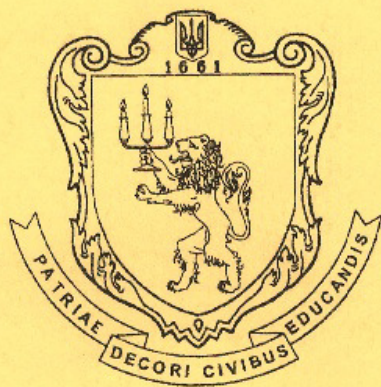


ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

ВИПУСК 69



Львів
Львівський національний університет імені Івана Франка
2008

ISSN 2078-3744

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 69



Львівський національний університет імені Івана Франка
2008

V I S N Y K
OF THE LVIV
UNIVERSITY

Series
Mechanics and Mathematics

Issue 69

Scientific journal

Published 1-2 issues per year

Published since 1965

Ivan Franko National
University of Lviv

В І С Н И К
ЛЬВІВСЬКОГО
УНІВЕРСИТЕТУ

Серія
механіко-математична

Випуск 69

Збірник наукових праць

Виходить 1-2 рази на рік

Видається з 1965 року

Львівський національний
університет імені Івана Франка

2008

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка
Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. – 2008. – Випуск 69.

Visnyk of the Lviv University. Series Mechanics and Mathematics. – 2008. – Vol. 69.

Вісник містить статті з теорії крайових задач для диференціальних рівнянь, алгебри, топології, теорії функцій комплексного змінного, функціонального аналізу, теорії ймовірності та статистики, проблем математичного моделювання фізико-механічних процесів і механіки.

Для наукових працівників, аспірантів і студентів старших курсів.

The issue contains articles on theory of boundary value problems for differential equations, algebra, topology, complex analysis, functional analysis, probability theory and statistics, problems of mathematical modelling of physical and mechanical processes and mechanics.

For scientists, post graduates and students.

Редакційна колегія: д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Зарічний* (відп. ред.); д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Комарницький* (заст. ред.); д-р фіз.-мат. наук, проф. *С. Лавренюк* (заст. ред.); канд. фіз.-мат. наук, доц. *О. Бугрій* (відп. секр.); д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Іванчов*; д-р фіз.-мат. наук, проф., член-кор. НАН України *О. Андрейків*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *В. Андрійчук*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *О. Артемович*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *Т. Банах*; д-р фіз.-мат. наук, проф., член-кор. НАН України *Я. Бурак*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *Я. Єлейко*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Заболоцький*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *А. Кондратюк*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *В. Копитко*; канд. фіз.-мат. наук, проф. *Я. Прытула*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *О. Скасків*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *О. Сторож*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *Г. Сулим*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Шеремета*.

Editorial board: M. Zarichny (executive editor-in-chief), M. Komarnitskyi (associate editor), S. Lavrenyuk (associate editor), O. Buhrii (executive secretary), M. Ivanchov, O. Andreykiv, V. Andriychuk, O. Artemovych, T. Banakh, Ya. Burak, Ya. Yeleyko, M. Zabolotskyi, A. Kondratyuk, B. Kopytko, Ya. Prytula, O. Skaskiv, O. Storozh, G. Sulym, M. Sheremeta.

Адреса редакційної колегії:

Львівський національний університет
імені Івана Франка,
механіко-математичний факультет,
вул. Університетська, 1 79000 Львів
Україна тел. (0322) 74-11-07

E-mail: lnu.visn.mm@gmail.com

Редактор *Н. Плиса*

Друкується за ухвалою Вченої Ради

Львівського національного університету імені Івана Франка

Editorial address:

Ivan Franko National University
of L'viv
Mechanical and Mathematical department
Universytets'ka st. 1 UA-79000 L'viv,
Ukraine tel. +(38) (0322) 74-11-07

© Львівський національний університет імені Івана Франка, 2008

ЗМІСТ

Сулим Георгій. Володимир Левицький в історії становлення і розвитку Наукового Товариства ім. Шевченка та української культури в галузі точних наук.....	7
Кирилич Володимир, Філімонов Андрій. Глобальна гладка розв'язність гіперболічної квазілінійної задачі Валле-Пуссена з вільними межами	38
Гачкевич Микола, Гачкевич Олександр, Грза Євген, Касперський Зигмунт, Тріщ Богдан. Оптимізація режимів термообробки елементів скляних конструкцій за підвищених температур.....	66
Торган Галина. Поведінка розв'язків мішаної задачі для параболічного рівняння четвертого порядку на нескінченності.....	72
Дробенко Богдан, Казарян Карен, Касперський Зигмунт. Електромагнітне поле, температура та напружений стан у скінченному циліндрі за умов його індукційного нагріву.....	78
Прохоренко Мирослава. Задача з імпульсною дією для модельного рівняння коливань струни	85
Асташкін Володимир, Гачкевич Олександр, Онишко Олексій, Боженко Богдан. Моделювання фазового та напруженого станів стержня при крученні за структурних змін.....	93
Стащук Микола, Опанасович Віктор, Дорош Мар'ян. Підкріплення стільникового трубопроводу кільцевими ребрами з врахуванням дії відпорних зусиль	98
Нестер Володимир, Сулим Георгій. Контактна взаємодія вала і тіла з циліндричною порожниною за наявності зазору між ними.....	111
Опанасович Віктор, Яцик Ігор. Згин пластини Рейсснера з наскрізною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів	125
Лавренюк Василь, Лавренюк Микола. Пружнопластичне деформування термочутливих тіл.....	136
Сулим Георгій, Кривень Марта. Пластичне відшаровування жорсткого підкріплення берега тріщини за наявності перепаду границі текучості.....	143
Соляр Тетяна. Визначення нестационарних температурних полів і напружень у зістикованих смугах на підставі чисельно-аналітичної формули обернення Лапласа	150
Сас Наталія. Поширення у нескінченному тілі еліптичної тріщини високотемпературної повзучості	158
Андрейків Олександр, Галазюк Ольга. Осесиметричне скручування циліндра локалізованим поверхневим навантаженням за існування межового шару	166

<i>Лесів Ростислав. Довговічність пластини з двояко-періодичною системою прямолінійних повзучо-втомних тріщин.....</i>	<i>177</i>
<i>Прокопишин Іван, Хлебніков Дмитро, Гробер Йосип, Щукін Артур. Асимптотичний аналіз температурних напружень у тонкій стрічці для протяжних зон нагріву у вакуумі.....</i>	<i>183</i>
<i>Сулим Георгій, Рабош Роман. Антиплоска задача для тонкого пружного включення у п'єзоелектричному просторі.....</i>	<i>189</i>
<i>Кузь Ігор. Числове розв'язування плоскої задачі деформаційної теорії пластичності про деформування металевого кутника</i>	<i>203</i>
<i>Звізло Іван. Двовісний згин моментами на нескінченності кусково-однорідної пластини з прямолінійною тріщиною з урахуванням контакту її берегів</i>	<i>210</i>
<i>Мусій Роман, Стасюк Галина. Динамічна центральносиметрична задача термомеханіки для порожнистої електропровідної кулі за умов поверхневої дії електромагнітного імпульсу.....</i>	<i>219</i>
<i>Жидик Уляна. Температурні напруження у композитній циліндричній оболонці при локальному нагріві</i>	<i>227</i>
<i>Ревенко Віктор. Метод розв'язування плоскої задачі для криволінійної пластини з кутовими точками.....</i>	<i>235</i>
<i>Гарт Етері, Лисицина Олена, Прокопало Євген. Експериментальне дослідження пластини з отвором на основі поляризаційно-оптичного методу.....</i>	<i>245</i>
<i>Турчин Ольга, Турчин Ігор. Нестационарне осесиметричне температурне поле в шаруватому півпросторі, зумовлене імпульсним нагріванням</i>	<i>256</i>
<i>Любін Олександр. Контакт жорстких тіл під дією змінного навантаження.</i>	<i>262</i>
<i>Дмитришин Юрій. Задача без початкових умов для абстрактних неявних субдиференціальних еволюційних включень.....</i>	<i>268</i>

CONTENTS

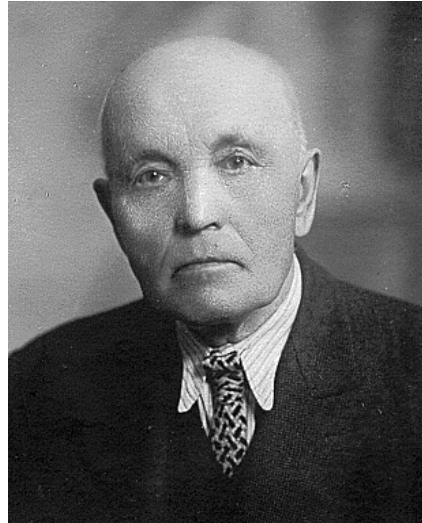
<i>Sulym Georgiy</i> . Volodymyr Levytskyy in the establishment history of the Shevchenko Scientific Societies and Ukrainian culture in the field of exact sciences	7
<i>Kyrylych Volodymyr, Filimonov Andrij</i> . Global differentiable solvability of the hyperbolic quasilinear Vallee-Poussin problem with free boundary	38
<i>Gachkevych Mykola, Hachkevych Oleksandr, Irza Yevgen, Kasperski Zygmunt, Trishch Bohdan</i> . Thermal processing optimization of glass elements at high temperature	66
<i>Torhan Halina</i> . Behavior of solutions of the mixed problem for the parabolic equation of the fourth order on the infinity.....	72
<i>Drobenko Bogdan, Kazaryan Kaper, Kasperskiy Zigmund</i> . Electromagnetic field, temperature and stress state in finite cylinder subjected to induction heating.....	78
<i>Prokhorenko Myroslava</i> . Problem with the impulse excitation for the modelling equation of oscillations of the string.....	85
<i>Astashkin Volodimir, Gachkevich Oleksandr, Onishko Oleksiy, Bogenko Bogdan</i> . Modelling of beam phase and stress state under torsion during structural changes.....	93
<i>Stashchuk Mykola, Opanasovich Viktor, Dorosh Maryan</i> . Reinforcement of cellular pipeline by circular ribs taking into account the action of efforts.....	98
<i>Nester Volodymyr, Sulym Georgiy</i> . Contact interaction between cylindrical shaft and space with cylindrical cavity in the presence of gap between them.....	111
<i>Opanasovych Victor, Yatsyk Ihor</i> . Bending of the Reissner's plate with through-the-thickness crack taking into account contact region width of its faces.....	125
<i>Lavrenyuk Vasyl, Lavrenyuk Mykola</i> . Elastoplastic deformation of thermosensitive bodies	136
<i>Sulym Georgiy, Kriven Marta</i> . Plastic delaminating of the rigid reinforcement of the crack edge in the presence of yield drop ..	143
<i>Solyar Tetyana</i> . Definition of non-stationary temperature fields and stresses in joined strips based on numerical-analytical inversion formula Laplace	150
<i>Sas Natalija</i> . Elliptic crack propagation of high-temperature creep in infinity solid.....	158
<i>Andreykiv Oleksandr, Halazyuk Olha</i> . Axis symmetrical cylinder torsion by the local surface loading of the cylinder in the case of existence of the boundary layer.....	166

<i>Lesiv Rostislav</i> . Lifetime of a plate with double-periodical system of straight creep-fatigue cracks.....	177
<i>Prokopyshyn Ivan, Khlebnikov Dmytro, Grobers Yosyp, Schukin Artur</i> . Asymphtotic analysis of thermal stresses in infinite thin tape for long heating zones in vacuum	183
<i>Sulym Georgiy, Rabosh Roman</i> . Anti-plane problem for a thin elastic inclusion in a piezoelectric medium	189
<i>Kuz' Ihor</i> . Numerical solution of plane plasticity problem about metal elbow strain	203
<i>Zvizlo Ivan</i> . Biaxial bend by moments on endlessness of lump-homogeneous plate with rectilineal crack taking into account contact of its banks	210
<i>Musiy Roman, Stasyuk Galina</i> . Dynamical centralsymmetrical task of thermo-mechanics for a hollow electro-conductive bullet subject to the condition superficial action of electromagnetic impulse	219
<i>Zhydyk Ulyana</i> . Thermal stresses of composite cylindrical shells under local heating	227
<i>Revenko Victor</i> . The method of a solution of a plane problem for a curvilinear plate with angular points	235
<i>Hart Eteri, Lisicina Elena, Prokopalo Evgen</i> . Experimental investigation of plate with hole based on the method of photoelasticity.....	245
<i>Turchyn Olha, Turchyn Ihor</i> . Quasistatic problem of heat conductivity in the layered half-space from impulsive heating ..	256
<i>Lyubin Alexander</i> . Contact problem for rigid bodies under variable load	262
<i>Dmytryshyn Yuriy</i> . The problem without initial conditions for abstract implicit subdifferential evolution inclusions	268

ВОЛОДИМИР ЛЕВИЦЬКИЙ В ІСТОРІЇ СТАНОВЛЕННЯ І РОЗВИТКУ НАУКОВОГО ТОВАРИСТВА ІМ. ШЕВЧЕНКА ТА УКРАЇНСЬКОЇ КУЛЬТУРИ В ГАЛУЗІ ТОЧНИХ НАУК *

Георгій СУЛИМ

Видатний український математик та громадський діяч Володимир Левицький як ніхто інший так довго, бо аж 51 рік, був щоденно і діяльно дійсним членом повсюдно шанованого Наукового товариства імені Шевченка. Лише знищення Товариства 1940 року радянською владою та неможливість його подальшого плідного функціонування порушили вироблений десятиліттями органічний зв'язок, позбавивши Володимира Левицького того джерела натхнення, яке він отримував, мало не щоденно відвідуючи Товариство. Тут він мав нагоду спілкуватися з такими ж як Він – подвижницько закоханими у суспільну, просвітницьку та творчу інтелектуальну працю Патріотами. Адже жив та працював разом з такими велетами духу як Іван Франко, Михайло Грушевський і мало в чому їм уступав.



Професор Володимир
Йосипович Левицький

Народився Володимир Левицький 31 грудня 1872 р. у Тернополі. Охрестили його 7 січня 1873 р. у звичному для західного українця грекокатолицькому віросповіданні. Його батьки Йосиф Левицький Серафима Левицька з Ілевичів походили з давніх священницьких шляхетських родів з гербу Рогалів та гербу Заремба.

Батько (1840 – жовтень 1903) був високим судовим урядником. У молодості страшно бідував, навіть вимушений був зробити перерву в гімназійній науці, Хоча всі іспити та ригорози (строгі докторські іспити, аналог сучасних кандидатських) склав з відзнакою, на останній іспит та промоцію у нього вже не вистачило грошей, тому доктором наук не став. Після отримання диплому правника у Львівському університеті був послідовно практикантом у Львові та Городенці (містечко на сучасній Франківщині, де, між іншим, було засноване наукове товариство), судовим ад'юнктом у Тернополі та Заліщиках (сюди Володимир потрапив тримісячною дитиною), начальником суду в Мільниці над Дністром (тепер Мельниця-Подільська), заступником прокурора у Золочеві, радником суду

*Статтю опубліковано в авторській редакції.

© Сулим Г., 2008

в Тернополі і Львові. Помер у Відні на роботі за письмовим столом як надворний радник (hofrat) при найвищому трибуналі. Похований у Львові на Личаківському цвинтарі. Був людиною здібною, надзвичайно працьовитою, педантичною і дуже строгою та вимогливою. У спогадах сина знаходимо: "...пестощей зі сторони батька я бодай ніколи не знав і тому може вже з дитинства моя натура ставала замкнена в собі, неприступна для загалу." В усіх цитуваннях для збереження духу епохи орфографія повністю збережена.

Мати Серафима з Ілевичів (1841 – квітень 1878) "була донькою рідного вуйка могого батька; така мода женитися в найблисшій родині завелася майже у нас всіх, бо і молодший мій брат і я оженилися із близькими своячками, а те саме було і в наших дідів. ...Може наша родина zdeгенерувала ся через подружжя між собою." Померла вона уночі на сам Великдень, коли з хати пішли численні гості. Залишила сиротами чотирьох синів та ще немовлятко-хлопчика, який відразу помер. До того часу Левицькі мали ще й дочку Оленку, яка ще однорічною дитиною у Мільниці померла. Поховали матір у Золочеві, де на той час з грудня 1877 р. працював Й. Левицький. За виховання дітей взялася незаміжня батькова сестра Марія (померла у 1923 р. у Львові), господарством до своєї смерті у 1890 р. займалася його мати.

Найстарший брат Роман (1879–1927) спольщився і дослужився до радника апеляційного суду у Львові, Мар'ян (1871–лютий 1895) теж правник, помер замолоду, як конципіант (стажист) дирекції залізниць у Станіславові (Івано-Франківську). Наймолодший брат Юліан (1874–1925), історик за фахом, у 1917–25 рр. був директором української гімназії у Тернополі. Усі четверо братів закінчили Львівський університет.

У 1878 р. Володимир пішов до золочівської чотирирічної народної школи. Осінню 1880 р. містом перейшла епідемія віспи. Брат Юліан переніс її легку форму, Володимир же – найтяжчу чорну віспу, коли все тіло і навіть очі перетворилися на суцільну рану. А до того долучився ще й дифтерит. Лише навесну завдяки міцному організмові прийшло повільне одужання.

У вересні 1882 р. був складений перший іспит до золочівської нижчої гімназії, у якій далі навчався до кінця першого півріччя IV-го класу. Після січня 1886 р. внаслідок переїзду батька на працю до Тернополя продовжив навчання у єдиній місцевій (польській) гімназії. Тут завдяки прекрасним вчителям захопився математикою, фізикою, хімією та астрономією, заняттями спортом. Батькові нелегко було отримувати численну родину, тож ще учнем Володимир почав заробляти на свої потреби репетиторством. Завдяки цьому вони з братом Юліаном створили для себе непогану хіміко-фізичну лабораторію.

Влітку 1889 р. Левицькі переїхали до Львова і Володимир пішов до VIII-го класу польської гімназії ім. Франца-Йосипа. Вже як творець української математичної і фізичної термінології з цього приводу він пізніше зазначив: "До української ані до німецької не міг вписатися з причини незнання термінології." Рівень викладання тут був не до порівняння нижчим, як у Тернополі. Лекції математики і фізики були за

висловом В.Левицького "страшенною моральною мукою". Тим не менше, саме тут у дощовий день 30 червня 1890 р., він з відзнакою склав іспит зрілості. "За весь час науки (гімназійної – Г.С.) не опустив я ані одної шкільної лекції, що ніколи ані писемно ані устно з відповіді не дістав т. зв. двійки...а все був перший ученик, в якійнебудь школі я вчився." Жили Левицькі у цей час поряд з університетом на вул. Гончарській (тепер Драгоманова), 26, на розі вул. Хмельовської (сучасної вулиці Глібова).

Упродовж 1890–94 рр. навчався на філософському факультеті Львівського університету, де вивчав математику під проводом відомого професора українського князя Ю.Пузини. Фізики і математики навчали проф. О.Фабіян та проф. І.Закржевський. Під проводом проф. І.Радзішевського вивчав хімію, геологію – у проф. Дуніковського, а окрім того, додатково студіював математику в Школі політехнічній (др К.Жоравський – потім професор у Кракові та Варшаві), та природничі науки (біологію і бактеріологію) в університеті і додатково у Академії ветеринарії. Тепер може викликати велике здивування той факт, що, судячи із залікової книжки, Ю.Пузина, О.Фабіян, І.Закржевський забезпечували у нього більше 90 % (у третьому й четвертому семестрах навіть усі 100 %) усього навчального завантаження упродовж кожного семестру навчання. Скажімо у четвертому семестрі Ю.Пузина читав курси "Теорія підстановок" (3 год. на тиждень), "Теорія функцій Абеля" (4), "Вправи з математики" (2); О.Фабіян – "Механічна теорія тепла" (3), "Вчення про гази" (2), "Вимірювання електричних величин" (5), "Числові рівняння" (3); І.Радзішевський – "Загальна хімія" (6), "Практичні вправи у хімічній лабораторії" (15).

Усе це йшло всупереч бажанню батька бачити сина юристом або, принаймні, офіцером, для яких на той час кар'єра була гарантованою. Гімназійні вчителі теж відраджували навчання на філософському факультеті, особливо його математичному напрямі, оскільки перспективи отримати хоч би учительську посаду були у тій порі досить примарними. Зазначимо, що разом з В.Левицьким на першому курсі математику вивчало усього ще п'ять студентів; на другому у цей час було таких двоє, на третьому – лише один! Через рік, два прийшло їх трохи більше, зокрема й Клим Глібовицький, з яким Володимир довгі роки приятелював і переписувався. Пізніше застав його В.Левицький професором тернопільської гімназії; у 1907 р. той трагічно помер у Куликові від рани, завданої у Перемишлі (там тоді працював) своїм психічно хворим учнем.

Захоплення математикою стимулювало початки успішної студентської наукової праці. "Тоді то на третьому році дістав я першу семінаріальну нагороду 80 австр. гульденів (за працю про періодичність функцій), та на четвертій році ще двократно нагороду. І вже в грудні 1893 р. написав я і надрукував як студент IV року мою першу оригінальну роботу, признану пізніше докторською." Обдарований студент IV року брав теж участь у з'їзді польських природників і математиків.

Це були часи реформування заснованого ще у 1873 р. Товариства ім. Шевченка у наукове. На загальних зборах Товариства ще у 1890 році Олександр Барвінський подав проект його реформування за зразком

західно-європейських наукових установ для того, аби стати "засновником майбутньої українсько-руської академії наук". Адміністрування Товариства мав зайнятися Виділ (тобто правління); наукова діяльність повинна була зосереджуватися у трьох секціях: філологічній, історико-філософській та математично-природописно-лікарській. Після тривалих дискусій на наступних загальних зборах 13 березня 1892 р. проект прийняли, обрали головою О.Барвінського і Товариство зреформували у Наукове Товариство імені Шевченка (НТШ). Вже 11 травня 1893 р. відбулися перші загальні збори НТШ.

На цих зборах О.Барвінський сказав: "Сим разом відкриваю збори, важні для історії нашого товариства, котре вступає на нову дорогу, стає науковим товариством. Се хвиля історичного значіння в культурнім і національнім розвою українсько-руського народу, бо ми кладемо угольний камінь під нерукотворну сьвятиню, де зберігати і плекати =меть ся (зберігатиметься і плекатиметься – Г.С.) найперше живло нашого народу, наша рідна мова... Товариство ім. Шевченка багато помагало розвою нашої літератури і тепер прийшла пора для него підняти нашу мову до научної поваги." (ЦДІА України у Львові, ф. 309, оп. 1, справа 33). До цього часу Товариство налічувало лише 47 членів. Збори прийняли додатково ще 84. Директором математично-природописно-лікарської секції (МПЛС) обрали Івана Верхратського – визначного просвітника і натураліста.

Відразу ж після реформи Товариство розпочало випускати "Записки наукового товариства ім. Шевченка", які містили на своїх сторінках наукові праці з усіх галузей знань: філософії, історії, медицини, математики тощо, впроваджуючи у життя поставлене О.Барвінським на загальних зборах у березні 1892 р. завдання "підняти нашу мову до научної поваги, перепроваджувати її через строгу науку".

Університетський вчитель і наставник Володимира професор Львівського університету Юзеф Пузина (1856–1919) був вихідцем з давнього українського князівського роду. Тому прихильно ставився до українських студентів та дозволяв собі навіть на роботі розмовляти українською мовою. "В відношенню до українців був проф. Пузина дуже справедливий, а що добре знав українську мову, тож часто залюбки розмовляв по українськи; пізніше під впливом обставин, а може й деяких своїх товаришів відсунувся він від українців..." Свого часу професор навчався у Львові у знаменитого Л.Жмурка та геніального К.Т.В.Вєєрштрасса у Берліні. В Університеті викладав з 1884 до 1917 року, був всебічно обдарованим математиком, визнаним спеціалістом у теорії аналітичних функцій. Він започаткував у Львові читання спеціальних математичних курсів, заснував математичний семінар, був доступним для студентської молоді та багато індивідуально працював з обдарованими студентами, залучаючи їх до самостійного наукового пошуку. У своїх спогадах В.Левицький написав: "Йому завдячую те знання математики, яке маю дотепер; завдяки йому пізнав я усі модерні теорії і методи, завдяки йому набрав я замилювання до праці та охоти до самостійних дослідів." Перейняв здібний студент у професора також і його методи роботи з молодими адептами науки. У приватному архіві В.Левицького (наукова

бібліотека Львівського державного університету ім. І.Франка) можна знайти велику рідкість – три уцілілі конспекти курсів лекцій Ю.Пузини "Вступ до теорії аналітичних функцій" (1890), "Теорія аналітичних функцій" (1890/91), "Вищий аналіз" (1892/93).

У студентській порі В.Левицький активно діяв у студентських товариствах. У Академічне Братство (єдине на той час українське студентське товариство), що містилося на вул. Академічній (пр. Шевченка) на розі вул. Зіморівича (Дж. Дудаєва), свіжоспеченого першокурсника відразу ввів найстарший його брат Роман. Тут дуже швидко і на все життя Володимир подружився з Іваном Копачем, на той час другокурсником філософського факультету, класичним філологом та україністом. У цей час в Братстві саме точилася боротьба між народовцями та радикалами, зближеними із соціалістами. На початку другого року навчання народовецька більшість вийшла з Братства і заснувала нове товариство "Ватра", де В.Левицький став членом правління. З огляду на постійне зацікавлення справами спорту наприкінці університетських студій стояв він біля витоків українського спортивного товариства "Сокіл", ставши у 1894 р., коли головував В.Нагірний, його першим писарем. І аж до самого початку війни був активним членом цього товариства.

На початку четвертого курсу В.Левицький написав свою першу самостійну оригінальну наукову працю "Про симетричне вираження з вартостий функції $\text{mod-}m$ ", де розвинув наукові результати свого наукового керівника. Цю працю у січні 1894 р. (така дата про надходження до редакції стоїть у надрукованій праці) молодий автор відніс до НТШ. Згадуючи про цю подію 3 квітня 1927 р. під час святкування 30-річчя виходу в світ першого "Збірника праць МПЛС", В.Левицький, промовив так: "Коли я 34 роки тому назад, як молодий студент, приніс мою першу роботу з вищої математики, першу взагалі писану в українській мові, до тодішньої редакції "Записок", то редакція довго не знала, що з нею робити; а коли вкінці по році роботу надруковано, то редакція, бажаючи перед чужими закрити факт, що у нас у сій царині наук був дотепер застій, счеркнула вступ, в якому я зазначив, що це перша робота на українській мові, і висказав надію, що наша мова до математичних студій вповні надається. Однак перші леди були переломані. Вслід за першою роботою пішли інші..." [Мат. серед наук]. Не маючи спершу надії на опублікування праці у "Записках НТШ", автор відіслав цю працю і до Варшави, де вона у 1895 р. вийшла польською мовою у збірнику "Prace matematyczno-fizyczne". Однак роком швидше її все ж опублікували у четвертому томі "Записок НТШ", як **першу математичну наукову працю українською мовою**.

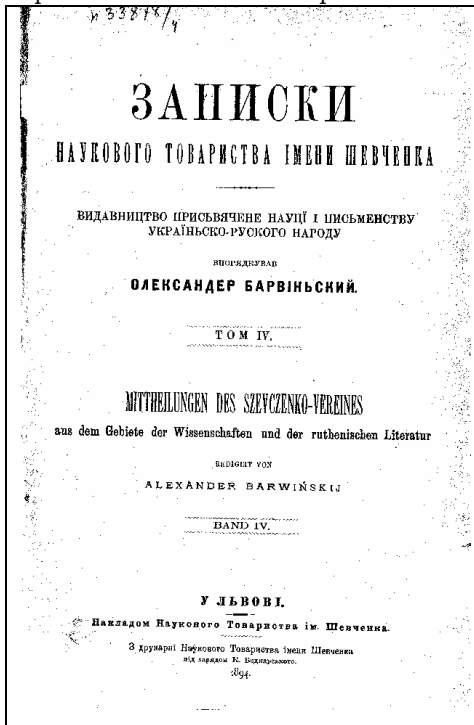
Того ж таки року (19 червня 1894 р.) на засіданні Виділу випускник Університету став членом НТШ. Можна припускати, що його до Товариства залучив близький товариш І.Копач, який став членом Товариства роком швидше. З тої пори на довгі 45 років В.Левицький став провідним математиком Західної України.

Через рік на п'ятому засіданні МПЛС 28 травня 1895 р. за пропозицією мовної комісії йому доручили укласти матеріали до української фізичної та математичної термінології. Таке ж доручення, що стосувалося технологічної

термінології, отримав професор політехніки Р.Залозецький. Українських математиків на той час було обмаль. Секція крім новоприбулого В.Левицького мала ще лише одного математика за освітою – Петра Огоновського (1853–1917), що належав до Товариства ще від 30.05.1874 р., був свого часу заступником його голови, пізніше став головою "Просвіти". Найзнаменитішим з братів-Огоновських був Омелян (1833–1894) – завідувач кафедри української мови і літератури Львівського університету, співзасновник та найзнаменитіший голова товариства "Просвіта", член-засновник Товариства ім.Шевченка.

У книзі обліку членів НТШ (1873–1900) П.Огоновського записано двадцять восьмим. Набагато пізніше (8.03.1899) до Товариства став офіційно належати, залучений вже В.Левицьким третій математик – Клим Глібовицький, що ще до того публікувався у виданнях НТШ. Щоправда, 12.10.1904 р. за несплату членських внесків його зі списку членів скреслили.

