A^1 N_1 |1 - \\
& - \frac{\lambda_i(0, 0, w_2(0, 0))}{\lambda_i(0, \chi_i(x, t, w_2), w_2(0, \chi_i(x, t, w_2)))}| \leq N_1 \Lambda_0^{-1} \check{M}_2 (\check{\Gamma}_1(1 + mP_0^{(2)}) + \Gamma^1 mN_6 + \\
& + \check{F}_1)(1 + \check{L})T \rho + N_1 A_1^1 \check{M}_1 T \rho + A^1 \Lambda \Lambda_0^{-1} N_4 |\chi_i(x, t, w_2)| + A^1 \Lambda \Lambda_0^{-1} N_3 (1 + \check{L})T \check{\rho} + \\
& + A^1 N_1 \Lambda_0^{-1} |\lambda_i(0, \chi_i(x, t, w_2), w_2(0, \chi_i(x, t, w_2))) - \lambda_i(0, 0, w_2(0, 0))| \leq \\
& \leq N_1 \Lambda_0^{-1} \check{M}_2 (\check{\Gamma}_1(1 + mP_0^{(2)}) + \Gamma^1 mN_6 + \check{F}_1)(1 + \check{L})T \rho + N_1 A_1^1 \check{M}_1 T \rho + \\
& + A^1 \Lambda \Lambda_0^{-1} N_4 \check{M}_2 T \rho + A^1 \Lambda \Lambda_0^{-1} N_3 (1 + \check{L})T \check{\rho} + A^1 N_1 \Lambda_0^{-1} (\Lambda_3 + \Lambda_2 L) \check{M}_2 T \rho \leq \\
& \leq N_{48} (1 + \check{L})T \check{\rho}, \tag{109}
\end{aligned}$$

де $N_{48} = N_1 \Lambda_0^{-1} \check{M}_2 (\check{\Gamma}_1(1 + mP_0^{(2)}) + \Gamma^1 mN_6 + \check{F}_1) + N_1 A_1^1 \check{M}_1 + A^1 \Lambda \Lambda_0^{-1} (N_4 \check{M}_2 + N_3) + A^1 N_1 \Lambda_0^{-1} \check{\Lambda}_1 \check{M}_2$.

Згідно з лемою 3, отримаємо

$$\begin{aligned}
& |\mathfrak{I}_i^1[\check{w}_1](x, t) - \mathfrak{I}_i^1[\check{w}_2](x, t)| \leq \int_{\chi_i(x, t, w_2)}^t (N_1 [(F_1^1 + F_2^1 L)|\varphi_i(\tau; x, t, w_1) - \\
& - \varphi_i(\tau; x, t, w_2)| + F_2^1 e^{H\ell} \rho + P_0^1 \sum_{j=1}^m [(F_1^1 + F_2^1 L)|\varphi_i(\tau; x, t, w_1) - \varphi_i(\tau; x, t, w_2)| + \\
& + F_2^1 e^{H\ell} \rho] + F^1 \sum_{j=1}^m |u_{1j}^1(\varphi_i(\tau; x, t, w_1), \tau) - u_{2j}^1(\varphi_i(\tau; x, t, w_2), \tau)| + Q \sum_{k=1}^n [(F_1^1 + \\
& + F_2^1 L)|\varphi_i(\tau; x, t, w_1) - \varphi_i(\tau; x, t, w_2)| + F_2^1 e^{H\ell} \rho] + \\
& + F^1 \sum_{k=1}^n |v_{1k}^1(\varphi_i(\tau; x, t, w_1), \tau) - v_{2k}^1(\varphi_i(\tau; x, t, w_2), \tau)| + F^1 (1 + P_0^1 m + Qn) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times |\varphi_i^1(\tau; x, t, \check{w}_1) - \varphi_i^1(\tau; x, t, \check{w}_2)| d\tau + \int_0^{\chi_i(x, t, w_2)} N_1 F^1(1 + P_0^1 m + Qn) d\tau \leq \\
& \leq \int_{\chi_i(x, t, w_2)}^t (N_1[(\check{F}_1(1 + L)\check{M}_1 T \rho + F_2^1 e^{H\ell})(1 + P_0^1 m + Qn) + F^1 m(L^1 \check{M}_1 T \rho + \rho) + \\
& + F^1 n((Q_1 + Q_2 L)\check{M}_1 T \rho + Q_2 e^{H\ell} \rho)] + F^1(1 + P_0^1 m + Qn) N_3(1 + \check{L}) T \check{\rho}) d\tau + \\
& + N_1 F^1(1 + P_0^1 m + Qn) \check{M}_2 T \rho \leq N_{49}(1 + \check{L}) T \check{\rho}, \tag{110}
\end{aligned}$$

де $N_{49} = N_1[(1 + P_0^1 m + Qn)(\check{F}_1 \check{M}_1 T_0 + F_2^1 e^{H\ell}) + F^1 m(\check{M}_1 T_0 + 1) + F^1 n(\check{M}_1 \check{Q}_1 T_0 + e^{H\ell} Q_2)] + F^1(1 + P_0^1 m + Qn) N_3 T_0 + N_1 F^1(1 + P_0^1 m + Qn) \check{M}_2$.

Об'єднуючи результати (109) і (110), одержуємо, що при $(x, t) \in \Pi_i^\alpha(w_1) \cap \Pi_i^0(w_2)$ виконується

$$|\mathfrak{A}_i^1[\check{w}_1](x, t) - \mathfrak{A}_i^1[\check{w}_2](x, t)| \leq N_{50}(1 + \check{L}) T \check{\rho}, \tag{111}$$

де $N_{50} = N_{48} + N_{49}$.

Об'єднуючи цей результат із (104), отримуємо (103) з $N_{51} = \max\{N^9, N_{50}\}$.

Наслідок 4. Оскільки ми припускаємо, що завжди виконується нерівність $2\Lambda T < \ell$, то $\Pi_i^0(w_1) \cap \Pi_i^\ell(w_2) = \emptyset$. Тому в лемах 15, 17, 18 розглянуто всі можливі розташування точки $(x, t) \in \Pi(T)$. Отже, для $(x, t) \in \Pi(T)$ виконуються співвідношення

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{A}_i[w_1](x, t) - \mathfrak{A}_i[w_2](x, t)| & \leq N^{10}(1 + LT)\rho, \\
|\mathfrak{A}_i^1[\check{w}_1](x, t) - \mathfrak{A}_i^1[\check{w}_2](x, t)| & \leq N_{52}(1 + \check{L}T)\check{\rho}, \tag{112}
\end{aligned}$$

де $N^{10} = N^8 + (N^7 + N^9)(T_0 + 1)$, $N_{52} = N_{47} + (N_{50} + N_{47})(T_0 + 1)$.

Лема 19. Нехай $\check{w}_1, \check{w}_2 \in \check{\mathbb{E}}_2(T, \check{L}, P, P^1)$ і $(x, t) \in \Pi(T)$. Тоді правильна оцінка

$$\|\check{\mathfrak{B}}[\check{w}_1](x, t) - \check{\mathfrak{B}}[\check{w}_2](x, t)\| \leq N_{57}(1 + \check{L}T)\check{\rho} + N_{58}H^{-1}\check{\rho}. \tag{113}$$

Доведення. Враховуючи A16, маємо, що в $\Pi(T)$ виконується оцінка

$$\|\mathfrak{B}[w_1](x, t) - \mathfrak{B}[w_2](x, t)\| \leq (Q\check{M}_3 T + 2QRT + Q_2 H^{-1})\rho = N^{11} T \rho + Q_2 H^{-1} \rho, \tag{114}$$

де $N^{11} = Q\check{M}_3 + 2QR$, $\check{M}_3 = R_2 e^{(R_1 + LR_2)T + H\ell}$.

Розглянемо стискуючі властивості оператора $\mathfrak{B}^1$. Нехай для визначеності $s_j(t; w_1) \leq s_j(t; w_2)$.

Позначимо

$$\begin{aligned}
|w_1(\xi, t) - w_2(\xi, t)|_{c_j} & = \max\{|u_1(\xi, t) - u_2(\xi, t)|; \max_{k; c_k = c_j} |v_{1k}(\xi, t) - v_{2k}(\xi, t)|\}, \\
|w_1^1(\xi, t) - w_2^1(\xi, t)|_{c_j} & = \max\{|u_1^1(\xi, t) - u_2^1(\xi, t)|; \max_{k; c_k = c_j} |v_{1k}^1(\xi, t) - v_{2k}^1(\xi, t)|\}.
\end{aligned}$$

Зауважимо, що точки вигляду $(s_j(t; w_1), t)$ та $(s_j(t; w_2), t)$ належать множині D_j^c , тому для всіх k таких, що $c_k = c_j$, справджується нерівність $|v_{1k}(s_j(t; w_1), t) - v_{2k}(s_j(t; w_1), t)| \leq \rho$.

1. Нехай $(x, t) \in D_j^c$, $c_j \neq 0$ і $c_j \neq \ell$ (випадки $c_j = 0$ або $c_j = \ell$ доводять аналогічно).

Нехай $s_j(t; w_1) \leq s_j(t; w_2) \leq x$. Згідно з умовою A13 матимемо

$$\begin{aligned}
& |\mathfrak{B}_j^1[\check{w}_1](x, t) - \mathfrak{B}_j^1[\check{w}_2](x, t)| \leq \int_{s_j(t; w_1)}^{s_j(t; w_2)} Q^1(1 + P_0^1 m + Qn) d\xi + \int_{s_j(t; w_2)}^x (Q_2^1 \times \\
& \times \max\{|u_1(\xi, t) - u_2(\xi, t)|; \max_{k; c_k = c_j} |v_{1k}(\xi, t) - v_{2k}(\xi, t)|\} + P_0^{(2)} \sum_{i; c_i = c_j} Q_2^1 \times \\
& \times \max\{|u_1(\xi, t) - u_2(\xi, t)|; \max_{k; c_k = c_j} |v_{1k}(\xi, t) - v_{2k}(\xi, t)|\} + Q^1 \sum_{i; c_i = c_j} |u_{1i}^{(2)}(\xi, t) - \\
& - u_{2i}^{(2)}(\xi, t)| + P_0^1 \sum_{k; c_k = c_j} Q_2^1 \max\{|u_1(\xi, t) - u_2(\xi, t)|; \max_{z; c_z = c_j} |v_{1z}(\xi, t) - \\
& - v_{2z}(\xi, t)|\} + Q^1 \sum_{k; c_k = c_j} |v_{1k}^{(2)}(\xi, t) - v_{2k}^{(2)}(\xi, t)|) d\xi + R(Q_1 |s_j(t; w_1) - s_j(t; w_2)| + \\
& + Q_2 \max\{|u_1(s_j(t; w_1), t) - u_2(s_j(t; w_2), t)|; \max_{k; c_k = c_j} |v_{1k}(s_j(t; w_1), t) - \\
& - v_{2k}(s_j(t; w_2), t)|\}) + Q(R_1 |s_j(t; w_1) - s_j(t; w_2)| + R_2 \max\{|u_1(s_j(t; w_1), t) - \\
& - u_2(s_j(t; w_2), t)|; \max_{k; c_k = c_j} |v_{1k}(s_j(t; w_1), t) - v_{2k}(s_j(t; w_2), t)|\}) \leq \\
& \leq Q^1(1 + P_0^{(2)} m + Qn) \check{M}_3 T \rho + \int_{c_j - RT}^{c_j + RT} [Q_2^1(1 + P_0^{(2)} m + P_0^1 n) |w_1(\xi, t) - w_2(\xi, t)|_{c_j} + \\
& + Q^1 n |w_1^1(\xi, t) - w_2^1(\xi, t)|_{c_j} + Q^1 m (F_2 |w_1(\xi, t) - w_2(\xi, t)|_{c_j} + P_0^1 \Lambda_2 |w_1(\xi, t) - \\
& - w_2(\xi, t)|_{c_j} + \Lambda |u_{1i}^1(\xi, t) - u_{2i}^1(\xi, t)|)] d\xi + Q((R_1 + R_2 L) \check{M}_3 T \rho + R_2 \times \\
& \times |w_1(s_j(t; w_1), t) - w_2(s_j(t; w_1), t)|_{c_j}) + R((Q_1 + Q_2 L) \check{M}_3 T \rho + Q_2 \times \\
& \times |w_1(s_j(t; w_1), t) - w_2(s_j(t; w_1), t)|_{c_j}) \leq Q^1(1 + P_0^{(2)} m + P_0^1 n) \check{M}_3 T \rho + 2[Q_2^1(1 + \\
& + P_0^{(2)} m + P_0^1 n) + Q^1 n + Q^1 m (F_2 + P_0^1 \Lambda_2 + \Lambda)] RT \check{\rho} + \check{M}_3 (Q \check{R}_1 + R \check{Q}_1) (1 + L) T \rho + \\
& + (R_2 + Q_2) \rho \leq N_{53} (1 + \check{L} T) \check{\rho}, \tag{115}
\end{aligned}$$

де $N_{53} = Q^1(1 + P_0^{(2)} m + P_0^1 n) \check{M}_3 T_0 + 2[Q_2^1(1 + P_0^{(2)} m + P_0^1 n) + Q^1 n + Q^1 m (F_2 + P_0^1 \Lambda_2 + \Lambda)] RT_0 + \check{M}_3 (Q \check{R}_1 + R \check{Q}_1) (T_0 + 1) + R_2 + Q_2$.

Нехай тепер $s_j(t; w_1) \leq x \leq s_j(t; w_2)$. Тоді одержимо

$$|\mathfrak{B}_j^1[\check{w}_1](x, t) - \mathfrak{B}_j^1[\check{w}_2](x, t)| \leq \int_{s_j(t; w_1)}^x Q^1(1 + P_0^{(2)} m + P_0^1 n) d\xi + \int_x^{s_j(t; w_2)} Q^1(1 +$$

$$+P_0^{(2)}m + P_0^1n)d\xi + |\mathfrak{Y}_{1j}^1[\check{w}_1](x, t) - \mathfrak{Y}_{1j}^1[\check{w}_2](x, t)| \leq Q^1(1 + P_0^{(2)}m + P_0^1n) \times \\ \times |s_j(t; w_1) - s_j(t; w_2)| + \check{M}_3(Q\check{R}_1 + R\check{Q}_1)(1 + L)T\rho + (R_2 + Q_2)\rho \leq N_{54}(1 + \check{L}T)\check{\rho}, \quad (116)$$

де $N_{54} = Q^1\check{M}_3(1 + P_0^{(2)}m + P_0^1n)T_0 + \check{M}_3(Q\check{R}_1 + R\check{Q}_1)(T_0 + 1) + R_2 + Q_2$.

Нехай, нарешті, $x \leq s_j(t; w_1) \leq s_j(t; w_2)$. Тоді аналогічними міркуваннями, як і в першому випадку, матимемо

$$|\mathfrak{B}_j^1[\check{w}_1](x, t) - \mathfrak{B}_j^1[\check{w}_2](x, t)| \leq N_{53}(1 + \check{L}T)\check{\rho}. \quad (117)$$

Отож, отримали, що при $(x, t) \in D_j^c$ правильна оцінка

$$|\mathfrak{B}_j^1[\check{w}_1](x, t) - \mathfrak{B}_j^1[\check{w}_2](x, t)| \leq N_{53}(1 + \check{L}T)\check{\rho}. \quad (118)$$

2. Нехай тепер $(x, t) \in D_j^\ell$, $c_j \neq 0$ і $c_j \neq \ell$ (випадки $(x, t) \in D_j^0$, а також $c_j = 0$ або $c_j = \ell$ розглядаються аналогічно). На підставі оцінки (118) запишемо

$$|\mathfrak{B}_j^1[\check{w}_1](x, t) - \mathfrak{B}_j^1[\check{w}_2](x, t)| \leq \int_{s_j(t; w_1)}^{s_j(t; w_2)} Q^1(1 + P_0^{(2)}m + P_0^1n)d\xi + \int_{s_j(t; w_2)}^{c_j + RT} [Q_2^1(1 + \\ + P_0^{(2)}m + P_0^1n)|w_1(\xi, t) - w_2(\xi, t)|_{c_j} + Q^1n|w_1^1(\xi, t) - w_2^1(\xi, t)|_{c_j} + Q^1m(F_2 \times \\ \times |w_1(\xi, t) - w_2(\xi, t)|_{c_j} + P_0^1\Lambda_2|w_1(\xi, t) - w_2(\xi, t)|_{c_j} + \Lambda|u_{1i}^1(\xi, t) - u_{2i}^1(\xi, t)|)]d\xi + \\ + \check{M}_3(Q\check{R}_1 + R\check{Q}_1)(1 + L)T\rho + (R_2 + Q_2)\rho + \int_{c_j + RT}^x ([Q_2^1(1 + P_0^{(2)}m + P_0^1n) + Q^1n + \\ + Q^1m(F_2 + P_0^1\Lambda_2)] \max\{|\check{u}_1(\xi, t) - \check{u}_2(\xi, t)|; \max_{k; c_k = c_j} |\check{v}_{1k}(\xi, t) - \check{v}_{2k}(\xi, t)| \times \\ \times e^{-H(\xi - c_j - RT)}\} e^{H(\xi - c_j - RT)})d\xi \leq N_{53}(1 + \check{L}T)\check{\rho} + N_{55}\check{\rho} \int_{c_j + RT}^x e^{H(\xi - c_j - RT)}d\xi \leq \\ \leq N_{53}(1 + \check{L}T)\check{\rho} + N_{55}\check{\rho}H^{-1}(e^{H(x - c_j - RT)} - 1) \leq \\ \leq (N_{53}(1 + \check{L}T) + N_{55}H^{-1}(e^{H(x - c_j - RT)} - 1))\check{\rho}.$$

Помноживши обидві частини одержаної нерівності на $e^{-H(x - c_j - RT)}$ і перейшовши до максимуму по D_j^ℓ , одержимо

$$\max_{D_j^\ell} \{|\mathfrak{B}_j^1[\check{w}_1](x, t) - \mathfrak{B}_j^1[\check{w}_2](x, t)|e^{-H(x - c_j - RT)}\} \leq N_{53}(1 + \check{L}T)\check{\rho} + N_{55}H^{-1}\check{\rho}, \quad (119)$$

де $N_{55} = Q_2^1(1 + P_0^{(2)}m + P_0^1n) + Q^1n + Q^1m(F_2 + P_0^1\Lambda_2 + \Lambda)$.

Отож, в цілому прямокутнику $\Pi(T)$ правильна оцінка

$$\|\mathfrak{B}^1[\check{w}_1](x, t) - \mathfrak{B}^1[\check{w}_2](x, t)\| \leq N_{56}(1 + \check{L}T)\check{\rho} + N_{55}H^{-1}\check{\rho}, \quad (120)$$

де $N_{56} = N_{53}$, що і доводить лему з константами

$$N_{57} = \max\{N_{56}; N^{11}T_0\}; \quad N_{58} = \max\{N_{55}; Q_2\}. \quad (121)$$

Об'єднуючи отримані результати, робимо висновок про те, що при $(x, t) \in \Pi(T)$ виконуються нерівності

$$r \leq N^{10}(1 + LT)\rho + N^{11}T\rho + Q_2H^{-1}\rho, \quad \check{r} \leq N_{59}(1 + \check{L}T)\check{\rho} + N_{58}H^{-1}\check{\rho}, \quad (122)$$

де $N_{59} = \max\{N^{10}; N_{52}; N_{57}\}$.

Зрозуміло, що в загальному випадку оператор $\check{\mathfrak{S}}$ не є стискуючим на кулі $\check{\mathbb{E}}_2(T, \check{L}, P, P^1)$. Розглянемо тепер стискуючі властивості оператора $\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}$.

Лема 20. Нехай $\check{w}_1, \check{w}_2 \in \check{\mathbb{E}}_2(T, \check{L}, P, P^1)$. Тоді виконується нерівність

$$\|\mathfrak{A}^1[\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w}_1](x, t) - \mathfrak{A}^1[\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w}_2](x, t)\| \leq N_{75}(1 + \check{L})^3T\check{\rho} + N_{74}H^{-1}\check{\rho}. \quad (123)$$

Доведення. Передусім зауважимо, що з локального існування узагальненого неперервного розв'язку задачі (1)-(8) і формул (122), (79) випливає, що в $\Pi(T)$ справджуються нерівності

$$\begin{aligned} \varrho &= \|\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1](x, t) - \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2](x, t)\| \leq N^{12}(1 + L)^2T\rho + (N^{11}T + Q_2H^{-1})\rho, \\ \check{\varrho} &= \|\check{\mathfrak{S}}[\check{\mathfrak{S}}\check{w}_1](x, t) - \check{\mathfrak{S}}[\check{\mathfrak{S}}\check{w}_2](x, t)\| \leq N_{60}(1 + \check{L}T)^2\check{\rho} + N_{58}^2H^{-2}\check{\rho}, \end{aligned} \quad (124)$$

де $N^{12} = N^{13}N^{14} + N^{15}$,

$$\begin{aligned} N^{13} &= (2A_1M_1 + \Gamma_1M_2)e^{H\ell}\Lambda_2 + \check{F}_1M_1e^{H\ell}T_0(\Lambda_2 + 1) + 2e^{H\ell}F_2 + FM_2e^{H\ell}\Lambda_2; \\ N^{14} &= \Gamma_2 + \Gamma_2M_2e^{H\ell}\Lambda_2T_0 + N^{11}T_0 + Q_2H^{-1} + \kappa_3 + \check{F}_1T_0^2M_1e^{H\ell}\Lambda_2 + e^{H\ell}F_2T_0 + FM_2e^{H\ell}\Lambda_2T_0; \\ N^{15} &= (\Gamma_1M_2e^{H\ell}\Lambda_2 + \Gamma_2M_5M_2e^{H\ell}\Lambda_2 + \check{F}_1M_1e^{H\ell}\Lambda_2T_0 + e^{H\ell}F_2 + \\ &\quad + FM_2e^{H\ell}\Lambda_2 + \Gamma_2M_2e^{H\ell}\Lambda_2)N^{14} + \Gamma_2(A_1M_1e^{H\ell}\Lambda_2 + \check{F}_1M_1e^{H\ell}T_0 + e^{H\ell}F_2); \\ N_{60} &= N_{59}[N_{59} + N_{58}H^{-1}] + N_{58}N_{59}H^{-1}. \end{aligned}$$

Оцінки (122), (124) при $(x, t) \in \Pi(T)$ дають змогу записати нерівність

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{S}\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1](x, t) - \mathfrak{S}\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2](x, t)\| &\leq N^{12}(1 + L^\mathfrak{S})^2Tr + (N^{11}T + Q_2H^{-1})r \leq \\ &\leq N^{16}(1 + L)^3T\rho + (N^{10}Q_2H^{-1} + Q_2^2H^{-2})\rho, \end{aligned} \quad (125)$$

де $N^{16} = N^{12}(1 + \check{M}_{10})^2[N^{10}(1 + T_0) + N^{11}T_0 + Q_2H^{-1}] + N^{10}N^{11} + N^{10}(N^{11}T_0 + Q_2H^{-1}) + T_0(N^{11})^2 + 2N^{11}Q_2H^{-1}$; $\check{M}_{10} = \max\{M_{10}; \frac{B_1 + RQ + \ell Q_3}{1 - Q_2\ell}\}$.

Нехай тепер $(x, t) \in \Pi_i^\alpha(\mathfrak{S}\mathfrak{S}w_1) \cap \Pi_i^\alpha(\mathfrak{S}\mathfrak{S}w_2)$. Тоді з леми 15 випливає, що

$$\|\check{\mathfrak{A}}[\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w}_1](x, t) - \check{\mathfrak{A}}[\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w}_2](x, t)\| \leq N_{42}(1 + \check{L}^\mathfrak{S})T\check{\varrho} \leq N_{61}(1 + \check{L})^3T\check{\rho}, \quad (126)$$

де $N_{61} = N_{42}(1 + N_{26})(N_{60}(1 + T_0)^2 + N_{58}^2H^{-2})$.

Нехай тепер $(x, t) \in \Pi_i^\alpha(\mathfrak{S}\mathfrak{S}w_1) \cap \Pi_i^0(\mathfrak{S}\mathfrak{S}w_2)$ (випадки $(x, t) \in \Pi_i^0(\mathfrak{S}\mathfrak{S}w_1) \cap \Pi_i^\alpha(\mathfrak{S}\mathfrak{S}w_2)$, $(x, t) \in \Pi_i^\alpha(\mathfrak{S}\mathfrak{S}w_1) \cap \Pi_i^\ell(\mathfrak{S}\mathfrak{S}w_2)$, $(x, t) \in \Pi_i^\ell(\mathfrak{S}\mathfrak{S}w_1) \cap \Pi_i^\ell(\mathfrak{S}\mathfrak{S}w_2)$ розглядають аналогічно). На підставі леми 18 отримаємо, що

$$\|\check{\mathfrak{A}}[\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w}_1](x, t) - \check{\mathfrak{A}}[\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w}_2](x, t)\| \leq N_{51}(1 + \check{L}^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}})T\check{\varrho} \leq N_{62}(1 + \check{L})^3T\check{\varrho}, \quad (127)$$

де $N_{62} = N_{51}(1 + N_{26})(N_{60}(1 + T_0)^2 + N_{58}^2H^{-2})$.

Нехай $(x, t) \in \Pi_i^0(\mathfrak{S}\mathfrak{S}w_1) \cap \Pi_i^0(\mathfrak{S}\mathfrak{S}w_2)$ (аналогічно розглядають випадок $(x, t) \in \Pi_i^\ell(\mathfrak{S}\mathfrak{S}w_1) \cap \Pi_i^\ell(\mathfrak{S}\mathfrak{S}w_2)$). Це означає, що $i \in I_+^0$, а отже, точки вигляду $(0, t)$ для $j \in I_+^0$ належать множині $\Pi_j^\alpha(\mathfrak{S}w_1) \cap \Pi_j^\alpha(\mathfrak{S}w_2)$ (оскільки $\Pi_j^0(\mathfrak{S}w_1) \cap \Pi_j^\ell(\mathfrak{S}w_2) = \emptyset$). Тому на підставі леми 15 для $j \in I_+^0$ виконується нерівність

$$|\check{\mathfrak{A}}_j[\check{\mathfrak{S}}\check{w}_1](0, t) - \check{\mathfrak{A}}_j[\check{\mathfrak{S}}\check{w}_2](0, t)| \leq N_{63}(1 + \check{L})^2T\check{\varrho}, \quad (128)$$

де $N_{63} = N_{42}(1 + N_{25})(N_{60}(1 + T_0)^2 + N_{58}^2H^{-2})$.

Звідси випливає, що для $j \in I_+^0$, з урахуванням оцінок (84), (124), матимемо

$$\begin{aligned} & |\mathfrak{A}_j^{(2)}[\check{\mathfrak{S}}\check{w}_1](0, t_1) - \mathfrak{A}_j^{(2)}[\check{\mathfrak{S}}\check{w}_2](0, t_2)| \leq |\mathfrak{A}_j^{(2)}[\check{\mathfrak{S}}\check{w}_1](0, t_1) - \mathfrak{A}_j^{(2)}[\check{\mathfrak{S}}\check{w}_1](0, t_2)| + \\ & + |\mathfrak{A}_j^{(2)}[\check{\mathfrak{S}}\check{w}_1](0, t_2) - \mathfrak{A}_j^{(2)}[\check{\mathfrak{S}}\check{w}_2](0, t_2)| \leq N_{29}(1 + \check{L}T)|t_1 - t_2| + F_2e^{H\ell} \times \\ & \times \|\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1](0, t_2) - \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2](0, t_2)\| + P_0^1\Lambda_2e^{H\ell}\|\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1](0, t_2) - \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2](0, t_2)\| + \\ & + \Lambda|\mathfrak{A}_j^1[\check{\mathfrak{S}}\check{w}_1](0, t_2) - \mathfrak{A}_j^1[\check{\mathfrak{S}}\check{w}_2](0, t_2)| \leq N_{29}(1 + \check{L}T)|t_1 - t_2| + e^{H\ell}(F_2 + P_0^1\Lambda_2) \times \\ & \times (N^{12}(1 + L)^2T\rho + (N^{11}T + Q_2H^{-1})\rho) + \Lambda N_{63}(1 + \check{L})^2T\check{\varrho} \leq \\ & \leq N_{29}(1 + \check{L}T)|t_1 - t_2| + N_{64}(1 + \check{L})^2T\check{\varrho} + N_{65}H^{-1}\check{\varrho}, \end{aligned} \quad (129)$$

де $N_{64} = \Lambda N_{63} + e^{H\ell}(F_2 + P_0^1\Lambda_2)(N^{12} + N^{11})$; $N_{65} = e^{H\ell}(F_2 + P_0^1\Lambda_2)Q_2$.

Леми 3, 4 та оцінки (124) гарантують, що

$$\begin{aligned} & |\chi_i^1(x, t, \check{\mathfrak{S}}[\check{\mathfrak{S}}\check{w}_1]) - \chi_i^1(x, t, \check{\mathfrak{S}}[\check{\mathfrak{S}}\check{w}_2])| \leq \Lambda_0^{-1}|\varphi_i^1(\chi_i(x, t, \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1]); x, t, \check{\mathfrak{S}}[\check{\mathfrak{S}}\check{w}_1]) - \\ & - \varphi_i^1(\chi_i(x, t, \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2]); x, t, \check{\mathfrak{S}}[\check{\mathfrak{S}}\check{w}_2])| + N_1\Lambda_0^{-2}(\Lambda_3|\chi_i(x, t, \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1]) - \\ & - \chi_i(x, t, \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2])| + \Lambda_2|\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1](0, \chi_i(x, t, \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1])) - \\ & - \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2](0, \chi_i(x, t, \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2]))|) \leq \Lambda_0^{-1}(N_3(1 + \check{L}^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}})T\check{\varrho} + N_4|\chi_i(x, t, \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1]) - \\ & - \chi_i(x, t, \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2])|) + N_1\Lambda_0^{-2}(\Lambda_3\check{M}_2T\varrho + \Lambda_2L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}}\check{M}_2T\varrho + \Lambda_2e^{H\ell}[N^{12}(1 + L)^2T\rho + \\ & + (N^{11}T + Q_2H^{-1})\rho]) \leq \Lambda_0^{-1}N_3(1 + N_{26}(1 + \check{L}))T(N_{60}(1 + \check{L}T)^2\check{\varrho} + N_{58}^2H^{-2}\check{\varrho}) + \\ & + \Lambda_0^{-1}N_4\check{M}_2T(N^{12}(1 + L)^2T\rho + (N^{11}T + Q_2H^{-1})\rho) + N_1\Lambda_0^{-2}(\Lambda_3\check{M}_2 + \check{M}_2\Lambda_2N^5 \times \\ & \times (1 + LT))T(N^{12}(1 + L)^2T\rho + (N^{11}T + Q_2H^{-1})\rho) + N_1\Lambda_0^{-2}\Lambda_2e^{H\ell}(N^{12} \times \\ & \times (1 + L)^2T\rho + (N^{11}T + Q_2H^{-1})\rho) \leq N_{66}(1 + \check{L})^3T\check{\varrho} + N_{67}H^{-1}\rho, \end{aligned} \quad (130)$$

де $N_{67} = e^{H\ell}N_1\Lambda_0^{-2}\Lambda_2Q_2$;

$N_{66} = \Lambda_0^{-1}N_3(1 + N_{26})(N_{60}(1 + T_0)^2 + N_{58}^2H^{-2}) + e^{H\ell}N_1\Lambda_0^{-2}\Lambda_2(N^{12} + N^{11}) + ((N^{12} + N^{11})T_0 + Q_2H^{-1})(\Lambda_0^{-1}N_4\check{M}_2 + N_1\Lambda_0^{-2}(\Lambda_3\check{M}_2 + \check{M}_2\Lambda_2N^5(1 + T_0)))$.

Звідси матимемо

$$\begin{aligned}
& |\mathfrak{R}_i^1[\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w}_1](x, t) - \mathfrak{R}_i^1[\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w}_2](x, t)| \leq N_1\Lambda_0^{-1}[(\Gamma_1^1 + \Gamma_2^1 L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}})|\chi_i(x, t, \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1]) - \\
& - \chi_i(x, t, \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2])| + \Gamma_2^1 e^{H\ell} \varrho + P_0^{(2)} \sum_{j \in I_+^0} [(\Gamma_1^1 + \Gamma_2^1 L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}})|\chi_i(x, t, \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1]) - \\
& - \chi_i(x, t, \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2])| + \Gamma_2^1 e^{H\ell} \varrho] + \Gamma^1 \sum_{j \in I_+^0} |\mathfrak{A}_j^{(2)}[\check{\mathfrak{S}}\check{w}_1](0, \chi_i(x, t, \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1])) - \\
& - \mathfrak{A}_j^{(2)}[\check{\mathfrak{S}}\check{w}_2](0, \chi_i(x, t, \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2]))|] + \Gamma^1(1 + P_0^{(2)}m)|\chi_i^1(x, t, \check{\mathfrak{S}}[\check{\mathfrak{S}}\check{w}_1]) - \\
& - \chi_i^1(x, t, \check{\mathfrak{S}}[\check{\mathfrak{S}}\check{w}_2])| \leq N_1\Lambda_0^{-1}[(\Gamma_1^1 + \Gamma_2^1 L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}})\check{M}_2 T(N^{12}(1+L)^2 T\rho + (N^{11}T + \\
& + Q_2 H^{-1})\rho)(1 + P_0^{(2)}m) + (1 + P_0^{(2)}m)\Gamma_2^1 e^{H\ell}(N^{12}(1+L)^2 T\rho + (N^{11}T + \\
& + Q_2 H^{-1})\rho) + \Gamma^1 m[N_{29}(1 + \check{L}T)\check{M}_2 T(N^{12}(1+L)^2 T\rho + (N^{11}T + Q_2 H^{-1})\rho) + \\
& + N_{64}(1 + \check{L})^2 T\check{\rho} + N_{65}H^{-1}\check{\rho}] + \Gamma^1(1 + P_0^{(2)}m)(N_{66}(1 + \check{L})^3 T\rho + N_{67}H^{-1}\rho) \leq \\
& \leq N_{68}(1 + \check{L})^3 T\check{\rho} + N_{69}H^{-1}\rho, \tag{131}
\end{aligned}$$

де $N_{69} = N_1\Lambda_0^{-1}((1 + P_0^{(2)}m)\Gamma_2^1 e^{H\ell}Q_2 + \Gamma^1 mN_{65}) + \Gamma^1(1 + P_0^{(2)}m)N_{67}$; $N_{68} = N_1\Lambda_0^{-1}[\check{\Gamma}_1(1 + N^5(1 + T_0))\check{M}_2(T_0(N^{12} + N^{11}) + Q_2 H^{-1})(1 + P_0^{(2)}m) + (1 + P_0^{(2)}m)(N^{12} + N^{11}) + \Gamma^1 m(N_{29}(1 + T_0)\check{M}_2(N^{12}T_0 + N^{11}T_0 + Q_2 H^{-1}) + N_{64}T_0)] + \Gamma^1(1 + P_0^{(2)}m)N_{66}$.

Далі отримаємо

$$\begin{aligned}
& |\mathfrak{Y}_i^1[\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w}_1](x, t) - \mathfrak{Y}_i^1[\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w}_2](x, t)| \leq N_1\Lambda_0^{-1}[F_3|\chi_i(x, t, \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1]) - \\
& - \chi_i(x, t, \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2])| + F_2 L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}}|\chi_i(x, t, \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1]) - \chi_i(x, t, \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2])| + F_2 e^{H\ell} \varrho] + \\
& + F|\chi_i^1(x, t, \check{\mathfrak{S}}[\check{\mathfrak{S}}\check{w}_1]) - \chi_i^1(x, t, \check{\mathfrak{S}}[\check{\mathfrak{S}}\check{w}_2])| \leq N_1\Lambda_0^{-1}[(F_3 + F_2 N^5(1 + LT))\check{M}_2 T \times \\
& \times (N^{12}(1+L)^2 T\rho + (N^{11}T + Q_2 H^{-1})\rho) + F_2 e^{H\ell}(N^{12}(1+L)^2 T\rho + (N^{11}T + \\
& + Q_2 H^{-1})\rho)] + F(N_{66}(1 + \check{L})^3 T\check{\rho} + N_{67}H^{-1}\rho) \leq N_{70}(1 + \check{L})^3 T\check{\rho} + N_{71}H^{-1}\rho, \tag{132}
\end{aligned}$$

де $N_{71} = N_1\Lambda_0^{-1}F_2 e^{H\ell}Q_2 + FN_{67}$; $N_{70} = N_1\Lambda_0^{-1}[\check{F}_1(1 + N^5(1 + T_0))\check{M}_2(T_0(N^{12} + N^{11}) + Q_2 H^{-1}) + F_2 e^{H\ell}(N^{12} + N^{11})] + FN_{66}$.

Нарешті, нехай для визначеності $\chi_i(x, t, \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1]) \leq \chi_i(x, t, \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2])$. Тоді

$$\begin{aligned}
& |\mathfrak{I}_i^1[\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w}_1](x, t) - \mathfrak{I}_i^1[\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w}_2](x, t)| \leq \int_{\chi_i(x, t, \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2])}^t (N_1[(F_1^1 + F_2^1 L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}}) \times \\
& \times |\varphi_i(\tau; x, t, \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1]) - \varphi_i(\tau; x, t, \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2])| + F_2^1 e^{H\ell} \varrho + P_0^1 \sum_{j=1}^m ((F_1^1 + F_2^1 L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}}) \times \\
& \times |\varphi_i(\tau; x, t, \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1]) - \varphi_i(\tau; x, t, \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2])| + F_2^1 e^{H\ell} \varrho) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +F^1 \sum_{j=1}^m |\mathfrak{A}_j^1[\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{w}}_1](\varphi_i(\tau; x, t, \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1]), \tau) - \mathfrak{A}_j^1[\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{w}}_2](\varphi_i(\tau; x, t, \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2]), \tau)| + \\
& +Q \sum_{k=1}^n ((F_1^1 + F_2^1 L^{\mathfrak{S}\mathfrak{E}})|\varphi_i(\tau; x, t, \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1]) - \varphi_i(\tau; x, t, \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2])| + F_2^1 e^{H^\ell} \varrho) + \\
& +F^1 \sum_{k=1}^n |q_k(\varphi_i(\tau; x, t, \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1]), \tau, \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1](\varphi_i(\tau; x, t, \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1]), \tau)) - \\
& - q_k(\varphi_i(\tau; x, t, \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2]), \tau, \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2](\varphi_i(\tau; x, t, \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2]), \tau))| + F^1(1 + P_0^1 m + \\
& + Qn)|\varphi_i^1(\tau; x, t, \check{\mathfrak{S}}[\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{w}}_1]) - \varphi_i^1(\tau; x, t, \check{\mathfrak{S}}[\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{w}}_2])|) d\tau + \int_{\chi_i(x, t, \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1])}^{\chi_i(x, t, \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2])} N_1 F^1 (1 + \\
& + P_0^1 m + Qn) d\tau \leq \int_{\chi_i(x, t, \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2])}^t [N_1(1 + P_0^1 m + Qn) \check{F}_1(1 + L^{\mathfrak{S}\mathfrak{E}}) \check{M}_1 T \varrho + \\
& + N_1 F_2^1 e^{H^\ell} (1 + P_0^1 m + Qn) \varrho + N_1 F^1 m (\check{L}^{\mathfrak{S}} \check{M}_1 T \varrho + e^{H^\ell} \check{\varrho}) + \\
& + F^1 n ((Q_1 + Q_2 L^{\mathfrak{S}\mathfrak{E}}) \check{M}_1 T \varrho + Q_2 e^{H^\ell} \varrho) N_1 + F^1 (1 + P_0^1 m + Qn) N_3 (1 + \check{L}) T \check{\varrho}] d\tau + \\
& + N_1 F^1 (1 + P_0^1 m + Qn) \check{M}_2 T \varrho \leq N_{72} (1 + \check{L})^3 T \check{\varrho}, \quad (133)
\end{aligned}$$

де $N_{72} = T_0 N_1 (1 + P_0^1 m + Qn) \check{F}_1 (1 + N^5 (1 + T_0)) \check{M}_1 (T_0 (N^{12} + N^{11}) + Q_2 H^{-1}) +$
 $+ N_1 F_2^1 e^{H^\ell} (1 + P_0^1 m + Qn) (T_0 (N^{12} + N^{11}) + Q_2 H^{-1}) + N_1 F^1 m (N_{25} \check{M}_1 T_0 (T_0 (N^{12} + N^{11}) +$
 $+ Q_2 H^{-1}) + e^{H^\ell} (N_{60} (1 + T_0)^2 + N_{58}^2 H^{-2})) + N_1 F^1 n (\check{Q}_1 (1 + N^5 (1 + T_0)) \check{M}_1 T_0 (T_0 (N^{12} +$
 $+ N^{11}) + Q_2 H^{-1}) + Q_2 e^{H^\ell} (T_0 (N^{12} + N^{11}) + Q_2 H^{-1})) + T_0 F^1 (1 + P_0^1 m + Qn) N_1 (N_{60} (1 +$
 $+ T_0)^2 + N_{58}^2 H^{-2}) + N_1 F^1 (1 + P_0^1 m + Qn) M_2 (T_0 (N^{12} + N^{11}) + Q_2 H^{-1}).$

Об'єднуючи результати (131), (132), (133), одержимо, що при $(x, t) \in \Pi_i^0(\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1]) \cap \Pi_i^0(\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2])$ (або $(x, t) \in \Pi_i^\ell(\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1]) \cap \Pi_i^\ell(\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2])$) виконується нерівність

$$\|\mathfrak{A}^1[\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{w}}_1](x, t) - \mathfrak{A}^1[\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{w}}_2](x, t)\| \leq N_{73} (1 + \check{L})^3 T \check{\varrho} + N_{74} H^{-1} \check{\varrho}, \quad (134)$$

де $N_{73} = N_{68} + N_{70} + N_{72}$; $N_{74} = N_{69} + N_{71}$.

Отож, із (126), (127) та (134) отримуємо потрібне твердження (123) з константою $N_{75} = \max\{N_{61}; N_{62}; N_{73}\}$.

Зауважимо, що на підставі формул (115), (116), (119) оцінку (120) можна переписати у вигляді

$$\|\mathfrak{A}^1[\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{w}}_1](x, t) - \mathfrak{A}^1[\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{w}}_2](x, t)\| \leq N_{76} (1 + \check{L}) T \check{\varrho} + N_{77} \varrho + N_{55} H^{-1} \check{\varrho}, \quad (135)$$

де $N_{76} = Q^1 (1 + P_0^{(2)} m + P_0^1 n) \check{M}_3 + 2[Q_2^1 (1 + P_0^{(2)} m + P_0^1 n) + Q^1 n + Q^1 m (F_2 + P_0^1 \Lambda_2 +$
 $+ \Lambda)] R + \check{M}_3 (Q \check{R}_1 + R \check{Q}_1)$; $N_{77} = R_2 + Q_2$.

Тоді, використовуючи (135) і (124), одержимо

$$\|\mathfrak{B}^1[\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{w}}_1](x, t) - \mathfrak{B}^1[\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{w}}_2](x, t)\| \leq N_{76} (1 + \check{L}^{\mathfrak{S}\mathfrak{E}}) T \check{\varrho} + N_{77} \varrho + N_{55} H^{-1} \check{\varrho} \leq$$

$$\leq N_{78}(1 + \check{L})^3(T + H^{-1})\check{\rho}, \quad (136)$$

де $N_{78} = \max\{N_{76}(1 + N_{26}); N_{55}\}(N_{60}(1 + T_0)^2 + N_{58}^2 H^{-2}) + N_{77} \max\{Q_2; (N^{12} + N^{11})\}$.

Основна лема. Для досить малого $T > 0$ і досить великих $\check{L} > 0$ та $H > 0$ оператор $\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}$ на кулі $\check{\mathbb{E}}_2(T, \check{L}, P, P^1)$ задовольняє умови принципу стискуючих відображень і його нерухома точка $\check{w} = (\check{u}, \check{v})$ є неперервним розв'язком задачі (24)-(27), а функція $w(x, t) = (u(x, t), v(x, t))$ є неперервно диференційовною за двома змінними і, крім того, задовольняє систему (1)-(2) в класичному значенні.

Доведення. З формул (123), (125), (136) випливає, що в прямокутнику $\Pi(T)$ виконується нерівність

$$\|\check{\mathfrak{S}}[\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w}_1](x, t) - \check{\mathfrak{S}}[\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{w}_2](x, t)\| \leq N_{79}(1 + \check{L})^3(T + H^{-1})\check{\rho}, \quad (137)$$

де $N_{79} = \max\{(N_{75} + N_{74}); (N^{16} + Q_2(N^{10} + Q_2 H^{-1})); N_{78}\}$.

Звідси матимемо, що при досить малому $T > 0$ і досить великих $\check{L} > 0$ та $H > 0$ оператор $\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}\check{\mathfrak{S}}$ на кулі $\check{\mathbb{E}}_2(T, \check{L}, P, P^1)$ задовольняє умови принципу стискуючих відображень, тому має єдину нерухому точку, яка є також єдиною нерухомою точкою оператора $\check{\mathfrak{S}}$, тобто для цієї функції буде виконуватися рівність $\check{w} = \check{\mathfrak{S}}[\check{w}]$. Тому для довільного елемента $\check{w}_{(0)} \in \check{\mathbb{E}}_2(T, \check{L}, P, P^1)$ підпоследовності $w_{(3n)}$ і $\check{w}_{(3n)}$ (де $w_{(n)} = \mathfrak{S}[w_{(n-1)}]$, $\check{w}_{(n)}^1 = \mathfrak{S}^1[w_{(n-1)}^1]$) збігаються рівномірно зі швидкістю геометричної прогресії до функцій w і w^1 відповідно.

Візьмемо замість $\check{w}_{(0)} \in \check{\mathbb{E}}_2(T, \check{L}, P, P^1)$ початкові умови для функцій $\check{u}$ та умови на невідомій лінії s_j для функцій $\check{v}$. Тоді за побудовою

$(u_{(0)})'_x(x, t) = u_{(0)}^1(x, t)$ і $(v_{(0)})'_t(x, t) = v_{(0)}^{(2)}(x, t)$, а отже, $n = 1, 2, \dots$ за побудовою виконується $(u_{(3n)})'_x(x, t) = u_{(3n)}^1(x, t)$ і $(v_{(3n)})'_t(x, t) = v_{(3n)}^{(2)}(x, t)$. Аналогічні міркування залишаються правильними, якщо замість $\check{w}_{(0)}$ взяти $u_{(0)} = \mathfrak{S}[\alpha]$, $u_{(0)}^1 = \mathfrak{S}^1[\alpha]$, $v_{(0)} = \mathfrak{S}[\beta]$, $v_{(0)}^{(2)} = \mathfrak{S}^1[\beta]$ або якщо $u_{(0)} = \mathfrak{S}[\mathfrak{S}\alpha]$, $u_{(0)}^1 = \mathfrak{S}^1[\check{\mathfrak{S}}\alpha]$, $v_{(0)} = \mathfrak{S}[\mathfrak{S}\beta]$, $v_{(0)}^{(2)} = \mathfrak{S}^1[\check{\mathfrak{S}}\beta]$.

Отже, последовність функцій $w_{(n)}$, як і підпоследовність $w_{(n)}^1$, рівномірно збігаються в $\Pi(T)$. Тому гранична функція $u(x, t)$ буде неперервно диференційовною за x , а гранична функція $v(x, t)$ буде неперервно диференційовною за t , причому $u_x(x, t) = u^1(x, t)$, $v_t(x, t) = v^{(2)}(x, t)$. Лема доведена.

Отож, звідси випливає неперервна диференційовність функції $w(x, t)$ за x, t , що й завершує доведення теореми.

-
1. Кирилич В.М. Обобщенная непрерывная разрешимость задачи с неизвестными границами для сингулярных гиперболических систем квазилинейных уравнений / Кирилич В.М., Филимонов А.М. // Математичні студії – 2008. – Т. 30, №1. – С. 20-39.
 2. Li Ta-tsien. Global classical solutions for quasilinear hyperbolic systems / Li Ta-tsien. – Paris: Masson, 1994. – 278 p.
 3. Turo J. Mixed problems for quasilinear hyperbolic systems / Turo J. // Nonlinear Analysis, Theory, Methods, Applications. – 1997. – Vol. 30, №4. – P. 2329-2340.

4. Казаков К.Ю. Об определении неизвестной линии разрыва решения смешанной задачи для квазилинейной гиперболической системы / Казаков К.Ю., Морозов С.Ф. // Укр. матем. журн. – 1985. – Т. 37, №4. – С. 443-450.

LOCAL DIFFERENTIABLE SOLVABILITY OF THE FREE BOUNDARY PROBLEM FOR SINGULAR HYPERBOLIC SYSTEMS OF QUASILINEAR EQUATIONS

Volodymyr KYRYLYCH¹, Andriy FILIMONOV²

¹ *Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka str., 1*

² *Moscow State University of Railway Engineering,
27994, Russia, Moscow, Obraztsova str., 15*

Applying method of characteristics and principle of contraction mapping, classical local correct solvability of the free boundary problem for singular quasilinear hyperbolic systems of the first order was proved.

Key words: hyperbolic systems, quasilinear equations, Stefan problem.

Стаття надійшла до редколегії 11.07.2008

Прийнята до друку 22.10.2008

УДК 515.12

ПРОСТІР ФАКТОРОВ'ЄКТІВ КОМПАКТНОГО ТОПОЛОГІЧНОГО ПРОСТОРУ

Катерина КОПОРХ*Прикарпатський національний університет імені В. Стефаника,
76000, Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57*

Наведено топологізацію множини фактороб'єктів компактного топологічного простору, породжену топологією Вайсмана на множині всіх замкнених під-алгебр алгебри неперервних функцій.

Ключові слова: топологія Вайсмана, простір фактороб'єктів.

Гіперпростори $\text{exp}(X)$ топологічних просторів широко застосовують у різних галузях математики. Кожен елемент A гіперпростору $\text{exp}(X)$ – це підоб'єкт в X , який природно інтерпретують як клас еквівалентності вкладень у простір X . Є.В. Щепін [1] розглядав дуальний до $\text{exp}(X)$ об'єкт $\Phi(X)$ – множину факторвідображень заданого компакта X ; така множина відіграє суттєву роль у його теорії незліченних обернених спектрів. Мета нашої праці – топологізація простору $\Phi(X)$, породжена топологією Вайсмана на множині всіляких можливих непорожніх замкнених множин в функціональних просторах $C(X)$, наділених sup -нормою.

Головний результат – побудова контраваріантного функтора Φ з категорії Comp компактних просторів і неперервних відображень в категорію Top топологічних просторів і неперервних відображень.

Надалі всі апріорно задані відображення вважаємо неперервними. Під “компактом” розуміємо “компактний гаусдорфовий простір”.

1. Множина $CL(X)$. Нехай (X, ρ) – метричний простір. Позначимо через $CL(X)$ множину всіх непорожніх замкнених підмножин простору X . На множині $CL(X)$ можна ввести різні топологізації. Для наших потреб знадобиться топологія Вайсмана [2]. Базисним околом елемента $A \in CL(X)$ буде множина

$$O(A; x_1, x_2, \dots, x_n; \varepsilon) = \{B \in CL(X) \mid |\rho(x_i, A) - \rho(x_i, B)| < \varepsilon\},$$

де $x_1, x_2, \dots, x_n \in X, \varepsilon > 0$. Топологію Вайсмана в $CL(X)$ позначаємо τ_w .

2. Алгебра $C(X)$. Нехай X -компакт. Як звичайно, через $C(X)$ позначаємо алгебру всіх дійснозначних неперервних функцій на X . Множина $C(X)$ є метричним простором щодо метрики, індукованої sup -нормою. Метрику в $C(X)$, породжену sup -нормою, будемо позначати ρ .

Якщо $f : X \rightarrow Y$ – неперервне відображення, то через $f_* : C(Y) \rightarrow C(X)$ ми позначаємо індуковане відображення, $f_*(\varphi) = \varphi \circ f$, $\varphi \in C(Y)$. Через $A(X)$ позначимо множину всіх замкнених підалгебр алгебри $C(X)$.

Твердження 1. *Нехай X – компакт. Множина $A(X)$ замкнена в просторі $CL(C(X))$.*

Доведення. Розглянемо множину $CL(C(X)) \setminus A(X)$. Нехай $M \in (CL(C(X)) \setminus A(X))$, тобто множина M не є алгеброю в просторі $C(X)$. Тоді існують елементи $m_1, m_2 \in M$ і $\alpha \in R$ такі, що або $m_1 + m_2$, або $\alpha \times m_i$, $i = 1, 2$, або $m_1 \cdot m_2$ не належить M . Покажемо, що існує окіл $O(M)$ елемента M такий, що $O(M) \cap A(X) = \emptyset$, тобто $O(M) \subset CL(C(X)) \setminus A(X)$. Далі доведення розбивається на три випадки.

1. Припустимо, що існують елементи $m_1, m_2 \in M$ такі, що $(m_1 + m_2) \notin M$. Тоді існують околи $U_\delta(m_1), U_\delta(m_2), U_\varepsilon(m_1 + m_2)$ такі, що:

- а) $U_\delta(m_1) + U_\delta(m_2) \subset U_\varepsilon(m_1 + m_2)$; б) $M \cap U_\varepsilon(m_1 + m_2) = \emptyset$.

Розглянемо окіл $O(M; m_1, m_2, m_1 + m_2; \delta, \varepsilon) = \{N \in CL(C(X)) \mid \rho(N, m_1) < \delta, \rho(N, m_2) < \delta, |\rho(N, m_1 + m_2) - \rho(M, m_1 + m_2)| < \varepsilon\}$ елемента M . Оскільки $M \cap U_\varepsilon(m_1 + m_2) = \emptyset$, то відстань від елемента $m_1 + m_2$ до множини M величина додатна і позначимо її $d = \rho(M, m_1 + m_2)$. Прийmemo $\varepsilon = d/3$, а δ підберемо так, щоб виконувалась умова (а). Виберемо довільно елемент N' з околу $O(M; m_1, m_2, m_1 + m_2; \delta, \varepsilon)$ тоді виконуються такі умови: $\rho(N', m_1) < \delta, \rho(N', m_2) < \delta, |\rho(N', m_1 + m_2) - \rho(M, m_1 + m_2)| < \varepsilon$. Нехай $n_1, n_2 \in N'$ і припустимо, що $(n_1 + n_2) \in N'$. З того, що $\rho(N', m_i) < \delta$, де $i = 1, 2$ випливають такі включення: $n_1 \in U_\delta(m_1), n_2 \in U_\delta(m_2)$, тоді з умови (а) випливає $n_1 + n_2 \in U_\varepsilon(m_1 + m_2)$, тобто, $\rho(n_1 + n_2, m_1 + m_2) < \varepsilon$. Далі міркуємо так: $\rho(N', m_1 + m_2) \leq \rho(n_1 + n_2, m_1 + m_2) < \varepsilon$ тоді з нерівності $|\rho(N', m_1 + m_2) - \rho(M, m_1 + m_2)| < \varepsilon$ випливає $|d/3 - d| < d/3$, тобто, $2 < 1$.

Ми прийшли до суперечності, а отже, $n_1 + n_2 \notin N'$.

2. Припустимо, що існує елемент $m \in M$ такий, що $\alpha m \notin M$ при деякому $\alpha \in R$. Тоді існують околи $U_\delta(m), U_\varepsilon(\alpha m)$ такі, що

- а) $\alpha U_\delta(m) \subset U_\varepsilon(\alpha m)$, б) $U_\varepsilon(\alpha m) \cap M = \emptyset$.

Нехай $d = \rho(M, \alpha m) > 0$, знову прийmemo $\varepsilon = d/3$. Розглянемо окіл $U_\varepsilon(\alpha m)$, тоді можна підібрати таке $\delta \in R$, для якого $\alpha U_\delta(m) \subset U_\varepsilon(\alpha m)$. Збудуємо окіл $O(M; m, \alpha m; \delta, \varepsilon) = \{N \in CL(C(X)) \mid |\rho(m, M) - \rho(m, N)| < \delta \Rightarrow |\rho(\alpha m, M) - \rho(\alpha m, N)| < \varepsilon\}$ елемента M . Виберемо довільно елемент $K \in O(M; m, \alpha m; \delta, \varepsilon)$ тоді з нерівності $|\rho(m, M) - \rho(m, N)| < \delta$ випливає $\rho(m, K) < \delta$, а це означає, що знайдеться елемент $k \in K$ такий, що $k \in U_\delta(m)$. Тоді $\alpha k \in \alpha U_\delta(m) \subset U_\varepsilon(\alpha m)$. Покажемо, що $\alpha k \notin K$. Припустимо протилежне, нехай $\alpha k \in K$, тоді $\rho(\alpha m, K) \leq \rho(\alpha m, \alpha k) < \varepsilon$. З умови, що K елемент околу, випишемо $|\rho(\alpha m, M) - \rho(\alpha m, N)| < \varepsilon$, але $\rho(\alpha m, M) = d, \varepsilon = d/3$ і $\rho(\alpha m, K) < d/3$, тоді $|d - d/3| < d/3$, тобто $2 < 1$ – суперечність.

Отже, $\alpha k \notin K$.

3. Припустимо, що існують елементи $m_1, m_2 \in M$ такі, що $(m_1 \cdot m_2) \notin M$. Тоді існують околи $U_\delta(m_1), U_\delta(m_2)$ і $U_\varepsilon(m_1 \cdot m_2)$ такі, що:

- а) $U_\delta(m_1) \cdot U_\delta(m_2) \subset U_\varepsilon(m_1 \cdot m_2)$; б) $M \cap U_\varepsilon(m_1 \cdot m_2) = \emptyset$.

Розглянемо окіл $O(M; m_1, m_2, m_1 \cdot m_2; \delta, \varepsilon) = \{N \in CL(C(X)) \mid \rho(N, m_1) < \delta, \rho(N, m_2) < \delta, |\rho(N, m_1 \cdot m_2) - \rho(M, m_1 \cdot m_2)| < \varepsilon\}$ елемента M . Оскільки $M \cap U_\varepsilon(m_1 \cdot m_2) = \emptyset$, то відстань від елемента $m_1 \cdot m_2$ до множини M величина додатна і

позначимо її $d = \rho(M, m_1 \cdot m_2)$. Прийmemo $\varepsilon = d/3$, а δ підберемо так, щоб виконувалась умова (а). Виберемо довільно елемент K з околу $O(M; m_1, m_2, m_1 \cdot m_2; \delta, \varepsilon)$. Тоді з умов $\rho(K, m_1) < \delta$ і $\rho(K, m_2) < \delta$ випливає, що існують $k_1, k_2 \in K$ такі, що $k_1 \in U_\delta(m_1), k_2 \in U_\delta(m_2)$. Тоді з умови (а) одержуємо $k_1 \cdot k_2 \in U_\delta(m_1) \cdot U_\delta(m_2) \subset U_\varepsilon(m_1 \cdot m_2)$. Припустимо, що $(k_1 \cdot k_2) \in K$, а отже, $\rho(K, m_1 \cdot m_2) \leq \rho(k_1 \cdot k_2, m_1 \cdot m_2) < \varepsilon$ тоді з нерівності $|\rho(K, m_1 \cdot m_2) - \rho(M, m_1 \cdot m_2)| < \varepsilon$ випливає $|d/3 - d| < d/3$, тобто $2 < 1$.

Ми прийшли до суперечності, а отже, $k_1 \cdot k_2 \notin K$. Отож, якщо елемент M не є алгеброю, то можна збудувати такий окіл $O(M)$ цього елемента, що всі елементи цього околу теж не утворюють алгебр. Отже, множина $A(X)$ замкнена підмножина простору $(CL(C(X)), \tau_w)$.

3. Множина $\Phi(X)$ та її топологізація. Нехай X – компакт. Розглянемо множину M всіх сюр'єктивних неперервних відображень простору X . Кожне сюр'єктивне неперервне відображення $f: X \rightarrow Z$ породжує деяке розбиття простору X на "шари" а саме $(f^{-1} \circ f)$ є відображенням з X в $CL(X)$, яке кожній точці $x \in X$ ставить у відповідність певний "шар" який її містить. Відображення $(f^{-1} \circ f)$ є факторвідображенням, яке відображає X у простір, породжений розшаруванням відображення f .

Два відображення називаємо еквівалентними $f_1 \sim f_2$, де $f_1: X \rightarrow Z_1$ і $f_2: X \rightarrow Z_2$, якщо існує гомеоморфізм $h: Z_1 \rightarrow Z_2$ такий, що $f_2 = h \circ f_1$, тобто діаграма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_1} & Z_1 \\ & \searrow f_2 & \downarrow h \\ & & Z_2 \end{array}$$

комутативна. Отож, множина M сюр'єктивних неперервних відображень, розб'ється на класи еквівалентних відображень. Позначимо множину класів $\hat{\Phi}(X) = \{[f] \mid f: X \rightarrow Z\}$. Нехай $[f] \in \hat{\Phi}(X)$, де $f: X \rightarrow Z$ – неперервне відображення. Розглянемо всілякі можливі неперервні дійснозначні функції на Z , позначимо множину цих відображень $C(Z) = \{\varphi: Z \rightarrow R\}$. Кожне відображення $f: X \rightarrow Z$ породжує деяке дуальне відображення $f_*: C(Z) \rightarrow C(X)$, яке діє за правилом $f_*(\varphi) = \varphi \circ f$, де $\varphi \in C(Z)$. Якщо f сюр'єктивне, то відображення $f_*: C(Z) \rightarrow C(X)$ є вкладенням. Тобто образ $f_*(C(Z))$ є замкнутою підмножиною в просторі $C(X)$, а отже, є елементом простору $CL(C(X))$. Отож, кожному класу еквівалентності (елементу множини $\hat{\Phi}(X)$) ставимо у відповідність елемент простору $CL(C(X))$, отже, ми задаємо деяке відображення $e: \hat{\Phi}(X) \rightarrow CL(C(X))$, яке є ін'єктивним відображенням і діє так: $e([f]) = f_*(C(Z))$. Отже, множину $\hat{\Phi}(X)$ можна розглядати як деяку підмножину простору $CL(C(X))$. Прийmemo $\Phi(X) = e(\hat{\Phi}(X))$. На множині $\Phi(X)$ розглядаємо топологію, індуковану вкладенням $e: \hat{\Phi}(X) \rightarrow CL(C(X))$, де $CL(C(X))$ наділяють топологією Вайсмана.