Хоча у спогадах про видання першої української наукової праці Петро Огоновський і не згадується, є всі підстави вважати, що до українського перекладу він, як автор українських шкільних математичних підручників, спричинився значною мірою

 ЗАПИСКИ НАУКОВОГО ТОВАРИСТВА ІМЕНІ ШЕВЧЕНКА ВИДАВНИЦТВО ПРИСВЯЧЕНЕ НАУЦІ І ПИСЬМЕНСТВУ УКРАЇНСЬКО-РУСЬКОГО НАРОДУ ВИСЛАДКУВАВ ОЛЕКСАНДЕР БАРВІНСЬКИЙ ТОМ IV. MITTHEILUNGEN DES SHEVCHENKO-VEREINES aus dem Gebiete der Wissenschaften und der ruthenischen Literatur HERAUSGEGEBEN VON ALEXANDER BARWINSKI BAND IV. У ЛЬВОВІ. Наказом Наукового Товариства ім. Шевченка. З друкарні Наукового Товариства імені Шевченка виздана в Києві. 1904.	ПРО СИМЕТРИЧНІ ВИРАЖЕННЯ З ВАРТОСТИЙ ФУНКЦІЙ mod-m. Написав Володимир Левицький. Розглянемо функції симетричної $f(x) + f(x_{i_1}) + f(x_{i_2}) + \dots + f(x_{i_{m-1}}),$ де $f(x)$ представляє функцію аналітичну о елементі $\Phi(x)$, збіжним в колі $x < R$, а $x, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{m-1}}$ – значення аргументу x в вершках правильного m-кутника, при чім $1, i_1, i_2, \dots, i_{m-1}$ – суть корені з рівняння $x^m - 1 = 0$. Довело до уваги гілках резидуї всього функцією симетричною, а теорією залишків (residuum) Cauchy'го. Резидуї ті, так для функцій раціональних, як і аналітичних, при довіданні ми подав проф. Др Пузюна.* Представимо рік повноту загальнішого, розважаючи наперед функцію симетричну $\sum f(x_{i_1}) f(x_{i_2}),$ де $f(x)$ представляє функцію раціональну або аналітичну $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad q < \infty,$ а описи розберем загальну функцію симетричну $\sum f(x_{i_1}) f(x_{i_2}) - f(x_{i_3}), \quad \forall < m,$ і то передовеї в случаю, коли $f(x)$ єсть функція лінійно-раціональна. *) Rozprawy Wydz. inst.-przr. Akademii Umiej. w Krakowie, tom XXVI, стр. 311 et seqs.
Титульна сторінка журналу «Записки НТШ». де була опублікована стаття В.Левицького "Про симетричне вираження з вартостий функцій mod-m"	Перша сторінка статті В.Левицького "Про симетричне вираження з вартостий функцій mod-m"

Після закінчення студій В.Левицький у вересні обійняв посаду заступника учителя в академічній українській гімназії Львова (у неповному обсязі, маючи усього 10 годин тижнево з оплатою 25 гульденів на місяць). Лише з другого півріччя отримав повне навантаження. 27 травня 1895 р. в Університеті успішно склав нелегкі кваліфікаційні іспити для учителів математики й фізики середніх шкіл з українською та польською мовами викладання (три письмові праці з математики, фізики і філософії, дводенні письмові іспити та усний іспит з математики, фізики, хімії, мов викладання (української та польської) і ще німецької мови).

Треба зазначити, що прекрасний фізик, на той час декан філософського факультету проф. І.Закржевскі, попри свою відому загалові нелюбов до українців все ж пропонував молодому Левицькому з огляду на його велику обдарованість університетську асистентуру з фізики (мало не унікальне для Львівського університету явище), однак той відмовився, не почувуючись так добре в експериментальній ділянці, як у припадній для нього теорії. "Теорія се річ справді чудна... Практика імponує мені менше..." – так писав пізніше молодий доктор філософії у своїх приватних нотатках.

У жовтні молодий вчитель добровільно пішов на річну військову службу, до 32-го дивізійного полку артилерії у Львові, де наприкінці вересня 1886 р. дуже добре здав офіцерський іспит. Взимку його йменували кадетом (хорунжим) а ще через рік він отримав звання поручника (лейтенанта – Г.С.) польової артилерії у запасі при цьому полку.

Зацікавлення українською термінологією, яке зродилося під час створення першої наукової праці, стало мало чи не справою усього життя. Загалом низка його публікацій окремо присвячена українській математичній термінології. У 1895 р. в додатку до наукової праці "Еліптичні функції модулів" ("Записки НТШ", т. 7) на двох сторінках міститься дуже скромний українсько-німецький словничок із 69 термінів – **перша збірка українських математичних термінів**.

Безперечно, не вся ця термінологія для нас звична. У багатьох випадках ми тепер користуємося іншими словами: вартість – значення; безоглядний – абсолютний, зложений – комплексний; услівний – умовний; безуслівна збіжність – безумовна збіжність; значок –індекс; рахунок – числення; інтегровати – інтегрувати; конечність – скінченність; мнимий – уявний, позірний; многість – множина; окружене – окіл; незмінник – інваріант; ріжничка – диференціал, тяглий – неперервний, цілковитий – цілий; суцно та несущно особливий – істотно та неістотно особливий; рівноважний – еквівалентний; полишка – лишок; переведене – відображення тощо.

Але тут вже є визначник (детермінанта), вісь, дійсний, збіжність, інтеграл, інтегральний, лінеарний, лінійний; однозначний; ряд, степеневий, точка особлива, функція, автоморфний, трансцендентний, раціональний, аналітичний, еліптичний

Сім років пізніше у 1902 р. ("Збірник МПЛС", т. 8, вип. 2) вийшла окрема збірка (теж фактично українсько-німецький словник) – приблизно 2000 термінів з елементарної (алгебра і арифметика) та вищої (аналіз, геометрія) математики. Автор відзначав, що загалом на той час вже

існувала хороша термінологія шкільної математики з огляду на підручники П.Огоновського (арифметика, алгебра) та Е.Савицького (геометрія). Однак зібрати термінологію елементарної математики треба було для полегшення справи укладання нових шкільних підручників. Щодо другої частини, то "зладжене термінольоґії такої є конче пожадане, щоби улєкшити людям фаховим працю в рідній мові на ниві, що в нас зовсім єще не тикана." Хоча Автор і відзначив, що обговорив свою працю на засіданнях МПІЛС та врахував чимало цінних зауважень і термінів, запропонованих П.Огоновським та І.Верхратським, все ж він наголосив, що "збірки сеї не уважаю я однак за останнє слово в квестії термінольоґії математичної, уважаю єї лиш материялами, які поступенно треба буде доповняти; бути може, що пропустив я сей або той термін, та се легко дасть ся оправдати тим, що одному чоловікови не так легко уложити та винайти всі можливі терміни, а то тим більше, що найти нині границю, де кінчить ся математика елементарна, а починаєсь висша, річ майже неможлива."

У подальшому терміни шліфувалися, уточнювалися, однак багато із запропонованих В.Левицьким математичних термінів вживають і сучасні видання.

Термінологічні зацікавлення В.Левицького були дуже широкими. Причому у роботу, за яку він брався, вкладалися уся енергія, запал та почуття глибокої відповідальності. Скажімо, щойно наприкінці травня 1895 р. В.Левицький отримав від мовної комісії НТШ вже згадуване доручення укласти фізико-математичну термінологію, як вже через два місяці 12 серпня "член секції д. В.Левицький відчитав половину своєї термінольоґії механічної при живій дискусії членів." Подані вони були до друку ще у вересні 1895 р. (і це все після того, як щойно склав тяжкі учительські іспити та перед тим, як піти добровільно на рік до війська). На засіданні секції 12 вересня 1895 р. "В.Левицький відчитав докінченне своєї термінольоґії механічної; в широкій дискусії обговорено терміни від букви М да кінця і рішено цілу термінологію видрукувати в "Записках" яко "материяли до фізичної термінольоґії (часть перша)."

Вже у 1896 р. виходять з друку ці перші його ґрунтовні матеріали щодо термінольоґії з першої частини фізики – теоретичної механіки. Фактично це була збірка термінів (343???) українською та їхніх відповідників німецькою та французькою мовами на 12 сторінках. Добре розуміючи, що термінологічна праця у галузі фізики та математики щойно розпочинається, В.Левицький завершує вступ до цієї праці такими словами: "Тож в імені секції і для добра науки осьміляю ся звернути до всіх, а в першій мірі до фахових людей, щоби всякий термін, який буде видавати ся їм відповіднішим, подали до секції математично-природописної, бо як-раз тільки наукова дискусия може довести до якихось позитивних результатів."

Далеко не всі пропозиції такі, скажімо, як динаміка, точка, удар збереглися і донинішніх часів. Частина термінів відійшла: безвладність (інерція), бігун (полюс), верхня (поверхня), скорість (швидкість), дрогане (вібрація), заколот (збурення), засада хованя (закон збереження), точка зачепу (точка прикладання), удар осередний (удар центральний), взорець (зразок). Інша частина збереглася, трансформувавшись згідно з вимогами

сучасного правопису – філя (хвиля), бльок (блок), енергія, деформація тощо.

Фізична термінологія друкувалася ще у "Збірнику МПЛС". Спочатку у відповідному термінологічному додатку на трьох сторінках до великої праці обсягом 72 стор. "Електромагнетична теорія світла і філії електричні" (1897, т.2). Пізніше надруковане продовження згадуваної першої частини. Частина друга (механіка рідин і газів, тепло, метеорологія) та частина третя (магнетизм, електрика і електротехніка) термінології у т. 3, вип. 2 (1898); частина четверта (акустика і оптика, астрономія і космографія) – у т. 8, вип. 2 (1902).

Першопрохідницьким був і "Начерк термінології хемічної" у т. 9 (1903). Лише через два роки (1905, т.10) під впливом цієї праці вийшли "Уваги о термінології хемічній" Івана Горбачевського.

Плідна термінологічна діяльність доктора В.Левицького привела за пропозицією Київської термінологічної комісії до створення у 1918 р. при МПЛС НТШ відповідної комісії.

Математична секція природничого відділу київського Інституту української наукової мови видали для широкого ознайомлення науковою громадськістю проект словника математичної термінології у трьох частинах. Першу частину (3486 термінів, 240+ХІІ с., 1925 р., титульний редактор Ф.Калинович) редагувала математична секція. Словники містили українську частину, де до кожного терміна були долучені усі можливі синоніми з докладною вказівкою на джерела, звідки вони запозичені. Окрім того було сформовано покажчики до української частини словника термінів російською, німецькою та французькою мовами. У передмові зазначено, що "...в основу всього матеріялу лягли матеріяли до математичної термінології д-ра В.Левицького, надруковані в VIII томі Збірника Математ.-природописно-лікарської Секції Львівського Наук. Т-ва Шевченка та три проекти Т-ва Шкільної Освіти..."

Другу частину (925 термінів, 1925 р., титульний редактор Ф.Калинович), присвячену теоретичній механіці, поряд з математичною секцією редагувала і МПЛС НТШ. Третю частину (титульні редактори Ф.Калинович та П.Холодний) додатково переглядала термінологічна комісія Одеської науково-дослідної кафедри математики.

У слові від природничого відділу (частина II) його голова академік П.Тутковський та секретар Я.Левченко зазначили: "Видаючи цього словника, Природничий Відділ Інституту повинен відзначити новий радісний факт, а саме порозуміння між Інститутом Укр. Наук. Мови та Львівським Наук. Т-вом ім. Шевченка що до роботи над усталенням української термінології."

"Цей словник, поки що перший, виходить за редакцією не тільки Математичної Секції Інституту, але також Математично-Природописно-Лікарської Секції Наук. Товариства ім. Шевченка у Львові."

У підписаній Ф.Калиновичем (березень 1926 р) передмові до другої частини словника, відзначена історія створення словника: "Саме редагування цієї частини (на 36 засіданнях з вересня 1921 по червень 1925 рр.), хоч вона значно менша за першу, забрало стільки ж часу, як не

більше, що й редагування першої частини. Це тому, що терміни чистої математики, передусім елементарної, вже довго вживалися в підручниках і здебільшого були усталені; натомість термінологія теоретичної механіки, якщо не рахувати термінів спільних з фізикою, зовсім нерозроблена. Значну кількість термінів виписано з чужомовних джерел і подано їх переклади: отже треба було докладно їх обміркувати, поки прийняти, чи відкинути."

"...Коли Секція вже редагувала цю частину, то до Інституту Укр. Наук. Мови УАН звернулася Математично-Природ.-Лікарська Секція Наук. Т-ва ім. Шевченка у Львові з пропозицією об'єднати роботу над українською математичною термінологією. Вже було проведено значну частину матеріалу; отже незручно було переривати почату роботу, щоби порозумітися про дальшу роботу з Львівською Секцією. Тому Математична Секція Природн. Відділу Інституту Укр. Наук. Мови УАН в даному разі знайшла найзручнішим докінчити редагування цього словника, коли-ж буде виготовлено рукопис до друку, то послати його копію у Львів на розгляд Львівських товаришів, при чім їх корективи буде внесено в словник. Це було зроблено."

"Математично-Природописно-Лікарська Секція Наукового Т-ва ім. Шевченка у Львові доручила своїм членам *Д-ру В. Кучеру* та *Д-ру Р. Цегельському* (виділення у тексті – Г.С.) переглянути рукопис цієї частини Словника й подати свої уваги на Секції."

"Ці товариші зреферували рукопис на Секції, яка по основній дискусії прийняла проєкт з невеликими змінами. В засіданні Львівської Секції брали участь такі члени: *Д-р В. Левицький* (голова), *Д-р В. Кучер* (секретар), *проф. М. Зарицький*, *проф. М. Мельник*, *проф. І.Сітницький* та *Д-р Р. Цегельський*."

"Коли рукопис повернувся у Київ, то Київська Секція ще раз переглянула його – головним чином додатки Львівської Секції (зазначені в Словнику "Льв."). більшість з цих поправок Секція увела в словник, але на деякі не могла погодитися, інколи з чисто філологічних міркувань. Однак й ці поправки внесені в словник, тільки взяті в квадратні дужки."

Таким ось чином, за участю В.Левицького у 20-х роках вийшли II та III частини проєкту "Математичного словника" та третя частина "Зоологічної номенклатури".

Про довіру і піонерське значення цієї термінологічної праці свідчить також протокол засідання Всеукраїнської наради в справі упорядкування математичної термінології, що відбулася у Харкові 5–6 травня 1932 р. Тут записано: "2. Нарада відзначає такі попередні словникові матеріали до укр. математичної термінології, як праці проф. Володимира Левицького (1902), Т-ва Шкільної освіти в Києві під проводом акад. М.Кравчука (1917–18), праці проф. М.Чайковського..."

У першій частині шостого тому "Збірника МПЛС" (1900) В.Левицький запропонував свій проєкт класифікації фізико-математичних наук, що узагальнював досвід французької та німецької систем.

Відразу після повернення з війська 1 жовтня 1896 р. зайняв високу на той час посаду дійсного вчителя єдиної тоді у Тернополі (зрозуміло, що тоді

польської) гімназії, де колись і сам вчився. Тут він знову зустрів К.Глібовицького, через рік сюди прийшов працювати І.Копач, ще через деякий час – брат Юліан. Робота дуже подобалася, мав чудові стосунки з учнями. Між іншим, з відомим потім природником Миколою Мельником (потім разом працювали у одній секції НТШ). На роботі трапився і нещасний випадок. У листопаді 1898 р. у руках В.Левицького лопнула 10 літрова бутля азотної димної кислоти, що завдала тяжких опіків усього тіла. Чудом залишившись живим, лише весною повернувся до здоров'я. Між іншим і завдяки доглядові близької своячки Софії Левицької, тоді початкуючої тернопільської вчительки. У червні 1899 р. вони й побралися. Дітей подружжя не мало. Цього ж року отримав В.Левицький титул професора гімназії.

У Тернополі В.Левицький не лише навчав дітей але й будив також приснуле було після від'їзду до Львова О.Барвінського українське життя. "...Якось так склалося, що в тім часі прийшов до Тернополя гурток молодих ідейних людей, що внесли свіже повітря в заскорузлу, заспану напів кацапську тернопільську громаду." Товариське життя у тій порі зводилося до гри у карти та вечорниць для попадянок. Не читалися, як колись, лекції, бібліотека практично не функціонувала, бо "були лише безплатні додатки до московської Ниви та до Tygodnika Ilustrowanego...українських книжок так як не було... Давні гарні традиції Барвінського, рад. Кузьми і др. належали вже до історії."

За його активної діяльності відновлюється робота "Української бесіди" (В.Левицький майже одразу стає заступником голови), "Просвіти", "Бояна", створюється гурток Українського Педагогічного Товариства (УПТ). І ось вже у 1898 р. у залі польського "Сокола" відбувається концерт в честь Шевченка. Окрім карт в "Бесіді" з'являються шахи, більярд, фортепіано. "Бесіда була місцем, де сходились члени кружка УПТ і жіночого гуртка... Члени Т-ва працювали побіч Бесіди також і в філії Просвіти і в новозаснованому Міщанському Брацтві." Він стає діяльним членом та виділовим (членом правління) багатьох товариств та громадських організацій. "Спершу майже більшість членів Бесіди були москвофіли, переважно вже старші люди... Колиж однак ми молоді впровадили фонетику і усякі українські інституції до Льокалю Бесіди, коли виринула справа українського університету у Львові, а опісля прийшла сецесія академічної молоді (демонстративний організований вихід 440 укр. студентів з 1.12.1901 р. до літнього семестру 1902 р. через рішення університетських влад виключити організаторів українських студентських демонстрацій і віч та заклики до погромів українського студентства; більшість з них переїхала вчитися до Праги, Відня, Грацу, Кракова – Г.С.) ...москвофіли виступили з Бесіди і заснували окреме казино."

Історія також знає сецесію українських послів з Галицького Сойму у 1901 році.

У жовтні 1898 р. у Тернополі завдяки впливам О.Барвінського відкрили І клас державної української гімназії ім. цесаря Франца-Йосипа. Зрозуміло, що В.Левицький і тут відразу почав навчати математики, не полишаючи своєї основної роботи. Набагато пізніше, з літа 1917 р. до своєї смерті у

1925 р. (невдовзі після того її закрили), цією гімназією керував його брат Ю.Левицький.

Перебуваючи у Тернополі, продовжував активну працю у львівському НТШ. У 1897 р., через п'ять років після свого заснування, секція Математично-природописно-лікарська 12 лютого ухвалила видавати свій окремий друкований орган "Збірник математично-природописно-лікарської секції" (ЗМПЛС) – **перший український науковий журнал у сфері природознавства**, редакторами якого стали І.Верхратський та В.Левицький. Останній взяв на себе справу редагування усіх праць з математики, фізики та хімії. Праці зі сфери медицини переглядав Євген Озаркевич. Остаточна ухвала НТШ про це видання прийнята на засіданні Виділу 19 лютого, коли І.Верхратський повідомив про намір МПЛС видавати "осібні збірники з отрубу наук математично-природничих." Для першого збірника виділили 450 злр.

Оскільки ще з осені попереднього року ті матеріали відповідної тематики, що були спрямованими до редакції "Записок", були завбачливо відкладені для їх можливого публікування у "Збірнику", то того ж таки 1897 року відразу вийшли дві книги по 9-10 др. аркушів, які містили загалом 17 праць: 6 математичного, 5 природничого і 6 лікарського спрямування.

З тих пір праці відповідної тематики перестали друкуватися у "Записках НТШ", які з огляду на це стали друкованим органом філологічної та історико-філософської секцій. Тим то на природничу тематику у "Записках НТШ" було опубліковано лише 9 праць.

Виступаючи на ювілейному святі з нагоди 30-ліття початку випуску "Збірника", яке перетворилося і на 55-літній ювілей В.Левицького, той скромно зазначив: "Правда, що я був редактором Збірника секції від самого її заснування, але правдою є й те, що почин до видавання Збірника дав тодішній голова, найбільший наш учений, проф. М. Грушевський, який довго мене переконував, заки я узявся за це діло – бо я не мав тоді віри, що таке видання вдасться. А прошу не забувати, що поруч зі мною були редакторами видань секції такі два визначні мужі, як пок. проф. І. Верхратський, та пок. д-р Е. Озаркевич; без їх помочи робота булаб не пішла. А чиж маю згадати таких співробітників секції, як товариші Глібовицький, Раковський, С. Рудницький, М.Чайковський із старших, Кучер, Садовський, Мельник, Полянський, Тисовський і багато інших з молодших? Без їх праці не було би секції, бо нині одна людина не в силі сама робити наукову роботу. Отже, деж ті мої "великі" заслуги?"

Наведемо також обширний витяг з передмови до першого числа цього піонерського українського спеціалізованого наукового видання в галузі точних наук. Хоча її підписано ініціалами "І.В.", тобто Іван Верхратський, однак можна стверджувати, що й В.Левицький теж до неї причетний. Ця передмова стала програмою майбутньої діяльності, яка була більш як успішно втілена у життя.

"Отсе видаємо вперше збірник статей з наук математики, природописи і лікарства. Перший раз являють ся в руськім язиці розвідки фахові згаданих наук зібрані разом в одну книжку. І передше, правда, печатано

статі із згаданих царин наукових в ріднім язиці; тільки-ж були вони або розсіяні по різних письмах періодичних і мали понайбільше ціль популяризувати науку, або попадались в ряди-годи фахові статі в періодичних "записках" Наукового Товариства імені Шевченка тулячись межи иньшими розвідками науковими, переважно історичними або фізіологічними..."

"Передовсім іде нам о розвиток науки на нашій питоменній ниві. Наш язык лише тогді зможе добути собі одвітного і гідного становища, коли розвине ся о стілько, щоби міг стати поруч з образованими языками других народів Європейских, яко довідний середник звязкого і опрєдєленного виражання мислей на всіх полях людського умства. Мусить проте наш язык виробити собі одвітну термінологію в різних вітах людського знання, мусить одвітно використати все багатство рідної словні а zarazом прямовати до потребної прецизії, яку стрічаєм у других языках счасливійше розвитих. Без тих підвалин і думати годі про ширший розвиток науки в рідній бесіді..."

"...Про вагу наук математично-природописних тут розводитись не будем, бо їх вплив на культуру всего людства звісний – а лише виражаємо бажанє, щоби Всечесні Родимці зволили віднести ся прихильно до нашого діла і після сил підсобляли нашим змаганням і замислам."

Примхлива доля зробила Львів причетним до багатьох наукових новацій. Вже встигли відзначили соту річницю від створення тут цього першого українського наукового журналу математично-природничого спрямування. Саме зі Львова походить теж і Ріхард фон Мізес, визначний австрійський механік, фундатор першого у Європі спеціалізованого наукового журналу з питань механіки та прикладної математики.

На порозі нового століття для піднесення наукового престижу НТШ: поряд зі звичайним членством запроваджується категорія "дійсних членів", іменованих так на підставі їх наукової кваліфікації, підтвердженої існуванням самостійних наукових праць. Відтепер секції повинні складатися лише з дійсних членів і "збори секцій стають правдивим науковим ареопагом, вповні компетентним в рішенні наукових справ". 1 червня 1899 р. на спільному засіданні усіх секцій відбувається формування першого корпусу дійсних членів НТШ. У МПЛС цю відзнаку отримують 10 найавторитетніших науковців та громадських діячів. Це були: др Григорій Величко (провізоричний вчитель гімназії у Тернополі); Іван Верхратський (професор академічної гімназії у Львові); др Іван Горбачевський (звичайний професор лікарської хімії у Празькому університеті); др Осип Дакура (секундар шпиталю у Відні); Володимир Левицький (вчитель гімназії у Тернополі); Петро Огоновський (дійсний вчитель руської гімназії у Львові); др Євген Озаркевич (лікар клініки у Львові); др Іван Пуллой (професор німецької технічної академії у Празі); др Щасний Сельський (лікар у Львові); др Олександр Черняхівський (лікар у Києві). Як видно, з десяти осіб лише двоє на той час працювали у високій школі та й то за кордоном. Третина не мала наукового ступеня доктора наук; лише чотири особи мешкали у Львові. На час обрання В.Левицький мав вже 16 друкованих праць – 11 українською та 5 польською мовами.

Після цього у період 1899–1900 рр. В.Левицький у Львівському університеті здав строгі докторські іспити (ригори) з математики, фізики і філософії "summa cum laude" (з найвищою відзнакою). Оскільки усі екзамени від першого класу гімназії він здавав з відзнакою, відбув військову службу і його родичі мали заслуги перед Австро-Угорщиною, то він у березні 1900 р. склав прохання до цісаря про призначення промоції (процедури присвоєння докторського ступеня – Г.С.) "sub auspiciis Imperatoris" – під протекторатом Імператора, тобто формально, без захисту. У випадку позитивного рішення претендент на таку промоцію, яка відбувалася у присутності намісника як заступника цісаря, отримував від цісаря також цінний подарунок, переважно перстень з діамантом, наукову стипендію для поїздки за кордон та мав гарантовану наукову кар'єру. Згідно з протоколом церемонії, яка би на ту пору у Львівському університеті відбулася вперше, український "кандидат при промоції був би виголосив подяку цісареві по українськи (рідною мовою – Г.С.) і був би так замаркував утравістичний характер львівського університету." Зрозуміло, що польські урядники зробили усе можливе й неможливе, щоб таку честь отримав не українець (декілька тижнів пізніше документи подав ще один українець – І.Копач), а вишуканий у останній момент польський хімік Негруш, наукові здобутки якого були набагато скромніші і який надалі хімією навіть не займався, а викладав фізику. Тому докторську промоцію В.Левицький разом з І.Копачем отримали роком пізніше – 10 жовтня 1901 р. Диплом доктора, виданий "У Львові, перед днем V Ідів жовтня 1901 року." підписали Людовик Ридигер – ректор, Людовик Фінкель – декан, Йосип Пузина – промотор (науковий керівник – Г.С.).

У 1899 р. в Галичині формується національно-демократична партія, до якої поряд з М.Грушевським, І.Франком приступає і В.Левицький. Партія бореться за національні права українського населення, рішуче піднімає питання створення у Львові українського університету, державної підтримки діяльності українських вчених. За підтримки О.Барвінського, на той час депутата до віденського парламенту та до Галицького сойму (сейму), австрійське міністерство освіти погодилося надавати стипендії для навчання за кордоном молодих перспективних українців, які б у майбутньому могли стати доцентами Львівського університету. Завдяки цій домовленості В.Левицький ще до своєї промоції отримав на другий шкільний семестр з 1 лютого 1901 р. відпустку та державну стипендію для піврічної наукової подорожі до Німеччини.

Під час неї перші три місяці він слухав лекції знаменитих геттінгенських професорів Ф.Кляйна і Д.Гільберта. Великі вчені запровадили цікаву практику стенографування своїх лекцій і ці тексти після авторської правки можна було отримати у читальному залі. Пізніше їх навіть друкували. Тож за дуже короткий проміжок часу вдалося В.Левицькому ознайомитися також і з тими курсами, які у тій порі великі математики не читали. У невеликому архіві вченого (бібліотека Львівського університету) можна знайти акуратно переписані з рукописних оригіналів курси лекцій Д.Гільберта "Теорія чисел" (Геттінген, 1897/98, 174 с.), "Елементи евклідової геометрії" (Геттінген, 1898/99, 96 с.), та Ф.Кляйна

"Проективна геометрія" (Геттінген, 1900/01, 210 с.), "Лекції про автоморфні функції" (Геттінген, 1899, 195 с.). Дивує, коли В.Левицький за такий короткий час встиг усе це переписати, відвідуючи до цього ж інші лекції, читаючи інші книги, зустрічаючись із науковцями тощо.

З іншого боку, завдяки цьому першому українцю у Геттінгені, де люду там було з цілого світу, довідалися про українців і потім багато наших земляків вже не були тут цілком незнайомими. "Бо хто знав тоді в Геттінгені щось про українців? Одні думали, що ми Кроати, другі вважали нас мадярами, а лиш одному проф. Кляйнові не було чуже ім'я нашої нації." Пізніше тут побували математик М.Чайковський, фізик Р.Міколаєвич зі сестрою Марією (лікар), фізик О.Смакула та інші. Маючи особливе замилювання до естетичних записів на дошці, В.Левицький відзначав у своїх споминах не тільки високий математичний рівень, вільну та творчу атмосферу Геттінгену, але й те, що Ф.Кляйн "дуже гарно писав на дошці, як ніхто, хіба що Шварц у Берліні."

Наступні три місяці з першої половини травня на пропозицію І.Копача, що був тоді в Берліні, провело подружжя у столиці Німеччини. Після річної перерви, під час якої відбулася також і промоція, у другому, тепер вже річному науковому відрядженні в 1902/03 н/р В.Левицький знову прибув до Берліна. Осінь і зиму 1902 р. до Різдва пробув сам, а на літній семестр знову приїхав з дружиною. Психологічний клімат і математичний рівень цього університету не особливо припав В.Левицькому до смаку. За його споминами у берлінській математиці "царювала заскорузлість...", більшість професорів жило ще старими ідеями з своїх "героїчних" часів, або повторювало (як пр. Knoblauch чи Hettner) теорії свого великого учителя пок. Weierstrassa. Гімназійний професор відвідував також лекції математиків К.Г.А.Шварца, І.Фукса, Ф.Г.Фробеніуса, Ф.Г.Шоттки, Е.Г.Г.Ландау. Лекції останнього (походив, ймовірно, з Галичини) своїми викладами про ріманівську функцію $\zeta(s)$ дав йому "багато цінного, нового, интересного матеріалу." З ним В.Левицький нав'язав ближчі стосунки. Високо цінував стажист лекції фізиків М.Планка, Г.Старке (H.Starke), творця стереохімії та фізичної хімії Ван Гоффа (van Hoff), астронома Баушінгера (Bauschinger), теолога-історика Гарнака (Harnack), філософа Паульзена, історика Едварда Меєра (E.Meyer). Про лекції з астрономії написав: "се були найліпші виклади, з яких я найбільше скористав на математичнім факультеті в Берліні." Разом з тим багато працював у бібліотеках.

А до того часу у 1894 р. з Києва до Львова переїхав Михайло Грушевський та відразу став директором історико-філософської секції НТШ. З 1895 р. вже розпочав редагувати "Записки НТШ" і на довгий час з 1897 до 1913 очолив НТШ. Він відразу звернув увагу на молодого В.Левицького і постійно заохочував його переїхати до Львова, обіцяючи роботу у НТШ. Цьому сприяло й те, що знайдена у Львові дружина молодого київського професора п. Вояковська була далекою своячкою В.Левицького. Тому під час військової служби В.Левицький у 1896 р. був за свідка їхнього передшлюбного протоколу в церкві св. Петра і Павла.

Попри високу наукову та педагогічну кваліфікацію, усі намагання В.Левицького, щоб у той час дістати доцентуру в Львівських політехніці (у 1900 р. політехніка оголосила конкурс на доцентуру вищої математики, В.Левицький подав документи, які цілий рік! до моменту відмови пролежали без руху) чи університеті з суто політичних причин не увінчалися успіхом. Хоча міністерство освіти й посиляло вчитися за кордон українських претендентів на роботу в університетах, "львівський університет, хотів на ньому були системізовані українські кафедри, за всяку ціну не допускав до габілітації (зайняття доцентської чи професорської посади на вузівській кафедрі – Г.С.) українських кандидатів." Обурений усією облудою цієї процедури, В.Левицький забрав своє подання про габілітацію і більше його не складав. Ті поодинокі українці, які у ті часи працювали в університеті, попали сюди переведенням, вже після габілітації у Києві, Чернівцях чи деінде. Лише "перед війною, коли українці почали мати голос в державі, вдалося з трудом габілітувати др С.Рудницькому, др С.Томашівському...і др І.Свенціцькому."

Тому після повернення з Берліна у липні 1903 р., щоб здійснити давнє бажання жити і працювати у Львові, вже у серпні В.Левицький переїздить цього міста та займає посаду професора V державної гімназії, що містилася тоді в старому монастирі Бернардинів на вул. Валувій. Це була польська гімназія, хоча в тому часі навчалося в ній більше сотні українців. Тут була обладнана прекрасна фізична лабораторія з сучаснішими приладами. Через певний час став В.Левицький головним математиком і фізиком гімназії і пропрацював тут до самого вибуху першої світової війни. Після закінчення 1913/14 н.р. його мали запросити на роботу у Міністерство освіти до Відня.

Крім основної роботи увесь час викладав також у приватній жіночій єврейській гімназії п. Камерлінг, де переважали вчителі-українці та у щойно заснованій (1903) жіночій семінарії Українського Педагогічного Товариства. Разом з тим був членом комісії кваліфікаційних та виділових учительських іспитів, членом мішаної військово-цивільної комісії (Intelligenzprüfung), що надавала право кандидатам без матури (диплому гімназії – Г.С.) право на однорічну військову службу. У 1912 р. Краєва Шкільна Рада віддала в руки В.Левицького імприматуру (право підпису до друку – Г.С.) українських математичних та природничих шкільних підручників. Брат Юліан, що майже одночасно з Володимиром перенісся з Тернополя до Львова, був тут директором української гімназії сестер Василіанок.

З часу переїзду до Львова В.Левицький отримує ширші можливості для участі у громадському житті. Одразу на перших зборах, стає секретарем Українського Педагогічного Товариства; починає редагувати його видання "Учитель", для популяризації наукових знань друкує багато перекладів (переважно з німецької мови). За ініціативою проф. О.Колесси у 1907 р. для хоч часткової компенсації відсутності українського університету створюється Товариство наукових викладів ім. П.Могили. Серед тринадцяти фундаторів був і В.Левицький, певний час він був також скарбником

товариства. У спогадах писав: "Ми (з жінкою – Г.С.) брали участь у всяких українських маніфестаціях, з'їздах, концертах, виступах українського театру – всюди там, де того вимагало тоді українське життя, що було в тих довоєнних часах сильно і живо, не так мляво як нині (середина тридцятих – Г.С.)."

На прохання П.Огоновського, який одержав замовлення написати шкільний підручник з математики, В.Левицький взяв на себе основну частину тої роботи і створив український підручник "Алгебра для висших клас середніх шкіл" (ч. I – 1906 р., ч. II – 1908 р.). Сам П.Огоновський через хвороби та велику зайнятість громадськими справами уклав лише частину прикладів до першої частини).

Декілька років після того, одним подихом, усього за сім місяців від 1 жовтня 1911 р. створюється вже одноосібний підручник "Фізика для висших клас середніх шкіл" обсягом 674 с. з 527 рисунками та двома кольоровими таблицями (вийшов з друку у 1912 р.), що довгий час був дуже популярним та вважався найкращим. У післяреволюційні роки використовувався навіть у вузах Радянської України і його перевидали (щоправда скорочено та не так добре) двома частинами у 1924 р. На Східній Україні цю книгу з великим зиском для себе (бо по 100 рублів) продавали галицькі Січові стрільці.

Книги були глибокими за змістом, добре продумані, написані на високому науковому та методичному рівні, прекрасно ілюстровані, насичені проблемними ситуаціями, вправами, містили відомості з історії науки. Згадаймо при тому, що початок століття ознаменувався великими зрушеннями у людських знаннях про матерію. Відкриття фізики революціонізували людський розум і науково-популяризаторська праця у цій царині знань була і вдячною і надзвичайно потрібною. Про засади своєї педагогіки др Левицький сказав: "...все дбав я про живий, ясний виклад, про естетичне писання на таблиці, про добрі прозорі рисунки (се особливо в фізиці вважаю половиною успіху науки) та, що найголовніше, не допускав ніколи до найбільшого ворога школи – нудьги."

У цей період (6 листопада 1911 р.) на Краєвій шкільній раді польською мовою зробив доповідь про запровадження елементів вищої математики до програми середніх шкіл. Таким чином ідеї радянських математичних реформ А.М.Колмогорова, коли до програми шкільної математики було запроваджено елементи вищої математики, мали у Львові дуже давніх предтеч.

Брав В.Левицький діяльну участь у всіх заходах НТШ та своєї секції. 4 липня 1904 р. його обрано секретарем МПЛС; 26 травня 1909 р. – заступником директора секції (І.Верхратського). Разом з цим формується фізіографічна комісія (В.Левицький теж її член), завданням якої є систематичне та всебічне дослідження українських земель з фізичного боку.

26 листопада 1909 р. на засіданні МПЛС В.Левицького та С.Рудницького обирають делегатами (представниками) МПЛС до бібліографічної комісії, де В.Левицького обирають заступником голови. 4 жовтня 1911 р. на засіданні МПЛС І.Верхратський відійшов від діяльності у цій секції. Тому її новим

директором обрано І.Горбачевського, заступником – знову В.Левицького. Нову редколегію "Збірника" стали складати В.Левицький, І.Раковський, С.Рудницький.

29 червня 1913 р. на загальних зборах НТШ знову головою обрали М.Грушевського. Тоді ж В.Левицький увійшов до складу Виділу – керівного органу НТШ. На наступному після цього його засіданні 10 вересня 1913 р. – останньому в НТШ засіданні, де був присутнім М.Грушевський, – його обрали секретарем Виділу. Розпочалася велика, тривала і, на жаль, мало вдячна громадська та адміністративна робота. Наприклад, 5 листопада 1913 р. у протоколі Виділу знаходимо: "Ухвалено просити Раду мійську у Львові, щоб дозволила поставити пам'ятник Шевченкови на площі перед каменицями Товариства; рівнож ухвалено вислати в тій справі депутацію до президента міста, зложену з членів д-ра С.Федака, д-ра С.Томашівського і д-ра В.Левицького."

Збирається і активно працює МПЛС 6 лютого 1914 р. на її засіданні "постановлено віднести ся до Виділу, щоби він у порозумінні з усіма секціями і мовною комісією старав ся зладити на зїзд укр. учених і письменників термінологічний словар україн. мови."

Під керівництвом М.Грушевського НТШ бурхливо розвинуло наукову та видавничу діяльність. З 1892 до 1914 р. за 23 роки вийшли друком 120 томів "Записок НТШ", не кажучи вже про інші не менш важливі видання. За зразком НТШ у 1907 р. стараннями М.Грушевського в Києві постало "Українське Наукове Товариство", до якого зі Львова передали видання "Літературно-Наукового Вісника" – одного зі серійних видань НТШ. На 1916-й рік планувалося реформувати Товариство в Українську академію наук.

Літо 1914 р. принесло багато надій українцям Галичини. Після виборів до парламенту влада Австро-Угорщини вирішила змінити свій попередньо дискримінаційний курс щодо українства і на нього опертися. Планувалося до кожного міністерства залучити на провідні посади і по одному українцю. Існувала попередня домовленість про роботу В.Левицького у Міністерстві освіти. Очікувалося лише офіційне призначення, Софія Іларіонівна під час поїздки на курорт вже приглядала у Відні квартиру.

Перша світова війна жорстко перекреслила усі світлі сподівання і НТШ і В.Левицького. Розпочалася мобілізація, запанував хаос та розгубленість. Проте В.Левицький ніколи не боявся брати на себе відповідальність і робити найпотрібніші речі. З протоколу Виділу від 11 серпня 1914 р.: "1. Левицький повідомляє, що як секретар скликав засідання по тій причині, що заст. голови Др Томашівський покликаний зїстав до війська, тож треба пригадати ся над способом дальшого веденя акад Т-а, щоби Т-о в тих тяжких часах не понесло ніяких страт і функ[ціон]увало на дальше правильно."

Через декілька днів, 16 серпня 1914 р., у віці 42 років отримав виклик як офіцер ляндртурму (народного ополчення), потім брав участь у військових діях у Карпатах та 30 грудня попав до російського полону.

Фронтовий щоденник 10 травня 1932 р. В.Левицький заклеїв у конверті з помітками "Присвячую моїй дружині Софії" та "Вітворити щойно по моїй

смерти". Перейшов через табори військовополонених у Курській, Нижньогородській, Пензенській губерніях та наприкінці шпиталю у Москві. Після більшовицького перевороту як інвалід австрійської армії "при содействии органов Советской власти" (автобіографія 1949 р. – Г.С.) через Білорусію та Польщу у квітні 1918 р. повернувся додому, і до початку українсько-польської війни 1 листопада ще вважався при австрійській армії.

Часи війни розбудили у Правобережній Україні дещо пригаслу національну ідею і прагнення державності. Не зникало розуміння необхідності використати творчий та інтелектуальний доробок НТШ. 8 червня 1918 розпочалося листування Міністра Народної Освіти УНР Миколи Василенка (історика, громадського та політичного діяча, до речі і дійсного члена НТШ) з НТШ у Львові з приводу заснування Української АН у Києві та інших наукових інституцій. У першому листі (отриманому у Львові 31 липня, у канікулярний час) писалося: "При народному Міністерстві Освіти засновується Комісія по виробленню законопроекту про утворення УКРАЇНСЬКОЇ АКАДЕМІЇ НАУК у Києві і при ній Національної бібліотеки, Нац. Музею і інших міцних наукових інститутів. Головою цієї комісії запрошено академіка В.І.Вернадського, який згодився взяти на себе цей обов'язок. Визнаючи участь Наукового Товариства в роботах цієї Комісії дуже цінною і корисною, маю честь просити Хвальний Виділ Наукового Товариства обрати свого представника для безпосередньої праці в названій комісії...". НТШ свого делегата не обрало але у листі від 20 серпня попросило надіслати опрацьовані проекти для їх обговорення на місці.

Щодо особи М.Василенка (1866–1935), то він відіграв значну роль у створенні українських державних університетів у Києві та Кам'янець-Подільському, Академії Наук України. У 1920 р. його обрали її дійсним членом, у 1921 – президентом УАН. Однак радянський уряд такого обрання не затвердив. Більше того, у 1924 р. його засудили на 10 років (потім амністували).

У серпні 1919 р. розпочинає урядову службу у Львівській кураторії (шкільному окрузі) в ранзі референта та інспектора середніх шкіл; з 1924 р. – фаховим інструктором з математики та фізики в гімназіях кураторії. У 1920 р. від імені Українського Технічного Товариства у Львові викладав вищу математику на українському курсі для техніків; у 1920/21 н.р. – вищу математику та вступ до космогонії у Львівському таємному університеті. У червні 1921 р. його обирають заступником декана філософського факультету цього університету. Проте через те, що польська влада розпочала слідство щодо тих урядовців, що працювали у цьому недозволеному нею навчальному закладі, у 1925 р. В.Левицький викладацьку діяльність тут цілком припинив. Видається, що у 1928/29 н.р. працював ще професором II гімназії. А 1 жовтня 1930 р., маючи 40 років стажу роботи (навчання в університеті тоді зараховувалося у стаж), В.Левицький вийшов на пенсію.

Після війни з 13 вересня 1919 р. В.Левицький повертається до секретарювання у Виділі НТШ. Відновлення польської державності

розпочало нову хвилю переслідувань щонайменших українських проявів. Перші повоєнні загальні збори після восьми років перерви відбулися лише 28 березня 1921 р. На них головою обрали В.Щурата. Володимир Левицький – поновно секретар та додатково референт друкарні і палітурні – головних джерел прибутків Товариства. На засіданні Виділу 25.05.1921 року констатовано, що директором МПЛС вже є В.Левицький.

У 1924 р. очолювана В.Левицьким Секція вирішила видавати бюлетені про засідання МПЛС – "Sitzungsberichte". У цих повідомленнях мала подаватися іноземними мовами коротка інформація про роботу секції, стислий виклад виголошених на її засіданнях праць. Фактично це видання можна вважати **першим на території України реферативним журналом**. В.Левицький береться і за їх редагування. До 1939 р. вийшло загалом 28 випусків цих "Звіdomлень". Цей захід сприяв також і збільшенню кількості засідань. Хроніка НТШ за 1925 рік згадує: "Секція нав'язала зносини з Українською Академією Наук у справі праць над термінологією природописних та математичних наук. Доси одержано проєкт термінології, що обіймає загальну механіку для спільної наради над нею... рішила секція поробити приготування для скликання першого українського природничо-лікарського зїзду."

3 червня 1926 р. В.Левицький стає заступником голови Товариства. Разом з тим він не полишає директорства у Секції, і окрім того є діяльним членом п'яти комісій: мовної, бібліографічної, фізіографічної, науково-технічної та географічної.

Дуже довго НТШ залишалося осторонь від загострення політичних подій в радянській Україні. Слід зважити на те, що облудна радянська пропаганда на Заході діяла дуже ефективно і що НТШ, з огляду на прагнення до соборності та української державності, мимоволі стало певною мірою заложником радянської системи. Це спричинило початок тривалої і глибокої ідеологічної та пов'язаної з нею фінансової кризи Товариства. Вперше дуже стримане занепокоєння виплеснулося на засіданні Виділу 19 листопада 1929 р. "Виділ поручає п. Голові (Кирилові Студинському – Г.С.) з нагоди його поїздки на Велику Україну довідатися про причини арештовань і долю дійсних членів Т-а." Угодовська політика НТШ не могла не викликати заперечень і навіть крайнього невдоволення українського громадянства Галичини. Товариству та його Голові закидають колабораціонізм з більшовиками. Дійшло до того, що 20 березня 1930 р. двоє осіб у приміщеннях НТШ побито його голову К.Студинського. Той взяв відпустку, потім її продовжував і фактично від цього часу на В.Левицького великою мірою падає тягар керівництва Товариством та моральної відповідальності за нього за винятково критичних обставин.

Надзвичайне засідання Виділу від 18 квітня знову веде В.Левицький. На ньому М.Кордуба запропонував НТШ звернутися до влад УРСР, або до суду в Харкові в справі полегшення долі а можливо й помилування підсудних. В.Левицький виступив проти такого формулювання з таких міркувань: "1. Т-о не реагувало на арештування Ефремова і тов. (його товаришів – Г.С.) і не зголосило ніякого протесту. 2. Інтервенція означалаби признание компетенції більшовицького суду, означалаби признание

підсудних винувниками та визнання теперішнього радянського режиму. На думку бесідника повинно Т-о якраз тепер заложити як найостріший протест перед цілим культурним світом, а не знижатися до просьб... При голосуванню чотири голоси заявилися против інтервенції, три за, один здержався від голосування." Принципова та слушна, на наш погляд, пропозиція В.Левицького отримала лише символічну перевагу.

На початку 1932 р. львівські українські газети опублікували низку критичних матеріалів, що стосувалися голови НТШ К.Студинського. За таких обставин Виділ запропонував Голові передати урядування Товариством до вияснення справи у суді в руки заступника. 1 березня у себе вдома, а не у Виділі, як це годилося би зробити, К.Студинський передав повноваження в руки В.Левицького. Після цього В.Левицький виявив, що на НТШ тяжіє величезний борг у 80 тис. золотих (приблизно 10 тис. тодішніх американських доларів). Розпочалася багаторічна відчайдушна боротьба В.Левицького з фінансовими проблемами НТШ. 25 травня на засіданні Виділу було розглянуто лист К.Студинського (автор листа і на цей раз не прийшов на засідання) про відставку і уповажено "Володимира Левицького перебрати на себе вповні права й обов'язки голови Наукового Товариства ім. Шевченка до Загальних Зборів." Збори 20 листопада 1932 р. підтвердили вибір правління. До того часу виринула також і ганебна справа переданих К.Студинським до Києва (без відома членів Виділу!) оригіналів листів Т.Шевченка.

У архіві можна знайти справу 309 чт. 1–74, арк. 5, 6, 7, у якій міститься листування Міського Львівського Староства у Львові з Левицьким Володимиром, головою Т-ва Прихильників освіти про припинення діяльності т-ва. 29 жовтня 1934 р. Староство пропонувало НТШ прийняти з рук Товариства Прихильників Освіти адміністрування Українським Академічним Будинком. 8 листопада 1934 р. В.Левицький повідомлявся про закриття Товариства і призначення його як голови НТШ куратором справи закриття. 13 листопада у присутності представників Староства він прийняв справи закритого товариства і його маєток. Через три роки НТШ повідомило Староство про перенесення частини свого Культурно-історичного музею до нового будинку Українського Товариства Допомоги інвалідам на Потоцького (тепер ген. Чупринки), 48.

Загальні збори НТШ 24 березня 1935 р. відзначили позитивні зрушення у фінансах Товариства, діяльність самого Голови. Зрозуміло, що така висока оцінка коштувала В.Левицькому колосальних фізичних та моральних зусиль і з огляду на певні обставини він категорично відмовився головувати наступну каденцію і навіть бути членом Виділу. Делегатом (представником) Секції у Виділі став др. Ю.Полянський, який на загальних зборах у дискусії стосовно прав звичайних членів від імені МПЛС делікатно сказав, "що в Товаристві ще інші є розходження, а саме – перевага гуманістичних наук над природничими. Тут повинна бути згода та співпраця всіх секцій."

Проте продовжив активно працювати у своїй секції. Є головою оргкомітету і керівником природничої секції V-го (20–22 квітня 1935 р.) та VI-го (16–17 травня 1937 р.) з'їздів українських природників і лікарів у

Львові. На кінець 1938 р. у секції було 77 дійсних членів (56 українців, 21 іноземець). У списку померлих членів можна було знайти 27 імен.

У середу 11 березня 1936 р. о 4-й годині після обіду НТШ відвідав Міністр освіти. Повідомлення про майбутню зустріч вручалось під розписку з приписом мати на собі "убрання темне візитове". В.Левицький був у дуже вузькому гроні запрошених.

Велику роль відіграв В.Левицький у створенні за допомогою Митрополита А.Шептицького кедрового заповідника площею близько 300 га на горі "Яйце". Це питання у НТШ вперше офіційно поставлене за його керівництва Товариством на засіданні Виділу 2 травня 1934 р. Вже після уступлення з високої посади Хроніка НТШ за 1935–37рр. (ч.73) зазначає: "Значні успіхи виявляє співпраця Виділу з Комісією Охорони Природи (створена 3.07.1935 – Г.С.). Завдяки заходам згаданої комісії й попереднього Виділу (очолюваного В.Левицьким – Г.С.) Ексцеленція Митрополит Шептицький зацікавився справою охорони природи та утворив перший у нас заповідник, що має зберегти останок таких поширених у нас колись кедриних лісів на горі "Яйце" коло Підлютого. Дня 22. квітня 1935. р. відпоручники Виділу, Математично-природописної-лікарської секції й Комісії Охорони Природи в особах: голови т-ва д-ра І.Раковського, голови Мат.-Прир.-Лік. Секції д-ра В.Левицького, голови Комісії Охорони Природи д-ра Мрицівної й її членів інж. А.Мельника і д-ра З.Залицького, подякували Ексцеленції за утворення першого в нас заповідника, зазначивши велику його вагу для науки...". У Виданій Товариству Грамоті зазначалося "Ми утворили в маєстности Галицької Гр.-кат. Митрополії в громаді Перегінсько, Долинського Повіту, Галицької Землі, Кедриний заповідник... . Науковому Товариству ім. Тараса Шевченка у Львові, як найвищій науковій установі нашої землі, передаємо отсим кедриний заповідник на верху "Яйце" під наукову опіку... . 15 квітня 1935".

26 грудня 1937 р. у присутності 118 членів у передчутті загрозливої ситуації відбулися чергові загальні збори Товариства. Останній того періоду (74-й том) Хроніки НТШ зазначає. "Збори відкрив голова др. І.Раковський підкреслюючи особливе значіння й завдання Наукового Товариства ім. Шевченка під сучасну пору, коли Українська Академія Наук в Києві втратила всякі можливості плекати й розвивати незалежну українську науку. Тимто візвав усіх членів Товариства "одностайно стати" у змаганнях до розбудови й розквіту наукового життя нашого народу."

Більшовики уважно стежили з Києва за тим, що робиться у Львові і все докладно занотовували. За протоколом Виділу від 12 жовтня 1939 р. "на зборах учительства заявив тов. Савченко помічник тов. Данильченка (заступника комісара освіти – Г.С.), що галичане мало знають про Радянщину, бо навіть тов. Раковський у промові на загальних зборах заявив, що Академія Наук в Києві не мала змоги плекати української науки." Зрозуміло, що НТШ змусили до саморозпуску 14 січня 1940 р. і саме на його матеріальній базі створили низку філій АН УРСР. Упродовж 1941–42 рр. була серйозна спроба поновити його діяльність. Добилися часткового повернення приміщень, відбулося 10 засідань Виділу. На останньому з них 20 серпня був присутнім голова Товариства І.Раковський,

що тоді приїздив до Львова. І ось останній запис у книзі протоколів: "Проф. др. В.Левицький подав до відомости що дня (дата не вписана – Г.С.) серпня відбулися сходуни членів Мат. Прир. Лік. Секції НТШ для вшанування пам'яті проф. Горбачевського з доповіддю проф. Вертипороха."

Хоча др Левицький не займав університетської кафедри, серед математиків він користувався безперечним авторитетом. 9 травня 1909 р. за рекомендацією Е.Г.Г.Ландау його обрали членом міжнародного товариства математиків "Circolo Matematico di Palermo" у Палермо, у 1910 р. – німецького товариства математиків "Deutsche Mathematiker-Vereinigung" у Ляйпцігу; 18 січня 1927 р. за поданням академіка М.Крилова – членом товариства французьких математиків у Парижі "Société Mathématique de France"; у 1929 р. (3 та 14 травня відповідно на Раді та загальних зборах) за поданням М.Кравчука – почесним членом математичного товариства м. Києва. З огляду на своє захоплення астрономією з 1921 р. належав також до польського Товариства любителів астрономії.

Довгий час був співробітником бібліографічного журналу "Revue semestrielle de la publications mathématiques" (Амстердам), реферуючи для нього усі українські математичні публікації. Завдяки цій діяльності увесь світ дізнавався з компетентних уст про здобутки нашої математики.

У міжвоєнний період В.Левицький організував та проводив усі шість з'їздів українських природників, інженерів і лікарів, організовував педагогічні товариства.

Велика заслуга вченого і педагога у вишукуванні та залученні до праці у секції Товариства перспективної української математичної молоді (М.Чайковського, М.Зарицького, Н.Садовського), визнаних математиків з ВУАН – Д.Граве (1.06.1923), М.Кравчука (20.05.1925), М.Крилова (24.03.1927), М.Куренського (13.04.1929), та інших закордонних вчених зі світовим іменем – Д.Гільберта та Ф.Кляйна (13.03.1924). А ще ж нематематики – українць-механік С.Тимошенко (1.06.1929), що виїхав до США, М.Планк (13.03.1924), В.Вернадський (17.09.1924), А.Айнштайн (30.05.1929). Іноземні члени дякували за честь належати до НТШ. У "Збірнику МПЛС" друкувалися й праці математиків наддніпрянської України Н.І.Ахієзера, М.М.Боголюбова, М.П.Кравчука, М.М.Крилова, М.Куренського, Г.Пфейфера.

Сердечні стосунки нав'язалися у В.Левицького з М.Криловим та М.Кравчуком. Останній неодноразово запрошував В.Левицького переїхати до Києва. "Не щодавно мені довелося переконатися, що Народний Комісаріат Освіти мав би велике бажання притягти Вас до роботи у нас на умовах, які б у великій мірі залежали від Вас. Як би з Вашого погляду Ваш переїзд до Києва або до Харкова був можливий, то я б дуже просив подати прелімінарно (попередньо – Г.С.) Ваші умови..." (з листа від 27.12.1929). Не приймавши таких спокусливих пропозицій, В.Левицький мимоволі уникнув репресій, на які наразився М.Чайковський, а можливо й (на противагу М.Кравчуку) зберіг собі життя. Проте після 1939 р. йому про цю відмову недвозначно нагадували.

М.Кравчук докладав багато зусиль, щоб В.Левицький став українським академіком: "Тут (у Києві – Г.С.) висунено Вашу кандидатуру до Академії. Через те, що до останнього моменту не надійшло за Вас ніяких матеріалів,

я дозволив собі скласти коротку рекомендацію, додавши до неї (з доповненнями) ті матеріали, що їх було видано в "Збірнику" з нагоди Вашого ювілею...Виборча процедура почнеться 7.VI." (з листівки 28.05.1929). Спочатку, побоюючись переслідувань польської влади, В.Левицький відмовився і про це після "золотого вересня" йому теж нагадали. Опісля у 1929 р. його кандидатура не пройшла, оскільки В.Левицький з властивою йому принциповістю письмово висловився проти контролю партії за математичною наукою. "Її (математики – Г.С.) одинокий Бог – то правда безпартійна, безполітична. І тому в ній групуються люди усяких поглядів... Раз зійде математика до ролі політичного, партійного знаряддя, то перестане бути математикою..."

Після цієї невдачі М.Кравчук поновлював старання залучити В.Левицького до Академії, хоча б у статусі новозапроваджуваної номінації члена-кореспондента. "Хотів би одержати від Вас в зв'язку з можливими перспективами в Академії (обрання членів-кореспондентів тощо) як найповніші відомості (чи відповідні бібліографічні вказівки) за Ваші праці, а по змозі і самі праці. У нас 25 ц. м. буде сесія ВУАН і на повістці стоїть питання про порядок обрання членів-кореспондентів" (з листа від 16.09.1929).

З приходом у вересні 1939 р. Червоної Армії перестали виплачувати пенсію (499,57 зл) і В.Левицькому у віці 67 років довелося турбуватися про пошуки роботи. У особовій справі пізніше писав, що "допомагав створювати фізико-математичний факультет університету", фактично ж лише був біля його витоків у грудні. В.Левицький ще 3 жовтня розпочав викладання у заснованому у Львові Педагогічному Інституті. І лише з 1 січня 1940 р. став професором фізико-математичного факультету Львівського університету. У педінституті залишився працювати за сумісництвом, на пів ставки. Став одразу і членом Наукової Ради університету. Ставка професора тоді становила 1000 крб. Загалом дуже цікаво переглянути його щомісячну книгу прибутків та видатків, яку у ті часи було заведено вести. Окрім обов'язкових записів фінансового змісту там занотовані основні події та погода кожного дня.

Пізніше Всесоюзний комітет у справах вищої школи (ВКВШ) йому, як і всім дійсним членам НТШ визнав 10 років стажу. Перед самою німецькою окупацією 14 червня 1941 р. ВАК ВКВШ (протокол №22) затвердив В.Левицького у вченому званні професора по кафедрі математичного аналізу. Атестат професора Пр №003231 був виписаний у Москві вже 6 березня 1946 р.

У військовій порі принципово не працював у жодній з німецьких установ і лише принагідно за скромну платню та обіди підробляв в українських Центробанку та книготорзі. Радянська авіація скидала бомби на військову частину, яка знаходилася поблизу житла професора і так був серйозно пошкоджений будинок, де він мешкав. Рятуючи від дощів свою прекрасну бібліотеку, що була предметом особливої гордості власника, В.Левицький декілька днів прожив на вулиці, набувши запалення легенів.

Після відходу німецьких окупантів відразу 1 серпня 1944 р. став до праці в університеті. 22 листопада став в.о. завідувача кафедри

математичного аналізу. У тогочасній особовій справі в графі "стан здоров'я" написав "тепер – по різних недугах – здоровий". 14 серпня 1947 р. Міністерство ВО СРСР затвердило його завідувачем цієї кафедри. Цього ж таки навчального року (31.08.1947) В.Левицький покинув сумісництво у педінституті, яке тривало з 1940 р. Незабаром, 15 квітня 1948 р. покинув і цю відповідальну посаду, ставши просто професором кафедри математичного аналізу і теорії функцій. 18 жовтня 1950 р. вийшов наказ Міністерства (продубльований в університеті 25 жовтня) про затвердження його на посаді професора кафедри математичного аналізу. Усі ці роки читав курси вищої математики (для хіміків), диференціальних рівнянь, спецкурси з теорії функцій комплексної змінної, автоморфних та еліптичних функцій, керував дипломними роботами. Після 62! років безупинної творчої наукової та педагогічної праці з 1 вересня 1953 р. вийшов на пенсію розміром 1200 крб. в місяць. Але ще два роки працював на умовах погодинної праці – 450 год. у 1953/54 н.р. та 520 год. у наступному.