Лема 1. *Кожен елемент множини $\Phi(X)$ є замкнутою підалгеброю в $C(X)$.*

Доведення. Розглянемо деякий клас еквівалентності $[\varphi] \in \Phi(X) \subset CL(C(X))$; всі функції цього класу породжують у просторі X те саме розбиття. Нехай $\varphi_1, \varphi_2 \in [\varphi]$ і елементи $x, y \in X$ належать до того самого елемента розбиття

множини X , тобто $\varphi_1(x) = \varphi_1(y)$ і $\varphi_2(x) = \varphi_2(y)$. Тоді будуть справджуватися такі рівності:

- 1) $\varphi_1(x) + \varphi_2(x) = \varphi_1(y) + \varphi_2(y)$ тобто $(\varphi_1 + \varphi_2) \in [\varphi]$;
- 2) $\forall \alpha \in R$ правильно $\alpha\varphi_i(x) = \alpha\varphi_i(y)$, де $i = 1; 2$, отже, $\alpha\varphi_i \in [\varphi]$;
- 3) $\varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) = \varphi_1(y) \cdot \varphi_2(y)$, тобто $(\varphi_1 \cdot \varphi_2) \in [\varphi]$.

Отже, кожен елемент множини $\Phi(X)$ є замкнутою підалгеброю простору $C(X)$.

З твердження 1 випливає, що кожен елемент множини $\Phi(X)$ є замкнутою підалгеброю простору $C(X)$.

Твердження 2. Множина $\Phi(X)$ замкнена в $A(X)$.

Доведення. Нехай $F = \{f \mid f: X \rightarrow \mathbb{R}\} \in \overline{\Phi(X)}$, тоді F – алгебра в $C(X)$. Позначимо для кожного $f \in F$ через $R_f = f(X)$. Розглядаємо добуток $Z = \prod_{f \in F} R_f$ і задаємо

відображення $\psi: X \rightarrow Z$. Покажемо, що правильна рівність $F = \psi_*(C(Z))$. Справді, для кожного $f \in F$ існує $f' \in C(Z)$ таке, що $f = f' \circ \psi$, тобто, кожен елемент з F міститься в $\psi_*(C(Z))$, а отже, $F \subset \psi_*(C(Z))$.

Виберемо довільно елемент $\varphi \in \psi_*(C(Z))$ і перевіримо виконання включення $\varphi \in F$. Для всіх $\varphi \in \psi_*(C(Z))$ позначимо через $\hat{\varphi}$ такий елемент з $C(Z)$, що виконується рівність $\varphi = \hat{\varphi} \circ \psi$. Розглянемо множину $\hat{F} = \{\hat{\varphi} \mid \varphi \in F\}$. Зрозуміло, що $\hat{F} \subset C(Z)$. Множина F є замкнутою підалгеброю простору $C(X)$. Тому $\hat{F}$ замкнута підмножина простору $C(Z)$ як прообраз замкнутої множини $\hat{F} = \{\hat{\varphi} \mid \varphi \in F\} = \psi_*^{-1}(F)$. Покажемо, що $\hat{F}$ є алгеброю в $C(Z)$. З того, що F є підалгеброю простору $C(X)$, одержуємо виконання таких співвідношень: $\varphi_1 + \varphi_2 \in F$; $\alpha\varphi \in F$ і $\varphi_1 \cdot \varphi_2 \in F$, де $\varphi_1, \varphi_2, \varphi \in F$ і $\alpha \in R$. Далі нехай x – довільний елемент простору X , тоді

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) = \hat{\varphi}_1 \circ \psi(x) + \hat{\varphi}_2 \circ \psi(x) = (\hat{\varphi}_1 + \hat{\varphi}_2) \circ \psi(x),$$

отже, існує такий елемент $\varphi_1 + \varphi_2 \in F$, що $(\varphi_1 + \varphi_2) = (\hat{\varphi}_1 + \hat{\varphi}_2) \circ \psi$, тобто $(\hat{\varphi}_1 + \hat{\varphi}_2) \in \hat{F}$. Аналогічними міркуваннями покажемо, що $\alpha\hat{\varphi} \in \hat{F}$ і $(\hat{\varphi}_1 \cdot \hat{\varphi}_2) \in \hat{F}$. Саме з $\alpha\varphi(x) = \alpha(\hat{\varphi} \circ \psi)(x) = (\alpha\hat{\varphi}) \circ \psi(x)$ випливає $\alpha\hat{\varphi} \in \hat{F}$. І з співвідношення $(\varphi_1 \cdot \varphi_2)(x) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) = \hat{\varphi}_1 \circ \psi(x) \cdot \hat{\varphi}_2 \circ \psi(x) = (\hat{\varphi}_1 \cdot \hat{\varphi}_2) \circ \psi(x)$ випливає $(\hat{\varphi}_1 \cdot \hat{\varphi}_2) \in \hat{F}$. Це означає, що $\hat{F}$ – підалгебра в $C(Z)$.

Нехай $\hat{a}$ – деяка стала функція з $C(Z)$ і знайдеться така функція $a \in C(X)$, що $a = \hat{a} \circ \psi$. Припустимо, що $a \notin F \in \overline{\Phi(X)}$ і відповідно $\hat{a} \notin \hat{F}$. Тоді $\rho(a, F) = d > 0$. Побудуємо окіл $O(F; a; \varepsilon) = \{K \in CL(C(X)) \mid |\rho(a, K) - \rho(a, F)| < \varepsilon\}$ елемента F . З умови $|\rho(a, K) - \rho(a, F)| < \varepsilon$ випливає $d - \varepsilon < \rho(a, K) < d + \varepsilon$ приймемо $\varepsilon = d/2$ і отримаємо $d/2 < \rho(a, K) < 3d/2$, отже, існує окіл $O(F; a; d/2)$ елемента $F \in \overline{\Phi(X)}$ такий, що $O(F; a; d/2) \cap \Phi(X) = \emptyset$, а це означає, що $F \notin \overline{\Phi(X)}$. Отже, наше припущення не правильне $a \in F$ і $\hat{a} \in \hat{F}$. Отож, множина $\hat{F}$ містить всі константи.

Покажемо, що $\hat{F}$ розділяє точки в Z . Нехай $z_1, z_2 \in Z$ такі, що $z_1 \neq z_2$. Оскільки $Z = \psi(X)$, то знайдуться такі елементи $x_1, x_2 \in X$, що $z_1 = \psi(x_1)$ і $z_2 = \psi(x_2)$, отже, $\psi(x_1) \neq \psi(x_2)$. За побудовою відображення ψ маємо $\psi(x_1) = (f(x_1))_{f \in F}$ і $\psi(x_2) = (f(x_2))_{f \in F}$. Тобто знайдеться такий елемент $f \in F$, що $f(x_1) \neq f(x_2)$, але $f = \psi_*(\hat{f}) = \hat{f} \circ \psi$, тому $\hat{f} \circ \psi(x_1) \neq \hat{f} \circ \psi(x_2)$ далі $\hat{f}(\psi(x_1)) \neq \hat{f}(\psi(x_2))$ звідси випливає $\hat{f}(z_1) \neq \hat{f}(z_2)$. Отже, $\hat{F}$ розділяє точки в Z .

Отож, множина $\hat{F}$ задовольняє всі умови теореми Стоуна-Вейєрштрасса (якщо A – підалгебра в $C(X)$, для компакта X , яка містить всі константи і розділяє точки,

то $\overline{A} = C(X)$), отже, $\hat{F} = \overline{\hat{F}} = C(Z)$ звідки випливає $F = \psi_*(C(Z))$, що й треба було довести.

Отже, множина $\Phi(X)$ є замкнутою підмножиною в $A(X)$, але $A(X)$ замкнена підмножина $(CL(C(X)), \tau_w)$, тобто $\Phi(X) = \overline{\Phi(X)}$ в просторі $(CL(C(X)), \tau_w)$.

4. Приклад. Нехай $X = [0, 1]$, виберемо деяке $t \in [0, 1]$ і прийmemo $Z_t = [t, 1]$. Визначимо відображення $f_t: X \rightarrow Z_t$, отож $f_t(s) = \max\{s, t\}$. Розглянемо відповідні елементи $[f_t] = \{(f_t)_*(C(Z_t))\}$ простору $(\Phi(X), \tau_w)$.

Виберемо послідовність $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$, елементів відрізка $[0, 1]$ збіжну до деякого елемента $t_0 \in [0, 1]$ при $i \rightarrow \infty$, і покажемо, що відповідна послідовність $\{[f_{t_i}]\}_{i=1}^{\infty}$ збігається до елемента $[f_{t_0}]$ при $i \rightarrow \infty$. Тобто, для кожного елемента φ з простору $C(X)$ правильне співвідношення $\rho(\varphi, [f_{t_i}]) \rightarrow \rho(\varphi, [f_{t_0}])$ при $i \rightarrow \infty$.

Припустимо, що послідовність $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ збігається до елемента t_0 знизу, тобто $t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_0$. Якщо це не так, то зі збіжної послідовності $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ можна виділити дві збіжні підпослідовності, одна з яких збігатиметься до елемента t_0 знизу, а інша – зверху.

Розглянемо довільний елемент $\varphi \in C(X)$. Нехай $\rho(\varphi, [f_{t_0}]) = a$, де $a > 0$. Тобто, для кожного $\varepsilon \geq 0$ знайдеться такий елемент $\psi_\varepsilon \in [f_{t_0}]$, що $\|\varphi - \psi_\varepsilon\| < a + \varepsilon$. В множині $[f_{t_0}]$ містяться функції сталі на інтервалі $[0, t_0]$, отже, $\psi_\varepsilon|_{[0, t_0]} = \text{const}$, а звідси випливає, що $\psi_\varepsilon|_{[0, t_i]} = \text{const}$, тобто $\psi_\varepsilon \in [f_{t_i}]$ для кожного $i \in N$. Отож, для кожного $i \in N$ відстань від елемента φ до класу $[f_{t_i}]$ не перевищує $a + \varepsilon$ для всіх $\varepsilon \geq 0$. Тобто, при $\varepsilon = 0$ отримуємо $\rho(\varphi, [f_{t_i}]) \leq a$ для кожного $i \in N$, звідки випливає $\lim_{i \rightarrow \infty} \rho(\varphi, [f_{t_i}]) \leq a$.

Припустимо $\rho(\varphi, [f_{t_i}]) < a$, тобто знайдеться деяке $a' < a$ таке, що $\rho(\varphi, [f_{t_i}]) \leq a'$ для всіх $i \in N$. Зафіксуємо деяке значення a'' таке, що $a'' = (a - a')/2$. Не втрачаючи загальності, можна вважати, що в кожному класі $[f_{t_i}]$ існує елемент ψ_i такий, що $\|\psi_i - \varphi\| \leq a''$. Знайдеться номер $i \in N$ такий, що коливання функції φ на інтервалі $[t_i, t_0]$ не перевищуватиме деякого наперед заданого числа η . Приймемо $\eta = (a - a'')/2$, тоді $\omega(\varphi, [t_i, t_0]) = \eta$. Розглянемо функцію $\tilde{\varphi} \in C(X)$ задану так:

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(t_0), & \text{якщо } x \in [0, t_0]; \\ \varphi(x), & \text{якщо } x \in (t_0, 1]. \end{cases}$$

Очевидно $\tilde{\varphi} \in [f_{t_0}]$. Оцінимо відстань $\rho(\varphi, \tilde{\varphi}) = \|\varphi - \tilde{\varphi}\| = \sup_{x \in [0, 1]} |\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)|$. Розглянемо такі випадки: якщо $x \in [0, t_i]$, то

$$\|\varphi - \tilde{\varphi}\| = |\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)| \leq |\varphi(x) - \psi_i(x)| + |\psi_i(x) - \tilde{\varphi}(x)| \leq a'' + \eta.$$

Якщо $x \in (t_i, t_0]$, то $\|\varphi - \tilde{\varphi}\| = |\varphi(x) - \tilde{\varphi}(t_0)| \leq \eta$. Якщо $x \in (t_0, 1]$, то $\|\varphi - \tilde{\varphi}\| = 0$. Тобто

$$\|\varphi - \tilde{\varphi}\| = \begin{cases} a'' + \eta, & \text{якщо } x \in [0, t_i]; \\ \eta, & \text{якщо } x \in (t_i, t_0]; \\ 0, & \text{якщо } x \in (t_0, 1]. \end{cases}$$

З іншого боку, $\rho(\varphi, [f_{t_0}]) \leq \rho(\varphi, \tilde{\varphi}) = \|\varphi - \tilde{\varphi}\|$, але згідно з викладеними міркуваннями $\rho(\varphi, [f_{t_0}]) = a$, де $a > 0$. Отже, $a \leq \|\varphi - \tilde{\varphi}\| \leq \eta$, де $\eta = (a - a'')/2 < a/2$.

Ми отримали нерівність $a \leq \| \varphi - \tilde{\varphi} \| \leq a/2$, що неможливо. Наше припущення не правильне, отже, для кожного $\varphi \in C(X)$ виконується рівність $\rho(\varphi, [f_{t_i}]) < a$ при $i \rightarrow \infty$.

5. Відображення Φ_f . Нехай нам задано неперервне відображення $f: X \rightarrow Y$, де X і Y – метричні компактi. Визначимо відображення $\Phi_f: \Phi(Y) \rightarrow \Phi(X)$ так: $\Phi_f([h]) = [h \circ f] = [g] \in \Phi(X)$. Візьмемо простір $X = [0, 1]$ і $Y = \{y_0, y_1\}$ – злічений дискретний простір. Розглянемо відображення $g: Y \rightarrow X$, яке діє так:

$$g(y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } y = y_0; \\ 1/2, & \text{якщо } y = y_1. \end{cases}$$

Тоді відображення Φ_g діє з простору $\Phi(X), \tau_W$ в простір $\Phi(Y), \tau_W$. Для того, щоби показати, що відображення Φ_g не є неперервним, скористаємось наведеним вище прикладом. Розглянемо $\lim_{i \rightarrow \infty} \Phi_g([f_{t_i}]) = \lim_{i \rightarrow \infty} [1_Y] = [1_Y]$. З іншого боку, отримаємо $\Phi_g(\lim_{i \rightarrow \infty} [f_{t_i}]) = \Phi_g([f_{t_0}]) = [const]$. Оскільки $[1_Y] \neq [const]$, то відображення Φ_g не є неперервним.

-
1. *Щепин Е.В.* Топология предельных пространств несчетных обратных спектров / *Щепин Е.В.* // Успехи мат. наук. – 1976. – Т.31, Вып.5 (191). – С.197.
 2. *Щепин Е.В.* Функторы и несчетные степени компактов / *Щепин Е.В.* // Успехи мат. наук. – 1981. – Т. 36, Вып. 3 – С. 3-61.
 3. *Beer G.* Topologies on Closed and Closed Convex Sets / *Beer G.* – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993. – 340 p.
 4. *Федорчук В.В.* Общая топология. Основные конструкции / *Федорчук В.В., Филинов В.В.* – М.: МГУ. – 1988. – 252 с.

A SPACE OF FACTOR-OBJECTS OF COMPACT TOPOLOGICAL SPACE

Kateryna KOPORKH

Vasyl Stepanyk Precarpathian National University,
76000, Ivano-Frankivsk, Shevchenko Str., 57

An topologization of set factor-objects of compact topological space generated topology Vaisman on the set of all closed subalgebras algebra of continuous functions is obtained.

Key words: topology Vaisman, space of factor-objects

Стаття надійшла до редколегії 29.09.2008

Прийнята до друку 22.10.2008

УДК 517.95

ЗАДАЧА НА СПРЯЖЕННЯ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНИХ
РІВНЯНЬ ДРУГОГО ТА ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

Сергій ЛАВРЕНЮК, Оксана ПАНАТ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1

В області $\Omega \times (0, +\infty)$, де Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ і $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, $\Omega_i \neq \emptyset$, $i \in \{1, 2\}$, $\overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2 = \Gamma$, розглянуто задачу на спряження для гіперболічних рівнянь другого та третього порядку. Визначено певні умови існування єдиного узагальненого розв'язку такої задачі. Крім того, досліджено поведінку цього розв'язку при $t \rightarrow \infty$.

Ключові слова: задача на спряження, гіперболічне рівняння другого порядку, гіперболічне рівняння третього порядку.

Задачі для диференціальних рівнянь гіперболічного типу розглядали раніше багато авторів. Зокрема, у працях [1-3] досліджено мішані задачі для слабко нелінійних гіперболічних рівнянь другого порядку, які виникають, наприклад, у релятивістській квантовій механіці або моделюють коливні процеси у середовищі з опором.

Гіперболічні рівняння третього порядку є предметом дослідження вчених, починаючи з другої половини ХХ ст. (див. [4-6]). Рівняння такого типу виникають при описанні процесів, які відбуваються у в'язких середовищах, зокрема, моделюють крутильні коливання металевого кругового циліндра з внутрішнім тертям, поширення збурень у в'язко-пружному матеріалі, розповсюдження звуку у в'язкому газі, який поміщено в трубу, а також інші процеси подібної природи.

Розглянемо рівняння

$$\rho u_{tt} = G'(u_x, u_{xt}) + g(u, u_t) + f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (1)$$

(Ω – обмежена область, ρ – додатна стала, G, g, f – деякі функції, G' – похідні за просторовими змінними). У [4] вперше розглянуто мішану задачу для рівняння (1), коли $\Omega = (0, 1)$, $T = +\infty$ і $G' = \sigma'(u_x)u_{xx} + \lambda u_{xtx}$, $g = f = 0$. Доведено, що при виконанні умов $\sigma'(\xi) > 0$, $\xi \in \mathbb{R}$, $\sigma \in C^3(\mathbb{R})$, $\lambda > 0$, існує єдиний класичний розв'язок u такої задачі, стійкий до збурень початкових даних. Також досліджено поведінку розв'язку, зокрема, показано, що $u \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. У праці [5] в обмеженій області

досліджено мішану задачу для рівняння (1), де $G'(u_x, u_{xt}) = \Delta u + \sum_{i=1}^n (|u_{x_i t}|^{p-2} u_{x_i t})_{x_i}$, $p > 2$. Випадок, коли у головній частині такого рівняння показник нелінійності є функцією від просторових змінних ($p = p(x)$), розглянуто в [6]. Автори знайшли умови на коефіцієнти рівняння та показники нелінійностей, що забезпечують існування єдиного узагальненого розв'язку задачі в узагальнених просторах Соболева.

У цій праці в обмеженій за просторовими змінними області досліджено задачу на спряження для гіперболічних рівнянь другого та третього порядку. З'ясовано умови, що гарантують існування та єдиність розв'язку такої задачі в узагальнених просторах Лебега. Крім того, вивчено поведінку цього розв'язку при $t \rightarrow \infty$. Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) – обмежена область з межею $\partial\Omega \in C^1$; $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, де Ω_i – область, $\Omega_i \neq \emptyset$, $i \in \{1, 2\}$; $\overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2 = \Gamma$, $\Gamma \in C^1$; $\partial\Omega_1 = (\partial\Omega \cap \overline{\Omega}_1) \cup \Gamma$, $\partial\Omega_2 = (\partial\Omega \cap \overline{\Omega}_2) \cup \Gamma$, $\partial\Omega_i \setminus \Gamma \neq \emptyset$, $i \in \{1, 2\}$.

Позначимо $Q = \Omega \times (0, +\infty)$, $Q_i = \Omega_i \times (0, +\infty)$, $Q_{i,\tau} = \Omega_i \times (0, \tau)$, $\Omega_{i,\tau} = \{(x, t) : x \in \Omega_i, t = \tau\}$, $\tau \in [0, +\infty)$, $i = \{1, 2\}$; $\nu = \nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_n(x))$ ($x \in \Gamma$) – одиничний вектор нормалі до Γ , зовнішній стосовно Ω_1 . В області Q розглядаємо рівняння

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x) u_{x_i t})_{x_j} - \sum_{i,j=1}^n (b_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} + c_1(x) u_t + g_1(x) |u|^{p(x)-2} u = 0, \quad (x, t) \in Q_1, \quad (2)$$

$$v_{tt} - \sum_{i,j=1}^n (\alpha_{ij}(x) v_{x_i})_{x_j} + c_2(x) v_t + g_2(x) |v|^{q(x)-2} v = 0, \quad (x, t) \in Q_2,$$

з умовами

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega_1, \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \Omega_2; \quad (3)$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega_1, \quad v_t(x, 0) = v_1(x), \quad x \in \Omega_2; \quad (4)$$

$$u|_{(\partial\Omega \cap \partial\Omega_1) \times (0, +\infty)} = 0, \quad v|_{(\partial\Omega \cap \partial\Omega_2) \times (0, +\infty)} = 0; \quad (5)$$

$$\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x) u_{x_i t} + b_{ij}(x) u_{x_i}) \nu_j(x) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(x) v_{x_i} \nu_j(x), \quad x \in \Gamma; \quad (6)$$

$$u|_{\Gamma} = v|_{\Gamma}. \quad (7)$$

Говоритимемо, що виконуються умови **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(PQ)**, якщо:

(A): $a_{ij}, a_{ij,x_j} \in L^\infty(\Omega_1)$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$;

$a_0 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq a^0 |\xi|^2$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$ і майже всіх $x \in \Omega_1$, де $a_0 > 0$;

$\alpha_{ij}, \alpha_{ij,x_j} \in L^\infty(\Omega_2)$, $\alpha_{ij}(x) = \alpha_{ji}(x)$ для майже всіх $x \in \Omega_2$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$;

$\alpha_0 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \alpha^0 |\xi|^2$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$ і майже всіх $x \in \Omega_2$, де $\alpha_0 > 0$;

(B): $b_{ij}, b_{ij,x_j} \in L^\infty(\Omega_1)$, $b_{ij}(x) = b_{ji}(x)$ для майже всіх $x \in \Omega_1$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$;

$b_0 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq b^0 |\xi|^2$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$ і майже всіх $x \in \Omega_1$, де $b_0 > 0$;

- (C): $c_{i,0} \leq c_i(x) \leq c_i^0$ майже для всіх $x \in \Omega_i$, де $c_{i,0} > 0$, $i \in \{1, 2\}$;
 (G): $g_{i,0} \leq g_i(x) \leq g_i^0$ майже для всіх $x \in \Omega_i$, де $g_{i,0} > 0$, $i \in \{1, 2\}$;
 (PQ): $p \in L^\infty(\Omega_1)$, $q \in L^\infty(\Omega_2)$,
 $1 < p_0 = \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega_1} p(x) \leq \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega_1} p(x) = p^0 < +\infty$,
 $1 < q_0 = \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega_2} q(x) \leq \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega_2} q(x) = q^0 < +\infty$.

Нехай $G \subset \mathbb{R}^n$ — деяка обмежена область. Через $H^k(G)$, $k \in \{1, 2\}$, позначимо множину всіх вимірних на G функцій y , які разом з усіма своїми узагальненими похідними до порядку k належать $L^2(G)$. Норма в просторі $H^k(G)$ задається формулою

$$\|y; H^k(G)\| = \left(\int_G \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha y|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Для функції $\sigma \in L^\infty(G)$, $1 < \sigma_1 \leq \sigma(x) \leq \sigma_2 < +\infty$, під узагальненим простором Лебега розуміємо множину всіх вимірних на G функцій y , для яких інтеграл $\int_G |y(x)|^{\sigma(x)} dx$ є скінченний. В [7] доведено, що $L^{\sigma(\cdot)}(G)$ є банаховим простором з нормою

$$\|y; L^{\sigma(\cdot)}(G)\| = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_G |y(x)/\lambda|^{\sigma(x)} dx \leq 1 \right\}.$$

В [10, с. 168] показано, що

$$\int_G |y(x)|^{\sigma(x)} dx \leq S_\sigma (\|y; L^{\sigma(x)}(G)\|), \quad \text{де } S_\sigma(r) = \begin{cases} r^{\sigma_1}, & r \in [0, 1], \\ r^{\sigma_2}, & r > 1. \end{cases} \quad (8)$$

Для банахових просторів B_1 та B_2 через $B_1 \times B_2$ позначатимемо їхній декартовий добуток, тобто множину всіх пар (y, z) таких, що $y \in B_1$, $z \in B_2$. Відомо (див., наприклад, [8]), що $B_1 \times B_2$ є банаховим простором, якщо на ньому ввести норму за правилом $\|(y, z); B_1 \times B_2\| = \|y; B_1\| + \|z; B_2\|$. Крім того, якщо B_1 та B_2 неперервно вкладаються в локально випуклий простір $\tilde{V}$, то перетин $B_1 \cap B_2$ є банаховим простором стосовно норми $\|y; B_1 \cap B_2\| = \|y; B_1\| + \|y; B_2\|$. Розглядатимемо такі функційні простори:

$$\mathring{H}_\Gamma^1(\Omega_i) = \{y \in H^1(\Omega_i) : y|_{\partial\Omega_i \setminus \Gamma} = 0\}, \quad i \in \{1, 2\};$$

$$V = \{(y, z) \in (\mathring{H}_\Gamma^1(\Omega_1) \times \mathring{H}_\Gamma^1(\Omega_2)) : y|_\Gamma = z|_\Gamma\};$$

$$V_1 = V \cap (H^2(\Omega_1) \times H^2(\Omega_2)); \quad V_2 = L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2); \quad V_3 = L^{p(x)}(\Omega_1) \times L^{q(x)}(\Omega_2);$$

$$W_i = \mathring{H}_\Gamma^1(\Omega_i) \cap H^2(\Omega_i), \quad i \in \{1, 2\}.$$

Вважатимемо, що початкові функції задачі (2)-(7) задовольняють умову (U), якщо $u_0, u_1 \in W_1$, $v_0 \in W_2$, $v_1 \in L^2(\Omega_2)$ і, крім того,

$$\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{1,x_i} + b_{ij}(x)u_{0,x_i})\nu_j(x) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(x)v_{0,x_i}\nu_j(x), \quad x \in \Gamma.$$

Означення 1. Під узагальненим розв'язком задачі (2)-(7) розуміємо пару функцій (u, v) , що задовольняє включення $(u, v) \in C([0, T]; V_2)$, $(u_t, v_t) \in C([0, T]; V_2)$, $(u, v) \in L^\infty(0, T; V \cap V_3)$, $(u_t, v_t) \in L^2(0, T; V)$, $(u_{tt}, v_{tt}) \in L^\infty(0, T; V_2)$ для довільного $T > 0$, умови (3)-(4) та рівність

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{1,t}} \left[u_{tt} \varphi + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i t} \varphi_{x_j} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) u_{x_i} \varphi_{x_j} + c_1(x) u_t \varphi + g_1(x) |u|^{p(x)-2} u \varphi \right] dx + \\ & + \int_{\Omega_{2,t}} \left[v_{tt} \psi + \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(x) v_{x_i} \psi_{x_j} + c_2(x) v_t \psi + g_2(x) |v|^{q(x)-2} v \psi \right] dx = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

для всіх $(\varphi, \psi) \in V \cap V_3$ та майже всіх $t > 0$.

Теорема 1. Нехай виконуються умови (A), (B), (C), (PQ), (U) і, крім того, $2 \leq p^0 \leq \frac{2n-2}{n-2}$, якщо $n > 2$, $p^0 > 2$, якщо $n \in \{1, 2\}$, $2 \leq q^0 \leq \frac{2n-2}{n-2}$, якщо $n > 2$ і $q^0 > 2$, якщо $n \in \{1, 2\}$. Тоді задача (2)-(7) не може мати більше одного узагальненого розв'язку.

Доведення. Зафіксуємо довільне число $T \in (0, +\infty)$. Нехай $\{(\varphi_k, \psi_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ – база простору $V_1 \cap V_3$, ортонормована в V_2 . Побудуємо послідовності

$$u^N(x, t) = \sum_{k=1}^N C_k^N(t) \varphi_k(x), \quad x \in \Omega_1, \quad v^N(x, t) = \sum_{k=1}^N C_k^N(t) \psi_k(x), \quad x \in \Omega_2, \quad t \in [0, T],$$

$N \in \mathbb{N}$, де $(C_1^N, \dots, C_N^N)$ – розв'язок задачі Коші

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{1,t}} \left[u_{tt}^N \varphi_k + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i t}^N \varphi_{k,x_j} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) u_{x_i}^N \varphi_{k,x_j} + \right. \\ & \left. + c_1(x) u_t^N \varphi_k + g_1(x) |u^N|^{p(x)-2} u^N \varphi_k \right] dx + \\ & + \int_{\Omega_{2,t}} \left[v_{tt}^N \psi_k + \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(x) v_{x_i}^N \psi_{k,x_j} + c_2(x) v_t^N \psi_k + g_2(x) |v^N|^{q(x)-2} v^N \psi_k \right] dx = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$C_k^N(0) = u_{0,k}^N + v_{0,k}^N, \quad C_{kt}^N(0) = u_{1,k}^N + v_{1,k}^N, \quad k = \overline{1, N}. \quad (11)$$

$$\text{Тут } u_0^N(x) = \sum_{k=1}^N u_{0,k}^N \varphi_k(x), \quad v_0^N(x) = \sum_{k=1}^N v_{0,k}^N \psi_k(x), \quad u_1^N(x) = \sum_{k=1}^N u_{1,k}^N \varphi_k(x),$$

$$v_1^N(x) = \sum_{k=1}^N v_{1,k}^N \psi_k(x), \quad N \in \mathbb{N} \text{ і } \|(u_0^N, v_0^N) - (u_0, v_0)\|_{W_1 \times W_2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0,$$

$\|(u_1^N, v_1^N) - (u_1, v_1)\|_{W_1 \times L^2(\Omega_2)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$. За умовами теореми та на підставі теореми Каратеодорі [9, с. 54] існує неперервний розв'язок задачі (10), (11), який має абсолютно неперервну похідну, визначений на деякому проміжку $(0, t_N]$. З оцінок, одержаних нижче, випливає, що $t_N = T$.

Помножимо (10) відповідно на функції C_{kt}^N , підсумуємо за k від 1 до N і проінтегруємо по проміжку $(0, \tau]$, $\tau \in (0, T]$,

$$\begin{aligned}
& \int_{Q_{1,\tau}} \left[u_{tt}^N u_t^N + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i t}^N u_{x_j t}^N + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) u_{x_i}^N u_{x_j t}^N + c_1(x) |u_t^N|^2 + \right. \\
& \left. + g_1(x) |u^N|^{p(x)-2} u^N u_t^N \right] dx dt + \int_{Q_{2,\tau}} \left[v_{tt}^N v_t^N + \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(x) v_{x_i}^N v_{x_j t}^N + \right. \\
& \left. + c_2(x) |v_t^N|^2 + g_2(x) |v^N|^{q(x)-2} v^N v_t^N \right] dx dt = 0. \tag{12}
\end{aligned}$$

З (12) отримуємо рівність

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{\Omega_{1,\tau}} \left[|u_t^N|^2 + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) u_{x_i}^N u_{x_j}^N \right] dx + \int_{\Omega_{1,\tau}} \frac{1}{p(x)} g_1(x) |u^N|^{p(x)} dx + \\
& + \int_{Q_{1,\tau}} \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i t}^N u_{x_j t}^N + c_1(x) |u_t^N|^2 \right] dx dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega_{2,\tau}} \left[|v_t^N|^2 + \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(x) v_{x_i}^N v_{x_j}^N \right] dx + \\
& + \int_{\Omega_{2,\tau}} \frac{1}{q(x)} g_2(x) |v^N|^{q(x)} dx + \int_{Q_{2,\tau}} c_2(x) |v_t^N|^2 dx dt = \\
& = \frac{1}{2} \int_{\Omega_{1,0}} \left[|u_1^N|^2 + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) u_{0,x_i}^N u_{0,x_j}^N \right] dx + \int_{\Omega_{1,0}} \frac{1}{p(x)} g_1(x) |u_0^N|^{p(x)} dx + \\
& + \frac{1}{2} \int_{\Omega_{2,0}} \left[|v_1^N|^2 + \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(x) v_{0,x_i}^N v_{0,x_j}^N \right] dx + \int_{\Omega_{2,0}} \frac{1}{q(x)} g_2(x) |v_0^N|^{q(x)} dx.
\end{aligned}$$

Згідно з умовою **(A)-(PQ)** матимемо оцінку

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_{1,\tau}} \left[\frac{1}{2} |u_t^N|^2 + \frac{b_0}{2} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^2 + \frac{g_{1,0}}{p^0} |u^N|^{p(x)} \right] dx + \int_{Q_{1,\tau}} \left[a_0 |\nabla u_t^N|^2 + c_{1,0} |u_t^N|^2 \right] dx dt + \\
& + \int_{\Omega_{2,\tau}} \left[\frac{1}{2} |v_t^N|^2 + \frac{\alpha_0}{2} \sum_{i=1}^n |v_{x_i}^N|^2 + \frac{g_{2,0}}{q^0} |v^N|^{q(x)} \right] dx + c_{2,0} \int_{Q_{2,\tau}} |v_t^N|^2 dx dt \leq \\
& \leq \int_{\Omega_{1,0}} \left[\frac{1}{2} |u_1^N|^2 + \frac{b^0}{2} \sum_{i=1}^n |u_{0,x_i}^N|^2 + \frac{g_1^0}{p^0} |u_0^N|^{p(x)} \right] dx + \int_{\Omega_{2,0}} \left[\frac{1}{2} |v_1^N|^2 + \frac{\alpha^0}{2} \sum_{i=1}^n |v_{0,x_i}^N|^2 + \frac{g_2^0}{q^0} |v_0^N|^{q(x)} \right] dx.
\end{aligned}$$

Враховуючи умову **(U)**, з останньої нерівності для всіх $\tau \in (0, T]$ одержимо оцінку

$$\int_{\Omega_{1,\tau}} \left[|u_t^N|^2 + |\nabla u^N|^2 + |u^N|^{p(x)} \right] dx + \int_{Q_{1,\tau}} \left[|\nabla u_t^N|^2 + |u_t^N|^2 \right] dx dt +$$

$$+ \int_{\Omega_{2,\tau}} \left[|v_t^N|^2 + |\nabla v^N|^2 + |v^N|^{q(x)} \right] dx + \int_{Q_{2,\tau}} |v_t^N|^2 dx dt \leq M_0, \quad (13)$$

де константа M_0 не залежить від N . Отже, на підставі (13)

$$\begin{aligned} \|(u_t^N, v^N)\|_{L^2((0,T);V)} &\leq M_1, \quad \|(u_t^N, v_t^N)\|_{L^\infty((0,T);V_2)} \leq M_1, \\ \|(u^N, v^N)\|_{L^\infty((0,T);V)} &\leq M_1, \quad \|(u^N, v^N)\|_{L^\infty((0,T);V_3)} \leq M_1. \end{aligned} \quad (14)$$

Крім того,

$$\int_{Q_{1,\tau}} |u^N|^{p(x)-2} u^N |^{p'(x)} dx dt \leq M_2, \quad \int_{Q_{2,\tau}} |v^N|^{q(x)-2} v^N |^{q'(x)} dx dt \leq M_2 \quad (15)$$

для всіх $\tau \in (0, T]$ константа M_2 не залежить від N .

Диференціюємо (10) за t

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{1,t}} \left[u_{ttt}^N \varphi_k + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i tt}^N \varphi_{k,x_j} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) u_{x_i t}^N \varphi_{k,x_j} + c_1(x) u_{tt}^N \varphi_k + \right. \\ \left. + g_1(x)(p(x) - 1) |u^N|^{p(x)-2} u_t^N \varphi_k \right] dx + \int_{\Omega_{2,t}} \left[v_{ttt}^N \psi_k + \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(x) v_{x_i t}^N \psi_{k,x_j} + \right. \\ \left. + c_2(x) v_{tt}^N \psi_k + g_2(x)(q(x) - 1) |v^N|^{q(x)-2} v_t^N \psi_k \right] dx = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Рівність (16) множимо відповідно на функції $C_{k,tt}^N$, підсумовуємо за k від 1 до N та інтегруємо по проміжку $(0, \tau]$, $\tau \in (0, T]$,

$$\begin{aligned} \int_{Q_{1,\tau}} \left[u_{ttt}^N u_{tt}^N + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i tt}^N u_{x_j tt}^N + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) u_{x_i t}^N u_{x_j tt}^N + \right. \\ \left. + c_1(x) |u_{tt}^N|^2 + g_1(x)(p(x) - 1) |u^N|^{p(x)-2} u_t^N u_{tt}^N \right] dx dt + \int_{Q_{2,\tau}} \left[v_{ttt}^N v_{tt}^N + \right. \\ \left. + \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(x) v_{x_i t}^N v_{x_j tt}^N + c_2(x) |v_{tt}^N|^2 + g_2(x)(q(x) - 1) |v^N|^{q(x)-2} v_t^N v_{tt}^N \right] dx dt = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Перетворимо та оцінимо доданки рівності (17), враховуючи умови теореми. Оскільки $\frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{2n}{n-2}} = 1$, то згідно з нерівністю Гельдера запишемо оцінку

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} g_1(x)(p(x) - 1) |u^N|^{p(x)-2} u_t^N u_{tt}^N dx \leq \\ \leq g_1^0(p^0 - 1) \| |u^N|^{p(x)-2} \|_{L^n(\Omega_1)} \|u_t^N\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega_1)} \|u_{tt}^N\|_{L^2(\Omega_1)}. \end{aligned}$$

Позаяк вкладення $H_0^1(\Omega_1) \subset L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega_1)$ неперервне, то виконується нерівність

$$\|u_t^N\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega_1)} \leq \kappa_1 \|\nabla u_t^N\|_{L^2(\Omega_1)}, \text{ де } \kappa_1 > 0.$$

На підставі леми 1 [10, с. 168], теореми 2.8 [7, с. 600], вкладення $H_0^1(\Omega_1) \subset L^{n(p^0-2)}(\Omega_1)$ та оцінки (13), запишемо низку нерівностей

$$\begin{aligned} \| |u^N|^{p(x)-2} \|_{L^n(\Omega_1)} &= \left(\int_{\Omega_1} |u^N|^{n(p(x)-2)} dx \right)^{1/n} \leq \left(S_{n(p-2)} (\|u^N\|_{L^{n(p(x)-2)}(\Omega_1)}) \right)^{1/n} \leq \\ &\leq M_3 \left(S_{n(p-2)} (\|u^N\|_{L^{n(p^0-2)}(\Omega_1)}) \right)^{1/n} \leq M_4 \left(S_{n(p-2)} (\|\nabla u^N\|_{L^2(\Omega_1)}) \right)^{1/n} \leq M_5. \end{aligned}$$

Отже,

$$\int_{Q_{1,\tau}} g_1(x)(p(x)-1)|u^N|^{p(x)-2} u_t^N u_{tt}^N dx \leq \frac{M_6}{2} \int_{Q_{1,\tau}} \left[\frac{1}{\delta_1} |\nabla u_t^N|^2 + \delta_1 |u_{tt}^N|^2 \right] dx dt.$$

Аналогічно отримуємо нерівність

$$\int_{Q_{2,\tau}} g_2(x)(q(x)-1)|v^N|^{q(x)-2} v_t^N v_{tt}^N dx \leq \frac{M_7}{2} \int_{Q_{2,\tau}} \left[\frac{1}{\delta_2} |\nabla v_t^N|^2 + \delta_2 |v_{tt}^N|^2 \right] dx dt.$$

Використовуючи ці оцінки та умови **(A)**, **(B)**, рівність (17) перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_{1,\tau}} \left[|u_{tt}^N|^2 + b_0 |\nabla u_t^N|^2 \right] dx + \int_{Q_{1,\tau}} \left[2a_0 |\nabla u_{tt}^N|^2 + (2c_{1,0} - M_6 \delta_1) |u_{tt}^N|^2 \right] dx dt + \\ &+ \int_{\Omega_{2,\tau}} \left[|v_{tt}^N|^2 + \alpha_0 |\nabla v_t^N|^2 \right] dx + (2c_{2,0} - M_7 \delta_2) \int_{Q_{2,\tau}} |v_{tt}^N|^2 dx dt \leq \\ &\leq \frac{M_6}{\delta_1} \int_{Q_{1,\tau}} |\nabla u_t^N|^2 dx dt + \frac{M_7}{\delta_2} \int_{Q_{2,\tau}} |\nabla v_t^N|^2 dx dt + \int_{\Omega_{1,0}} \left[|u_{tt}^N(x,0)|^2 + b^0 |\nabla u_1^N|^2 \right] dx + \\ &+ \int_{\Omega_{2,0}} \left[|v_{tt}^N(x,0)|^2 + \alpha^0 |\nabla v_1^N|^2 \right] dx. \end{aligned} \quad (18)$$

Оцінимо $\int_{\Omega_{1,0}} |u_{tt}^N(x,0)|^2 dx$ та $\int_{\Omega_{2,0}} |v_{tt}^N(x,0)|^2 dx$. Для цього помножимо (10) відповідно на функції $C_{k,tt}^N$, підсумуємо за k від 1 до N та приймемо в одержаній рівності $t=0$

$$\int_{\Omega_{1,0}} \left[|u_{tt}^N(0)|^2 + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{1,x_i}^N u_{x_j,tt}^N(0) + \sum_{i,j=1}^n b_{ij} u_{0,x_i}^N u_{x_j,tt}^N(0) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + c_1 u_1^N u_{tt}^N(0) + g_1 |u_0^N|^{p(x)-2} u_0^N u_{tt}^N(0) \Big] dx + \\
& + \int_{\Omega_{2,0}} \left[|v_{tt}^N(0)|^2 + \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} v_{0,x_i}^N v_{x_j tt}^N(0) + c_2 v_1^N v_{tt}^N(0) + g_2 |v_0^N|^{q(x)-2} v_0^N v_{tt}^N(0) \right] dx = 0. \quad (19)
\end{aligned}$$

Враховуючи умову (U), запишемо

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_{1,0}} \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{1,x_i}^N u_{x_j tt}^N(0) + \sum_{i,j=1}^n b_{ij} u_{0,x_i}^N u_{x_j tt}^N(0) \right] dx + \int_{\Omega_{2,0}} \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} v_{0,x_i}^N v_{x_j tt}^N(0) dx = \\
& = - \int_{\Omega_{1,0}} \left[\sum_{i,j=1}^n (a_{ij} u_{1,x_i}^N)_{x_j} + \sum_{i,j=1}^n (b_{ij} u_{0,x_i}^N)_{x_j} \right] u_{tt}^N(0) dx - \int_{\Omega_{2,0}} \sum_{i,j=1}^n (\alpha_{ij} v_{0,x_i}^N)_{x_j} v_{tt}^N(0) dx + \\
& + \int_{\Gamma} \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{1,x_i}^N + \sum_{i,j=1}^n b_{ij} u_{0,x_i}^N \right] \nu_j u_{tt}^N(0) dS - \int_{\Gamma} \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} v_{0,x_i}^N \nu_j v_{tt}^N(0) dS = \\
& = - \int_{\Omega_{1,0}} \left[\sum_{i,j=1}^n (a_{ij} u_{1,x_i}^N)_{x_j} + \sum_{i,j=1}^n (b_{ij} u_{0,x_i}^N)_{x_j} \right] u_{tt}^N(0) dx - \int_{\Omega_{2,0}} \sum_{i,j=1}^n (\alpha_{ij} v_{0,x_i}^N)_{x_j} v_{tt}^N(0) dx.
\end{aligned}$$

Крім того, з вкладення простору $H^2(\Omega_1)$ у простір $L^{2(p^0-1)}(\Omega_1)$, теореми 2.8 [7, с. 600] та леми 1 [10, с. 168] отримаємо нерівність

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_{1,0}} g_1 |u_0^N|^{p(x)-2} u_0^N u_{tt}^N(0) dx \leq \frac{g_1^0}{2} \int_{\Omega_{1,0}} \left[\delta_3 |u_{tt}^N(0)|^2 + \frac{1}{\delta_3} |u_0^N|^{2(p(x)-1)} \right] dx \leq \\
& \leq \frac{g_1^0 \delta_3}{2} \int_{\Omega_{1,0}} |u_{tt}^N(0)|^2 dx + M_8 S_{2(p-1)} (\|u_0^N\|_{H^2(\Omega_1)}),
\end{aligned}$$

де $\delta_3 > 0$ і константа M_8 не залежить від N .

Аналогічно

$$\int_{\Omega_{2,0}} g_2 |v_0^N|^{q(x)-2} v_0^N v_{tt}^N(0) dx \leq \frac{g_2^0 \delta_4}{2} \int_{\Omega_{2,0}} |v_{tt}^N(0)|^2 dx + M_9 S_{2(p-1)} (\|v_0^N\|_{H^2(\Omega_2)}),$$

де $\delta_4 > 0$ і константа M_9 не залежить від N .

З одержаних оцінок та з (19) робимо висновок про те, що $\int_{\Omega_{1,0}} |u_{tt}^N(0)|^2 dx + \int_{\Omega_{2,0}} |v_{tt}^N(0)|^2 dx \leq M_{10}$ і константа M_{10} не залежить від N . Тоді з (18), на підставі леми Гронуолла-Белмана та (13), матимемо нерівність

$$\int_{\Omega_{1,\tau}} \left[|u_{tt}^N|^2 + |\nabla u_t^N|^2 \right] dx + \int_{Q_{1,\tau}} \left[|u_{tt}^N|^2 + |\nabla u_{tt}^N|^2 \right] dx dt +$$

$$+ \int_{\Omega_{2,\tau}} \left[|v_{tt}^N|^2 + |\nabla v_t^N|^2 \right] dx + \int_{Q_{2,\tau}} |v_{tt}^N|^2 dx dt \leq M_{11}, \quad (20)$$

правильну для всіх $\tau \in (0, T]$; константа M_{11} не залежить від N .

На підставі (14), (15) та (20) існує підпослідовність послідовності $\{(u^N, v^N)\}_{N \in \mathbb{N}}$ (нехай це знову буде $\{(u^N, v^N)\}_{N \in \mathbb{N}}$) така, що

$$\begin{aligned} (u^N, v^N) &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} (u, v) \quad * - \text{слабко в } L^\infty(0, T; V), \\ (u_t^N, v_t^N) &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} (u_t, v_t) \quad * - \text{слабко в } L^\infty(0, T; V_2), \\ (u^N, v^N) &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} (u, v) \quad * - \text{слабко в } L^\infty(0, T; V_3), \\ (|u^N|^{p(x)-2}u^N, |v^N|^{q(x)-2}v^N) &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} (\xi_1, \xi_2) \quad \text{слабко в } L^{p'(x)}(Q_{1,T}) \times L^{q'(x)}(Q_{2,T}), \\ (u_t^N, v_t^N) &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} (u_t, v_t) \quad \text{слабко в } L^2(0, T; V), \\ (u_{tt}^N, v_{tt}^N) &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} (u_{tt}, v_{tt}) \quad * - \text{слабко в } L^\infty(0, T; V_2), \end{aligned}$$

$$u_{tt}^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} u_{tt} \text{ слабко в } L^2(0, T; \overset{\circ}{H}_\Gamma^1(\Omega_1)). \quad (21)$$

Збіжність (21₁) гарантує, що послідовність $\{(u^N, v^N)\}_{N \in \mathbb{N}}$ обмежена в $L^2(0, T; V)$ для довільного $T > 0$. Оскільки вкладення $V \subset V_2$ компактне, $\{(u_t^N, v_t^N)\}_{N \in \mathbb{N}}$ обмежена в $L^2(0, T; V_2)$, то можна вважати, що

$$(u^N, v^N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} (u, v) \text{ сильно в } L^2(0, T; V),$$

$$u^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} u \text{ майже скрізь в } Q_{1,T}, \quad v^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} v \text{ майже скрізь в } Q_{2,T}.$$

Тоді $|u^N|^{p(x)-2}u^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} |u|^{p(x)-2}u$ майже скрізь в $Q_{1,T}$, $|v^N|^{q(x)-2}v^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} |v|^{q(x)-2}v$ майже скрізь в $Q_{2,T}$ і, згідно з (21₄) та лемою 1.19 ([8], с. 39), $\xi_1 = |u^N|^{p(x)-2}u^N$, $\xi_2 = |v^N|^{q(x)-2}v^N$. Крім того, з (21₁), (21₅), (21₆) одержуємо, що $(u, v) \in C([0, +\infty); V_2)$, $(u_t, v_t) \in C([0, +\infty); V_2)$. Діючи так само, як в ([1], с. 26), доводимо, що пара функцій (u, v) задовольняє рівність (9) та умови (3)-(4), тобто є узагальненим розв'язком задачі (2)-(7).

Єдиність одержаного розв'язку доводимо методом від супротивного. Припустивши, що (u_1, v_1) та (u_2, v_2) — два різні розв'язки задачі (2)-(7), для їхньої різниці $(u, v) \equiv (u_1 - u_2, v_1 - v_2)$ легко одержати рівність

$$\begin{aligned} &\int_{Q_{1,\tau}} \left[u_{tt}u_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i t}u_{x_j t} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j t} + c_1(x)|u_t|^2 + \right. \\ &+ g_1(x)(|u^1|^{p(x)-2}u^1 - |u^2|^{p(x)-2}u^2)(u_t^1 - u_t^2) \Big] dx dt + \int_{Q_{2,\tau}} \left[v_{tt}v_t + \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(x)v_{x_i}v_{x_j t} + \right. \\ &\left. + c_2(x)|v_t|^2 + g_2(x)(|v^1|^{q(x)-2}v^1 - |v^2|^{q(x)-2}v^2)(v_t^1 - v_t^2) \right] dx dt = 0. \end{aligned}$$

Діючи так само, як в [1, с. 27], отримуємо, що насправді $(u_1, v_1) = (u_2, v_2)$. Теорему доведено.

Для майже всіх $t \in (0, +\infty)$ введемо функціонал

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_{1,t}} \left[u_t^2 + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} \right] dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_{2,t}} \left[v_t^2 + \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(x) v_{x_i} v_{x_j} \right] dx + \\ + \int_{\Omega_{1,t}} \frac{1}{p(x)} g_1(x) |u|^{p(x)} dx + \int_{\Omega_{2,t}} \frac{1}{q(x)} g_2(x) |v|^{q(x)} dx.$$

Теорема 2. *Нехай виконуються умови (A), (B), (C), (PQ), (U) і (u, v) – узагальнений розв’язок задачі (2)-(7). Тоді правильна нерівність*

$$E(t) \leq 4E(0)e^{-\omega t}, \quad t > 0, \quad \omega > 0. \quad (22)$$

Доведення. Запишемо похідну від E за t та скористаємося рівністю (9)

$$\frac{dE}{dt} = \int_{\Omega_{1,t}} \left[u_{tt} u_t + \sum_{i,j=1}^n b_{ij} u_{x_i} u_{x_j t} + g_1 |u|^{p(x)-2} u_t \right] dx + \int_{\Omega_{2,t}} \left[v_{tt} v_t + \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} v_{x_i} v_{x_j t} + \right. \\ \left. + g_2 |v|^{q(x)-2} v v_t \right] dx = - \int_{\Omega_{1,t}} \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i t} u_{x_j t} + c_1 |u_t|^2 \right] dx - \int_{\Omega_{2,t}} c_2 |v_t|^2 dx. \quad (23)$$

Розглянемо функціонал

$$J(t) = E(t) + \varepsilon \int_{\Omega_{1,t}} u u_t dx + \varepsilon \int_{\Omega_{2,t}} v v_t dx, \quad \varepsilon > 0, \quad t > 0. \quad (24)$$

Враховуючи (9), (23), отримаємо

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{dE}{dt} + \varepsilon \int_{\Omega_{1,t}} |u_t|^2 dx + \varepsilon \int_{\Omega_{2,t}} |v_t|^2 dx + \varepsilon \int_{\Omega_{1,t}} u_{tt} u dx + \varepsilon \int_{\Omega_{2,t}} v_{tt} v dx = \\ = - \int_{\Omega_{1,t}} \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i t} u_{x_j t} + c_1 |u_t|^2 \right] dx - \int_{\Omega_{2,t}} c_2 |v_t|^2 dx + \\ + \varepsilon \int_{\Omega_{1,t}} |u_t|^2 dx + \varepsilon \int_{\Omega_{2,t}} |v_t|^2 dx - \varepsilon \int_{\Omega_{1,t}} \left[\sum_{i,j=1}^n b_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i t} u_{x_j} + \right. \\ \left. + c_1 u_t u + g_1 |u|^{p(x)} \right] dx - \varepsilon \int_{\Omega_{2,t}} \left[\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} v_{x_i} v_{x_j} + c_2 v_t v + g_2 |v|^{q(x)} \right] dx.$$

Оцінимо деякі доданки останньої рівності, використовуючи умови (A), (B), (C) та нерівності Фрідрікса [8]

$$\int_{\Omega_{1,t}} |u|^2 dx \leq \delta_5 \int_{\Omega_{1,t}} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 dx, \quad \int_{\Omega_{2,t}} |v|^2 dx \leq \delta_6 \int_{\Omega_{1,2}} \sum_{i=1}^n |v_{x_i}|^2 dx, \quad \delta_5 > 0, \quad \delta_6 > 0.$$

Матимемо

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_{1,t}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i t} u_{x_j} dx &\leq \int_{\Omega_{1,t}} \left[\frac{B_0}{2\delta_7} \sum_{i=1}^n |u_{x_i t}|^2 + \frac{\delta_7}{2} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 \right] dx \leq \\ &\leq \int_{\Omega_{1,t}} \left[\frac{B_0}{2a_0\delta_7} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i t} u_{x_j} + \frac{\delta_7}{2b_0} \sum_{i,j=1}^n b_{ij} u_{x_i} u_{x_j} \right] dx, \quad \delta_7 > 0, \end{aligned}$$

$$B_0 = \sup_{\Omega_1} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2(x); \text{ далі}$$

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_{1,t}} c_1 u_t u dx &\leq \int_{\Omega_{1,t}} \left[\frac{c_1^0}{2\delta_8} |u_t|^2 + \frac{c_1^0 \delta_8}{2} |u|^2 \right] dx \leq \frac{c_1^0}{2\delta_8} \int_{\Omega_{1,t}} |u_t|^2 dx + \frac{c_1^0 \gamma_1 \delta_8}{2} \int_{\Omega_{1,t}} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 dx \leq \\ &\leq \frac{c_1^0}{2\delta_8 c_{1,0}} \int_{\Omega_{1,t}} c_1 |u_t|^2 dx + \frac{c_1^0 \gamma_1 \delta_8}{2b_0} \int_{\Omega_{1,t}} \sum_{i,j=1}^n b_{ij} u_{x_i} u_{x_j} dx, \quad \delta_8 > 0. \end{aligned}$$

Подібними міркуваннями можна отримати оцінку

$$- \int_{\Omega_{2,t}} c_2 v_t v dx \leq \frac{c_2^0}{2\delta_9 c_{2,0}} \int_{\Omega_{2,t}} c_2 |v_t|^2 dx + \frac{c_2^0 \gamma_2 \delta_9}{2\alpha_0} \int_{\Omega_{2,t}} \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} v_{x_i} v_{x_j} dx, \quad \delta_9 > 0.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &\leq - \left(1 - \frac{B_0 \varepsilon}{2a_0 \delta_7} \right) \int_{\Omega_{1,t}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i t} u_{x_j} dx - \left(1 - \frac{c_1^0 \varepsilon}{2\delta_8 c_{1,0}} \right) \int_{\Omega_{1,t}} c_1 |u_t|^2 dx - \\ &- \left(1 - \frac{c_2^0 \varepsilon}{2\delta_9 c_{2,0}} \right) \int_{\Omega_{2,t}} c_2 |v_t|^2 dx + \frac{\varepsilon}{c_{1,0}} \int_{\Omega_{1,t}} c_1 |u_t|^2 dx + \frac{\varepsilon}{c_{2,0}} \int_{\Omega_{2,t}} c_2 |v_t|^2 dx - \\ &- \varepsilon \int_{\Omega_{1,t}} \left[\left(1 - \frac{\delta_7}{2b_0} - \frac{c_1^0 \gamma_1 \delta_8}{2b_0} \right) \sum_{i,j=1}^n b_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + g_1 |u|^{p(x)} \right] dx - \\ &- \varepsilon \int_{\Omega_{2,t}} \left[\left(1 - \frac{c_2^0 \gamma_2 \delta_9}{2\alpha_0} \right) \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} v_{x_i} v_{x_j} + g_2 |v|^{q(x)} \right] dx. \end{aligned}$$

Виберемо $\delta_7 = \frac{a_0}{1+c_1^0 \gamma_1}$, $\delta_8 = \delta_7$, $\delta_9 = \frac{\alpha_0}{c_2^0 \gamma_2}$, $\varepsilon = \varepsilon_0$, де $\varepsilon_0 > 0$ – розв'язок системи

$$\begin{cases} 1 - \frac{B_0 \varepsilon_0}{2a_0 \delta_7} \geq 0, \\ 1 - \frac{c_1^0 \varepsilon_0}{2\delta_8 c_{1,0}} - \frac{\varepsilon_0}{c_{1,0}} \geq \frac{1}{2}, \\ 1 - \frac{c_2^0 \varepsilon_0}{2\delta_9 c_{2,0}} - \frac{\varepsilon_0}{c_{2,0}} \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді } \frac{dJ}{dt} \leq & -\frac{1}{2} \int_{\Omega_{1,t}} c_1 |u_t|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega_{2,t}} c_2 |v_t|^2 dx - \varepsilon_0 \int_{\Omega_{1,t}} \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n b_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + g_1 |u|^{p(x)} \right] dx - \\ & - \varepsilon_0 \int_{\Omega_{2,t}} \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} v_{x_i} v_{x_j} + g_2 |v|^{q(x)} \right] dx \leq - \int_{\Omega_{1,t}} \left[\frac{\varepsilon_0}{2} \sum_{i,j=1}^n b_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + \frac{c_{1,0}}{2} |u_t|^2 + \right. \\ & \left. + \frac{p_0 \varepsilon_0}{p} g_1 |u|^{p(x)} \right] dx - \int_{\Omega_{2,t}} \left[\frac{\varepsilon_0}{2} \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} v_{x_i} v_{x_j} + \frac{c_{2,0}}{2} |v_t|^2 + \frac{q_0 \varepsilon_0}{q} g_2 |v|^{q(x)} \right] dx \end{aligned}$$

і, якщо, крім того, (при потребі зменшуємо ε_0) $\varepsilon_0 \leq c_{2,0}$, $\varepsilon_0 \leq c_{1,0}$, то

$$\frac{dJ}{dt} \leq -\varepsilon_0 E(t). \quad (25)$$

З (24) та нерівності Фрідріхса одержуємо

$$\begin{aligned} J(t) \leq & E(t) + \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\Omega_{1,t}} [|u|^2 + |u_t|^2] dx + \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\Omega_{2,t}} [|v|^2 + |v_t|^2] dx \leq E(t) + \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\Omega_{1,t}} |u_t|^2 dx + \\ & + \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\Omega_{2,t}} |v_t|^2 dx + \frac{\varepsilon_0 \gamma_1}{2b_0} \int_{\Omega_{1,t}} \sum_{i,j=1}^n b_{ij} u_{x_i} u_{x_j} dx + \frac{\varepsilon_0 \gamma_2}{2\alpha_0} \int_{\Omega_{2,t}} \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} v_{x_i} v_{x_j} dx = \\ & = \int_{\Omega_{1,t}} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon_0 \gamma_1}{b_0} \right) \sum_{i,j=1}^n b_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + \frac{1}{2} (1 + \varepsilon_0) |u_t|^2 + \frac{1}{p} g_1 |u|^{p(x)} \right] dx + \\ & + \int_{\Omega_{2,t}} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon_0 \gamma_2}{\alpha_0} \right) \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} v_{x_i} v_{x_j} + \frac{1}{2} (1 + \varepsilon_0) |v_t|^2 + \frac{1}{q} g_2 |v|^{q(x)} \right] dx. \end{aligned}$$

У разі потреби зменшуємо ε_0 й отримуємо оцінки $1 + \frac{\varepsilon_0 \gamma_1}{b_0} \leq 2$, $1 + \varepsilon_0 \leq 2$, $1 + \frac{\varepsilon_0 \gamma_2}{\alpha_0} \leq 2$. Тоді

$$J(t) \leq 2E(t). \quad (26)$$

Аналогічно, за рахунок вибору ε_0 (зменшуючи його у разі потреби) одержуємо оцінку

$$J(t) \geq E(t) - \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\Omega_{1,t}} [|u|^2 + |u_t|^2] dx - \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\Omega_{2,t}} [|v|^2 + |v_t|^2] dx \geq \frac{1}{2} E(t).$$

Тому з (25), (26) матимемо, що $\frac{dJ}{dt} \leq -\frac{\varepsilon_0}{2} J(t)$. Звідки $J(t) \leq J(0)e^{-\omega t}$, де $\omega = \frac{\varepsilon_0}{2}$. Оскільки $J(0) \leq 2E(0)$ і $J(t) \geq \frac{1}{2}E(t)$, то правильна оцінка (22). Теорему доведено.

1. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / *Лионс Ж.-Л.* – М.: Мир, 2002. – 587 с.
2. *Georgiev V.* Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and source terms / *Georgiev V., Todorova G.* // J. Diff. Equations – 1994. – Vol. 109. – P. 295-308.
3. *Барабаш Г.* Мішана задача для одного слабко нелінійного гіперболічного рівняння у необмеженій області / *Барабаш Г.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2005. – Вип. 64 – С. 7-19.

4. *Greenberg J.M.* The equation $\sigma'(u_x)u_{tt} + \lambda u_{xtx} = \rho_0 u_{tt}$ / *Greenberg J.M., Mac Camy R.C., Mizel V.J.* // *Journal of Mathematics and Mechanics* – 1968. – Vol. 17, №7. – P. 707-728.
5. *Глазатов С.Н.* Некоторые задачи для нелинейных уравнений третьего порядка / *Глазатов С.Н.* – Новосибирск: Ин-т математики Сиб. отд-ние РАН, 1992. (Препринт / РАН, Сиб. отд-ние, Ин-тут математики: №7).
6. *Бугрій О.* Мішана задача для нелінійного рівняння третього порядку в узагальнених просторах Соболева / *Бугрій О., Доманська Г., Процак Н.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – Вип. 64. – 2005. – С. 44-61.
7. *Kováčik O.* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$ / *Kováčik O., Rákosník J.* // *Czechoslovak Math. J.* – 1991. – Vol. 41, №116. – P. 592-618.
8. *Гаевский Х.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / *Гаевский Х., Грегер К., Захаруас К.* – М.: Мир, 1978. – 336 с.
9. *Коддингтон Э.А.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* – М.: Изд-во "Иностранная литература", 1958. – 474 с.
10. *Бугрій О.М.* Скінченність часу стабілізації розв'язку нелінійної параболічної варіаційної нерівності зі змінним степенем нелінійності / *Бугрій О.М.* // Математичні Студії – Т. 24, №2. – 2005. – С. 167-172.

ADJOINT PROBLEM FOR HYPERBOLIC EQUATIONS OF THE SECOND AND THIRD ORDER

Serhij LAVRENYUK, Oksana PANAT

*Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka str., 1*

In the domain $\Omega \times (0, +\infty)$, where Ω is a bounded domain of $\mathbb{R}^n$ and $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, $\Omega_i \neq \emptyset$, $i \in \{1, 2\}$, $\overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2 = \Gamma$, the adjoint problem for hyperbolic equations of the second and third order is considered. Some conditions are stated which provides the existence and uniqueness of the problems' generalized solution. We also studied the asymptotic behavior of the solution at $t \rightarrow \infty$.

Key words: adjoint problem, hyperbolic equation of the second and third order.

Стаття надійшла до редколегії 11.07.2008

Прийнята до друку 22.10.2008

УДК 517.98

ФУНКЦІОНАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ДЛЯ РЕГУЛЯРНИХ ЕЛІПТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ

Віра ЛОЗИНСЬКА¹, Ольга М'ЯУС²

¹ Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
79060, Львів, вул. Наукова, 36

² Національний університет "Львівська політехніка",
79013, Львів, вул. С. Бандери, 12

Функціональне числення побудовано для генераторів сильно неперервних груп обмежених лінійних операторів, що діють над довільним банаховим простором [1], застосовують до регулярних еліптичних диференціальних операторів, які діють над банаховим простором $L_p(\Omega)$ ($1 < p < \infty$), Ω – обмежена множина. Показано, що у цьому випадку функціональне числення існує над просторами кореневих векторів еліптичного оператора.

Ключові слова: еліптичний оператор, кореневий вектор, функціональне числення.

Розглянемо простір $\{L_p(\Omega), \|\cdot\|\}$ ($1 < p < \infty$), Ω – обмежена множина. Нехай в $L_p(\Omega)$ діє рівномірно обмежена однопараметрична C_0 -група $\mathbb{R} \ni t \rightarrow U_t := e^{-itA} \in \mathcal{L}(L_p(\Omega))$ з генератором A . Через $\mathcal{L}(L_p(\Omega))$ позначаємо банахову алгебру обмежених лінійних операторів над $L_p(\Omega)$ з одиничним оператором I . Оператор A – регулярний еліптичний оператор порядку $2m$

$$A : \mathcal{D}(A) \ni u \mapsto \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(t) D^\alpha u(t) \in L_p(\Omega), \quad a_\alpha(t) \in C^\infty(\overline{\Omega})$$

з областю визначення $\mathcal{D}(A) := \left\{ u \in W_p^{2m}(\Omega) : B_j u(t)|_{\partial\Omega} = 0; \quad j = 1, \dots, m \right\}$, де $W_p^{2m}(\Omega)$ – простір Соболева і $B_j = \sum_{|\alpha| \leq k_j} b_{j,\alpha}(t) D^\alpha$, $b_{j,\alpha}(t) \in C^\infty(\partial\Omega)$, $0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m$ – набір граничних операторів.

Спектр $\sigma(A)$ оператора A є послідовністю власних чисел $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ з єдиною точкою скупчення на безмежності. Кожному числу $\lambda_j \in \sigma(A)$ відповідає скінченновимірний кореневий підпростір

$$R(\lambda_j) := \{x \in X : (\lambda_j I - A)^{r_j} x = 0\},$$

де r_j – індекс власного числа λ_j , тобто, найменше невід'ємне ціле число r таке, що $(\lambda_j I - A)^r x = 0$ для довільного вектора x , для якого $(\lambda_j I - A)^{r+1} x = 0$ [2].

Розглянемо при фіксованих $m \in Z_+$, $a > 0$ простір $L_1^{(m,a)}(\mathbb{R})$ вимірних функцій $\varphi(t)$ з нормою

$$\|\varphi\|_{L_1^{(m,a)}(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} |t^m \omega(at) \varphi(t)| dt < \infty,$$

де $\omega(t)$ ($-\infty < t < \infty$) – ціла трансцендентна функція нульового роду, корені якої лежать на уявній додатній півосі вигляду $\omega(t) := C \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t}{it_k}\right)$, $C \geq 1$, $0 < t_1 \leq$

$$\leq t_2 \leq t_3 \leq \dots, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t_k} < \infty.$$

Для кожного $\nu > 0$ розглянемо в $L_1^{(m,a)}(\mathbb{R})$ підпростір

$$E_{\nu}^{(m,a)} := \left\{ \varphi \in L_1^{(m,a)}(\mathbb{R}) \mid \|\varphi\|_{E_{\nu}^{(m,a)}} = \sup_{k \in Z_+} \frac{\|D^k \varphi\|_{L_1^{(m,a)}(\mathbb{R})}}{\nu^k} < \infty \right\}.$$

Простори $E_{\nu}^{(m,a)}$ є банаховими та складаються з цілих функцій експоненціального типу [3], [4].

Розглянемо простір

$$E := \bigcap_{m,a} \bigcup_{\nu} E_{\nu}^{(m,a)} = \lim_{m,a} \text{pr} \left(\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \text{ind } E_{\nu}^{(m,a)} \right),$$

де вкладення просторів $E_{\nu}^{(m,a)} \subset E_{\mu}^{(m,a)}$ ($\nu \leq \mu$), $\bigcup_{\nu} E_{\nu}^{(m+1,a+1)} \subset \bigcup_{\nu} E_{\nu}^{(m,a)}$ неперервні. Простір E – секвенціально повний та інваріантний стосовно дії групи зсувів $T_s : \varphi(t) \rightarrow \varphi(t-s)$, де $s \in \mathbb{R}$ [3].

Через E' позначимо спряжений простір до E і наділимо слабкою топологією спряженого простору. Канонічну білінійну форму, яка задає двоїстість між просторами E' і E , позначимо через $\langle f \mid \varphi \rangle$. Елементи спряженого простору називаємо узагальненими функціями експоненціального типу. Для довільної узагальненої функції експоненціального типу $f \in E'$ та функції $\varphi \in E$ операцію згортки визначимо співвідношенням

$$(f \star \varphi)(t) := \langle f(s) \mid \varphi(t+s) \rangle = \langle f(s) \mid T_{-s} \varphi(t) \rangle = \langle f(s) \mid T_{-t} \varphi(s) \rangle,$$

де $f(s)$ позначає дію функціонала f на функцію $T_{-s} \varphi(t)$ за змінною s . Перетворення Фур'є виконує лінійний ізоморфізм $\mathcal{F} : E \ni \varphi(t) \rightarrow \widehat{\varphi}(\xi) \in \widehat{E}$. Простір $\widehat{E}$ наділяємо топологією стосовно відображення $\mathcal{F}$. Обернене перетворення можна визначити формулою $\mathcal{F}^{-1} : \widehat{E} \ni \widehat{\varphi}(\xi) \rightarrow \varphi(t) \in E$, оскільки Фур'є-образи функцій експоненціального типу є фінітними [5]. Двоїстість $\langle E' \mid E \rangle$ допомагає визначити спряжене відображення до оберненого $(\mathcal{F}^{-1})' : E' \ni f \rightarrow \widehat{f} \in \widehat{E}'$. Його образ $\widehat{E}'$, який породжує двоїстість вигляду $\langle \widehat{E}' \mid \widehat{E} \rangle$, наділяємо слабкою топологією.

Простір $\widehat{E}'$ є комутативною алгеброю [3] щодо множення, визначеного співвідношенням $\langle \widehat{g} \cdot \widehat{f} \mid \widehat{\varphi} \rangle := \langle \widehat{g} \mid \widehat{f} \cdot \widehat{\varphi} \rangle$, де для будь-яких $f, g \in E'$, $\varphi, \psi \in E$ $\widehat{f \star \varphi} := \widehat{f} \cdot \widehat{\varphi}$, $\langle \widehat{f} \cdot \widehat{\varphi} \mid \widehat{\psi} \rangle := \langle \widehat{f} \mid \widehat{\varphi} \cdot \widehat{\psi} \rangle$.

Використаємо поняття з [6] спектрального підпростору оператора. Введемо простір функцій

$$\mathcal{E}_m := \left\{ \rho \in E \mid \widehat{\rho}|_{[-m,m]} = 1 \right\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Спектральним підпростором оператора A називаємо підпростір вигляду

$$S_m := \left\{ x \in L_p(\Omega) \mid \widehat{\rho}(A)x = x \right\},$$

де оператор $\widehat{\rho}(A)$ визначений так:

$$\widehat{\rho}(A) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itA} \rho(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} U_t \rho(t) dt.$$

В [6] визначено, що підпростори S_m є замкненими та задовольняють умову $S_m \subset S_{m+1}$, а звуження оператора A на них має властивість $Ax = A\widehat{\rho}(A)x = -i\widehat{\rho}'(A)x$, тому $S_m \subset \mathcal{D}(A)$. Оператор A на S_m обмежений і є генератором рівномірно обмеженої сильно неперервної групи, тому об'єднання $\bigcup_m S_m$ є щільним в $L_p(\Omega)$. У [7] показано, що спектральні підпростори регулярного еліптичного оператора A збігаються з прямою сумою його кореневих підпросторів, тобто

$$S_m = \bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j).$$

Нехай $E(\mathbb{R}; X) := X \widetilde{\otimes} E$ – поповнення проективного тензорного добутку просторів X та E . Лінійний оператор $\widehat{f}(A)$ визначимо як і в [1] співвідношенням

$$\widehat{f}(A) : \widehat{E}(X) \ni \widehat{x} \rightarrow \widehat{f}(A)\widehat{x} := \int_{-\infty}^{\infty} (U_t \otimes K_f)x(t) dt \in \widehat{E}(X), \quad (1)$$

де $\widehat{E}(X) := \left\{ \widehat{x} = \int_{-\infty}^{\infty} (U_t \otimes I)x(t) dt \mid x \in E(\mathbb{R}; X) \right\}$, $K_f \varphi = f \star \varphi$, $f \in E'$, $\varphi \in E$.

Нехай $\mathcal{L}(\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j))$ – банахова алгебра обмежених лінійних операторів над $\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j)$ з одиничним оператором I .

Теорема 1. Для довільної узагальненої функції $f \in E'$ та чисел $m \in \mathbb{N}$ співвідношення

$$\widehat{f}(A) : \bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j) \ni x \longrightarrow \widehat{(f \star \rho)}(A)x \in \bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j)$$

виконується для кожної функції $\rho \in \mathcal{E}_m$.

Крім того, $\widehat{f}(A)|_{\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j)} \in \mathcal{L}(\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j))$.

Доведення. З формули (1) отримуємо $\widehat{f}(A)x = \widehat{f}(A)\widehat{\rho}(A)x = \widehat{(f \star \rho)}(A)x$, $\forall x \in \bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j)$. Підставляючи $x(t) = x \otimes \rho(t)$ в (1) при $x \in \bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j)$ також, маємо

$$\|\widehat{f}(A)x\| = \|\widehat{(f \star \rho)}(A)x\| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \|U_t x\| |\rho(t)| dt \leq \|U_t\| \|x\| \|\rho\|_{L_1}$$

для функції $\rho \in \mathcal{E}_m$. Звідси $\widehat{f}(A) \mid_{\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j)} \in \mathcal{L}(\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j))$. Теорему доведено.

Нехай топологія в підпросторі $R(A) = \bigcup_m \bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j)$ індукується з простору $L_p(\Omega)$ і в алгебрі $\mathcal{L}(R(A))$ задана сильна операторна топологія.

Теорема 2. *Відображення $\widehat{E}' \ni \widehat{f} \longrightarrow \widehat{f}(A) \in \mathcal{L}(R(A))$ виконує неперервний гомоморфізм алгебри $\widehat{E}'$ в алгебру $\mathcal{L}(R(A))$, при цьому*

$$(\widehat{D^k f})(A) = i^k A^k \widehat{f}(A), \quad (\widehat{(it)^k f})(A) = D^k \widehat{f}(A).$$

Оператори $\widehat{f}(A)$ над простором $L_p(\Omega)$ допускають замикання з областю визначення

$$\left\{ x = \sum_{m=1}^{\infty} x_m \in L_p(\Omega) \mid x_m \in \bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j), \sum_{m=1}^{\infty} \|\widehat{f}(A)x_m\| < \infty \right\}.$$

Доведення. Оскільки $\mathcal{E}_m \subset E$, то звідси випливає, що оператор $\widehat{f}(A)$ є звуженням такого самого оператора з теореми 4 [1]. Відображення $\widehat{E}' \ni \widehat{f} \longrightarrow \widehat{f}(A) \in \mathcal{L}(R(A))$ є гомоморфізмом алгебри $\widehat{E}'$ в алгебру $\mathcal{L}(R(A))$. Перевіримо неперервність відображення $E' \ni f \longrightarrow \widehat{f}(A)x \in L_p(\Omega)$. Для кожного $x \in R(A)$, маємо $\|\widehat{f}(A)x - \widehat{g}(A)x\| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \|U_t x\| |(f-g) \star \rho(t)| dt \leq \|U_t\| \|x\| \int_{-\infty}^{\infty} |(f-g) \star \rho(t)| dt \rightarrow 0$ при $f \rightarrow g$ в просторі E' .

Доведемо існування замикання оператора $\widehat{f}(A)$ над простором $L_p(\Omega)$, використовуючи міркування [7]. Визначимо простір абсолютно збіжних рядів

$$l_1 \left[\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j); L_p(\Omega) \right] := \left\{ x = \sum_{m=1}^{\infty} x_m \in L_p(\Omega) \mid x_m \in \bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j); \sum_{m=1}^{\infty} \|x_m\| < \infty \right\}$$

з нормою $\|x\|_{l_1} := \inf \sum_{m=1}^{\infty} \|x_m\|$, де $\inf$ беремо за всіма зображеннями вектора x у вигляді такого ряду $x = \sum_{m=1}^{\infty} x_m$.

Доведемо, що простір $l_1 \left[\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j); L_p(\Omega) \right]$ ізометричний простору $L_p(\Omega)$. Оскільки $\|x\| = \left\| \sum_{m=1}^{\infty} x_m \right\| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \|x_m\|$, для довільного $x \in l_1 \left[\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j); L_p(\Omega) \right]$, то $l_1 \left[\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j); L_p(\Omega) \right] \subset \overline{R(A)}$, де замикання за нормою $L_p(\Omega)$. З іншого боку, $R(A) \subset l_1 \left[\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j); L_p(\Omega) \right]$ і $\|x\|_{l_1} = \|x\|$ для всіх $x \in \bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j)$ і всіх $m \in \mathbb{N}$. Тому $\|x\|_{l_1} = \|x\|$ для всіх $x \in R(A)$, отже, $\overline{R(A)} \subset l_1 \left[\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j); L_p(\Omega) \right]$. Згідно з попереднім зауваженням $\overline{R(A)} = L_p(\Omega)$.

Введемо ще один допоміжний простір

$$l_1 \left[\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j) \right] := \left\{ x = (x_m)_{m=1}^\infty \mid x_m \in \bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j), \right.$$

$$\left. \|x\|_l = \sum_{m=1}^\infty \|x_m\| < \infty \right\}.$$

Сильно спряжений простір до $l_1 \left[\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j) \right]$ має вигляд

$$l_\infty \left[\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j)' \right] := \left\{ y = (y_m)_{m=1}^\infty \mid y_m \in \bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j)', \|y\|_\infty < \infty \right\},$$

де $\|y\|_\infty := \sup_{m \geq 1} \|y_m\|$ – його норма, простір $\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j)'$ – спряжений простір до $\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j)$ з нормою $\|y_m\| = \sup_{\|x_m\| \leq 1} |\langle x_m, y_m \rangle|$, де $x_m \in \bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j)$.

Доведемо, що сильно спряжений простір до $l_1 \left[\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j); L_p(\Omega) \right]$ ізометричний до простору

$$l_\infty^0 \left[\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j)' \right] = \left\{ y = (y_m)_{m=1}^\infty \in l_\infty \left[\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j)' \right] \mid \sum_{m=1}^\infty \langle x_m, y_m \rangle = 0, \right.$$

$$\left. \forall \sum_{m=1}^\infty x_m = 0 \right\}.$$

Визначимо відображення $\Phi : l_1 \left[\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j) \right] \ni x \mapsto \sum_{m=1}^\infty x_m \in L_p(\Omega)$. Згідно з означенням простір $l_1 \left[\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j); L_p(\Omega) \right]$ ізометричний фактор-простору по ядру відображення Φ , тобто

$$l_1 \left[\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j); L_p(\Omega) \right] \simeq l_1 \left[\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j) \right] / \text{Ker } \Phi.$$

Сильно спряжений простір до $l_1 \left[\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j) \right]$ збігається з простором $l_\infty \left[\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j)' \right]$. Тому сильно спряжений до $l_1 \left[\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j) \right] / \text{Ker } \Phi$ є полярою в просторі $l_\infty \left[\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j)' \right]$ ядра $\text{Ker } \Phi$ [8, гл.V, п.1] стосовно двоїстості $\left\langle l_1 \left[\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j) \right], l_\infty \left[\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j)' \right] \right\rangle$.

З попередніх тверджень випливає, що для будь-якого функціонала $y \in L'_p(\Omega)$ послідовність його звужень $y_m = y|_{\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j)}$ визначає елемент простору $l_\infty^0 \left[\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j)' \right]$ і відображення

$$L'_p(\Omega) \ni y \rightarrow (y_m)_{m=1}^\infty \in l_\infty^0 \left[\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j)' \right]$$

виконує ізометричний ізоморфізм просторів, тобто виконується рівність $\|y\| = \sup_{m \geq 1} \|y_m\|$.

Перейдемо до питання існування замикання функцій від оператора. Підпростір $l_{fin} \left[\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j)' \right]$ – фінітних послідовностей слабо щільний у просторі $l_\infty \left[\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j)' \right]$. Тому підпростір вигляду

$$l_{fin}^0 \left[\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j)' \right] := l_{fin} \left[\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j)' \right] \cap l_\infty^0 \left[\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j)' \right]$$

слабо щільний у $l_\infty^0 \left[\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j)' \right]$. Двоїстість

$$\left\langle l_1 \left[\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j); L_p(\Omega) \right], l_\infty^0 \left[\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j)' \right] \right\rangle$$

реалізується білінійною формою $\langle x, y \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} \langle x_m, y_m \rangle$, де

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} x_m \in l_1 \left[\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j); L_p(\Omega) \right], y = (y_m)_{m=1}^{\infty} \in l_\infty^0 \left[\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j)' \right]$$

і білінійні форми $\langle x_m, y_m \rangle$ відповідають дуальним парам

$$\left\langle \bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j), \bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j)' \right\rangle.$$

Підпростір $l_{fin}^0 \left[\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j)' \right]$ лежить в області визначення спряженого оператора $\widehat{f}(A)'$ до оператора $\widehat{f}(A)$ щодо двоїстості

$$\left\langle l_1 \left[\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j); L_p(\Omega) \right], l_\infty^0 \left[\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j)' \right] \right\rangle.$$

Справді, кожна послідовність $y = (y_m)_{m=1}^{\infty} \in l_{fin}^0 \left[\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j)' \right]$ із j ненульовими членами визначає функціонал вигляду

$$\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j) \ni x_m \rightarrow \langle \widehat{f}(A)x_m, y_m \rangle = \langle x_m, \widehat{f}(A)'y_m \rangle$$

стосовно двоїстості $\left\langle \bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j), \bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j)' \right\rangle$. Тому достатньо показати, що цей функціонал має неперервне розширення на простір абсолютно збіжних рядів $l_1 \left[\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j); L_p(\Omega) \right]$.

Для довільного елемента $x = \sum_{m=1}^{\infty} x_m \in l_1 \left[\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j); L_p(\Omega) \right]$ правильна нерівність

$$\left| \sum_{m=1}^j \langle x_m, \widehat{f}(A)' y_m \rangle \right| \leq \left(\sum_{m=1}^{\infty} \|x_m\| \right) \sup_{1 \leq m \leq j} \|\widehat{f}(A)' y_m\| = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \|x_m\| \right) \|\widehat{f}(A)' y\|,$$

тому функціонал $\langle x, \widehat{f}(A)' y \rangle = \sum_{m=1}^j \langle x_m, \widehat{f}(A)' y_m \rangle$ задовольняє нерівність

$$|\langle x, \widehat{f}(A)' y \rangle| \leq \left(\inf \sum_{m=1}^{\infty} \|x_m\| \right) \|\widehat{f}(A)' y\| = \|x\|_{l_1} \|\widehat{f}(A)' y\|.$$

Функціонал $\langle x, \widehat{f}(A)' y \rangle$ слугує шуканим розширенням, яке визначає спряжений оператор $\widehat{f}(A)'$.

Відомо [9, гл. IV, п. 7], що замикання $\overline{\widehat{f}(A)}$ оператора $\widehat{f}(A)$ існує і збігається з його другим спряженим, якщо область визначення спряженого оператора слабо щільна у спряженому просторі. Отже, існування замикання оператора $\widehat{f}(A)$ доведено.

Область визначення замикання $\overline{\widehat{f}(A)}$, як другого спряженого до $\widehat{f}(A)$, має вигляд

$$\left\{ x = \sum_{m=1}^{\infty} x_m \in l_1 \left[\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j); L_p(\Omega) \right] \mid \left| \sum_{m=1}^{\infty} \langle \widehat{f}(A) x_m, y_m \rangle \right| \leq C \|y\| \right\}$$

для всіх $y \in l_{\infty}^0 \left[\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j)' \right]$, де постійна C визначається x і не залежить від y . Позначимо $y_m = y|_{\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j)}$. Якщо ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \langle \widehat{f}(A) x_m, y_m \rangle$ збіжний для будь-якого $y \in l_{\infty}^0 \left[\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j)' \right]$, то він збіжний абсолютно, тобто збігаються ряди $\sum_{m=1}^{\infty} |\langle \widehat{f}(A) x_m, y_m \rangle|$ для всіх таких y . Справді, для цього достатньо прийняти $y'_m = e^{-i\theta(m)} y_m$, де $\theta(m)$ – аргумент комплексного числа $\langle \widehat{f}(A) x_m, y_m \rangle$. Тоді $\|y'_m\| = \|y_m\|$ і $y' = (y'_m) \in l_{\infty}^0 \left[\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j)' \right]$. З іншого боку, $\left| \sum_{m=1}^{\infty} \langle \widehat{f}(A) x_m, y_m \rangle \right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} |\langle \widehat{f}(A) x_m, y_m \rangle| < \infty$.

Використаємо довільність $y' = (y'_m) \in l_{\infty}^0 \left[\bigoplus_{|\lambda_j| \leq m} R(\lambda_j)' \right]$. Для кожного m знайдеться вектор y'_m такий, що $\|y'_m\| = 1$ і $\|\widehat{f}(A) x_m\| = |\langle \widehat{f}(A) x_m, y'_m \rangle|$. Тому для всіх x з області визначення оператора $\overline{\widehat{f}(A)}$ збігаються ряди

$$\sum_{m=1}^{\infty} \|\widehat{f}(A) x_m\|.$$

Навпаки очевидно. Теорему доведено.

1. Лозинська В.Я. Функціональне числення в згорткових алгебрах узагальнених функцій експоненціального типу / Лозинська В.Я., М'яус О.М. // Науковий вісник Чернівецького університету. Математика. – Вип. 349. – 2007. – С. 79-82.
2. Хилле Э., Филлипс Р. Функціональний аналіз і полугрупи / Хилле Э., Филлипс Р. – М.: ИЛ, 1962.
3. Лозинська В.Я. Про узагальнені функції експоненціального типу / Лозинська В.Я., М'яус О.М. // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2006. – Вип. 4. – С. 48-53.
4. Радько Я.В. Векторы экспоненциального типа в операторном исчислении и дифференциальных уравнениях / Радько Я.В. // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21, №9. – С. 1559-1569.
5. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / Никольский С.М. – М.: Наука, 1977.
6. Любич Ю.И. Об операторах с отделимым спектром / Любич Ю.И., Мацаев В.И. // Матем. сборник. – 1962. – Т. 56 (98), №4. – С. 433-468.
7. Dmytryshyn M.I. Operator calculus on the exponential type vectors of the operator with point spectrum / Dmytryshyn M.I., Lopushansky O.V. // In "General topology in Banach spaces" (ed. T.Banach). – Huntington; New York: NOVA Science Publishers, Inc. – 2001. – P. 137-145.
8. Робертсон А. Топологические векторные пространства / Робертсон А., Робертсон В. – М.: Мир, 1967.
9. Шефер Г. Топологические векторные пространства / Шефер Г. – М.: Мир, 1971.

FUNCTIONAL CALCULUS FOR THE REGULAR ELLIPTIC DIFFERENTIAL OPERATORS

Vira LOZYNSKA¹, Olga MYAUS²

¹*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
National Academy of Sciences of Ukraine,
79060, Lviv, Naukova Str., 3b*

²*Lviv Polytechnic National University,
79013, Lviv, S. Bandery Str., 12*

The some properties of the functional calculus for the regular elliptic differential operators on the Banach space $L_p(\Omega)$ ($1 < p < \infty$), Ω – bounded set are constructed are described.

Key words: elliptic operator, root vector, functional calculus.

Стаття надійшла до редколегії 14.05.2007

Прийнята до друку 22.10.2008

УДК 517.53

ПРО ЗВ'ЯЗОК МІЖ МАКСИМУМОМ МОДУЛЯ І МАКСИМАЛЬНИМ ЧЛЕНОМ ЦІЛОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ У ТЕРМІНАХ ТРИЧЛЕННОЇ СТЕПЕНЕВОЇ АСИМПТОТИКИ

Любомира ЛУГОВА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1

Знайдено умови на показники λ_n , за яких $\ln M(\sigma, F)$ і $\ln \mu(\sigma, F)$ мають однакове зростання у термінах тричленної степеневі асимптотики.

Ключові слова: ряд Діріхле, максимальний член, максимум модуля, тричленна степенева асимптотика.

Нехай $\Lambda = (\lambda_n)$ – зростаюча до $+\infty$ послідовність додатних чисел, $\lambda_0 = 0$, $n(t) = \sum_{\lambda_n \leq t} 1$ – лічильна функція послідовності (λ_n) , а $S(\Lambda)$ – клас цілих рядів Діріхле

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{z\lambda_n\}, \quad z = \sigma + it. \quad (1)$$

Прийmemo $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$, і нехай $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} : n \geq 1\}$ – максимальний член ряду (1), а $\nu(\sigma, F) = \max\{n : \mu(\sigma, F) = |a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\}\}$ – його центральний індекс.

Зростання цілого ряду Діріхле ототожнюється зі зростанням функції $\ln M(\sigma, F)$, а зв'язок між зростанням $\ln M(\sigma, F)$ і поведінкою коефіцієнтів a_n переважно вивчають у два етапи. Спочатку визначають зв'язок між зростанням функції $\ln \mu(\sigma, F)$ і спаданням коефіцієнтів a_n , а потім досліджують умови на показники λ_n , за яких $\ln M(\sigma, F)$ і $\ln \mu(\sigma, F)$ мають однакове зростання в певній шкалі зростання. У термінах тричленної степеневі асимптотики зв'язок між зростанням $\ln \mu(\sigma, F)$ і поведінкою послідовностей a_n і λ_n досліджено в [1], де доведено такі теореми.

Теорема А. *Нехай $p_1 > 1$, $0 < p < p_2 < p_1$, $T_1 > 0$, $T_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ і $\tau^* = \tau I_{\{p:p \geq 2p_2 - p_1\}}(p) - \frac{(T_2 p_2)^2}{2T_1 p_1 (p_1 - 1)} I_{\{p:p \leq 2p_2 - p_1\}}(p)$, де $I_E(p)$ – характеристична функція множини E , тобто $I_E(p) = 1$, для $p \in E$, і $I_E(p) = 0$, для $p \notin E$. Тоді для того, щоб*

$$\ln \mu(\sigma) = T_1 \sigma^{p_1} + T_2 \sigma^{p_2} + (\tau + o(1)) \sigma^p, \quad \sigma \rightarrow +\infty,$$

необхідно, а у випадку, коли $p \geq 2p_2 - p_1$, і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$:

1) існувало $n_0 = n_0(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} \ln |a_n| \leq & -T_1(p_1 - 1) \left(\frac{\lambda_n}{T_1 p_1} \right)^{p_1/(p_1-1)} + T_2 \left(\frac{\lambda_n}{T_1 p_1} \right)^{p_2/(p_1-1)} + \\ & + (\tau^* + \varepsilon) \left(\frac{\lambda_n}{T_1 p_1} \right)^{\frac{\max\{p, 2p_2 - p_1\}}{p_1 - 1}}; \end{aligned}$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$$\begin{aligned} \ln |a_{n_k}| \geq & -T_1(p_1 - 1) \left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1 p_1} \right)^{p_1/(p_1-1)} + T_2 \left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1 p_1} \right)^{p_2/(p_1-1)} + \\ & + (\tau^* - \varepsilon) \left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1 p_1} \right)^{\frac{\max\{p, 2p_2 - p_1\}}{p_1 - 1}} \end{aligned}$$

$$i \quad \lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o \left(\lambda_{n_k}^{\frac{p_1 + \max\{p, 2p_2 - p_1\} - 2}{2(p_1 - 1)}} \right), \quad k \rightarrow \infty.$$

Теорема Б. Нехай $2p_2 - p_1 > 0$ і $(3p_2 - 2p_1)(3p_2 - 2p_1 + 1) \neq 0$. Для того, щоб

$$\ln \mu(\sigma) = T_1 \sigma^{p_1} + T_2 \sigma^{p_2} + \frac{(T_2 p_2)^2}{2T_1 p_1 (p_1 - 1)} \sigma^{2p_2 - p_1} + o(\sigma^{3p_2 - 2p_1}), \quad \sigma \rightarrow +\infty,$$

необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$:

1) існувало $n_0 = n_0(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} \ln |a_n| \leq & -T_1(p_1 - 1) \left(\frac{\lambda_n}{T_1 p_1} \right)^{p_1/(p_1-1)} + T_2 \left(\frac{\lambda_n}{T_1 p_1} \right)^{p_2/(p_1-1)} - \\ & - \left(\frac{(3p_2 - 2p_1 + 1)(T_2 p_2)^3}{6(T_1 p_1 (p_1 - 1))^2} + \varepsilon \right) \left(\frac{\lambda_n}{T_1 p_1} \right)^{(3p_2 - 2p_1)/(p_1 - 1)}; \end{aligned}$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$$\begin{aligned} \ln |a_{n_k}| \geq & -T_1(p_1 - 1) \left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1 p_1} \right)^{p_1/(p_1-1)} + T_2 \left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1 p_1} \right)^{p_2/(p_1-1)} - \\ & - \left(\frac{(3p_2 - 2p_1 + 1)(T_2 p_2)^3}{6(T_1 p_1 (p_1 - 1))^2} - \varepsilon \right) \left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1 p_1} \right)^{(3p_2 - 2p_1)/(p_1 - 1)} \end{aligned}$$

$$i \quad \lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o \left(\lambda_{n_k}^{\frac{3p_2 - 2p_1 - 2}{2(p_1 - 1)}} \right), \quad k \rightarrow \infty.$$

Щодо зв'язку між зростанням $\ln M(\sigma, F)$ і $\ln \mu(\sigma, F)$ у термінах тричленної степеневої асимптотики, то в [2] доведено таку теорему.

Теорема В. Для того, щоб для кожної функції $F \in S(\Lambda)$ співвідношення

$$\ln \mu(\sigma) \leq T_1 \sigma^{p_1} + T_2 \sigma^{p_2} + (\tau + o(1)) \sigma^p, \quad \sigma \rightarrow +\infty,$$

i

$$\ln M(\sigma) \leq T_1 \sigma^{p_1} + T_2 \sigma^{p_2} + (\tau + o(1)) \sigma^p, \quad \sigma \rightarrow +\infty.$$

були рівносильними, достатньо, а у випадку, коли $p \geq 2p_2 - p_1$, і необхідно, щоб послідовність Λ задовольняла умову

$$\ln n(t) = o\left(t^{\frac{p}{p_1}}\right), \quad t \rightarrow +\infty.$$

У доведенні необхідності у теоремі В використовують теорему А. Якщо ж використати теорему Б, то можна довести таку теорему.

Теорема 1. Нехай $3p_2 - 2p_1 > 0$. Для того, щоб для кожної функції $F \in S(\Lambda)$ співвідношення

$$\ln \mu(\sigma) \leq T_1 \sigma^{p_1} + T_2 \sigma^{p_2} + \frac{(T_2 p_2)^2}{2T_1 p_1 (p_1 - 1)} \sigma^{2p_2 - p_1} + o(\sigma^{3p_2 - 2p_1}), \quad \sigma \rightarrow +\infty, \quad (2)$$

і

$$\ln M(\sigma) \leq T_1 \sigma^{p_1} + T_2 \sigma^{p_2} + \frac{(T_2 p_2)^2}{2T_1 p_1 (p_1 - 1)} \sigma^{2p_2 - p_1} + o(\sigma^{3p_2 - 2p_1}), \quad \sigma \rightarrow +\infty, \quad (3)$$

були рівносильними необхідно і достатньо, щоб послідовність Λ задовольняла умову

$$\ln n(t) = o\left(t^{\frac{3p_2 - 2p_1}{p_1}}\right), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (4)$$

Для доведення цієї теореми, крім теореми Б, будуть потрібні ще декілька результатів.

Лема 1 [3-4]. Якщо (μ_n) – зростаюча до $+\infty$ послідовність додатних чисел і $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{\mu_n} > 1$, то існує підпослідовність (μ_k^*) послідовності (μ_n) така, що $k \leq \exp\{\mu_k^*\} + 1$ для всіх $k \in \mathbb{N}$ і $k_j \geq \exp\{\mu_{k_j}^*\}$ для деякої зростаючої до $+\infty$ послідовності (k_j) .

Припустимо, що

$$\Phi(\sigma) = T_1 \sigma^{p_1} + T_2 \sigma^{p_2} + \tau \sigma^p + \delta \sigma^s \quad (\sigma \geq \sigma_0),$$

де $T_1 > 0$, $p_1 > 1$, $0 < p < p_2 < p_1$, $s \leq p$, $T_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ і $\delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Лема 2 [1]. Якщо $p = 2p_2 - p_1$, $s = 3p_2 - 2p_1$, $\tau = \frac{(T_2 p_2)^2}{2T_1 p_1 (p_1 - 1)}$, $(3p_2 - 2p_1)(3p_2 - 2p_1 + 1) \neq 0$ і $\delta \neq \frac{(3p_2 - 2p_1 + 1)(T_2 p_2)^3}{6(T_1 p_1 (p_1 - 1))^2}$, то

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi(x)) &= T_1 \left(\frac{x}{T_1 p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1 - 1}} + \frac{T_2(p_1 - p_2 - 1)}{p_1 - 1} \left(\frac{x}{T_1 p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1 - 1}} + \\ &+ \frac{3p_2 - 3p_1 + 1}{p_1 - 1} \left(\frac{(3p_2 - 2p_1 + 1)(T_2 p_2)^3}{6(T_1 p_1 (p_1 - 1))^2} - \delta + o(1)\right) \left(\frac{x}{T_1 p_1}\right)^{\frac{3p_2 - 2p_1}{p_1 - 1}}. \end{aligned}$$

Зауважимо, що функція φ , яка є оберненою до похідної Φ' функції Φ , за умов леми 2 має вигляд

$$\varphi(x) = \left(\frac{x}{T_1 p_1}\right)^{\frac{1}{p_1 - 1}} - \frac{T_2 p_2}{T_1 p_1 (p_1 - 1)} \left(\frac{x}{T_1 p_1}\right)^{\frac{p_2 - p_1 + 1}{p_1 - 1}} +$$

$$+ \frac{3p_2 - 2p_1}{T_1 p_1 (p_1 - 1)} \left(\frac{(3p_2 - 2p_1 + 1)(T_2 p_2)^3}{6(T_1 p_1 (p_1 - 1))^2} - \delta + o(1) \right) \left(\frac{x}{T_1 p_1} \right)^{\frac{3p_2 - 3p_1 + 1}{p_1 - 1}}.$$

Лема 3 [2]. Нехай $T_1 > 0$, $p_1 > 1$, $0 < p < p_m < \dots < p_2 < p_1$, $T_j \in \mathbb{R}$ ($j = 1, \dots, m$) і $T \in \mathbb{R}$. Тоді, якщо

$$\ln n(t) = o(t^{p/p_1}), \quad t \rightarrow +\infty,$$

то з асимптотичної нерівності

$$\ln \mu(\sigma, F) \leq \sum_{j=1}^m T_j \sigma^j + (T + o(1)) \sigma^p, \quad \sigma \rightarrow +\infty,$$

випливає асимптотична нерівність

$$\ln M(\sigma, F) \leq \sum_{j=1}^m T_j \sigma^j + (T + o(1)) \sigma^p, \quad \sigma \rightarrow +\infty.$$

Доведення теореми 1. Необхідність умови (4) будемо доводити від супротивного. Припустимо, що вона не виконується, тобто

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n^{(3p_2 - 2p_1)/p_1}} > \beta > 0.$$

Тоді за лемою 1 існує підпослідовність (λ_k^*) послідовності (λ_n) така, що

$$k \leq \exp \left\{ \beta (\lambda_k^*)^{(3p_2 - 2p_1)/p_1} \right\} + 1$$

для всіх $k \in \mathbb{N}$ і

$$k_j \geq \exp \left\{ \beta (\lambda_{k_j}^*)^{(3p_2 - 2p_1)/p_1} \right\}$$

для деякої зростаючої до $+\infty$ послідовності (k_j) .

Прийmemo $a_n = 0$, якщо $\lambda_n \notin \{\lambda_k^*\}$, і $a_n = a_k^*$, якщо $\lambda_n \in \{\lambda_k^*\}$, де

$$\begin{aligned} \ln a_k^* = & -T_1(p_1 - 1) \left(\frac{\lambda_k^*}{T_1 p_1} \right)^{p_1/(p_1 - 1)} + T_2 \left(\frac{\lambda_k^*}{T_1 p_1} \right)^{p_2/(p_1 - 1)} - \\ & - \frac{(3p_2 - 2p_1 + 1)(T_2 p_2)^3}{6(T_1 p_1 (p_1 - 1))^2} \left(\frac{\lambda_k^*}{T_1 p_1} \right)^{(3p_2 - 2p_1)/(p_1 - 1)}. \end{aligned}$$

Для цілого ряду Діріхле з такими коефіцієнтами за теоремою Б правильна асимптотична рівність (2). Зауважимо таке: $3p_2 - 2p_1 > 0$, то $2p_2 - p_1 > 0$. Нехай $m_j = [k_j - \sqrt{k_j}]$. Тоді

$$\lambda_{m_j}^* \geq \left(\frac{\ln(m_j - 1)}{\beta} \right)^{\frac{p_1}{3p_2 - 2p_1}} \geq \left(\frac{\ln(k_j - \sqrt{k_j} - 2)}{\beta} \right)^{\frac{p_1}{3p_2 - 2p_1}} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{\ln k_j - \frac{(1+o(1))}{\sqrt{k_j}}}{\beta} \right)^{\frac{p_1}{3p_2-2p_1}} = \left(\frac{\ln k_j}{\beta} \right)^{\frac{p_1}{3p_2-2p_1}} \left(1 - \frac{1+o(1)}{\sqrt{k_j} \ln k_j} \right)^{\frac{p_1}{3p_2-2p_1}} \geq \\
 &\geq \lambda_{k_j}^* - \lambda_{k_j}^* \frac{(1+o(1))p_1}{(3p_2-2p_1)\sqrt{k_j} \ln k_j} = \lambda_{k_j}^* - \delta_j,
 \end{aligned}$$

де

$$\delta_j = \frac{(1+o(1))p_1}{(3p_2-2p_1)\beta} (\lambda_{k_j}^*)^{\frac{p_1-3p_2+2p_1}{p_1}} \exp \left\{ -\frac{\beta}{2} (\lambda_{k_j}^*)^{\frac{3p_2-2p_1}{p_1}} \right\}, \quad j \rightarrow \infty,$$

а для $\sigma > 0$

$$\begin{aligned}
 M(\sigma, F) &\geq \sum_{k=m_j}^{k_j} a_k^* \exp\{\sigma \lambda_k^*\} \geq (k_j - m_j + 1) a_{k_j}^* \exp\{\sigma \lambda_{k_j}^*\} \geq \\
 &\geq \sqrt{k_j} a_{k_j}^* \exp\{\sigma (\lambda_{k_j}^* - \delta_j)\}.
 \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\begin{aligned}
 \ln M(\sigma, F) &\geq \frac{1}{2} \ln k_j + \ln a_{k_j}^* + \sigma \lambda_{k_j}^* - \sigma \delta_j \geq \\
 &\geq \frac{\beta}{2} (\lambda_{k_j}^*)^{(3p_2-2p_1)/p_1} - T_1(p_1-1) \left(\frac{\lambda_{k_j}^*}{T_1 p_1} \right)^{p_1/(p_1-1)} + T_2 \left(\frac{\lambda_{k_j}^*}{T_1 p_1} \right)^{p_2/(p_1-1)} - \\
 &\quad - \frac{(3p_2-2p_1+1)(T_2 p_2)^3}{6(T_1 p_1(p_1-1))^2} \left(\frac{\lambda_{k_j}^*}{T_1 p_1} \right)^{(3p_2-2p_1)/(p_1-1)} + \sigma \lambda_{k_j}^* - \sigma \delta_j. \quad (5)
 \end{aligned}$$

Нехай

$$\begin{aligned}
 \sigma = \sigma_j = \varphi(\lambda_{k_j}^*) &= \left(\frac{\lambda_{k_j}^*}{T_1 p_1} \right)^{1/(p_1-1)} - \frac{T_2 p_2}{T_1 p_1(p_1-1)} \left(\frac{\lambda_{k_j}^*}{T_1 p_1} \right)^{(p_2-p_1+1)/(p_1-1)} + \\
 &+ \frac{(3p_2-2p_1)(3p_2-2p_1+1)(T_2 p_2)^3}{T_1 p_1(p_1-1)6(T_1 p_1(p_1-1))^2} \left(\frac{\lambda_{k_j}^*}{T_1 p_1} \right)^{(3p_2-3p_1+1)/(p_1-1)}.
 \end{aligned}$$

Тоді $\sigma_j \delta_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$ і з (5) одержимо

$$\begin{aligned}
 \ln M(\sigma_j, F) &\geq \frac{\beta}{2} (\lambda_{k_j}^*)^{(3p_2-2p_1)/p_1} - T_1(p_1-1) \left(\frac{\lambda_{k_j}^*}{T_1 p_1} \right)^{p_1/(p_1-1)} + \\
 &+ T_2 \left(\frac{\lambda_{k_j}^*}{T_1 p_1} \right)^{p_2/(p_1-1)} - \frac{(3p_2-2p_1+1)(T_2 p_2)^3}{6(T_1 p_1(p_1-1))^2} \left(\frac{\lambda_{k_j}^*}{T_1 p_1} \right)^{(3p_2-2p_1)/(p_1-1)} + \\
 &\quad + T_1 p_1 \left(\frac{\lambda_{k_j}^*}{T_1 p_1} \right)^{p_1/(p_1-1)} - \frac{T_2 p_2}{p_1-1} \left(\frac{\lambda_{k_j}^*}{T_1 p_1} \right)^{p_2/(p_1-1)} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(3p_2 - 2p_1)(3p_2 - 2p_1 + 1)(T_2 p_2)^3}{(p_1 - 1)6(T_1 p_1(p_1 - 1))^2} \left(\frac{\lambda_{k_j}^*}{T_1 p_1} \right)^{(3p_2 - 2p_1)/(p_1 - 1)} + o(1) = \\
& = T_1 \left(\frac{\lambda_{k_j}^*}{T_1 p_1} \right)^{p_1/(p_1 - 1)} + T_2 \frac{p_1 - p_2 - 1}{p_1 - 1} \left(\frac{\lambda_{k_j}^*}{T_1 p_1} \right)^{p_2/(p_1 - 1)} + \\
& + \left(\frac{(3p_2 - 2p_1 + 1)(3p_2 - 3p_1 + 1)(T_2 p_2)^3}{6(p_1 - 1)(T_1 p_1(p_1 - 1))^2} + \frac{\beta}{2} \right) \left(\frac{\lambda_{k_j}^*}{T_1 p_1} \right)^{\frac{3p_2 - 2p_1}{p_1 - 1}} + o(1).
\end{aligned}$$

З іншого боку, використовуючи лему 2 при $j \rightarrow \infty$, маємо

$$\begin{aligned}
& T_1 \sigma_j^{p_1} + T_2 \sigma_j^{p_2} + \tau \sigma_j^{2p_2 - p_1} + o(\sigma_j^{3p_2 - 2p_1}) = \\
& = T_1 \left(\frac{\lambda_{k_j}^*}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_1}{p_1 - 1}} + \frac{T_2(p_1 - p_2 - 1)}{p_1 - 1} \left(\frac{\lambda_{k_j}^*}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_2}{p_1 - 1}} + \\
& + \frac{3p_2 - 3p_1 + 1}{p_1 - 1} \left(\frac{(3p_2 - 2p_1 + 1)(T_2 p_2)^3}{6(T_1 p_1(p_1 - 1))^2} + o(1) \right) \left(\frac{\lambda_{k_j}^*}{T_1 p_1} \right)^{\frac{3p_2 - 2p_1}{p_1 - 1}}.
\end{aligned}$$

З двох останніх співвідношень випливає, що співвідношення (3) не виконується, тобто умова (4) є необхідною для того, щоб для кожної функції $F \in S(\Lambda)$ зі співвідношення (2) випливало співвідношення (3).

Достатність умови (4) випливає з леми 3. Достатньо останній член асимптотики у лемі 3 записати у вигляді $(T + o(1))\sigma^p = \tau\sigma^p + o(\sigma^s)$, $\sigma \rightarrow +\infty$, та вибрати $m = 2$, $p = 2p_2 - p_1$, $s = 3p_2 - 2p_1$ і $\tau = \frac{(T_2 p_2)^2}{2T_1 p_1(p_1 - 1)}$.

Зауваження 1. Використовуючи нерівність Коші $\mu(\sigma, F) \leq M(\sigma, F)$ з доведення леми 3 в [2] легко отримати за умови (4) $\ln M(\sigma, F) - \ln \mu(\sigma, F) = o(\sigma^{3p_2 - 2p_1})$, $\sigma \rightarrow +\infty$. Звідси випливає, що за умови (4) рівносильними є також співвідношення

$$\ln \mu(\sigma) = T_1 \sigma^{p_1} + T_2 \sigma^{p_2} + \frac{(T_2 p_2)^2}{2T_1 p_1(p_1 - 1)} \sigma^{2p_2 - p_1} + o(\sigma^{3p_2 - 2p_1}), \quad \sigma \rightarrow +\infty,$$

та

$$\ln M(\sigma) = T_1 \sigma^{p_1} + T_2 \sigma^{p_2} + \frac{(T_2 p_2)^2}{2T_1 p_1(p_1 - 1)} \sigma^{2p_2 - p_1} + o(\sigma^{3p_2 - 2p_1}), \quad \sigma \rightarrow +\infty.$$

1. *Шеремета М.М.* Тричленна степенев асимптотика логарифма максимального члена цілого ряду Діріхле / *Шеремета М.М., Лугова Л.Л.* // Матем. студії. – 2006. – Т. 25, №2. – С. 149-168.
2. *Лугова Л.Л.* Про тричленну степенев асимптотику цілого ряду Діріхле / *Лугова Л.Л., Шеремета М.М.* // Матем. студії. – 2007. – Т. 28, №1. – С.37-40.
3. *Sumyk O.M.* On connection between the growth of maximum modulus and maximal term of entire Dirichlet series in term of m-member asymptotics / *Sumyk O.M., Sheremeta M.M.* // *Matem. studii* – 2003. – V. 19, №1. – P. 83-88.
4. *Шеремета М.Н.* О поведении максимума модуля целого ряда Дирихле вне исключительного множества / *Шеремета М.Н.* // Матем. заметки. – 1995. – Т.57, №2. – С. 283-296.

ON CONNECTION BETWEEN MAXIMUM MODULUS AND
MAXIMAL TERM OF ENTIRE DIRICHLET SERIES IN
TERM OF THREE-MEMBER ASYMPTOTICS

Lyubomyra LUHOVA

*Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka str., 1*

Condition on the exponent λ_n are found, under which the $\ln M(\sigma, F)$ and $\ln \mu(\sigma, F)$ are equivalent in term of three-member asymptotics.

Key words: Dirichlet series, maximal term, maximum modulus, three-term power asymptotic

Стаття надійшла до редколегії 21.03.2008

Прийнята до друку 22.10.2008

УДК 517.5

ПРО ПІДСУМОВУВАННЯ ДВОКРАТНИХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РЯДІВ УЗАГАЛЬНЕНИМИ МЕТОДАМИ

Олеся ЛЮБИЦЬКА

*Національний університет "Львівська політехніка",
79013, Львів, вул. С. Бандери, 12
e-mail: olesja_ljubitska@yahoo.com*

Розглянуто узагальнені суми двократних тригонометричних рядів. Досліджено похибки наближення функцій послідовностями узагальнених частинних сум рядів.

Ключові слова: кратні тригонометричні ряди, узагальнені методи підсумовування рядів, ядра Фейєра, дельтоподібні послідовності функцій.

1. Для наближення розривних функцій чи похідних від інтегрованих за Лебегом функцій, використовують [1, 2, 3, 6] послідовності узагальнених частинних сум рядів (послідовності частинних сум рядів, підсумовуваних узагальненими методами). В основу досліджень збіжності рядів, підсумовуваних узагальненими методами, і оцінки похибок наближення функцій послідовностями частинних сум рядів, покладено інтегральне їхнє зображення. В [4] розглянуто узагальнені методи підсумовування тригонометричних рядів, що ґрунтуються на використанні ядер Фейєра у вигляді дельтаподібних фінітних функцій; знайдено оцінки наближення функцій однієї змінної послідовностями узагальнених частинних сум рядів. Мета нашої праці – дослідити оцінки наближення функцій послідовностями узагальнених частинних сум двократних тригонометричних рядів, що ґрунтується на використанні дельтаподібних послідовностей фінітних функцій.

2. Узагальнена сума ряду. Нехай $f(x)$, $x = (x_1, x_2) \in R^2 - 2\pi$ -періодична функція за кожною змінною, інтегрована за Лебегом, $f(x_1, x_2) \in L^1(Q)$, $Q = \{x : -\pi \leq x_j \leq \pi; j = 1, 2\}$. Розглянемо кратний ряд Фур'є

$$f(x_1, x_2) \sim \sum_{k_{12}=-\infty}^{\infty} c_{k_{12}} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)}, \quad (1)$$

де

$$c_{k_{12}} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_1, x_2) e^{-i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} dx_1 dx_2, \quad (2)$$

– коефіцієнти Фур'є функції $f(x_1, x_2)$.

Введемо послідовність функцій $\{\varphi(kr)\} = \{\varphi(k_1 r_1) \cdot \varphi(k_2 r_2)\}$, члени якої визначають за формулою

$$\varphi(k_j r_j) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 g(|t_j|) e^{i k_j r_j t_j} dt_j, \quad (3)$$

де $r_1, r_2 \in R_+$; $j = 1, 2$, $g(t_j)$ – неперервна функція на проміжку $[0; 1]$, має похідну $(p+1)$ -го порядку обмеженої варіації, $\int_0^1 g(t) dt = 1$ і, відповідно [5], правильна оцінка

$$|\varphi(k_j r_j)| = O\left(\frac{1}{k_j^{p+1}}\right) \quad (p \geq 1). \quad (4)$$

Розглянемо також ряд

$$S(f; x; r) = \sum_{k_{12}=-\infty}^{\infty} \varphi(k_1 r_1) \varphi(k_2 r_2) c_{k_{12}} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)}, \quad (5)$$

який внаслідок оцінки $|c_k| = O(1)$ для $f(x_1, x_2) \in L^1(Q)$ та оцінки (4) рівномірно збігається стосовно x при $r_j \neq 0$.

Означення 1. (Див. [2]) Ряд (1) підсумовують методом $\{\varphi(kr)\}$ при $r \rightarrow 0$ до $f(x)$ в точці x , якщо в цій точці $\lim_{r \rightarrow 0} S(f; x; r) = f(x)$.

Розглянемо 2π -періодичне продовження функції $g(t_j)$

$$G(t_j, r_j) = \begin{cases} \frac{1}{2r_j} g\left(\frac{|t_j|}{r_j}\right), & |t_j| \leq r_j, \\ 0, & r_j < |t_j| \leq \pi. \end{cases}$$

Функція $G(t_j, r_j)$ є фінітним ядром Фейєра, вона має неперервну похідну p -го порядку і має похідну $(p+1)$ -го порядку обмеженої варіації. Розвинення в тригонометричний ряд цього ядра таке:

$$G(t_j, r_j) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k_j=-\infty}^{\infty} \varphi(k_j r_j) e^{i k_j t_j}. \quad (6)$$

Ряд (6) рівномірно збігається стосовно x при $r_j \neq 0$.

Введемо двовимірне ядро Фейєра

$$G(t, r) = G(t_1, r_1) \cdot G(t_2, r_2). \quad (7)$$

Врахувавши в (5) формули (2) і (7), запишемо функцію $S(f; x; r)$ в інтегральній формі

$$S(f, x, r) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_1 + t_1, x_2 + t_2) G(t_1, r_1) G(t_2, r_2) dt_1 dt_2. \quad (8)$$

Зробивши заміну $\frac{t_j}{r_j} = u_j$ в (8) і врахувавши формули (2), (3), одержимо ще таку формулу для суми ряду (5)

$$S(f; x; r) = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x_1 + r_1 u_1, x_2 + r_2 u_2) g(|u_1|) g(|u_2|) du_1 du_2. \quad (9)$$

3. Оцінки збіжності рядів функції $f(x) \in L^1(Q)$. Позначимо [3] через $H_\alpha(Q)$ простір 2π -періодичних неперервних функцій $f(x) \in H_\alpha(Q)$, які задовольняють нерівність

$$|f(x_1 + t_1, x_2 + t_2) - f(x_1, x_2)| \leq h_1 t_1^{\alpha_1} + h_2 t_2^{\alpha_2}, \quad (10)$$

де $0 < \alpha_j \leq 1$; $h_j, t_j \in R$.

Розглянемо наближення функції $f(x)$ послідовністю тригонометричних поліномів вигляду

$$S_N(f; x; r) = \sum_{k_1=-N_1}^{N_1} \sum_{k_2=-N_2}^{N_2} \varphi(k_1 r_1) \varphi(k_2 r_2) c_{k_{12}} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)},$$

де $r_j \neq 0$; $N_j \in Z$, $c_{k_{12}}$ – коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$.

Відхилення функції $f(x)$ від полінома $S_N(f; x; r)$ позначимо через

$$\varepsilon_N(f; r) = \max_{x \in Q} |S_N(f; x; r) - f(x)|$$

і перетворимо його так:

$$\begin{aligned} \varepsilon_N(f; r) &= \max_{x \in Q} |S(f; x; r) - f(x) + S_N(f; x; r) - S(f; x; r)| \leq \\ &\leq \max_{x \in Q} |S(f; x; r) - f(x)| + \max_{x \in Q} |S_N(f; x; r) - S(f; x; r)|. \end{aligned} \quad (11)$$

Відхилення (11) залежить від двох параметрів – r, N і $\lim_{r \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon_N(f; r) = 0$. Зміна порядку граничних переходів не допускається. Існують криві $r = r(N)$, $r(N) > 0$ з асимптотою $r = 0$, що $\lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon_N(f, r(N)) = 0$. Запишемо рівняння цих кривих у вигляді [4]

$$r_j = \frac{r_{0j}}{N_j^{\gamma_j}}, \quad (12)$$

де r_{0j}, γ_j – сталі величини, які не залежать від N_j .

Теорема 1. Нехай $f(x) \in H_\alpha(Q)$, тоді справджується оцінка

$$\varepsilon_N(f; r(N)) \leq \begin{cases} \frac{A_1}{N_1^{\alpha_1 \gamma_1}} + \frac{A_2}{N_2^{\alpha_2 \gamma_2}}, & \text{якщо } 0 < \gamma_j \leq \frac{\alpha_j + p}{\alpha_j + p + 1}; \\ \frac{A_1}{N_1^{\alpha_1 \gamma_1}} + \frac{A_2}{N_2^{\alpha_2 \gamma_2}} + \frac{B}{N_1^{\alpha_1 \gamma_1} N_2^{\alpha_2 \gamma_2}}, & \text{якщо } \frac{\alpha_j + p}{\alpha_j + p + 1} < \gamma_j < \frac{\alpha_j + p}{p + 1}; \end{cases}$$

де $A_j, B = \text{const.}$

Доведення. Оцінимо перший доданок виразу (11) при $r_j = r_j(N_j)$ з врахуванням формули (9), (10) та (12)

$$\begin{aligned} |S(f; x; r) - f(x)| &= \left| \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x_1 + r_1 t_1, x_2 + r_2 t_2) g(|t_1|) g(|t_2|) dt_1 dt_2 - f(x_1, x_2) \right| \leq \\ &\leq A \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |h_1 r_1^{\alpha_1}(N_1) t_1^{\alpha_1} + h_2 r_2^{\alpha_2}(N_2) t_2^{\alpha_2}| g(|t_1|) g(|t_2|) dt_1 dt_2 = \\ &= a_1 r_1^{\alpha_1}(N_1) + a_2 r_2^{\alpha_2}(N_2) = \frac{A_1}{N_1^{\alpha_1 \gamma_1}} + \frac{A_2}{N_2^{\alpha_2 \gamma_2}}, \end{aligned}$$

де $a_j, A_j, A = \text{const}$.

Знайдемо оцінку для другого доданку (11), з врахуванням нерівності (4), яку запишемо у вигляді

$$|\varphi(k_j r_j)| \leq \frac{A_j}{(k_j r_j)^{p+1}}, \quad (13)$$

та нерівності $c_{k_{12}} \leq \frac{b}{k_1^{\alpha_1} k_2^{\alpha_2}}$, де $k_j r_j \gg 1$, $A_j, b = \text{const}$.

$$\begin{aligned} |S_N(f; x; r(N)) - S(f; x; r(N))| &= \\ &= \left| \sum_{k_1=\pm N_1}^{\infty} \sum_{k_2=\pm N_2}^{\infty} \varphi(k_1 r_1(N_1)) \varphi(k_2 r_2(N_2)) c_{k_{12}} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} \right| < \\ &< B_1 \sum_{k_1=\pm N_1}^{\infty} \sum_{k_2=\pm N_2}^{\infty} \frac{1}{(k_1 r_1(N_1))^{p+1} (k_2 r_2(N_2))^{p+1} k_1^{\alpha_1} k_2^{\alpha_2}} \leq \\ &\leq B \frac{1}{N_1^{p+\alpha_1-\gamma_1(p+1)} N_2^{p+\alpha_2-\gamma_2(p+1)}}. \end{aligned}$$

Тут $B, B_1 = \text{const}$.

Отже, остаточно оцінку для відхилення одержимо у вигляді

$$\varepsilon_N(f; r(N)) \leq \frac{A_1}{N_1^{\alpha_1 \gamma_1}} + \frac{A_2}{N_2^{\alpha_2 \gamma_2}} + B \frac{1}{N_1^{p+\alpha_1-\gamma_1(p+1)} N_2^{p+\alpha_2-\gamma_2(p+1)}}. \quad (14)$$

Знайдемо порядок наближення функції $f(x)$ поліномом $S_N(f; x; r(N))$ при $N \rightarrow \infty$ на основних напрямках $-N_j$. Відповідні доданки (14) нескінченно малі величини за умови $0 < \gamma_j < \frac{p+\alpha_j}{p+1}$. Найбільший порядок малості величини $\varepsilon_N(f; r(N))$ на цих напрямках досягають за такої умови: $\alpha_j \gamma_j^0 = \alpha_j + p - \gamma_j^0(p+1)$. Звідки $\gamma_j^0 = \frac{\alpha_j + p}{\alpha_j + p + 1}$.

Легко переконатися, що перший доданок в (14) для значень $0 < \gamma_j \leq \gamma_j^0$ є нескінченно малою найнижчого порядку на будь-яких напрямках, тому

$$\varepsilon_N(f; r(N)) \leq \frac{A_1}{N_1^{\alpha_1 \gamma_1}} + \frac{A_2}{N_2^{\alpha_2 \gamma_2}}, \quad A_j = \text{const.}$$

Для значень параметрів γ_j , $\gamma_j^0 < \gamma_j < \frac{\alpha_j + p}{p + 1}$, нескінченно малою найнижчого порядку може бути перший і другий доданки залежно від напрямку.

Отже, нерівність (14) набуде вигляду

$$\varepsilon_N(f; r(N)) \leq \begin{cases} \frac{A_1}{N_1^{\alpha_1 \gamma_1}} + \frac{A_2}{N_2^{\alpha_2 \gamma_2}}, & \text{якщо } 0 < \gamma_j \leq \frac{\alpha_j + p}{\alpha_j + p + 1}; \\ \frac{A_1}{N_1^{\alpha_1 \gamma_1}} + \frac{A_2}{N_2^{\alpha_2 \gamma_2}} + \frac{B}{N_1^{\alpha_1 \gamma_1} N_2^{\alpha_2 \gamma_2}}, & \text{якщо } \frac{\alpha_j + p}{\alpha_j + p + 1} < \gamma_j < \frac{\alpha_j + p}{p + 1}; \end{cases}$$

Теорему доведено.

Знайдено також оцінку наближення похідної від функції $f(x_1, x_2)$. Запишемо вираз відхилення функції $f^{(m)}(x)$ від полінома $S_N^{(m)}(f; x; r)$ в області D^* , строго внутрішній до області $D \subset Q$

$$\begin{aligned} \varepsilon_N^* \left(\frac{\partial^m f(x)}{\partial x^m}; r \right) &\leq \\ &\leq \max_{x \in D^*} \left| S^{(m)}(f; x; r) - f^{(m)}(x) \right| + \max_{x \in D^*} \left| S_N^{(m)}(f; x; r) - S^{(m)}(f; x; r) \right|. \end{aligned} \quad (15)$$

Теорема 2. Нехай $f(x)$ — 2π -періодична функція, $f(x) \in L^1(Q)$. В області, строго внутрішній до області $D \subset Q$, вона має неперервну похідну m -го порядку ($m \geq 1$) і обмежену похідну $(m+1)$ -го порядку, $f^{(m)}(x) = \frac{\partial^{m_1+m_2} f}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2}}$, $m = m_1 + m_2$. Тоді справджується оцінка

$$\varepsilon_N^* \left(f^{(m)}(x); r(N) \right) \leq \begin{cases} \frac{A_1}{N_1^{\gamma_1}} + \frac{A_2}{N_2^{\gamma_2}}, & \text{якщо } 0 < \gamma_j \leq \frac{p - m_j}{p + 2}; \\ \frac{A_1}{N_1^{\gamma_1}} + \frac{A_2}{N_2^{\gamma_2}} + \frac{B}{N_1^{\gamma_1} N_2^{\gamma_2}}, & \text{якщо } \frac{p - m_j}{p + 2} < \gamma_j < \frac{p - m_j}{p + 1}; \end{cases}$$

де $A_j, B = \text{const.}$

Доведення. Продиференціюємо ряд (5) та інтеграл (8) m разів у точці неперервності функції $f(x_1, x_2)$, ($m_j \leq p - 1$) при $r_j \neq 0$. Враховуючи, що

$$G^{(m_j)}(t_j, r_j) = \begin{cases} \frac{1}{2r_j} \frac{\partial^{m_j}}{\partial t_j^{m_j}} g \left(\frac{|t_j|}{r_j} \right), & |t_j| \leq r_j, \\ 0, & r_j < |t_j| \leq \pi, \end{cases}$$

– неперервна функція з похідною обмеженої варіації і ряд

$$G^{(m_j)}(t_j, r_j) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k_j=-\infty}^{\infty} (ik)^{m_j} \varphi(k_j r_j) e^{ik_j t_j}$$

внаслідок оцінки $|k^{m_j} \varphi(k_j r_j)| \leq \frac{A}{k_j^q}$ ($q \geq 2$) рівномірно збігається, правильна рівність

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} (ik_1)^{m_1} (ik_2)^{m_2} \varphi(k_1 r_1) \varphi(k_2 r_2) c_{12} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} = \\ & = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t_1, t_2) G_{x_1}^{m_1}(t_1 - x_1; r_1) G_{x_2}^{m_2}(t_2 - x_2; r_2) dt_1 dt_2. \end{aligned} \quad (16)$$

Оцінимо перший доданок виразу (15) при $r_j = r_j(N_j)$ в області D^* з врахуванням (12). В інтегралі (16) зробимо заміну $\frac{t_j - x_j}{r_j} = \xi_j$, застосуємо формулу інтегрування

за частинами і врахуємо рівності $\left. \frac{\partial^{l_j} g(|\xi_j|)}{\partial \xi_j^{l_j}} \right|_{-1}^1 = 0$, ($0 < l_j < m_j$),

$$\begin{aligned} S^{(m)}(f; x; r) &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t_1, t_2) G_{x_1}^{m_1}(t_1 - x_1; r_1) G_{x_2}^{m_2}(t_2 - x_2; r_2) dt_1 dt_2 = \\ &= \frac{1}{4} \frac{(-1)^{m_1+m_2}}{r_1^{m_1} r_2^{m_2}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x_1 + r_1 \xi_1; x_2 + r_2 \xi_2) \frac{\partial^{m_1}}{\partial \xi_1^{m_1}} g(|\xi_1|) \frac{\partial^{m_2}}{\partial \xi_2^{m_2}} g(|\xi_2|) d\xi_1 d\xi_2 = \\ &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial^{m_1+m_2} f(x_1 + r_1 \xi_1; x_2 + r_2 \xi_2)}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2}} g(|\xi_1|) g(|\xi_2|) d\xi_1 d\xi_2. \end{aligned}$$

Використовуючи ці формули для $S^{(m)}(f; x; r)$, одержимо вираз

$$\begin{aligned} & \left| S^{(m)}(f; x; r) - f^{(m)}(x) \right| = \\ &= \left| \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial^{m_1+m_2} f(x_1 + r_1 \xi_1; x_2 + r_2 \xi_2)}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2}} g(|\xi_1|) g(|\xi_2|) d\xi_1 d\xi_2 - f^{(m)}(x) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |r_1 \xi_1 + r_2 \xi_2| g(|\xi_1|) g(|\xi_2|) d\xi_1 d\xi_2 < \frac{A_1}{N_1^{\gamma_1}} + \frac{A_2}{N_2^{\gamma_2}}, \quad A_j = const. \end{aligned}$$

Враховуючи нерівності (13) та нерівність $|c_k| \leq A < \infty$, $f(x) \in L^1(Q)$, знайдемо

оцінку другого доданку виразу (15)

$$\begin{aligned}
 & \left| S_N^{(m)}(f; x; r(N)) - S^{(m)}(f; x; r(N)) \right| = \\
 & = \left| \sum_{k_1=\pm N_1}^{\infty} \sum_{k_2=\pm N_2}^{\infty} (ik)^{m_1+m_2} \cdot \varphi(k_1 r_1(N_1)) \varphi(k_1 r_1(N_1)) c_{k_{12}} \cdot e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} \right| \leq \\
 & \leq B_1 \sum_{k_1=\pm N_1}^{\infty} \sum_{k_2=\pm N_2}^{\infty} \frac{k_1^{m_1} k_2^{m_2}}{(k_1 r_1(N_1))^{p+1} (k_2 r_2(N_2))^{p+1}} < \\
 & < B \frac{1}{N_1^{p-m_1-\gamma_1(p+1)} N_2^{p-m_2-\gamma_2(p+1)}}, \quad B, B_j = \text{const}.
 \end{aligned}$$

Отже,

$$\varepsilon_N^* \left(f^{(m)}(x); r(N) \right) \leq \frac{A_1}{N_1^{\gamma_1}} + \frac{A_2}{N_2^{\gamma_2}} + B \frac{1}{N_1^{p-m_1-\gamma_1(p+1)} N_2^{p-m_2-\gamma_2(p+1)}}, \quad (17)$$

де $A_j, B = \text{const} < \infty$.

Знайдемо порядок наближення функції $f^{(m)}(x)$ поліномами $S_N^{(m)}(f; x; r(N))$ на основних напрямках N_j . Відповідні доданки (17) є нескінченно малими величинами за умови $0 < \gamma_j < \frac{p-m_j}{p+1}$. Найбільший порядок малості величини $\varepsilon_N^* \left(f^{(m)}(x); r(N) \right)$ на цих напрямках досягається за такої умови: $\gamma_j^0 = p - m_j - \gamma_j^0(p+1)$. Звідки $\gamma_j^0 = \frac{p-m_j}{p+2}$.

Легко переконатися, що перший доданок в (17) для значень $0 < \gamma_j \leq \gamma_j^0$ є нескінченно малою величиною найнижчого порядку на будь-яких напрямках, тому

$$\varepsilon_N^* \left(f^{(m)}(x); r(N) \right) < \frac{A_1}{N_1^{\gamma_1}} + \frac{A_2}{N_2^{\gamma_2}}, \quad A_j = \text{const} < \infty.$$

Для значень параметрів γ_j в (17) $\gamma_j^0 < \gamma_j < \frac{p-m_j}{p+1}$ нескінченно малою найнижчого порядку може бути перший і другий доданки залежно від напрямку.

Отож, нерівність (17) набуде вигляду

$$\varepsilon_N^* \left(f^{(m)}(x); r(N) \right) \leq \begin{cases} \frac{A_1}{N_1^{\gamma_1}} + \frac{A_2}{N_2^{\gamma_2}}, & \text{якщо } 0 < \gamma_j \leq \frac{p-m_j}{p+2}; \\ \frac{A_1}{N_1^{\gamma_1}} + \frac{A_2}{N_2^{\gamma_2}} + \frac{B}{N_1^{\gamma_1} N_2^{\gamma_2}}, & \text{якщо } \frac{p-m_j}{p+2} < \gamma_j < \frac{p-m_j}{p+1}; \end{cases}$$

де $A_j, B = \text{const}$. Теорему доведено.

4. Висновки. Сформульовані теореми розширюють межі застосовності математичного апарату методу Фур'є з використанням систем тригонометричних функцій. Зокрема, зведення крайових задач (для довільної області) до інтегральних рівнянь

ґрунтується на відшуванні сингулярних розв'язків рівнянь з частинними похідними. Послідовнісний підхід до побудови узагальнених функцій (зображення їх у вигляді границь слабо збіжних послідовностей) забезпечує збіжність послідовностей узагальнених частинних сум рядів до цих сингулярних розв'язків і, відповідно, коректність формулювань інтегральних рівнянь та числових методів їхнього розв'язування.

1. Бугров Я.С. Теоремы вложения и сходимость кратных рядов Фурье / Бугров Я.С. // Труды Математического института АН СССР. – 1988. – Т. 181. – С. 15-26.
2. Коровкин П.П. Линейные операторы и теория приближений / Коровкин П.П. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 212 с.
3. Степанец А.И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами / Степанец А.И. – Киев: Наукова думка, 1981. – 340 с.
4. Сухорольський М.А. Про порядок локального наближення функцій тригонометричними поліномами – частинними сумами операторів усереднення / Сухорольський М.А. // Укр. мат. журн. – 1997. №7. – С. 706-714.
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том III / Фихтенгольц Г.М. – М.: Наука, 1969. – 656 с.
6. Харди Г. Расходящиеся ряды / Харди Г. – М.: ИЛ, 1951. – 504 с.

ABOUT SUMMABILITY OF DOUBLE TRIGONOMETRIC SERIES BY GENERALIZED METHODS

Olesia LUBYTSKA

*Lviv Polytechnic National University,
79013, Lviv, S. Bandery Str., 12
e-mail: olesja_ljubitska@yahoo.com*

Generalized sums of double trigonometric series are studied. Errors of approximation of the functions by the sequences of generalized partial sums of series are investigated.

Key words: multiple trigonometric series, generalized methods of the series summability, Fejér's kernel, delta-like sequences of function.

Стаття надійшла до редколегії 03.01.2006

Прийнята до друку 22.10.2008

УДК 539.3

КОМБІНОВАНИЙ ЗГИН І РОЗТЯГ ПЛАСТИНИ, ОСЛАБЛЕНОЇ ДВОМА КОЛІНЕАРНИМИ ТРІЩИНАМИ, БЕРЕГИ ЯКИХ КОНТАКТУЮТЬ

Віктор ОПАНАСОВИЧ, Мар'ян ДОРОШ

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1*

З використанням методів теорії функцій комплексної змінної досліджено задачу про сумісну дію згину та розтягу пластини, яка містить колінеарні наскрізні тріщини, береги яких контактують по області, ширина якої є постійною вздовж тріщин. Розглянуто різні можливі випадки контакту берегів тріщин. Розв'язок сформульованої задачі зведено до задач лінійного спряження. Знайдено явний вигляд для комплексних потенціалів плоскої задачі теорії пружності і класичної теорії згину пластин, коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів, контактного зусилля між берегами тріщин. Для часткового випадку двох рівних тріщин проведено числовий аналіз задачі, який подано графічно.

Ключові слова: згин, розтяг, ізотропна пластина, прямолінійна наскрізна тріщина, ширина області контакту, комплексні потенціали, коефіцієнти інтенсивності зусиль і моментів, контактне зусилля, плоска задача, класична теорія згину.

В інженерній практиці широко використовують пластинчасті елементи конструкцій. У процесі експлуатації в них можуть виникнути тріщини, які є сильним концентратором напружень, що прискорює руйнування конструкції. В літературі відомі розв'язки задач згину пластин з колінеарними розрізами, одержані з використанням класичної теорії згину пластин з урахуванням контакту берегів тріщин вздовж лінії на одній з основ пластини [1], при цьому розв'язок задачі зведено до сингулярного інтегрального рівняння.

В цій праці з використанням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів досліджено задачу згину з крученням та розтягу пластини розподіленими моментами і зусиллями на нескінченності з двома колінеарними тріщинами з урахуванням контакту берегів тріщини по області, ширина якої вважається постійною вздовж тріщин. Розв'язок задачі зведено до задач лінійного спряження, на підставі яких знайдено аналітичний вираз для комплексних потенціалів, коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів, контактного зусилля між берегами тріщин,

визначено критичне значення навантаження. Для часткового випадку двох рівних тріщин проведено числовий аналіз задачі та зроблено порівняння з випадком, коли контакт берегів тріщин відбувається по лінії.

І. Формулювання задачі. Розглянемо нескінченну ізотропну пластину завтовшки $2h$ (див. рис.1), яка ослаблена двома прямолінійними наскрізними тріщинами, розміщеними на одній лінії. Береги тріщин і лицьові поверхні пластини вільні від зовнішнього навантаження. На безмежності пластина згинається симетрично стосовно тріщин рівномірно розподіленими згинальними та крутними моментами, а також розтягується рівномірно розподіленими напруженнями перпендикулярно до лінії, де розміщені тріщини.

Введемо декартову систему координат $Oxy\tilde{z}$ так, щоб серединна

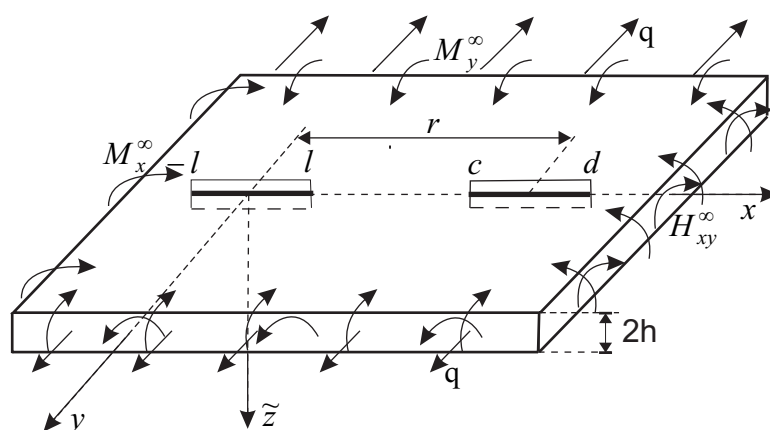


Рис. 1: Схема навантаження пластини та розміщення тріщин

поверхня пластини збігалася з координатною площиною Oxy , а вісь Ox направимо по лінії, де розміщені тріщини. Середина першої тріщини збігається з початком координат. Лінії, де розміщена перша і друга тріщини, позначимо відповідно через $L_1 = [-l, l]$ і $L_2 = [c, d]$, їхню сукупність – через L .

Будемо розглядати три випадки взаємодії берегів тріщин.

1. Береги тріщин не взаємодіють. Тоді на берегах тріщин виконуються умови вільного краю

$$\sigma_{yy}^+ = \sigma_{yy}^- = 0, \quad \sigma_{xy}^\pm = 0, \quad x \in L \quad (1)$$

$$M_y^+ = M_y^- = 0, \quad P^\pm = 0, \quad x \in L, \quad (2)$$

та умова відсутності контакту берегів тріщин

$$\frac{\partial[v]}{\partial x} > -h \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right], \quad x \in L, \quad (3)$$

де σ_{yy} – контактні напруження; σ_{xy} – дотичні напруження; u і v – компоненти вектора переміщень у плоскій задачі [4]; $P = \frac{\partial H_{xy}}{\partial x} + Q_y$ – узагальнена в сенсі Кірхгофа перерізувальна сила; H_{xy} – крутний момент; Q_y – перерізувальна сила; M_y – згинальний

момент, w – прогин пластини [5]; в (3) введено позначення $[r(x)] = r^+(x) - r^-(x)$, значками "+" і "-" позначено граничне значення відповідних величин при $y \rightarrow \pm 0$.

2. Береги тріщин частково контактують. Будемо розглядати досить довгі тріщини [3], тому область контакту вздовж тріщин вважатимемо постійною величиною. Оскільки береги тріщин контактують, то розв'язок задачі розбиваємо на два: плоску задачу теорії пружності, з прикладеними до берегів тріщин невідомими напруженнями і відомим розподіленим навантаженням на нескінченності, та задачу згину, з прикладеними до берегів тріщин невідомими згинальними моментами і відомими розподіленими моментами на нескінченності, при цьому скористаємося класичною теорією згину пластин. Відповідно до сформульованої задачі на берегах тріщин маємо такі крайові умови:

$$\sigma_{yy}^+ = \sigma_{yy}^- = \sigma_{yy}, \quad \sigma_{xy}^\pm = 0, \quad x \in L, \quad (4)$$

$$M_y^+ = M_y^- = M_y, \quad P^\pm = 0, \quad x \in L, \quad (5)$$

$$M_y = \beta N, \quad \frac{\partial[v]}{\partial x} + \alpha \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] = 0, \quad x \in L, \quad (6)$$

$$N = -2h\sigma_{yy}, \quad (7)$$

де $N > 0$ – контактне зусилля між берегами тріщин; α, β – сталі, які враховують умови контакту берегів тріщин.

3. Повний контакт берегів тріщин. У цьому випадку на берегах тріщин матимемо такі крайові умови:

$$\frac{\partial}{\partial x} (v^+ - v^-) = 0, \quad \sigma_{yy}^+ = \sigma_{yy}^- = \sigma_{yy}, \quad \sigma_{xy}^\pm = 0, \quad x \in L, \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^+ - \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^- \right) = 0, \quad M_y^+ = M_y^- = M_y, \quad P^\pm = 0, \quad x \in L, \quad (9)$$

якщо береги тріщин незлипнуті, то додаємо

$$\sigma_{yy} + \frac{3M_y}{2h^2} \leq 0. \quad (10)$$

II. Побудова розв'язку задачі. Введемо у розгляд комплексні потенціали $\Phi_{\Pi}(z)$, $\Omega_{\Pi}(z)$ [4] для плоскої задачі і $\Phi_3(z)$, $\Omega_3(z)$ [5] для задачі згину та скористаємося залежностями

$$\sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi_{\Pi}(z) + \Omega_{\Pi}(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi'_{\Pi}(z)},$$

$$2\mu(u' + iv') = 2\mu \frac{\partial}{\partial x} (u + iv) = \kappa \Phi_{\Pi}(z) - \Omega_{\Pi}(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi'_{\Pi}(z)}; \quad (11)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \Phi_3(z) - \Omega_3(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi'_3(z)},$$

$$f = \tilde{\kappa} \Phi_3(z) + \Omega_3(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi'_3(z)}; \quad (12)$$

де $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – модуль зсуву; E – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона,
 $z = x + iy$, $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$, $\tilde{\kappa} = \frac{3+\nu}{1-\nu}$, $g = \frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y}$,
 $f = \frac{1}{m} \left(M_y + iC' + i \int_0^x P(\epsilon) d\epsilon \right)$; $m = -D(1-\nu)$, C' – невідома дійсна стала;
 $D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$ – циліндрична жорсткість.

Комплексні потенціали при великих $|z|$ можна подати у вигляді

$$\Phi_{\Pi}(z) = \Gamma + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad \Omega_{\Pi}(z) = \Gamma + \overline{\Gamma'} + O\left(\frac{1}{z^2}\right),$$

$$\Phi_3(z) = \tilde{\Gamma} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad \Omega_3(z) = -\tilde{\Gamma} - \overline{\tilde{\Gamma}'} + O\left(\frac{1}{z^2}\right),$$

де $\Gamma = \frac{1}{4}q$, $\Gamma' = \frac{1}{2}q$, $\tilde{\Gamma} = -\frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{4D(1+\nu)}$, $\tilde{\Gamma}' = -\frac{1}{2m}(M_y^\infty - M_x^\infty + 2iH_{xy}^\infty)$; M_y^∞ , M_x^∞ та H_{xy}^∞ – згинальні та крутні моменти на нескінченності; q – розподілене напруження на нескінченності.

II.1. Розглянемо перший випадок. Крайові умови (1) і (2) записуємо у вигляді

$$(\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^+ = (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^-, \quad f^+(x) = f^-(x), \quad x \in L,$$

з яких, враховуючи (11) та (12), отримаємо задачі лінійного спряження

$$(\Phi_{\Pi}(x) - \Omega_{\Pi}(x))^+ - (\Phi_{\Pi}(x) - \Omega_{\Pi}(x))^- = 0, \quad x \in L,$$

$$(\tilde{\kappa}\Phi_3(x) - \Omega_3(x))^+ - (\tilde{\kappa}\Phi_3(x) - \Omega_3(x))^- = 0, \quad x \in L,$$

розв'язавши які, матимемо

$$\Omega_{\Pi}(z) = \Phi_{\Pi}(z) + \overline{\Gamma'}, \quad \Omega_3(z) = \tilde{\kappa}\Phi_3(z) - (\tilde{\kappa} + 1)\tilde{\Gamma} - \overline{\tilde{\Gamma}'}. \quad (13)$$

З крайової умови (1) та першого співвідношення (11), використавши (13), одержимо

$$\left(\Phi_{\Pi}(x) + \frac{1}{2}\overline{\Gamma'}\right)^+ + \left(\Phi_{\Pi}(x) + \frac{1}{2}\overline{\Gamma'}\right)^- = 0, \quad x \in L. \quad (14)$$

Розв'язавши задачу лінійного спряження (14) та задовольнивши умову однозначності переміщень при обході першої тріщини, отримаємо

$$\Phi_{\Pi}(z) = \frac{q}{4} \left(-1 + 2 \frac{z^2 - rz + r_1}{X(z)} \right),$$

$$\text{де } r = \frac{c+d}{2}, \quad r_1 = \frac{dc-l^2}{2} - \frac{(d-l)(c+l)}{2} \frac{E(\rho)}{K(\rho)}, \quad \rho = \sqrt{\frac{2l(d-c)}{(d-l)(c+l)}},$$

$$X(z) = \sqrt{(z^2 - l^2)(z - c)(z - d)};$$

$K(\rho)$ і $E(\rho)$ – повні еліптичні інтеграли першого та другого роду.

Враховуючи друге співвідношення (12) та (13), з крайової умови (2) маємо задачу лінійного спряження

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\kappa} \Phi_3(x) - \frac{1}{2} \left((\tilde{\kappa} + 1) \tilde{\Gamma} + \overline{\tilde{\Gamma}'} \right) \right)^+ + \left(\tilde{\kappa} \Phi_3(x) - \frac{1}{2} \left((\tilde{\kappa} + 1) \tilde{\Gamma} + \overline{\tilde{\Gamma}'} \right) \right)^- = \\ = i \frac{C'_j}{m}, \quad x \in L_j, \quad (j = 1, 2), \end{aligned}$$

розв'язок якої подамо у вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa} \Phi_3(z) - \frac{1}{2} \left(i \frac{C'_0}{m} + \left((\tilde{\kappa} + 1) \tilde{\Gamma} + \overline{\tilde{\Gamma}'} \right) \right) = \frac{O_2 z^2 + O_1 z + O_0}{X(z)} + \\ + \frac{1}{2m\pi X(z)} \int_c^d \frac{C'_0 X^+(t) dt}{(t - z)}, \end{aligned} \quad (15)$$

де $C'_0 = C'_2 - C'_1$, C'_j – невідомі дійсні сталі; O_n ($n = \overline{0, 2}$) – невідомі сталі, які визначаємо з поведінки функції $\Phi_3(z)$ при великих z ,

$$O_2 = \tilde{\kappa} \tilde{\Gamma} - \frac{1}{2} \left(\frac{iC'_1}{m} + (\tilde{\kappa} + 1) \tilde{\Gamma} + \overline{\tilde{\Gamma}'} \right), \quad O_1 = -O_2 r. \quad (16)$$

Сталу O_0 знайдемо з умови однозначності кутів повороту при обході контура першої тріщини

$$O_0 = O_2 r_1 + \frac{C'_0}{m} r_2,$$

$$\text{де } r_2 = - \frac{\sqrt{(d-l)(c+l)}}{4\pi K(\rho)} \int_{-l}^l \int_c^d \frac{X^+(t) dt}{t-x} \frac{1}{\sqrt{(l^2-x^2)(c-x)(d-x)}} dx.$$

Для визначення сталих C'_1 та C'_2 скористаємось умовами однозначності прогину при обході кожного контура тріщин

$$\int_{L_j} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^+ - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^- \right) dx = 0 \quad (j = \overline{1, 2}), \quad (17)$$

з яких після відповідних спрощень, матимемо

$$C'_1 = C'_2 = -H_{xy}^\infty. \quad (18)$$

Враховуючи (16), (18), з (15) одержимо

$$\Phi_3(z) = - \frac{M_x^\infty (3 + \nu) + M_y^\infty (1 - \nu)}{16\mu\tilde{\kappa}h^3(1 + \nu)} - \frac{3M_y^\infty}{8\mu\tilde{\kappa}h^3} \frac{z^2 - rz + r_1}{X(z)}. \quad (19)$$

Скориставшись співвідношеннями

$$\frac{\partial[v]}{\partial x} = Im \frac{\kappa + 1}{2\mu} [\Phi_\Pi^+(x) - \Phi_\Pi^-(x)] = \frac{2q}{\mu(1 + \nu)} \frac{x^2 - rx + r_1}{\sqrt{(l^2 - x^2)(c - x)(d - x)}},$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] &= (\tilde{\kappa} + 1) \operatorname{Im} [\Phi_3^+(x) - \Phi_3^-(x)] = \\ &= -\frac{3M_y^\infty}{\mu h^3(3+\nu)} \frac{x^2 - rx + r_1}{\sqrt{(l^2 - x^2)(c-x)(d-x)}}, \quad x \in L_1, \end{aligned}$$

із нерівності (3) визначаємо діапазон зміни зовнішнього навантаження, коли береги тріщин не взаємодіють

$$(q, M_y^\infty) \in \Omega_1 = \left\{ (q, M_y^\infty) : q > \frac{3(1+\nu)}{2h^2(3+\nu)} M_y^\infty \right\}.$$

II.2. Розглянемо другий випадок. На основі крайових умов (4) та (5) аналогічно як і в першому випадку, одержимо (13).

Використавши (11), (13) та врахувавши позначення (7), контактні зусилля між берегами тріщин можемо записати у вигляді

$$N(x) = -2h (\Phi_\Pi^+(x) - \Phi_\Pi^-(x)) - 2h\overline{\Gamma}, \quad x \in L. \quad (20)$$

Враховуючи (5) і (13), на основі другої залежності (12) одержимо

$$M_y(x) = -iC'_j + m \left(\tilde{\kappa} (\Phi_3^+(x) - \Phi_3^-(x)) - (\tilde{\kappa} + 1) \tilde{\Gamma} - \overline{\tilde{\Gamma}'} \right), \quad x \in L. \quad (21)$$

Підставляючи (20) і (21) у першу крайову умову (6), отримаємо задачу лінійного спряження

$$F^+(x) + F^-(x) = \begin{cases} 0, & x \in L_1, \\ -iC'_0, & x \in L_2, \end{cases} \quad (22)$$

де $F(z) = -2h\beta\Phi_\Pi(z) - m\tilde{\kappa}\Phi_3(z) - h\beta\overline{\Gamma} + \frac{1}{2} \left(iC'_1 + m \left((\tilde{\kappa} + 1) \tilde{\Gamma} + \overline{\tilde{\Gamma}'} \right) \right)$. Розв'язок задачі лінійного спряження (22) має вигляд

$$F(z) = \frac{D_2 z^2 + D_1 z + D_0}{X(z)} - \frac{1}{2\pi X(z)} \int_c^d \frac{C'_0 X^+(t) dt}{t - z}, \quad (23)$$

де $D_2 = -2h\beta\Gamma - m\tilde{\kappa}\tilde{\Gamma} - h\beta\overline{\Gamma} + \frac{1}{2} \left(iC'_1 + m \left((\tilde{\kappa} + 1) \tilde{\Gamma} + \overline{\tilde{\Gamma}'} \right) \right)$, $D_1 = -D_2 r$, $D_0 = D_2 r_1 - C'_0 r_2$. На підставі крайових умов

$$\sigma_{xy}^+ + \sigma_{xy}^- = 0, \quad P^+(x) + P^-(x) = 0,$$

врахувавши співвідношення (11) і (12), отримаємо задачі лінійного спряження

$$(\Phi_\Pi(x) - \overline{\Phi}_\Pi(x))^+ + (\Phi_\Pi(x) - \overline{\Phi}_\Pi(x))^- = 0, \quad x \in L,$$

$$\left(\Phi_3(x) - \overline{\Phi}_3(x) - \frac{iC'_1}{m\tilde{\kappa}} + \frac{\tilde{\Gamma}' - \overline{\tilde{\Gamma}'}}{2\tilde{\kappa}} \right)^+ + \left(\Phi_3(x) - \overline{\Phi}_3(x) - \frac{iC'_1}{m\tilde{\kappa}} + \frac{\tilde{\Gamma}' - \overline{\tilde{\Gamma}'}}{2\tilde{\kappa}} \right)^- =$$

$$= \begin{cases} 0, & x \in L_1, \\ \frac{2iC'_0}{m\tilde{\kappa}}, & x \in L_2, \end{cases}$$

розв'язавши які, знаходимо

$$\Phi_{\Pi}(z) = \overline{\Phi}_{\Pi}(z),$$

$$\Phi_3(z) - \overline{\Phi}_3(z) - \frac{iC'_1}{m\tilde{\kappa}} + \frac{\tilde{\Gamma}' - \overline{\tilde{\Gamma}'}}{2\tilde{\kappa}} = \frac{B_2 z^2 + B_1 z + B_0}{X(z)} + \frac{1}{m\tilde{\kappa}\pi X(z)} \int_c^d \frac{C'_0 X^+(t) dt}{t - z}, \quad (24)$$

де $B_2 = -\frac{iC'_1}{m\tilde{\kappa}} + \frac{\tilde{\Gamma}' - \overline{\tilde{\Gamma}'}}{2\tilde{\kappa}}$, $B_1 = -B_2 r$, $B_0 = B_2 r_1 + \frac{C'_0 r_2}{m\tilde{\kappa}}$.

З другої крайової умови (6), на підставі (11) та (12), можемо записати задачу лінійного спряження

$$\left(\frac{\delta}{2} (\Phi_{\Pi}(z) + \overline{\Phi}_{\Pi}(z)) + \Phi_3(x) + \overline{\Phi}_3(x) \right)^+ - \\ - \left(\frac{\delta}{2} (\Phi_{\Pi}(z) + \overline{\Phi}_{\Pi}(z)) + \Phi_3(x) + \overline{\Phi}_3(x) \right)^- = 0, \quad x \in L,$$

на основі якої, отримаємо

$$\frac{\delta}{2} (\Phi_{\Pi}(z) + \overline{\Phi}_{\Pi}(z)) + \Phi_3(z) + \overline{\Phi}_3(z) = \delta\Gamma + 2\tilde{\Gamma}. \quad (25)$$

Тут $\delta = \frac{\kappa+1}{\mu\alpha(\kappa+1)}$. Для визначення сталих C'_1 та C'_2 скористаємось умовами (17), з яких після відповідних спрощень отримаємо (18).

Використавши (18) та розв'язавши систему рівнянь (23), (24) і (25) стосовно $\Phi_{\Pi}(z)$ і $\Phi_3(z)$, отримаємо

$$\Phi_{\Pi}(z) = 4Q(1+\nu) \left\{ -\alpha + \frac{q'h}{6} \left(-3\frac{\beta\alpha}{h^2} + \frac{3+\nu}{1+\nu} \right) + \alpha \left(1 + q'\frac{\beta}{h} \right) \frac{z^2 - rz + r_1}{X(z)} \right\},$$

$$\Phi_3(z) = \frac{1}{\mu} Q(1-\nu) \left\{ 2q'\frac{\beta}{h} - \eta_y - \frac{M_x^\infty}{M_y^\infty} \eta_x - 2 \left(1 + q'\frac{\beta}{h} \right) \frac{z^2 - rz + r_1}{X(z)} \right\},$$

$$\text{де } Q = \frac{3M_y^\infty}{16h(3\beta\alpha(1+\nu) + h^2(3+\nu))}, \quad q' = \frac{2h^2q}{M_y^\infty}, \quad \eta_y = 3\frac{\beta\alpha}{h^2} + \frac{1-\nu}{1+\nu},$$

$$\eta_x = 3\frac{\beta\alpha}{h^2} + \frac{3+\nu}{1+\nu}.$$

На підставі залежності (20) знаходимо контактні зусилля між берегами тріщин

$$N(x) = \frac{3M_y^\infty \alpha(1+\nu) - 2qh^3(3+\nu)}{3\beta\alpha(1+\nu) + h^2(3+\nu)}, \quad x \in L. \quad (26)$$

Як видно з формули (26), контактне зусилля між берегами тріщин не залежить від відстані між ними і залишається таким самим, як для однієї тріщини [2].

II.3. Розглянемо третій випадок крайових умов (повний контакт бере-гів тріщин). На підставі крайових умов (8) та (9) як і в першому випадку приходимо до залежностей (13).

Врахувавши вирази (13), з крайових умов

$$\sigma_{xy}^+ + \sigma_{xy}^- = 0, \quad P^+(x) + P^-(x) = 0,$$

аналогічно як у другому випадку отримаємо співвідношення (24).

З перших крайових умов (8) та (9), на підставі співвідношень (11) і (12), матимемо задачу лінійного спряження

$$(\Phi_{\Pi}(x) + \bar{\Phi}_{\Pi}(x))^+ - (\Phi_{\Pi}(x) + \bar{\Phi}_{\Pi}(x))^- = 0, \quad x \in L,$$

$$(\Phi_3(x) + \bar{\Phi}_3(x))^+ - (\Phi_3(x) + \bar{\Phi}_3(x))^- = 0, \quad x \in L,$$

розв'язавши які, знаходимо

$$\begin{aligned} \Phi_{\Pi}(z) + \bar{\Phi}_{\Pi}(z) &= 2\Gamma, \\ \Phi_3(z) + \bar{\Phi}_3(z) &= 2\tilde{\Gamma}. \end{aligned} \quad (27)$$

Сталі C'_1 та C'_2 визначаємо з умов (17) і після відповідних спрощень приходимо до (18).

Розв'язавши систему рівнянь (24), (27) стосовно $\Phi_{\Pi}(z)$ і $\Phi_3(z)$ та скориставшись (18), можемо записати

$$\Phi_{\Pi}(z) = \Gamma, \quad \Phi_3(z) = \tilde{\Gamma}, \quad (28)$$

тобто при такому формулюванні задачі наявність тріщин не впливає на напружено-деформований стан пластини.

Використавши (11), (12) та (28), з крайових умов (8) та (9) знаходимо на берегах тріщин

$$\sigma_{yy} = q, \quad M_y = M_y^{\infty}, \quad x \in L.$$

Із нерівності (10) визначаємо діапазон зміни зовнішнього навантаження, коли відбувається повний контакт берегів тріщин

$$(q, M_y^{\infty}) \in \Omega_3 = \left\{ (q, M_y^{\infty}) : q \leq -\frac{3}{2h^2} M_y^{\infty} \right\}.$$

Отже, при зовнішньому навантаженні

$$(q, M_y^{\infty}) \in \Omega_2 = \left\{ -\frac{3}{2h^2} M_y^{\infty} < q \leq \frac{3(1+\nu)}{2h^2(3+\nu)} M_y^{\infty} \right\}$$

береги тріщин контактують частково по її висоті.

Коефіцієнти інтенсивності зусиль (КІЗ) K_{Nn} і моментів (КІМ) K_{3n} [6] знаходимо за формулами

$$\begin{aligned} K_{Nn}^{\mp} &= \pm 4\sqrt{2}h \lim_{x \rightarrow a \mp 0} \left(\Phi_{\Pi}(x) \sqrt{|x-a|} \right) = \\ &= A_n^{\mp}(q, M_y^{\infty}) \frac{(l_n \mp (-1)^n r)^2 - l_k^2 + [(l_n - l_k)^2 - r^2] \frac{E(\rho_{nk})}{K(\rho_{nk})}}{\sqrt{l_n [(l_n \mp (-1)^n r)^2 - l_k^2]}}, \end{aligned}$$

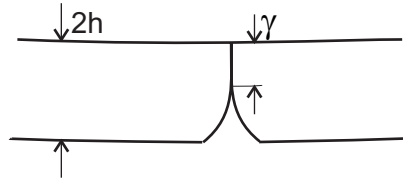
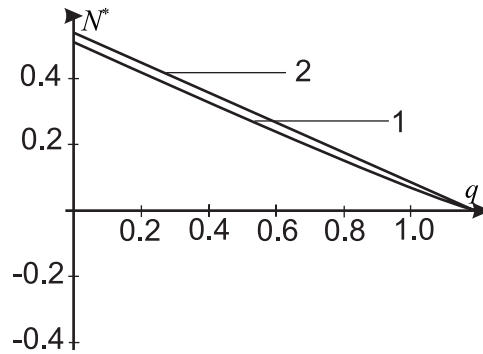


Рис. 2: Схема контакту берегів тріщини

Рис. 3: Залежність контактних зусиль від q' при різних β^* та α^*

$$K_{3n}^{\mp} = \mp \sqrt{8D(3+\nu)} \lim_{x \rightarrow a \mp 0} (\Phi_3(x) \sqrt{|x-a|}) =$$

$$= B_n^{\mp}(q, M_y^{\infty}) \frac{(l_n \mp (-1)^n r)^2 - l_k^2 + [(l_n - l_k)^2 - r^2] \frac{E(\rho_{nk})}{K(\rho_{nk})}}{\sqrt{l_n [(l_n \mp (-1)^n r)^2 - l_k^2]}},$$

де при $a = -l$ ($a = c$), беруть верхні значки "+" чи "-", а при $a = l$ ($a = d$) — нижні;
 $l_1 = l$, $l_2 = \frac{d-c}{2}$; $\rho_{nk} = 2\sqrt{\frac{l_n l_k}{r^2 - (l_n - l_k)^2}}$;

$$A_n^{\mp}(q, M_y^{\infty}) = \begin{cases} hq, & (q, M_y^{\infty}) \in \Omega_1, \\ \mp (-1)^n 8Q(1+\nu)\alpha(h + q'\beta), & (q, M_y^{\infty}) \in \Omega_2, \end{cases}$$

$$B_n^{\mp}(q, M_y^{\infty}) = \begin{cases} 1/2 M_y^{\infty}, & (q, M_y^{\infty}) \in \Omega_1, \\ \mp (-1)^n 8/3Q(3+\nu)h^2(h + q'\beta), & (q, M_y^{\infty}) \in \Omega_2, \end{cases}$$

$n = 1$ і $k = 2$, та $n = 2$ і $k = 1$, коли знаходимо відповідні величини для першої і другої тріщини.

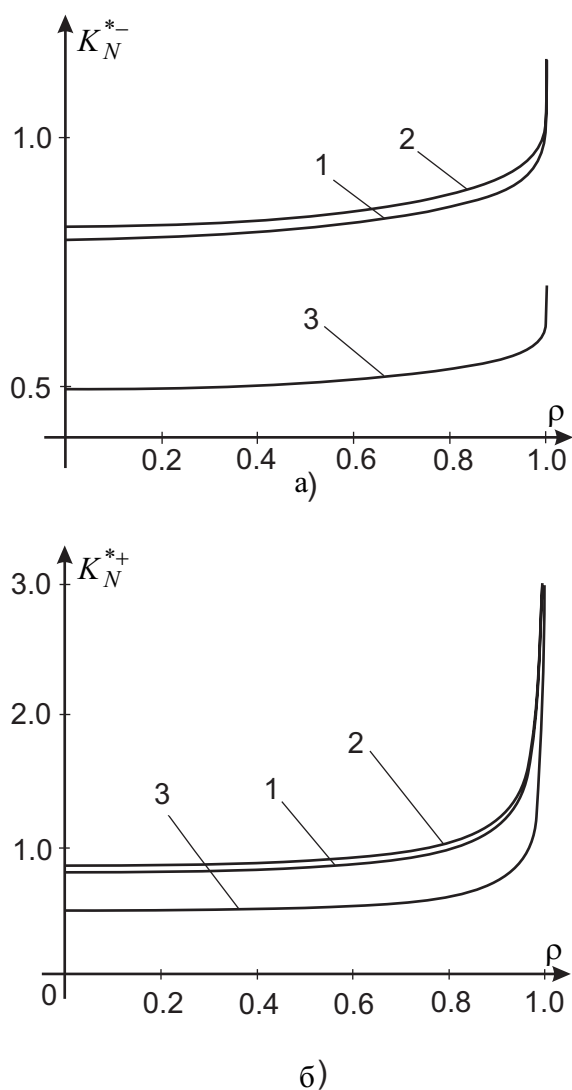


Рис. 4. Графічна залежність приведених КІЗ від ρ при різних β^* та α^*

Для визначення граничного значення навантаження, коли відбуватиметься руйнування пластини, скористаємося енергетичним критерієм [1]

$$\frac{\pi}{4h^2E} \left((K_{Nn}^{\mp})^2 + \frac{3(1+\nu)}{h^2(3+\nu)} (K_{3n}^{\mp})^2 \right) = 2\gamma^*,$$

де γ^* – густина ефективної поверхневої енергії матеріалу.

Зауважимо таке: коли немає згину і $q > 0$, тоді приходимо до результатів монографії [6], коли $r \rightarrow \infty$, чи $c \rightarrow l$ і $\alpha = \beta = h$, то отримаємо результати [2], одержані іншим шляхом.

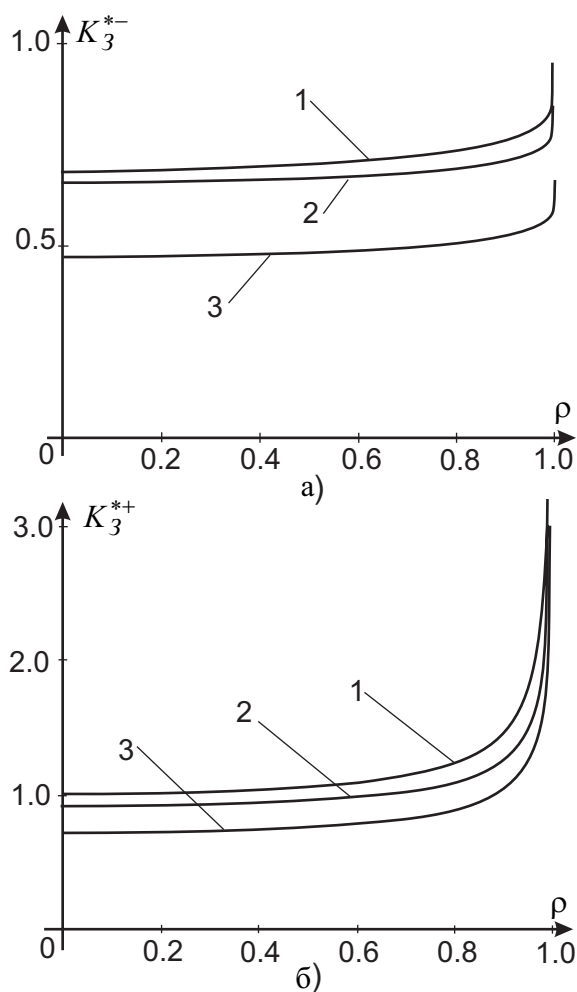


Рис. 5. Графічна залежність приведених КІМ від ρ при різних β^* та α^*

III. Числовий аналіз задачі та висновки. Розглянемо випадок двох колінеарних тріщин однакової довжини $2l$. Будемо вважати, що $(q \geq 0, M_y^\infty) \in \Omega_2$, тобто контакт берегів тріщин відбувається по частині їхньої висоти.

На рис. 2. показано схему контакту берегів тріщини по їхній висоті, при чому вважаємо, що γ змінюється за законом $\gamma = \gamma_M \left(1 - q' \frac{3+\nu}{3(1+\nu)}\right)$, де $\gamma_M = 0,13h$ – ширина області контакту під дією тільки згинального моменту M_y^∞ [3].

На рис. 3-6 подано числовий аналіз задачі при $\nu = 0,3$.

На рис. 3 показано графічну залежність приведених контактних зусиль між берегами тріщин від безрозмірної координати q' : $N^* = \frac{hN}{M_y^\infty} = \frac{3\alpha^*(1+\nu) - q'(3+\nu)}{3\beta^*\alpha^*(1+\nu) + (3+\nu)}$, де

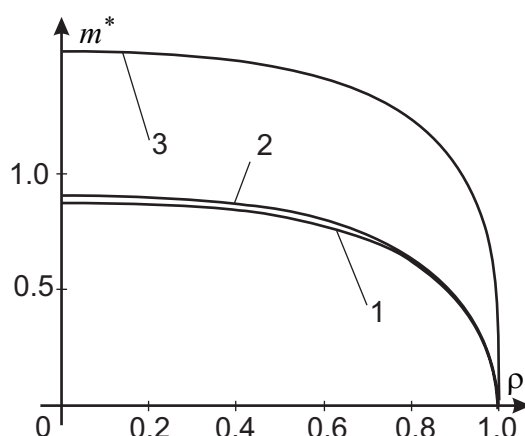


Рис. 6. Значення критичного моменту від ρ при різних β^* та α^*

$\alpha^* = \alpha/h = (1 + (1 - \gamma/h)^2)/2$, $\beta^* = \beta/h = 1 - \frac{1}{3}\gamma/h$ (крива 1) $\beta^* = 1$, $\alpha^* = 1$ [1] та (крива 2). Як видно з рис. 6, врахування ширини області контакту між берегами тріщин приводить до зменшення контактної зусилля порівняно з випадком, коли контакт відбувається по лінії на верхній основі пластини.

Криві 1, на рис. 4-6, побудовані при значеннях $\beta^* = \beta/h = 0,975$ і $\alpha^* = \alpha/h = 0,928$, криві 2 – при $\beta^* = 1$, $\alpha^* = 1$, і відповідають [1], та при $q' = 0.5$. Криві 3, на цих рисунках, зображені при $q' = 0$ (немає розтягу пластини), та $\beta^* = 0,956$ і $\alpha^* = 0,8785$.

Наведені коефіцієнти інтенсивності зусиль і моментів подамо у вигляді

$$K_N^{*\mp} = \frac{hK_{N1}^{\mp}}{M_y^{\infty}\sqrt{l}} = \pm \frac{3(1+\nu)\alpha^*(1+q'\beta^*)}{3\beta^*\alpha^*(1+\nu)+3+\nu} \frac{1 \pm \rho - \frac{E(\rho)}{K(\rho)}}{\rho\sqrt{1 \pm \rho}}, \quad K_3^{*\mp} = \frac{K_{31}^{\mp}}{M_y^{\infty}\sqrt{l}} = \frac{(3+\nu)}{3(1+\nu)\alpha^*} K_N^{*\mp},$$

де $\rho = 2l/r$; верхні значки "–" чи "+" беруть, коли знаходимо відповідні величини для вершин -l (d), а нижні для l (c). На рис. 4 і 5 зображено графічні залежності приведених КІЗ та КІМ у вершині -l (рис. 4, а і 5, а) та l (рис. 4, б і 5, б) від безрозмірної координати ρ . Як видно з цих рисунків, врахування ширини області контакту берегів тріщини приводить до зменшення приведених коефіцієнтів інтенсивності зусиль і до збільшення приведених коефіцієнтів інтенсивності моментів порівняно з випадком, коли контакт берегів тріщини відбувається по лінії на верхній основі пластини.

На рис. 6 показано графічну залежність приведенного критичного моменту

$$m^* = \frac{M_y^{\infty}}{2h^2} \sqrt{\frac{\pi l}{2E\gamma^*}} = \frac{1}{1+q'\beta^*} \frac{3\beta^*\alpha^*(1+\nu) + (3+\nu)}{\sqrt{9(1+\nu)^2(\alpha^*)^2 + 3(3+\nu)(1+\nu)}} \frac{\rho\sqrt{1-\rho}}{\frac{E(\rho)}{K(\rho)} + \rho - 1},$$

від безрозмірної координати ρ . На підставі рис. 6. можна зробити висновок, що врахування області контакту берегів тріщин приводить до зменшення критичного моменту порівняно з випадком, коли контакт відбувається по лінії на верхній основі пластини.

1. *Шацький І.П.* Гранична рівновага пластини з колінеарними тріщинами при комбінованому розтязі та згині / *Шацький І.П.* // Доп. НАН України. – 1995 – №10. – С. 62-64.
2. *Шацький І.П.* О контакте берегов разреза в пластине при комбинированном растяжении и изгибе / *Шацький І.П.* // Физ.-хим. механика материалов. – 1989. – №2. – С. 46-50.
3. *Dempsey J.P.* Closure of a through crack in a plate under bending / *Dempsey J.P., Shekhtman I.I., Nemyan L.I.* // International Journal solids structures. – 1998. – Vol. 35, №31-32. – P. 4077-4089.
4. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / *Мусхелишвили Н.И.* – М.: Наука, 1966. – 707 с.
5. *Прусов И.А.* Метод сопряжения в теории плит. / *Прусов И.А.* – Минск: Изд-во БГУ, 1975. – 256 с.
6. *Саврук М.П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / *Саврук М.П.* – К.: Наукова думка, 1981. – 324 с.

COMBINATION OF BENDING AND STRAIN OF THE PLATE, WEAKEN OF TWO COLLINEAR CRACKS WITH CONTACTING EDGES

Viktor OPANASOVYCH, Maryan DOROSH

*Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka str., 1*

Using methods of the theory of functions of complex variable the problem of compatible action bending and strain of the plate is investigated, with contain collinear throughout cracks, the edges of the plates are contact in the district, the width of the of lest is constant along the cracks. Solution of a problem is shown to a problem of linear conjugation. Different and possible cases of contacting edges of the plate examination. The obvious view of the complex potentials of the plane problem of the theory elasticity ant classic of theory of bending plate, coefficients of intensity force and moments, contact force between the edges of the crack is founded. For the partly case of two equal cracks the numerical analysis of the problem, which given graphical is done.

Key words: bending, strain, isotropic plate, straight throughout crack, width of the contact area, complex potentials, contact force, plane problem, classic theory of bending.

Стаття надійшла до редколегії 30.05.2007

Прийнята до друку 22.10.2008

УДК 513.88

НЕВІД'ЄМНІ ТА АКРЕТИВНІ ЗБУРЕННЯ ОПЕРАТОРА ТРЕТЬОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ВИРАЗУ ШТУРМА-ЛІУВІЛЛЯ З ОБМЕЖЕНИМ ОПЕРАТОРНИМ ПОТЕНЦІАЛОМ

Ганна ПІПА

Бережанський агротехнічний інститут,
47501, Тернопільська обл., Бережани, вул. Академічна, 20

Досліджено один клас диференціально-граничних операторів типу Штурма-Ліувілля з неklasичними крайовими умовами. Знайдено умови максимальної невід'ємності, максимальної акретивності та розв'язності досліджуваних операторів.

Ключові слова: оператор, простір граничних значень, розширення.

Досліджуватимемо диференціально-граничні оператори (ДГО) другого порядку, які діють у гільбертовому просторі нескінченновимірних вектор-функцій. Зазначимо, що такі оператори та їхні абстрактні теоретико-функціональні моделі були об'єктом дослідження багатьох математиків (див., наприклад, [1]-[3]). Наше зацікавлення теорією ДГО мотивовано у працях [4]-[5], продовженням яких є ця стаття.

Як і в [4]-[5], використовуватимемо такі позначення: $D(T)$, $R(T)$, $\ker T$ – відповідно область визначення, область значень і многовид нулів (лінійного) оператора T ; $\mathcal{B}(X, Y)$ – сукупність лінійних неперервних операторів $A : X \rightarrow Y$ таких, що $D(A) = X$; $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X, X)$; $\mathcal{C}(X)$ – клас замкнених щільно визначених лінійних операторів у просторі X ; $A|E$ – звуження відображення A на множину E ; $\mathbf{1}_X$ – тотожне перетворення простору X ; $(\cdot|\cdot)_X$ – скалярний добуток у просторі X ; A^* – оператор, спряжений з оператором A ; $+$, $\oplus$ – символи прямої та ортогональної суми, зокрема, якщо $A_i : X \rightarrow Y_i$, $i = 1, \dots, n$, – лінійні оператори, то запис $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$ означає, що $\forall x \in X \quad Ax = (A_1x, \dots, A_nx)$.

1. Попередні відомості та формулювання задачі. Нехай $-\infty < a < b < +\infty$, H_0 – сепарабельний гільбертів простір і для будь-якого $x \in [a, b]$ $p(x) = p(x)^* \in \mathcal{B}(H_0)$ – додатно визначений оператор, причому оператор-функція $x \mapsto p(x)$ сильно неперервна на $[a, b]$. Розглянемо диференціальний вираз

$$l[y] = -y''(x) + p(x)y \quad (x \in [a, b]) \quad (1)$$

і позначимо через L та L_0 відповідно максимальний і мінімальний оператори, поро-
джені в гільбертовому просторі $H \stackrel{\text{def}}{=} L_2(H_0; (a, b))$ зі скалярним добутком

$$\forall y, z \in H \quad (y|z) = \int_a^b (y(x)|z(x))_{H_0} dx$$

цим виразом. Відомо [6], що $L, L_0 \in \mathcal{C}(H)$, $L_0^* = L$, а трійка $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$, де $\mathcal{H} = H_0 \oplus H_0$; $\forall y \in D(L)$ $\Gamma_1 y = (y'(a), -y'(b))$, $\Gamma_2 y = (y(a), y(b))$, є простором
граничних значень (ПГЗ) оператора L_0 . Це означає [7], що

$$R(\Gamma_1 \oplus \Gamma_2) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, \quad (2)$$

$$\forall y, z \in D(L) \quad (Ly|z) - (y|Lz) = (\Gamma_1 y|\Gamma_2 z)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_2 y|\Gamma_1 z)_{\mathcal{H}}.$$

Відомо також, що $(H_e, (\cdot|\cdot)_e)$, де

$$H_e = \{y \in H : y \text{ абсолютно неперервна на } [a, b], y' \in H, y(a) = y(b) = 0\},$$

$$\forall u, v \in H_e \quad (u|v)_e = \int_a^b [(u'(x)|v'(x))_{H_0} + (p(x)u(x)|v(x))_{H_0}] dx,$$

є енергетичним простором оператора L_0 , а $L_F \stackrel{\text{def}}{=} L|_{\ker \Gamma_2}$ – його жорстким, тобто
фрідріхсівським розширенням (деталі – див. [8]-[10]).

Для будь-якого оператора $\Lambda : H^1 \stackrel{\text{def}}{=} H_e + \ker L \rightarrow G$, де G – допоміжний гіль-
бертів простір, такого, що $\Lambda|_{H_e} \in \mathcal{B}(H_e, G)$, оператор $\Lambda^\bullet \in \mathcal{B}(G, H_e)$ визначаємо,
враховуючи умови

$$\forall u \in H_e \quad \forall g \in G \quad (\Lambda u|g)_G = (u|\Lambda^\bullet g)_e.$$

Нехай $a < c_1 < c_2 < b$. Визначимо оператори $L_{\min}, L_{\max}$ за допомогою співвід-
ношень

$$D(L_{\min}) = \{y \in D(L_0) : y(c_1) = y(c_2) = 0\}, \quad L_{\min} \subset L_0;$$

$$D(L_{\max}) = \{y \in H : y \text{ абсолютно неперервна на } [a, b],$$

$$y' \text{ абсолютно неперервна на } [a, c_1] \cup (c_1, c_2) \cup (c_2, b], l_{cl}[y] \in H\}$$

$$\forall y \in D(L_{\max}) \quad L_{\max} = l_{cl}[y].$$

Під $l_{cl}[y]$ маємо на увазі вираз (1), в якому всі похідні треба розуміти у класич-
ному сенсі.

Опишемо основний об'єкт нашого дослідження. Припустимо, що $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{B}(H, H_0)$, $\beta_{ij} \in \mathcal{B}(H_0)$ ($i, j = 1, 2$), $B \stackrel{\text{def}}{=} (\beta_{ij})_{i,j=1}^2$ і введемо в розгляд опера-
тор T_B , область визначення якого $D(T_B)$ складається з усіх тих $y \in D(L_{\max})$, які
задовольняють умови

$$y'(c_1 + 0) - y'(c_1 - 0) = y(a), \quad y'(c_2 + 0) - y'(c_2 - 0) = y(b), \quad (3)$$

$$\begin{cases} y'(a) - (\beta_{11}y(a) + \beta_{12}y(b)) = \Phi_1y + y(c_1), \\ -y'(b) - (\beta_{21}y(a) + \beta_{22}y(b)) = \Phi_2y + y(c_2), \end{cases} \quad (4)$$

а закон дії такий:

$$\forall y \in D(T_B) \quad T_By = l_{cl}[y] + \Phi_1^*y(a) + \Phi_2^*y(b). \quad (5)$$

Мета цієї статті – знайти критерії максимальної невід'ємності, максимальної акретивності та коректної оборотності оператора T_B . Нагадаємо, що лінійний оператор $T : H \rightarrow H$ називається акретивним, якщо для будь-якого $y \in D(T)$ $Re(Ty|y) \geq 0$ і максимально акретивним, якщо, крім того, він не має акретивних розширень.

Перш ніж розпочинати розв'язування сформульованої задачі, перепишемо співвідношення (3)-(5) в дещо іншій формі. Для цього введемо такі позначення:

$$\forall u \in H^1 \quad \Psi u = (u(c_1), u(c_2)), \quad \Phi = \Phi_1 \oplus \Phi_2, \quad \chi = \Phi + \Psi.$$

Нехай для будь-якого $y \in D(L_{max})$

$$\begin{aligned} \Gamma_1^{[\Psi]}y &= (y'(a), -y'(b)), \quad \Gamma_2^{[\Psi]}y = (y(a), y(b)), \\ \Gamma_3^{[\Psi]}y &= \left(y'(c) \begin{vmatrix} c_1 + 0 \\ c_1 - 0 \end{vmatrix}, \quad y'(c) \begin{vmatrix} c_2 + 0 \\ c_2 - 0 \end{vmatrix} \right), \\ \Gamma_4^{[\Psi]}y &= (y(c_1), y(c_2)), \quad (\text{тобто } \Gamma_4^{[\Psi]} = \Psi|D(L_{max})). \end{aligned}$$

Зрозуміло, що

$$D(T_B) = \{y \in D(L_{max}) : \Gamma_2^{[\Psi]}y = \Gamma_3^{[\Psi]}y, \quad \Gamma_1^{[\Psi]}y - B\Gamma_2^{[\Psi]}y - \Gamma_4^{[\Psi]}y = \Phi y\}, \quad (6)$$

$$\forall y \in D(T_B) \quad T_By = L_{max}y + \Phi^*\Gamma_2^{[\Psi]}y. \quad (7)$$

Враховуючи рівність $\Phi^\bullet = L_F^{-1}\Phi^*$ і теорему 3 праці [5], легко переконатися, що (6)-(7) можна переписати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} D(T_B) &= \{y \in D(L) + R(\chi^\bullet) : y + \chi^\bullet\Gamma_2^{[\Psi]}y \in D(L), \quad \Gamma_1^{[\Psi]}y - B\Gamma_2^{[\Psi]}y = \chi y\}, \\ \forall y \in D(T_B) \quad T_By &= L(y + \chi^\bullet\Gamma_2^{[\Psi]}y). \end{aligned}$$

2. Оператор T_0 та його ПГЗ. Визначимо оператор T_0 так:

$$D(T_0) = \{y \in D(T_B) : \Gamma_2^{[\Psi]}y = 0\}, \quad T_0 \subset T_B.$$

Зрозуміло, що

$$D(T_0) = \{y \in D(L_F) : \Gamma_1^{[\Psi]}y = \chi y\}, \quad T_0 \subset L_F, \quad (8)$$

тому T_0 – додатно визначений оператор. Зазначимо, що $T_B, T_0 \in \mathcal{C}(H)$. Це випливає з теореми 5 праці [5] та теореми 2 праці [11].