Після війни рознесені її лихоліттям по цілому світу колишні члени НТШ відновлюють його діяльність спочатку в Німеччині (1947) а потім після масового виїзду більшості членів до інших країн – з 1955 р. у осередках Франції, США, Канади, Австралії. Коли у 1989 році на новій хвилі національного піднесення відновила свою діяльність організація у Львові, то через три роки вже у незалежній Україні на засіданні Головної Ради НТШ за Львівським Товариством було визнано усі права матірньої організації. Але у повоєнних шеренгах НТШ В.Левицький вже не міг стояти.

Увесь час за радянської влади мусів жити під жахливим психологічним пресом очікуваного арешту, оскільки розумів, що у його минулому багато що новій владі дуже не подобалося і за справи менш невинні інші люди були або знищені чи вивезені на схід. Можливо тому жодної праці після 40-го року він не опублікував. А загалом повний список його друкованих праць налічує 132 позиції. Це шкільні підручники (6); 60 праць з математики українською (45), польською (6), німецькою (5), іспанською (3), французькою (1) мовами; 16 – з фізики, хімії та астрономії українською, польською (2) та німецькою (1) мовами; 9 – географічно-туристичного спрямування; 7 – філософського змісту, 13 – на загальні, та популярні теми; 21 переклад з німецької, англійської та французької мов. Зазначимо, що крім захоплення астрономією В.Левицький цікавився краєзнавством, любив подорожі, особливо велосипедні.

Домінантою наукових зацікавлень В.Левицького була теорія аналітичних функцій, передусім властивості еліптичних модулярних форм, модулярних еліптичних функцій та їх обернень. Вчений побудував диференціальні рівняння, яким задовольняють ці функції, застосував модулярні групи у теорії ланцюгових дробів. Опрацьований ним функціонально-алгебричний підхід дозволив успішно дослідити групові властивості диференціальних рівнянь, що органічно вплили у теорію обґрунтування гіпотези Рімана щодо розподілу нулів дзета-функції, завершену у 1990 р. групою японських математиків під проводом Мікі Сато. Цікаві результати отримано у математичному аналізі, теорії

диференціальних та інтегральних рівнянь, проєктивній та диференціальній геометрії. Багато уваги приділено оглядам найновіших результатів в окремих напрямках математики. У списку осіб, запрошених на з'їзд математиків СРСР у Харкові (червень 1930) були імена В.Левицького та М.Зарицького. Проф. О.Костовський, відзначаючи глибоку математичну інтуїцію В.Левицького, згадує, що говорячи на лекціях про властивості еліптичних функцій, він, заохочував слухачів словами, що дослідження в галузі цих функцій є прямим шляхом до доведення великої теореми Ферма. Лише у минулому десятилітті цей прогноз справдився. Про його підручники та термінологічну діяльність вже згадувалося.

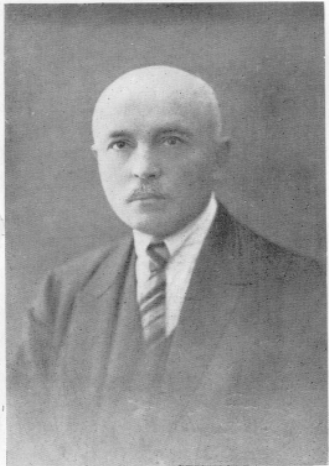
Коли В.Левицький поставив питання про **необхідність дослідження історії української математики**, М.Кравчук у листівці (30.10.1927) до нього написав: "Ви (і в цій справі перший) підносите важливе та цікаве питання: про вивчення історії математичної думки на Україні. Хотілося б щоб Ви зробили й початок, бо маєте легку руку."

Намагаючись гідно оцінити діяльність математично-природописно-лікарської секції, не забуваймо і того, що перші дві секції НТШ – історико-філософська та філологічна – розвивали переважно вже традиційні тоді для України наукові напрями. Діяльність же МПЛС була великою мірою піонерською, оскільки, розпочавши з розвитку ще лише частково засвоєних на українському ґрунті ботаніки, зоології, географії та медицини, вона здобулася і на початок серйозних досліджень у цілком нових напрямках – математиці, фізиці, астрономії, хімії, психології. Разом з цим розпочалися укладання національної термінології, видання перших наукових періодичних видань природничого спрямування – 32 томів "Збірника МПЛС", 28 випусків "Sitzungsberichte", тобто "Звідомлень із засідань МПЛС". В.Левицький був редактором цих видань від першого до останнього числа. Останні видання вийшли у 1939 р.

Як вже згадувалося, спершу В.Левицький відповідав лише за редагування праць з математики, фізики та хімії. Пізніше з 1927 р. відповідальність за редагування ЗМПЛС взяло на себе очолюване ним керівництво секції. Томи 18–19, 23–24, 28–29 "Збірника" вийшли здвоєними. Вісім томів (3–8, 30, 32) мали дві частини, переважно природописну й математичну та лікарську. Вийшло шість окремих лікарських частин (редактор Є.Озаркевич) у 3-му, 4-му, дві у 5-му, 6-му та 8-му томах. Сьомий том мав дві математично-природописні частини. Після цього медичну тематику знову перестали виділяти в окремі частини і вона увійшла в збірні частини журналу.

У статті "Наукове товариство ім. Шевченка у Львові (1873–1928 рр.)" в "Записках НТШ" з нагоди виходу в світ у 1929 році їх 150-го тому тогочасний голова Товариства К.Студинський між іншим написав так: "Великі заслуги на полі організації секції природописно-математично-лікарської поклав др. Вол. Левицький, що зредагував досі, спільно з Ів.Верхратським, Евг.Озаркевичем, Миколою Мельником 27 томів "Збірника" своєї секції і 12 зшитків "Sitzungsbericht'iv". Йому завдячує секція свій сьогоднішній дуже значний розвиток і організацію природописного музею, в якому є багато його власних дарів. Наукове

Товариство пошанувало в р. 1927 (3 квітня – Г.С.) його 30-літній ювілей наукової праці прилюдною академією і видало в його честь 26 том "Збірника" природописно-математично-лікарської секції з численними (17) працями учених з Галичини і України..." Такими словами, у такому великому обсязі пошановано ще лише М.Грушевського, І.Франка та В.Гнатюка.

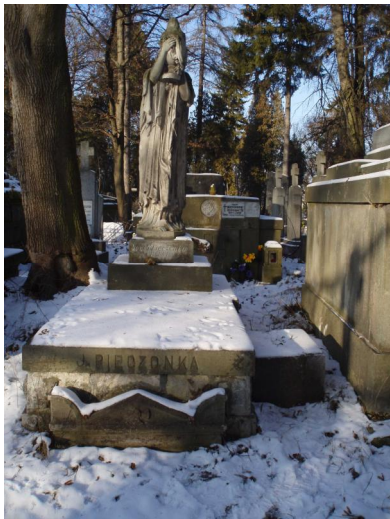
	3 нагоди трийцятьліття. Трийцять літ мав як раз від почину діяльності Математично-Природописно-Лікарської Секції Наукового Товариства ім. Шевченка у Львові, а саме від появи першої книжки «Збірника» цієї секції, а враз із тим мав також трийцятьліття редакторської праці теперішнього голови згаданої Секції, д-ра Володимира Левицького. Почва нашого «Збірника» була одним із проявів перемін Товариства ім. Шевченка в строго-научну устанovu, із певними завданнями: розвивати й плекати строго-научні досли та надавати наукові праці в українській мові. Згадана переміна була важкою подією в культурному житті цілого нашого українського народу. Життя кожного народу, так само як життя кожної людини, залежить головню від двох чинників: вродженого таланту й зовнішніх обставин. Ці останні були для цілого нашого українського народу згальом, а для нас галицьких Українців особливо, все дуже несприятливі: наш народ, втративши швидко самостійність, лавко глобальний і поневолений, став рабом на власній, рідній землі та селядним чинником могутності, багатства і культури своїх татарів. Та мимо цього наш український народ постійно змагає до розвитку власної культури. Розвій своєрідного, питомого мистецтва у всіх часах, рівний ровній друкарства, брацькі школи й книво-могильніська академія, в століттях XVI-тому й XVII-тому, численні вчені-Українці, що були особливо і славю чужих власних шкіль, та безупинне змагання до здвигнення рідного високого шкільництва, в наступуючих століттях, отже ті безперервні свідки безперервного змагання нашого українського народу до культури, отже варезом доказ його вродженого таланту, його цінних расових приміет. І тільки завдяки тим цінним расовим приміетам наш народ невинародовався і устояв, мимо безмежно важких, несприятлих, зовнішніх обставин. Ось так, саме в 30 літ після ославленого царського указу, заборонючого уживання української мови в літературі й науці, коли здавалося, що наш народ вичернений вже раз на все із ряду культурних
Фото з автографом В.Левицького з фронтиспісу ювілейного 26-го тому Збірника природописно-математично- лікарської секції	Перша сторінка передмови І.Раковського "З нагоди трийцятьліття"

На фронтиспісі згаданого збірника поміщене фото В.Левицького. У передмові І.Раковського "З нагоди трийцятьліття", пояснюються мотиви укладання "Збірника МПЛС" саме такого змісту, оскільки минуло "30 років від почину МПЛС а саме від появи першої книжки "Збірника" і 30-ліття редакторської праці...В.Левицького". Потім йде ґрунтовна праця М.Чайковського, де розширено, викладені до того на урочистому засіданні, матеріали про життя на наукову діяльність В.Левицького. Позволимо собі лише один виїмок з неї. "Та найбільші заслуги для Товариства та нашої Секції має др Левицький як невтомний організатор наукової праці. Хоч не мав до того офіційального титулу, бо не був професором університету, своїм

власним прикладом і словами заохоти притягав до праці молодих учених. Він мав дар вишукувати молодих adeptів науки й розділював між них праці, даючи їм зразу реферати з книжок, а далі заохочуючи до самостійної наукової праці. В цьому відношенні всі ми мусимо вважати себе його духовими учнями."

Виступаючи на цьому урочистому засіданні, В.Левицький цікавим зауваженням вказав на визначну роль діяльності секції і ролі національних шат природничих наук для загальної історії української культури. "Свято це є символом того відрядного факту, що й наш нарід робить вже останні кроки, щоби вповні ввійти в сімю культурних народів. Бо якось так воно зложилося, що розвиток кожної нації, а головню недержавної і поневоленої як наша, іде певними фазами: починається від устної, опісля письменної словесности, приходять великі духи, що словом будять національну свідомість, далі приходить пора на наукові досліді історії та літератури, досліді мови, пізніше може приходить час на мистецтво, а далеко-далеко на кінці на науки природописні і технічні. І нічого в цьому дивного, бо науки ці вимагають таких варстатів праці і таких установ, яких поневолена нація не є в силі дати."

"Тому то тішуся, що в нас прийшли вже до зрозуміння значіння природописних та технічних наук для культури; бо нарід, що недооцінює ці науки і не виявляє охоти до їх зрозуміння, є засуджений в нинішніх часах або на знищення, або на те, щоби бути погноєм для інших, гелотом (ілотом,



Могила Якуба Печонкі (Jacob Pieczonka), за якою у другому ряді розташований гробівець Міхновських та Левицьких на Личаківському цвинтарі



Гробівець Міхновських та Левицьких, де поховані Володимир Левицький та його дружина Софія (таблички у верхній правій частині гробівця)

нижчим класом стародавньої Спарти, що вважався власністю держави і за становищем майже не відрізнявся від раба – Г.С.) і рабом."

"...кінчу мою промову з тим бажанням, щоби у нас на Україні зростали ряди математиків і то не лиш таких, що творчим духом посувають поступ науки вперед, але і педагогів-математиків, що своєю любов'ю до цієї цариці наук розбудять до неї інтерес серед широких кругів молоді та суспільности."

14 липня 1956 р. відійшов у вічність подвижник української математики, першопроходець у створенні української наукової термінології, популяризації серед населення за важких колонізаторських часів точних наук, підготовки молодих патріотично наставлених українських науковців. Людина незламного почуття обов'язку та відповідальності за долю свого народу, яка завжди вміла заглянути уперед і взятися за найскладніші та найвідповідальніші завдання свого часу. Це його ще 24 вересня 1927 р. академік Михайло Кравчук назвав: "основоположником математичної культури нашого народу." Поховали його у гробівці Міхновських-Левицьких, що розташований у другому ряді (за могилою Якуба Печонкі) поля 71, що складається із трьох частин, у його південній частині при дорозі поміж 71 і 72-м полями меморіального Личаківського кладовища. На схемі Личаківського цвинтаря його могила позначена номером 160. Пізніше



Відслонення меморіальної дошки
В.Левицькому, М.Зарицькому та
М.Чайковському на фасаді ЛДУ ім.
І.Франка 15.01.1998 р.



Вигляд меморіальної дошки
видатним українським математикам
В.Левицькому, М.Зарицькому та
М.Чайковському

тут у 1958 році поховали дружину Софію. Неподалік на тому ж самому полі при дорозі повз поле 57 розташований гробівець родини Туллі, де похований, зокрема, видатний механік-будівельник, професор Львівської політехніки Максиміліан Туллі (Maksymiljan Thullie).

15 січня 1998 р. на фасаді Львівського державного університету ім. Івана Франка урочисто відслонили художню меморіальну дошку великим подвижникам, фундаторам української математичної культури В.Левицькому, М.Зарицькому та М.Чайковському. Перед тим меморіальну дошку встановили на названій іменем В.Левицького середній школі Тернополя. Низько вклоняємося пам'яті Великої Людини та Невтомного Працівника, що жертвно поклав усе своє сповнене трудів довге життя на вівтар служіння Вітчизні.

-
1. Автобіографія др Володимира Левицького. ЦДІА України у Львові. – Ф. 309, оп. 1, спр. 388.
 2. Аксиоми для нащадків: Українські імена в світовій науці: Зб. нарисів. – Львів: Каменярь, 1991. – 246 с.; Львів: Меморіал, 1992. – 541 с.
 3. Алфавітна книга обліку членів Товариства (НТШ) за 1893–1920 рр. ЦДІА України у Львові. – Ф. 309, оп. 1, спр. 372.
 4. Біографія В.Левицького / Біографії письменників, вчених і політичних діячів з прізвищами на букви "Д-О". ЦДІА України у Львові. – Ф. 328, оп. 1, спр. 103. Аркуш 93.
 5. *Возняк Г.М.* Володимир Левицький – видатний український математик. Тернопіль: Підручники & посібники, 1997.
 6. Енциклопедія Українознавства. Тт. 1–6. Львів: НТШ, 1993–1996.
 7. Книга обліку членів товариства (НТШ) за 1873–1900 рр. ЦДІА України у Львові. – Ф. 309, оп. 1, спр. 371.
 8. Книга протоколів Виділу (правління) НТШ (1893–1902 рр.). ЦДІА України у Львові. – Ф. 309, оп. 1, спр. 33.
 9. Книга протоколів Виділу (правління) НТШ (1902–1912 рр.). ЦДІА України у Львові. – Ф. 309, оп. 1, спр. 34.
 10. Книга протоколів Виділу (правління) НТШ (квітень 1912–червень 1936 рр.). ЦДІА України у Львові. – Ф. 309, оп. 1, спр. 35.
 11. Книга протоколів Виділу (правління) НТШ (1936–1942 рр.). ЦДІА України у Львові. – Ф. 309, оп. 1, спр. 36.
 12. Книга протоколів загальних зборів НТШ (від 25 березня 1903 р. до 1940 р.). ЦДІА України у Львові. – Ф. 309, оп. 1, спр. 31.
 13. *Левицький Володимир.* Автобіографічний нарис за період 1903–1914 рр. ЦДІА України у Львові. – Ф. 771, оп. 1, спр. 1.

14. *Левицький Володимир*. Спогади з життя (датовано листопадом 1933 р.). ЦДІА України у Львові. – Ф. 771, оп. 1, спр. 2.
15. *Левицький Володимир*. Спогади про діяльність товариства "Українська бесіда" в Тернополі за період 1896–1902 рр., присвячений 50-літньому ювілею. ЦДІА України у Львові. – Ф. 771, оп. 1, спр. 17. 4 с.
16. Листи М. Кравчука до В. Левицького (1926–1931). ЦДІА України у Львові. – Ф. 771, оп. 1, спр. 40.
17. *Левицький В., Зарицький М., Свенціцький І.* Математика серед наук. Львів: Вид. сп. "Діло", 1927. 59 с.
18. *Пташник Б.* Піонер української математичної науки // Вісник НТШ, 1997, № 18. С. 4–5.
19. Щоденник, ведений В. Левицьким на фронті з 16.08.1914 р. по 3.01.1915 р. ЦДІА України у Львові. – Ф. 771, оп. 1, спр. 3.

20 грудня 2007 р.

УДК 517.956

ГЛОБАЛЬНА ГЛАДКА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ КВАЗІЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА З ВІЛЬНИМИ МЕЖАМИ

Володимир КИРИЛИЧ¹, Андрій ФІЛІМОНОВ²

¹ Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

² Московський державний університет шляхів сполучення,
вул. Образцова, 15 127994 Москва, Росія

Методами характеристик і стисних відображень визначено глобальну класичну розв'язність узагальненої задачі Валле-Пуссена з невідомими внутрішніми межами для виродженої квазілінійної гіперболічної системи рівнянь першого порядку.

Ключові слова: гіперболічні системи, метод характеристик, стисні відображення, задача Валле-Пуссена.

Доведено існування та єдиність класичного розв'язку на всій додатній часовій осі задачі Валле-Пуссена за просторовою змінною з вільними внутрішніми межами для виродженої сингулярної квазілінійної одновимірної гіперболічної системи рівнянь першого порядку.

Огляд літератури щодо задачі Валле-Пуссена наведено в [1]. Узагальнені задачі Валле-Пуссена (внутрішні лінії задання додаткових умов є невідомими) виникають у багатьох прикладних процесах [2-4]. Коректність глобального узагальненого та класичного розв'язків невинродженої квазілінійної гіперболічної задачі з фіксованими межами досліджували в [5-7].

Локальна та глобальна розв'язність гіперболічних задач з невідомими межами (гіперболічні задачі Стефана) наведена в [8, 9].

1. Формулювання задачі та основні припущення.

У прямокутнику $\Pi(T_0) = \{(x, t) | 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T_0\}$, де $l > 0$, $T_0 > 0$ - деякі константи. Розглянемо систему

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x, t, u, v) \frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(x, t, u, v), i = 1, K, m, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial x} = q_j(x, t, u, v), j = 1, K, n, \quad (2)$$

$$s_j = r_j(t, s(t), u(s_j(t), t), v(s_j(t), t)), j = 1, K, n, \quad (3)$$

де $u = (u_1, K, u_m)$, $v = (v_1, K, v_n)$, $s = (s_1, K, s_n)$.

Задамо початкові та крайові умови

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \alpha(\mathbf{x}), 0 \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{l}, \quad (4)$$

$$\mathbf{s}_j(0) = \mathbf{c}_j, \mathbf{j} = 1, \mathbf{K}, \mathbf{n}, 0 \leq \mathbf{c}_j \leq \mathbf{l}, \quad (5)$$

$$\mathbf{u}_i(0, \mathbf{t}) = \gamma_i^0(\mathbf{t}, \mathbf{u}(0, \mathbf{t})), \mathbf{i} \in \mathbf{I}_+^0 = \{\mathbf{i} \mid \text{sgn}(\lambda_i(0, 0, 0, 0)) = 1\}, \quad (6)$$

$$\mathbf{u}_i(\mathbf{l}, \mathbf{t}) = \gamma_i^1(\mathbf{t}, \mathbf{u}(\mathbf{l}, \mathbf{t})), \mathbf{i} \in \mathbf{I}_-^1 = \{\mathbf{i} \mid \text{sgn}(\lambda_i(\mathbf{l}, 0, 0, 0)) = -1\}. \quad (7)$$

Додаткові умови на невідомих лініях мають вигляд

$$\mathbf{v}_j(\mathbf{s}_j(\mathbf{t}), \mathbf{t}) = \beta_j(\mathbf{t}), \mathbf{j} = 1, \mathbf{K}, \mathbf{n}, \quad (8)$$

де функції $\alpha = (\alpha_1, \mathbf{K}, \alpha_m)$, $\beta = (\beta_1, \mathbf{K}, \beta_n)$, γ_i^0 ($\mathbf{i} \in \mathbf{I}_+^0$), γ_i^1 ($\mathbf{i} \in \mathbf{I}_-^1$) і константи $\mathbf{c}_j$ ($\mathbf{j} = 1, \mathbf{K}, \mathbf{n}$) є заданими. Позначивши $\mathbf{w} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$, розглянемо такі множини:

$$\mathbf{D}(\mathbf{T}_0, \mathbf{P}_0) = \Pi(\mathbf{T}_0) \times \{\mathbf{w} \mid \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{m+n}, \mathbf{P} \mathbf{w} \mathbf{P} \leq \mathbf{P}_0\},$$

$$\mathbf{D}^1(\mathbf{T}_0, \mathbf{P}_0) = [0, \mathbf{T}_0] \times \{\mathbf{w} \mid \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{m+n}, \mathbf{P} \mathbf{w} \mathbf{P} \leq \mathbf{P}_0\},$$

$$\mathbf{D}^2(\mathbf{T}_0, \mathbf{P}_0) = [0, \mathbf{T}_0] \times [0, \mathbf{l}]^n \times \{\mathbf{w} \mid \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{m+n}, \mathbf{P} \mathbf{w} \mathbf{P} \leq \mathbf{P}_0\},$$

де $\mathbf{P}_0 > 0$ - деяка стала, $[0, \mathbf{l}]^n \in \mathbb{R}^n$.

Припускаємо, що виконуються такі умови.

A1. В області $\mathbf{D}^1(\mathbf{T}_0, \mathbf{P}_0)$ для $\mathbf{i} = 1, \mathbf{K}, \mathbf{m}$

$$\text{sgn}(\lambda_i(0, \mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v})) = \text{const}, \text{sgn}(\lambda_i(\mathbf{l}, \mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v})) = \text{const}. \quad (9)$$

A2. Функції $\lambda_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w})$, $f_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w})$ для $\mathbf{i} = 1, \mathbf{K}, \mathbf{m}$, $q_j(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w})$ для $\mathbf{j} = 1, \mathbf{K}, \mathbf{n}$ визначені в області $\mathbf{D}(\mathbf{T}_0, \mathbf{P}_0)$, а функції $r_j(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w})$ для $\mathbf{j} = 1, \mathbf{K}, \mathbf{n}$ визначені в області $\mathbf{D}^2(\mathbf{T}_0, \mathbf{P}_0)$. Всі ці функції обмежені за модулем деякими константами $\Lambda, \mathbf{F}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$, відповідно. Крім того, функції $q_j(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w})$ для $\mathbf{j} = 1, \mathbf{K}, \mathbf{n}$ неперервні за $\mathbf{t}$.

A3. Існують невід'ємні, підсумовані на $[0, \mathbf{T}_0]$ (і $[0, \mathbf{l}]$ відповідно) функції $\Lambda_1(\mathbf{t})$, $\Lambda_2(\mathbf{t})$, $\mathbf{F}_1(\mathbf{t}), \mathbf{F}_2(\mathbf{t}), \mathbf{R}_1(\mathbf{t}), \mathbf{R}_2(\mathbf{t}), (\mathbf{Q}_2(\mathbf{x}))$, причому $\mathbf{Q}_2(\mathbf{x})$, крім того, підсумована в квадратах) такі, що майже для всіх $\mathbf{t} \in [0, \mathbf{T}_0]$ ($\mathbf{x} \in [0, \mathbf{l}]$) при

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{t}, \mathbf{w}_1) \in \mathbf{D}(\mathbf{T}_0, \mathbf{P}_0), (\mathbf{x}_2, \mathbf{t}, \mathbf{w}_2) \in \mathbf{D}(\mathbf{T}_0, \mathbf{P}_0), (\mathbf{x}^1, \mathbf{t}, \mathbf{w}_1) \in \mathbf{D}^2(\mathbf{T}_0, \mathbf{P}_0),$$

$(\mathbf{x}^2, \mathbf{t}, \mathbf{w}_2) \in \mathbf{D}^2(\mathbf{T}_0, \mathbf{P}_0)$ (і при $(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}_1) \in \mathbf{D}(\mathbf{T}_0, \mathbf{P}_0)$, $(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}_2) \in \mathbf{D}(\mathbf{T}_0, \mathbf{P}_0)$ відповідно) для $\mathbf{i} = 1, \mathbf{K}, \mathbf{m}$ та $\mathbf{j} = 1, \mathbf{K}, \mathbf{n}$ виконуються нерівності

$$\begin{aligned}
& |\lambda_i(x_1, t, w_1) - \lambda_i(x_2, t, w_2)| \leq \Lambda_1(t) |x_1 - x_2| + \Lambda_2(t) |w_1 - w_2|, \\
& |f_i(x_1, t, w_1) - f_i(x_2, t, w_2)| \leq F_1(t) |x_1 - x_2| + F_2(t) |w_1 - w_2|, \\
& |r_j(x^1, t, w_1) - r_j(x^2, t, w_2)| \leq R_1(t) |x^1 - x^2| + R_2(t) |w_1 - w_2|, \\
& |q_j(x, t, w_1) - q_j(x, t, w_2)| \leq Q_2(x) |w_1 - w_2|.
\end{aligned} \tag{10}$$

A4. Функції $\lambda_i(x, t, w)$, $f_i(x, t, w)$, $r_j(x, t, w)$, $q_j(x, t, w)$ вимірні в області $D(T_0, P_0)$ для всіх $i = 1, K, m$ та $j = 1, K, n$ відповідно.

A5. Виконуються умови узгодження нульового порядку

$$\begin{aligned}
\gamma_i^0(0, \alpha(0)) &= \alpha_i(0), i \in I_+^0, \\
\gamma_i^1(0, \alpha(1)) &= \alpha_i(1), i \in I_-^1.
\end{aligned} \tag{11}$$

A6. Функції $(x, t, u, v) \rightarrow q_j(x, t, u, v)$, $j = 1, K, n$ не залежать від тих v_k , для яких $c_k \neq c_j$.

A7. Функції $r_j(t, 0, u, v) \geq 0$, якщо $c_j = 0$, і нехай $r_j(t, 1, u, v) \leq 0$ при $c_j = 1$.

A8. Нехай існує невід'ємна підсумована на $[0, 1]$ функція $\tau \rightarrow M(\tau)$ така, що

$$|q_j(x, t, w)| \leq M(x) |v|, j = 1, K, n.$$

Крім того, припускаємо, що квадрат $M(\tau)$ також є підсумованою функцією.

A9. Функції $x \rightarrow \alpha_i(x)$, $i = 1, K, m$, ліпшицеві з константою A_1 та обмежені за модулем зверху константою A .

A10. Функції $(t, u) \rightarrow \gamma_i^0(t, u)$ ($i \in I_+^0$), $(t, u) \rightarrow \gamma_i^1(t, u)$ ($i \in I_-^1$), $t \rightarrow \beta_j(t)$ локально ліпшицеві за t, u з константами Γ_1, Γ_2 і B_1 відповідно.

A11. Нехай $\gamma_i^0(t, u)$, $i \in I_+^0$, не залежить від тих u_k , для яких $k \in I_+^0$, а $\gamma_i^1(t, u)$, $i \in I_-^1$, не залежить від тих u_k , для яких $k \in I_-^1$. Нехай $T \in (0, T_0]$.

Введемо позначення

$$\delta = \min_j \min\{c_j, 1 - c_j \mid c_j \neq 0, c_j \neq 1\}.$$

Якщо $c_j \neq 0$ і $c_j \neq 1$, то для таких j приймемо

$$\begin{aligned}
D_j^0 &= \{(x, t) \in \Pi(T) \mid 0 \leq x \leq c_j - RT; 0 \leq t \leq T\}, \\
D_j^1 &= \{(x, t) \in \Pi(T) \mid c_j + RT \leq x \leq 1; 0 \leq t \leq T\},
\end{aligned}$$

$$D_j^c = \Pi(T) \setminus (D_j^0 \cup D_j^1) = \{(x, t) \in \Pi(T) \mid c_j - RT \leq x \leq c_j + RT; 0 \leq t \leq T\}.$$

Якщо ж $c_j = 0$, то приймемо

$$\begin{aligned} D_j^0 &= \emptyset, \\ D_j^1 &= \{(x, t) \in \Pi(T) \mid c_j + RT \leq x \leq l; 0 \leq t \leq T\}, \\ D_j^c &= \Pi(T) \setminus D_j^1. \end{aligned}$$

Аналогічні міркування, коли $c_j = l$. Позначимо

$$\begin{aligned} P v P &= \max_j \max \{ \max_{D_j^0} (|v_j(x, t)| \exp(-H(c_j - RT - x))), \max_{D_j^c} |v_j(x, t)|, \\ &\quad \max_{D_j^1} (|v_j(x, t)| \exp(-H(x - c_j - RT))) \}, \\ P u P &= \max_{\Pi(T)} |u|, P w P = \max \{ P u P, P v P \}, P s P = \max_{[0, T]} |s|, \end{aligned}$$

де константа $H > 0$ буде вибрана пізніше.

Розглянемо простір IE неперервних функцій $w : \Pi(T) \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$, причому функції $(x, t) \rightarrow u(x, t)$ будемо вважати ліпшицевими за x, t , а функції $(x, t) \rightarrow v(x, t)$ - ліпшицевими за x . Нехай $IE_0(T)$ - куля $P w P \leq P_0$ в цьому просторі.

Через $IE_1(T, L)$ позначимо множину функцій $(u, v) \in IE_0(T)$ таких, що константи Ліпшиця для функції $(x, t) \rightarrow u(x, t)$ (за x, t) і для функції $(x, t) \rightarrow v(x, t)$ (за x) обмежені зверху величиною $L > 0$.