Лема 1.

$$D(T_0^*) = \{z \in D(L_{max}) : \Gamma_3^{[\Psi]}y = \Gamma_2^{[\Psi]}y\}, \quad (9)$$

$$\forall z \in D(T_0^*) \quad T_0^*z = L_{max}z + \Phi^*\Gamma_2^{[\Psi]}z. \quad (10)$$

Доведення. Враховуючи (8) та теореми 1 і 2 з [5], бачимо, що

$$\forall y \in D(T_0) \quad \forall z \in D(L_{max})$$

$$(T_0y|z) = (L_{max}y|z) = (y|L_{max}) + (y|\Phi^*\Gamma_2^{[\Psi]}z) + (\Gamma_4^{[\Psi]}y|\Gamma_2^{[\Psi]}z - \Gamma_3^{[\Psi]}z)_{\mathcal{H}}.$$

Звідси і з теореми 6 згаданої праці випливає правильність співвідношень (9)-(10). Лему доведено.

Наслідок 1. $T_0 \subset T_B \subset T_0^*$, *точніше*

$$D(T_B) = \{y \in D(T_0^*) : \Gamma_1^{[\Psi]}y - \chi y = B\Gamma_2^{[\Psi]}y\}. \quad (11)$$

Лема 2. $(H, \Gamma_1^{[\Psi]} - \chi, \Gamma_2^{[\Psi]})$ – ПГЗ оператора T_0 .

Доведення. Зазначимо, що $R((\Gamma_1^{[\Psi]} - \chi) \oplus \Gamma_2^{[\Psi]}) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Це випливає з теореми 5 праці [5] та теореми 1 праці [11]. Враховуючи (9)-(10) та теореми 1 і 2 з [5], бачимо, що (порівняти з (1))

$$\begin{aligned} \forall y, z \in D(T_0^*) \quad (T_0^*y|z) - (y|T_0^*z) &= (L_{max}y + \Phi^*\Gamma_2^{[\Psi]}y|z) - (y|L_{max}z + \Phi^*\Gamma_2^{[\Psi]}z) = \\ &= (\Gamma_1^{[\Psi]}y - \chi y|\Gamma_2^{[\Psi]}z)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_2^{[\Psi]}y|\Gamma_1^{[\Psi]}z - \chi z)_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Наслідок 2. $T_B^* = T_{B^*}$, зокрема $T_B = T_B^*$ *тоді і тільки тоді, коли* $B = B^*$.

3. Про одну функцію Вейля оператора T_0 .

Зауваження 1. Нехай $\{\omega_1(x, \lambda), \omega_2(x, \lambda)\}$ – фундаментальна система розв'язків рівняння $-Y'' + p(x)Y = \lambda Y$ така, що

$$\omega_1(a, \lambda) = \omega_2(b, \lambda) = \mathbf{1}_{H_0}, \quad \omega_1(b, \lambda) = \omega_2(a, \lambda) = 0 \quad (\lambda \leq 0),$$

$$Z_\lambda h = Z_\lambda(h_1, h_2) = \omega_1(\cdot, \lambda)h_1 + \omega_2(\cdot, \lambda)h_2 \quad (h \in \mathcal{H}),$$

$$\Omega(\lambda) = \Gamma_1 Z_\lambda = \begin{pmatrix} \omega'_1(a, \lambda) & \omega'_2(a, \lambda) \\ -\omega_1(b, \lambda) & -\omega'_2(b, \lambda) \end{pmatrix}.$$

Відомо [12], що $\Omega(\lambda)$ є функцією Вейля (в сенсі означення, запропонованого в цій статті) оператора L_0 , яка відповідає ПГЗ $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$, а $(\mathcal{H}, \Gamma_1 - \Omega(0)\Gamma_2, \Gamma_2)$ – його позитивним ПГЗ (в сенсі означення, запропонованого в [13]), що відповідає його жорсткому розширенню (далі – скорочено: *жорстким ПГЗ*). Тому [14], [15]

$$s - \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} (\Omega(\lambda) - \Omega(0))^{-1} = 0. \quad (12)$$

Зауваження 2. Нагадаємо, що ПГЗ $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ додатно визначеного оператора L_0 називається позитивним, якщо $\ker \Gamma_1 = D(L_0) \dot{+} \ker L_0^*$, а $L|_{\ker \Gamma_2}$ – додатно визначений оператор.

У працях [13], [17] доведено критерії максимальної невід'ємності, максимальної акретивності та коректної оборотності оператора L_B такого, що $L_0 \subset L_B \subset L_0^*$, в термінах позитивних ПГЗ.

Лема 3. *Приймемо $L_\lambda = (L_F - \lambda \mathbf{1}_H)^{-1}$ ($\lambda \leq 0$). Тоді*

$$(\chi L_\lambda)^* = (\lambda L_\lambda + \mathbf{1}_H) \chi^\bullet, \quad (13)$$

$$(\chi Z_\lambda)^* = \Gamma_1^{[\Psi]} (\chi L_\lambda)^*. \quad (14)$$

Доведення. Враховуючи тотожність $L_F L_\lambda = \mathbf{1}_H + \lambda L_\lambda$, бачимо, що

$$\forall y \in H, \forall h \in \mathcal{H} \quad (\chi L_\lambda y | h)_\mathcal{H} = (L_\lambda y | \chi^\bullet h)_e = (L_F L_\lambda y | \chi^\bullet h) = (y | (\lambda L_\lambda + \mathbf{1}_H) \chi^\bullet h).$$

Враховуючи (13), переконуємось, що $\Gamma_1^{[\Psi]} (\chi L_\lambda)^* = \lambda Z_\lambda^* \chi^\bullet + \Gamma_1^{[\Psi]} \Psi^\bullet + \Gamma_1^{[\Psi]} L_F^{-1} \Phi^*$. Але $\Gamma_1^{[\Psi]} \Psi^\bullet = (\Psi Z_0)^*$ (це випливає зі сказаного в [5]), тому

$$\Gamma_1^{[\Psi]} (\chi L_\lambda)^* = \lambda Z_\lambda^* \chi^\bullet + (\chi Z_0)^*. \quad (15)$$

Використовуючи тотожність $Z_\lambda - Z_0 = \lambda L_F^{-1} Z_\lambda$ (див. [15]), отримуємо

$$\begin{aligned} \forall h, g \in \mathcal{H} \quad & ((\chi Z_\lambda)^* h | g)_H = (h | \chi Z_0 g)_\mathcal{H} + (h | \chi (Z_\lambda - Z_0) g)_H = (h | \chi Z_0 g)_\mathcal{H} + \\ & + (\lambda \chi^\bullet h | L_F^{-1} Z_\lambda g)_e = ((\chi Z_0)^* h | g)_\mathcal{H} + (\lambda Z_\lambda^* \chi^\bullet h | g)_\mathcal{H}, \end{aligned}$$

тобто $(\chi Z_\lambda)^* = (\chi Z_0)^* + \lambda Z_\lambda^* \chi^\bullet$. Звідси і з (15) випливає (14).

Твердження 1. *Оператор-функція*

$$\widehat{\Omega}(\lambda) = \Omega(\lambda) - 2\operatorname{Re}(\chi Z_\lambda) + \chi(\chi L_\lambda)^*$$

є функцією Вейля оператора T_0 , що відповідає ПГЗ $(\mathcal{H}, \Gamma_1^{[\Psi]} - \chi, \Gamma_2^{[\Psi]})$ цього оператора.

Доведення. Позначимо через $\widehat{Z}_\lambda h$ ($h \in \mathcal{H}$) розв'язок задачі

$$T_0^* y = \lambda y, \quad \Gamma_2^{[\Psi]} y = h.$$

Враховуючи рівності $\Gamma_2^{[\Psi]} \chi^\bullet = \Gamma_2^{[\Psi]} L_\lambda = 0$, $\Gamma_2^{[\Psi]} Z_\lambda h = h$, бачимо, що $y = Z_\lambda h - (\mathbf{1}_H + \lambda L_\lambda) \chi^\bullet h$, тому (див. (13)) $\widehat{Z}_\lambda = Z_\lambda - (\mathbf{1}_H + \lambda L_\lambda) \chi^\bullet = Z_\lambda - (\chi L_\lambda)^*$.

Відомо [16], що шукана функція Вейля (позначимо її тимчасово $W(\lambda)$) має вигляд $W(\lambda) = (\Gamma_1^{[\Psi]} - \chi) \widehat{Z}_\lambda$. Звідси, враховуючи лему 3, отримуємо

$$\begin{aligned} W(\lambda) &= (\Gamma_1^{[\Psi]} - \chi)(Z_\lambda - (\chi L_\lambda)^*) = \Omega(\lambda) - \chi Z_\lambda - \Gamma_1^{[\Psi]} (\chi L_\lambda)^* + \chi(\chi L_\lambda)^* = \\ &= \Omega(\lambda) - \chi Z_\lambda - (\chi Z_\lambda)^* + \chi(\chi L_\lambda)^* = \widehat{\Omega}(\lambda). \end{aligned}$$

Наслідок 3.

$$\widehat{\Omega} = \Omega - 2\operatorname{Re}(\chi Z_0) + \chi\chi^\bullet, \quad \widehat{\Omega}(0) = \Omega(0) - 2\operatorname{Re}(\chi Z_0) + \chi\chi^\bullet. \quad (16)$$

4. Основний результат. З висловленого в попередньому пункті і в [12] випливає, що $(\mathcal{H}, (\Gamma_1^{[\Psi]} - \chi) - \widehat{\Omega}(0)\Gamma_2^{[\Psi]}, \Gamma_2^{[\Psi]})$ є позитивним ПГЗ оператора T_0 , зокрема м'яке в сенсі [9] розширення T_K цього оператора має такий вигляд:

$$D(T_K) = \{y \in D(T_0^*) : (\Gamma_1^{[\Psi]} - \chi)y - \widehat{\Omega}(0)\Gamma_2^{[\Psi]}y = 0\}, \quad T_K \subset T_0^*.$$

Ми хочемо показати, що зазначений ПГЗ є жорстким, тобто, що L_F є жорстким розширенням не тільки для L_0 , а й для T_0 . Це справджується тоді і тільки тоді, коли ([14], [15])

$$s - \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} (\widehat{\Omega}(\lambda) - \widehat{\Omega}(0))^{-1} = 0. \quad (17)$$

З відомих властивостей розширень за Фрідріхсом випливає, що достатньо переконатися у правильності (17) в ситуації, коли $p(x) = 0$. Зазначимо, що у цій ситуації

$$\omega_1(x, \rho) = \frac{sh(\rho(b-x))}{sh(\rho(b-a))} \mathbf{1}_{H_0}, \quad \omega_2(x, \rho) = \frac{sh(\rho(x-a))}{sh(\rho(b-a))} \mathbf{1}_{H_0} \quad (18)$$

(тут $\rho = \sqrt{-\lambda}$).

Теорема 1. $(\mathcal{H}, (\Gamma_1^{[\Psi]} - \chi) - \widehat{\Omega}(0)\Gamma_2^{[\Psi]}, \Gamma_2^{[\Psi]})$ – жорсткий ПГЗ оператора T_0 .

Доведення. Введемо позначення $M(\lambda) = \Omega(\lambda) - \Omega(0)$, $\widehat{M}(\lambda) = \widehat{\Omega}(\lambda) - \widehat{\Omega}(0)$. Маємо $\widehat{M}(\lambda) = M(\lambda) + \widetilde{M}(\lambda)$, де $\widetilde{M}(\lambda) = -2\operatorname{Re}(\chi Z_\lambda - \chi Z_0) + \chi(\chi L_\lambda)^* - \chi\chi^\bullet$, а отже, $\widehat{M}(\lambda)^{-1} = (\mathbf{1}_H - \widehat{M}(\lambda)^{-1}\widetilde{M}(\lambda))M(\lambda)^{-1}$. Існування при $\lambda < 0$ операторів $\widehat{M}(\lambda)^{-1}$, $M(\lambda)^{-1}$, а також їхніх сильних границь при $\lambda \rightarrow -\infty$ випливає, наприклад, з результатів праці [16]. Крім того, $s - \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} M(\lambda)^{-1} = 0$ (див. (12)). Тому (17) буде доведено таке: ми покажемо, що існує $s - \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \widehat{M}(\lambda)^{-1}$. Саме цьому і присвячена частина доведення, яка залишилася.

$$\text{а) } s - \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \operatorname{Re}(\chi Z_\lambda) = 0. \quad (19)$$

Як зазначалося вище, достатньо обмежитися ситуацією, коли $p(x) = 0$, а отже, оператор-функції $\omega_1(\cdot, \rho)$, $\omega_2(\cdot, \rho)$ мають вигляд (18). У цій ситуації

$$\|\omega_i(\cdot, \rho)\|^2 = \frac{sh(2\rho(b-a)) - 2\rho(b-a)}{2\rho(ch(2\rho(b-a)) - 1)} \xrightarrow{\rho \rightarrow +\infty} 0 \quad (i = 1, 2),$$

тому $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} Z_\lambda = 0$, а отже, $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \operatorname{Re}(\Phi Z_\lambda) = 0$ (не тільки сильно, а й рівномірно).

Для будь-якого $c \in (a, b)$

$$\|\omega_1(c, \rho)\|^2 = \frac{sh(\rho(b-c))}{sh(\rho(b-a))} \xrightarrow{\rho \rightarrow +\infty} 0, \quad \|\omega_2(c, \rho)\|^2 = \frac{sh(\rho(c-a))}{sh(\rho(b-a))} \xrightarrow{\rho \rightarrow +\infty} 0,$$

тому $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \operatorname{Re}(\Psi Z_\lambda) = 0$. Співвідношення (19) доведено.

б) Існує $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \chi(\chi L_\lambda)^*$. Справді, прийемо $\chi(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \chi(\chi L_\lambda)^*$ ($\lambda \leq 0$). Зрозуміло, що

$\chi'(\lambda) = \chi((\chi L_\lambda)')^* = \chi(\chi L_\lambda^2)^* = \chi(\chi L_\lambda L_\lambda)^* = (\chi L_\lambda)(\chi L_\lambda)^* \geq 0$, тому оператор-функція $\chi(\lambda)$ монотонно неспадна.

З невід'ємності оператора L_F випливає, що $\forall \lambda < 0 \quad 0 \leq \lambda L_\lambda + \mathbf{1}_H \leq \mathbf{1}_H$. Звідси і з (13) бачимо, що для всіх $h \in \mathcal{H}$ справджується $(\chi(\chi L_\lambda)^* h | h)_\mathcal{H} = ((\mathbf{1}_H + \lambda L_\lambda) L_F^{1/2} \chi^\bullet h | L_F^{1/2} \chi^\bullet h) \geq 0$. Отож, оператор-функція $\chi(\lambda)$ обмежена знизу. Застосовуючи теорему про існування сильної границі монотонної обмеженої оператор-функції, переконуємося у правильності твердження б, а з ним – і самої теореми.

Теорема 2. *Оператор T_B максимально невід'ємний (максимально акретивний; коректно оборотний) тоді і тільки тоді, коли оператор*

$$\widehat{B} \stackrel{\text{def}}{=} B - \Omega(0) + 2\text{Re}(\chi Z_0) - \chi \chi^\bullet$$

є невід'ємним (акретивним; коректно оборотним) в $B(\mathcal{H})$.

Доведення. Оскільки умову (11) можна переписати у вигляді

$$D(T_B) = \{y \in D(T_0^*) : (\Gamma_1^{[\Psi]} - \chi)y - \widehat{\Omega}(0)\Gamma_2^{[\Psi]}y = \widehat{B}\Gamma_2^{[\Psi]}y\},$$

то правильність цієї теореми випливає безпосередньо з теореми 1 та результатів праць [13] і [17].

Наслідок 4. *T_B – самоспряжений додатно визначений оператор тоді і тільки тоді, коли $\widehat{B}$ – додатно визначений оператор.*

-
1. Лянце В.Э. О некоторых соотношениях между замкнутыми операторами / Лянце В.Э. // Докл. АН СССР. – 1972. – Т. 204, №3. – С. 542-545.
 2. Krall A.M. The development of general differential and differential-boundary systems / Krall A.M. // Rocky J. Math. – 1975. – Vol.5. – P. 493-542.
 3. Горбачук В.И. Теория расширений симметрических операторов и граничные задачи для дифференциальных уравнений / Горбачук В.И., Горбачук М.Л., Кочубей А.Н. // Укр. мат. журн. – 1989. – Т. 41, №10. – С. 1299-1313.
 4. Піна Г.М. Умови максимальної дисипативності для одного класу замкнених операторів у гільбертовому просторі / Піна Г.М., Сторож О.Г. // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 190-200.
 5. Піна Г.М. Про диференціально-граничний оператор типу Штурма-Ліувілля з багаточислово-інтегральними крайовими умовами у просторі нескінченновимірних вектор-функцій / Піна Г.М., Сторож О.Г. // Доп. НАН України. – 2006. – №10. – С. 34-39.
 6. Рофе-Бекетов Ф.С. Самосопряженные расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций / Рофе-Бекетов Ф.С. // Докл. АН. СССР. – 1969. – Т. 184, №5. – С. 1034-1037.
 7. Кочубей А.Н. О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений / Кочубей А.Н. // Мат. заметки. – 1975. – Т. 17, №1. – С. 41-48.
 8. Горбачук В.И. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений / Горбачук В.И., Горбачук М.Л. – К.: Наукова думка, 1984. – 284 с.
 9. Крейн М.Г. Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения. I, II / Крейн М.Г. // Мат. сб. – 1947. – Т. 20, №3. – С. 431-495; Т. 21, №3. – С. 365-404.

10. Михлин С.Г. Курс математической физики / Михлин С.Г. – М.: Наука, 1968. – 576 с.
11. Сторож О.Г. Про один клас майже обмежених збурень гладких звужень замкнутого оператора / Сторож О.Г., Шувар О.Б. // Укр. мат. журн. – 2002. – Т. 54, №10. – С. 1396-1402.
12. Деркач В.А. Характеристические функции почти разрешимых расширений эрмитовых операторов / Деркач В.А., Маламуд М.М. // Укр. мат. журн. – 1992. – Т. 44, №4. – С. 435-459.
13. Кочубей А.Н. Про розширення додатно визначеного симетричного оператора / Кочубей А.Н. // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1979. – №3. – С. 168-171.
14. Штраус А.В. О расширениях полуограниченного оператора / Штраус А.В. // Докл. АН СССР. – 1973. – Т. 231, №3. – С. 543-546.
15. Сторож О.Г. Экстремальные расширения неотрицательного оператора и аккретивные граничные задачи / Сторож О.Г. // Укр. мат. журн. – 1990. – Т. 42, №6. – С. 858-860.
16. Сторож О.Г. Про деякі аналітичні та асимптотичні властивості функції Вейля невід'ємного оператора / Сторож О.Г. // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – Т. 43, №4. – С. 18-23.
17. Михайлец В.А. Спектры операторов и граничные задачи / Михайлец В.А. // Спектр. анализ дифференц. операторов. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1980. – С. 106-131.

NONNEGATIVE AND ACCRETIVE PERTURBATIONS OF THE OPERATOR OF THE THIRD BOUNDARY PROBLEM FOR THE STURM-LIOUVILLE DIFFERENTIAL EXPRESSION WITH THE BOUNDED OPERATOR POTENTIAL

Hanna PIPA

*Berezhany agrotechnical institute,
47501, Ternopil region, Berezhany, Akademichna Str., 20*

A class of differential-boundary operators of the Sturm-Liouville type with the nonstandard boundary conditions is investigated. The criteria of the maximal nonnegativity, maximal accretivity and solvability for the considered operators are established.

Key words: operator, boundary value space, extension.

Стаття надійшла до редколегії 25.04.2007

Прийнята до друку 22.10.2008

УДК 517.95

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО
РІВНЯННЯ З ВИРОДЖЕННЯМНаталія ПРОЦАХ^{1,2}¹ Національний лісотехнічний університет України,
79057, Львів, вул. Генерала Чупринки, 103² Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
79060, Львів, вул. Наукова, 36

Розглянуто мішану задачу для вироджених ультрапараболічних рівнянь. Виродження рівнянь відбувається на гіперплощині задання початкових даних. Залежно від типу виродження отримано умови існування єдиного узагальненого розв'язку мішаної задачі.

Ключові слова: ультрапараболічне рівняння, слабе виродження, сильне виродження, мішана задача, узагальнений розв'язок.

Систематичне вивчення різних задач для рівнянь з виродженням розпочалося у двадцятих роках минулого століття. Переважно досліджували задачі для вироджених рівнянь гіперболічного та параболічного типів. Зокрема, огляд літератури є у [1–15]. У працях [1–10, 14] з'ясували, що за наявності виродження у рівнянні на гіперплощині задання початкових даних, умови розв'язності мішаної задачі для цього рівняння залежать від співвідношення між коефіцієнтами рівняння та параметрами виродження.

Мішані задачі для лінійних і нелінійних ультрапараболічних рівнянь досліджено в [16–24].

У цій праці розглянуто мішану задачу для виродженого рівняння ультрапараболічного типу. Зміна типу рівняння виникає на гіперплощині задання початкових даних. Отримано умови існування єдиного узагальненого розв'язку сформульованої задачі.

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область з межею $\partial\Omega$; $y_0 < +\infty$, $D = \Omega \times (0, y_0)$, $Q_T = D \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$; $Q_{t,\tau} = D \times (t, \tau)$; $D_\tau = Q_T \cap \{t = \tau\}$, $\partial\Omega \subset C^2$, $\Sigma_T = \partial\Omega \times (0, y_0) \times (0, T)$.

1. *Лінійне рівняння.* В області Q_T розглянемо рівняння

$$\varphi(t)u_t - \lambda(x, y, t)u_y - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x, y, t)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n c_i(x, y, t)u_{x_i} + d(x, y, t)u = f(x, y, t) \quad (1)$$

з крайовими умовами

$$u(x, y_0, t) = 0 \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T); \quad u|_{\Sigma_T} = 0. \quad (2)$$

Щодо коефіцієнтів рівняння (1) припускатиемо виконання умов

(Φ): $\varphi \in C([0, T])$, $\varphi(t) > 0$, $t \in (0, T]$; $\varphi(0) = 0$, $\varphi' \in C((0, T])$; $\varphi'(t) \geq 0$ $t \in (0, T]$;

(A): $a_i \in L^\infty(Q_T)$, $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, y, t)\xi_i\xi_j \geq a_0 \sum_{i,j=1}^n |\xi|^2$ майже для всіх $(x, y, t) \in Q_T$,

$i, j \in \{1, \dots, n\}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, де a_0 — додатна стала;

(L): $\lambda \in C(\overline{Q_T})$, $\lambda_y \in L^\infty(Q_T)$ для майже всіх $(x, y, t) \in Q_T$, $\lambda \geq 0$, $\lambda \not\equiv 0$.

Будемо розглядати простір $H_{0,\varphi}(Q_T)$ як замикання множини нескінченно диференційовних функцій в $\overline{Q_T}$, які дорівнюють нулю в околі Σ_T та $u(x, y_0, t) = 0$ за нормою $\|u; H_{0,\varphi}(Q_T)\|^2 = \int_{\overline{Q_T}} [\varphi(t)|u|^2 + \varphi(t)|u_y|^2 + \varphi(t)|u_t|^2 + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2] dx dy dt$.

Розглянемо такі випадки.

a) *Сильне виродження.*

Означення 1. Скажемо, що рівняння (1) має сильне виродження, якщо $\int_0^T \frac{dt}{\varphi(t)} = \infty$.

Розглянемо мішану задачу для рівняння (1) з крайовими умовами (2) та початковою умовою

$$\lim_{t \rightarrow +0} \sqrt{\varphi(t)}u(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in D. \quad (3)$$

Означення 2. Узагальненим розв'язком задачі (1)-(3) назвемо функцію $u \in H_{0,\varphi}(Q_T)$, яка задовольняє рівність

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} L(u, v) dx dy dt &\equiv \int_{Q_T} \left[\varphi(t)u_t v + \lambda(x, y, t)u_y v + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, y, t)u_{x_i} v_{x_j} + \right. \\ &\left. + \sum_{i=1}^n c_i(x, y, t)u_{x_i} v + d(x, y, t)uv - f(x, y, t)v \right] dx dy dt = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

для довільної функції $v \in \{v : v \in L^2(Q_T), v_{x_i} \in L^2(Q_T), i = 1, \dots, n, u|_{\Sigma_T} = 0\}$.

Позначимо

$$\begin{aligned} c_0(t) &= \sup_{Q_t} \sum_{i=1}^n \frac{|c_i(x, y, \tau)|^2}{\varphi'(\tau)}, \quad \lambda_1(t) = \sup_{Q_t} \frac{|\lambda_y(x, y, \tau)|}{\varphi'(\tau)}, \quad d_0(t) = \sup_{Q_t} \sum_{i=1}^n \frac{|d(x, y, \tau)|}{\varphi'(\tau)}. \\ c_1(t) &= \sup_{Q_t} \sum_{i=1}^n \frac{|c_{iy}(x, y, \tau)|^2}{\varphi'(\tau)}, \quad d_1(t) = \sup_{Q_t} \sum_{i=1}^n \frac{|d_y(x, y, \tau)|}{\varphi'(\tau)}, \end{aligned}$$

$$c_2(t) = \sup_{Q_t} \sum_{i=1}^n \frac{|c_{it}(x, y, \tau)|^2}{\varphi'(\tau)}, \quad \lambda_2(t) = \sup_{Q_t} \frac{|\lambda_t(x, y, \tau)|}{\varphi'(\tau)}, \quad d_2(t) = \sup_{Q_t} \sum_{i=1}^n \frac{|d_{it}(x, y, \tau)|}{\varphi'(\tau)},$$

$$\nu_0 = 1 + \inf_{[0, T]} \sup_{[0, \tau]} \left[\lambda_1(t) + 2d_0(t) + \frac{2c_0(t)}{a_0} \right], \quad \nu_1 = -1 + \inf_{[0, T]} \sup_{[0, \tau]} \left[\lambda_1(t) + 2d_0(t) + \frac{2c_0(t)}{a_0} \right],$$

δ_0 – мале додатне число.

Щодо правої частини рівняння (1) припускати виконання умови

$$(\mathbf{F}): \int_{Q_T} \left[\frac{|f|^2 + |f_y|^2}{[\varphi(t)]^{\nu_0+2\delta_0} \varphi'(t)} + \frac{|f_t|^2}{[\varphi(t)]^{\nu_1+2\delta_0} \varphi'(t)} \right] dx dy dt < +\infty,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D_\varepsilon} \frac{|f(x, y, \varepsilon)|^2}{[\varphi(\varepsilon)]^{\nu_1+1+2\delta_0}} dx dy dt < +\infty, \quad f(x, y_0, t) = 0 \text{ для всіх } (x, t) \in \Omega \times (0, T).$$

Доведемо існування та єдиність узагальненого розв'язку задачі (1) - (3).

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (A), (L), (Ф), (F), крім того, $c_i, d_i, \lambda_j \in L^\infty([0, T])$ $i = 0, 1, 2, j = 1, 2$. Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (1)-(3).*

Доведення. Нехай $\{\varphi^k\}_{k=1}^\infty$ – ортогональна база простору $H_0^1(\Omega)$, ортонормована в $L^2(\Omega)$, а $\psi^s = \cos \frac{(2s-1)\pi}{2y_0} y$ ($s \geq 1$). Позначимо $\{\varphi^{k,s}\}_{k,s=1}^\infty = \{\varphi^k(x)\psi^s(y)\}_{k,s=1}^\infty$. Очевидно, що $\varphi^{k,s} \in H^1(D)$, $\varphi^{k,s}|_{\partial\Omega \times (0, y_0)} = 0$, $\varphi^{k,s}|_{y=y_0} = 0$. Розглянемо функції

$$u^N(x, y, t) = \sum_{k,s=1}^N c_{k,s}^N(t) \varphi^{k,s}(x, y), \quad N \in \{1, 2, \dots\}, \text{ де } c_{k,s}^N(t) \text{ є розв'язком задачі}$$

$$\int_{D_t} L(u^N, \varphi^{k,s}) dx dy = 0, \quad (5)$$

$$c_{k,s}^N(\varepsilon) = 0, \quad k, s \in \{1, \dots, N\}, \quad \varepsilon > 0, \quad t \in [\varepsilon, T]. \quad (6)$$

За теоремою Каратеодорі [25, с. 54] існує абсолютно неперервний на $[\varepsilon, \tau_0]$, $\tau_0 < T$ розв'язок задачі (5) – (6). Домножимо (5) на $c_{k,s}^N(t)$, підсумуємо за s і k , проінтегруємо за t по проміжку $[\varepsilon, \tau]$. Матимемо

$$\int_{Q_{\varepsilon, \tau}} L(u^N, u^N) dx dy dt = 0. \quad (7)$$

Перетворимо та оцінимо кожний доданок отриманої рівності

$$\mathcal{I}_1 \equiv \int_{Q_{\varepsilon, \tau}} \varphi(t) u_t^N u^N dx dy dt = \frac{1}{2} \int_{D_\tau} \varphi(\tau) (u^N)^2 dx dy - \frac{1}{2} \int_{Q_{\varepsilon, \tau}} \varphi'(t) (u^N)^2 dx dy dt;$$

$$\mathcal{I}_2 \equiv - \int_{Q_{\varepsilon, \tau}} \lambda(x, y, t) u_y^N u^N dx dy dt = \frac{1}{2} \int_{\varepsilon}^{\tau} \int_{\Omega} \lambda(x, 0, t) |u^N|^2 dx dt +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{Q_{\varepsilon, \tau}} \lambda_y(x, y, t) |u^N|^2 dx dy dt;$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_3 &\equiv \int_{Q_{\varepsilon, \tau}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, y, t) u_{x_i}^N u_{x_j}^N dx dy dt \geq a_0 \int_{Q_{\varepsilon, \tau}} \sum_{i=1}^n (u_{x_i}^N)^2 dx dy dt; \\
\mathcal{I}_4 &\equiv \int_{Q_{\varepsilon, \tau}} \sum_{i=1}^n c_i(x, y, t) u_{x_i}^N u^N dx dy dt \leq \int_{Q_{\varepsilon, \tau}} \left[\frac{c_0(t)}{2\delta_1} \sum_{i=1}^n (u_{x_i}^N)^2 + \frac{\delta_1}{2} \varphi'(t) |u^N|^2 \right] dx dy dt; \\
\mathcal{I}_5 &\equiv \int_{Q_{\varepsilon, \tau}} d(x, y, t) (u^N)^2 dx dy dt \leq \int_{Q_{\varepsilon, \tau}} d_0(t) \varphi'(t) |u^N|^2 dx dy dt; \\
\mathcal{I}_6 &\equiv \int_{Q_{\varepsilon, \tau}} f(x, y, t) u^N dx dy dt \leq \frac{1}{2} \int_{Q_{\varepsilon, \tau}} \left[\frac{|f(x, y, t)|^2}{\varphi'(t) \delta_2} + \delta_2 \varphi'(t) |u^N|^2 \right] dx dy dt,
\end{aligned}$$

де $\delta_1 = \sup_{Q_T} \frac{2c_0(t)}{a_0}$, δ_2 – мале додатне число. Оскільки $1 + \lambda_1(t) + \delta_1 + 2d_0(t) + \delta_2 < \nu_0 + \delta_0$, $\nu_0 > 0$, то з (7) та з отриманих оцінок випливає нерівність

$$\begin{aligned}
&\int_{D_\tau} \varphi(\tau) (u^N)^2 dx dy + \int_{\varepsilon}^{\tau} \int_{\Omega} \lambda(x, 0, t) (u^N)^2 dx dt + \int_{Q_{\varepsilon, \tau}} \sum_{i=1}^n (u_{x_i}^N)^2 dx dy dt \leq \\
&\leq M_1 [\varphi(\tau)]^{\nu_0 + 2\delta_0} \int_{Q_T} \frac{1}{[\varphi(t)]^{\nu_0 + 2\delta_0}} \frac{|f|^2}{\varphi'(t)} dx dy dt, \tag{8}
\end{aligned}$$

в якій стала M_1 не залежить від N . Оскільки $(\cos \frac{(2s-1)\pi}{2y_0} y)_{yy} = -\omega_s \cos \frac{(2s-1)\pi}{2y_0} y$, де $\omega_s = (\frac{(2s-1)\pi}{2y_0})^2$, то домножимо (5) на $c_{k,s}^N(t) \omega_s$, підсумуємо за s, k , проінтегруємо за t від ε до τ та замінимо значення $\sum_{k,s=1}^N c_{k,s}^N(t) \omega_s \varphi^{k,s}(x, y)$ з попереднього виразу на $-u_{yy}^N$. Матимемо

$$-\int_{Q_{\varepsilon, \tau}} L(u^N, u_{yy}^N) dx dy dt = 0. \tag{9}$$

Перетворимо й оцінимо кожний з доданків цієї рівності окремо

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_7 &\equiv - \int_{Q_{\varepsilon, \tau}} \varphi(t) u_t^N u_{yy}^N dx dy dt = \frac{1}{2} \int_{D_\tau} \varphi(t) (u_y^N)^2 dx dy - \frac{1}{2} \int_{Q_{\varepsilon, \tau}} \varphi'(t) (u_y^N)^2 dx dy dt; \\
\mathcal{I}_8 &\equiv \int_{Q_{\varepsilon, \tau}} \lambda(x, y, t) u_y^N u_{yy}^N dx dy dt \geq \frac{1}{2} \int_{\varepsilon}^{\tau} \int_{\Omega} \lambda(x, y_0, t) (u_y^N)^2 dx dt - \frac{1}{2} \int_{Q_{\varepsilon, \tau}} \lambda_1(t) \varphi'(t) (u_y^N)^2 dx dy dt, \\
\mathcal{I}_9 &\equiv - \int_{Q_{\varepsilon, \tau}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, y, t) u_{x_i}^N u_{x_i y y}^N dx dy dt \geq \int_{Q_{\varepsilon, \tau}} \left[\frac{a_0}{2} \sum_{i=1}^n (u_{x_i y}^N)^2 - \frac{(a^1)^2}{2a_0} \sum_{i=1}^n (u_{x_i}^N)^2 \right] dx dy dt,
\end{aligned}$$

тут $a^1 = \sup_{Q_T} |a_{iy}|$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{10} &\equiv - \int_{Q_{\varepsilon, \tau}} \sum_{i=1}^n c_i(x, y, t) u_{x_i}^N u_{yy}^N dx dy dt \leq \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{Q_{\varepsilon, \tau}} \left[\frac{c_1(t)}{\delta_4} \sum_{i=1}^n (u_{x_i}^N)^2 + (\delta_4 + \delta_3) \varphi'(t) (u_y^N)^2 + \frac{c_0(t)}{\delta_3} \sum_{i=1}^n (u_{x_i y}^N)^2 \right] dx dy dt, \\
\mathcal{I}_{11} &\equiv - \int_{Q_{\varepsilon, \tau}} d(x, y, t) u^N u_{yy}^N dx dy dt \leq \int_{Q_{\varepsilon, \tau}} \left[\frac{d_1(t)}{2\delta_4} (u^N)^2 + \left(\frac{d_1(t)}{2} \delta_4 + d_0(t) \right) (u_y^N)^2 \right] \varphi'(t) dx dy dt, \\
\mathcal{I}_{12} &\equiv \int_{Q_{\varepsilon, \tau}} f(x, y, t) u_{yy}^N dx dy dt \geq - \frac{1}{2} \int_{Q_{0, \tau}} [\delta_4 \varphi'(t) |u_y^N|^2 + \frac{|f_y(x, y, t)|^2}{\delta_4 \varphi'(t)}] dx dy dt,
\end{aligned}$$

де $\delta_3 = \frac{2}{a_0} \sup_{Q_T} c_0(t)$, δ_4 – мале додатне число. Тоді на підставі оцінок інтегралів $\mathcal{I}_7 - \mathcal{I}_{12}$ з (9) отримаємо нерівність

$$\begin{aligned}
&\int_{D_\tau} \varphi(\tau) (u_y^N)^2 dx dy + \int_{\varepsilon}^{\tau} \int_{\Omega} \lambda(x, y_0, t) (u_y^N)^2 dx dt + \int_{Q_{\varepsilon, \tau}} \sum_{i=1}^n (u_{x_i y}^N)^2 dx dy dt \leq \\
&\leq M_2 [\varphi(\tau)]^{\nu_0 + 2\delta_0} \int_{Q_T} \frac{1}{[\varphi(t)]^{\nu_0 + 2\delta_0}} \frac{|f|^2 + |f_y|^2}{\varphi'(t)} dx dy dt. \quad (10)
\end{aligned}$$

Продиференціюємо рівність (5) по t , домножимо кожне з рівнянь на $c_{kst}^N(t) e^{-\nu t}$, підсумуємо за k, s , проінтегруємо по $[\varepsilon, \tau]$, $\tau < T$. Одержимо

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_{\varepsilon, \tau}} [\varphi(t) u_{tt}^N u_t^N + \varphi'(t) (u_t^N)^2 - \lambda(x, y, t) u_{yt}^N u_t^N - \lambda_t(x, y, t) u_y^N u_{yt}^N + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, y, t) u_{x_i t}^N u_{x_j t}^N + \\
&+ \sum_{i,j=1}^n a_{ijt}(x, y, t) u_{x_i}^N u_{x_j t}^N + \sum_{i=1}^n c_i(x, y, t) u_{x_i t}^N u_t^N + \sum_{i=1}^n c_{it}(x, y, t) u_{x_i}^N u_t^N + \\
&+ d(x, y, t) (u_t^N)^2 + d_t(x, y, t) u^N u_t^N - f_t(x, y, t) u_t^N] dx dy dt = 0. \quad (11)
\end{aligned}$$

Оцінимо кожний доданок отриманої рівності.

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{13,14} &\equiv \int_{Q_{\varepsilon, \tau}} [\varphi(t) u_{tt}^N u_t^N + \varphi'(t) (u_t^N)^2] dx dy dt \geq \frac{1}{2} \int_{D_\tau} \varphi(\tau) (u_t^N)^2 dx dy - \\
&- \frac{1}{2} \int_{D_\varepsilon} \varphi(\varepsilon) (u_t^N)^2 dx dy + \frac{1}{2} \int_{Q_{\varepsilon, \tau}} \varphi'(t) (u_t^N)^2 dx dy dt; \\
\mathcal{I}_{15,16} &= - \int_{Q_{\varepsilon, \tau}} [\lambda(x, y, t) u_{yt}^N u_t^N + \lambda_t(x, y, t) u_y^N u_t^N] dx dy dt \geq
\end{aligned}$$

$$\geq \frac{1}{2} \int_{\varepsilon}^{\tau} \int_{\Omega} \lambda(x, 0, t) |u_t^N|^2 dx dt - \frac{1}{2} \int_{Q_{\varepsilon, \tau}} \left((\lambda_1(t) + \delta_5) \varphi'(t) |u_t^N|^2 + \frac{\lambda_2(t) \varphi'(t) |u_y^N|^2}{\delta_5} \right) dx dy dt,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{17,18} &= \int_{Q_{\varepsilon, \tau}} \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, y, t) u_{x_i t}^N u_{x_j t}^N + \sum_{i,j=1}^n a_{ijt}(x, y, t) u_{x_i}^N u_{x_j t}^N \right] dx dy dt \geq \\ &\geq \frac{a_0}{2} \int_{Q_{\varepsilon, \tau}} \sum_{i=1}^n (u_{x_i t}^N)^2 dx dy dt - \frac{(a^1)^2}{2a_0} \int_{Q_{\varepsilon, \tau}} \sum_{i=1}^n (u_{x_i}^N)^2 dx dy dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{19,20} &= \int_{Q_{\varepsilon, \tau}} \left[\sum_{i=1}^n c_i(x, y, t) u_{x_i t}^N u_t^N + \sum_{i=1}^n c_{it}(x, y, t) u_{x_i}^N u_t^N \right] dx dy dt \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{Q_{\varepsilon, \tau}} \left[\frac{c_2(t)}{\delta_5} \sum_{i=1}^n (u_{x_i}^N)^2 + (\delta_5 + \delta_3) \varphi'(t) (u_t^N)^2 + \frac{c_0(t)}{\delta_3} \sum_{i=1}^n (u_{x_i t}^N)^2 \right] dx dy dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{21,22} &= \int_{Q_{\varepsilon, \tau}} [d(x, y, t) (u_t^N)^2 + d_t(x, y, t) u_t^N u_t^N] dx dy dt \leq \\ &\leq \int_{Q_{\varepsilon, \tau}} \left[\frac{d_2(t)}{2\delta_5} \varphi'(t) (u_t^N)^2 + \frac{d_2(t)}{2} \delta_5 \varphi'(t) (u_t^N)^2 + \varphi'(t) d_0(t) (u_t^N)^2 \right] dx dy dt, \end{aligned}$$

$$\mathcal{I}_{23,24} = \int_{Q_{\varepsilon, \tau}} f_t(x, y, t) u_t^N dx dy dt \geq -\frac{1}{2} \int_{Q_{\varepsilon, \tau}} [\delta_5 \varphi'(t) |u_t^N|^2 - \frac{|f_t(x, y, t)|^2}{\delta_5 \varphi'(t)}] dx dy dt,$$

де $\delta_5 > 0$ – мале число. Розглянемо (5) при $\tau = \varepsilon$, одержимо

$$\int_{D_{\varepsilon}} \varphi(\varepsilon) (u_t^N)^2 dx dy = \int_{D_{\varepsilon}} f(x, y, \varepsilon) u_t^N dx dy \leq \int_{D_{\varepsilon}} \left[\frac{1}{2} \frac{|f(x, y, \varepsilon)|^2}{\varphi(\varepsilon)} + \frac{1}{2} |u_t^N|^2 \varphi(\varepsilon) \right] dx dy. \quad (12)$$

Звідси, $\frac{1}{2} \int_{D_{\varepsilon}} \varphi(\varepsilon) (u_t^N)^2 dx dy \leq \frac{1}{2} \int_{D_{\varepsilon}} \frac{|f(x, y, \varepsilon)|^2}{\varphi(\varepsilon)} dx dy$. Врахувавши оцінки $\mathcal{I}_{13}$ - $\mathcal{I}_{24}$, з (11) випливає оцінка

$$\begin{aligned} \int_{Q_{\varepsilon, \tau}} \varphi'(t) (u_t^N)^2 dx dy dt &\leq M_3 [\varphi(\tau)]^{\nu_1 + 2\delta_0} \left[\int_{D_{\varepsilon}} \frac{|f(x, y, \varepsilon)|^2}{[\varphi(\varepsilon)]^{\nu_1 + 2\delta_0} \varphi(\varepsilon)} dx dy + \right. \\ &\left. + \int_{Q_{\varepsilon, \tau}} \left(\frac{1}{[\varphi(t)]^{\nu_0 + 2\delta_0}} \frac{|f|^2 + |f_y|^2}{\varphi'(t)} + \frac{|f_t|^2}{[\varphi(t)]^{\nu_1 + 2\delta_0} \varphi'(t)} \right) dx dy dt \right]. \quad (13) \end{aligned}$$

Отже, з оцінок (8), (10), (13) випливає оцінка

$$\|u^N; H_{0, \varphi}(Q_{\varepsilon, \tau_0})\|^2 \leq M_3 [\varphi(\tau)]^{\nu_1 + 2\delta_0} \left[\int_{Q_{\varepsilon, \tau}} \frac{1}{[\varphi(t)]^{\nu_0 + 2\delta_0}} \frac{|f|^2 + |f_y|^2}{\varphi'(t)} dx dy dt + \right.$$

$$+ \int_{D_\varepsilon} \frac{|f(x, y, \varepsilon)|^2}{[\varphi(\varepsilon)]^{\nu_1+2\delta_0} \varphi(\varepsilon)} dx dy + \int_{Q_{\varepsilon, \tau}} \frac{|f_t|^2}{[\varphi(t)]^{\nu_1+2\delta_0} \varphi'(t)} dx dy dt \Big], \quad (14)$$

де стала M_3 не залежить від N . Аналогічну оцінку отримуємо в області $Q_{\tau_0, T}$. Врахувавши (1), знаходимо включення: $\varphi(t)u_t^N \in L^2(\varepsilon, T; H^{-1}(D))$. Тому $u \in C((0, T]; H^{-1}(D))$. З одержаної оцінки випливає, що $\sqrt{\varphi(t)}u_t^N \rightarrow \sqrt{\varphi(t)}u_t$ *-слабо в $L^\infty(0, T; L^2(D))$, $u_t^N \rightarrow u_t$ - слабо в $H_{0, \varphi}(Q_{\varepsilon, T})$. Покажемо, що u буде розв'язком задачі (1)-(3). Продовжимо функції $\{u^N\}_{N=1}^\infty$ нулем в область Q_T та виберемо $\varepsilon = \frac{1}{N}$. Тоді з (5), домноживши її на $c_{ks}(t)$, та підсумувавши за k, s знайдемо

$$\int_{Q_{\frac{1}{N}, T}} L(u^N, v^{N_0}) dx dy dt = 0. \quad (15)$$

Врахувавши збіжності, знаходимо, що u задовольняє означення 1. Доведемо, що виконується початкова умова (3). Розглянемо послідовність функцій $g^N(t) = \int_{D_\tau} \varphi(\tau) |u^N|^2 dx dy$, $N \geq 1$, та доведемо її одностайну неперервність на проміжку $[0, \delta]$. Маємо

$$\begin{aligned} \int_{D_t} \varphi(t) (u^N(x, y, t))^2 dx dy &\leq \frac{1}{2} \int_{D_t} \left[\left(\int_0^t \frac{\varphi'(\tau)}{(\varphi(\tau))^{\delta_0}} (u^N)^2 d\tau \right) \left(\int_0^t \frac{\varphi'(\tau)}{(\varphi(\tau))^{1-\delta_0}} d\tau \right) \right] dx dy + \\ &+ 2 \int_{D_t} \left(\int_0^t \varphi(\tau) (u_\tau^N)^2 d\tau \right) \left(\int_0^t d\tau \right) dx dy \leq \frac{\varphi^{\delta_0}(t)}{2\delta_0} \int_{Q_t} \frac{\varphi'(\tau)}{(\varphi(\tau))^{\delta_0}} (u^N)^2 dx dy d\tau + \\ &+ 2t \int_{Q_t} \varphi(\tau) (u_\tau^N)^2 dx dy d\tau. \end{aligned} \quad (16)$$

Зауважимо, що $\int_{D_t} \frac{\varphi'(t)}{\varphi^\delta(t)} (u^N)^2 dx dy \leq M_4 [\varphi(t)]^{\nu_0+\delta_0} \varphi'(t) \int_{Q_t} \frac{|f|^2 dx dy d\tau}{[\varphi(\tau)]^{\nu_0+2\delta_0} \varphi'(\tau)}$. Тоді $\int_{Q_t} \frac{\varphi'(\tau)}{\varphi^\delta(\tau)} (u^N)^2 dx dy d\tau \leq M_4 \int_0^t [\varphi(\tau)]^{\nu_0+\delta_0} \varphi'(\tau) \int_{Q_\tau} \frac{|f|^2}{[\varphi(\theta)]^{\nu_0+2\delta_0} \varphi'(\theta)} dx dy d\theta d\tau$. Оскільки $\int_0^t \varphi'(\tau) [\varphi(\tau)]^{\delta_0-1} d\tau = \frac{1}{\delta_0} \varphi^{\delta_0}(t)$, то

$$\int_{Q_t} \frac{\varphi'(\tau)}{\varphi^\delta(\tau)} (u^N)^2 dx dy d\tau \leq \frac{M_4}{\delta_0} \varphi^{\delta_0}(t) \int_{Q_t} \frac{|f|^2}{\varphi^{\nu_0+2\delta_0}(\tau) \varphi'(\tau)} dx dy d\tau. \quad (17)$$

Підставивши (17) в (16), спрямуємо t до 0. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Тоді з оцінки (16) та абсолютної неперервності інтеграла Лебега випливає, що існує таке $\delta_0 \in (0, T]$, що права частина (16) є меншою за ε . Отже, $\{g^N : N \geq 1\}$ одностайно неперервна на $[0, \delta]$. Так само доводимо одностайну неперервність цієї послідовності на всьому проміжку $[0, T]$. Функція u^N належить до простору $C((0, T]; L^2(D_t))$ та одностайно неперервна на $[0, T]$, $u^N(x, y, 0) = 0$. Отже, $\sqrt{\varphi(t)}u^N \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови $(\mathbf{A}), (\mathbf{L}), (\Phi)$, крім того, $c_0, d_0, \lambda_1 \in L^\infty([0, T])$. Тоді задача (1)-(3) не може мати більше одного узагальненого розв'язку.*

Доведення. Припустимо, що існує два узагальнені розв'язки u^1, u^2 задачі (1)-(3). Позначимо їхню різницю $u = u^1 - u^2$. Функція u задовольнятиме рівність

$$\begin{aligned} \int_{Q_\tau} [\varphi(t)u_t u - \lambda(x, y, t)u_y u + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, y, t)u_{x_i}u_{x_j} + \\ + \sum_{i=1}^n c_i(x, y, t)u_{x_i}u + d(x, y, t)(u)^2] dx dy dt = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Оцінивши доданки цієї рівності аналогічно до доведення теореми 1, з (18) отримаємо оцінку $\int_{D_\tau} \varphi(\tau)(u)^2 dx dy + \int_0^\tau \int_\Omega \lambda(x, 0, t)(u)^2 dx dt + \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n (u_{x_i})^2 dx dy dt \leq 0$. Звідси знаходимо, що $u = 0$. Тобто, $u^1 = u^2$.

б) *Слабке виродження.*

Означення 3. *Скажемо, що рівняння (1) має слабке виродження, якщо $\int_0^T \frac{dt}{\varphi(t)} < \infty$.*

Знову розглянемо рівняння (1) з крайовими умовами (2) та початковою умовою

$$u(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in D. \quad (19)$$

Будемо розглядати простір $\tilde{H}_{0,\varphi}(Q_T)$ як замикання множини нескінченно диференційовних функцій в $\overline{Q}$, які дорівнюють нулю в околі Σ_T та $u(x, y_0, t) = 0$ за нормою $\|u; \tilde{H}_{0,\varphi}(Q_T)\|^2 = \int_{\overline{Q}_T} [\varphi(t)|u|^2 + \varphi(t)|u_y|^2 + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2] dx dy dt$.

Означення 4. *Узагальненим розв'язком задачі (1), (2), (19) назовемо функцію $u \in \tilde{H}_{0,\varphi}(Q_T)$, яка задовольняє рівність*

$$\begin{aligned} \int_{D_T} \varphi(T)uv dx dy + \int_{Q_T} [-\varphi(t)uv_t - \varphi'(t)uv + \lambda(x, y, t)u_y v + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, y, t)u_{x_i}v_{x_j} + \\ + \sum_{i=1}^n c_i(x, y, t)u_{x_i}v + d(x, y, t)uv - f(x, y, t)v] dx dy dt = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

для довільної функції $v \in \{v : v, v_{x_i}, v_t \in L^2(Q_T), i = 1, \dots, n, u|_{\Sigma_T} = 0\}$.

Позначимо

$$\begin{aligned} c_{0(1)}(t) = \sup_{Q_t} \sum_{i=1}^n |c_i(x, y, \tau)|^2, \quad \lambda_{1(1)}(t) = \sup_{Q_t} |\lambda_y(x, y, \tau)|, \quad d_{0(1)}(t) = \sup_{Q_t} \sum_{i=1}^n |d(x, y, \tau)|, \\ c_{1(1)}(t) = \sup_{Q_t} \sum_{i=1}^n |c_{iy}(x, y, \tau)|^2, \quad d_{1(1)}(t) = \sup_{Q_t} \sum_{i=1}^n |d_y(x, y, \tau)|. \end{aligned}$$

Щодо правої частини рівняння (1) припускати виконання умови

$$(\mathbf{F}): \int_{Q_T} (|f|^2 + |f_y|^2 + |f_t|^2) dx dy dt < +\infty, \quad f(x, y_0, t) = 0 \text{ для всіх } (x, t) \in \Omega \times (0, T).$$

Доведемо існування та єдиність узагальненого розв'язку задачі (1), (2), (19).

Теорема 3. *Нехай виконуються умови (A), (L), (Φ), (F), крім того, $c_{i(1)}, d_{i(1)}, \lambda_{j(1)} \in L^\infty([0, T])$ $i = 0, 1, j = 1, 2$. Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (1), (2), (19).*

Доведення. Нехай $\{\varphi^k\}_{k=1}^\infty$ – ортогональна база простору $H_0^1(\Omega)$, ортонормована в $L^2(\Omega)$, функції $\psi^s = \cos \frac{(2s-1)\pi}{2y_0} y$ ($s \geq 1$). Позначимо $\{\varphi^{k,s}\}_{k,s=1}^\infty = \{\varphi^k(x)\psi^s(y)\}_{k,s=1}^\infty$. Тоді $\varphi^{k,s} \in H^1(D)$, $\varphi^{k,s}|_{\partial\Omega \times (0, y_0)} = 0$, $\varphi^{k,s}|_{y=y_0} = 0$. Розглянемо функції $u^N(x, y, t) = \sum_{k,s=1}^N c_{k,s}^N(t) \varphi^{k,s}(x, y)$, $N \in \{1, 2, \dots\}$, де $c_{k,s}^N(t)$ є розв'язком задачі (5)-(6). За теоремою Каратеодорі [25, с. 54] існує абсолютно неперервний на $[\varepsilon, \tau_0]$, $\tau_0 < T$ розв'язок цієї задачі. Домножимо (5) на $c_{k,s}^N(t)$, підсумуємо за s і k , проінтегруємо за t по проміжку $[\varepsilon, \tau]$. Матимемо рівність (7). Для наближень u^N , $N \geq 1$ отримаємо оцінку

$$\|u^N; \tilde{H}_{0,\varphi}(Q_{\varepsilon,\tau_0})\|^2 \leq M_5 [\varphi(\tau)]^{\nu_0+2\delta_0} \int_{Q_T} \frac{1}{[\varphi(t)]^{\nu_0+2\delta_0}} \frac{|f|^2 + |f_y|^2}{\varphi'(t)} dx dy dt, \quad (21)$$

де стала M_5 не залежить від N . (Доведення аналогічне до знаходження формул (8), (10)). Врахувавши (1), знаходимо включення: $\varphi(t)u_t^N \in L^2(\varepsilon, T; H^{-1}(D))$. Тому $u \in C((0, T]; H^{-1}(D))$. Крім того, u задовольняє рівність (20). З одержаної оцінки випливає, що $\sqrt{\varphi(t)}u_t^N \rightarrow \sqrt{\varphi(t)}u_t$ – слабо в $L^\infty(0, T; L^2(D))$, $u_t^N \rightarrow u_t$ – слабо в $\tilde{H}_{0,\varphi}(Q_{\varepsilon,T})$. Доведемо, що виконується початкова умова: $\lim_{t \rightarrow 0} u(x, y, t) = 0$. Розглянемо послідовність функцій $g^N(t) = \int_{D_\tau} |u^N|^2 dx dy$ та доведемо її одностайну неперервність на проміжку $[0, \delta]$. Маємо

$$\int_{D_t} (u^N(x, y, t))^2 dx dy \leq \left(\int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{\varphi'(\tau)} \frac{1}{\varphi(\tau)} d\tau \right) \int_{D_t} \left(\int_0^t \varphi'(\tau) (u^N)^2 d\tau \right) dx dy \leq M_6 \max_{[0,T]} \frac{\varphi(\tau)}{\varphi'(\tau)}, \quad (22)$$

де M_6 – стала, яка не залежить від N . Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Оскільки $\frac{\varphi(\tau)}{\varphi'(\tau)}$ монотонно неспадна функція та $\frac{\varphi(0)}{\varphi'(0)} = 0$, то існує таке δ , що для всіх $\tau \in [0, \delta]$ права частина (22) є меншою за ε . Отже, $\{g^N : N \geq 1\}$ одностайно неперервна на $[0, \delta]$. Так само доводимо одностайну неперервність цієї послідовності на всьому проміжку $[0, T]$. Функція u^N належить до простору $C((0, T]; L^2(D_t))$ та одностайно неперервна на $[0, T]$, $u^N(x, y, 0) = 0$. Отож, $u^N \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови (A), (L), (Φ), крім того, $c_{0(1)}, d_{0(1)}, \lambda_{0(1)} \in L^\infty([0, T])$. Тоді задача (1), (2), (19) не може мати більше одного узагальненого розв'язку.*

Доведення. Доведення цієї теореми повторює доведення теореми 2.

2. *Нелінійне рівняння.* В області Q_T розглянемо мішану задачу

$$u_t - \lambda(x, y, t)u_y - \psi(t) \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x, y, t)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n c_i(x, y, t)u_{x_i} +$$

$$+ d(x, y, t)u + g(x, y, t)|u|^{p-2}u = f(x, y, t), \quad (23)$$

$$u(x, y_0, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T); \quad u|_{\Sigma_T} = 0, \quad (24)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y). \quad (25)$$

Щодо коефіцієнтів рівняння (23) припускатиемо виконання умов **(A)**, **(L)** та

(Ψ): $\psi \in C([0, T])$, $\psi(t) > 0$, $t \in (0, T]$; $\psi(0) = 0$,

(G): $g \in L^\infty(Q_T)$, $g(x, y, t) \geq g_0 > 0$ майже для всіх $(x, y, t) \in Q_T$, де g_0 – стала,

(P): $1 < p < +\infty$.

Будемо розглядати простір $H_{0,\psi}(Q_T)$ як замикання множини нескінченно диференційовних функцій в $\bar{Q}_T$, які дорівнюють нулю в околі Σ_T та при $y = y_0$, за нормою $\|u; H_{0,\psi}(Q_T)\|^2 = \int_{\bar{Q}_T} [|u|^2 + |u_y|^2 + \psi(t) \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2] dx dy dt$. Позначимо

$$c_{0(2)}(t) = \sup_{Q_t} \sum_{i=1}^n \frac{|c_i(x, y, \tau)|^2}{\psi(\tau)}, \quad \lambda_{1(2)} = \sup_{Q_T} |\lambda_y(x, y, \tau)|, \quad d_{0(2)} = \sup_{Q_T} \sum_{i=1}^n |d(x, y, \tau)|.$$

$$c_{1(2)}(t) = \sup_{Q_t} \sum_{i=1}^n \frac{|c_{iy}(x, y, \tau)|^2}{\psi(\tau)}, \quad d_{1(2)} = \sup_{Q_T} \sum_{i=1}^n |d_y(x, y, \tau)|,$$

$$\delta_i - \text{мале додатне число} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

Щодо правої частини рівняння (23) припускатиемо виконання умови

$$\textbf{(F1):} \quad \int_{Q_T} [|f|^2 + |f_y|^2] dx dy dt < +\infty, \quad f(x, y_0, t) = 0 \text{ для майже всіх } (x, t) \in \Omega \times (0, T).$$

Означення 5. Узагальненим розв'язком задачі (23)-(25) назвемо функцію $u \in H_{0,\psi}(Q_T) \cap L^p(Q_T)$, $u \in C([0, T]; L^2(D))$, яка задовольняє рівність

$$\int_{D_T} uv dx dy - \int_{D_0} u_0 v dx dy + \int_{Q_T} [-uv_t + \lambda(x, y, t)u_y v + \psi(t) \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, y, t)u_{x_i} v_{x_j} +$$

$$+ \sum_{i=1}^n c_i(x, y, t)u_{x_i} v + d(x, y, t)uv + g(x, y, t)|u|^{p-2}uv - f(x, y, t)v] dx dy dt = 0 \quad (26)$$

для довільної такої функції v , що $v \in H_{0,\psi}(Q_T)$, $v_t \in L^2(Q_T)$.

Теорема 5. Нехай виконуються умови **(A)**, **(L)**, **(Ψ)**, **(G)**, **(F1)**, **(P)**, крім того, $c_{0(2)}, c_{1(2)} \in L^\infty([0, T])$, $d_{0(2)}, d_{1(2)}, \lambda_{1(2)}, \lambda_{2(2)}$ – скінченні числа, $u_0 \in H^1(D)$, $u_0|_{\partial\Omega \times (0, y_0)} = 0$, $u_0(\cdot, y_0) = 0$; якщо $p > 2$, то $g_{yy} \equiv 0$, $g_y|_{y=0} \geq 0$, якщо $1 < p < 2$, то $g_y \in L^{\frac{2p}{2-p}}(Q_T)$. Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (23)-(25).

Доведення. Нехай $\{\varphi^k\}_{k=1}^\infty$ – послідовність лінійно незалежних функцій, ортонормована в $L^2(\Omega)$, та їхня лінійна оболонка всюди щільна в $H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$. Нехай $\psi^s = \cos \frac{(2s-1)\pi}{2y_0} y$ ($s \geq 1$). Позначимо $\{\varphi^{k,s}\}_{k,s=1}^\infty = \{\varphi^k(x)\psi^s(y)\}_{k,s=1}^\infty$. Тоді $\varphi^{k,s} \in H^1(D)$, $\varphi^{k,s}|_{\partial\Omega} = 0$, $\varphi^{k,s}|_{y=y_0} = 0$. Розглянемо функції $u^N(x, y, t) = \sum_{k,s=1}^N c_{k,s}^N(t) \varphi^{k,s}(x, y)$, $N \in \{1, 2, \dots\}$, де $c_{k,s}^N$ є розв'язком задачі

$$\begin{aligned} \int_{D_\tau} L_1(u^N, \varphi^{k,s}) dx dy &\equiv \int_{D_\tau} [u_t^N \varphi^{k,s} - \lambda(x, y, t) u_y^N \varphi^{k,s} + \psi(t) \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, y, t) u_{x_i}^N \varphi_{x_j}^{k,s} + \\ &+ \sum_{i=1}^n c_i(x, y, t) u_{x_i}^N \varphi^{k,s} + d(x, y, t) u^N \varphi^{k,s} + g(x, y, t) |u^N|^{p-2} u^N \varphi^{k,s} - f(x, y, t) \varphi^{k,s}] dx dy, \end{aligned} \quad (27)$$

$$c_{k,s}^N(0) = 0, \quad \{k, s\} \subset \{1, \dots, N\}, \quad t \in [0, T]. \quad (28)$$

$$u_0^N(x, t) = \sum_{k,s=1}^n u_{0,k,s}^N \varphi^{k,s}(x, y), \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \|u_0^N - u_0\|_{H^1(D)} = 0.$$

За теоремою Каратеодорі [25, с. 54] існує абсолютно неперервний на $[0, T]$ розв'язок задачі (27) - (28). Домножимо (27) на $c_{k,s}^N(t) e^{-\nu t}$, де стала $\nu = \sup_{[0, T]} \left(\lambda_1 + \frac{2c_{0(2)}(t)}{a_0} + 2d_{0(2)} \right)$, підсумуємо за s і k , проінтегруємо за t по проміжку $[0, \tau]$. Одержимо

$$\int_{Q_\tau} L_1(u^N, u^N) e^{-\nu t} dx dy dt = 0. \quad (29)$$

Врахувавши вибір ν , оцінку $\int_{Q_\tau} g(x, y, t) |u^N|^p e^{-\nu t} dx dy dt \geq g_0 \int_{Q_\tau} |u^N|^p e^{-\nu t} dx dy dt$, з (29) отримаємо

$$\begin{aligned} \int_{D_\tau} (u^N)^2 e^{-\nu \tau} dx dy + \int_0^\tau \int_\Omega \lambda(x, 0, t) (u^N)^2 e^{-\nu t} dx dt + \int_{Q_\tau} |u^N|^p e^{-\nu t} dx dy dt + \\ + \int_{Q_\tau} \psi(t) \sum_{i=1}^n (u_{x_i}^N)^2 e^{-\nu t} dx dy dt \leq M \left(\int_{Q_\tau} |f|^2 e^{-\nu t} dx dy dt + \int_{D_0} u_0^2 dx dy \right), \end{aligned} \quad (30)$$

де стала M не залежить від N , $\tau \in (0, T]$. Домножимо (27) на $c_{k,s}^N(t) \left(\frac{(2s-1)\pi}{2y_0} \right)^2$, підсумуємо за k, s , проінтегруємо за t від 0 до τ та замінімо значення $\sum_{k,s=1}^N c_{k,s}^N(t) \times \left(\frac{(2s-1)\pi}{2y_0} \right)^2 \varphi^{k,s}(x, y)$ на $-u_{yy}^N$. Матимемо

$$- \int_{Q_\tau} L_1(u^N, u_{yy}^N) e^{-\nu t} dx dy dt = 0. \quad (31)$$

Перетворимо й оцінимо кожний з доданків цієї рівності окремо

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{25,26} &\equiv - \int_{Q_\tau} (u_t^N - \lambda(x, y, t) u_y^N) u_{yy}^N e^{-\nu t} dx dy dt \geq \frac{1}{2} \int_{D_t} (u_y^N)^2 e^{-\nu t} dx dy \Big|_{t=0}^{t=\tau} + \\ &+ \left(\frac{\nu}{2} - \frac{\lambda_1(2)}{2} \right) \int_{Q_\tau} (u_y^N)^2 e^{-\nu t} dx dy dt + \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_\Omega \lambda(x, y_0, t) (u_y^N)^2 e^{-\nu t} dx dt, \\ \mathcal{I}_{27} &\equiv - \int_{Q_\tau} \psi(t) \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, y, t) u_{x_i}^N u_{x_j y}^N e^{-\nu t} dx dy dt \geq \\ &\geq (a_0 - \frac{a^1 \delta_6}{2}) \int_{Q_\tau} \psi(t) \sum_{i=1}^n (u_{x_i y}^N)^2 e^{-\nu t} dx dy dt - \frac{a^1}{2 \delta_6} \int_{Q_\tau} \psi(t) \sum_{i=1}^n (u_{x_i}^N)^2 e^{-\nu t} dx dy dt,\end{aligned}$$

тут $a^1 = \max_{i,j} \sup_{Q_T} |a_{ijy}|$.

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{28,29} &\equiv - \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n (c_i(x, y, t) u_{x_i}^N + d(x, y, t) u^N) u_{yy}^N e^{-\nu t} dx dy dt \leq \frac{1}{2} \int_{Q_\tau} \left[\frac{c_1(t)}{\delta_6} \sum_{i=1}^n \psi(t) (u_{x_i}^N)^2 + \right. \\ &\left. + (\delta_6 + \delta_7 + \frac{d_1 \delta_6}{2} + d_0) (u_y^N)^2 + \frac{c_0(t)}{\delta_7} \sum_{i=1}^n \psi(t) (u_{x_i y}^N)^2 + \frac{d_1}{2 \delta_6} (u^N)^2 \right] e^{-\nu t} dx dy dt.\end{aligned}$$

$$\mathcal{I}_{30} \equiv - \int_{Q_\tau} g(x, y, t) |u^N|^{p-2} u^N u_{yy}^N e^{-\nu t} dx dy dt \geq g_0(p-1) \int_{Q_\tau} |u^N|^{p-2} (u_y^N)^2 e^{-\nu t} dx dy dt - I,$$

де $I \equiv 0$, якщо $p > 2$ та $I \equiv \int_{Q_\tau} ((g_y(x, y, t))^{\frac{2p}{2-p}} + \frac{1}{\delta_8^{\frac{p}{2}}}) |u^N|^p + \delta_8 (u_y^N)^2 e^{-\nu t} dx dy dt$, якщо $1 < p < 2$. Далі

$$\mathcal{I}_{31} \equiv \int_{Q_\tau} f(x, y, t) u_{yy}^N e^{-\nu t} dx dy dt \geq - \frac{1}{2} \int_{Q_\tau} \left(\delta_6 |u_y^N|^2 + \frac{|f_y(x, y, t)|^2}{\delta_6} \right) e^{-\nu t} dx dy dt.$$

На підставі оцінок інтегралів $\mathcal{I}_{24} - \mathcal{I}_{31}$ та вибору ν з (31) отримаємо нерівність

$$\begin{aligned}\int_{D_\tau} (u_y^N)^2 e^{-\nu \tau} dx dy + \int_0^\tau \int_\Omega \lambda(x, y_0, t) (u_y^N)^2 e^{-\nu t} dx dt + \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n \psi(t) (u_{x_i y}^N)^2 e^{-\nu t} dx dy dt \leq \\ \leq M_7 \int_{Q_\tau} (|f|^2 + |f_y|^2) e^{-\nu t} dx dy dt + \int_{D_0} (u_{0y}^N)^2 dx dy.\end{aligned}\quad (32)$$

Отже, з оцінок (30), (32) випливають оцінки

$$\|u^N; H_{0,\psi}(Q_T) \cap L^p(Q_{0,T})\|^2 \leq M_8, \quad \int_{D_\tau} (u^N)^2 dx dy + \int_0^\tau \int_\Omega \lambda(x, 0, \tau) (u^N)^2 dx dt \leq M_8, \quad (33)$$

де стала M_8 не залежить від N . Оскільки

$$\int_{Q_\tau} (|u^N|^{p-2} u^N)^{p'} dx dy dt < C, \quad (34)$$

де C – стала, то з оцінок (33), (34) випливають такі збіжності підпоследовності послідовності $\{u^N\}_{N=1}^\infty$ при $N \rightarrow \infty$, (за якою збережемо те саме позначення)

$$\begin{aligned} u^N &\rightarrow u \text{ слабо в } H_{0,\psi}(Q_\tau) \cap L^p(Q_\tau), \quad |u^N|^{p-2} u^N \rightarrow \chi \text{ слабо в } L^{p'}(Q_\tau), \\ u^N &\rightarrow u * - \text{ слабо в } L^\infty(Q_\tau), \quad u^N(x, y, T) \rightarrow \sigma_1 * - \text{ слабо в } L^\infty(D). \end{aligned} \quad (35)$$

Зауважимо, що $u \in L^2((0, T); H_{0,\psi}(D)) \cap L^p(Q_T)$, $u_t \in L^2((0, T); (H_{0,\psi}(D))^* + L^{p'}(D))$. Тоді $u \in C([0, T]; L^2(Q_T))$, в першому доданку рівності (29) можна застосувати формулу інтегрування частинами та $\sigma_1 = u(x, y, T)$.

Покажемо, що u буде розв'язком задачі (23)-(25). Із збіжностей (35) і рівності (28) отримуємо

$$\begin{aligned} \int_{D_T} uv dx dy - \int_{D_0} u_0 v dx dy + \int_{Q_T} \left[-uv_t + \lambda(x, y, t) u_y v + \psi(t) \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, y, t) u_{x_i} v_{x_j} + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^n c_i(x, y, t) u_{x_i} v + d(x, y, t) uv + g(x, y, t) \chi - f(x, y, t) v \right] dx dy dt = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

З рівняння (23) одержимо, що $u_t \in L^2(Q_T) + L^{p'}(Q_T) + L^2((0, T) \times (0, y_0); H^{-1}(\Omega))$, тобто u_t можна подати у вигляді суми $w_1 + w_2 + w_3$, де $w_1 \in L^2(Q_T)$, $w_2 \in L^{p'}(Q_T)$, $w_3 \in L^2((0, T) \times (0, y_0); H^{-1}(\Omega))$. Тоді $u_t \in L^r((0, T) \times (0, y_0); H^{-1}(\Omega))$, де $r = \min\{2, p'\}$. Доведемо, що $\chi = |u|^{p-2} u$.

$$\begin{aligned} \int_{Q_\tau} (g(x, y, t) |u^N|^{p-2} u^N - g(x, y, t) |\varphi|^{p-2} \varphi) (u^N - \varphi) e^{-\nu t} dx dy dt = \\ = -\frac{1}{2} \int_{D_t} (u^N)^2 e^{-\nu \tau} dx dy \Big|_{t=0}^{t=\tau} - \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_{\Omega_\tau} \lambda(x, 0, t) (u^N)^2 e^{-\nu t} dx dt + \int_{Q_\tau} \left[-\frac{\nu}{2} (u^N)^2 - \right. \\ \left. - \frac{\lambda_y(x, y, t)}{2} (u^N)^2 - \psi(t) \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, y, t) (u_{x_i}^N)^2 + \sum_{i=1}^n \frac{c_{ix_i}(x, y, t)}{2} (u^N)^2 - d(x, y, t) (u^N)^2 + \right. \\ \left. + f(x, y, t) u^N - [g(x, y, t) |u^N|^{p-2} u^N \varphi + g(x, y, t) |\varphi|^{p-2} \varphi (u^N - \varphi)] \right] e^{-\nu t} dx dy dt. \end{aligned}$$

Врахувавши отримані збіжності (35), нерівність $\liminf_{N \rightarrow \infty} \|u^N; X\| \geq \|u; X\|$ (де X – банахів простір), знаходимо $0 \leq \int_{Q_\tau} [g(x, y, t) \chi (u - \varphi) - g(x, y, t) |\varphi|^{p-2} \varphi (u - \varphi)] e^{-\nu t} dx dy dt$. Прийmemo $\varphi = u - \kappa w$, $\kappa > 0$, $w \in H_{0,\psi}(Q_T) \cap L^p(Q_T)$. Тоді з останньої нерівності отримаємо $\kappa \int_{Q_\tau} g(x, y, t) [\chi - |u - \kappa w|^{p-2} (u - \kappa w)] w e^{-\nu t} dx dy dt \leq 0$. Поділимо цю рівність на κ та спрямуємо його до 0. Оскільки w довільне, то $\chi = |u|^{p-2} u$. Тому функція u задовольняє рівність (27).

Лема 1. Нехай функція w є розв'язком задачі (23)-(25). Тоді для всіх $\tau \in (0, T]$ та довільного фіксованого числа α виконується нерівність

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_D |w(x, y, \tau)|^2 e^{-\alpha\tau} dx dy + \int_{Q_\tau} \left[-\lambda(x, y, t) w_{y_i} w + \psi(t) \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, y, t) w_{x_i} w_{x_j} + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^n c_i(x, y, t) w_{x_i} w + d(x, y, t) w^2 + g(x, y, t) |w|^p - \right. \\ \left. - f(x, y, t) w + \frac{\alpha}{2} w^2 \right] e^{-\alpha t} dx dy dt \geq \frac{1}{2} \int_D |u_0(x, y)|^2 dx dy. \end{aligned} \quad (37)$$

У випадку, коли $u_0 \equiv 0$, то у формулі (37) матимемо знак рівності.

Доведення. Доведення леми аналогічне до доведення леми 1 [18].

Теорема 6. Нехай виконуються умови (A), (L), (Ψ), (G), (P), крім того, $c_{0(2)}, d_{0(2)}, \lambda_{1(2)} \in L^\infty([0, T])$. Тоді задача (23)-(25) не може мати більше одного узагальненого розв'язку.

Доведення. Припустимо, що існує два узагальнені розв'язки u^1, u^2 задачі (23)-(25). Позначимо їхню різницю $u = u^1 - u^2$. Функція u згідно з лемою 1 задовольнятиме рівність

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{D_T} u^2 dx dy + \int_{Q_T} \left[-\frac{\nu}{2} u^2 + \lambda(x, y, t) u_y u + \psi(t) \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, y, t) u_{x_i} u_{x_j} + \sum_{i=1}^n c_i(x, y, t) u_{x_i} u + \right. \\ \left. + d(x, y, t) (u^2)^2 + g(x, y, t) (|u^1|^{p-2} u^1 - |u^2|^{p-2} u^2) u \right] e^{-\nu t} dx dy dt = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

Оскільки $\int_{Q_\tau} g(x, y, t) (|u^1|^{p-2} u^1 - |u^2|^{p-2} u^2) u e^{-\nu t} dx dy dt \geq 0$, то з (38) випливає оцінка $\int_{D_\tau} (u^2) e^{-\nu\tau} dx dy + \int_0^\tau \int_\Omega \lambda(x, 0, t) (u^2) e^{-\nu t} dx dt + \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n \psi(t) (u_{x_i})^2 e^{-\nu t} dx dy dt \leq 0$. Звідси знаходимо, що $u = 0$, тобто $u^1 = u^2$.

Дослідження частково підтримані ґрантом НАН України для молодих вчених (номер держреєстрації 0107U007278) та ґрантом Президента України для підтримки наукових досліджень молодих учених (номер держреєстрації 0108U009507).

1. Калашников А.С. Задача без начальных условий в классах растущих функций для некоторых линейных вырождающихся параболических систем второго порядка / Калашников А.С. // Вестник МГУ. Сер. математика, механика. – 1971. – №3. – С. 42-48.
2. Калашников А.С. Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка / Калашников А.С. // Успехи мат. наук. – 1987. – Т.42, №2. – С.135-176.
3. Богатова В.П. Разрешимость начально - краевых задач для параболических уравнений высокого порядка с вырождением по пространственной переменной / Богатова В.П., Глушко В.П. // Докл. АН СССР. – 1986. – Т. 291, № 3. – С. 531-534.

4. Жемухов Х.К. Краевые задачи со смещением для одного вырождающегося гиперболического уравнения четвертого порядка / Жемухов Х.К. // Укр. мат. журн. – 1989. – Т. 41, №1. – С.89-93.
5. Лавренюк С.П. Задачі для еволюційних систем з виродженням, які містять другу похідну за часом: дис. ... докт. фіз.-мат. наук. / Лавренюк С. П. – Львів, 1995. – 288 с.
6. Лавренюк С.П. Змішана задача для однієї слабо виродженої системи / Лавренюк С.П. // Доп. АН України. Матем., природозн., техн. науки. – 1993. – №5. – С. 18-20.
7. Лавренюк С.П. Про єдиність розв'язку деяких еволюційних систем з виродженням / Лавренюк С.П. // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 1998. – Вип. 51. – С. 20-25.
8. Лавренюк С.П. Решение почти всюду смешанной задачи для одной вырождающейся линейной эволюционной системы / Лавренюк С.П. // Сиб. мат. журн. – 2001. – Т. 42, №1. – С. 76-87.
9. Лавренюк С.П. Смешанная задача для сильно вырождающейся эволюционной системы // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30, №8. – С. 1405-1411.
10. Лавренюк С.П. Внутрішня гладкість розв'язку мішаної задачі для еволюційної системи з виродженням Лавренюк С.П., Процак Н.П. // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". Серія прикладна матем. – 2000. – №411. – С. 221-228.
11. Майоров И.В. Некоторые задачи для одной вырождающейся гиперболической системы / Майоров И.В. // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13, №2. – С. 369-372.
12. Мединський І.П. Задача Коші для квазілінійних параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині Мединський І.П. // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Математика. – 2001. – Вип. 111. – С. 90-95.
13. Мединський І.П. Про коректну розв'язність параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині / Мединський І.П., Івасишен С.Д. // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Математика. – Вип. 76. – 2000. – С. 71-76.
14. Процак Н. Існування розв'язку однієї еволюційної системи з виродженням / Процак Н. // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 1999. – Вип. 54. – С. 159-170.
15. Івасишен С.Д. 2^й параболіческие уравнения с вырождением по части переменных / Івасишен С.Д., Эйдельман С.Д. // Докл. РАН. – 1998. – Т. 360, №3. – С. 303-305.
16. Амиров Ш. Смешанная задача для ультрапараболического уравнения в ограниченной области / Амиров Ш. // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. – Новосиб., 1984. – С. 173-179.
17. Ильин А.М. Об одном классе ультрапараболических уравнений / Ильин А. М. // Докл. АН СССР. – 1964. – Т. 159, №6. – С. 1214-1217.
18. Лавренюк С.П. Мішана задача для нелінійного ультрапараболічного рівняння, яке узагальнює рівняння дифузії з інерцією / Лавренюк С.П., Процак Н.П. // Укр. мат. журн. – 2006. – Т. 58, №9. – С. 1192-1210.
19. Орлова С.А. О первой краевой задаче для прямо и обратно ультрапараболического уравнения / Орлова С.А. // Сиб. мат. журн. – 1990. – Т. 31, №6. – С. 211-215.
20. Паскалев Г.П. Об исследовании одной краевой задачи для ультрапараболического уравнения с постоянными коэффициентами вариационным методом / Паскалев Г.П. // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28, №9. – С. 1640-1642.
21. Пятков С.Г. Разрешимость краевых задач для одного ультрапараболического уравнения / Пятков С.Г. // Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа. – Новосиб., 1990. – С. 182 - 197.
22. Райчинов И. Граничні задачі от Нойман-Дирихлетов тип за ультрапараболічни уравнения с две "времена" / Райчинов И. // Научн. тр. Висш. икон. ин-т София. – 1981. – №1. – С.265-301.

23. Улукназаров М.Ж. Решение одной краевой задачи для многомерного уравнения ультрапараболического типа / Улукназаров М.Ж. // Вопросы вычисл. и прикладн. матем. – 1986. – Вып 80. – С. 60-67.
24. Халмурадов Ч.Г. Об априорных оценках решений начально-краевой задачи для нелинейного вырождающегося ультрапараболического уравнения / Халмурадов Ч.Г. // Применения методов функц. анализа к неклас. уравн. мат. физики. – Новосиб., 1989. – С. 176-182.
25. Коддингтон Э.А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Коддингтон Э.А., Левинсон Н. – М.: Изд-во "Иностранная литература", 1958. – 474 с.
26. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Лионс Ж.-Л. – М.: Мир. – 1972. – 587 с.

MIXED PROBLEM FOR DEGENERATE ULTRAPARABOLIC EQUATION

Nataliya PROTSAKH^{1,2}

¹ *National Forestry Engineering University of Ukraine,
79057, L'viv, Generala Chuprynky str., 103*

² *Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
National Academy of Sciences of Ukraine,
79060, L'viv, Naukova Str., 3b*

The mixed problem for degenerate ultraparabolic equations is considered. Equations degenerate on the initial plane. Conditions of existence and uniqueness for weak solution of the mixed problem that depend on the type of degeneration are obtained.

Key words: ultraparabolic equation, weak degeneration, strong degeneration, mixed problem, weak solution.

Стаття надійшла до редколегії 21.03.2008

Прийнята до друку 22.10.2008

УДК 517.95

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З НЕВІДОМИМИ МОЛОДШИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ

Галина СНІТКО

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
79060, Львів, вул. Наукова, 36*

Визначено умови локального існування та єдиності класичного розв'язку оберненої задачі для параболічного рівняння з невідомими залежними від часу молодшими коефіцієнтами в області з вільною межею.

Ключові слова: обернена задача, функція Гріна, вільна межа, параболічне рівняння.

Задача, яку розглядаємо в цій праці, поєднує два типи задач: коефіцієнтну обернену задачу та задачу з вільною межею. Шуканими одночасно є залежні від часу молодші коефіцієнти в одновимірному параболічному рівнянні та функції, що задають межу області. За допомогою теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора знайдено умови локального існування класичного розв'язку задачі. Доведення єдиності ґрунтується на властивостях розв'язків однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду. Зазначимо, що в [1] досліджено обернену задачу для параболічного рівняння з невідомим залежним від часу старшим коефіцієнтом в області з двома невідомими ділянками межі. Задачу визначення старшого коефіцієнта та коефіцієнта при першій похідній невідомої функції в параболічному рівнянні в області з відомою межею розглянуто в [2]. Умови коректної розв'язності оберненої задачі для параболічного рівняння з невідомими коефіцієнтами при старшій похідній та при невідомій функції отримано в [3].

В області $\Omega_T = \{(x, t) : h_1(t) < x < h_2(t), 0 < t < T\}$, де $x = h_1(t)$, $x = h_2(t)$ – невідомі функції, розглянемо обернену задачу визначення коефіцієнтів $b = b(t)$, $c = c(t)$ в параболічному рівнянні

$$u_t = a(x, t)u_{xx} + b(t)u_x + c(t)u + f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (1)$$

за початкової умови

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [h_1(0), h_2(0)], \quad (2)$$

крайових умов

$$u(h_1(t), t) = \mu_1(t), \quad u(h_2(t), t) = \mu_2(t), \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

та умов перевизначення

$$\begin{aligned} h_1'(t) &= u_x(h_1(t), t) + \mu_3(t), \quad h_2'(t) = -u_x(h_2(t), t) + \mu_4(t), \\ \int_{h_1(t)}^{h_2(t)} u(x, t) dx &= \mu_5(t), \quad \int_{h_1(t)}^{h_2(t)} x u(x, t) dx = \mu_6(t), \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (4)$$

де $h_1(0) = h_{01}$ – задане число.

Заміною змінних $y = \frac{x - h_1(t)}{h_2(t) - h_1(t)}$, $t = t$ зводимо задачу (1)-(4) до оберненої з невідомими $(h_1(t), h_3(t), b(t), c(t), v(y, t))$, де $v(y, t) = u(yh_3(t) + h_1(t), t)$, $h_3(t) = h_2(t) - h_1(t)$, в області з фіксованими межами $Q_T = \{(y, t) : 0 < y < 1, 0 < t < T\}$:

$$\begin{aligned} v_t &= \frac{a(yh_3(t) + h_1(t), t)}{h_3^2(t)} v_{yy} + \frac{b(t) + h_1'(t) + y h_3'(t)}{h_3(t)} v_y + c(t) v + \\ &\quad + f(yh_3(t) + h_1(t), t), \quad (y, t) \in Q_T, \end{aligned} \quad (5)$$

$$v(y, 0) = \varphi(yh_3(0) + h_{01}), \quad y \in [0, 1], \quad (6)$$

$$v(0, t) = \mu_1(t), \quad v(1, t) = \mu_2(t), \quad t \in [0, T], \quad (7)$$

$$h_1'(t) = \frac{v_y(0, t)}{h_3(t)} + \mu_3(t), \quad h_3'(t) = -\frac{v_y(0, t) + v_y(1, t)}{h_3(t)} + \mu_4(t) - \mu_3(t), \quad t \in [0, T], \quad (8)$$

$$h_3(t) \int_0^1 v(y, t) dy = \mu_5(t), \quad h_1(t) \mu_5(t) + h_3^2(t) \int_0^1 y v(y, t) dy = \mu_6(t), \quad t \in [0, T]. \quad (9)$$

Умови існування єдиного розв'язку задачі (5)-(9) містяться в такій теоремі.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови*

- 1) $a \in C^{2,0}([h_{01}, \infty) \times [0, T])$, $f \in C^{1,0}([h_{01}, \infty) \times [0, T])$, $\varphi \in C^1[h_{01}, \infty)$, $\mu_i \in C^1[0, T]$, $i = 1, 2, 5, 6$, $\mu_j \in C[0, T]$, $j = 3, 4$;
- 2) $a(x, t) > 0$, $f(x, t) \geq 0$, $(x, t) \in [h_{01}, \infty) \times [0, T]$, $\varphi(x) \geq \varphi_0 > 0$, $x \in [h_{01}, \infty)$, $\mu_i(t) > 0$, $i = 1, 2, 5$, $\mu_2(t) - \mu_1(t) \geq 0$, $\mu_5(t) - H_1 \mu_2(t) > 0$, $t \in [0, T]$, де $H_1 = 2 \max_{[0, T]} \mu_5(t) (\min_{[h_{01}, h_{02}]} \varphi(x), \min_{[0, T]} \mu_1(t), \min_{[0, T]} \mu_2(t))^{-1}$,
 $h_{02} = h_2(0)$ є розв'язком рівняння $\int_{h_{01}}^{h_2(0)} \varphi(x) dx = \mu_5(0)$;

$$3) \quad \varphi(h_{01}) = \mu_1(0), \quad \varphi(h_{02}) = \mu_2(0),$$

то можна навести таке число $T_0 : 0 < T_0 \leq T$, яке визначається вихідними даними, що існує єдиний розв'язок $(h_1, h_3, b, c, v) \in (C^1[0, T_0])^2 \times (C[0, T_0])^2 \times C^{2,1}(Q_{T_0}) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_{T_0})$, $h_3(t) > 0$, $t \in [0, T]$, задачі (5)-(9).

Доведення. З умов (2), (4) і припущень теореми випливає існування єдиного значення $h_2(0) = h_{02}$, яке задовольняє рівняння $\int_{h_{01}}^{h_2(0)} \varphi(x) dx = \mu_5(0)$. Позначимо $h_{03} = h_{02} - h_{01}$. Доведення існування розв'язку задачі (5)-(9) ґрунтується на використанні теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Зведемо задачу (5)-(9) до системи рівнянь. Тимчасово припустивши, що функції $h_1(t)$, $h_3(t)$, $b(t)$, $c(t)$ відомі, пряму задачу (5)-(7) зводимо до рівняння

$$v(y, t) = v_0(y, t) + \int_0^t \int_0^1 G_1(y, t, \eta, \tau) \left(\frac{b(\tau) + h_1'(\tau) + \eta h_3'(\tau)}{h_3(\tau)} v_\eta(\eta, \tau) + \right. \\ \left. + c(\tau) v(\eta, \tau) \right) d\eta d\tau, \quad (y, t) \in \overline{Q}_T, \quad (10)$$

де $G_1(y, t, \eta, \tau)$ – функція Гріна першої крайової задачі для рівняння

$$v_t = \frac{a(yh_3(t) + h_1(t), t)}{h_3^2(t)} v_{yy},$$

а $v_0(y, t)$ має вигляд [4]

$$v_0(y, t) = \int_0^1 G_1(y, t, \eta, 0) \varphi(\eta h_{03} + h_{01}) d\eta - \int_0^t G_{1\eta}(y, t, 1, \tau) \frac{a(h_3(\tau) + h_1(\tau), \tau)}{h_3^2(\tau)} \mu_2(\tau) d\tau + \\ + \int_0^t G_{1\eta}(y, t, 0, \tau) \frac{a(h_1(\tau), \tau)}{h_3^2(\tau)} \mu_1(\tau) d\tau + \int_0^t \int_0^1 G_1(y, t, \eta, \tau) f(\eta h_3(\tau) + h_1(\tau), \tau) d\eta d\tau.$$

Введемо позначення $w(y, t) = v_y(y, t)$. З умов (8) матимемо

$$h_1'(t) = \frac{w(0, t)}{h_3(t)} + \mu_3(t), \quad h_3'(t) = -\frac{w(0, t) + w(1, t)}{h_3(t)} + \mu_4(t) - \mu_3(t). \quad (11)$$

Враховуючи (11), перепишемо (10) у вигляді

$$v(y, t) = v_0(y, t) + \int_0^t \int_0^1 G_1(y, t, \eta, \tau) \left[\left(\frac{b(\tau) + \eta \mu_4(\tau) + (1 - \eta) \mu_3(\tau)}{h_3(\tau)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\eta w(1, \tau) + (\eta - 1) w(0, \tau)}{h_3^2(\tau)} \right) w(\eta, \tau) + c(\tau) v(\eta, \tau) \right] d\eta d\tau, \quad (y, t) \in \overline{Q}_T. \quad (12)$$

З умов (9) отримаємо

$$h_3(t) = \frac{\mu_5(t)}{\int_0^1 v(y, t) dy}, \quad t \in [0, T], \quad (13)$$

$$h_1(t) = \frac{\mu_6(t)}{\mu_5(t)} - \frac{h_3^2(t)}{\mu_5(t)} \int_0^1 y v(y, t) dy, \quad t \in [0, T]. \quad (14)$$

Продиференціювавши умови (9) за t і використавши (5), (11), одержимо

$$\begin{aligned} b(t) = & \left[\int_0^1 ((\mu_6(t) - (yh_3(t) + h_1(t))\mu_5(t))a_x(yh_3(t) + h_1(t), t) - \mu_5(t)a(yh_3(t) + h_1(t), t)) \times \right. \\ & \times w(y, t) dy + \frac{(\mu_2(t) - a(h_3(t) + h_1(t), t))(\mu_6(t) - (h_3(t) + h_1(t))\mu_5(t))}{h_3(t)} w(1, t) + \\ & + \frac{(\mu_1(t) + a(h_1(t), t))(\mu_6(t) - h_1(t)\mu_5(t))}{h_3(t)} w(0, t) - h_3(t) \int_0^1 (\mu_6(t) - (yh_3(t) + h_1(t)) \times \\ & \times \mu_5(t)) f(yh_3(t) + h_1(t), t) dy + (\mu_6(t) - h_1(t)\mu_5(t))(\mu_1(t)\mu_3(t) - \mu_2(t)\mu_4(t)) + \\ & \left. + h_3(t)\mu_2(t)\mu_4(t)\mu_5(t) + \mu_5'(t)\mu_6(t) - \mu_5(t)\mu_6'(t) \right] (\mu_5(t)(\mu_5(t) - h_3(t)\mu_2(t)) + \\ & + (\mu_2(t) - \mu_1(t))(\mu_6(t) - h_1(t)\mu_5(t)))^{-1}, \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} c(t) = & \left[\int_0^1 (((y-1)h_3(t)\mu_2(t) - yh_3(t)\mu_1(t) + \mu_5(t))a_x(yh_3(t) + h_1(t), t) + (\mu_2(t) - \mu_1(t)) \times \right. \\ & \times a(yh_3(t) + h_1(t), t)) w(y, t) dy + \frac{(\mu_2(t) - a(h_3(t) + h_1(t), t))(\mu_5(t) - h_3(t)\mu_1(t))}{h_3(t)} w(1, t) + \\ & + \frac{(\mu_1(t) + a(h_1(t), t))(\mu_5(t) - h_3(t)\mu_2(t))}{h_3(t)} w(0, t) - h_3(t) \int_0^1 ((y-1)h_3(t)\mu_2(t) + \mu_5(t) - \\ & - yh_3(t)\mu_1(t)) f(yh_3(t) + h_1(t), t) dy + (\mu_6'(t) - h_1(t)\mu_5'(t))(\mu_2(t) - \mu_1(t)) - (h_3(t)\mu_2(t) - \\ & - \mu_5(t))(\mu_1(t)\mu_3(t) - \mu_2(t)\mu_4(t) + \mu_5'(t)) \left. \right] (\mu_5(t)(\mu_5(t) - h_3(t)\mu_2(t)) + (\mu_2(t) - \mu_1(t)) \times \\ & \times (\mu_6(t) - h_1(t)\mu_5(t)))^{-1}, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (16)$$

Випишемо задачу для знаходження $w(y, t)$. Для цього продиференціюємо рівняння (5) і умову (6) за y та використаємо (7)

$$\begin{aligned} w_t = & \frac{a(yh_3(t) + h_1(t), t)}{h_3^2(t)} w_{yy} + \frac{a_x(yh_3(t) + h_1(t), t) + b(t) + h_1'(t) + y h_3'(t)}{h_3(t)} w_y + \\ & + \left(\frac{h_3'(t)}{h_3(t)} + c(t) \right) w + h_3(t) f_x(yh_3(t) + h_1(t), t), \quad (y, t) \in Q_T, \\ & w(y, 0) = h_{03} \varphi'(yh_{03} + h_{01}), \quad y \in [0, 1], \end{aligned} \quad (17)$$

$$w_y(0, t) = \frac{h_3^2(t)}{a(h_1(t), t)} \left[\mu_1'(t) - f(h_1(t), t) - c(t)\mu_1(t) - \frac{b(t) + h_1'(t)}{h_3(t)} w(0, t) \right], \quad t \in [0, T],$$

$$w_y(1, t) = \frac{h_3^2(t)}{a(h_3(t) + h_1(t), t)} \left[\mu_2'(t) - f(h_3(t) + h_1(t), t) - c(t)\mu_2(t) - \right. \\ \left. - \frac{b(t) + h_1'(t) + h_3'(t)}{h_3(t)} w(1, t) \right], \quad t \in [0, T].$$

Задача (17) у випадку довільних неперервних на $[0, T]$ функцій $h_1(t)$, $h_3(t)$, $h_1'(t)$, $h_3'(t)$, $b(t)$, $c(t)$ еквівалентна рівнянню

$$w(y, t) = h_{03} \int_0^1 G_2(y, t, \eta, 0) \varphi'(\eta h_{03} + h_{01}) d\eta - \\ - \int_0^t G_2(y, t, 0, \tau) \left[\mu_1'(\tau) - f(h_1(\tau), \tau) - c(\tau)\mu_1(\tau) - \frac{b(\tau) + h_1'(\tau)}{h_3(\tau)} w(0, \tau) \right] d\tau + \\ + \int_0^t G_2(y, t, 1, \tau) \left[\mu_2'(\tau) - f(h_3(\tau) + h_1(\tau), \tau) - c(\tau)\mu_2(\tau) - \frac{b(\tau) + h_1'(\tau) + h_3'(\tau)}{h_3(\tau)} w(1, \tau) \right] d\tau + \\ + \int_0^t \int_0^1 G_2(y, t, \eta, \tau) \left[f_x(\eta h_3(\tau) + h_1(\tau), \tau) h_3(\tau) + \left(\frac{h_3'(\tau)}{h_3(\tau)} + c(\tau) \right) w(\eta, \tau) + \right. \\ \left. + \frac{b(\tau) + h_1'(\tau) + \eta h_3'(\tau)}{h_3(\tau)} w_\eta(\eta, \tau) \right] d\eta d\tau, \quad (18)$$

де $G_2(y, t, \eta, \tau)$ – функція Гріна другої крайової задачі для рівняння

$$w_t = \frac{a(yh_3(t) + h_1(t), t)}{h_3^2(t)} w_{yy} + \frac{a_x(yh_3(t) + h_1(t), t)}{h_3(t)} w_y.$$

Провівши інтегрування частинами в останньому інтегралі (18) та використавши (11), подамо (18) у вигляді

$$w(y, t) = w_0(y, t) + \int_0^t \int_0^1 \left[G_2(y, t, \eta, \tau) c(\tau) - G_{2\eta}(y, t, \eta, \tau) \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{b(\tau) + \eta \mu_4(\tau) + (1 - \eta) \mu_3(\tau)}{h_3(\tau)} - \frac{\eta w(1, \tau) + (\eta - 1) w(0, \tau)}{h_3^2(\tau)} \right) \right] w(\eta, \tau) d\eta d\tau, \quad (19)$$

$(y, t) \in \overline{Q}_T$, де $w_0(y, t)$ визначається формулою

$$w_0(y, t) = h_{03} \int_0^1 G_2(y, t, \eta, 0) \varphi'(\eta h_{03} + h_{01}) d\eta - \int_0^t G_2(y, t, 0, \tau) (\mu_1'(\tau) - f(h_1(\tau), \tau) -$$

$$\begin{aligned}
& -c(\tau)\mu_1(\tau))d\tau + \int_0^t G_2(y, t, 1, \tau)(\mu'_2(\tau) - f(h_3(\tau) + h_1(\tau), \tau) - c(\tau)\mu_2(\tau))d\tau + \\
& + \int_0^t \int_0^1 G_2(y, t, \eta, \tau)h_3(\tau)f_x(\eta h_3(\tau) + h_1(\tau), \tau)d\eta d\tau.
\end{aligned}$$

Отже, задачу (5)-(9) зведено до системи інтегральних рівнянь (12)-(16), (19) з невідомими $(v(y, t), h_3(t), h_1(t), b(t), c(t), w(y, t))$. Якщо $(h_1(t), h_3(t), b(t), c(t), v(y, t))$ є розв'язком задачі (5)-(9), то функції $(v(y, t), h_3(t), h_1(t), b(t), c(t), w(y, t))$ є неперервним розв'язком системи (12)-(16), (19).

Покажемо, що правильним є і обернене твердження. Нехай $(v(y, t), h_3(t), h_1(t), b(t), c(t), w(y, t))$ – неперервний розв'язок системи рівнянь (12)-(16), (19). На підставі (12) можемо зробити висновок, що функція $v(y, t) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$ задовольняє рівняння

$$\begin{aligned}
v_t = & \frac{a(yh_3(t) + h_1(t), t)}{h_3^2(t)} v_{yy} + c(t)v + \left(\frac{b(t) + y\mu_4(t) + (1-y)\mu_3(t)}{h_3(t)} - \right. \\
& \left. - \frac{yw(1, t) + (y-1)w(0, t)}{h_3^2(t)} \right) w(y, t) + f(yh_3(t) + h_1(t), t)
\end{aligned} \quad (20)$$

та умови (6), (7). Позначимо $z(y, t) = v_y(y, t)$. Випишемо задачу для знаходження $z(y, t)$. Згідно з умовами теореми можемо продиференціювати (19) за y . Продиференціювавши рівняння (20) і умову (6) за y та використавши (7), одержимо

$$\begin{aligned}
z_t = & \frac{a(yh_3(t) + h_1(t), t)}{h_3^2(t)} z_{yy} + \frac{a_x(yh_3(t) + h_1(t), t)}{h_3(t)} z_y + c(t)z + \left(\frac{\mu_4(t) - \mu_3(t)}{h_3(t)} - \right. \\
& \left. - \frac{w(1, t) + w(0, t)}{h_3^2(t)} \right) w(y, t) + \left(\frac{b(t) + y\mu_4(t) + (1-y)\mu_3(t)}{h_3(t)} - \right. \\
& \left. - \frac{yw(1, t) + (y-1)w(0, t)}{h_3^2(t)} \right) w_y(y, t) + h_3(t)f_x(yh_3(t) + h_1(t), t), \quad (y, t) \in Q_T, \\
z(y, 0) = & h_{03}\varphi'(yh_{03} + h_{01}), \quad y \in [0, 1], \\
z_y(0, t) = & \frac{h_3^2(t)}{a(h_1(t), t)} \left[\mu'_1(t) - c(t)\mu_1(t) - f(h_1(t), t) - \left(\frac{b(t) + \mu_3(t)}{h_3(t)} + \frac{w(0, t)}{h_3^2(t)} \right) w(0, t) \right], \\
z_y(1, t) = & \frac{h_3^2(t)}{a(h_3(t) + h_1(t), t)} \left[\mu'_2(t) - c(t)\mu_2(t) - f(h_3(t) + h_1(t), t) - \left(\frac{b(t) + \mu_4(t)}{h_3(t)} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{w(1, t)}{h_3^2(t)} \right) w(1, t) \right], \quad t \in [0, T].
\end{aligned} \quad (21)$$

За допомогою функції Гріна $G_2(y, t, \eta, \tau)$ задачу (21) зводимо до рівняння

$$z(y, t) = h_{03} \int_0^1 G_2(y, t, \eta, 0) \varphi'(\eta h_{03} + h_{01}) d\eta - \int_0^t G_2(y, t, 0, \tau) (\mu'_1(\tau) - c(\tau)\mu_1(\tau) -$$

$$\begin{aligned}
& -f(h_1(\tau), \tau) d\tau + \int_0^t G_2(y, t, 1, \tau) (\mu'_2(\tau) - c(\tau)\mu_2(\tau) - f(h_3(\tau) + h_1(\tau), \tau)) d\tau + \\
& + \int_0^t \int_0^1 G_2(y, t, \eta, \tau) (c(\tau)z(\eta, \tau) + h_3(\tau)f_x(\eta h_3(\tau) + h_1(\tau), \tau)) d\eta d\tau - \int_0^t \int_0^1 G_{2\eta}(y, t, \eta, \tau) \times \\
& \times \left(\frac{b(\tau) + \eta\mu_4(\tau) + (1-\eta)\mu_3(\tau)}{h_3(\tau)} - \frac{\eta w(1, \tau) + (\eta-1)w(0, \tau)}{h_3^2(\tau)} \right) w(\eta, \tau) d\eta d\tau.
\end{aligned}$$

Віднімаючи від отриманої рівності (19), одержимо однорідне інтегральне рівняння Вольтерра другого роду стосовно $z(y, t) - w(y, t)$, звідки робимо висновок, що $v_y(y, t) = w(y, t)$, і, отже, $v(y, t)$ задовольняє рівняння

$$\begin{aligned}
v_t = & \frac{a(yh_3(t) + h_1(t), t)}{h^2(t)} v_{yy} + \left(\frac{b(t) + y\mu_4(t) + (1-y)\mu_3(t)}{h_3(t)} - \right. \\
& \left. - \frac{yv_y(1, t) + (y-1)v_y(0, t)}{h_3^2(t)} \right) v_y + c(t)v + f(yh_3(t) + h_1(t), t). \quad (22)
\end{aligned}$$

Залишилось довести виконання умов (8), (9). Рівності (13), (14) збігаються з умовами (9). Подамо (15), (16) у вигляді

$$\begin{aligned}
b(t)(\mu_2(t) - \mu_1(t)) + c(t)\mu_5(t) = & \int_0^1 a_x(yh_3(t) + h_1(t), t)v_y(y, t)dy + \frac{a(h_1(t), t)}{h_3(t)}v_y(0, t) + \\
& + \frac{\mu_2(t) - a(h_3(t) + h_1(t), t)}{h_3(t)}v_y(1, t) - h_3(t) \int_0^1 f(yh_3(t) + h_1(t), t)dy + \mu'_5(t) + \\
& + \mu_1(t)\mu_3(t) - \mu_2(t)\mu_4(t), \quad (23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b(t)(h_3(t)\mu_2(t) - \mu_5(t)) + c(t)(\mu_6(t) - h_1(t)\mu_5(t)) = & \int_0^1 (yh_3(t)a_x(yh_3(t) + h_1(t), t) + \\
& + a(yh_3(t) + h_1(t), t))v_y(y, t)dy + (\mu_2(t) - a(h_3(t) + h_1(t), t))v_y(1, t) - \\
& - h_3^2(t) \int_0^1 yf(yh_3(t) + h_1(t), t)dy + \mu'_6(t) - h_1(t)\mu'_5(t) - h_3(t)\mu_2(t)\mu_4(t). \quad (24)
\end{aligned}$$

Продиференціюємо рівності (13), (14) за t та використаємо те, що функція $v(y, t)$ задовольняє рівняння (22). Від отриманих рівностей віднявши (23), (24), одержимо

$$\left(h'_3(t) + \frac{v_y(1, t) + v_y(0, t)}{h_3(t)} - \mu_4(t) + \mu_3(t) \right) \frac{\mu_5(t)}{h_3(t)} = 0,$$

$$\left(h_1'(t) - \frac{v_y(0,t)}{h_3(t)} - \mu_3(t)\right)\mu_5(t) = 0.$$

Звідси робимо висновок, що $(h_3, h_1) \in (C^1[0, T])^2$ і $v(y, t)$ задовольняє умови (8) та рівняння (5).

Отже, еквівалентність задачі (5)-(9) та системи рівнянь (12)-(16), (19) доведено.

Для оцінки знаменника в (15), (16) знайдемо оцінки функцій $v(y, t)$ та $h_3(t)$. Використовуючи принцип максимуму [5] для розв'язку рівняння

$$v_{0t} = \frac{a(yh_3(t) + h_1(t), t)}{h_3^2(t)}v_{0yy} + f(yh_3(t) + h_1(t), t),$$

що задовольняє умови (6), (7), одержимо

$$v_0(y, t) \geq \min \left\{ \min_{[h_{01}, h_{02}]} \varphi(x), \min_{[0, T]} \mu_1(t), \min_{[0, T]} \mu_2(t) \right\} \equiv M_1 > 0,$$

$$v_0(y, t) \leq \max \left\{ \max_{[h_{01}, h_{02}]} \varphi(x), \max_{[0, T]} \mu_1(t), \max_{[0, T]} \mu_2(t), \max_{[h_{01}, \infty) \times [0, T]} f(x, t) \right\} \equiv M_2, (y, t) \in \overline{Q}_T.$$

Згідно з умовами теореми з (12) можемо зробити висновок про існування такого числа $t_1 : 0 < t_1 \leq T$, що $v(y, t) \geq \frac{M_1}{2} \equiv M_3 > 0$, $y \in [0, 1]$, $t \in [0, t_1]$. Тоді з (13) отримаємо

$$h_3(t) \leq \frac{1}{M_3} \max_{[0, T]} \mu_5(t) \equiv H_1, \quad t \in [0, t_1]. \quad (25)$$

Подано знаменник в (15), (16) у вигляді

$$\begin{aligned} & \mu_5(t)(\mu_5(t) - h_3(t)\mu_2(t)) + (\mu_2(t) - \mu_1(t))(\mu_6(t) - h_1(t)\mu_5(t)) = \\ & = \mu_5(t)(\mu_5(t) - h_3(t)\mu_2(t)) + (\mu_2(t) - \mu_1(t))h_3^2(t) \int_0^1 yv(y, t)dy. \end{aligned}$$

Тоді $\mu_5(t)(\mu_5(t) - h_3(t)\mu_2(t)) + (\mu_2(t) - \mu_1(t))(\mu_6(t) - h_1(t)\mu_5(t)) \geq \mu_5(t)(\mu_5(t) - H_1\mu_2(t))$, $t \in [0, t_1]$.

Знайдемо оцінки розв'язків системи (12)-(16), (19). Враховуючи оцінку функції $v(y, t)$, з (14) знаходимо

$$|h_1(t)| \leq \frac{\mu_6(t)}{\mu_5(t)} + \frac{\mu_5(t)}{\int_0^1 v(y, t)dy} \leq H_2, \quad t \in [0, t_1]. \quad (26)$$

Позначимо $V(t) = \max_{y \in [0, 1]} |v(y, t)|$, $W(t) = \max_{y \in [0, 1]} |w(y, t)|$. З (13) матимемо

$$h_3(t) \geq \frac{1}{V(t)} \min_{[0, T]} \mu_5(t), \quad t \in [0, T]. \quad (27)$$

Оскільки для функції $v(y, t)$ виконується рівність $v(y, t) = \mu_1(t) + \int_0^y w(\xi, t)d\xi$, то звідси отримаємо

$$V(t) \leq C_1 + C_2W(t), \quad t \in [0, T]. \quad (28)$$

Згідно з оцінками (25) - (28) з (15), (16) отримаємо

$$|b(t)| \leq C_3 + C_4 W(t) + C_5 W^2(t), \quad |c(t)| \leq C_6 + C_7 W(t) + C_8 W^2(t), \quad t \in [0, t_1]. \quad (29)$$

Використовуючи оцінки функції Гріна [5] та (25), з (19) одержимо таку нерівність:

$$W(t) \leq C_9 + C_{10} \int_0^t \left(W(\tau) + \frac{1}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} \right) |c(\tau)| d\tau + C_{11} \int_0^t \left(\frac{|b(\tau)|}{h_3(\tau)} + \frac{W(\tau)}{h_3^2(\tau)} \right) \frac{W(\tau)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} d\tau, \quad t \in [0, t_1], \quad (30)$$

де $\theta(t) = \int_0^t \frac{d\sigma}{h_3^2(\sigma)}$. Враховуючи вигляд функції $\theta(t)$, оцінки (25), (27)-(29) та ввівши позначення $W_1(t) = W(t) + 1$, з (30) отримаємо

$$W_1(t) \leq C_{12} + C_{13} \int_0^t \frac{W_1^4(\tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau, \quad t \in [0, t_1]. \quad (31)$$

Піднесемо обидві частини нерівності до четвертого степеня та використаємо нерівність Гельдера $W_1^4(t) \leq C_{14} + C_{15} \int_0^t \frac{W_1^{16}(\tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau$. Замінивши t на σ , домножимо попередню нерівність на $\frac{1}{\sqrt{t - \sigma}}$ та проінтегруємо від 0 до t

$$\int_0^t \frac{W_1^4(\sigma)}{\sqrt{t - \sigma}} d\sigma \leq C_{16} + C_{15} \int_0^t \frac{d\sigma}{\sqrt{t - \sigma}} \int_0^\sigma \frac{W_1^{16}(\tau)}{\sqrt{\sigma - \tau}} d\tau.$$

Змінивши порядок інтегрування в другому доданку правої частини нерівності, одержимо

$$\int_0^t \frac{W_1^4(\sigma)}{\sqrt{t - \sigma}} d\sigma \leq C_{16} + C_{17} \int_0^t W_1^{16}(\tau) d\tau. \quad (32)$$

Підставивши (32) в (31), отримаємо

$$W_1(t) \leq C_{18} + C_{19} \int_0^t W_1^{16}(\tau) d\tau, \quad t \in [0, t_1].$$

Розв'язавши цю нерівність, матимемо $W(t) \leq M_4 < \infty$, $t \in [0, t_2]$, де t_2 , $0 < t_2 \leq t_1$, визначається сталими C_{18}, C_{19} . Враховуючи це в (29), одержимо

$$|b(t)| \leq C_3 + C_4 M_4 + C_5 M_4^2 \equiv B_1, \quad |c(t)| \leq C_6 + C_7 M_4 + C_8 M_4^2 \equiv B_2, \quad t \in [0, t_2].$$

Використовуючи (27), (28), з (12) матимемо

$$|v(y, t)| \leq M_2 + C_{20} \int_0^t (|c(\tau)| + (|b(\tau)| + 1)W(\tau) + (1 + W(\tau))W^2(\tau))(1 + W(\tau)).$$

Звідси отримаємо

$$|v(y, t)| \leq M_2 + C_{21}(B_2 + (B_1 + 1)M_4 + (1 + M_4)M_4^2)(1 + M_4) \equiv M_5, \quad t \in [0, t_2].$$

Тоді з (27) одержимо

$$h_3(t) \geq \frac{1}{M_5} \min_{[0, T]} \mu_5(t) \equiv H_3 > 0, \quad t \in [0, t_2].$$

Отже, апіорні оцінки розв'язків системи (12)-(16), (19) знайдено.

Подамо систему (12)-(16), (19) у вигляді операторного рівняння

$$\omega = P\omega,$$

де $\omega = (v(y, t), h_3(t), h_1(t), b(t), c(t), w(y, t))$, а оператор $P = (P_1, \dots, P_6)$ визначають правими частинами рівнянь (12)-(16), (19). Побудуємо множину N так, щоб оператор P переводив N в себе.

Візьмемо довільні (v, h_3, h_1, b, c, w) , для яких правильні вище знайдені оцінки. Використаємо (30) для оцінки правої частини (19)

$$|P_6 w| \leq C_9 + C_{22}t + C_{23}\sqrt{t}.$$

Вибираючи число $t_3, 0 < t_3 \leq T$, так, щоб виконувалась нерівність $C_9 + C_{22}t_3 + C_{23}\sqrt{t_3} \leq M_4$, отримаємо

$$|P_6 w| \leq M_4, \quad (y, t) \in [0, 1] \times [0, t_3].$$

Позначимо $N = \{(v, h_3, h_1, b, c, w) \in C(\overline{Q}_{T_0}) \times (C[0, T_0])^4 \times C(\overline{Q}_{T_0}) : M_3 \leq v(y, t) \leq M_5, H_3 \leq h_3(t) \leq H_1, |h_1(t)| \leq H_2, |b(t)| \leq B_1, |c(t)| \leq B_2, |w(y, t)| \leq M_4\}$, де $T_0 = \min\{t_2, t_3\}$. Очевидно, що множина N задовольняє умови теореми Шаудера, а оператор P переводить N в себе. Компактність операторів, що утворюють P , доведено в [6]. Тоді за теоремою Шаудера існує розв'язок $(v(y, t), h_3(t), h_1(t), b(t), c(t), w(y, t))$ системи рівнянь (12)-(16), (19) з класу $C(\overline{Q}_{T_0}) \times (C[0, T_0])^4 \times C(\overline{Q}_{T_0})$, а отже, і розв'язок $(h_1(t), h_3(t), b(t), c(t), v(y, t))$ з класу $(C^1[0, T_0])^2 \times (C[0, T_0])^2 \times C^{2,1}(Q_{T_0}) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_{T_0})$ задачі (5)-(9).