Розв'язок задачі

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \lambda_i(x, t, w(x, t)), \quad i = 1, K, m, \\ x(t) &= x, w \in IE_0(T) \end{aligned} \quad (12)$$

будемо називати характеристикою i -ї сім'ї, що відповідає функції w , і позначати через $\varphi_i(t; x, t, w)$, а розв'язок задачі

$$\begin{aligned} \frac{ds_j}{dt} &= r_j(t, s(t), w(s_j(t), t)), \quad j = 1, K, n, \\ s_j(0) &= c_j, w \in IE_0(T) \end{aligned} \quad (13)$$

будемо позначати через $s_j(t; w)$ і називати j -ю внутрішньою границею.

На підставі умов A2- A4 та за умови, що $w \in IE_0(T)$, функції λ_i, r_j задовольняють умови Каратеодорі, тому узагальнені (абсолютно

неперервні) розв'язки задач (12), (13) існують, єдині та можуть бути продовжені до границі прямокутника $\Pi(\mathbf{T})$.

Через $\chi_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w})$ позначимо найменше значення аргументу $\mathbf{t}$, для якого визначений розв'язок $\varphi_i(\mathbf{t}; \mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w})$.

Для $i = 1, \mathbf{K}, m$ введемо множини:

$$\begin{aligned}\Pi_i^\alpha(\mathbf{w}) &= \{(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \in \Pi(\mathbf{T}) \mid \chi_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}) = 0\}, \\ \Pi_i^0(\mathbf{w}) &= \{(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \in \Pi(\mathbf{T}) \mid \chi_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}) > 0, \varphi_i(\chi_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}); \mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}) = 0\}, \\ \Pi_i^1(\mathbf{w}) &= \{(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \in \Pi(\mathbf{T}) \mid \chi_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}) > 0, \varphi_i(\chi_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}); \mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}) = \mathbf{I}\},\end{aligned}$$

а для $i = 1, \mathbf{K}, m; j = 1, \mathbf{K}, n$ позначимо

$$R_i[\mathbf{w}](\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \begin{cases} \alpha_i(\varphi_i(0; \mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w})), & i = \overline{1, m}, (\mathbf{x}, \mathbf{t}) \in \Pi_i^\alpha(\mathbf{w}), \\ \gamma_i^0(\chi_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}), u(0, \chi_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}))), & i \in I_+^0, (\mathbf{x}, \mathbf{t}) \in \Pi_i^0(\mathbf{w}), \\ \gamma_i^1(\chi_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}), u(\mathbf{I}, \chi_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}))), & i \in I_-^1, (\mathbf{x}, \mathbf{t}) \in \Pi_i^1(\mathbf{w}); \end{cases} \quad (14)$$

$$l_i[\mathbf{w}](\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \int_{\chi_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w})}^{\mathbf{t}} f_i(\varphi_i(\tau; \mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}), \tau, \mathbf{w}(\varphi_i(\tau; \mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}), \tau)) d\tau, \quad (15)$$

$$A_i[\mathbf{w}](\mathbf{x}, \mathbf{t}) = R_i[\mathbf{w}](\mathbf{x}, \mathbf{t}) + l_i[\mathbf{w}](\mathbf{x}, \mathbf{t}), \quad i = 1, \mathbf{K}, m, \quad (16)$$

$$B_j[\mathbf{w}](\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \beta_j(\mathbf{t}) + \int_{s_j(\mathbf{t}, \mathbf{w})}^{\mathbf{x}} q_j(\xi, \mathbf{t}, \mathbf{w}(\xi, \mathbf{t})) d\xi, \quad j = 1, \mathbf{K}, n. \quad (17)$$

Означення. Нехай неперервна функція $\mathbf{w} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) : \Pi(\mathbf{T}) \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ задовольняє систему

$$\begin{cases} \mathbf{u}_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = A_i[\mathbf{w}](\mathbf{x}, \mathbf{t}), & i = 1, \mathbf{K}, m, \\ \mathbf{v}_j(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = B_j[\mathbf{w}](\mathbf{x}, \mathbf{t}), & j = 1, \mathbf{K}, n, \end{cases} \quad (18)$$

причому $\mathbf{u}$ - ліпшицева за $\mathbf{x}, \mathbf{t}$, а $\mathbf{v}$ - ліпшицева за $\mathbf{x}$.

Тоді $\mathbf{w}$ будемо називати узагальненим неперервним розв'язком задачі (1)-(8).

Інтегруванням вздовж характеристик легко показати, що класичний (гладкий) розв'язок задачі (1)-(8) є одночасно її узагальненим неперервним розв'язком.

Нехай $S = (A_1, \mathbf{K}, A_m, B_1, \mathbf{K}, B_n)$.

Припускаємо, що виконуються також такі умови.

A12. Існують такі константи $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ і $\Lambda_0 > 0$, що всі значення $\lambda_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w})(i \in I_+^0)$ при $0 \leq \mathbf{x} \leq \varepsilon_0$ і $-\lambda_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w})(i \in I_-^1)$ при $1 - \varepsilon_0 \leq \mathbf{x} \leq 1$ не менші величини Λ_0 при $(\mathbf{t}, \mathbf{w}) \in D^1(T_0, P_0)$.

Надалі через M_h ($h = 1, K$) позначатимемо константи, які не зростають при зростанні L . Зауважимо таке: оскільки ми завжди вибиратимемо величину $T > 0$ достатньо малою, то інтеграли вигляду $\int_0^T L F_2(\tau) d\tau$ можна вважати обмеженими. Тому у вирази для констант M_h можуть входити і ці інтеграли.

Позначимо через $\mathbb{E}(T)$ підпростір простору $IE(T)$, утворений функціями $\mathbf{w}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \{\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{t}), \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{t})\}$, які неспадні за аргументом $\mathbf{x}$.

Припускаємо тепер, що всі функції λ_i, f_i, q_j, r_j визначені в $D(T_0, \infty) = \Pi(T_0) \times \mathbb{R}^{m+n}$ і для кожного $P_0 > 0$ виконуються умови A1-A12, а також умови.

B1. Функції $\lambda_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v})(i = 1, K, m)$ неспадні за $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ для кожного фіксованого $\mathbf{t}$.

B2. Функції $\gamma_i^0(i \in I_+^0), \gamma_i^1(i \in I_-^1)$ не залежать від $\mathbf{u}$, тому можна вважати, що константа $\Gamma_2 = 0$.

B3. Функції $\alpha_i(\mathbf{x})(i = 1, K, m)$ неспадні.

B4. Функції $\gamma_i^0(\mathbf{t})(i \in I_+^0)$ – незростаючі, а функції $\gamma_i^1(\mathbf{t})(i \in I_-^1)$ – неспадні функції за $\mathbf{t}$.

B5. Функції $f_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v})(i = 1, K, m)$ неспадні за $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ при фіксованому $\mathbf{t}$, причому

$$\begin{aligned} f_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) &\geq 0, i \in I_+^0, (\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \in D(T_0, \infty), \\ f_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) &\leq 0, i \in I_-^1, (\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \in D(T_0, \infty); \end{aligned}$$

якщо ж $i \notin I_+^0 \cup I_-^1$, то обмеження на знак $f_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ немає.

B6. Функції $q_j(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0 (j = 1, K, n)$ при $(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \in D(T_0, \infty)$.

B7. Існує невід'ємна неперервна на $\max\{[0, T_0], [0, 1]\}$ функція $\dot{M}(\mathbf{t})$ така, що в області $D(T_0, \infty)$ виконуються нерівності:

$$|f_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \dot{M}(\mathbf{t}) |\mathbf{w}|, |r_j(\mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathbf{w})| \leq \dot{M}(\mathbf{t}) |\mathbf{s}|, i = 1, K, m; j = 1, K, n.$$

Крім того, нехай функція $M(\tau)$ з умови A8 неперервна.

B8. Припускаємо, що функції $\Lambda_1(\mathbf{t}), \Lambda_2(\mathbf{t}), F_1(\mathbf{t}), F_2(\mathbf{t}), R_1(\mathbf{t}), R_2(\mathbf{t}), Q_2(\mathbf{x})$ обмежені зверху відповідно константами $\Lambda_1, \Lambda_2, F_1, F_2, R_1, R_2, Q_2$.

В9. Нехай для функцій $r_j, j = 1, K, n$, функція $\dot{M}(t)$ задовольняє рівність $\dot{M}(t) = pt$, де величина $p > 0$ буде зазначена пізніше.

При виконанні умови **В9** отримаємо

$$\max_j |s_j(t; w) - c_j| \leq \int_0^t p \tau d\tau e^{\int_0^t p \tau d\tau} = \frac{pt^2}{2} e^{\frac{pt^2}{2}} \leq \frac{pT_0^2}{2} e^{\frac{pT_0^2}{2}}. \quad (19)$$

Позначимо $h(p) = \frac{pT_0^2}{2} e^{\frac{pT_0^2}{2}}$. Тоді для довільного $\delta > 0$ існує таке достатньо мале $p > 0$, що $h(p) < \delta$.

Вважатимемо тепер, що додатково виконуються ще такі умови.

A13. Функції $\lambda_i(x, t, w), f_i(x, t, w), \alpha_i(x), i = 1, K, m, \gamma_i^0(t, u) (i \in I_+^0), \gamma_i^1(t, u) (i \in I_-^1), q_j(x, t, w), r_j(x, t, w), \beta_j(t) (j = 1, K, n)$ неперервно диференційовні в тих областях, де вони були визначені, і, крім того, λ_i та f_i задовольняють умову Ліпшиця за t з деякими константами Λ_3, F_3 відповідно, а q_j задовольняє умову Ліпшиця за t з константою Q_3 і за x з константою Q_1 , а також $Q_2 \mathbf{1} < 1$. Нехай, нарешті, функції $f_i(x, t, w), \lambda_i(x, t, w) (i = 1, K, m), r_j(x, t, w) (j = 1, K, n)$ задовольняють таку саму умову, що і функції $q_j(x, t, w) (j = 1, K, n)$ у припущенні **A6**, і, крім того, функції $q_j(x, t, w) (j = 1, K, n)$ не залежать від тих u_k , для яких $c_k \neq c_j$.

A14. Частинні похідні $(f_i)'_x, (f_i)'_t, (f_i)'_{v_j}, (f_i)'_{u_i} (i = 1, K, m; j = 1, K, n)$ задовольняють умову Ліпшиця в області $\Pi(T) \cup \Pi_0(T)$ за змінними x, t, w відповідно з константами F_1^1, F_3^1, F_2^1 , крім того, всі ці похідні обмежені зверху за модулем константою F^1 .

Позначимо: $\hat{F}_1 = \max\{F_1, F_2, F_3, F_1^1, F_2^1, F_3^1\}, \hat{F} = \max\{F, F^1\}$.

A15. Частинні похідні $(\lambda_i)'_x, (\lambda_i)'_t, (\lambda_i)'_{v_j}, (\lambda_i)'_{u_i} (i = 1, K, m; j = 1, K, n)$ задовольняють умову Ліпшиця в області $\Pi(T) \cup \Pi_0(T)$ за змінними x, t, w відповідно з константами $\Lambda_1^1, \Lambda_3^1, \Lambda_2^1$, крім того, всі ці похідні обмежені зверху за модулем константою Λ^1 .

Позначимо: $\hat{\Lambda}_1 = \max\{\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_1^1, \Lambda_2^1, \Lambda_3^1\}, \hat{\Lambda} = \max\{\Lambda, \Lambda^1\}$.

A16. Частинні похідні $(q_j)'_x, (q_j)'_t, (q_j)'_{v_i}, (q_j)'_{u_i} (i = 1, K, m; j = 1, K, n)$ задовольняють умову Ліпшиця в області $\Pi(T) \cup \Pi_0(T)$ за змінними t, w

відповідно з константами Q_1^1, Q_2^1 , крім того, всі ці похідні обмежені зверху за модулем константою Q^1 .

Позначимо: $\hat{Q}_1 = \max\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_1^1, Q_2^1\}$, $\hat{Q} = \max\{Q, Q^1\}$.

A17. Похідні $\alpha_i'(x)$ ($i = 1, K, m$) є ліпшицевими з константою A_1^1 при $0 \leq x \leq 1$.

Позначимо: $A^1 = \max_{[0,1]} |\alpha'(x)|$, $\hat{A}_1 = \max\{A_1, A_1^1\}$; $\hat{A} = \max\{A, A^1\}$.

A18. Похідні $\beta_j'(x)$ ($j = 1, K, n$) є ліпшицевими з константою B_1^1 при $0 \leq t \leq T$.

Позначимо: $B^1 = \max_{[0,T]} |\beta'(x)|$, $\hat{B}_1 = \max\{B_1, B_1^1\}$; $\hat{B} = \max\{B, B^1\}$.

A19. Частинні похідні $(\gamma_i^0)'_t$, $(\gamma_i^0)'_{u_j}$ ($i \in I_+^0, j \in I_+^0$), $(\gamma_i^1)'_t$, $(\gamma_i^1)'_{u_j}$ ($i \in I_-^1, j \in I_-^1$) задовольняють умову Ліпшиця в області $[0, T] \cup \Pi E_0(T)$ за аргументами t і u відповідно з константами Γ_1^1 та Γ_2^1 .

Позначимо: $\hat{\Gamma}^1 = \max_{[0,T] \cup \Pi E_0(T)} \{ |(\gamma_i^0)'_t|, |(\gamma_i^0)'_{u_j}|, |(\gamma_i^1)'_t|, |(\gamma_i^1)'_{u_j}| \}$,

$\hat{R}_1 = \max\{R_1, R_2\}$.

A20. Виконуються умови узгодження першого порядку

$$\begin{aligned} & (\gamma_i^0)'_t(0, \alpha(0)) + \sum_{j \in I_+^0} (\gamma_i^0)'_{u_j}(0, \alpha(0)) \times \\ & \quad \times [f_j(0, 0, \alpha(0), v(0, 0)) - \lambda_j(0, 0, \alpha(0), v(0, 0))\alpha_j'(0)] = \\ & = f_i(0, 0, \alpha(0), v(0, 0)) - \lambda_i(0, 0, \alpha(0), v(0, 0))\alpha_i'(0), \quad i \in I_+^0; \quad (20) \\ & (\gamma_i^1)'_t(0, \alpha(1)) + \sum_{j \in I_-^1} (\gamma_i^1)'_{u_j}(0, \alpha(1)) \times \\ & \quad \times [f_j(1, 0, \alpha(1), v(1, 0)) - \lambda_j(1, 0, \alpha(1), v(1, 0))\alpha_j'(1)] = \\ & = f_i(1, 0, \alpha(1), v(1, 0)) - \lambda_i(1, 0, \alpha(1), v(1, 0))\alpha_i'(1), \quad i \in I_-^1. \quad (21) \end{aligned}$$

A21. Нехай існує невід'ємна неперервна функція $\tau \rightarrow M^1(\tau)$ така, що

$$\begin{aligned} & |(q_j)'_t(x, t, w)| \leq M^1(x) |v| j = 1, K, n; \\ & |(q_j)'_{u_i}(x, t, w)| \leq M^1(x) |v| j = 1, K, n, i = 1, K, m. \end{aligned}$$

Розглянемо простір $\Pi E_0(T)$ вектор-функцій $\mathcal{W} = (u, u^1, v, v^{(2)}) : \Pi(T) \rightarrow \mathbb{R}^{2m+2n}$, де $u = (u_1, K, u_m)$, $u^1 = (u_1^1, K, u_m^1)$, $v = (v_1, K, v_n)$, $v^{(2)} = (v_1^{(2)}, K, v_n^{(2)})$, причому кожна компонента вектор-функцій u , u^1 та v

є ліпшицевою за двома змінними, а кожна компонента вектор-функції $\mathbf{v}^{(2)}$ є ліпшицевою за $\mathbf{x}$, причому $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{E}_0(\mathbf{T})$ і, крім того, $\mathbf{v}$ ліпшицева за $\mathbf{t}$. Нехай виконуються умови

$$\mathbf{P} \mathbf{w}^1 \mathbf{P} = \max\{\mathbf{P} \mathbf{u}^1 \mathbf{P}, \mathbf{P} \mathbf{v}^{(2)} \mathbf{P}\} \leq \mathbf{P}_0^1, \quad \mathbf{v}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}}, \quad \mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{t})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{P} \leq \mathbf{Q},$$

де $\mathbf{P}_0^1$ - деяка стала, причому будемо вважати, що $\mathbf{Q} \leq \mathbf{P}_0^1$, $\mathbf{P} \mathbf{u}^1 \mathbf{P} = \max |\mathbf{u}_i^1|$,

$$\mathbf{P} \mathbf{v}^{(2)} \mathbf{P} = \max_j \max\{\max_{D_j^0} |\mathbf{v}_j^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{t})| e^{-H(c_j - \mathbf{R}\mathbf{T} - \mathbf{x})}, \max_{D_j^1} |\mathbf{v}_j^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{t})|, \max_{D_j^2} |\mathbf{v}_j^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{t})| e^{-H(\mathbf{x} - c_j - \mathbf{R}\mathbf{T})}\}.$$

Позначимо $\mathbf{P}_0 = \max\{\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_0^1\}$, $\mathbf{P} \mathbf{w}^1 \mathbf{P} = \max\{\mathbf{P} \mathbf{w} \mathbf{P}, \mathbf{P} \mathbf{w}^1 \mathbf{P}\}$.

У просторі $\mathbb{E}_0(\mathbf{T})$ введемо метрику ρ за формулою

$$\rho(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \max\{\rho(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2), \rho^1(\mathbf{w}_1^1, \mathbf{w}_2^1)\},$$

де $\rho(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \max\{\max_{\Pi(\mathbf{T})} \mathbf{P} \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, \mathbf{t}) - \mathbf{u}_2(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \mathbf{P}, \max_{\Pi(\mathbf{T})} \mathbf{P} \mathbf{v}_1(\mathbf{x}, \mathbf{t}) - \mathbf{v}_2(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \mathbf{P}\}$,

$$\rho^1(\mathbf{w}_1^1, \mathbf{w}_2^1) = \max\{\max_{\Pi(\mathbf{T})} \mathbf{P} \mathbf{u}_1^1(\mathbf{x}, \mathbf{t}) - \mathbf{u}_2^1(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \mathbf{P}, \max_{\Pi(\mathbf{T})} \mathbf{P} \mathbf{v}_1^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) - \mathbf{v}_2^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \mathbf{P}\}.$$

Нехай $\mathbf{L}_1^1(\mathbf{u}^1)$, $\mathbf{L}_2^1(\mathbf{u}^1)$ константи Ліпшиця за $\mathbf{x}$ і $\mathbf{t}$ відповідно для функції $\mathbf{u}^1(\mathbf{x}, \mathbf{t})$, а $\mathbf{L}_1^1(\mathbf{v}^{(2)})$ константа Ліпшиця за $\mathbf{x}$ для функції $\mathbf{v}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$. Позначимо $\mathbf{L} = \max\{\mathbf{L}, \max\{\mathbf{L}_1^1(\mathbf{u}^1), \mathbf{L}_2^1(\mathbf{u}^1), \mathbf{L}_1^1(\mathbf{v}^{(2)})\}\} = \mathbf{L}^1$, де замість $\mathbf{L}$ візьмемо константу Ліпшиця для функцій $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, з урахуванням ліпшицевості функції $\mathbf{v}$ за $\mathbf{t}$.

Позначимо через $\mathbb{E}_1(\mathbf{T}, \mathbf{L})$ множину функцій $\mathbf{w} \in \mathbb{E}_0(\mathbf{T})$, для яких константами Ліпшиця за $\mathbf{x}$ і $\mathbf{t}$ відповідно слугують $\mathbf{L}$ для $\mathbf{u}, \mathbf{v}$; $\mathbf{L}^1$ для $\mathbf{u}^1, \mathbf{v}^{(2)}$ (для функції $\mathbf{v}^{(2)}$ ліпшицевість тільки за $\mathbf{x}$).

Введемо такі позначення для $(\mathbf{i} = 1, \mathbf{K}, \mathbf{m}, \mathbf{j} = 1, \mathbf{K}, \mathbf{n})$:

$$\mathbf{v}_j^1(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \mathbf{q}_j(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}); \quad \mathbf{P} \mathbf{v}^1 \mathbf{P} \leq \mathbf{Q};$$

$$\mathbf{u}_i^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{t}), \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{t})) - \lambda_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{t}), \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{t})) \mathbf{u}_i^1(\mathbf{x}, \mathbf{t}); \quad (22)$$

$$\varphi_i^1(\tau; \mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}) = \exp \int_t^\tau [(\lambda_i)_x'(\varphi_i(\theta; \mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}), \theta, \mathbf{w}(\varphi_i(\theta; \mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}), \theta)) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^m (\lambda_i)_{u_k}' (\varphi_i(\theta; \mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}), \theta, \mathbf{w}(\varphi_i(\theta; \mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}), \theta)) \mathbf{u}_k^1(\varphi_i(\theta; \mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}), \theta) + \\
& + \sum_{r=1}^n (\lambda_i)_{v_r}' (\varphi_i(\theta; \mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}), \theta, \mathbf{w}(\varphi_i(\theta; \mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}), \theta)) \mathbf{v}_r^1(\varphi_i(\theta; \mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}), \theta) d\theta; \quad (23)
\end{aligned}$$

$$\chi_i^1(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}) = \begin{cases} -\frac{\varphi_i^1(\chi_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}); \mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w})}{\lambda_i(0, \chi_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}), \mathbf{w}(0, \chi_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w})))}, & (\mathbf{x}, \mathbf{t}) \in \Pi_i^0(\mathbf{w}), \\ -\frac{\varphi_i^1(\chi_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}); \mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w})}{\lambda_i(1, \chi_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}), \mathbf{w}(1, \chi_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w})))}, & (\mathbf{x}, \mathbf{t}) \in \Pi_i^1(\mathbf{w}). \end{cases} \quad (24)$$

Зауваження 1. Якщо розв'язок задачі (1)-(8) є гладким, то: $\mathbf{u}^1 = \mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{u}_t$, $\varphi_i^1(\tau; \mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \varphi_i(\tau; \mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w})$, $\chi_i^1(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \chi_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w})$, $\mathbf{v}^1 = \mathbf{v}_x$, $\mathbf{v}^{(2)} = \mathbf{v}_t$.

Тепер розглянемо систему, яку отримуємо з (16)-(17) формальним диференціюванням системи (16) за $\mathbf{x}$, а системи (17) за $\mathbf{t}$, замінюючи $\mathbf{u}_x$ на $\mathbf{u}^1$, $\mathbf{v}_x$ на $\mathbf{v}^1$ та всіма іншими відповідними замінами на підставі зауваження 0.1. До одержаної системи приєднуємо систему (16)-(17). Тоді з урахуванням (18) матимемо

$$\mathbf{u}_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \mathbf{R}_i[\mathbf{w}](\mathbf{x}, \mathbf{t}) + \mathbf{l}_i[\mathbf{w}](\mathbf{x}, \mathbf{t}), \quad i = 1, \mathbf{K}, m, \quad (25)$$

$$\mathbf{u}_i^1(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \mathbf{R}_i^1[\mathbf{w}](\mathbf{x}, \mathbf{t}) + \mathbf{l}_i^1[\mathbf{w}](\mathbf{x}, \mathbf{t}) + \mathbf{Y}_i^1[\mathbf{w}](\mathbf{x}, \mathbf{t}), \quad i = 1, \mathbf{K}, m, \quad (26)$$

$$\mathbf{v}_j(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \beta_j(\mathbf{t}) + \int_{s_j(\mathbf{t}; \mathbf{w})}^{\mathbf{x}} \mathbf{q}_j(\xi, \mathbf{t}, \mathbf{w}(\xi, \mathbf{t})) d\xi; \quad j = 1, \mathbf{K}, n, \quad (27)$$

$$\mathbf{v}_j^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \beta_j'(\mathbf{t}) + \mathbf{l}_{ij}^1[\mathbf{w}](\mathbf{x}, \mathbf{t}) + \mathbf{Y}_{ij}^1[\mathbf{w}](\mathbf{t}), \quad j = 1, \mathbf{K}, n. \quad (28)$$

Тут введено такі позначення:

$$\mathbf{R}_i^1[\mathbf{w}](\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \begin{cases} [(\gamma_i^0)'(\chi_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}), \mathbf{u}(0, \chi_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}))) + \sum_{j \in I_+^0} (\gamma_j^0)'_{u_j}(\chi_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}), \\ \mathbf{u}(0, \chi_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w})) \mathbf{u}_j^{(2)}(0, \chi_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}))] \chi_i^1(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}), & (\mathbf{x}, \mathbf{t}) \in \Pi_i^0(\mathbf{w}); \\ \alpha_i'(\varphi_i(0; \mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w})) \varphi_i^1(0; \mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}), & (\mathbf{x}, \mathbf{t}) \in \Pi_i^a(\mathbf{w}); \\ [(\gamma_i^1)'(\chi_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}), \mathbf{u}(1, \chi_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}))) + \sum_{j \in I_-^1} (\gamma_j^1)'_{u_j}(\chi_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}), \\ \mathbf{u}(1, \chi_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w})) \mathbf{u}_j^{(2)}(1, \chi_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}))] \chi_i^1(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}), & (\mathbf{x}, \mathbf{t}) \in \Pi_i^1(\mathbf{w}); \end{cases} \quad (29)$$

$$Y_i^1[\mathbf{w}](\mathbf{x}, t) = \begin{cases} -f_i(0, \chi_i(\mathbf{x}, t, \mathbf{w}), \mathbf{w}(0, \chi_i(\mathbf{x}, t, \mathbf{w})))\chi_i^1(\mathbf{x}, t, \mathbf{w}), & (\mathbf{x}, t) \in \Pi_i^0(\mathbf{w}); \\ 0, & (\mathbf{x}, t) \in \Pi_i^\alpha(\mathbf{w}); \\ -f_i(\mathbf{l}, \chi_i(\mathbf{x}, t, \mathbf{w}), \mathbf{w}(\mathbf{l}, \chi_i(\mathbf{x}, t, \mathbf{w})))\chi_i^1(\mathbf{x}, t, \mathbf{w}), & (\mathbf{x}, t) \in \Pi_i^1(\mathbf{w}). \end{cases} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} I_i^1[\mathbf{w}](\mathbf{x}, t) &= \int_{\chi_i(\mathbf{x}, t, \mathbf{w})}^t [(f_i)'_{\chi}(\varphi_i(\tau; \mathbf{x}, t, \mathbf{w}), \tau, \mathbf{w}(\varphi_i(\tau; \mathbf{x}, t, \mathbf{w}), \tau)) + \\ &+ \sum_{j=1}^m (f_i)'_{u_j}(\varphi_i(\tau; \mathbf{x}, t, \mathbf{w}), \tau, \mathbf{w}(\varphi_i(\tau; \mathbf{x}, t, \mathbf{w}), \tau)) u_j^1(\varphi_i(\tau; \mathbf{x}, t, \mathbf{w}), \tau) + \\ &+ \sum_{k=1}^n (f_i)'_{v_k}(\varphi_i(\tau; \mathbf{x}, t, \mathbf{w}), \tau, \mathbf{w}(\varphi_i(\tau; \mathbf{x}, t, \mathbf{w}), \tau)) v_k^1(\varphi_i(\tau; \mathbf{x}, t, \mathbf{w}), \tau)] \varphi_i^1(\tau; \mathbf{x}, t, \mathbf{w}) d\tau, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} I_{ij}^1[\mathbf{w}](\mathbf{x}, t) &= \int_{s_j(t; \mathbf{w})}^x [(q_j)'_{\chi}(\xi, t, \mathbf{w}(\xi, t)) + \sum_{i: c_i = c_j} (q_j)'_{u_i}(\xi, t, \mathbf{w}(\xi, t)) u_i^{(2)}(\xi, t) + \\ &+ \sum_{k: c_k = c_j} (q_j)'_{v_k}(\xi, t, \mathbf{w}(\xi, t)) v_k^{(2)}(\xi, t)] d\xi, \end{aligned} \quad (32)$$

$$Y_{ij}^1[\mathbf{w}](t) = r_j(t, s(t), \mathbf{w}(s_j(t), t)) q_j(s_j(t; \mathbf{w}), t, \mathbf{w}(s_j(t; \mathbf{w}), t)). \quad (33)$$

Розглянемо оператор $\mathbf{S} = (S, S^1)$, визначений на $\mathbf{E}_0(\mathbf{T})$, значення якого $\mathbf{S}[\mathbf{w}] = (S[\mathbf{w}], S^1[\mathbf{w}])$ на функціях $\mathbf{w} = (\mathbf{w}, \mathbf{w}^1)$ обчислюють за правилом

$$\begin{aligned} S &= (A_1, A_2, \mathbf{K}, A_m; B_1, B_2, \mathbf{K}, B_n); \\ S^1 &= (A_1^1, A_2^1, \mathbf{K}, A_m^1; B_1^1, B_2^1, \mathbf{K}, B_n^1); \\ A_i[\mathbf{w}](\mathbf{x}, t) &= R_i[\mathbf{w}](\mathbf{x}, t) + I_i[\mathbf{w}](\mathbf{x}, t); \quad i = 1, \mathbf{K}, m, \end{aligned} \quad (34)$$

$$B_j[\mathbf{w}](\mathbf{x}, t) = \beta_j(t) + \int_{s_j(t; \mathbf{w})}^x q_j(\xi, t, \mathbf{w}(\xi, t)) d\xi; \quad j = 1, \mathbf{K}, n, \quad (35)$$

$$A_i^1[\mathbf{w}](\mathbf{x}, t) = R_i^1[\mathbf{w}](\mathbf{x}, t) + I_i^1[\mathbf{w}](\mathbf{x}, t) + Y_i^1[\mathbf{w}](\mathbf{x}, t); \quad i = 1, \mathbf{K}, m, \quad (36)$$

$$B_j^1[\mathbf{w}](\mathbf{x}, t) = \beta_j'(t) + I_{ij}^1[\mathbf{w}](\mathbf{x}, t) + Y_{ij}^1[\mathbf{w}](t); \quad j = 1, \mathbf{K}, n. \quad (37)$$

Позначимо також $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \mathbf{K}, A_m; A_1^1, A_2^1, \mathbf{K}, A_m^1);$

$\mathbf{B} = (B_1, B_2, \mathbf{K}, B_n; B_1^1, B_2^1, \mathbf{K}, B_n^1).$

2. Достатні умови глобальної гладкої розв'язності задачі.

Позначимо через $\overset{\circ}{\mathbf{E}}_0(\mathbf{T})$ підпростір простору $\mathbf{E}_0(\mathbf{T})$, утворений вектор-функціями $\mathbf{w} = (\mathbf{u}, \mathbf{u}^1, \mathbf{v}, \mathbf{v}^{(2)})$ такими, що $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\} \in$ неспадними

функціями за аргументом $\mathbf{x}$ і, крім того, $\mathbf{u}^1(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \geq 0$. Через $\overset{\circ}{\mathbb{E}}_1(\mathbf{T}, \mathbf{L})$ позначатимемо відповідний підпростір простору $\mathbb{E}_1(\mathbf{T}, \mathbf{L})$ і, нарешті, позначимо

$$\begin{aligned} & \overset{\circ}{\mathbb{E}}_2(\mathbf{T}, \mathbf{L}, \mathbf{P}, \mathbf{P}^1) = \\ & = \{ \mathbf{w} \in \overset{\circ}{\mathbb{E}}_1(\mathbf{T}, \mathbf{L}) \mid \max\{ \mathbf{P} \mathbf{u} - \alpha(\mathbf{x}) \mathbf{P} \mathbf{P} \mathbf{v} \mathbf{P} \} \leq \mathbf{P}; \max\{ \mathbf{P} \mathbf{u}^1 - \alpha^1(\mathbf{x}) \mathbf{P} \mathbf{P} \mathbf{v}^2 \mathbf{P} \} \leq \mathbf{P}^1 \}. \end{aligned}$$

Припускаємо тепер, що всі функції $\lambda_i, f_i, q_j, r_j, \lambda'_x, \lambda'_{u_i}, \lambda'_{v_j}, \lambda'_x, f_x^1, f_{u_i}^1, f_{v_j}^1, f'_t, q'_x, q'_{u_i}, q'_{v_j}, q'_t$ визначені в $\mathbf{D}(\mathbf{T}_0, \infty)$ і для кожного $\mathbf{P}_0 > 0$ та $\mathbf{P}_0^1 > 0$ виконуються умови **A1**- **A21**, а також умови **B1**- **B9**, причому умова **B7** правильна не тільки для функцій f_i , а й для функцій $(f_i)'_t$, $(f_i)'_x$, $(f_i)'_{u_k}$, $(f_i)'_{v_j}$.

Зауважимо, що при виконанні умови **B2**, умови узгодження першого порядку (20), (21) матимуть вигляд

$$(\gamma_i^0)'_t = f_i(0, 0, \alpha(0), \mathbf{v}(0, 0)) - \lambda_i(0, 0, \alpha(0), \mathbf{v}(0, 0))\alpha'_i(0), \mathbf{i} \in \mathbf{I}_+^0; \quad (38)$$

$$(\gamma_i^1)'_t = f_i(1, 0, \alpha(1), \mathbf{v}(1, 0)) - \lambda_i(1, 0, \alpha(1), \mathbf{v}(1, 0))\alpha'_i(1), \mathbf{i} \in \mathbf{I}_+^1; \quad (39)$$

$$\mathbf{R}_i^1[\mathbf{w}](\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \begin{cases} (\gamma_i^0)'_t(\chi_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}))\chi_i^1(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}), & (\mathbf{x}, \mathbf{t}) \in \Pi_i^0(\mathbf{w}), \\ \alpha'_i(\varphi_i(0; \mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}))\varphi_i^1(0; \mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}), & (\mathbf{x}, \mathbf{t}) \in \Pi_i^a(\mathbf{w}), \\ (\gamma_i^1)'_t(\chi_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}))\chi_i^1(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}), & (\mathbf{x}, \mathbf{t}) \in \Pi_i^1(\mathbf{w}). \end{cases} \quad (40)$$

Зауваження 2. На підставі умови **B1** функції $(\lambda_i)'_x$, $(\lambda_i)'_{u_k}$, $(\lambda_i)'_{v_j}$ задовольняють нерівності $(\lambda_i)'_x \geq 0$, $(\lambda_i)'_{u_k} \geq 0$, $(\lambda_i)'_{v_j} \geq 0$ для кожного фіксованого $\mathbf{t}$ і, крім того, згідно з **B6**, $\mathbf{v}^1 \geq 0$. Тоді, оскільки $\tau \leq \mathbf{t}$, матимемо

$$\begin{aligned} \varphi_i^1(\tau; \mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}) &= \exp \int_t^\tau [(\lambda_i)'_x(\varphi_i(\theta; \mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}), \theta, \mathbf{w}(\varphi_i(\theta; \mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}), \theta)) + \\ &+ \sum_{k=1}^m (\lambda_i)'_{u_k}(\varphi_i(\theta; \mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}), \theta, \mathbf{w}(\varphi_i(\theta; \mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}), \theta)) \mathbf{u}_k^1(\varphi_i(\theta; \mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}), \theta) + \\ &+ \sum_{r=1}^n (\lambda_i)'_{v_k}(\varphi_i(\theta; \mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}), \theta, \mathbf{w}(\varphi_i(\theta; \mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}), \theta)) \mathbf{v}_r^1(\varphi_i(\theta; \mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}), \theta)] d\theta \leq 1. \end{aligned}$$

Отже, в усіх подальших оцінках можна прийняти $\mathbf{M}_1 = 1$.

Зауваження 3. З умов **B1**- **B6** та формул (40), (26), (30), (31) отримуємо, що $A_i^1[\mathbf{w}](\mathbf{x}, t) \geq 0$ і $v_j^1(\mathbf{x}, t) \geq 0$ ($i = 1, K, m$, $j = 1, K, n$).

Лема 1. Нехай $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ - неперервний розв'язок задачі $\mathbf{w} = \mathbf{S}\mathbf{w}$ у прямокутнику $\Pi(\mathbf{T}_0)$. Тоді у разі виконання умов **A8**, **B2** і **B7** правильна така апіорна оцінка розв'язку:

$$\mathbf{P} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \mathbf{P} \leq \mathbf{H}, \quad (41)$$

де $\mathbf{H}$ - деяка стала.

Доведення. За зазначених припущень на функції $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$, очевидно, справджуються такі нерівності:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} u(\mathbf{x}, t) \mathbf{P} &\leq C; \\ \mathbf{P} v(\mathbf{x}, t) \mathbf{P} &\leq B e^{\int_0^1 M(\xi) d\xi}. \end{aligned} \quad (42)$$

Позначимо

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 = & \max\{\max_i \{ |(f_i)'_x(0, 0, 0)|; \max_k \{ |(f_i)'_{u_k}(0, 0, 0)|; \max_j \{ |(f_i)'_{v_j}(0, 0, 0)|; \\ & \max_i \{ |\lambda_i(0, 0, 0)|; \max_j \{ |(q_j)'_t(0, 0, 0)|; \max_{i: c_i = c_j} \{ |(q_j)'_{u_i}(0, 0, 0)|; \\ & \max_{k: c_k = c_j} \{ |(q_j)'_{v_k}(0, 0, 0)| \} \}. \end{aligned} \quad (43)$$

Тоді з формули (40) випливає, що для $(\mathbf{x}, t) \in \Pi(\mathbf{T}_0)$ виконуються нерівності

$$|\mathbf{R}_i^1[\mathbf{w}](\mathbf{x}, t)| \leq \max\{\mathbf{A}^1; \Lambda_0^{-1}\}. \quad (44)$$

Крім того, використовуючи оцінку (42), а також умови **A8**, **B7**, для $(\mathbf{x}, t) \in \Pi(\mathbf{T}_0)$ отримаємо

$$\begin{aligned} |\mathbf{Y}_i^1[\mathbf{w}](\mathbf{x}, t)| &\leq \Lambda_0^{-1} \mathbf{M}(t) |\mathbf{w}| \leq \Lambda_0^{-1} \max_{0 \leq t \leq T_0} \mathbf{M}(t) \max\{C; B e^{\int_0^1 M(\xi) d\xi}\}; \\ |\mathbf{Y}_{ij}^1[\mathbf{w}](\mathbf{x}, t)| &\leq \mathbf{M}(t) |s| |\mathbf{M}(s)| |\mathbf{v}| \leq \max_{0 \leq t \leq T_0} \mathbf{M}(t) \mathbf{I} \max_{0 \leq x \leq 1} M(x) B e^{\int_0^1 M(\xi) d\xi}. \end{aligned} \quad (45)$$

Нарешті, для $(\mathbf{x}, t) \in \Pi(\mathbf{T}_0)$ матимемо

$$\begin{aligned} |\mathbf{I}_i^1[\mathbf{w}](\mathbf{x}, t)| &\leq \int_{\chi_i(\mathbf{x}, t, \mathbf{w})}^t [|(f_i)'_x(\varphi_i(\tau; \mathbf{x}, t, \mathbf{w}), \tau, \mathbf{w}(\varphi_i(\tau; \mathbf{x}, t, \mathbf{w}), \tau)) - \\ & -(f_i)'_x(0, 0, 0)| + |(f_i)'_x(0, 0, 0)| + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^m (| (f_i)'_{u_j}(\varphi_i(\tau; \mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}), \tau, \mathbf{w}(\varphi_i(\tau; \mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}), \tau)) - (f_i)'_{u_j}(0, 0, 0) | + \\
& \quad + | (f_i)'_{u_j}(0, 0, 0) |) u_j^1(\varphi_i(\tau; \mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}), \tau) + \\
& + \sum_{k=1}^n (| (f_i)'_{v_k}(\varphi_i(\tau; \mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}), \tau, \mathbf{w}(\varphi_i(\tau; \mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}), \tau)) - (f_i)'_{v_k}(0, 0, 0) | + \\
& \quad + | (f_i)'_{v_k}(0, 0, 0) |) v_k^1(\varphi_i(\tau; \mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}), \tau) d\tau \leq T_0 H_1 + \int_{\chi_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w})}^t [\dot{F}_1 H_2 + \\
& \quad + \sum_{j=1}^m (\dot{F}_1 H_2 + H_1) | u_j^1(\varphi_i(\tau; \mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}), \tau) | + \sum_{k=1}^n (\dot{F}_1 H_2 + \\
& \quad + H_1) | v_k^1(\varphi_i(\tau; \mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}), \tau) |] d\tau \leq T_0 (H_1 + \dot{F}_1 H_2 + (H_1 + \dot{F}_1 H_2) n \times \\
& \quad \times \int_0^1 M(\xi) d\xi B e_0^{\int_0^1 M(\xi) d\xi}) + \int_{\chi_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w})}^t \sum_{j=1}^m (\dot{F}_1 H_2 + H_1) | u_j^1(\varphi_i(\tau; \mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}), \tau) | d\tau, \quad (46)
\end{aligned}$$

де $H_2 = \mathbf{I} + T_0 + \max\{\mathbf{C}; B e_0^{\int_0^1 M(\xi) d\xi}\}$.

Отож, об'єднуючи (44), (45) і (46), одержимо

$$| u_i^1(\mathbf{x}, \mathbf{t}) | \leq H_3 + \int_{\chi_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w})}^t \sum_{j=1}^m (\dot{F}_1 H_2 + H_1) | u_j^1(\varphi_i(\tau; \mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{w}), \tau) | d\tau, \quad (47)$$

де

$$\begin{aligned}
H_3 = & \max\{A^1; \Lambda_0^{-1}\} + \Lambda_0^{-1} \max_{0 \leq t \leq T_0} \dot{M}(t) \max\{\mathbf{C}; B e_0^{\int_0^1 M(\xi) d\xi}\} + T_0 (H_1 + \dot{F}_1 H_2 + \\
& + (H_1 + \dot{F}_1 H_2) n \int_0^1 M(\xi) d\xi B e_0^{\int_0^1 M(\xi) d\xi})
\end{aligned}$$

Звідси, перейшовши у формулі (47) до максимуму по i та максимуму по $(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ під інтегралом $(0 \leq \xi \leq \mathbf{x}; 0 \leq \mathbf{t} \leq \tau)$, застосувавши після цього лему Гронуолла і перейшовши до максимуму по всіх $(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \in \Pi(T_0)$, матимемо

$$P u^1(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \leq H_3 e^{\int_0^{T_0} m(\dot{F}_1 H_2 + H_1) d\tau} = H_3 e^{T_0 m(\dot{F}_1 H_2 + H_1)} = H_4. \quad (48)$$

На підставі (48) та формули (22) отримаємо

$$| l_{ij}^1[\mathbf{w}](\mathbf{x}, \mathbf{t}) | \leq \mathbf{I} H_1 + \int_{s_j(\mathbf{t}, \mathbf{w})}^{\mathbf{x}} [\dot{Q}_1 H_2 + \sum_{i: c_i = c_j} (\dot{Q}_1 H_2 + H_1) | u_i^{(2)}(\xi, \mathbf{t}) | +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k:c_k=c_j} (\mathcal{Q}_1 H_2 + H_1) |v_k^{(2)}(\xi, t)| d\xi \leq l(H_1 + \mathcal{Q}_1 H_2 + m(\mathcal{Q}_1 H_2 + H_1) \times \\
& \quad \times [\max_{0 \leq t \leq T_0} M(t) \max\{C; B e^{\int_0^t M(\xi) d\xi}\} + H_4(\Lambda_1 H_2 + H_1)]) + \\
& \quad + \int_0^x \sum_{s_j(t;w)^k:c_k=c_j} (\mathcal{Q}_1 H_2 + H_1) |v_k^{(2)}(\xi, t)| d\xi. \tag{49}
\end{aligned}$$

Звідси, використовуючи (45) і (49), згідно з (28) матимемо

$$|v_j^{(2)}(x, t)| \leq H_5 + \int_0^x \sum_{s_j(t;w)^k:c_k=c_j} (\mathcal{Q}_1 H_2 + H_1) |v_k^{(2)}(\xi, t)| d\xi, \tag{50}$$

де

$$\begin{aligned}
H_5 = & B^1 + \max_{0 \leq t \leq T_0} M(t) l \max_{0 \leq x \leq 1} M(x) B e^{\int_0^t M(\xi) d\xi} + \\
& + l(H_1 + \mathcal{Q}_1 H_2 + m(\mathcal{Q}_1 H_2 + H_1) [\max_{0 \leq t \leq T_0} M(t) \max\{C; B e^{\int_0^t M(\xi) d\xi}\} + H_4(\Lambda_1 H_2 + H_1)]).
\end{aligned}$$

У формулі (50) переходимо до максимуму по j і застосовуємо лему Гронуолла. Після того, перейшовши до максимуму по $(x, t) \in \Pi(T_0)$, одержимо оцінку

$$P v^{(2)}(x, t) \leq H_5 e^{l(\mathcal{Q}_1 H_2 + H_1)n}. \tag{51}$$

Тепер, використовуючи формули (48), (51) і (42), остаточно приходимо до бажаного результату з константою $\tilde{H}$, яка визначається рівністю

$$\tilde{H} = \max\{H_4; H_5 e^{l(\mathcal{Q}_1 H_2 + H_1)n}; C; B e^{\int_0^t M(\xi) d\xi}\}. \tag{52}$$

Лему 1 доведено.

Лема 2. У прямокутнику $\Pi(T)$ функції $A_i^1[w](x, t)$ та $S[w](x, t)$ задовольняють умову Ліпшиця за x відповідно з константами

$$\begin{aligned}
L_x^{A^1} &= \max\{L_{\alpha x}^{A^1}; L_{\gamma x}^{A^1}\}, \\
L_x^S &= A_1 + \Lambda_0^{-1} \Gamma_1 + (F_1 + L_x F_2) T + F \Lambda_0^{-1} + Q, \tag{53}
\end{aligned}$$

де вигляд сталих $L_{\alpha x}^{A^1}$ і $L_{\gamma x}^{A^1}$ буде вибрано в процесі доведення леми.

Доведення. У прямокутнику $\Pi(T)$ функція $A[w](x, t)$ задовольняє умову Ліпшиця за x з константою

$$L_x^A = A_1 + \Lambda_0^{-1} \Gamma_1 + (F_1 + L_x F_2) T + F \Lambda_0^{-1}, \tag{54}$$

$$L_x^{A^1} = \max\{L_{\alpha x}^{A^1}; L_{\gamma x}^{A^1}\}. \quad (61)$$

Крім того, в $\Pi(T)$ функція $A_i^1[\mathbf{w}](x, t)$ ($i = 1, K, m$) є ліпшицевою за t з константою

$$L_t^{A^1} = \Lambda L_x^{A^1} + N_{13}, \quad (62)$$

а функція $B^1[\mathbf{w}](x, t)$ задовольняє умову Ліпшиця за x з константою

$$L_x^{B^1} = N_{21} = Q^1(1 + P_0^2 + nP_0^1), \quad (63)$$

де $P_0^2 = F + \Lambda P_0^1$.

В $\Pi(T)$ також виконується нерівність

$$\begin{aligned} |A_i^1[\mathbf{w}](x, t) - \alpha_i'(x)| \leq & [A_1^1\Lambda + A^1\Lambda(1 + mP_0^1 + Qn) + F^1 + F^1(P_0^1m + Qn) + \\ & + \Lambda_0^{-1}(\Gamma_1^1 + F_3 + F_2L_t) + A_1^1\Lambda^2\Lambda_0^{-1} + A^1\Lambda_0^{-1}(\Lambda_3 + \Lambda_2L_t) + \\ & + A^1\Lambda_0^{-1}\Lambda^1\Lambda(1 + mP_0^1 + Qn)\Gamma + A^1\Lambda_0^{-1}\Lambda^1\Lambda(1 + mP_0^1 + Qn)\Gamma], \end{aligned} \quad (64)$$

а для оператора B^1 правильна оцінка

$$\begin{aligned} P B^1[\mathbf{w}](x, t) P \leq & B^1 + RQ + 2Q^1RT(1 + m(F + \Lambda P_0^1) + nP_0^1e^{H^1}) + \\ & + [(1 + m(F + \Lambda P_0^1))\max_x M(x)P_0 + Q^1nP_0^1]H^{-1}. \end{aligned} \quad (65)$$

З формул (60)-(62) робимо висновок про те, що в загальному випадку $L_x^{A^1} \geq L^1$ і, крім того, якщо замість L_x взяти величину

$$L_x = A_1 + \Lambda_0^{-1}\Gamma_1 + F_1T_0 + F_2 + F\Lambda_0^{-1} + Q, \quad (66)$$

а замість L_t величину

$$L_t = \Lambda L_x + F + L_t^B, \quad (67)$$

де $L_t^B = \frac{B_1 + RQ + IQ_3}{1 - IQ_2}$, то за умови, що $LT < 1$ і $IQ_2 < 1$, отримаємо

нерівність $L^S \leq L$. Лему 2 доведено.

Доведемо тепер, що при виконанні всіх перелічених тут умов оператор $\overset{\circ}{S} \overset{\circ}{S}$ відображає кулю $\overset{\circ}{\Pi}_2(T, \overset{\circ}{L}, P, P^1)$ в себе.

Лема 3. Для деяких $P, P^1, \overset{\circ}{L}$ і $H > 0$ оператор $\overset{\circ}{S} \overset{\circ}{S}$ відображає кулю $\overset{\circ}{\Pi}_2(T, \overset{\circ}{L}, P, P^1)$ в себе.

Доведення. Згідно з лемою 1 виберемо деяке $\mathbf{P}_0^1 > \max\{\mathbf{H}_5; \mathbf{H}_5 \mathbf{e}^{l(\mathbf{Q}_1 \mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_1)n}\}$ і позначимо $\mathbf{P}^1 = \mathbf{P}_0^1 - \max\{\mathbf{H}_5; \mathbf{H}_5 \mathbf{e}^{l(\mathbf{Q}_1 \mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_1)n}\}$.

Із формули (57) отримуємо, що для $(\mathbf{x}_1, \mathbf{t}), (\mathbf{x}_2, \mathbf{t}) \in \Pi_i^\alpha(\mathbf{w})$ функція $\mathbf{A}^1[\dot{\mathbf{S}}\mathbf{w}](\mathbf{x}, \mathbf{t})$ задовольняє умову Ліпшиця за $\mathbf{x}$ з константою

$$\mathbf{L}_{\alpha\mathbf{x}}^{\mathbf{A}^1\dot{\mathbf{S}}} = \mathbf{A}_1^1 + (\mathbf{A}^1 \mathbf{N}_2 + \mathbf{N}_{10})(1 + \mathbf{L}_x^{\mathbf{S}})\mathbf{T}, \quad (68)$$

де $\mathbf{L}_x^{\mathbf{S}} = \max\{\mathbf{L}_x; \mathbf{L}_{\alpha\mathbf{x}}^{\mathbf{A}^1}; \mathbf{L}_{\gamma\mathbf{x}}^{\mathbf{A}^1}; \mathbf{L}_x^{\mathbf{B}^1}\}$.

Нехай тепер $(\mathbf{x}_1, \mathbf{t}), (\mathbf{x}_2, \mathbf{t}) \in \Pi_i^0(\mathbf{w})$ (або $(\mathbf{x}_1, \mathbf{t}), (\mathbf{x}_2, \mathbf{t}) \in \Pi_i^1(\mathbf{w})$). Оскільки аргументами операторів на цьому кроці є функції $\dot{\mathbf{S}}\mathbf{w}$, то матимемо оцінку

$$\begin{aligned} & |\chi_i^1(\mathbf{x}_1, \mathbf{t}, \dot{\mathbf{S}}\mathbf{w}) - \chi_i^1(\mathbf{x}_2, \mathbf{t}, \dot{\mathbf{S}}\mathbf{w})| \leq \Lambda_0^{-1} |\varphi_i^1(\chi_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{t}, \mathbf{S}\mathbf{w}); \mathbf{x}_1, \mathbf{t}, \dot{\mathbf{S}}\mathbf{w}) - \\ & \varphi_i^1(\chi_i(\mathbf{x}_2, \mathbf{t}, \mathbf{S}\mathbf{w}); \mathbf{x}_2, \mathbf{t}, \dot{\mathbf{S}}\mathbf{w})| + \Lambda_0^{-2} |\lambda_i(0, \chi_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{t}, \mathbf{S}\mathbf{w}), \mathbf{S}\mathbf{w}(0, \chi_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{t}, \mathbf{S}\mathbf{w}))) - \\ & - \lambda_i(0, \chi_i(\mathbf{x}_2, \mathbf{t}, \mathbf{S}\mathbf{w}), \mathbf{S}\mathbf{w}(0, \chi_i(\mathbf{x}_2, \mathbf{t}, \mathbf{S}\mathbf{w})))| \leq \Lambda_0^{-1} \mathbf{N}_5(1 + \mathbf{L}^{\mathbf{S}}\mathbf{T}) |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| + \\ & + \Lambda_0^{-2} [\Lambda_3 + \Lambda_2 \mathbf{L}_t^{\mathbf{S}}] |\chi_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{t}, \mathbf{S}\mathbf{w}) - \chi_i(\mathbf{x}_2, \mathbf{t}, \mathbf{S}\mathbf{w})| \leq \\ & \leq (\Lambda_0^{-1} \mathbf{N}_5(1 + \mathbf{L}^{\mathbf{S}}\mathbf{T}) + \Lambda_0^{-3} \mathbf{L}_1(1 + \mathbf{L}_t^{\mathbf{S}})) |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|. \end{aligned} \quad (69)$$

Тому

$$\begin{aligned} & |R_i^1[\dot{\mathbf{S}}\mathbf{w}](\mathbf{x}_1, \mathbf{t}) - R_i^1[\dot{\mathbf{S}}\mathbf{w}](\mathbf{x}_2, \mathbf{t})| \leq (\gamma_i^0)'_t(\chi_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{t}, \mathbf{S}\mathbf{w})) \chi_i^1(\mathbf{x}_1, \mathbf{t}, \dot{\mathbf{S}}\mathbf{w}) - \\ & - (\gamma_i^0)'_t(\chi_i(\mathbf{x}_2, \mathbf{t}, \mathbf{S}\mathbf{w})) \chi_i^1(\mathbf{x}_2, \mathbf{t}, \dot{\mathbf{S}}\mathbf{w}) \leq \Lambda_0^{-2} \Gamma_1^1 |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| + \Gamma^1(\Lambda_0^{-1} \mathbf{N}_5(1 + \mathbf{L}^{\mathbf{S}}\mathbf{T}) + \\ & + \Lambda_0^{-3} \mathbf{L}_1(1 + \mathbf{L}_t^{\mathbf{S}})) |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|. \end{aligned} \quad (70)$$

Далі

$$\begin{aligned} & |Y_i^1[\dot{\mathbf{S}}\mathbf{w}](\mathbf{x}_1, \mathbf{t}) - Y_i^1[\dot{\mathbf{S}}\mathbf{w}](\mathbf{x}_2, \mathbf{t})| \leq \Lambda_0^{-1} (\mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_2 \mathbf{L}_t^{\mathbf{S}}) |\chi_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{t}, \mathbf{S}\mathbf{w}) - \\ & - \chi_i(\mathbf{x}_2, \mathbf{t}, \mathbf{S}\mathbf{w})| + \mathbf{F} |\chi_i^1(\mathbf{x}_1, \mathbf{t}, \dot{\mathbf{S}}\mathbf{w}) - \chi_i^1(\mathbf{x}_2, \mathbf{t}, \dot{\mathbf{S}}\mathbf{w})| \leq \Lambda_0^{-2} \mathbf{F}_1(1 + \mathbf{L}_t^{\mathbf{S}}) |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| + \\ & + \mathbf{F}(\Lambda_0^{-1} \mathbf{N}_5(1 + \mathbf{L}^{\mathbf{S}}\mathbf{T}) + \Lambda_0^{-3} \mathbf{L}_1(1 + \mathbf{L}_t^{\mathbf{S}})) |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|. \end{aligned} \quad (71)$$

Нарешті,

$$\begin{aligned} & |I_i^1[\dot{\mathbf{S}}\mathbf{w}](\mathbf{x}_1, \mathbf{t}) - I_i^1[\dot{\mathbf{S}}\mathbf{w}](\mathbf{x}_2, \mathbf{t})| \leq \\ & \leq [\Lambda_0^{-1} (\mathbf{F}^1 + \mathbf{F}^1(\mathbf{P}_0^1 \mathbf{m} + \mathbf{Qn})) + \mathbf{N}_{10}(1 + \mathbf{L}_x^{\mathbf{S}})\mathbf{T}] |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|. \end{aligned} \quad (72)$$

Тепер, об'єднуючи (70)-(72), отримаємо, що функція $\mathbf{A}_i^1[\dot{\mathbf{S}}\mathbf{w}](\mathbf{x}, \mathbf{t})$ в $\Pi_i^0(\mathbf{w})$ (або в $\Pi_i^1(\mathbf{w})$) задовольняє умову Ліпшиця за $\mathbf{x}$ з константою

$$\mathbf{L}_{\gamma\mathbf{x}}^{\mathbf{A}^1\dot{\mathbf{S}}} = \Lambda_0^{-2} \Gamma_1^1 + \Gamma^1(\Lambda_0^{-1} \mathbf{N}_5(1 + \mathbf{L}^{\mathbf{S}}\mathbf{T}) + \Lambda_0^{-3} \mathbf{L}_1(1 + \mathbf{L}_t^{\mathbf{S}})) + \Lambda_0^{-2} \mathbf{F}_1(1 + \mathbf{L}_t^{\mathbf{S}}) +$$

$$+F(\Lambda_0^{-1}N_5(1+\overset{\circ}{L}^S T) + \Lambda_0^{-3}\overset{\circ}{\Lambda}_1(1+\overset{\circ}{L}_t^S)) + \Lambda_0^{-1}(F^1 + F^1(P_0^1 m + Qn)) + \\ + N_{10}(1+\overset{\circ}{L}_x^S)T. \quad (73)$$

Отже, у прямокутнику $\Pi(T)$ функція $A^1[\overset{\circ}{S}\overset{\circ}{w}](x,t)$ задовольняє умову Ліпшиця за x з константою

$$\overset{\circ}{L}_x^{A^1S} = \max\{\overset{\circ}{L}_{\alpha x}^{A^1S}; \overset{\circ}{L}_{\gamma x}^{A^1S}\}. \quad (74)$$

Далі в $\Pi(T)$ функція $A^1[\overset{\circ}{S}\overset{\circ}{w}](x,t)$ задовольняє умову Ліпшиця за t з константою

$$\overset{\circ}{L}_t^{A^1S} = \Lambda \overset{\circ}{L}_x^{A^1S} + N_{13}, \quad (75)$$

а функція $B^1[\overset{\circ}{S}\overset{\circ}{w}](x,t)$ є ліпшицевою за x з константою

$$\overset{\circ}{L}_x^{B^1S} = Q^1(1 + P_0^2 m + nP_0^1). \quad (76)$$

Зауваження 5. Оскільки $L > A_1$, а $\overset{\circ}{L}^1 > A_1^1$, то можна вважати, що $A_1 T < 1$ і $A_1^1 T < 1$.