Доведемо єдиність розв'язку задачі (5)-(9). Нехай $(h_{1i}(t), h_{3i}(t), b_i(t), c_i(t), v_i(y, t))$, $i = 1, 2$, — два розв'язки задачі (5)-(9). Позначимо

$$\frac{b_i(t)}{h_{3i}(t)} = p_i(t), \quad \frac{h'_{1i}(t)}{h_{3i}(t)} = q_i(t), \quad \frac{h'_{3i}(t)}{h_{3i}(t)} = s_i(t), \quad i = 1, 2,$$

$$p(t) = p_1(t) - p_2(t), \quad q(t) = q_1(t) - q_2(t), \quad s(t) = s_1(t) - s_2(t),$$

$$c(t) = c_1(t) - c_2(t), \quad v(y, t) = v_1(y, t) - v_2(y, t).$$

Функції $p(t)$, $q(t)$, $s(t)$, $c(t)$, $v(y, t)$ задовольняють рівняння

$$\begin{aligned} v_t = & \frac{a(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t)}{h_{31}^2(t)} v_{yy} + (p_1(t) + q_1(t) + ys_1(t))v_y + c_1(t)v + \\ & + \left(\frac{a(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t)}{h_{31}^2(t)} - \frac{a(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t)}{h_{32}^2(t)} \right) v_{2yy} + (p(t) + q(t) + ys(t))v_{2y} + \\ & + c(t)v_2 + f(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t) - f(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t), \quad (y, t) \in Q_T, \end{aligned} \quad (33)$$

та умови

$$v(y, 0) = 0, \quad y \in [0, 1], \quad v(0, t) = v(1, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (34)$$

$$\begin{aligned} h'_{11}(t) - h'_{12}(t) &= \frac{v_y(0, t)}{h_{31}(t)} + \left(\frac{1}{h_{31}(t)} - \frac{1}{h_{32}(t)} \right) v_{2y}(0, t), \\ h'_{31}(t) - h'_{32}(t) &= -\frac{v_y(0, t) + v_y(1, t)}{h_{31}(t)} - \left(\frac{1}{h_{31}(t)} - \frac{1}{h_{32}(t)} \right) (v_{2y}(0, t) + v_{2y}(1, t)), \\ \int_0^1 v(y, t) dy &= \mu_5(t) \left(\frac{1}{h_{31}(t)} - \frac{1}{h_{32}(t)} \right), \\ \int_0^1 yv(y, t) dy &= (\mu_6(t) - h_{11}(t)\mu_5(t)) \left(\frac{1}{h_{31}^2(t)} - \frac{1}{h_{32}^2(t)} \right) - \frac{\mu_5(t)}{h_{32}(t)} (h_{11}(t) - h_{12}(t)). \end{aligned} \quad (35)$$

За допомогою функції Гріна $G_1^*(y, t, \eta, \tau)$ для рівняння

$$v_t = \frac{a(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t)}{h_{31}^2(t)} v_{yy} + (p_1(t) + q_1(t) + ys_1(t))v_y + c_1(t)v$$

з врахуванням умов (34) функцію $v(y, t)$ подамо в такому вигляді:

$$\begin{aligned} v(y, t) = & \int_0^t \int_0^1 G_1^*(y, t, \eta, \tau) \left[\left(\frac{a(\eta h_{31}(\tau) + h_{11}(\tau), \tau)}{h_{31}^2(\tau)} - \frac{a(\eta h_{32}(\tau) + h_{12}(\tau), \tau)}{h_{32}^2(\tau)} \right) \times \right. \\ & \times v_{2\eta\eta}(\eta, \tau) + (p(\tau) + q(\tau) + \eta s(\tau))v_{2\eta}(\eta, \tau) + c(\tau)v_2(\eta, \tau) + f(\eta h_{31}(\tau) + h_{11}(\tau), \tau) - \\ & \left. - f(\eta h_{32}(\tau) + h_{12}(\tau), \tau) \right] d\eta d\tau, \quad (y, t) \in \overline{Q}_T. \end{aligned} \quad (36)$$

Оскільки для $h'_{1i}(t)$, $h'_{3i}(t)$, $b_i(t)$, $c_i(t)$, $i = 1, 2$, справджуються рівності аналогічні (11), (15), (16), то звідси отримаємо

$$q(t) = \frac{v_y(0, t)}{h_{31}^2(t)} + \left(\frac{1}{h_{31}^2(t)} - \frac{1}{h_{32}^2(t)} \right) v_{2y}(0, t) + \mu_3(t) \left(\frac{1}{h_{31}(t)} - \frac{1}{h_{32}(t)} \right), \quad t \in [0, T], \quad (37)$$

$$s(t) = -\frac{v_y(0, t) + v_y(1, t)}{h_{31}^2(t)} - \left(\frac{1}{h_{31}^2(t)} - \frac{1}{h_{32}^2(t)} \right) (v_{2y}(0, t) + v_{2y}(1, t)) + \\ + (\mu_4(t) - \mu_3(t)) \left(\frac{1}{h_{31}(t)} - \frac{1}{h_{32}(t)} \right), \quad t \in [0, T], \quad (38)$$

$$p(t) = \int_0^1 ((\mu_6(t) - (yh_{31}(t) + h_{11}(t))\mu_5(t))a_x(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t) - a(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t) \times \\ \times \mu_5(t))v_{1y}(y, t)dy + \frac{(\mu_2(t) - a(h_{31}(t) + h_{11}(t), t))(\mu_6(t) - (h_{31}(t) + h_{11}(t))\mu_5(t))}{h_{31}(t)}v_{1y}(1, t) + \\ + \frac{(\mu_1(t) + a(h_{11}(t), t))(\mu_6(t) - h_{11}(t)\mu_5(t))}{h_{31}(t)}v_{1y}(0, t) + h_{31}(t) \int_0^1 ((yh_{31}(t) + h_{11}(t))\mu_5(t) - \\ - \mu_6(t))f(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t)dy + (\mu_6(t) - h_{11}(t)\mu_5(t))(\mu_1(t)\mu_3(t) - \mu_2(t)\mu_4(t)) + h_{31}(t) \times \\ \times \mu_2(t)\mu_4(t)\mu_5(t) + \mu_5'(t)\mu_6(t) - \mu_5(t)\mu_6'(t) \Big] (\mu_2(t)\mu_5(t)(h_{31}^2(t) - h_{32}^2(t)) + (h_{31}(t) - \\ - h_{32}(t))((h_{11}(t)\mu_5(t) - \mu_6(t))(\mu_2(t) - \mu_1(t)) - \mu_5^2(t)) + h_{32}(t)\mu_5(t)(\mu_2(t) - \mu_1(t)) \times \\ \times (h_{11}(t) - h_{12}(t))) (h_{31}(t)(\mu_5(t)(\mu_5(t) - h_{31}(t)\mu_2(t)) + (\mu_2(t) - \mu_1(t))(\mu_6(t) - h_{11}(t) \times \\ \times \mu_5(t))) (h_{32}(t)(\mu_5(t)(\mu_5(t) - h_{32}(t)\mu_2(t)) + (\mu_2(t) - \mu_1(t))(\mu_6(t) - h_{12}(t)\mu_5(t))))^{-1} + \\ + \int_0^1 ((\mu_6(t) - (yh_{31}(t) + h_{11}(t))\mu_5(t))a_x(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t) - \mu_5(t)a(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t)) \times \\ \times v_y(y, t)dy + \int_0^1 ((\mu_6(t) - (yh_{31}(t) + h_{11}(t))\mu_5(t))(a_x(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t) - a_x(yh_{32}(t) + \\ + h_{12}(t), t)) - (y(h_{31}(t) - h_{32}(t)) + h_{11}(t) - h_{12}(t))a_x(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t)\mu_5(t) - \mu_5(t) \times \\ \times (a(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t) - a(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t)))v_{2y}(y, t)dy - ((h_{31}(t) + h_{11}(t))\mu_5(t) - \\ - \mu_6(t))(\mu_2(t) - a(h_{31}(t) + h_{11}(t), t))\frac{v_y(1, t)}{h_{31}(t)} - \left((\mu_2(t) - a(h_{31}(t) + h_{11}(t), t))(h_{31}(t) + \\ + h_{11}(t))\mu_5(t) - \mu_6(t) \right) \left(\frac{1}{h_{31}(t)} - \frac{1}{h_{32}(t)} \right) + \frac{1}{h_{32}(t)} (\mu_5(t)(h_{31}(t) - h_{32}(t) + h_{11}(t) - \\ - h_{12}(t))(\mu_2(t) - a(h_{31}(t) + h_{11}(t), t)) - (a(h_{31}(t) + h_{11}(t), t) - a(h_{32}(t) + h_{12}(t), t)) \times \\ \times ((h_{32}(t) + h_{12}(t))\mu_5(t) - \mu_6(t))) \Big) v_{2y}(1, t) + (\mu_1(t) + a(h_{11}(t), t))(\mu_6(t) - h_{11}(t)\mu_5(t)) \times \\ \times \frac{v_y(0, t)}{h_{31}(t)} - \left((\mu_1(t) + a(h_{11}(t), t))(h_{11}(t)\mu_5(t) - \mu_6(t)) \left(\frac{1}{h_{31}(t)} - \frac{1}{h_{32}(t)} \right) + \frac{1}{h_{32}(t)} (\mu_5(t) \times \right. \\ \left. \times (\mu_1(t) + a(h_{11}(t), t))(h_{11}(t) - h_{12}(t)) + (h_{12}(t)\mu_5(t) - \mu_6(t))(a(h_{11}(t), t) - a(h_{12}(t), t))) \right) \Big) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times v_{2y}(0, t) + h_{31}(t) \int_0^1 ((yh_{31}(t) + h_{11}(t))\mu_5(t) - \mu_6(t)) \times (f(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t) - f(yh_{32}(t) + \\
& + h_{12}(t), t)) dy + \int_0^1 (y\mu_5(t)(h_{31}^2(t) - h_{32}^2(t)) + (h_{31}(t) - h_{32}(t))(h_{11}(t)\mu_5(t) - \mu_6(t)) + \mu_5(t) \times \\
& \times h_{32}(t)(h_{11}(t) - h_{12}(t))) f(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t) dy - (h_{11}(t) - h_{12}(t))\mu_5(t)(\mu_1(t)\mu_3(t) - \mu_2(t) \times \\
& \times \mu_4(t)) + (h_{31}(t) - h_{32}(t))\mu_2(t)\mu_4(t)\mu_5(t) \Big] \left[(\mu_5(t)(\mu_5(t) - h_{32}(t)\mu_2(t)) + (\mu_2(t) - \mu_1(t)) \times \right. \\
& \left. \times (\mu_6(t) - h_{12}(t)\mu_5(t)))h_{32}(t) \right]^{-1}, \quad t \in [0, T], \quad (39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c(t) = & \left[\int_0^1 ((y-1)h_{31}(t)\mu_2(t) - yh_{31}(t)\mu_1(t) + \mu_5(t))a_x(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t) + (\mu_2(t) - \right. \\
& - \mu_1(t))a(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t)v_{1y}(y, t)dy - (\mu_2(t) - a(h_{31}(t) + h_{11}(t), t))(h_{31}(t)\mu_1(t) - \\
& - \mu_5(t))\frac{v_{1y}(1, t)}{h_{31}(t)} + (\mu_1(t) + a(h_{11}(t), t))(\mu_1(t) - h_{31}(t)\mu_2(t))\frac{v_{1y}(0, t)}{h_{31}(t)} + h_{31}(t) \times \\
& \times \int_0^1 ((1-y)h_{31}(t)\mu_2(t) + yh_{31}(t)\mu_1(t) - \mu_5(t))f(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t)dy - (h_{11}(t)\mu_5'(t) - \\
& - \mu_6'(t))(\mu_2(t) - \mu_1(t)) + (\mu_5(t) - h_{31}(t)\mu_2(t))(\mu_1(t)\mu_3(t) - \mu_2(t)\mu_4(t) + \mu_5'(t)) \Big] (\mu_2(t) \times \\
& \times \mu_5(t)(h_{31}^2(t) - h_{32}^2(t)) + (h_{31}(t) - h_{32}(t))((h_{11}(t)\mu_5(t) - \mu_6(t))(\mu_2(t) - \mu_1(t)) - \mu_5^2(t)) + \\
& + h_{32}(t)\mu_5(t)(\mu_2(t) - \mu_1(t))(h_{11}(t) - h_{12}(t))) (h_{31}(t)(\mu_5(t)(\mu_5(t) - h_{31}(t)\mu_2(t)) + (\mu_2(t) - \\
& - \mu_1(t))(\mu_6(t) - h_{11}(t)\mu_5(t))) (h_{32}(t)(\mu_5(t)(\mu_5(t) - h_{32}(t)\mu_2(t)) + (\mu_2(t) - \mu_1(t))(\mu_6(t) - \\
& - h_{12}(t)\mu_5(t))))^{-1} + \left[\int_0^1 ((y-1)h_{31}(t)\mu_2(t) - yh_{31}(t)\mu_1(t) + \mu_5(t))a_x(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t) + \right. \\
& + (\mu_2(t) - \mu_1(t))a(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t)v_y(y, t)dy + \int_0^1 ((y-1)h_{31}(t)\mu_2(t) - yh_{31}(t)\mu_1(t) + \\
& + \mu_5(t))(a_x(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t) - a_x(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t)) - (y\mu_1(t) + (1-y)\mu_2(t))(h_{31}(t) - \\
& - h_{32}(t))a_x(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t) + (a(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t) - a(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t))(\mu_2(t) - \\
& - \mu_1(t)))v_{2y}(y, t)dy + (\mu_2(t) - a(h_{31}(t) + h_{11}(t), t))(\mu_5(t) - h_{31}(t)\mu_1(t))\frac{v_y(1, t)}{h_{31}(t)} - \left((\mu_2(t) - \right. \\
& - a(h_{31}(t) + h_{11}(t), t))(h_{31}(t)\mu_1(t) - \mu_5(t)) \left(\frac{1}{h_{31}(t)} - \frac{1}{h_{32}(t)} \right) + \frac{1}{h_{32}(t)} ((h_{31}(t) - h_{32}(t)) \times \\
& \times \mu_1(t)(\mu_2(t) - a(h_{31}(t) + h_{11}(t), t)) - (a(h_{31}(t) + h_{11}(t), t) - a(h_{32}(t) + h_{12}(t), t))(h_{32}(t) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \mu_1(t) - \mu_5(t))) \Big) v_{2y}(1, t) + (\mu_1(t) + a(h_{11}(t), t))(\mu_1(t) - h_{31}(t)\mu_2(t)) \frac{v_y(0, t)}{h_{31}(t)} - \Big((\mu_1(t) + \\
& + a(h_{11}(t), t))(h_{31}(t)\mu_2(t) - \mu_1(t)) \Big(\frac{1}{h_{31}(t)} - \frac{1}{h_{32}(t)} \Big) + \frac{1}{h_{32}(t)} (\mu_2(t)(\mu_1(t) + a(h_{11}(t), t)) \times \\
& \times (h_{31}(t) - h_{32}(t)) + (h_{32}(t)\mu_2(t) - \mu_1(t))(a(h_{11}(t), t) - a(h_{12}(t), t))) \Big) v_{2y}(0, t) + h_{31}(t) \times \\
& \times \int_0^1 ((1-y)h_{31}(t)\mu_2(t) + yh_{31}(t)\mu_1(t) - \mu_5(t))(f(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t) - f(yh_{32}(t) + \\
& + h_{12}(t), t))dy + \int_0^1 ((1-y)\mu_2(t) + y\mu_1(t))(h_{31}(t) - h_{32}(t))f(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t)dy - \\
& - (h_{11}(t) - h_{12}(t))\mu_5'(t)(\mu_2(t) - \mu_1(t)) - (h_{31}(t) - h_{32}(t))\mu_2(t)(\mu_1(t)\mu_3(t) - \\
& - \mu_2(t)\mu_4(t) - \mu_5'(t))) \Big] \Big((\mu_5(t)(\mu_5(t) - h_{32}(t)\mu_2(t)) + \\
& + (\mu_2(t) - \mu_1(t))(\mu_6(t) - h_{12}(t)\mu_5(t)))h_{32}(t) \Big)^{-1}. \tag{40}
\end{aligned}$$

Зауважимо, що

$$\mu_5(t)(\mu_5(t) - h_{3i}(t)\mu_2(t)) + (\mu_6(t) - h_{1i}(t)\mu_5(t))(\mu_2(t) - \mu_1(t)) > 0, \quad t \in [0, t_1], \quad i = 1, 2.$$

Припущення теореми забезпечують правильність рівності

$$\begin{aligned}
& f(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t) - f(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t) = (y(h_{31}(t) - h_{32}(t)) + h_{11}(t) - h_{12}(t)) \times \\
& \times \int_0^1 f_x(yh_{32}(t) + h_{12}(t) + \sigma(y(h_{31}(t) - h_{32}(t)) + h_{11}(t) - h_{12}(t)), t) d\sigma, \tag{41}
\end{aligned}$$

що також справджується для $a(yh_{3i}(t) + h_{1i}(t), t)$ та $a_x(yh_{3i}(t) + h_{1i}(t), t)$, $i = 1, 2$.

Виражаючи $h_{3i}(t)$ через $s_i(t)$

$$h_{3i}(t) = h_{3i}(0) \exp \left(\int_0^t s_i(\tau) d\tau \right), \quad i = 1, 2,$$

де $h_{31}(0) = h_{32}(0) = h_{03}$, та враховуючи, що $e^x - e^y = (x - y) \int_0^1 e^{y+\tau(x-y)} d\tau$, одержимо

$$\frac{1}{h_{31}(t)} - \frac{1}{h_{32}(t)} = -\frac{1}{h_{03}} \int_0^t s(\tau) d\tau \int_0^1 \exp \left(-\int_0^t (\sigma s(\tau) + s_2(\tau)) d\tau \right) d\sigma. \tag{42}$$

Аналогічно

$$\frac{1}{h_{31}^2(t)} - \frac{1}{h_{32}^2(t)} = -\frac{2}{h_{03}^2} \int_0^t s(\tau) d\tau \int_0^1 \exp \left(-2 \int_0^t (\sigma s(\tau) + s_2(\tau)) d\tau \right) d\sigma.$$

Враховуючи (41), (42) і підставивши (36) в (37)-(40), одержимо систему однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду стосовно невідомих $s(t)$, $q(t)$, $p(t)$, $c(t)$. З єдиності розв'язків таких систем випливає, що $s(t) = 0$, $q(t) = 0$, $p(t) = 0$, $c(t) = 0$, $t \in [0, t_1]$. Звідси отримаємо $s_1(t) = s_2(t)$, $q_1(t) = q_2(t)$, $p_1(t) = p_2(t)$, $c_1(t) = c_2(t)$, $t \in [0, t_1]$, а отже, $h_{31}(t) = h_{32}(t)$, $h_{11}(t) = h_{12}(t)$, $b_1(t) = b_2(t)$, $c_1(t) = c_2(t)$, $t \in [0, t_1]$. Використовуючи це в задачі (33), (34), знаходимо, що $v_1(y, t) = v_2(y, t)$, $(y, t) \in \overline{Q}_{t_1}$, що і завершує доведення теореми.

-
1. Баранська І. Визначення старшого коефіцієнта у параболічному рівнянні в області з невідомими межами / Баранська І. // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 20-38.
 2. Пабириівська Н. Теплові моменти в оберненій задачі для параболічного рівняння / Пабириівська Н. // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 56. – С. 142-149.
 3. Пабириівська Н.В. Обернені задачі з інтегральними умовами перевизначення / Пабириівська Н. // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – Т. 43, № 1. – С. 51-58.
 4. Ivanchov M. Inverse problems for equations of parabolic type / Ivanchov M. // Math. Studies: Monogr. Ser. Vol. 10. – Lviv: VNTL Publ., 2003. – 240 p.
 5. Ладыженская О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралъцева Н.Н. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
 6. Снітко Г.А. Обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею / Снітко Г.А. // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – Т. 50, №4. – С. 7-18.

INVERSE PROBLEM FOR A PARABOLIC EQUATION WITH UNKNOWN MINOR COEFFICIENTS IN A FREE BOUNDARY DOMAIN

Halyna SNITKO

*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
National Academy of Sciences of Ukraine,
79060, L'viv, Naukova Str., 3b*

We establish conditions of local existence and uniqueness of the classical solution to the inverse problem for a parabolic equation with unknown time-dependent minor coefficients in a free boundary domain.

Key words: inverse problem, Green function, free boundary, parabolic equation.

Стаття надійшла до редколегії 28.03.2008

Прийнята до друку 22.10.2008

УДК 539.3

АНТИПЛОСКА ЗАДАЧА ДЛЯ ТРІЩИНИ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЇ ДО МЕЖІ ПОДІЛУ ДВОХ АНІЗОТРОПНИХ ПІВПРОСТОРІВ

Георгій СУЛИМ, Андрій ЦАП

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1*

Досліджено вплив межі поділу матеріалів на сингулярне поле напружень біля вершин фронту тріщини та коефіцієнти інтенсивності напружень залежно від розташування тріщини і відносної жорсткості матеріалів, у випадку антиплатоскої задачі для вільної від зовнішніх навантажень тріщини, розташованої перпендикулярно до межі поділу двох анізотропних півпросторів з різних матеріалів. Тріщина моделюється неперервно розподіленими гвинтовими дислокаціями уздовж її осі з наперед невідомим вектором Бургерса. Оскільки береги тріщини вільні від навантаження, то крайова умова на поверхні тріщини дає змогу отримати сингулярне інтегральне рівняння стосовно шуканої густини вектора Бургерса. Обчислення проведено з використанням методу колокацій. На підставі отриманих числових даних побудовано придатну для інженерних обчислень, аналітичну апроксимаційну формулу залежності коефіцієнта інтенсивності напружень від двох параметрів її відносної жорсткості півпросторів і відносної відстані між тріщиною та межею поділу матеріалів.

Ключові слова: кусково-однорідне середовище, антиплатоска задача, анізотропія, тріщина, коефіцієнти інтенсивності напружень.

1. Одним з головних типів руйнування є руйнування третього типу, спричинене поздовжнім зсувом чи зрізуванням від кручення. Застосування структурно-неоднорідних ізотропних та анізотропних матеріалів (кусково-однорідних, композиційних) суттєво ускладнює аналіз напружено-деформованого стану композицій з тріщинами та вивчення їхнього граничного стану. Тому ця проблема привертає увагу щораз більшої кількості дослідників. Зокрема в [1] одержано асимптотичні вирази для напружень біля кінця тріщини, перпендикулярної до межі поділу матеріалів і розташованої якзавгодно близько до неї. У праці [2] отримано аналітичний вираз для напружень, коли тріщина перпендикулярна до межі поділу півпросторів і розташована симетрично стосовно неї. Досліджено також платоску задачу для тріщини,

що перетинає межу поділу матеріалів [3,4]. У згаданих працях розглядали ізотропні матеріали. Мета нашої праці – дослідити вплив анізотропії на коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) у задачі поздовжнього зсуву про тріщину, перпендикулярну до межі поділу двох анізотропних матеріалів. У випадку ортотропних матеріалів будують апроксимаційну формулу для нього залежну від відносної жорсткості півпросторів і розташування тріщини.

2. Побудова сингулярного інтегрального рівняння задачі. Розглядають віднесене до системи координат $Oxyz$ суцільне кусково-однорідне середовище, яке складається з двох анізотропних півпросторів S_k (рис. 1) з різними пружними властивостями, що характеризуються коефіцієнтами податності a_{44k} , a_{55k} , a_{45k} ($k = 1, 2$). Площина xOz збігається з площиною поділу матеріалів. Тунельна тріщина з вільними від навантажень берегами завширшки $2a$ лежить у площині yOz і її нижній фронт розташований на відстані c від поверхні поділу. Композиція перебуває в умовах поздовжнього зсуву вздовж осі Oz під впливом однорідного поля напружень на нескінченності $\sigma_{xz}^\infty = \tau_k$ ($z \in S_k$), $\sigma_{yz}^\infty = \tau$.

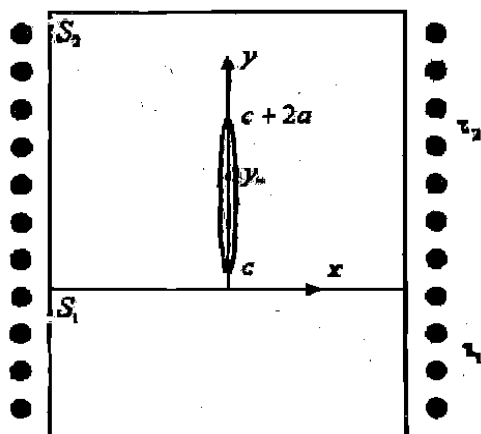


Рис. 1: Схема задачі

Для побудови розв'язку задачі спочатку вилучимо тріщину з розгляду і розглянемо розв'язок задачі про навантаження бездефектного кусково-однорідного середовища $S_1 \cup S_2$ згаданим напруженням $\sigma_{xz}^\infty = \tau_k$ ($z \in S_k$), $\sigma_{yz}^\infty = \tau$ та гвинтовою дислокацією з вектором Бюргерса b_6 у точці $z_* = iy_* \in S_2$. Використання того самого позначення для осі аплікати і комплексної змінної $z = x + iy$ в антиплоскій задачі загальновживане і не призводить до непорозумінь. Згадане навантаження породжує поле напружень

$$\hat{\sigma}(z) = \left\| \hat{\sigma}_{yz}(z), \frac{\partial w(z)}{\partial z} \right\| = \frac{r_k - r_l}{r_k + r_l} \left[\overline{\mathbf{G}_{kk}^0}(z^k) - \mathbf{G}_{ll}^0(z^k) \right] \mathbf{M}^{kk} +$$

$$+ \sigma^\infty + \mathbf{G}_{22}^0(z^k) \mathbf{M}^{kk} \quad (z \in S_k; \quad k = 1, 2; \quad l = 3 - k), \quad (1)$$

де

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^\infty &= \|\tau, w^k\| \quad (w^k = a_{45k}\tau + a_{55k}\tau_k), \quad \mathbf{G}_l^0(z^k) = \|G_l(z^k), \overline{G_l(z^k)}\|, \\ G_l(z^k) &= \frac{b_6}{4\pi i r_l} \cdot \frac{1}{z^k - z_*^l}, \quad z_*^k = x_*^k + i y_*^k = x_* + s^k y_*, \quad \mathbf{G}_{11}^0(z^k) = 0, \\ \mathbf{M}^{kj} &= \|M_{mn}^{kj}\|, \quad M_{m1}^{kj} = -1, \quad M_{12}^{kj} = r_k, \quad M_{22}^{kj} = -r_j, \quad s^k = s_1^k + i s_2^k, \\ s_1^k &= \frac{a_{45k}}{a_{55k}}, \quad s_2^k = \frac{|r^k|}{a_{55k}}, \quad r_k = \sqrt{(a_{45k})^2 - a_{44k}a_{55k}} = i|r_k|.\end{aligned}$$

Вважаємо, що параметр r_k характеризує жорсткість матеріалу півпростору.

Використовуючи співвідношення (1), запишемо вирази для компоненти тензора напружень $\sigma_{yz}(z)$ і похідної переміщення $\partial w(z)/\partial z$ у півпросторі ($z \in S_2$)

$$\begin{aligned}\sigma_{yz}(z) &= \tau - \frac{b_6}{4\pi i r_2} \left[\frac{1}{z^2 - s^2 y_*} + \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2} \frac{1}{z^2 - \overline{s^2} y_*} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{z^2 - \overline{s^2} y_*} + \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2} \frac{1}{z^2 - s^2 y_*} \right], \\ \frac{\partial w(z)}{\partial x} &= w^2 + \frac{b_6}{4\pi i r_2} r_2 \left[\frac{1}{z^2 - s^2 y_*} + \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2} \frac{1}{z^2 - \overline{s^2} y_*} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{z^2 - \overline{s^2} y_*} - \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2} \frac{1}{z^2 - s^2 y_*} \right] \quad (z \in S_2).\end{aligned}\quad (2)$$

На підставі виразу (2) та закону Гука

$$\sigma_{xz}(z) = -\frac{a_{45k}}{a_{55k}} \sigma_{yz}(z) + \frac{1}{a_{55k}} \frac{\partial w(z)}{\partial x}, \quad (z \in S_k, \quad k = 1, 2) \quad (3)$$

отримано вираз для другої ненульової компоненти тензора напружень

$$\sigma_{xz}(z) = \tau_2 + \frac{b_6(y_*)}{2\pi i r_2} \operatorname{Re} \left[\frac{s^2}{z^2 - s^2 y_*} + \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2} \frac{s^2}{z^2 - \overline{s^2} y_*} \right] \quad (z \in S_2). \quad (4)$$

Тріщину, перпендикулярну до межі поділу матеріалів, моделюємо неперервно розподіленими гвинтовими дислокаціями уздовж відрізка $y_* = [c, 2a + c]$, $x_* = 0$ з наперед невідомим вектором Бюргерса $b_6(y_*)$ [1, 2, 5]. У цьому випадку напруження σ_{xz} у довільній точці середовища дорівнюють

$$\sigma_{xz}(z) = \tau_2 + \frac{1}{2\pi i r_2} \int_c^{c+2a} b_6(y_*) \operatorname{Re} \left[\frac{s^2}{z^2 - s^2 y_*} + \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2} \frac{s^2}{z^2 - \overline{s^2} y_*} \right] dy_*. \quad (5)$$

Оскільки береги тріщини вільні від навантаження, то крайова умова на поверхні тріщини

$$\sigma_{xz}^\pm(iy) = 0, \quad y \in [c; 2a + c] \quad (6)$$

дає змогу отримати сингулярне інтегральне рівняння

$$\frac{1}{2\pi i r_2} \int_c^{c+2a} b_6(y_*) \operatorname{Re} \left[\frac{1}{y-y_*} + \frac{r_2-r_1}{r_1+r_2} \frac{s^2}{s^2 y - \overline{s^2 y_*}} \right] dy_* = -\tau_2, \quad y \in [c; 2a+c] \quad (7)$$

стосовно шуканої густини вектора Бюргерса $b_6(y_*)$.

Після заміни змінних

$$p = y_* - c - a, \quad t = y - c - a, \quad b_6(y_*) = b_6(p+c+a) \equiv b(p) \quad (8)$$

сингулярне інтегральне рівняння (7) набуде вигляду

$$B \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{b(p)}{p-t} dp + \int_{-a}^a K(p,t) b(p) dp = F(t), \quad (9)$$

де

$$B = \frac{1}{2ir_2}, \quad F(t) = \tau_2, \quad K(p,t) = \frac{1}{2\pi i r_2} \operatorname{Re} \left[\frac{r_2-r_1}{r_1+r_2} \frac{s^2}{s^2(p+c+a) - s^2(t+c+a)} \right]. \quad (10)$$

Умови однозначності зміщень під час обходу навколо тріщини запишемо так [6]:

$$\int_{-a}^a b_6(y_*) dy_* = 0. \quad (11)$$

Коефіцієнт інтенсивності напружень визначаємо функцією $b(p)$ так [5, с. 237]:

$$K_3 = \mp \sqrt{\frac{\pi}{2}} \lim_{p \rightarrow \mp a} \left[\sqrt{|p \pm a|} b(p) \right]. \quad (12)$$

3. Числові результати. Для прикладу досліджено залежність КІН від жорсткості матеріалів півпросторів і геометрії розташування тріщини за дії однорідного поля напружень на нескінченності $\sigma_{xz}^\infty = \tau_k$ ($\sigma_{yz}^\infty = 0$). Зазначимо, що напруження σ_{yz}^∞ за такої геометрії задачі не впливають на КІН. Обчислення КІН ґрунтується на залежності

$$K_3 = \frac{\sqrt{\pi a}}{2|r_2|} \sum_{n=0}^N (\pm 1)^n A_n, \quad (13)$$

де A_n – коефіцієнти розвинування густини розподілу вектора Бюргерса за ортогональними поліномами з виділеною кореневою особливістю

$$b(p) = \frac{1}{\sqrt{1-(p/a)^2}} \sum_{n=0}^N A_n T_n\left(\frac{p}{a}\right). \quad (14)$$

Тут $T_n(x)$ – поліноми Чебишова першого роду.

Розглядали такі типи кусково-однорідної матриці:

- 1) верхній півпростір (в якому є тріщина) жорсткіший від нижнього;
- 2) верхній півпростір – податніший;
- 3) півпростір без тріщини – абсолютно жорсткий, тобто півпростір з тріщиною заземлений на своїй межі ($1/a_{441} \rightarrow \infty$, $1/a_{551} \rightarrow \infty$);
- 4) тріщина розташована перпендикулярно до вільної межі півпростору – півпростір S_1 абсолютно податний ($1/a_{441} \rightarrow 0$, $1/a_{551} \rightarrow 0$).

Обчислення проводили за схемою застосування методу колокацій [7], до розв'язування системи (9), (11) з точністю до п'яти значущих цифр. При $0,005 \leq c/a < 0,01$ кількість N членів ряду розвинення вектора Бюргерса за ортогональними поліномами $N = 80$; при $0,01 \leq c/a \leq 0,05$ – $N = 40$; при $0,05 < c/a$ достатньо взяти $N = 20$.

На рис.2 зображено графічну залежність зведеного КІН $K_3^0 \equiv K_3/\sqrt{\pi a} \tau_2$ на нижньому фронті тріщини від відносної відстані між ним і межею поділу матеріалів $l = c/a$. На рис. 3 показано графічну залежність K_3^0 від відносної жорсткості матеріалів $r = r_2/r_1$.

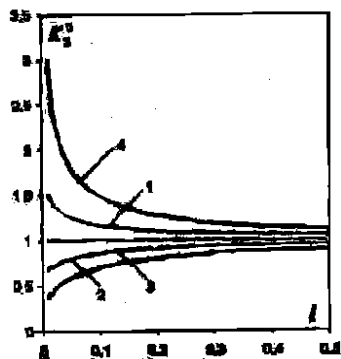


Рис. 2: Залежність КІН K_3^0 від відстані тріщини до межі поділу

На підставі отриманих числових даних була побудована придатна для інженерних обчислень аналітична апроксимаційна формула для зведеного КІН K_3^0 , залежна від двох параметрів – відносної жорсткості півпросторів r і відносної відстані між тріщиною і межею поділу матеріалів l

$$K_3^0(r, l) = [K_1(l) - K_2(l)] e^{-d(l)r^{p(r)}} + K_2(l), \quad (15)$$

де

$$d(l) = \ln \left[\frac{K_1(l) - K_2(l)}{1 - K_2(l)} \right], \quad p(r) = 0,4e^{-r} + 0,5, \quad K_i(l) = b_i e^{-(l-0,003)^{p_i} a_i} + 1,$$

$$b_1 = 3,581, \quad b_2 = -0,755, \quad a_1 = 4,626, \quad a_2 = 3,138, \quad p_1 = 0,367, \quad p_2 = 0,543.$$

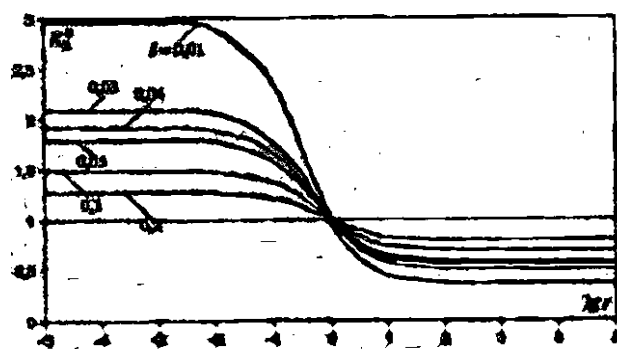


Рис. 3: Залежність КІН K_I^0 від відносної жорсткості складових матриці

Відносна похибка цієї наближеної формули не перевищує 6% при $0,001 \leq c/a \leq 0,01$, 4% при $0,001 < c/a < 0,1$ і 2% при $c/a \geq 0,1$.

Отримані результати дають змогу дійти таких висновків.

1. З віддаленням тріщини від межі поділу зведений КІН K_I^0 наближається до 1, що й властиве тріщині в однорідній матриці.
2. Зведений КІН тріщини у жорсткішому півпросторі завжди більший за одиницю, причому з наближенням до межі поділу з податнішим матеріалом він збільшується.
3. Чим більша різниця між пружними властивостями півпросторів, тим більше значення K_I^0 за фіксованої геометрії задачі про тріщину у жорсткішому півпросторі.
4. При прямуванні тріщини до межі з абсолютно податним півпростором (вільна межа півпростору) КІН прямує до ∞ .
5. Якщо тріщина прямує до абсолютно жорсткої межі, то КІН прямує до нуля.
6. Якщо тріщина розміщена у податнішому півпросторі, то висновки 2-3 набувають якісно протилежного змісту.

-
1. Atkinson C. On the stress intensity factors associated with crack interacting with an interface between two elastic media / Atkinson C. // Eng. Sci. – 1975. – Vol.13, №5. – P. 489-504.
 2. Atkinson C. On cracks and screw dislocations pile ups crossing a biomaterial interface / Atkinson C. // Journal of Elasticity. – 1973. – Vol. 3, №1. – P. 15-22.
 3. Kasano H. Singular Stress Field at the Tips of a Crack Normal to Bimaterial of Isotropic Half Planes / Kasano H., Watanabe T., Nakahara I. // Bull. of JSME. – 1986. – Vol. 29, №258. – P. 4043-4049.
 4. Erdogan F. Two bounded half planes with a crack going through the interface / Erdogan F., Biricikoglu V. // Int. J. Eng. Sci. – 1973. – P. 745-766.

5. *Божидарник В.В.* Елементи теорії пластичності та міцності. Том 1 / *Божидарник В.В., Сулим Г.Т.* – Львів: Світ, 1999. – 528 с.
6. *Божидарник В.В.* Двовимірні задачі теорії пружності й термopужності структурно-неоднорідних тіл / *Божидарник В.В.* – Львів: Світ, 1998. – 227 с.
7. *Божидарник В.В.* Метод колокацій розв'язування системи сингулярних інтегральних рівнянь / *Божидарник В.В., Сулим Г.Т.* // Вісн. Львів. політехн. ін-ту. – 1990. – Вип. 242. – С. 8-13.

ANTIPLANE PROBLEM OF TWO ANISOTROPIC HALF-SPACES WITH A CRACK PERPENDICULAR TO BIMATERIAL INTERFACE

Georgiy SULYM, Andriy TSAP

*Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka str., 1*

An antiplane problem of two half-spaces consisting of different anisotropic material is considered. It is assumed that one of half-spaces contains an unloaded crack normal to bimaterial interface. The influence of bimaterial interface on singular stress field at the tips of a crack and stress intensity factor which depends of crack position and comparative hardness of materials is investigated. In the analysis the crack is replaced by a continuous distribution of dislocations along the crack line with initially unknown density of Burger's vector. Using the free stress condition on the crack surface, we obtain singular integral equation on unknown density of Burger's vector. Calculations were realized by the collocation method. On basis of obtained numerical results it was built analytical approximate formula for stress intensity factor which depends on two parameters – comparative hardness of half-spaces and comparative distance between the crack and bimaterial interface. This formula is useful for engineering estimations.

Key words: bimaterial, antiplane problem, anisotropy, crack, stress intensity factor.

Стаття надійшла до редколегії 21.04.2005

Прийнята до друку 22.10.2008

УДК 517.95

НЕІСНУВАННЯ ГЛОБАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ОДНІЄЇ ГІБРИДНОЇ СИСТЕМИ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

Галина ТОРГАН

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1

Розглянуто гібридну систему еволюційних рівнянь, одне з яких містить другу похідну за часовою змінною, а друге – першу. Одержано деякі достатні умови існування розв'язку мішаної задачі для цієї системи в обмеженій циліндричній області, а також умови, за яких не існує глобального розв'язку.

Ключові слова: гібридна система еволюційних рівнянь, мішана задача.

В останнє десятиліття в літературі з'явилися дослідження двовимірної гібридної термоеластичної структури вигляду

$$\begin{aligned} w_{tt} + \Delta^2 w + \alpha \Delta \Theta &= 0, \\ \beta \Theta_t - \eta \Delta \Theta - \alpha \Delta w_t &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

з додатними константами α, β, η , яка складається з термоеластичної плитки, до вільних кінців якої прикріплена балка. Такі системи описують термоеластичну плитку підсилену ефектом запам'ятовування, структури з керамічним механізмом, електромагнітні структури з електричним датчиком [1]-[6].

У працях [7]-[8] досліджено коректне формулювання задачі для поперечних коливань двовимірної гібридної термоеластичної структури (1), яка складається з тонкої прямокутної термоеластичної плитки, з'єднаної з балкою. Припускають, що плитка і балка є залежними від невідомої температури $\Theta = \Theta(x, y, t)$.

У цій праці розглянуто еволюційну систему двох рівнянь, одне з яких містить другу похідну за часовою змінною, а друге – першу. Таку систему можна розглядати як певне узагальнення гібридної структури (1). Одержано деякі достатні умови існування розв'язку мішаної задачі для цієї еволюційної системи в обмеженій циліндричній області, а також умови, за яких глобального розв'язку задачі не існує.

Нехай Ω – обмежена область у просторі $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\Omega \in C^1$, $Q_T = \Omega \times (0, T)$, де $T < \infty$, $\Omega_\tau = Q_T \cap \{t = \tau\}$, $\tau \in [0, T]$, $Q = \Omega \times (0, +\infty)$, $S = \partial\Omega \times (0, +\infty)$. В

області Q розглянемо задачу для системи рівнянь з дійснозначними коефіцієнтами

$$\begin{aligned} u_{tt} + \sum_{i,j,s,l=1}^n (a_{ij}^{sl}(x,t)u_{x_i x_j})_{x_s x_l} - \sum_{i,j=1}^n (b_{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i,j=1}^n (b_{ij}^0(x,t)v_{x_j})_{x_i} + \\ + \sum_{i=1}^n c_i(x,t)v_{x_i} + c_0(x,t)u_t + a_0(x,t)u + a_0^0(x,t)v - \gamma(x)|u|^{p-2}u = f_1(x,t), \quad (2) \\ v_t - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}^0(x,t)v_{x_i})_{x_j} - \sum_{i,j=1}^n (b_{ij}^0(x,t)u_{tx_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n \beta_i(x,t)v_{x_i} + \\ + \alpha_0(x,t)u_t + \beta_0(x,t)v = f_2(x,t) \end{aligned}$$

з початковими умовами

$$u|_{t=0} = u_0, \quad u_t|_{t=0} = u_1, \quad v|_{t=0} = v_0 \quad (3)$$

і крайовими умовами

$$u|_S = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}|_S = 0, \quad v|_S = 0, \quad (4)$$

де ν – зовнішня нормаль до поверхні S , $p > 2$. Надалі використовуватимемо банахові простори $L^r(\Omega)$, $r \in [1, +\infty)$ [9, с. 37], $H^k(\Omega)$, $H_0^l(\Omega)$, $k, l \in \mathbb{N}$ [9, с. 44].

Припустимо виконання таких умов:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}) : a_{ij}^{sl}, a_{ij}^{slt}, a_{ij}^{sltt}, a_0, a_{0t}, a_0^0, a_{0t}^0, a_{ij}^0, a_{ijt}^0, a_{ij}^{0tt}, \alpha_0, \alpha_{0t} \in L^\infty(Q_T), \\ D^\alpha a_{ij}^{sl}(\cdot, 0), D^\beta a_{ij}^0(\cdot, 0) \in L^\infty(\Omega), i, j, s, l \in \{1, \dots, n\}, |\alpha| \leq 2, |\beta| \leq 1, \\ \text{де } D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n; \end{aligned}$$

$$a_0(x, t) \geq A_0 > 0 \quad \text{для майже всіх } (x, t) \in Q_T;$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^0(x, t)\xi_i \xi_j \geq A_1 \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2$$

для майже всіх $(x, t) \in Q_T$ і всіх $\xi_i \in \mathbb{R}$, де $A_1 > 0$

$$\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x, t)\xi_{ij} \xi_{sl} \geq A_2 \sum_{i,j=1}^n |\xi_{ij}|^2$$

для майже всіх $(x, t) \in Q_T$ і всіх $\xi_{ij} \in \mathbb{R}$ таких, що $\xi_{ij} = \xi_{ji}$, де $A_2 > 0$;

$$a_{ij}^0(x, t) = a_{ji}^0(x, t), \quad a_{ij}(x, t) = a_{ji}(x, t), \quad a_{ij}^{sl}(x, t) = a_{sl}^{ij}(x, t)$$

для майже всіх $(x, t) \in Q_T$ і всіх $i, j, s, l \in \{1, \dots, n\}$;

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}) : b_{ij}, b_{ijt}, b_{ijtt}, b_{ij}^0, b_{ijt}^0, b_{ijtt}^0, \beta_i, \beta_{it}, \beta_0, \beta_{0t} \in L^\infty(Q_T), \\ D^\beta b_{ij}(\cdot, 0), D^\beta b_{ij}^0(\cdot, 0) \in L^\infty(\Omega), i, j \in \{1, \dots, n\}, |\beta| = 1; \end{aligned}$$

$$\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x, t)\xi_i \xi_j \geq B_1 \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2$$

для майже всіх $(x, t) \in Q_T$ і всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$, $B_1 > 0$;

- $\beta_0(x, t) \geq B_0 > 0$ для майже всіх $(x, t) \in Q_T$;
 $b_{ij}(x, t) = b_{ji}(x, t)$ для майже всіх $(x, t) \in Q_T$ і всіх $i, j \in \{1, \dots, n\}$;
 (C) : $c_i, c_{it}, c_0, c_{0t} \in L^\infty(Q_T)$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $\gamma \in L^\infty(\Omega)$,
 $0 < C_0 \leq c_0(x, t) \leq C^0$ для майже всіх $(x, t) \in Q_T$,
 $0 < \gamma_0 \leq \gamma(x) \leq \gamma_1$ для майже всіх $x \in \Omega$;
 (F) : $f_1, f_{1t}, f_2, f_{2t} \in L^2(Q_T)$.

Означення 1. Функции $u \in C([0, T_1]; H_0^2(\Omega)) \cap L^\infty((0, T_1); L^p(\Omega))$, $v \in C([0, T_1]; H_0^1(\Omega))$ такі, що $u_t \in C([0, T_1]; L^2(\Omega)) \cap L^\infty((0, T_1); H_0^2(\Omega))$, $u_{tt} \in L^\infty((0, T_1); L^2(\Omega))$, $v_t \in L^\infty((0, T_1); H_0^1(\Omega))$ і u, v задовольняють початкові умови (3) та систему

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \left[u_{tt}w + \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x, t) u_{x_i x_j} w_{x_s x_l} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x, t) u_{x_i} w_{x_j} - \sum_{i,j=1}^n b_{ij}^0(x, t) v_{x_j} w_{x_i} + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^n c_i(x, t) v_{x_i} w + c_0(x, t) u_t w + a_0(x, t) u w + a_0^0(x, t) v w - \right. \\ \left. - \gamma(x) |u|^{p-2} u w - f_1(x, t) w \right] dx = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \left[v_t \tilde{w} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^0(x, t) v_{x_i} \tilde{w}_{x_j} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}^0(x, t) u_{tx_i} \tilde{w}_{x_j} + \sum_{i=1}^n \beta_i(x, t) v_{x_i} \tilde{w} + \right. \\ \left. + \alpha_0(x, t) u_t \tilde{w} + \beta_0(x, t) v \tilde{w} - f_2(x, t) \tilde{w} \right] dx = 0 \end{aligned}$$

для майже всіх $t \in (0, T_1)$, всіх $T_1 \in (0, T)$ і всіх $w \in H_0^2(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, $\tilde{w} \in H_0^1(\Omega)$, називаємо узагальненим розв'язком задачі (2)-(4). Якщо $T = +\infty$, то розв'язок будемо називати глобальним.

Теорема 1. Нехай виконуються умови (A), (B), (C), (F), $u_0 \in H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$, $u_1 \in H_0^2(\Omega)$, $v_0 \in H_0^2(\Omega)$, $2 < p < \frac{2n-4}{n-4}$ при $n > 4$ і $p > 2$ при $n \in \{1, \dots, 4\}$. Тоді знайдеться таке число $T > 0$, що узагальнений розв'язок задачі (2)-(4) існує.

Доведення. Для доведення існування розв'язку використаємо метод Фаєдо-Гальоркіна. Оскільки простір $H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$ – сепарабельний банахів, то в ньому існує така зліченна множина $\{\omega^k\}$, що будь-яка скінченна кількість елементів цієї множини лінійно незалежна і замикання її лінійної оболонки в $H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$ збігається з цим простором. Можемо прийняти, що $\{\omega^k\}$ ортонормована в $L^2(\Omega)$. Розглянемо функції $u^N(x, t) = \sum_{k=1}^N c_k^N(t) \omega^k(x)$, $v^N(x, t) = \sum_{k=1}^N d_k^N(t) \omega^k(x)$, $N = 1, 2, \dots$, де $c_1^N, c_2^N, \dots, c_N^N, d_1^N, d_2^N, \dots, d_N^N$ – розв'язки відповідних задач Коші

$$\int_{\Omega} \left[u_{tt}^N \omega^k + \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x, t) u_{x_i x_j}^N \omega_{x_s x_l}^k + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x, t) u_{x_i}^N \omega_{x_j}^k - \sum_{i,j=1}^n b_{ij}^0(x, t) v_{x_j}^N \omega_{x_i}^k + \right.$$

$$+a_0(x,t)u^N\omega^k + \sum_{i=1}^n c_i(x,t)v_{x_i}^N\omega^k + c_0(x,t)u_t^N\omega^k + a_0^0(x,t)v^N\omega^k - \\ -\gamma(x)|u^N|^{p-2}u^N\omega^k - f_1(x,t)\omega^k \Big] dx = 0, \quad (6)$$

$$\int_{\Omega} \left[v_t^N\omega^k + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^0(x,t)v_{x_i}^N\omega_{x_j}^k + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}^0(x,t)u_{tx_i}^N\omega_{x_j}^k + \sum_{i=1}^n \beta_i(x,t)v_{x_i}^N\omega^k + \right. \\ \left. +\alpha_0(x,t)u_t^N\omega^k + \beta_0(x,t)v^N\omega^k - f_2(x,t)\omega^k \right] dx = 0, \quad t \in [0, T], \\ c_k^N(0) = u_{0,k}^N, \quad c_{kt}^N(0) = u_{1,k}^N, \quad d_k^N(0) = v_{0,k}^N, \quad k = 1, \dots, N, \quad (7)$$

де

$$u_0^N(x) = \sum_{k=1}^N u_{0,k}^N\omega^k(x), \quad \|u_0^N - u_0\|_{H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)} \rightarrow 0, \\ u_1^N(x) = \sum_{k=1}^N u_{1,k}^N\omega^k(x), \quad \|u_1^N - u_1\|_{H_0^2(\Omega)} \rightarrow 0, \\ v_0^N(x) = \sum_{k=1}^N v_{0,k}^N\omega^k(x), \quad \|v_0^N - v_0\|_{H_0^2(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \quad (8)$$

На підставі теореми Каратеодорі [10, с. 54] існує абсолютно неперервний розв'язок задачі (6), (7) визначений на проміжку $[0, t_N)$ і такий, що $c_{1t}^N, c_{2t}^N, \dots, c_{Nt}^N$ абсолютно неперервні на $(0, t_N)$. З оцінок, одержаних нижче, випливає, що $t_N = T$, де додатне число T уточнимо пізніше.

Домножимо перші рівняння системи (6) відповідно на c_{kt}^N , другі відповідно на d_k^N , $k \in \{1, \dots, N\}$. Отримані рівності підсумуємо за k від 1 до N , проінтегруємо за t від 0 до τ , де $\tau \in (0, T)$, і додамо. Одержимо рівність

$$\int_{Q_\tau} \left[u_{tt}^N u_t^N + \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl} u_{x_i x_j}^N u_{tx_s x_l}^N + \sum_{i,j=1}^n b_{ij} u_{x_i}^N u_{tx_j}^N - \sum_{i,j=1}^n b_{ij}^0 v_{x_j}^N u_{tx_i}^N + \sum_{i=1}^n c_i v_{x_i}^N u_t^N + \right. \\ \left. + c_0 u_t^N u_t^N + a_0 u^N u_t^N + a_0^0 v^N u_t^N - \gamma |u^N|^{p-2} u^N u_t^N - f_1 u_t^N + v_t^N v^N + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^0 v_{x_i}^N v_{x_j}^N + \right. \\ \left. + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}^0 u_{tx_i}^N v_{x_j}^N + \sum_{i=1}^n \beta_i v_{x_i}^N v^N + \alpha_0 u_t^N v^N + \beta_0 v^N v^N - f_2 v^N \right] dx dt = 0. \quad (9)$$

Очевидно, що

$$J_1 := \int_{Q_\tau} u_{tt}^N u_t^N dx dt = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\tau} |u_t^N|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} |u_1^N|^2 dx,$$

$$J_2 := \int_{Q_\tau} v_t^N v^N dx dt = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\tau} |v^N|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} |v_0^N|^2 dx.$$

Згідно з умовою (A)

$$J_3 := \int_{Q_\tau} \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x, t) u_{x_i x_j}^N u_{t x_s x_l}^N dx dt \geq \frac{A_2}{2} \int_{\Omega_\tau} \sum_{i,j=1}^n |u_{x_i x_j}^N|^2 dx - \\ - \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x, 0) u_{0 x_i x_j}^N u_{0 x_s x_l}^N dx - \frac{A_3 + 1}{2} \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^n |u_{x_i x_j}^N|^2 dx dt.$$

$$\text{Тут } A_3 = \text{ess sup}_Q \sum_{i,j,s,l=1}^n |a_{ij}^{sl}(x, t)|^2;$$

$$J_4 := \int_{Q_\tau} (\alpha_0(x, t) + a_0^0(x, t)) v^N u_t^N dx dt \geq -\frac{A_4}{2} \int_{Q_\tau} |v^N|^2 dx dt - \frac{1}{2} \int_{Q_\tau} |u_t^N|^2 dx dt.$$

$$\text{Тут } A_4 = \text{ess sup}_Q (a_0(x, t) + a_0^0(x, t))^2;$$

$$J_5 := \int_{Q_\tau} a_0(x) u^N u_t^N dx dt \geq -A_0 T \int_{\Omega_0} |u_0^N|^2 dx - \frac{A_0(1+T^2)}{2} \int_{Q_\tau} |u_t^N|^2 dx dt;$$

$$J_6 := \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^0(x, t) v_{x_i}^N v_{x_j}^N dx dt \geq A_1 \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |v_{x_i}^N|^2 dx dt.$$

За умовою (B) маємо

$$J_7 := \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x, t) u_{x_i}^N u_{t x_j}^N dx dt \geq \frac{B_1}{2} \int_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^2 dx - \\ - \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x, 0) u_{0 x_i}^N u_{0 x_j}^N dx - \frac{B_2 + 1}{2} \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^2 dx dt,$$

$$\text{де } B_2 = \text{ess sup}_Q \sum_{i,j=1}^n |b_{ij}(x, t)|^2;$$

$$J_8 := \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n \beta_i(x, t) v_{x_i}^N v^N dx dt \geq -\frac{B_3 \delta_1}{2} \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |v_{x_i}^N|^2 dx dt - \frac{1}{2 \delta_1} \int_{Q_\tau} |v^N|^2 dx dt.$$

$$\text{Тут } B_3 = \text{ess sup}_Q \sum_{i=1}^n |\beta_i(x, t)|^2, \quad \delta_1 > 0;$$

$$J_9 := \int_{Q_\tau} \beta_0(x, t) v^2 dx dt \geq B_0 \int_{Q_\tau} |v|^2 dx dt.$$

На підставі (C) одержимо такі оцінки:

$$J_{10} := \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n c_i(x, t) v_{x_i}^N u_t^N dx dt \geq -\frac{C_1 \delta_2}{2} \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |v_{x_i}^N|^2 dx dt - \frac{1}{2\delta_2} \int_{Q_\tau} |u_t^N|^2 dx dt,$$

де $C_1 = \operatorname{ess\,sup}_Q \sum_{i=1}^n |c_i(x, t)|^2$, $\delta_2 > 0$;

$$J_{11} := \int_{Q_\tau} c_0(x, t) |u_t^N|^2 dx dt \geq C_0 \int_{Q_\tau} |u_t^N|^2 dx dt.$$

З умови (F) випливає

$$J_{12} := \int_{Q_\tau} f_1(x, t) u_t^N dx dt \leq \frac{1}{2} \int_{Q_\tau} |f_1(x, t)|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{Q_\tau} |u_t^N|^2 dx dt;$$

$$J_{13} := \int_{Q_\tau} f_2(x, t) v^N dx dt \leq \frac{1}{2} \int_{Q_\tau} |f_2(x, t)|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{Q_\tau} |v^N|^2 dx dt.$$

Розглянемо

$$J_{14} := \int_{Q_\tau} \gamma(x) |u^N|^{p-2} u^N u_t^N dx dt \leq \frac{\gamma_1}{2} \int_{Q_\tau} \left[|u_t^N|^2 + |u^N|^{2(p-1)} \right] dx dt.$$

На підставі теореми вкладення [9, с. 47] та нерівності Фрідрікса для майже всіх $t \in (0, \tau)$, $\forall z \in H_0^2(\Omega)$

$$\int_{\Omega_t} |z|^{2(p-1)} dx \leq K_0 \left(\int_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^n |z_{x_i x_j}^N|^2 dx \right)^{p-1}, \quad (10)$$

де $p \leq \frac{2n-4}{n-4}$ при $n > 4$ і $p > 2$ при $n \leq 4$, K_0 – деяка додатна константа, яка не залежить від z . Отже,

$$J_{14} \leq \frac{\gamma_1}{2} \int_{Q_\tau} |u_t^N|^2 dx dt + \frac{\gamma_1 K_0}{2} \int_0^\tau \left(\int_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^n |u_{x_i x_j}^N|^2 dx \right)^{p-1} dt.$$

Враховуючи одержані оцінки інтегралів $J_1 - J_{14}$, з (9) отримаємо нерівність

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\tau} \left[|u_t^N|^2 + |v^N|^2 + A_2 \sum_{i,j=1}^n |u_{x_i x_j}^N|^2 + B_1 \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^2 \right] dx + \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |v_{x_i}^N|^2 (2A_1 - B_3 \delta_1 - \\ & - C_1 \delta_2) dx dt \leq \int_{Q_\tau} \left[(A_3 + 1) \sum_{i,j=1}^n |u_{x_i x_j}^N|^2 + |v^N|^2 \left(A_4 + \frac{1}{\delta_1} - 2B_0 + 1 \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + |u_t^N|^2 \left(2 + \frac{1}{\delta_2} + A_0(1 + T^2) - 2C_0 + \gamma_1 \right) + (B_2 + 1) \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^2 \Big] dxdt + \\
& + \gamma_1 K_0 \int_0^\tau \left(\int_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^n |u_{x_i x_j}^N|^2 dx \right)^{p-1} dt + 2F^N + \int_{Q_\tau} \left[|f_1(x, t)|^2 + |f_2(x, t)|^2 \right] dxdt, \quad (11)
\end{aligned}$$

де

$$F^N = \int_{\Omega_0} \left[|u_1^N|^2 + |v_0^N|^2 + \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl} u_{0x_i x_j}^N u_{0x_s x_l}^N + 2A_0 T |u_0^N|^2 + \sum_{i=1}^n b_{ij} u_{0x_i}^N u_{0x_j}^N \right] dx.$$

Виберемо δ_1, δ_2 так, щоб $2A_1 > B_3 \delta_1 + C_1 \delta_2$. Згідно з умовами на u_0 і u_1 існує таке N_0 , що $F^N \leq 2F_0$ при $N \geq N_0$, де

$$F^0 = \int_{\Omega_0} \left[|u_1|^2 + |v_0|^2 + \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl} u_{0x_i x_j} u_{0x_s x_l} + 2A_0 T |u_0|^2 + \sum_{i=1}^n b_{ij} u_{0x_i} u_{0x_j} \right] dx.$$

Використаємо в (11) лему Гронуолла-Белмана. Після нескладних перетворень одержимо рівність

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_\tau} \left[|u_t^N|^2 + |v^N|^2 + \sum_{i,j=1}^n |u_{x_i x_j}^N|^2 + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^2 \right] dx + \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |v_{x_i}^N|^2 dxdt \leq \\
& \leq \mu_1 \int_0^\tau \left(\int_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^n |u_{x_i x_j}^N|^2 dx \right)^{p-1} dt + \mu_2, \quad (12)
\end{aligned}$$

де μ_1, μ_2 — додатні константи, які залежать від коефіцієнтів системи, початкових даних і вільних членів.

Використовуючи лему Біхарі [11, с. 110], з (12) отримаємо оцінку

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_\tau} \left[|u_t^N|^2 + |v^N|^2 + \sum_{i,j=1}^n |u_{x_i x_j}^N|^2 + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^2 \right] dx + \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |v_{x_i}^N|^2 dxdt \leq \\
& \leq \frac{\mu_3}{[1 - (p-2)\mu_2^{p-2}\mu_1\tau]^{1/(p-2)}}, \quad \mu_3 > 0.
\end{aligned}$$

Нехай $\tau \in [0, T_0]$, $T_0 < \frac{1}{(p-2)\mu_6^{p-2}\mu_5}$. Тоді $1 - (p-2)\mu_6^{p-2}\mu_5\tau > 1 - (p-2)\mu_6^{p-2}\mu_5T_0 > 0$, тому

$$\int_{\Omega_\tau} \left[|u_t^N|^2 + |v^N|^2 + \sum_{i,j=1}^n |u_{x_i x_j}^N|^2 + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^2 \right] dx + \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |v_{x_i}^N|^2 dxdt \leq \mu_4, \quad (13)$$

де $\mu_4 > 0$. Отже,

$$\|u_t^N\|_{L^\infty((0,T_0);L^2(\Omega))} \leq \mu_4, \quad \|u^N\|_{L^\infty((0,T_0);H_0^2(\Omega))} \leq \mu_4, \quad \|v^N\|_{L^2((0,T_0);H_0^1(\Omega))} \leq \mu_4. \quad (14)$$

Використавши (10), одержимо нерівність

$$\begin{aligned}
 J_2 &:= (p-1) \int_{Q_\tau} \gamma(x) |u^N|^{p-2} u_t^N u_{tt}^N dx dt \leq (p-1) \gamma_1 \int_{Q_\tau} |u^N|^{p-2} u_t^N u_{tt}^N dx dt \leq (p-1) \gamma_1 \times \\
 &\times \left(\int_{Q_\tau} |u_{tt}^N|^2 dx dt \right)^{1/2} \left(\int_{Q_\tau} |u^N|^{2(p-1)} dx dt \right)^{(p-2)/2(p-1)} \left(\int_{Q_\tau} |u_t^N|^{2(p-1)} dx dt \right)^{1/2(p-1)} \leq \\
 &\leq \mu_5 \int_{Q_\tau} |u_{tt}^N|^2 dx dt + \mu_6 \int_0^\tau \left(\int_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^n |u_{x_i x_j}^N|^2 dx \right)^{p-1} dt + \mu_7 \int_0^\tau \left(\int_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^n |u_{tx_i x_j}^N|^2 dx \right)^{p-1} dt,
 \end{aligned}$$

де μ_5, μ_6, μ_7 – додатні константи, які не залежать від N .

Диференціюємо за t систему (6). Після нескладних перетворень отримаємо рівність

$$\begin{aligned}
 &\int_{Q_\tau} \left[u_{ttt}^N u_{tt}^N + \sum_{i,j,s,l=1}^n (a_{ijl}^{sl} u_{tx_i x_j}^N + a_{ijl}^{sl} u_{tt x_s x_l}^N) u_{tt x_s x_l}^N + \sum_{i,j=1}^n (b_{ijt} u_{x_i}^N + b_{ij} u_{tx_i}^N) u_{tt x_i}^N + \right. \\
 &+ \sum_{i,j=1}^n b_{ijt}^0 (u_{tx_i}^N v_{tx_j}^N - v_{x_j}^N u_{tt x_i}^N) + (c_{0t} u_t^N + c_0 u_{tt}^N) u_{tt}^N + (a_{0t} u^N + a_0 u_t^N) u_{tt}^N + (a_{0t}^0 v^N + \\
 &+ a_0^0(x, t) v_t^N) u_{tt}^N - (p-1) \gamma |u^N|^{p-2} u_t^N u_{tt}^N - f_{1t} u_{tt}^N + v_{tt}^N v_t^N + \sum_{i,j=1}^n (a_{ijt}^0 v_{x_i}^N + a_{ij}^0 v_{tx_i}^N) v_{tx_j}^N + \\
 &\left. + \sum_{i=1}^n (\beta_{it} v_{x_i}^N + \beta_i v_{tx_i}^N) v_t^N + (\alpha_{0t} u_t^N + \alpha_0 u_{tt}^N) v_t^N + (\beta_{0t} v^N + \beta_0 v_t^N) v_t^N - f_{2t} v_t^N \right] dx dt = 0. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Враховуючи умови теореми (A), (B), (C), (F) і попередню оцінку, можемо переконатися в правильності нерівності

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Omega_\tau} \left[|u_{tt}^N|^2 + |v_t^N|^2 + \sum_{i,j=1}^n |u_{tx_i x_j}^N|^2 + \sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^2 \right] dx + \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |v_{tx_i}^N|^2 dx dt \leq \\
 &\leq \int_{Q_\tau} \left[\sum_{i,j=1}^n |u_{tx_i x_j}^N|^2 + |u_{tt}^N|^2 + |v_t^N|^2 + \sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^2 \right] dx dt + \\
 &+ \mu_8 + \mu_9 \int_0^\tau \left(\int_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^n |u_{tx_i x_j}^N|^2 dx \right)^{p-1} dt, \quad \tau \in [0, T_0].
 \end{aligned}$$

Використавши лему Гронуолла-Белмана, з останньої оцінки одержимо, що

$$\int_{\Omega_\tau} \left[|u_{tt}^N|^2 + |v_t^N|^2 + \sum_{i,j=1}^n |u_{tx_i x_j}^N|^2 + \sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^2 \right] dx +$$

$$+ \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |v_{tx_i}^N|^2 dx dt \leq \mu_{10} + \mu_{11} \int_0^\tau \left(\int_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^n |u_{tx_{ij}}^N|^2 dx \right)^{p-1} dt, \quad \tau \in [0, T_0]. \quad (16)$$

Використовуючи лему Біхарі [11, с. 110], з (16) отримаємо оцінку

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\tau} \left[|u_{tt}^N|^2 + |v_t^N|^2 + \sum_{i,j=1}^n |u_{tx_{ij}}^N|^2 + \sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^2 \right] dx + \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |v_{tx_i}^N|^2 dx dt \leq \\ \leq \frac{\mu_{12}}{\left[1 - (p-2) \mu_{10}^{p-2} \mu_{11} \tau \right]^{\frac{1}{p-2}}}, \end{aligned}$$

де $\tau \in [0, T_1]$, $T_1 \leq T_0$ і $T_1 < \frac{1}{(p-2)\mu_{10}^{p-2}\mu_{11}}$, $\mu_{12} > 0$. Зазначимо, що

$T < \min \left\{ \frac{1}{(p-2)\mu_6^{p-2}\mu_5}, \frac{1}{(p-2)\mu_{10}^{p-2}\mu_{11}} \right\}$. Отже, правильні оцінки

$$\|u_t^N\|_{L^\infty((0,T);H_0^2(\Omega))} \leq \mu_{13}, \|u_{tt}^N\|_{L^\infty((0,T);L^2(\Omega))} \leq \mu_{13}, \|v_t^N\|_{L^2((0,T);H_0^1(\Omega))} \leq \mu_{13}, \quad (17)$$

де стала μ_{13} не залежить від N .

На підставі (14), (17) існують підпослідовності $\{u^{N_k}\} \subset \{u^N\}$, $\{v^{N_k}\} \subset \{v^N\}$ такі, що

$$\begin{aligned} u^{N_k} &\rightarrow u \quad * - \text{слабко в } L^\infty((0,T);H_0^2(\Omega)), \\ u_t^{N_k} &\rightarrow u_t \quad * - \text{слабко в } L^\infty((0,T);H_0^2(\Omega)), \\ u_{tt}^{N_k} &\rightarrow u_{tt} \quad * - \text{слабко в } L^\infty((0,T);L^2(\Omega)), \\ v^{N_k} &\rightarrow v \quad \text{слабко в } L^2((0,T);H_0^1(\Omega)), \\ v_t^{N_k} &\rightarrow v_t \quad \text{слабко в } L^2((0,T);H_0^1(\Omega)) \text{ при } N_k \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (18)$$

Крім того, з неперервного вкладення $H_0^2(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ для $2 < p \leq \frac{2n}{n-2}$ при $n > 4$ і $p > 2$ для $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ матимемо, що

$$\int_{Q_T} |u^N|^{p-2} u^N |^{p'} dx dt \leq \mu_{14}, \quad \mu_{14} > 0.$$

Тому

$$|u^{N_k}|^{p-2} u^{N_k} \rightarrow \chi_0 \quad \text{слабко в } L^{p'}(Q_T).$$

Зазначимо, що послідовність $\{u^N\}$ обмежена в $L^2((0,T);H_0^2(\Omega))$, а послідовність $\{u_t^N\}$ обмежена в $L^2((0,T);L^2(\Omega))$. Оскільки $H_0^2(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ компактно при $p \in [2, \frac{2n}{n-4})$, $n > 4$, то на підставі теореми 5.1 [12, с. 70] можемо вважати, що $u^{N_k} \rightarrow u$ сильно в $L^p((0,T);L^p(\Omega))$, тому і майже всюди в Q_T . Тому $\chi_0 = |u|^{p-2}u$ майже всюди в Q_T .