Якщо з самого початку, враховуючи зауваження 0.5, вибрати замість $\overset{\circ}{L}_x^1$, $\overset{\circ}{L}_t^1$, $\overset{\circ}{L}_x$ і $\overset{\circ}{L}_t$ величини

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{L}_x^1 &= \max\{A_1^1; \overset{\circ}{b}_7 \Lambda \overset{\circ}{L}_x\} + \overset{\circ}{b}_{12}; \\ \overset{\circ}{L}_t^1 &= \Lambda \overset{\circ}{L}_x^1 + N_{13}; \\ \overset{\circ}{L}_x &= A_1 + \Lambda_0^{-1} \Gamma_1 + F_1 T_0 + F_2 + F \Lambda_0^{-1} + Q; \\ \overset{\circ}{L}_t &= \Lambda \overset{\circ}{L}_x + F + \overset{\circ}{L}_t^B; \\ \overset{\circ}{L}_x^S &= \max\{A_1; A_1^1; \overset{\circ}{b}_4(1 + \overset{\circ}{L})\} + \overset{\circ}{b}_1; \\ \overset{\circ}{L}^S &= \max\{1, \Lambda\} \overset{\circ}{L}_x^S + F + \overset{\circ}{L}_t^B + N_{13}, \end{aligned} \quad (77)$$

де

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{b}_{12} &= \overset{\circ}{b}_{10} + \overset{\circ}{b}_{11}; \quad \overset{\circ}{b}_{11} = \max\{\overset{\circ}{b}_3; \overset{\circ}{b}_9\}; \quad \overset{\circ}{b}_{10} = \overset{\circ}{b}_2 + \overset{\circ}{b}_3 \overset{\circ}{b}_1 T_0 + \overset{\circ}{b}_3 \overset{\circ}{b}_4 (T_0 + 1) + \overset{\circ}{b}_8; \\ \overset{\circ}{b}_9 &= \overset{\circ}{b}_6 \max\{1, \Lambda\} + N_{10}; \\ \overset{\circ}{b}_8 &= \overset{\circ}{b}_5 + \overset{\circ}{b}_6 (\max\{1, \Lambda\} \overset{\circ}{b}_1 + F + \overset{\circ}{L}_t^B + N_{13}) T_0 + \overset{\circ}{b}_7 (F + \overset{\circ}{L}_t^B) + \\ &+ N_{10} \overset{\circ}{b}_1 T_0 + \overset{\circ}{b}_4 (T_0 + 1) (\max\{1, \Lambda\} \overset{\circ}{b}_6 + N_{10}) \\ \overset{\circ}{b}_7 &= \Gamma^1 \Lambda_0^{-3} \overset{\circ}{\Lambda}_1 + \Lambda_0^{-2} \overset{\circ}{F}_1 + \Lambda_0^{-3} \overset{\circ}{\Lambda}_1 F; \quad \overset{\circ}{b}_6 = \Gamma^1 \Lambda_0^{-1} N_5 + F \Lambda_0^{-1} N_5; \\ \overset{\circ}{b}_5 &= \Lambda_0^{-2} \Gamma_1^1 + \Lambda_0^{-1} (F^1 + F^1(P_0^1 m + Qn)) + \Gamma^1 \Lambda_0^{-1} N_5 + \Gamma^1 \Lambda_0^{-3} \overset{\circ}{\Lambda}_1 + \Lambda_0^{-2} \overset{\circ}{F}_1 + \\ &+ F(\Lambda_0^{-1} N_5 + \Lambda_0^{-3} \overset{\circ}{\Lambda}_1) + N_{10} T_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_4^1 &= \Gamma^1 \mathbf{N}_7 + \mathbf{N}_{17}; \quad \mathbf{b}_3^1 = \mathbf{A}^1 \mathbf{N}_2 + \mathbf{N}_{10}; \quad \mathbf{b}_2^1 = (\mathbf{A}^1 \mathbf{N}_2 + \mathbf{N}_{10} \mathbf{T}_0; \\ \mathbf{b}_1^1 &= \Lambda_0^{-1} \Gamma_1 + \mathbf{F}_1 \mathbf{T}_0 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F} \Lambda_0^{-1} + \mathbf{Q} + (\mathbf{A}^1 \mathbf{N}_2 + \mathbf{N}_{10} (\mathbf{T}_0 + 1) + \Lambda_0^{-2} \Gamma_1^1 + \\ &+ \Lambda_0^{-1} (\mathbf{F}^1 + \mathbf{F}^1 (\mathbf{P}_0^1 \mathbf{m} + \mathbf{Qn})) + \mathbf{Q}^1 (1 + (\mathbf{F} + \Lambda \mathbf{P}_0^1) \mathbf{m} + \mathbf{n} \mathbf{P}_0^1) \\ \mathbf{L}_t^B &= \frac{\mathbf{B}_1 + \mathbf{RQ} + \mathbf{IQ}_3}{1 - \mathbf{IQ}_2}, \end{aligned}$$

то при виконанні нерівностей: $\mathbf{IQ}_2 < 1$; $\mathbf{LT} < 1$; $\mathbf{L}^1 \mathbf{T} < 1$ оператор $\mathbf{SS}^1$ відображатиме кулю $\overset{\circ}{\mathbb{E}}_2(\mathbf{T}, \mathbf{L}, \mathbf{P}, \mathbf{P}^1)$ в себе. Лему 3 доведено.

Перейдемо тепер до вивчення стисних властивостей оператора $\mathbf{SS}^1$.

Лема 4. При зроблених припущеннях оператор $\mathbf{SS}^1$ є стиском на кулі $\overset{\circ}{\mathbb{E}}_2(\mathbf{T}, \mathbf{L}, \mathbf{P}, \mathbf{P}^1)$.

Доведення. Для $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \overset{\circ}{\mathbb{E}}_2(\mathbf{T}, \mathbf{L}, \mathbf{P})$ виконуються співвідношення

$$\mathbf{P} \mathbf{S}[\mathbf{w}_1](\mathbf{x}, \mathbf{t}) - \mathbf{S}[\mathbf{w}_2](\mathbf{x}, \mathbf{t}) \mathbf{P} \leq \kappa \mathbf{P} \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 \mathbf{P}, \quad (78)$$

де

$$\begin{aligned} \kappa &= \mathbb{K} + (\mathbf{Q} \mathbf{M}_3^1 \mathbf{T} + 2 \mathbf{Q}_2 \mathbf{R} \mathbf{T} + \mathbf{Q}_2 \mathbf{H}^{-1}); \\ \mathbb{K} &= ([\mathbf{A}_1 + \Gamma_1 \Lambda_0^{-1} + (\mathbf{F}_1 + \mathbf{L} \mathbf{F}_2) \mathbf{T} + \mathbf{F} \Lambda_0^{-1}] \Lambda_2 \mathbf{e}^{\mathbf{H}^1 + (\Lambda_1 + \mathbf{L} \Lambda_2) \mathbf{T}} + \mathbf{F}_2 \mathbf{e}^{\mathbf{H}^1}) \mathbf{T}. \end{aligned}$$

При $(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \in \Pi_i^\alpha(\mathbf{w}_1) \cap \Pi_i^\alpha(\mathbf{w}_2)$ маємо

$$\begin{aligned} | \mathbf{R}_i^1[\mathbf{w}_1](\mathbf{x}, \mathbf{t}) - \mathbf{R}_i^1[\mathbf{w}_2](\mathbf{x}, \mathbf{t}) | &\leq \mathbf{A}^1 \mathbf{N}_3 (1 + \mathbf{L}^1 \mathbf{T}) \rho + \mathbf{M}_1^1 \mathbf{A}_1^1 \mathbf{T} \rho; \\ | \mathbf{I}_i^1[\mathbf{w}_1](\mathbf{x}, \mathbf{t}) - \mathbf{I}_i^1[\mathbf{w}_2](\mathbf{x}, \mathbf{t}) | &\leq \mathbf{N}_{40} (1 + \mathbf{L}^1 \mathbf{T}) \rho. \end{aligned} \quad (79)$$

Тут

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{40} &= \mathbf{T}_0 \mathbf{F}_1^1 \mathbf{M}_1^1 + \mathbf{F}_2^1 \mathbf{e}^{\mathbf{H}^1} + (\mathbf{P}_0^1 \mathbf{m} + \mathbf{Qn}) (\mathbf{F}_1^1 \mathbf{M}_1^1 \mathbf{T}_0 + \mathbf{F}_2^1 \mathbf{e}^{\mathbf{H}^1}) + \mathbf{F}^1 \mathbf{m} (\mathbf{M}_1^1 \mathbf{T}_0 + \mathbf{e}^{\mathbf{H}^1}) + \\ &+ \mathbf{F}^1 (1 + \mathbf{P}_0^1 \mathbf{m} + \mathbf{Qn}) \mathbf{N}_3 \mathbf{T}_0 + \mathbf{F}^1 \mathbf{n} (\mathbf{Q}_1^1 \mathbf{M}_1^1 + \mathbf{Q}_2 \mathbf{e}^{\mathbf{H}^1}). \end{aligned}$$

Отож, для $(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \in \Pi_i^\alpha(\mathbf{w}_1) \cap \Pi_i^\alpha(\mathbf{w}_2)$ справджуються нерівності

$$| \mathbf{A}_i^1[\mathbf{w}_1](\mathbf{x}, \mathbf{t}) - \mathbf{A}_i^1[\mathbf{w}_2](\mathbf{x}, \mathbf{t}) | \leq \mathbf{N}_{41} (1 + \mathbf{L}^1 \mathbf{T}) \rho + \mathbf{A}_1^1 \mathbf{M}_1^1 \mathbf{T} \rho, \quad (80)$$

де $\mathbf{N}_{41} = \mathbf{N}_{10} + \mathbf{A}^1 \mathbf{N}_3$.

Якщо $(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \in \Pi_i^0(\mathbf{w}_1) \cap \Pi_i^0(\mathbf{w}_2)$ (або $(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \in \Pi_i^1(\mathbf{w}_1) \cap \Pi_i^1(\mathbf{w}_2)$), то правильні нерівності

$$| \mathbf{R}_i^1[\mathbf{w}_1](\mathbf{x}, \mathbf{t}) - \mathbf{R}_i^1[\mathbf{w}_2](\mathbf{x}, \mathbf{t}) | \leq \Gamma^1 (\Lambda_0^{-1} \mathbf{N}_3 + \mathbf{N}_4 \mathbf{M}_2^1 + \Lambda_0^{-2} \mathbf{A}_1^1 \mathbf{M}_2^1) (1 + \mathbf{L}^1 \mathbf{T}) \rho +$$

$$\begin{aligned}
& +\Gamma^1\Lambda_2\Lambda_0^{-2}\mathbf{e}^{H1}\rho + \Lambda_0^{-2}\mathbf{M}_1\Gamma_1^1\mathbf{T}\rho; \\
& |Y_i^1[\mathbf{w}_1](\mathbf{x},t) - Y_i^1[\mathbf{w}_2](\mathbf{x},t)| \leq \Lambda_0^{-1}[\mathbf{F}_1\mathbf{M}_2(1+\mathbf{L})\mathbf{T}\rho + \mathbf{F}_2\mathbf{e}^{H1}\rho] + \mathbf{F}(\Lambda_0^{-1}\mathbf{N}_3 + \\
& + \mathbf{N}_4\mathbf{M}_2 + \Lambda_0^{-2}\mathbf{A}_1\mathbf{M}_2)(1+\mathbf{L})\mathbf{T}\rho + \mathbf{F}\Lambda_2\Lambda_0^{-2}\mathbf{e}^{H1}\rho; \\
& |I_i^1[\mathbf{w}_1](\mathbf{x},t) - I_i^1[\mathbf{w}_2](\mathbf{x},t)| \leq N_{46}(1+\mathbf{L})\mathbf{T}\rho,
\end{aligned} \tag{81}$$

де

$$\begin{aligned}
N_{46} = & \mathbf{F}_1\mathbf{M}_1\mathbf{T}_0 + \mathbf{F}_2^1\mathbf{e}^{H1} + \mathbf{F}^1\mathbf{m}\mathbf{M}_1\mathbf{T}_0 + \mathbf{F}^1\mathbf{m} + (\mathbf{P}_0^1\mathbf{m} + \mathbf{Qn})(\mathbf{F}_1\mathbf{M}_1\mathbf{T}_0 + \mathbf{F}_2^1\mathbf{e}^{H1}) + \\
& + \mathbf{F}^1\mathbf{n}\mathbf{M}_1\mathbf{Q}_1\mathbf{T}_0 + \mathbf{Q}_2\mathbf{F}^1\mathbf{n}\mathbf{e}^{H1} + \mathbf{T}_0\mathbf{F}^1(1 + (\mathbf{P}_0^1\mathbf{m} + \mathbf{Qn}))\mathbf{N}_3 + \mathbf{F}^1(1 + \mathbf{P}_0^1\mathbf{m} + \mathbf{Qn})\mathbf{M}_2.
\end{aligned}$$

Отже, для $(\mathbf{x},t) \in \Pi_i^0(\mathbf{w}_1) \cap \Pi_i^0(\mathbf{w}_2)$ (або $(\mathbf{x},t) \in \Pi_i^1(\mathbf{w}_1) \cap \Pi_i^1(\mathbf{w}_2)$) матимемо оцінку

$$\begin{aligned}
|A_i^1[\mathbf{w}_1](\mathbf{x},t) - A_i^1[\mathbf{w}_2](\mathbf{x},t)| \leq & (\Gamma^1 + \mathbf{F})(\Lambda_0^{-1}\mathbf{N}_3 + \mathbf{N}_4\mathbf{M}_2 + \Lambda_0^{-2}\mathbf{A}_1\mathbf{M}_2)(1+\mathbf{L})\mathbf{T}\rho + \\
& + (\Gamma^1 + \mathbf{F})\Lambda_2\Lambda_0^{-2}\mathbf{e}^{H1}\rho + \Lambda_0^{-2}\mathbf{M}_1\Gamma_1^1\mathbf{T}\rho + \Lambda_0^{-1}\mathbf{F}_1\mathbf{M}_2(1+\mathbf{L})\mathbf{T}\rho + \\
& + \Lambda_0^{-1}\mathbf{F}_2\mathbf{e}^{H1}\rho + N_{46}(1+\mathbf{L})\mathbf{T}\rho.
\end{aligned} \tag{82}$$

Розглянемо тепер, для визначеності, область $(\mathbf{x},t) \in \Pi_i^\alpha(\mathbf{w}_1) \cap \Pi_i^0(\mathbf{w}_2)$ (всі інші випадки областей такого вигляду розглядають аналогічно). У цій області справджується нерівність

$$\begin{aligned}
|R_i^1[\mathbf{w}_1](\mathbf{x},t) - R_i^1[\mathbf{w}_2](\mathbf{x},t) + Y_i^1[\mathbf{w}_1](\mathbf{x},t) - Y_i^1[\mathbf{w}_2](\mathbf{x},t)| \leq \\
\leq N_{48}(1+\mathbf{L})\mathbf{T}\rho + \mathbf{A}_1^1\mathbf{M}_1\mathbf{T}\rho,
\end{aligned} \tag{83}$$

$$\text{де } N_{48} = \Lambda_0^{-1}\Gamma_1^1\mathbf{M}_2 + \Lambda_0^{-1}\mathbf{F}_1\mathbf{M}_2 + \mathbf{A}^1\Lambda_0^{-1}\Lambda\mathbf{N}_4\mathbf{M}_2 + \mathbf{A}^1\Lambda\Lambda_0^{-1}\mathbf{N}_3 + \mathbf{A}^1\Lambda_0^{-1}\mathbf{A}_1\mathbf{M}_2.$$

Далі

$$|I_i^1[\mathbf{w}_1](\mathbf{x},t) - I_i^1[\mathbf{w}_2](\mathbf{x},t)| \leq N_{49}(1+\mathbf{L})\mathbf{T}\rho, \tag{84}$$

де

$$\begin{aligned}
N_{49} = & (1 + \mathbf{P}_0^1\mathbf{m} + \mathbf{Qn})(\mathbf{F}_1\mathbf{M}_1\mathbf{T}_0 + \mathbf{F}_2^1\mathbf{e}^{H1}) + \mathbf{F}^1\mathbf{m}(\mathbf{M}_1\mathbf{T}_0 + 1) + \\
& + \mathbf{F}^1\mathbf{n}(\mathbf{M}_1\mathbf{Q}_1\mathbf{T}_0 + \mathbf{e}^{H1}\mathbf{Q}_2) + \mathbf{F}^1(1 + \mathbf{P}_0^1\mathbf{m} + \mathbf{Qn})\mathbf{N}_3\mathbf{T}_0 + \mathbf{F}^1(1 + \mathbf{P}_0^1\mathbf{m} + \mathbf{Qn})\mathbf{M}_2.
\end{aligned}$$

Об'єднуючи результати (83), (84), отримуємо, що при $(\mathbf{x},t) \in \Pi_i^\alpha(\mathbf{w}_1) \cap \Pi_i^0(\mathbf{w}_2)$ (і у всіх аналогічних випадках) виконується нерівність

$$|A_i^1[\mathbf{w}_1](\mathbf{x},t) - A_i^1[\mathbf{w}_2](\mathbf{x},t)| \leq N_{50}(1+\mathbf{L})\mathbf{T}\rho + \mathbf{A}_1^1\mathbf{M}_1\mathbf{T}\rho, \tag{85}$$

$$\text{де } N_{50} = N_{48} + N_{49}.$$

Отже, з (80), (82), (85) одержуємо, що у прямокутнику $\Pi(T)$ для $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \overset{\circ}{\Pi E}_2(T, \mathbf{L}, \mathbf{P}, \mathbf{P}^1)$ та для $i = 1, \mathbf{K}, \mathbf{m}$ правильна оцінка

$$|A_i^1[\mathbf{w}_1](\mathbf{x}, t) - A_i^1[\mathbf{w}_2](\mathbf{x}, t)| \leq N_{52}(1 + \mathbf{L})T \rho + \\ + [(\Gamma^1 + \mathbf{F})\Lambda_2\Lambda_0^{-2}\mathbf{e}^{H1} + \Lambda_0^{-1}\mathbf{F}_2\mathbf{e}^{H1}] \rho + A_1^1\mathbf{M}_1T \rho, \quad (86)$$

де

$$N_{52} = N_{50} + N_{41} + (\Gamma^1 + \mathbf{F})(\Lambda_0^{-1}N_3 + N_4\mathbf{M}_2 + \Lambda_0^{-2}\mathbf{L}_1\mathbf{M}_2) + \\ + \Lambda_0^{-2}\mathbf{M}_1\Gamma_1^1 + \Lambda_0^{-1}\mathbf{F}_1\mathbf{M}_2 + N_{46}.$$

В $\Pi(T)$ для $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \overset{\circ}{\Pi E}_2(T, \mathbf{L}, \mathbf{P}, \mathbf{P}^1)$ справджується нерівність

$$\mathbf{P} B^1[\mathbf{w}_1](\mathbf{x}, t) - B^1[\mathbf{w}_2](\mathbf{x}, t) \mathbf{P} \leq \\ \leq N_{53}(1 + \mathbf{L})T \rho + N_{55}2RT \rho + (\mathbf{R}_2 + \mathbf{Q}_2)\rho + N_{55}\mathbf{H}^{-1}\rho, \quad (87)$$

де

$$N_{53} = \mathbf{Q}^1(1 + (\mathbf{F} + \Lambda\mathbf{P}_0^1)\mathbf{m} + \mathbf{P}_0^1\mathbf{n})\mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_3(\mathbf{Q}\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}\mathbf{Q}_1); \\ N_{55} = \mathbf{Q}_2^1(1 + (\mathbf{F} + \Lambda\mathbf{P}_0^1)\mathbf{m} + \mathbf{P}_0^1\mathbf{n}) + \mathbf{Q}^1\mathbf{n} + \mathbf{Q}^1\mathbf{m}(\mathbf{F}_2 + \mathbf{P}_0^1\Lambda_2 + \Lambda).$$

Отож, з (86) і (87) матимемо, що в прямокутнику $\Pi(T)$ для $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \overset{\circ}{\Pi E}_2(T, \mathbf{L}, \mathbf{P}, \mathbf{P}^1)$ виконується оцінка

$$\mathbf{P} S^1[\mathbf{w}_1](\mathbf{x}, t) - S^1[\mathbf{w}_2](\mathbf{x}, t) \mathbf{P} \leq \mathbf{b}_{13}(1 + \mathbf{L})T \rho + A_1^1\mathbf{M}_1T \rho + N_{55}2RT \rho + \\ + N_{55}\mathbf{H}^{-1}\rho + [(\Gamma^1 + \mathbf{F})\Lambda_2\Lambda_0^{-2}\mathbf{e}^{H1} + \Lambda_0^{-1}\mathbf{F}_2\mathbf{e}^{H1} + \mathbf{R}_2 + \mathbf{Q}_2]\rho, \quad (88)$$

де $\mathbf{b}_{13} = N_{53} + N_{52}$.

З оцінки (88) робимо висновок про те, що в загальному випадку оператор S^1 не є стиском на кулі $\overset{\circ}{\Pi E}_2(T, \mathbf{L}, \mathbf{P}, \mathbf{P}^1)$. Розглянемо тепер стисні властивості оператора $\overset{\circ}{S} \overset{\circ}{S}$.

Із (78) одержимо, що в $\Pi(T)$ правильна нерівність:

$$\mathbf{P} S[\mathbf{S}\mathbf{w}_1](\mathbf{x}, t) - S[\mathbf{S}\mathbf{w}_2](\mathbf{x}, t) \mathbf{P} \leq \kappa \mathbf{P} S[\mathbf{w}_1](\mathbf{x}, t) - S[\mathbf{w}_2](\mathbf{x}, t) \mathbf{P} \leq \kappa^2 \mathbf{P} \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 \mathbf{P}. \quad (89)$$

З (77) та (88) отримуємо, що в $\Pi(T)$ справджується оцінка

$$\mathbf{P} S^1[\overset{\circ}{S}\mathbf{w}_1](\mathbf{x}, t) - S^1[\overset{\circ}{S}\mathbf{w}_2](\mathbf{x}, t) \mathbf{P} \leq \mathbf{b}_{13}(1 + \mathbf{L}^S)T \mathbf{P} \overset{\circ}{S}[\mathbf{w}_1](\mathbf{x}, t) - \overset{\circ}{S}[\mathbf{w}_2](\mathbf{x}, t) \mathbf{P} + \\ + [(\Gamma^1 + \mathbf{F})\Lambda_2\Lambda_0^{-1}\mathbf{e}^{H1} + \Lambda_0^{-1}\mathbf{F}_2\mathbf{e}^{H1}] \mathbf{P} S[\mathbf{w}_1](\mathbf{x}, t) - S[\mathbf{w}_2](\mathbf{x}, t) \mathbf{P} + \\ + A_1^1\mathbf{M}_1T \mathbf{P} S[\mathbf{w}_1](\mathbf{x}, t) - S[\mathbf{w}_2](\mathbf{x}, t) \mathbf{P} + N_{55}2RT \mathbf{P} \overset{\circ}{S}[\mathbf{w}_1](\mathbf{x}, t) - \overset{\circ}{S}[\mathbf{w}_2](\mathbf{x}, t) \mathbf{P} +$$

$$\begin{aligned}
& +(\mathbf{R}_2 + \mathbf{Q}_2) \mathbf{P} \mathbf{S}[\mathbf{w}_1](\mathbf{x}, \mathbf{t}) - \mathbf{S}[\mathbf{w}_2](\mathbf{x}, \mathbf{t}) \mathbf{P} + N_{55} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{P} \dot{\mathbf{S}}[\dot{\mathbf{w}}_1](\mathbf{x}, \mathbf{t}) - \dot{\mathbf{S}}[\dot{\mathbf{w}}_2](\mathbf{x}, \mathbf{t}) \mathbf{P} \leq \\
& \leq \dot{\mathbf{b}}_{13}(1 + \max\{1, \Lambda\})(\max\{\mathbf{A}_1; \mathbf{A}_1^1; \dot{\mathbf{b}}_4(1 + \dot{\mathbf{L}})\} + \dot{\mathbf{b}}_1) + \mathbf{F} + \mathbf{L}_t^B + N_{13}) \mathbf{T}(\kappa \rho + \\
& + \dot{\mathbf{b}}_{13}(1 + \dot{\mathbf{L}}) \mathbf{T} \rho) + [(\Gamma^1 + \mathbf{F}) \Lambda_2 \Lambda_0^{-2} \mathbf{e}^{\mathbf{H}1} + \Lambda_0^{-1} \mathbf{F}_2 \mathbf{e}^{\mathbf{H}1}] \rho + \mathbf{A}_1^1 \dot{\mathbf{M}}_1 \mathbf{T} \rho + N_{55} 2 \mathbf{R} \mathbf{T} \rho + \\
& + (\mathbf{R}_2 + \mathbf{Q}_2) \rho + N_{55} \mathbf{H}^{-1} \rho) + [(\Gamma^1 + \mathbf{F}) \Lambda_2 \Lambda_0^{-2} \mathbf{e}^{\mathbf{H}1} + \Lambda_0^{-1} \mathbf{F}_2 \mathbf{e}^{\mathbf{H}1}] \kappa \rho + \mathbf{A}_1^1 \dot{\mathbf{M}}_1 \mathbf{T} \kappa \rho + \\
& + (N_{55} 2 \mathbf{R} \mathbf{T} + N_{55} \mathbf{H}^{-1})(\kappa \rho + \dot{\mathbf{b}}_{13}(1 + \dot{\mathbf{L}}) \mathbf{T} \rho) + [(\Gamma^1 + \mathbf{F}) \Lambda_2 \Lambda_0^{-2} \mathbf{e}^{\mathbf{H}1} + \Lambda_0^{-1} \mathbf{F}_2 \mathbf{e}^{\mathbf{H}1}] \rho + \\
& + \mathbf{A}_1^1 \dot{\mathbf{M}}_1 \mathbf{T} \rho + N_{55} 2 \mathbf{R} \mathbf{T} \rho + (\mathbf{R}_2 + \mathbf{Q}_2) \rho + N_{55} \mathbf{H}^{-1} \rho) + (\mathbf{R}_2 + \mathbf{Q}_2) \kappa \rho \leq \\
& \leq [\dot{\mathbf{b}}_{13}(1 + \max\{1, \Lambda\})(\max\{\mathbf{A}_1; \mathbf{A}_1^1; \dot{\mathbf{b}}_4(1 + \dot{\mathbf{L}})\} + \dot{\mathbf{b}}_1) + \mathbf{F} + \mathbf{L}_t^B + N_{13}) \mathbf{T} + \\
& + N_{55} 2 \mathbf{R} \mathbf{T} + N_{55} \mathbf{H}^{-1})(\kappa + \dot{\mathbf{b}}_{13}(1 + \dot{\mathbf{L}}) \mathbf{T} + \dot{\mathbf{b}}_{14} + \mathbf{A}_1^1 \dot{\mathbf{M}}_1 \mathbf{T} + N_{55} 2 \mathbf{R} \mathbf{T} + \mathbf{R}_2 + \mathbf{Q}_2 + \\
& + N_{55} \mathbf{H}^{-1}) + \dot{\mathbf{b}}_{14} \kappa + \mathbf{A}_1^1 \dot{\mathbf{M}}_1 \mathbf{T} \kappa + (\mathbf{R}_2 + \mathbf{Q}_2) \kappa] \rho, \quad (90)
\end{aligned}$$

де $\dot{\mathbf{b}}_{14} = (\Gamma^1 + \mathbf{F}) \Lambda_2 \Lambda_0^{-2} \mathbf{e}^{\mathbf{H}1} + \Lambda_0^{-1} \mathbf{F}_2 \mathbf{e}^{\mathbf{H}1}$.

Отже, на підставі (89), (90), одержуємо, що у прямокутнику $\Pi(\mathbf{T})$ для $\dot{\mathbf{w}}_1, \dot{\mathbf{w}}_2 \in \overset{\circ}{\mathbb{E}}_2(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{L}}, \mathbf{P}, \mathbf{P}^1)$ виконується нерівність

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P} \dot{\mathbf{S}}[\dot{\mathbf{S}}\dot{\mathbf{w}}_1](\mathbf{x}, \mathbf{t}) - \dot{\mathbf{S}}[\dot{\mathbf{S}}\dot{\mathbf{w}}_2](\mathbf{x}, \mathbf{t}) \mathbf{P} \leq \\
& \leq \max\{\kappa; [\dot{\mathbf{b}}_{13}(1 + \max\{1, \Lambda\})(\max\{\mathbf{A}_1; \mathbf{A}_1^1; \dot{\mathbf{b}}_4(1 + \dot{\mathbf{L}})\} + \dot{\mathbf{b}}_1) + \mathbf{F} + \mathbf{L}_t^B + N_{13}) \mathbf{T} + \\
& + N_{55} 2 \mathbf{R} \mathbf{T} + N_{55} \mathbf{H}^{-1})(\kappa + \dot{\mathbf{b}}_{13}(1 + \dot{\mathbf{L}}) \mathbf{T} + \dot{\mathbf{b}}_{14} + \mathbf{A}_1^1 \dot{\mathbf{M}}_1 \mathbf{T} + N_{55} 2 \mathbf{R} \mathbf{T} + \mathbf{R}_2 + \mathbf{Q}_2 + \\
& + N_{55} \mathbf{H}^{-1}) + \dot{\mathbf{b}}_{14} \kappa + \mathbf{A}_1^1 \dot{\mathbf{M}}_1 \mathbf{T} \kappa + (\mathbf{R}_2 + \mathbf{Q}_2) \kappa]\} \rho. \quad (91)
\end{aligned}$$

З формули (91) остаточно отримуємо, що при достатньо малому $\mathbf{T} > 0$ та досить великому $\mathbf{H} > 0$ оператор $\dot{\mathbf{S}}\dot{\mathbf{S}}$ буде стиском. Лему 4 доведено.