Домножимо перші рівняння системи (6) на $d_k \in C([0,T])$, а другі на $\tilde{d}_k \in C([0,T])$ відповідно. Отримані рівності підсумуємо за k від 1 до N . Нехай

$\eta^N = \sum_{k=1}^N d_m(t) \omega^k(x)$, $\tilde{\eta}^N = \sum_{k=1}^N \tilde{d}_m(t) \omega^k(x)$. В отриманій системі перейдемо до границі при $N_k \rightarrow \infty$, $N_k > N$. Сукупність всіх η^N позначимо через $\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{M}$, а множину $\tilde{\eta}^N - \bigcup_{N=1}^{\infty} \tilde{\mathcal{M}}$. Оскільки $\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{M}$ щільне в $H_0^2(\Omega_t)$, а $\bigcup_{N=1}^{\infty} \tilde{\mathcal{M}}$ щільне в $H_0^1(\Omega_t)$, то можемо перейти і до границі при $N \rightarrow \infty$. Одержимо систему з означення узагальненого розв'язку задачі (2)-(4).

Залишилося показати, що виконуються початкові умови.

Оскільки $u_{tt} \in L^2((0, T); L^2(\Omega))$, $u_t \in L^2((0, T); H_0^2(\Omega))$, $u \in L^2((0, T); H_0^2(\Omega))$, $v \in L^2((0, T); H_0^1(\Omega))$, $v_t \in L^2((0, T); H_0^1(\Omega))$, тоді з леми 1.2 [12, с. 20] випливає, що $u : [0, T] \rightarrow H_0^2(\Omega)$, $u_t : [0, T] \rightarrow L^2(\Omega)$, $v : [0, T] \rightarrow H_0^1(\Omega)$ є неперервними функціями.

З оцінок одержаних вище маємо, що

$$u^{N_k}(\cdot, 0) \rightarrow u(\cdot, 0) \text{ слабко в } H_0^2(\Omega),$$

але $u^{N_k}(\cdot, 0) = u_0^{N_k}(\cdot) \rightarrow u_0(\cdot)$ в $H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$, тому $u(x, 0) = u_0(x)$. Так само

$$u_t^{N_k}(\cdot, 0) \rightarrow u_t(\cdot, 0) \text{ слабко в } H_0^2(\Omega),$$

але відомо, що $u_t^{N_k}(\cdot, 0) = u_1^{N_k}(\cdot) \rightarrow u_1(\cdot)$ в $H_0^2(\Omega)$, тому $u_t(x, 0) = u_1(x)$. Також

$$v^{N_k}(\cdot, 0) \rightarrow v(\cdot, 0) \text{ слабко в } H_0^1(\Omega),$$

але $v^{N_k}(\cdot, 0) = v_0^{N_k}(\cdot) \rightarrow v_0(\cdot)$ в $H_0^2(\Omega)$, тому $v(x, 0) = v_0(x)$. Отже, виконуються початкові умови (3). Отже, розв'язок існує.

Припустимо, що коефіцієнти рівняння (2) не залежать від t і $f_1(x, t) \equiv 0$, $f_2(x, t) \equiv 0$. Введемо позначення

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \left[u_t^2 + \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} u_{x_s x_l} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} + a_0(x) u^2 + v^2 \right] dx - \\ - \frac{1}{p} \int_{\Omega_t} \gamma(x) |u|^p dx; \quad (19)$$

$$A_4 = \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} (a_0(x) + \alpha_0(x))^2, \quad B_3 = \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} \sum_{i=1}^n |\beta_i(x)|^2, \quad C_1 = \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} \sum_{i=1}^n |c_i(x)|^2;$$

$$\|D^2 u\|_2 = \left(\int_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^n u_{x_i x_j}^2 dx \right)^{1/2}, \quad \|u\|_r = \left(\int_{\Omega_t} |u|^r dx \right)^{1/r}, \quad r > 1, \quad u \in H^2(\Omega_t).$$

Нехай ν_1, ν_2, ν_3 – додатний розв'язок системи

$$2A_1\nu_1 - B_3\nu_1\nu_3 - C_1 > 0, \quad 2B_0\nu_3 - A_4\nu_2\nu_3 > 1, \quad 2C_0\nu_2 - \nu_1\nu_2 \geq 1. \quad (20)$$

Позначимо через Δ множину всіх додатних розв'язків системи (20).

Теорема 2. *Нехай існує узагальнений розв'язок (u, v) задачі (2)-(4), $b_{ij}^0(x, t) = 0$ для майже всіх $(x, t) \in Q_T$ і всіх $i, j \in \{1, \dots, n\}$, множина $\Delta \neq \emptyset$, $E(0) = -\lambda$, $\lambda > 0$, $2 < p \leq \frac{2n}{n-4}$ при $n > 4$ і $p > 2$ при $n \in \{1, 2, 3, 4\}$. Тоді не існує глобальний узагальнений розв'язок системи (2)-(4).*

Доведення. Припустимо, що існує глобальний узагальнений розв'язок задачі (2)-(4). Спочатку доведемо, що $E(t) < 0$ для довільного $t > 0$. Продиференціюємо (19) за t (зазначимо, що згідно з означенням E' існує майже для всіх t)

$$E'(t) = \int_{\Omega_t} \left[u_{tt}u_t + \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{tx_sx_l} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x)u_{x_i}u_{tx_j} + \right. \\ \left. + a_0(x)uu_t + vv_t - \gamma(x)|u|^{p-2}uu_t \right] dx.$$

Але

$$\int_{\Omega_t} \left[u_{tt}u_t + \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{tx_sx_l} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x)u_{x_i}u_{tx_j} + a_0(x)uu_t + vv_t - \right. \\ \left. - \gamma(x)|u|^{p-2}uu_t \right] dx = \int_{\Omega_t} \left[- \sum_{i=1}^n c_i(x)v_{x_i}u_t - c_0(x)u_t^2 - a_0^0(x)vu_t - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^0(x)v_{x_i}v_{x_j} - \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^n \beta_i(x)v_{x_i}v - \alpha_0(x)u_tv - \beta_0(x)v^2 \right] dx,$$

тому

$$E'(t) = \int_{\Omega_t} \left[- \sum_{i=1}^n c_i(x)v_{x_i}u_t - c_0(x)u_t^2 - a_0^0(x)vu_t - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^0(x)v_{x_i}v_{x_j} - \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^n \beta_i(x)v_{x_i}v - \alpha_0(x)u_tv - \beta_0(x)v^2 \right] dx. \quad (21)$$

Оцінимо доданки (21)

$$\hat{J}_1 := - \int_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^0(x)v_{x_i}v_{x_j}dx \leq -A_1 \int_{\Omega_t} \sum_{i=1}^n |v_{x_i}|^2 dx, \\ \hat{J}_2 := - \int_{\Omega_t} \sum_{i=1}^n c_i(x)v_{x_i}u_t dx \leq \frac{C_1}{2\nu_1} \int_{\Omega_t} \sum_{i=1}^n |v_{x_i}|^2 dx + \frac{\nu_1}{2} \int_{\Omega_t} |u_t|^2 dx, \quad \nu_1 > 0, \\ \hat{J}_3 := - \int_{\Omega_t} c_0(x)u_t^2 dx \leq -C_0 \int_{\Omega_t} u_t^2 dx,$$

$$\hat{J}_4 := - \int_{\Omega_t} (a_0^0(x) + \alpha_0(x)) v u_t dx \leq \frac{A_4 \nu_2}{2} \int_{\Omega_t} |v|^2 dx + \frac{1}{2\nu_2} \int_{\Omega_t} u_t^2 dx, \quad \nu_2 > 2,$$

$$\hat{J}_5 := - \int_{\Omega_t} \sum_{i=1}^n \beta_i(x) v_{x_i} v dx \leq \frac{B_3 \nu_3}{2} \int_{\Omega_t} \sum_{i=1}^n |v_{x_i}|^2 dx + \frac{1}{2\nu_3} \int_{\Omega_t} |v|^2 dx, \quad \nu_3 > 0,$$

$$\hat{J}_6 := - \int_{\Omega_t} \beta_0(x) |v|^2 dx \leq -B_0 \int_{\Omega_t} |v|^2 dx.$$

Враховуючи оцінки інтегралів $\hat{J}_1 - \hat{J}_6$, з (21), матимемо

$$\begin{aligned} E'(t) \leq & - \int_{\Omega_t} \left[|u_t|^2 \left(C_0 - \frac{\nu_1}{2} - \frac{1}{2\nu_2} \right) + |v|^2 \left(B_0 - \frac{1}{2\nu_3} - \frac{A_4 \nu_2}{2} \right) + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^n |v_{x_i}|^2 \left(A_1 - \frac{B_3 \nu_3}{2} - \frac{C_1}{2\nu_1} \right) \right] dx \leq 0, \end{aligned} \quad (22)$$

якщо $(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \in \Delta$, то $E(t) \leq E(0) < 0$, бо $E(0) < 0$.

Введемо позначення

$$H(t) = -E(t), \quad L(t) = H^{1-\alpha}(t) + \varepsilon \int_{\Omega_t} u u_t dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega_t} c_0(x) |u|^2 dx.$$

Зрозуміло, що для $0 < \alpha < 1$

$$[L(t)]^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq 3^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(H(t) + \varepsilon^{\frac{1}{1-\alpha}} \left| \int_{\Omega_t} u u_t dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} + \left| \frac{C^0 \varepsilon}{2} \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \left| \int_{\Omega_t} |u|^2 dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \right).$$

Оцінимо доданки останньої нерівності

$$\begin{aligned} \hat{J}_7 &:= \left| \int_{\Omega_t} u u_t dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq \left(\int_{\Omega_t} |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \left(\int_{\Omega_t} |u_t|^2 dx \right)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \leq \\ &\leq M_0 \left(\int_{\Omega_t} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p(1-\alpha)}} \left(\int_{\Omega_t} |u_t|^2 dx \right)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \leq M_1 (||u(\cdot, t)||_p^s + ||u_t(\cdot, t)||_2^2), \end{aligned}$$

де $s = \frac{2}{1-2\alpha}$, M_0, M_1 – додатні константи. Якщо $||u(\cdot, t)||_p \leq 1$, то за теоремою вкладки Соболева $||u(\cdot, t)||_p^s \leq ||u(\cdot, t)||_p^2 \leq C ||D^2 u(\cdot, t)||_2^2$. Якщо $||u(\cdot, t)||_p > 1$, то $||u(\cdot, t)||_p^s \leq ||u(\cdot, t)||_p^p$. Тобто, правильна нерівність

$$||u(\cdot, t)||_p^s \leq C (||u(\cdot, t)||_p^p + ||D^2 u(\cdot, t)||_2^2) \quad \text{при} \quad 2 \leq s \leq p, \quad \alpha \leq \frac{p-2}{2p}. \quad (23)$$

Отож,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_t} uu_t dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} &\leq M_2 (\|u(\cdot, t)\|_p^p + \|u_t(\cdot, t)\|_2^2 + \|D^2 u(\cdot, t)\|_2^2) \leq \\ &\leq M_2 (H(t) + \|u_t(\cdot, t)\|_2^2 + \|D^2 u(\cdot, t)\|_2^2 + \|u(\cdot, t)\|_p^p). \end{aligned}$$

Аналогічно до (23) оцінюємо

$$\begin{aligned} \widehat{J}_8 &:= \left| \int_{\Omega_t} |u|^2 dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq M_3 \left(\int_{\Omega_t} |u|^p dx \right)^{\frac{2}{p(1-\alpha)}} \leq M_3 (\|u(\cdot, t)\|_p^p + \|D^2 u(\cdot, t)\|_2^2) \leq \\ &\leq M_3 (H(t) + \|u_t(\cdot, t)\|_2^2 + \|D^2 u(\cdot, t)\|_2^2 + \|u(\cdot, t)\|_p^p) \end{aligned}$$

при $\alpha \leq \frac{p-2}{2p}$, тому

$$[L(t)]^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq M_4 (H(t) + \|u_t(\cdot, t)\|_2^2 + \|D^2 u(\cdot, t)\|_2^2 + \|u(\cdot, t)\|_p^p).$$

Розглянемо

$$L'(t) = (1 - \alpha) H^{-\alpha}(t) H'(t) + \varepsilon \int_{\Omega_t} \left[u_t^2 + uu_{tt} + c_0(x)uu_t \right] dx.$$

Але правильна рівність

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_t} \left[u_{tt}u + \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{x_i x_j} u_{x_s x_l} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x)u_{x_i} u_{x_j} + \right. \\ &\left. + \sum_{i=1}^n c_i(x)v_{x_i}u + c_0 u u_t + a_0(x)u^2 + a_0^0(x)vu \right] dx = \int_{\Omega_t} \gamma(x)|u|^p dx, \end{aligned}$$

тому для $m > 2$ одержимо

$$\begin{aligned} L'(t) &= (1 - \alpha) H^{-\alpha}(t) H'(t) + \varepsilon \int_{\Omega_t} \left[u_t^2 - \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{x_i x_j} u_{x_s x_l} - \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x)u_{x_i} u_{x_j} - \right. \\ &\left. - \sum_{i=1}^n c_i(x)v_{x_i}u - a_0(x)u^2 - a_0^0(x)uv + \gamma(x)|u|^p \right] dx + m\varepsilon H(t) - \frac{m\varepsilon}{p} \int_{\Omega_t} \gamma(x)|u|^p dx + \\ &+ \frac{m\varepsilon}{2} \int_{\Omega_t} \left[u_t^2 + \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{x_i x_j} u_{x_s x_l} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x)u_{x_i} u_{x_j} + a_0(x)u^2 + v^2 \right] dx = \\ &= (1 - \alpha) H^{-\alpha}(t) H'(t) + \left(1 + \frac{m}{2} \right) \varepsilon \int_{\Omega_t} u_t^2 dx + \left(\frac{m}{2} - 1 \right) \varepsilon \int_{\Omega_t} \left[\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{x_i x_j} u_{x_s x_l} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} + a_0(x) u^2 \Big] dx + \frac{m\varepsilon}{2} \int_{\Omega_t} |v|^2 dx - \varepsilon \int_{\Omega_t} \left[\sum_{i=1}^n c_i(x) v_{x_i} u + a_0^0(x) uv \right] dx + \\
& + \varepsilon \left(1 - \frac{m}{p} \right) \int_{\Omega_t} \gamma(x) |u|^p dx + m\varepsilon H(t).
\end{aligned}$$

Оцінимо доданки останньої рівності

$$\begin{aligned}
\hat{J}_9 &:= \int_{\Omega_t} \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} u_{x_s x_l} dx \geq A_2 \int_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^n |u_{x_i x_j}| dx, \\
\hat{J}_{10} &:= \int_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} dx \geq B_1 \int_{\Omega_t} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 dx, \\
\hat{J}_{11} &:= - \int_{\Omega_t} \sum_{i=1}^n c_i(x) v_{x_i} u dx \geq - \frac{C_1}{2\delta} \int_{\Omega_t} \sum_{i=1}^n |v_{x_i}|^2 dx - \frac{\delta}{2} \int_{\Omega_t} |u|^2 dx, \quad \delta > 0, \\
\hat{J}_{12} &:= \int_{\Omega_t} a_0(x) u^2 dx \geq A_0 \int_{\Omega_t} u^2 dx, \\
\hat{J}_{13} &:= - \int_{\Omega_t} a_0^0(x) uv dx \geq - \frac{\delta}{2} \int_{\Omega_t} |u|^2 dx - \frac{A_5}{2\delta} \int_{\Omega_t} |v|^2 dx,
\end{aligned}$$

де $A_5 = \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} |a_0^0(x)|^2$,

$$\hat{J}_{14} := \int_{\Omega_t} \gamma(x) |u|^p dx \geq \gamma_0 \int_{\Omega_t} |u|^p dx.$$

Прийmemo $\delta = \frac{H^\alpha(t)}{1-\alpha} \nu_4$ і оцінимо

$$\begin{aligned}
H^\alpha(t) \int_{\Omega_t} |u|^2 dx &\leq M_5 \left(\int_{\Omega_t} |u|^p dx \right)^\alpha \int_{\Omega_t} |u|^2 dx \leq \\
&\leq M_6 \left(\int_{\Omega_t} |u|^p dx \right)^{\alpha + \frac{2}{p}} = M_6 \|u(\cdot, t)\|_p^{2+\alpha p}.
\end{aligned}$$

Якщо $\alpha \leq \frac{p-2}{p}$, то, використавши попередню оцінку та (23), одержимо

$$\frac{H^\alpha(t)}{1-\alpha} \int_{\Omega_t} |u|^2 dx \leq M_7 \left[\|u(\cdot, t)\|_p^p + \|D^2 u(\cdot, t)\|_2^2 \right].$$

Врахувавши (22) та отримані оцінки, матимемо

$$\begin{aligned}
 L'(t) \geq & (1 - \alpha)H^{-\alpha}(t) \int_{\Omega_t} \left[|u_t|^2 \left(C_0 - \frac{\nu_1}{2} - \frac{1}{2\nu_2} \right) + |v|^2 \left(B_0 - \frac{A_4\nu_2}{2} - \frac{1}{2\nu_3} - \frac{\varepsilon A_5\nu_4}{2} \right) + \right. \\
 & + \sum_{i=1}^n |v_{x_i}|^2 \left(A_1 - \frac{B_3\nu_3}{2} - \frac{C_1}{2\nu_1} - \frac{\varepsilon C_1\nu_4}{2} \right) \Big] dx + \varepsilon \left(1 + \frac{m}{2} \right) \int_{\Omega_t} |u_t|^2 dx + \frac{m\varepsilon}{2} \int_{\Omega_t} |v|^2 dx + \\
 & + \left[\left(\frac{m}{2} - 1 \right) A_2 - M_7\nu_4 \right] \varepsilon \int_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^n |u_{x_i x_j}|^2 dx + A_0 \left(\frac{m}{2} - 1 \right) \varepsilon \int_{\Omega_t} |u|^2 dx + \\
 & + B_1 \left(\frac{m}{2} - 1 \right) \varepsilon \int_{\Omega_t} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 dx + \varepsilon \left[\left(1 - \frac{m}{p} \right) \gamma_0 - M_7\nu_4 \right] \int_{\Omega_t} |u|^p dx + m\varepsilon H(t).
 \end{aligned}$$

$$\text{Виберемо } 2 < m < p, \nu_4 < \min \left\{ \frac{(m-2)A_2}{2M_7}; \frac{(p-m)\gamma_0}{pM_7} \right\},$$

$$\varepsilon < \min \left\{ \frac{(2B_0 - A_4\nu_2)\nu_3 - 1}{A_5\nu_3\nu_4}; \frac{(2A_1 - B_3\nu_3) - C_1}{C_1\nu_1\nu_4} \right\},$$

тоді

$$\begin{aligned}
 L'(t) \geq & M_8 \int_{\Omega_t} \left[|u_t|^2 + |v|^2 + \sum_{i=1}^n |v_{x_i}|^2 \right] dx + M_9 H(t) + M_{10} \int_{\Omega_t} \left[\sum_{i,j=1}^n |u_{x_i x_j}|^2 + |u|^p \right] dx \geq \\
 & \geq M_{11} \left[H(t) + \|u_t(\cdot, t)\|^2 + \|D^2 u(\cdot, t)\|^2 + \|u(\cdot, t)\|_p^p \right].
 \end{aligned}$$

Отже,

$$L'(t) \geq M_{11}[L(t)]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (24)$$

Оскільки $H(0) = \lambda > 0$, $H'(t) \geq 0$, то $H(t) \geq \lambda$. Тому ε можна вибрати так, що

$$L(0) = H^{1-\alpha}(0) + \varepsilon \int_{\Omega_t} u_0 u_1 dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega_t} c_0(x) u_1^2 dx \geq \frac{\lambda}{2}.$$

Позначимо $\gamma = \frac{1}{1-\alpha}$, $\gamma > 1$. Поділимо (24) на $L^\gamma(t)$ та проінтегруємо обидві частини отриманої нерівності (24) за t від 0 до t . Одержимо,

$$L^{\gamma-1}(t) \geq \frac{1}{L^{1-\gamma}(0) - M_{11}(\gamma-1)t},$$

тому існує таке T_0 , що $L(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow T_0 - 0$. Звідки випливає, що

$$\lim_{t \rightarrow T_0 - 0} H(t) = +\infty \text{ або } \lim_{t \rightarrow T_0 - 0} \int_{\Omega_t} |u|^p dx = +\infty.$$

Одержане протиріччя завершує доведення теореми.

Зауваження 1. Зазначимо, що існують такі значення параметрів $A_1, A_4, B_0, B_3, C_0, C_1$, для яких $\Delta \neq \emptyset$. Справді, виберемо ν_1, ν_2, ν_3 з системи

$$\nu_1(2A_1 - B_3\nu_3) = C_1 + \nu_0,$$

$$\nu_3(2B_0 - A_4\nu_2) = 1 + \nu_0,$$

$$\nu_2(2C_0 - \nu_1) = 1,$$

де $\nu_0 > 0$ – досить мале число.

З цих рівнянь маємо

$$\nu_1 = \frac{C_1 + \nu_0}{2A_1 - B_3\nu_3}, \quad \nu_2 = \frac{1}{2C_0 - \nu_1} = \frac{2A_1 - \nu_3B_3}{4C_0A_1 - 2\nu_3C_0B_3 - C_1 - \nu_0},$$

$$\nu_3 \left(2B_0 - \frac{2A_1A_4 - \nu_3B_3A_4}{4C_0A_1 - C_1 - \nu_0 - 2\nu_3C_0B_3} \right) = 1 + \nu_0.$$

Якщо $4C_0A_1 > C_1$, то можемо зазначити такі ν_0, B_3, A_4 , що $\nu_1 > 0, \nu_2 > 0, \nu_3 > 0$.

1. *Grobbelaar-Van Dalsen M.* On fractional powers of a pair of martices and a plate-beam problem / *Grobbelaar-Van Dalsen M.* // Appl. Anal. – 1999. – Vol. 72. – P. 369-390.
2. *Grobbelaar-Van Dalsen M.* Interlude of operator pairs and a Von Karman plate-beam problem with rotational inertia / *Grobbelaar-Van Dalsen M.* // Appl. Anal. – 2000 – Vol. 75. – P. 349-369.
3. *Kim J.U.* On the energy decay of a linear thermo-elastic bar and plate / *Kim J.U.* // SIAM J. Math. Anal. – 1992. – Vol. 23. – P. 889-899.
4. *Lagnese J.E.* Boundary Stabilization of Thin Plates. / *Lagnese J.E.* // SIAM Studies in Applied Mathematics, vol. 10, SIAM, Philadelphia. – 1989.
5. *Lagnese J.E.* Modelling and controllability of plate-beam system / *Lagnese J.E.* // J. Math. Syst. Estim. Contr. – 1995. – Vol. 5. – P. 141-187.
6. *Lasiecka I.* Control and stabilization of interactive systems, in "Systems and Control in the Twenty-First Century". / *Lasiecka I.* – Birkhauser, Boston. – 1997. – P. 245-262.
7. *Muñoz Rivera.* Smoothing properties, decay, and and global existence of solutions to nonlinear coupled systems of thermoelastic type / *Muñoz Rivera, J. E., Racke, R.* // SIAM J. Math. Anal. – 1995. – Vol. 26. – P. 1547-1563.
8. *Avalos G.* Exponential stability of a thermoelastic system without mechanical dissipation / *Avalos G., Lasiecka I.* // Rend. Instit. Mat. Univ. Trieste Suppl. – 1997. – Vol. 28. – P. 1-28.
9. *Гавеський Х.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / *Гавеський Х., Греггер К., Захаруас К.* – М.: Мир, 1978. – 336 с.
10. *Коддингтон Э.А.* Теория обыкновенных краевых задач // *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* – М.: ИЛ, 1958. – 474 с.
11. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости // *Демидович Б.П.* – М.: Наука, 1967. – 472 с.
12. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач // *Лионс Ж.-Л.* – М.: Мир, 1972. – 588 с.

NONEXISTENCE OF A GLOBAL SOLUTION OF ONE HYBRID SYSTEMS OF EVOLUTION EQUATIONS

Halyna TORHAN

*Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1*

The hybrid system of evolution equations where one of which contains second time derivative and second contains first time derivative is considered. Some sufficient conditions the existence of a solution of the mixed problem for this system in the bounded cylinder domain are obtained and also are got the conditions at which the global solution does not exist.

Key words: hybrid system of evolution equation, mixed problem.

Стаття надійшла до редколегії 05.12.2007

Прийнята до друку 22.10.2008

УДК 517.53

ПРО АСИМПТОТИЧНІ ЗНАЧЕННЯ ЦІЛОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ СТОСОВНО ЙОГО МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА

Степан ФЕДИНЯК, Мирослав ШЕРЕМЕТА

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1*

Досліджено умови, за яких цілий ряд Діріхле не має асимптотичних значень стосовно його максимального члена.

Ключові слова: ряд Діріхле, максимальний член, асимптотичні значення.

1. Нехай $0 < \lambda_n \uparrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$), а ряд Діріхле

$$F(s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}, \quad s = \sigma + it, \quad (1)$$

має абсцису абсолютної збіжності $\sigma_a = +\infty$. Прийнемо

$$M(\sigma, F) = \max\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\},$$

і нехай $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} : n \geq 0\}$ – максимальний член, а $\nu(\sigma, F) = \max\{n : |a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} = \mu(\sigma, F)\}$ – центральний індекс. Припустимо, що $a_n = |a_n|e^{i\alpha_n}$, $0 \leq \alpha_n < 2\pi$, і прийнемо

$$\mu(s) = \mu(s, F) = \mu(\sigma + it, F) = \mu(\sigma, F) \exp\{it\lambda_{\nu(\sigma, F)}\}.$$

Зауважимо, що функція $\mu(s)$ неперервна в кожній вертикальній смужі, де функція $\nu(\operatorname{Re} s, F)$ є неперервною.

Нехай $\gamma(\tau)$, $\tau \geq \tau_0$, – неперервна крива така, що $\operatorname{Re} \gamma(\tau) \rightarrow +\infty$, $\tau \rightarrow +\infty$.

Якщо $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{\bar{F}(\gamma(\tau))}{\mu(\gamma(\tau))} = \omega$, де $0 \leq |\omega| \leq +\infty$, то будемо говорити, що ω є μ -асимптотичним значенням функції F , крива $\gamma(\tau)$ є μ -асимптотичним шляхом.

Для довільного $l \in (0, +\infty)$ прийнемо

$$R_{lt} = \{\tau : \operatorname{Re} \gamma(t) \leq \operatorname{Re} \gamma(\tau) < \operatorname{Re} \gamma(t) + l\}.$$

Асимптотичний шлях називатимемо рівномірно коливним, якщо

$$\max_t \{ \max_{\tau \in R_{lt}} \{ |\operatorname{Im} \gamma(\tau) - \operatorname{Im} \gamma(t)| \} \} < Q(l) < +\infty$$

для всіх $\tau > \tau_0$. Відповідні асимптотичні значення називатимемо рівномірно коливними.

Припустимо, що в ряді (1) всі $a_n > 0$ і $\varkappa_n = \frac{\ln a_n - \ln a_{n+1}}{\lambda_n - \lambda_{n+1}} \nearrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$). В [1] доведено таке: якщо $0 < h \leq \lambda_{n+1} - \lambda_n \leq H < +\infty$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} (\varkappa_{n+1} - \varkappa_n) = L > 0$, то F не має рівномірно коливних асимптотичних значень.

Наступна теорема доповнює цей результат.

Теорема 1. *Якщо*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} = a \in [1, +\infty) \quad \text{і} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n)(\varkappa_{n+1} - \varkappa_n) = b \in (0, +\infty),$$

то F не має асимптотичних значень.

Доведення. Припустимо від супротивного, що F має μ -асимптотичний шлях $\gamma(t)$ і μ -асимптотичне значення ω .

Для кожного n знайдеться такий півінтервал $[t_n; t_n^*)$, що для всіх $t \in [t_n; t_n^*)$ виконується $\varkappa_n \leq \operatorname{Re} \gamma(t) < \varkappa_{n+1}$ і $\operatorname{Re} \gamma(t_n) = \varkappa_n$, $\operatorname{Re} \gamma(t_n^*) = \varkappa_{n+1}$. Для кожного n визначимо єдиний такий інтервал і об'єднання цих інтервалів позначимо через Γ .

Для заданого t існує єдине n таке, що $\varkappa_n \leq \operatorname{Re} \gamma(t) < \varkappa_{n+1}$. Позначимо

$$V_n = \sup \{ |\operatorname{Im} \gamma(t)| (\lambda_{n+1} - \lambda_n) : \varkappa_n \leq \operatorname{Re} \gamma(t) < \varkappa_{n+1} \}.$$

Запишемо

$$\gamma(t) = \varkappa_n + \frac{bc_n(t) + iV_nd_n(t)}{\lambda_{n+1} - \lambda_n},$$

де $c_n(t)$ і $d_n(t)$ — дійсні числа. Тоді $|\operatorname{Im} \gamma(t)| = \frac{|d_n(t)|V_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}$ і

$$0 \leq \operatorname{Re} \gamma(t) - \varkappa_n = (1 + o(1))(\varkappa_{n+1} - \varkappa_n)c_n(t) \leq \varkappa_{n+1} - \varkappa_n,$$

так що $|d_n(t)| \leq 1$ і $0 \leq c_n(t) \leq 1 + o(1)$, $n \rightarrow \infty$. Якщо прийнемо $\gamma_n(t) = c_n(t) + id_n(t)$, то послідовність $(\gamma_n(t))$ обмежена.

Прийнемо

$$\Phi_n(w) = \frac{F(\varkappa_n + bw/(\lambda_{n+1} - \lambda_n))}{\mu(\varkappa_n + bw/(\lambda_{n+1} - \lambda_n))} = \frac{F(s)}{\mu(s)}, \quad s = \varkappa_n + \frac{bw}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}$$

і покажемо, що $\Phi_n(w)$ рівномірно у вертикальній смужі $\Omega = \{w : 0 \leq \operatorname{Re} w \leq \beta\}$, $1/2 < \beta < 1$, збігається до несталої аналітичної функції $\Phi(w)$.

Зауважимо, що

$$\varkappa_n \leq \operatorname{Re} s = \varkappa_n + \frac{b \operatorname{Re} w}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \leq \varkappa_n + \frac{b\beta}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = \varkappa_n + (1 + o(1))\beta(\varkappa_{n+1} - \varkappa_n) < \varkappa_{n+1}$$

для $n \geq n_0$. Тому $\nu(\operatorname{Re} s, F) = n$ і, оскільки

$$a_n = \exp \left\{ - \sum_{j=0}^{n-1} \varkappa_j (\lambda_{j+1} - \lambda_j) \right\},$$

то

$$\mu(\operatorname{Re} s, F) = a_n \exp \{ \lambda_n \operatorname{Re} s \} = \exp \left\{ - \sum_{j=0}^{n-1} \varkappa_j (\lambda_{j+1} - \lambda_j) + \lambda_n \operatorname{Re} s \right\}.$$

Звідси випливає, що

$$\begin{aligned} \Phi_n(w) &= \frac{F(\varkappa_n + bw/(\lambda_{n+1} - \lambda_n))}{\mu(\varkappa_n + bw/(\lambda_{n+1} - \lambda_n))} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \exp \left\{ \sum_{j=k}^{n-1} \varkappa_j (\lambda_{j+1} - \lambda_j) - (\lambda_n - \lambda_k) \left(\varkappa_n + \frac{bw}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \right) \right\} + 1 + \\ &+ \sum_{k=n+1}^{\infty} \exp \left\{ - \sum_{j=n}^{k-1} \varkappa_j (\lambda_{j+1} - \lambda_j) + (\lambda_k - \lambda_n) \left(\varkappa_n + \frac{bw}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \right) \right\} = \\ &= \sum_{m=-n}^{-1} \exp \left\{ \sum_{j=n+m}^{n-1} \varkappa_j (\lambda_{j+1} - \lambda_j) + (\lambda_{n+m} - \lambda_n) \varkappa_n + \frac{\lambda_{n+m} - \lambda_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} bw \right\} + 1 + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \exp \left\{ - \sum_{j=n}^{n+m-1} \varkappa_j (\lambda_{j+1} - \lambda_j) + (\lambda_{n+m} - \lambda_n) \varkappa_n + \frac{\lambda_{n+m} - \lambda_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} bw \right\}. \quad (2) \end{aligned}$$

Рівність (2) можна записати у вигляді

$$\Phi_n(w) = \sum_{m=-n}^{+\infty} \exp \left\{ b_{n,m} + (\lambda_{n+m} - \lambda_n) \varkappa_n + \frac{\lambda_{n+m} - \lambda_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} bw \right\}, \quad (3)$$

де $b_{n,m} = \sum_{j=n+m}^{n-1} \varkappa_j (\lambda_{j+1} - \lambda_j)$ для $m < 0$, $b_{n,m} = - \sum_{j=n}^{n+m-1} \varkappa_j (\lambda_{j+1} - \lambda_j)$ для $m > 0$ і $b_{n,m} = 0$ для $m = 0$.

Оскільки для $0 \leq \operatorname{Re} w \leq \beta$ і $m < 0$

$$\begin{aligned} &b_{n,m} + (\lambda_{n+m} - \lambda_n) \varkappa_n + \frac{\lambda_{n+m} - \lambda_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} b \operatorname{Re} w \leq \\ &\leq \sum_{j=n+m}^{n-1} \varkappa_j (\lambda_{j+1} - \lambda_j) + (\lambda_{n+m} - \lambda_n) \varkappa_n = - \sum_{j=n+m}^{n-1} (\varkappa_n - \varkappa_j) (\lambda_{j+1} - \lambda_j) \leq \\ &\leq - \sum_{j=n+m}^{n-1} b_1 = mb_1, \end{aligned}$$

де стала $b_1 \in (0, b)$, $b_{n,1} + (\lambda_{n+1} - \lambda_n)\varkappa_n + b\operatorname{Re} w = b\operatorname{Re} w \leq b\beta$, а для $m > 1$

$$\begin{aligned}
 & b_{n,m} + (\lambda_{n+m} - \lambda_n)\varkappa_n + \frac{\lambda_{n+m} - \lambda_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} b\operatorname{Re} w = \\
 & = - \sum_{j=n}^{n+m-1} \varkappa_j (\lambda_{j+1} - \lambda_j) + (\lambda_{n+m} - \lambda_n) \left(\varkappa_n + \frac{b\operatorname{Re} w}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \right) = \\
 & = - \sum_{j=n+1}^{n+m-1} \left(\varkappa_j - \varkappa_n - \frac{b\operatorname{Re} w}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \right) (\lambda_{j+1} - \lambda_j) + b\operatorname{Re} w \leq \\
 & \leq - \sum_{j=n+1}^{n+m-1} (\varkappa_j - \varkappa_{n+1}) (\lambda_{j+1} - \lambda_j) + b\beta \leq - \sum_{j=n+2}^{n+m-1} (\varkappa_j - \varkappa_{j-1}) (\lambda_{j+1} - \lambda_j) + b\beta = \\
 & = - \sum_{j=n+2}^{n+m-1} (\varkappa_j - \varkappa_{j-1}) (\lambda_j - \lambda_{j-1}) \frac{\lambda_{j+1} - \lambda_j}{\lambda_j - \lambda_{j-1}} + b\beta \leq \\
 & \leq - \sum_{j=n+2}^{n+m-1} b_1 a_1 + b\beta = -(m-2)b_1 a_1 + b\beta,
 \end{aligned}$$

де сталі b_1 , a_1 такі, що $0 < b_1 < b$, $0 < a_1 < a$, то ряд (3) мажорується збіжним рядом

$$\sum_{m=-\infty}^{-1} \exp\{mb_1\} + 1 + \exp\{b\beta\} + \sum_{m=2}^{+\infty} \exp\{-(m-2)b_1 a_1 + b\beta\}$$

і, отже, за теоремою Вейерштрасса ряд (2) абсолютно і рівномірно збіжний стосовно $n \in \mathbb{N}$ і $w \in \Omega$ до аналітичної в Ω функції Φ , причому

$$\Phi(w) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(w) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left\{ b_{m,n} + (\lambda_{n+m} - \lambda_n)\varkappa_n + \frac{\lambda_{n+m} - \lambda_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} bw \right\}.$$

Нехай $m > 0$. Тоді

$$\begin{aligned}
 b_{m,n} + (\lambda_{n+m} - \lambda_n)\varkappa_n &= - \sum_{j=n}^{n+m-1} \varkappa_j (\lambda_{j+1} - \lambda_j) + \varkappa_n \sum_{j=n}^{n+m-1} (\lambda_{j+1} - \lambda_j) = \\
 &= - \sum_{j=n}^{n+m-1} (\varkappa_j - \varkappa_n) (\lambda_{j+1} - \lambda_j) = - \sum_{j=n+1}^{n+m-1} (\varkappa_j - \varkappa_n) (\lambda_{j+1} - \lambda_j) = \\
 &= - \sum_{j=n+1}^{n+m-1} \sum_{k=n}^{j-1} (\varkappa_{k+1} - \varkappa_k) (\lambda_{k+1} - \lambda_k) \prod_{p=k+1}^j \frac{\lambda_{p+1} - \lambda_p}{\lambda_p - \lambda_{p-1}}
 \end{aligned}$$

і, якщо $a > 1$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_{m,n} + (\lambda_{n+m} - \lambda_n)\varkappa_n) = - \sum_{j=n+1}^{n+m-1} \sum_{k=n}^{j-1} ba^{j-k} =$$

$$\begin{aligned}
&= -ab \sum_{j=n+1}^{n+m-1} \frac{a^{j-n} - 1}{a - 1} = \frac{-ab}{a - 1} \left(\sum_{j=n+1}^{n+m-1} a^{j-n} - m + 1 \right) = \\
&= \frac{-ab}{a - 1} \left(a \frac{a^{m-1} - 1}{a - 1} - m + 1 \right) = \frac{-ab}{(a - 1)^2} (a^m - m(a - 1) - 1), \quad (4)
\end{aligned}$$

якщо $a = 1$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_{m,n} + (\lambda_{n+m} - \lambda_n) \varkappa_n) = -b \sum_{j=n+1}^{n+m-1} (j - n) = -\frac{bm(m-1)}{2}. \quad (5)$$

Нехай тепер $m < 0$. Тоді, як вище,

$$b_{m,n} + (\lambda_{n+m} - \lambda_n) \varkappa_n = - \sum_{j=n+m}^{n-1} \sum_{k=j}^{n-1} (\varkappa_{k+1} - \varkappa_k) (\lambda_{k+1} - \lambda_k) \prod_{p=j+1}^k \frac{\lambda_{p+1} - \lambda_p}{\lambda_p - \lambda_{p-1}}$$

і, якщо $a > 1$, то

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} (b_{m,n} + (\lambda_{n+m} - \lambda_n) \varkappa_n) &= -b \sum_{j=n+m}^{n-1} \sum_{k=j}^{n-1} \left(\frac{1}{a} \right)^{j-k} = -b \sum_{j=n+1}^{n-1} \frac{1 - (1/a)^{n-j}}{1 - 1/a} = \\
&= -\frac{-ab}{a - 1} \left(-m - \sum_{j=n+1}^{n-1} a^{j-n} \right) = \frac{-ab}{a - 1} \left(-m - \sum_{l=1}^{|m|} a^{-l} \right) = \\
&= \frac{-ab}{a - 1} \left(-m - \frac{1}{a} \frac{1 - (1/a)^{|m|}}{1 - 1/a} \right) = \frac{-ab}{(a - 1)^2} (a^m - m(a - 1) - 1),
\end{aligned}$$

тобто маємо (4), якщо $a = 1$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_{m,n} + (\lambda_{n+m} - \lambda_n) \varkappa_n) = -b \sum_{j=n+m}^{n-1} (n - j) = -\frac{b|m|(|m| + 1)}{2} = -\frac{bm(m-1)}{2},$$

тобто маємо (5).

Далі, для $m > 0$ у випадку $a > 1$

$$\frac{\lambda_{n+m} - \lambda_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = \sum_{j=n}^{n+m-1} \prod_{k=n+1}^j \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} \rightarrow \sum_{k=0}^{m-1} a^k = \frac{a^m - 1}{a - 1}, \quad n \rightarrow \infty,$$

а у випадку $a = 1$ маємо $\frac{\lambda_{n+m} - \lambda_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \rightarrow m$, $n \rightarrow \infty$. Подібно для $m < 0$ у випадку $a > 1$

$$\frac{\lambda_{n+m} - \lambda_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = - \sum_{j=n+m}^{n-1} \prod_{k=j+1}^n \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} \rightarrow - \sum_{k=-m}^1 (1/a)^k = \frac{a^m - 1}{a - 1}, \quad n \rightarrow \infty,$$

а у випадку $a = 1$ маємо $\frac{\lambda_{n+m} - \lambda_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \rightarrow m$, $n \rightarrow \infty$.

Тому з огляду на (4) і (5), якщо $a > 1$, то

$$\Phi(w) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ \frac{-ab}{(a-1)^2} (a^m - m(a-1) - 1) + \frac{b(a^m - 1)}{a-1} w \right\},$$

якщо $a = 1$, то $\Phi(w) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ \frac{-bm(m-1)}{2} + b mw \right\}$. Звідси випливає, що $\Phi(w) \neq \text{const.}$

Нехай T – множина граничних точок $\{\gamma_n(t)\}$ при $t \rightarrow \infty$. Покажемо, що в T існує незліченна множина, на якій $\Phi(w)$ константа.

Справді, нехай Σ це перетин Ω з дійсною віссю, введемо відображення $\xi: \Sigma \rightarrow T$ задане так. Для кожного $x \in \Sigma$ існує t_n таке, що $\text{Re } \gamma(t_n) = \varkappa_n + \frac{bx}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}$, тобто $\text{Re } \gamma_n(t_n) = x$. Візьмемо граничну точку v послідовності $\{\gamma_n(t_n)\}$ і приймемо $\xi(x) = v$. Тоді ξ є однозначною функцією у розумінні $\text{Re } \xi(x) = x$. Тому T є незліченною як і Σ .

Припустимо, що $\gamma_n(t_k) \rightarrow y \in T$ на деякій послідовності $\{t_k\}$. З рівномірної збіжності отримуємо, що $\Phi_n(\gamma_n(t_k)) \rightarrow \Phi(y)$. Ми припустили, що ω є μ -асимптотичним значенням і, отже, $\Phi(y) = \omega$. Звідси випливає, що Φ є сталою на T , а це суперечність. Отож, F не має μ -асимптотичних значень.

-
1. Fedynyak S.I. Asymptotic values of entire Dirichlet series with respect to its maximal term / Fedynyak S.I., Sheremeta, M.M. // Matem. Studii. – 2003. – Vol. 19, №1. – P. 31-36.

ASYMPTOTIC VALUES OF ENTIRE DIRICHLET SERIES WITH RESPECT TO ITS MAXIMAL TERM

Stepan FEDYNYAK, Myroslav SHEREMETA

*Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka str., 1*

For an entire Dirichlet series $F(s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp \{s \lambda_n\}$, $s = \sigma + it$, with the maximal term $\mu(\sigma, F)$ and the central index $\nu(\sigma, F)$ we investigate the behaviour of $F(\gamma(\tau))/\mu(\gamma(\tau))$ as $\tau \rightarrow +\infty$, where $\mu(s) = \mu(\sigma, F) \exp \{it \lambda_{\nu(\sigma, F)}\}$ and $\gamma(\tau)$ is a continuous curve such that $\text{Re } \gamma(t) \rightarrow +\infty$ as $\tau \rightarrow +\infty$.

Key words: entire Dirichlet series, maximal term, asymptotic values.

Стаття надійшла до редколегії 02.07.2007

Прийнята до друку 22.10.2008

УДК 517.53

ПІДСУМОВУВАННЯ ЛОГАРИФМА МОДУЛЯ ДЗЕТА-ФУНКЦІЇ РІМАНА НА КРИТИЧНІЙ ПРЯМІЙ

Петро ЯЦУЛКА

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1*

Узагальнено один результат М. Балазара, Е. Сайяса, М. Йора про підсумовування логарифма модуля дзета-функції Рімана на критичній прямій. Як наслідок отримано новий еквівалент гіпотези Рімана.

Ключові слова: дзета-функція Рімана, гіпотеза Рімана, формула Пуассона-Йенсена.

Відомо [1], [9], що $\int_{-\infty}^{+\infty} \log |\zeta(\frac{1}{2} + it)| dt$ розбігається. В [1] цей інтеграл підсумовано з ядром $1/|s|^2$ і знайдено один еквівалент гіпотези Рімана.

Головний результат цієї статті – така теорема.

Теорема 1. *Нехай $\{\rho_j\}$ нулі дзета-функції Рімана $\zeta(s)$ в півплощині $\{s : \operatorname{Re} s > 1/2\}$. Для довільного s , $\operatorname{Re} s > 1/2$ справджується рівність*

$$\begin{aligned} \frac{|s|^2 - |s-1|^2}{2\pi} \int_{\operatorname{Re} u = 1/2} \log |\zeta(u)| \frac{|du|}{|u-s|^2} - \log \left| \frac{s-1}{s} \zeta(s) \right| = \\ = \sum_{\operatorname{Re} \rho_j > 1/2} \log \left| \frac{s + \bar{\rho}_j - 1}{s - \rho_j} \right|. \end{aligned} \quad (1)$$

Доведення. В площині комплексної змінної z розглянемо круг $D_R = \{z : |z| < R\}$. Для мероморфної функції $f(z)$ в крузі D_R правильна формула Пуассона-Йенсена ([8, с. 21])

$$\begin{aligned} \log |f(re^{i\theta})| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\varphi})| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\varphi + \\ + \sum_{|a_\mu| < R} \log \left| \frac{R(z - a_\mu)}{R^2 - \bar{a}_\mu z} \right| - \sum_{|b_\nu| < R} \log \left| \frac{R(z - b_\nu)}{R^2 - \bar{b}_\nu z} \right| - k \log \frac{R}{r}, \end{aligned}$$

де $\{a_\mu\}$ – нулі функції $f(z)$, $\{b_\nu\}$ – полюси функції $f(z)$, враховуючи їхні кратності; k – порядок нуля або $(-k)$ порядок полюса функції $f(z)$ при $z = 0$, $z = re^{i\theta}$. Дзета-функція Рімана $\zeta(s)$ має полюс порядку одиниця при $s = 1$, тому розглянемо функцію $f(z) = (s-1)\zeta(s) = \frac{z}{1-z}\zeta(\frac{1}{1-z})$, де $s = \frac{1}{1-z}$ – конформне відображення круга $D = D_1$ на півплощину $\{s : \operatorname{Re} s > 1/2\}$. В крузі D_R , $R < 1$ функція $f(z)$ полюсів не має [9], $f(0) \neq 0, \infty$. Тому формула Пуассона-Йенсена набуває вигляду

$$\begin{aligned} \log |f(z)| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\varphi})| \operatorname{Re} \frac{Re^{i\varphi} + z}{Re^{i\varphi} - z} d\varphi + \\ &+ \sum_{|a_\mu| < R} \log \left| \frac{R(z - a_\mu)}{R^2 - \bar{a}_\mu z} \right|, \quad z \in D_R. \end{aligned} \quad (2)$$

Для функцій з просторів Гарді H^p , $p > 0$ (див. [6, с. 100], а також [4], [5]) існує сингулярна міра $\sigma \geq 0$ на $[0; 2\pi]$ така, що

$$\begin{aligned} f(z) &= B(z) \cdot \exp \left(-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} d\sigma(\varphi) \right) \cdot \exp(iC) \times \\ &\times \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} \log |f(e^{i\varphi})| d\varphi \right), \end{aligned} \quad (3)$$

де $B(z) = \prod_\mu \frac{|a_\mu|}{a_\mu} \frac{a_\mu - z}{1 - \bar{a}_\mu z}$ – добуток Бляшке, побудований за нулями a_μ функції $f(z)$, C – дійсна стала.

Формула (3) – канонічне зображення функції $f \in H^p$, $p > 0$. Взявши логарифм модуля обох боків рівності (3), отримаємо

$$\begin{aligned} \log |f(z)| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} \log |f(e^{i\varphi})| d\varphi - \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} d\sigma(\varphi) + \sum_{|a_\mu| < 1} \log \left| \frac{z - a_\mu}{1 - \bar{a}_\mu z} \right|. \end{aligned}$$

В [2] (див. також [1]) визначено, що $f(z) \in H^{1/3}$, причому міра σ , асоційована з внутрішнім сингулярним множителем в зображенні $f(z)$, є нульовою. Тому

$$\log |f(z)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(e^{i\varphi})| \operatorname{Re} \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} d\varphi + \sum_{|a_\mu| < 1} \log \left| \frac{z - a_\mu}{1 - \bar{a}_\mu z} \right|, \quad |z| < 1. \quad (4)$$

Це є формула Пуассона-Йенсена при $R = 1$. Врахувавши обернене відображення $z = \frac{s-1}{s}$ та рівність $\log |f(w)| = \log \left| \frac{w}{1-w} \right| + \log \left| \zeta \left(\frac{1}{1-w} \right) \right|$, де $w = e^{i\varphi}$, отримуємо

$$\left| \frac{z - a_\mu}{1 - \bar{a}_\mu z} \right| = \left| \frac{s - \rho_\mu}{s + \bar{\rho}_\mu - 1} \right|, \quad a_\mu = \frac{\rho_\mu - 1}{\rho_\mu},$$

$$\operatorname{Re} \frac{w+z}{w-z} = \frac{1-|z|^2}{|w-z|^2} = \frac{(|s|^2 - |s-1|^2)|u|^2}{|u-s|^2}, \quad u = \frac{1}{1-w},$$

$$d\varphi = \frac{|du|}{|u|^2}, \quad |u| = |u-1|, \quad u = \frac{1}{2} + it.$$

$$\begin{aligned} \log |(s-1)\zeta(s)| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{w}{1-w} \right| \operatorname{Re} \frac{w+z}{w-z} d\varphi + \\ &+ \frac{|s|^2 - |s-1|^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |\zeta(u)| \frac{|du|}{|u-s|^2} + \sum_{\operatorname{Re} \rho_j > 1/2} \log \left| \frac{s - \rho_j}{s + \bar{\rho}_j - 1} \right|. \end{aligned}$$

Використавши формулу Пуассона-Йенсена для функції $g(z) = \frac{z}{1-z}$ (ця функція має нуль порядку одиниця при $z=0$), при $R=1$ отримаємо

$$\log \left| \frac{z}{1-z} \right| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{w}{1-w} \right| \operatorname{Re} \frac{w+z}{w-z} d\varphi - \log \frac{1}{|z|}$$

або

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{w}{1-w} \right| \operatorname{Re} \frac{w+z}{w-z} d\varphi = -\log |1-z| = \log |s|.$$

Рівність (4) тепер можемо записати так:

$$\begin{aligned} \log \left| \frac{s-1}{s} \zeta(s) \right| &= \frac{|s|^2 - |s-1|^2}{2\pi} \int_{\operatorname{Re} u=1/2} \log |\zeta(u)| \frac{|du|}{|u-s|^2} + \\ &+ \sum_{\operatorname{Re} \rho_j > 1/2} \log \left| \frac{s - \rho_j}{s + \bar{\rho}_j - 1} \right|. \end{aligned}$$

Це і є співвідношення (1), записане в іншому вигляді.

Теорема 1 доведена.

Прийнявши в (1) $s=1$ і враховуючи, що $|(s-1)\zeta(s)| \rightarrow 1$ при $s \rightarrow 1$ [9], а також $|u-1|=|u|$ при $u = \frac{1}{2} + it$, отримуємо такий результат з [1]

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\operatorname{Re} u=1/2} \log |\zeta(u)| \frac{|du|}{|u|^2} = \sum_{\operatorname{Re} \rho_j > 1/2} \log \left| \frac{\rho_j}{1-\rho_j} \right|.$$

Як відомо, гіпотеза Рімана стверджує, що всі нетривіальні нулі дзета-функції мають дійсну частину $1/2$ (лежать на так званій критичній прямій [7]). Використовуючи рівність (1), доведемо таку теорему (еквівалент гіпотези Рімана).

Теорема 2. *Гіпотеза Рімана справджується тоді і лише тоді, коли*

$$\frac{|s|^2 - |s-1|^2}{2\pi} \int_{\operatorname{Re} u = 1/2} \log |\zeta(u)| \frac{|du|}{|u-s|^2} - \log \left| \frac{s-1}{s} \zeta(s) \right| = 0 \quad (5)$$

для довільного s , $\operatorname{Re} s > 1/2$.

При $s = 1$ отримуємо еквівалент гіпотези Рімана з [1].

Доведення. Необхідність. Якщо гіпотеза Рімана справджується, то суми з правого боку (1) немає, отже, і лівий бік дорівнює нулеві.

Достатність. Нехай виконується (5). Тобто в рівності (1) лівий бік дорівнює нулеві для всіх s , $\operatorname{Re} s > 1/2$. Припустимо, що гіпотеза Рімана не справджується, тобто існують нулі ρ_j , $\operatorname{Re} \rho_j > 1/2$. Розглянемо суму $\sum_{\operatorname{Re} \rho_j > 1/2} \log \left| \frac{s+\bar{\rho}_j-1}{s-\rho_j} \right|$. Кожний

доданок у цій сумі строго додатний. Справді, функція $u = h(s, \rho_j) = \frac{s+\bar{\rho}_j-1}{s-\rho_j}$ відображає півплощину $\{s : \operatorname{Re} s > 1/2\}$ на зовнішність одиничного круга $\{u : |u| < 1\}$, тому $\left| \frac{s+\bar{\rho}_j-1}{s-\rho_j} \right| > 1$ і $\log \left| \frac{s+\bar{\rho}_j-1}{s-\rho_j} \right| > 0$. Отримали $\sum_{\operatorname{Re} \rho_j > 1/2} \log \left| \frac{s+\bar{\rho}_j-1}{s-\rho_j} \right| > 0$. Оскільки вико-

нується (1) і (5), то повинно бути $\sum_{\operatorname{Re} \rho_j > 1/2} \log \left| \frac{s+\bar{\rho}_j-1}{s-\rho_j} \right| = 0$. Отримане протиріччя доводить достатність.

Теорема 2 доведена.

Зауважимо, що для $s = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ відомі точні значення $\zeta(s)$

$$\zeta(2k) = \frac{2^{2k-1} \pi^{2k}}{(2k)!} B_k,$$

де B_k – числа Бернуллі ($B_1 = 1/6$, $B_2 = 1/30$, ... [3])

У випадку правильності гіпотези Рімана повинно виконуватись

$$\int_{\operatorname{Re} u = 1/2} \log |\zeta(u)| \frac{|du|}{|u-2k|^2} = \frac{2\pi}{4k-1} \log \frac{(2k-1)2^{2k-1} \pi^{2k} B_k}{2k \cdot (2k)!}.$$

Вдячність професорові Кондратюку А.А. за зазначену тему досліджень.

1. Balazard M. Notes sur la fonction ζ de Riemann, 2 / Balazard M., Saias E. and Yor M. // Advances in Mathematics – 1999. – Vol. 143. – P. 284-287.
2. Bercovici H.A real variable restatement of Riemann's hypothesis / Bercovici H.A. and Foias C. // Israel Journal of Mathematics. – 1984. – Vol. 48, №1. – P. 57 – 68.
3. Dwight H.B. Tables of integrals and other Mathematical data / Dwight H.B. – New York: Macmillan Co., 1961. – 336 p.
4. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции / Гарнетт Дж. – М.: Мир, 1984. – 469 с.
5. Гофман К. Банаховы пространства аналитических функций / Гофман К. – М.: Из-во иностр. л-ры, 1963. – 311 с.
6. Кусис П. Введение в теорию пространств H^p / Кусис П. – М.: Мир, 1984. – 368 с.

7. *Riemann B.* Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grosse / *Riemann B.* // Monat. der Konigl. Preuss. Akad. der Wissen. zu Berlin aus der Jahre. – 1859 (1860). – P. 671-680.
8. *Rubel Lee A.* Entire and meromorphic functions / *Rubel Lee A.* – New York: Springer-Verlag, 1996. – 187 p.
9. *Титчмарш Е.К.* Теория дзета-функции Римана / *Титчмарш Е.К.* – М.: Из-во иностр. л-ры, 1953. – 409 с.

SUMMATION OF THE RIEMANN ZETA-FUNCTION MOD LOGARITHM ON THE CRITICAL LINE

Petro YATSULKA

*Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka str., 1*

A result of M. Balazard, E. Saias, M. Yor on summation of the Riemann zeta-function logarithm on the critical line is generalized. A new equivalent of the Riemann hypothesis is obtained

Key words: Riemann zeta-function, Riemann hypothesis, Poisson-Jensen Theorem.

Стаття надійшла до редколегії 27.12.2006

Прийнята до друку 22.10.2008

ІНФОРМАЦІЙНЕ ПОВІДОМЛЕННЯ

Редакційна колегія журналу "Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична" приносить вибачення О. Коркуні за описку, що трапилася в нашому журналі (Випуск 67).

Замість	Має бути
Олесь Коркун	Олеся Коркуна
Oles' Korkun	Olesya Korkuna

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

1. Стаття повинна містити результати нових досліджень автора з повним їхнім доведенням. Не доцільно робити великі огляди вже опублікованих результатів. Робити посилання на неопубліковані праці не можна.

2. Текст статті набирають на комп'ютері українською чи англійською мовами. До редакційної колегії потрібно подавати:

два примірники статті з підписом автора (співавторів) на останній сторінці;
назву статті, резюме (резюме повинно передавати зміст основних результатів статті, а не лише повторювати її назву), ключові слова, ім'я, прізвище автора, місце роботи, адресу українською, англійською та російською мовами, електронну адресу; електронний варіант статті та резюме на дискеті 3,5" (редколегія повертає авторів дискету; тексти можна надіслати за адресою lnu.visn.mtm@gmail.com);

довідка про автора (співавторів), у якій треба зазначити ім'я, по батькові та прізвище автора, місце роботи, посаду, домашню адресу, телефон та електронну адресу.

Оптимальний обсяг статті до 12 сторінок. Розмір шрифтів 10pt, висота сторінки – 190 mm, ширина – 135 mm.

3. Вимоги до набору.

Текст статті створювати у версії $\text{\LaTeX}$ з кодуванням кирилических шрифтів „Кирилиця (Windows)“ (кодова сторінка 1251).

На першій сторінці статті потрібно зазначити номер УДК.

Номери формул ставити з правого боку і нумерувати лише формули, на які є посилання.

У посиланнях на теорему з монографії зазначити сторінку, на якій вона описана.

Рисунки до статті подавати у графічному форматі BMP чи PCX. Назва рисунка чи його номер не входять у зображення їх треба створювати засобами $\text{\LaTeX}$ 'у. Вибираючи розмір графічного зображення, належить врахувати, що воно буде надруковане на принтері з роздільною здатністю 600 dpi.

Літературу подавати загальним списком у порядку посилань на джерела в тексті статті.

Зразки бібліографічного опису книги, статті, препринту, дисертації, депонованого рукопису, тез доповідей конференцій (з'їздів та ін.):

1. *Грабович А.І.* Назва / *Грабович А.І.* – К.: Вища школа, 1985. – 196 с.
2. *Петренко О.Б.* Назва / *Петренко О.Б., Шинк М.М.* – Л.: Афіша, 2001. – 196 с.
3. *Кравчук О.М.* Назва / *Кравчук О.М.* // Укр. мат. журн. – 1985. – Т. 2, №2. – С. 4-20.
4. *Кравчук О.М.* Назва / *Кравчук О.М., Потічний М.М.* // Матем. Студії – 1995. – Т. 2, №2. – С. 4-20.

5. *Михайленко Г.Д.* Назва / *Михайленко Г.Д.* – Л.: ІППММ, 1993. – 9 с. – (Препринт / НАН України, Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача: 80.1).
6. *Михайленко Г.Д.* Назва / *Михайленко Г.Д., Степаняк С.І.* – Л.: ІППММ, 1993. – 9 с. – (Препринт / НАН України, Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача: 80.1).
7. *Колмаз Ю. А.* Назва: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук. / *Колмаз Ю.А.* – К., 2008. – 20 с.
8. *Сеник С.М.* Назва / *Сеник С.М.* – К., 1992. – 17 с. – Деп. в ДНТБ України, В2020-1995.
9. *Сеник С.М.* Назва / *Сеник С.М., Мандрик І.Т.* – К., 1992. – 17 с. – Деп. в ДНТБ України, В2020-1995.
10. *Муравський В.К.* Назва / *Муравський В.К.* // Наукова конф. "Нелінійні диференціальні рівняння": тези доп., 27 серпня - 2 вересня 1994 р., Київ. – К.: КНУ ім. Т. Г. Шевченка, 1994. – С. 540-551.
11. *Муравський В.К.* Назва / *Муравський В.К., Ліско С.В.* // Наукова конф. "Нелінійні диференціальні рівняння": тези доп., 27 серпня - 2 вересня 1994 р., Київ. – К.: КНУ ім. Т. Г. Шевченка, 1994. – С. 540-551.