Наслідок. Враховуючи умову B9, позначимо $\mathbf{h}(\mathbf{p}) = \mathbf{l} \frac{\mathbf{p} \mathbf{T}_0^2}{2} \mathbf{e}^{\frac{\mathbf{p} \mathbf{T}_0^2}{2}}$. Після цього замінимо в означенні множин $\mathbf{D}_j^0$, $\mathbf{D}_j^1$, $\mathbf{D}_j^c$, а також в означенні норми $\mathbf{v}$ та $\mathbf{v}^1$ всі входження добутку $\mathbf{R} \mathbf{T}$ на $\mathbf{h}(\mathbf{p})$. Вибрана норма, а також області $\mathbf{D}_j^0$, $\mathbf{D}_j^1$, $\mathbf{D}_j^c$ не будуть залежати від $\mathbf{T}$. Тоді згідно з лемами 3, 4, при достатньо малих $\mathbf{T} > 0$, $\mathbf{p} > 0$ і достатньо великому $\mathbf{H} > 0$ оператор $\dot{\mathbf{S}}\dot{\mathbf{S}}$ буде стиском і, отже, система (1)-(3) має єдиний гладкий розв'язок для деякого $\mathbf{T} = \mathbf{T}^1$ та деякого $\dot{\mathbf{L}} = \dot{\mathbf{L}}(1)$.

Теорема. При зроблених припущеннях гладкий розв'язок задачі (1)-(8) існує та єдиний у всьому прямокутнику $\Pi(\mathbf{T}_0)$ і, крім того, є неспадною функцією за аргументом $\mathbf{x}$.

Доведення. Розв'язок задачі (1)-(3) у прямокутнику $\Pi(\mathbf{T}_0)$ будуватимемо кроками за $\mathbf{t}$. Якщо $\mathbf{T}^1 < \mathbf{T}_0$, то переносимо початковий момент часу в

точку $t = T^1$, за початкову умову $\alpha(x)$ приймаємо значення розв'язку $u(x, t)$, отриманого на попередньому кроці в точці T^1 (роль константи Ліпшиця A_1 буде відігравати величина $L_1(1)$, а константи Ліпшиця A_1^1 - величина $L^1(1)$), а за $c_j(2)$ приймемо значення функції $s_j(t; w)$ при $t = T^1$. Застосовуючи описаний метод, одержимо розв'язок системи (25)-(28) для деяких T^2 , $L^1(2)$ при тих самих P, P_0, P^1, P_0^1 . Якщо $T^1 + T^2 < T_0$, то виконуємо таку саму процедуру знову і т.д. Покажемо, що за таких припущень можна вибрати такі значення T^n і $L(n)$, щоб ряд $\sum_{n=1}^{\infty} T^n$ розбігався, а отже, тоді побудований розв'язок задачі (25)-(28) буде існувати для як завгодно великого T_0 .

Із проведених викладок отримуємо, що на n -му кроці повинні виконуватися такі нерівності:

$$\begin{aligned}
 & h(p) < \delta; L(n)T^n < 1; T^n \Lambda_1 \Lambda < \Lambda_0; 2\Lambda T^n < 1; L^1(n)T^n < 1; \kappa < 1; \\
 & [b_{13}^1(1 + \max\{1, \Lambda\})(\max\{L_x(n-1); L_x^1(n-1); b_4^1(1 + L(n))\} + b_1^1) + F + L_t^B + \\
 & + N_{13})T^n + N_{55}2h(p) + N_{55}H^{-1}(\kappa + b_{13}^1(1 + L(n))T^n + b_{14}^1 + L_x^1(n-1)\dot{M}_1T^n + \\
 & + N_{55}2h(p) + R_2 + Q_2 + N_{55}H^{-1}) + b_{14}^1\kappa + L_x^1(n-1)\dot{M}_1T^n\kappa + (R_2 + Q_2)\kappa] < 1; \\
 & L_x^1(n) \geq \max\{L_x^1(n-1); b_7^1\Lambda L_x(n)\} + b_{12}^1; \\
 & L_t^1(n) \geq \Lambda L_x^1(n) + N_{13}; \\
 & L_x(n) \geq L_x(n-1) + \Lambda_0^{-1}\Gamma_1 + F_1T_0 + F_2 + F\Lambda_0^{-1} + Q; \\
 & L_t(n) \geq \Lambda L_x(n) + F + L_t^B; \\
 & 1Q_2 < 1; L_t^B = \frac{B_1 + RQ + 1Q_3}{1 - 1Q_2}; \\
 & B + 2Qh(p) + \max_x M(x)P_0H^{-1} \leq P; (L_x(n-1)\Lambda + \Gamma_1 + F)T^n \leq P; \\
 & B^1 + RQ + 2Q^1h(p)b_{15}^1 + b_{16}^1H^{-1} \leq P^1; \\
 & (L_x^1(n-1)b_{17}^1 + b_{18}^1 + b_{19}^1(1 + L(n))T^n \leq P^1, \tag{92}
 \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
 & b_{17}^1 = \Lambda + \Lambda^2\Lambda_0^{-1}; \\
 & b_{18}^1 = A^1\Lambda(1 + mP_0^1 + Qn) + F^1 + F^1(P_0^1m + Qn) + A^1\Lambda_0^{-1}\Lambda^1\Lambda(1 + mP_0^1 + Qn); \\
 & b_{15}^1 = 1 + m(F + \Lambda P_0^1) + nP_0^1e^{H^1}; b_{16}^1 = (1 + m(F + \Lambda P_0^1))\max_x M(x)P_0 + Q^1nP_0^1; \\
 & b_{19}^1 = \Lambda_0^{-1}(\Gamma_1^1 + F_1^1) + A^1\Lambda_0^{-1}\Lambda_1^1.
 \end{aligned}$$

Приймемо тепер

$$\begin{aligned} L_x(0) &= A_1; L_x(n) = A_1 + n(\Lambda_0^{-1}\Gamma_1 + F_1T_0 + F_2 + F\Lambda_0^{-1} + Q) = A_1 + nb_{19}^1; \\ L_x^1(0) &= A_1^1, \end{aligned} \quad (93)$$

де $b_{19}^1 = \Lambda_0^{-1}\Gamma_1 + F_1T_0 + F_2 + F\Lambda_0^{-1} + Q$.

Оцінімо праву частину нерівності для $L_x^1(n)$, використовуючи (93)

$$\begin{aligned} \max\{L_x^1(n-1); b_7^1\Lambda L_x(n)\} + b_{12}^1 &= \max\{L_x^1(n-1); b_7^1\Lambda(A_1 + nb_{19}^1)\} + b_{12}^1 = \\ &= \max\{(\max\{L_x^1(n-2); b_7^1\Lambda(A_1 + (n-1)b_{19}^1)\} + b_{12}^1); b_7^1\Lambda(A_1 + nb_{19}^1)\} + b_{12}^1 \leq \\ &\leq \max\{\max\{L_x^1(n-2); b_7^1\Lambda(A_1 + (n-1)b_{19}^1)\}; b_7^1\Lambda(A_1 + nb_{19}^1)\} + 2b_{12}^1 \leq \\ &\leq \max\{\max\{L_x^1(n-2); b_7^1b_{19}^1\Lambda(n-1)\}; b_7^1b_{19}^1\Lambda n\} + 2b_7^1\Lambda A_1 + 2b_{12}^1 \leq \\ &\leq \max\{L_x^1(n-2); b_7^1b_{19}^1\Lambda n\} + 2b_7^1\Lambda A_1 + 2b_{12}^1 \leq K \leq \max\{A_1^1; b_7^1b_{19}^1\Lambda n\} + \\ &\quad + nb_7^1\Lambda A_1 + nb_{12}^1 \leq A_1^1 + nb_{20}^1, \end{aligned} \quad (94)$$

де $b_{20}^1 = b_7^1b_{19}^1\Lambda + b_7^1\Lambda A_1 + b_{12}^1$.

Тоді, враховуючи (94), прийемо

$$L_x^1(n) = A_1^1 + nb_{20}^1. \quad (95)$$

На підставі нерівностей $\kappa < 1$, $T^n L(n) < 1$, $L^1(n)T^n < 1$ (звідси випливають нерівності $T^n L(n-1) < 1$, $L^1(n-1)T^n < 1$, оскільки $L(n) \geq L(n-1)$, $L^1(n) \geq L^1(n-1)$), з оцінок (92), (93), (95), а також вважаючи, що виконується нерівність $H^{-1} < \frac{1}{3Q_2}$, отримаємо

$$\begin{aligned} h(p) &< \delta; L(n)T^n < 1; L^1(n)T^n < 1; T^n \Lambda_1 \Lambda < \Lambda_0; 2\Lambda T^n < 1; 1Q_2 < 1; \\ \{b_{13}^1(1 + \max\{1, \Lambda\})(\max\{L_x(n-1); L_x^1(n-1); b_4^1(1 + L(n))\} + b_1^1) + F + L_t^B + \\ &\quad + N_{13}\}T^n + N_{55}2h(p) + N_{55}H^{-1}\}b_{21}^1 + b_{22}^1\kappa < 1; \\ B + 2Qh(p) + \max_x M(x)P_0H^{-1} &\leq P; (L_x(n-1)\Lambda + \Gamma_1 + F)T^n \leq P; \\ B^1 + RQ + 2Q^1h(p)b_{15}^1 + b_{16}^1H^{-1} &\leq P^1; \\ (L_x^1(n-1)b_{17}^1 + b_{18}^1 + b_{19}^1(1 + L(n)))T^n &\leq P^1, \end{aligned} \quad (96)$$

де $b_{21}^1 = 1 + b_{13}^1(T_0 + 1) + b_{14}^1 + M_1 + 2N_{55}\delta + R_2 + Q_2 + N_{55}\frac{1}{3Q_2}$;

$b_{22}^1 = b_{14}^1 + M_1 + R_2 + Q_2$.

Вважаємо, що $h(p)$ і H можна вибрати так, щоб, крім нерівностей

$$h(p) < \delta; B + 2Qh(p) + \max_x M(x)P_0H^{-1} \leq P,$$

$$2Q_2 h(p) < \frac{1}{3}; Q_2 H^{-1} < \frac{1}{3}, \quad (97)$$

виконувались також оцінки

$$\begin{aligned} b_{22} \kappa &< \frac{1}{4}; b_{21} N_{55} H^{-1} < \frac{1}{4}; 2b_{21} N_{55} h(p) < \frac{1}{4}; \\ B^1 + RQ + 2Q^1 h(p) b_{15} + b_{16} H^{-1} &\leq P^1. \end{aligned} \quad (98)$$

Для того, щоб справджувалась умова $\kappa < 1$, крім нерівності (97), необхідно вимагати виконання оцінки

$$T^n < \frac{1}{3(c_1 + M \Lambda_2 (A_1 + (n-1)c_2))}. \quad (99)$$

На підставі (93), (95) решта нерівностей з формули (96) матимуть вигляд

$$\begin{aligned} T^n &< \frac{1}{\max\{1, \Lambda\}(A_1 + nb_{19}) + F + L_t^B}; T^n < \frac{\Lambda_0}{\Lambda_1 \Lambda}; T^n < \frac{1}{2\Lambda}; \\ T^n &< \frac{1}{\max\{1, \Lambda\}(A_1^1 + nb_{20}) + N_{13}}; T^n \leq \frac{P}{(A_1 + (n-1)b_{19})\Lambda + \Gamma_1 + F}; \\ T^n &\leq P^1 / [b_{17}(A_1^1 + (n-1)b_{20}) + b_{18} + b_{19}'(1 + \max\{1, \Lambda\}(\max\{A_1; A_1^1\} + \\ &\quad + n(b_{19} + b_{20}))) + F + N_{13} + L_t^B]; \\ T^n &< 1 / [4b_{13}b_{21}(1 + \max\{1, \Lambda\}(\max\{(A_1 + (n-1)b_{19}); (A_1^1 + (n-1)b_{20})\}; \\ &\quad [b_4(1 + \max\{1, \Lambda\}(\max\{A_1; A_1^1\} + n(b_{19} + b_{20}))) + F + N_{13} + L_t^B]) + \\ &\quad + b_1) + F + N_{13} + L_t^B]. \end{aligned} \quad (100)$$

Отож, T^n , враховуючи (99), (100), повинно задовольняти умови

$$T^n \leq \frac{b_{23}}{A_1 + A_1^1 + nb_{24} + b_{25}}; T^n < \frac{1}{3(c_1 + M \Lambda_2 (A_1 + (n-1)c_2))}, \quad (101)$$

де

$$\begin{aligned} b_{23} &= \max \left\{ \frac{\Lambda_0}{\Lambda_1 \Lambda}; \frac{1}{2\Lambda}; \frac{1}{\max\{1, \Lambda\}}; \frac{P}{\Lambda}; \frac{P^1}{b_{26}}; \frac{1}{b_{27}} \right\}; \\ b_{24} &= \max \left\{ \frac{b_{17}b_{20} + b_{19}' \max\{1, \Lambda\}(b_{19} + b_{20})}{b_{26}}; b_{19} + b_{20} \right\}; \\ b_{26} &= b_{17} + b_{19}' \max\{1, \Lambda\}; \\ b_{25} &= \max \left\{ \frac{F + L_t^B}{\max\{1, \Lambda\}}; \frac{b_{19}'}{\max\{1, \Lambda\}}; \frac{\Gamma_1 + F}{\Lambda} - b_{19}; \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{b_{18}' + b_{19}' + F + N_{13} + L_t^B - b_{17}'b_{20}'}{b_{26}'}; \\ \frac{4b_{13}'b_{21}'(1 + \max\{1, \Lambda\}(b_{11}' + (F + N_{13} + L_t^B))\max\{1, b_{14}'\})}{b_{27}'} + \frac{F + N_{13} + L_t^B}{b_{27}'} \Big\}; \\ b_{27}' = \frac{1}{4b_{13}'b_{21}'(\max\{1, \Lambda\})^2 \max\{1, b_{14}'\}}.$$

Отже, на підставі нерівностей (101) остаточно отримуємо, що замість T^n можна взяти величину

$$T^n = \frac{b_{28}'}{A_1 + A_1^1 + nb_{29}' + b_{30}'}, \quad (102)$$

$$\text{де } b_{28}' = \max\{b_{23}'; \frac{1}{3M\Lambda_2}\}; \quad b_{29}' = \max\{b_{24}'; c_2\}; \quad b_{30}' = \max\{b_{25}'; \frac{c_1}{M\Lambda_2} - c_2\}.$$

Тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty} T^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{28}'}{A_1 + A_1^1 + nb_{29}' + b_{30}'} = +\infty. \quad (103)$$

Умова (103) гарантує існування побудованого розв'язку у всьому прямокутнику $\Pi(T_0)$. Глобальну єдиність розв'язку доводять аналогічно, як в [7,8]. Отож, теорему доведено.

-
1. Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. — К., 1984.
 2. Верецагин И. К., Кокин С. М., Селезнев В. А. Старение электролюминофоров // Известия АН СССР. Физика. — 1985. — 49, № 10. — С. 1940-1943.
 3. Trustrum K. Rotating and stratified fluid flow // J. Fluid Mech. — 1964. — Vol. 19. — P. 415–432.
 4. Рейнер М. Реология. М., 1965.
 5. Turo J. Global solvability of the mixed problem for first order functional partial differential equations // Annales polonici mathematici. — 1991. — Vol. LII. — P. 231–238.
 6. Turo J. Generalized solutions to functional partial differential equations of the first order // Zeszyty naukowe Politechniki Gdanskiej, Matymatyka. — 1988. — XIV, № 427. — P. 3–99.

7. *Мышкис А.Д., Филимонов А.М.* О глобальной непрерывной разрешимости смешанной задачи для одномерных гиперболических систем квазилинейных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 2008. – 44, № 3. – С. 394–407.
8. *Андрусяк Р.В., Кирилич В.М., Мышкис А.Д.* Локальная и глобальная разрешимости квазилинейной гиперболической задачи Стефана на прямой. // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42. – № 4. – С. 489–503.
9. *Bassanini P., Turo J.* Generalized solutions to free boundary problems for hyperbolic systems of functional partial differential equations // Annali di Matematica pura ed applicata (IV). V. CLVI (1990). P. 211–230.

GLOBAL DIFFERENTIABLE SOLVABILITY OF THE
HYPERBOLIC QUASILINEAR VALLEE-POUSSIN PROBLEM
WITH FREE BOUNDARY

Volodymyr Kyrylych¹, Andrij Filimonov²

¹ *Ivan Franko Lviv National University,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine*

² *Moscow State University of Railway Engineering,
Obrazcova Str., 15 127994 Moscow, Russia*

By the methods of characteristics and contracted mappings, a global classical solvability of generalized Vallee-Poussin problem with unknown internal boundaries for degenerate quasilinear hyperbolic system of equations of the first order was established.

Key words: hyperbolic systems, method of characteristics, contracted mappings, Vallee-Poussin problem.

Для А. Філімонова робота підтримана РФФД, грант №06-01-00356а.

Стаття надійшла до редколегії 23.06.2008
Прийнята до друку 19.11.2008

УДК 539.3.

ОПТИМІЗАЦІЯ РЕЖИМІВ ТЕРМООБРОБКИ ЕЛЕМЕНТІВ СКЛЯНИХ КОНСТРУКЦІЙ ЗА ПІДВИЩЕНИХ ТЕМПЕРАТУР

Микола ГАЧКЕВИЧ¹, Олександр ГАЧКЕВИЧ^{1,2}, Євген ІРЗА¹,
Зигмунт КАСПЕРСЬКИЙ², Богдан ТРИЦЬ³

¹Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 36 79053 Львів, Україна

²Політехніка Опольська, вул. Станіслава Миколайчука, 5
45-271 Ополь, Польща

³Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Запропоновано чисельну методику побудови оптимальних за напруженнями і деформаціями режимів високотемпературної термообробки елементів скляних конструкцій. Необхідність розгляду такого типу задач зумовлена виникненням у процесі цільових термообробок виробів із скла підвищених температур та значних рівнів напружень і деформацій, які можуть перевищувати допустимі і приводити до погіршення експлуатаційних властивостей цих виробів або їхнього руйнування.

Ключові слова: оптимізація, термообробка.

Запропоновано чисельну методику побудови оптимальних за напруженнями і деформаціями режимів високотемпературної термообробки елементів скляних конструкцій. Необхідність розгляду такого типу задач зумовлена виникненням у процесі цільових термообробок виробів із скла підвищених температур та значних рівнів напружень і деформацій, які можуть перевищувати допустимі і приводити до погіршення експлуатаційних властивостей цих виробів або їхнього руйнування.

Приймаємо, що скляне тіло займає область евклідового простору $\mathbf{R}^3$ і обмежене неперевною за Ліпшицем поверхнею Γ . У просторі введена криволінійна ортогональна система координат $Ox^1x^2x^3$. Тіло піддається нагріву зовнішнім середовищем з температурою t_c через частину поверхні Γ_t і тепловим потоком q через частину поверхні Γ_q ($\Gamma_t \cup \Gamma_q = \Gamma$). В тілі діють розподілені джерела тепла потужністю Q . Максимальна температура нагрітого тіла є t^* . Потім тіло охолоджується шляхом конвективного теплообміну з зовнішнім середовищем з температурою t_c до стану з максимальною температурою t_k . На частині Γ_u загальної поверхні тіла Γ задано переміщення $\bar{u} = (u_1^0, u_2^0, u_3^0)$, а на частині Γ_σ - силове навантаження, яке характеризується вектором $\bar{p} = (p^1, p^2, p^3)$, $(\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma = \Gamma)$.

© Гачкевич М., Гачкевич О., Ірза Є. та ін., 2008

Задачу формулюємо в квазістатичній постановці і в переміщеннях (з врахуванням залежності теплофізичних характеристик скла від температури).

За прийнятих припущень розподіл температури в тілі описується рівнянням теплопровідності [1]:

$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = \nabla(\lambda \nabla t) + Q \quad (1)$$

за таких граничних і початкових умов:

$$\left[\lambda \frac{\partial t}{\partial n} + \alpha(t - t_c) \right]_{\Gamma_t} = 0; \quad \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial n} + q \right]_{\Gamma_q} = 0; \quad t(M, 0) = t_0. \quad (2)$$

Приріст компонент тензора повної деформації становитиме [1]

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^t + d\varepsilon_{ij}^c + d\varepsilon_{ij}^{ost}, \quad (3)$$

де $d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{9K} g_{ij} d\sigma + \frac{1}{2G} dS_{ij}$ - приріст компонент тензора пружної деформації в діапазоні температур менших за температуру склування t_g (σ, S_{ij} - компоненти діватора і шарового тензорів напружень); $d\varepsilon_{ij}^t = \alpha_t g_{ij} dt$ - приріст компонент тензора термічної деформації; $d\varepsilon_{ij}^c = \frac{1}{9K} g_{ij} d\sigma + \frac{1}{2G\eta} S_{ij} d\tau$ - приріст компонент тензора деформації в'язкості в діапазоні температур більших за температуру склування t_g ; $d\varepsilon_{ij}^{ost} = -\alpha_t g_{ij} d\Phi$ - приріст компонент тензора залишкової деформації при досягненні температури склування t_g .

Крім співвідношень (1) - (3), в області $\bar{\Omega}$ повинні виконуватися рівняння рівноваги

$$\nabla_j \sigma^{ij} + F^i = 0 \quad (4)$$

і механічні граничні умови

$$(n_j \sigma^{ij} - p^i)_{\Gamma_\sigma} = 0; u_i|_{\Gamma_u} = u_i^0; (i = 1, \dots, 3). \quad (5)$$

Обмежимося випадком малих деформацій. Зв'язок між компонентами тензора деформацій $\hat{\varepsilon}$ і вектором переміщень $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ приймаємо лінійним

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i). \quad (6)$$

Співвідношення (1) - (6), записані в приростах, становлять повну систему рівнянь для визначення температурного поля, вектора переміщень, тензорів

деформацій і напружень при заданих значеннях температури навколишнього середовища t_c , теплового потоку q , потужності внутрішніх джерел тепла Q і зовнішнього навантаження $\bar{p}$.

Ставиться задача оптимізації за напруженнями та деформаціями режимів температурного навантаження конструкції при прийнятих обмеженнях на температуру $t(M, \tau)$, інтенсивності напружень і деформацій, які мають вигляд

$$t_0 \leq t(M, \tau) \leq t^*, \sigma_{\text{оhk}}(M, \tau) \leq \sigma_d(t), \varepsilon_{\text{оhk}}(M, \tau) \leq \varepsilon_d, M \in \bar{\Omega}, \tau \in [0, \tau_k]. \quad (7)$$

Обмеження (7) відображають існуючі умови в технології термообробки.

За критерій оптимальності приймаємо мінімум функціонала

$$F = \max_{M, \tau} (\sigma_d(t) - \sigma(M, \tau)), M \in \bar{\Omega}, \tau \in [0, \tau^*], \quad (8)$$

при нагріванні до максимальної температури і мінімум функціонала

$$F = \max_M (\sigma_d^{\text{ost}} - \sigma_{\text{оhk}}^{\text{ost}}(M)), M \in \Gamma, \tau \in [\tau^*, \tau_k] \quad (9)$$

при охолодженні до кінцевої температури.

Тут $\sigma_d(t)$ - допустима інтенсивність напружень; ε_d - допустима інтенсивність деформацій.

Функціонали (8), (9) характеризують міцність розглядуваних конструкцій згідно з четвертою теорією міцності. Функціонал (8) характеризує максимальне відхилення інтенсивності напружень від заданої величини (умова забезпечення міцності конструкції в кожен момент часу протягом етапу нагріву), а функціонал (9) - максимальне відхилення інтенсивності залишкових напружень на поверхні конструкції від заданої величини.

Функцією управління є температура зовнішнього середовища $t_c(\tau)$ (зокрема температура на поверхні) або густина теплового потоку $q(\tau)$. Потужність джерел тепла Q вважаємо заданою.

У такому формулюванні оптимізація по напруженнях і деформаціях режимів термообробки полягає в мінімізації функціоналів (8), (9) при в'язях (1) - (6) і обмеженнях (7).

Важливою в схемі оптимізації є побудова розв'язку прямої задачі, яка охоплює відповідні задачі теплопровідності і термов'язкопружності. Оскільки геометрична конфігурація області буває часто досить складною, а система розглядуваних диференціальних рівнянь нелінійна, то, розв'язуючи прямі задачі, використовуємо метод зважених нев'язок у поєднанні з кінцево-елементним підходом [2]. Системи диференціальних рівнянь (1) - (6) піддається просторово-часовій дискретизації і зводяться до системи нелінійних алгебричних рівнянь, які можна записати у вигляді

$$[K_T] \{T\} = \{F_T\}, [K_{U,T}] \{U\} = \{F_{U,T}\}. \quad (10)$$

Тут $[K_T]$, $[K_{U,T}]$ - відповідні матриці жорсткості; $\{F_T\}$, $\{F_{U,T}\}$ - вектори навантаження [2].

Нелінійні системи алгебричних рівнянь (10) розв'язують за допомогою методу простої ітерації [2].

Розв'язок сформульованої екстремальної задачі будують на основі принципу поетапної параметричної оптимізації [3]. В рамках запропонованого підходу мінімізація функціоналів (8), (9) зводиться до задачі нелінійного програмування з пошуку мінімуму відповідної функції $J = J(h_1, \dots, h_n)$, аргументами якої є значення h_i функції управління h в дискретні моменти часу τ_s . Отож, оптимізація по напруженнях і деформаціях режимів термообробки елементів скляних конструкцій зводиться до розв'язання задачі на умовний екстремум функції J при зв'язках (10) і обмеженнях (7). Розв'язок задачі будують за допомогою методу прямого пошуку за Хуку і Джівсом [3].

Запропонована методика використана при побудові оптимальних теплових режимів процесу гартування вертикально підвішеної скляної пластини товщини $h = 6$ мм, яка виготовлена зі скла С-93.

Процес гартування скляних пластин відбувається в два етапи. На першому етапі пластина нагрівається нагрівниками, які мають температуру $t_c(\tau)$ і коефіцієнт тепловіддачі α (коефіцієнт α враховує теплообмін з випромінюванням), від початкового стану з температурою t_0 до моменту, коли на її поверхнях досягається температура t^* , яка вища за температуру склування t_g . На другому етапі пластина охолоджується повітряним потоком з температурою t_c і коефіцієнтом тепловіддачі $\alpha(\tau)$ від досягнутого стану з температурою поверхонь t^* до стану з температурою t_k на серединній поверхні пластини, яка є нижчою за температуру склування.

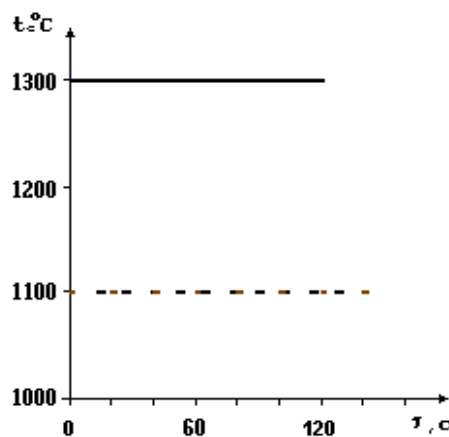


Рис. 1.

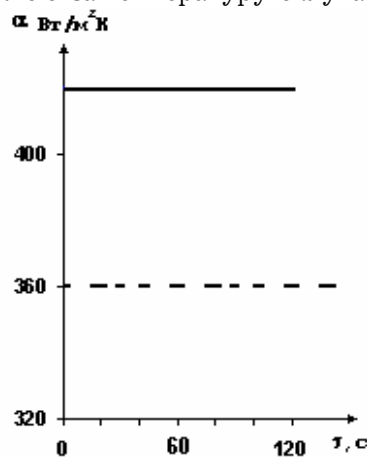


Рис. 2.

Процес нагріву пластини регулюється зміною температури нагрівача $t_c(\tau)$ а процес охолодження коефіцієнтом тепловіддачі $\alpha(\tau)$. Мета процесу

гартування – отримати необхідний рівень стискаючих залишкових напружень.

На рис. 1 суцільною і штрихпунктирними лініями показано два режими нагріву (відповідно оптимальний і початковий) скляної пластини, а на

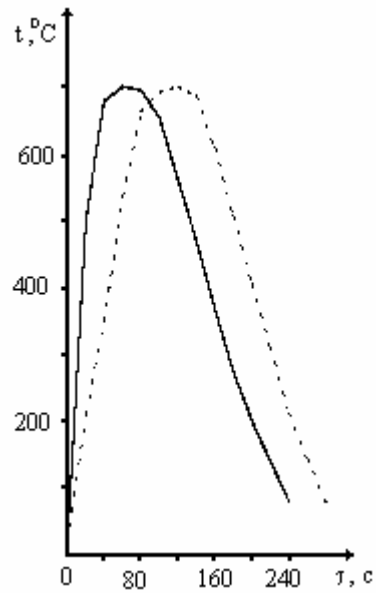


Рис. 3.

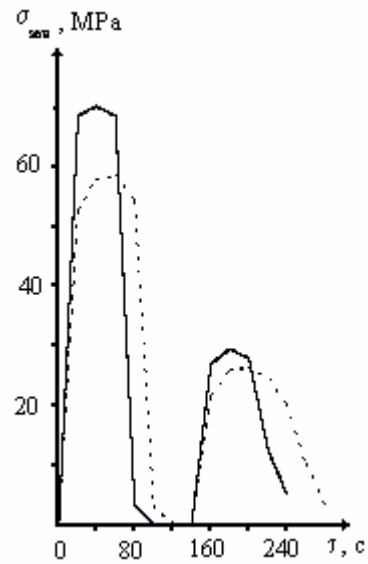


Рис. 4.

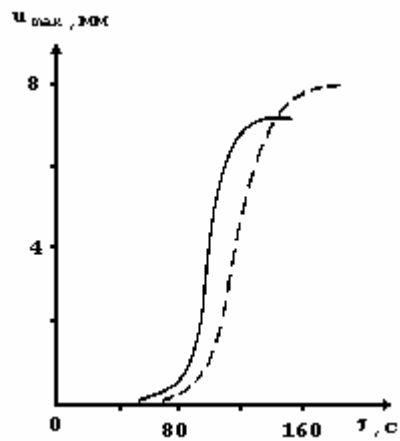


Рис. 5.

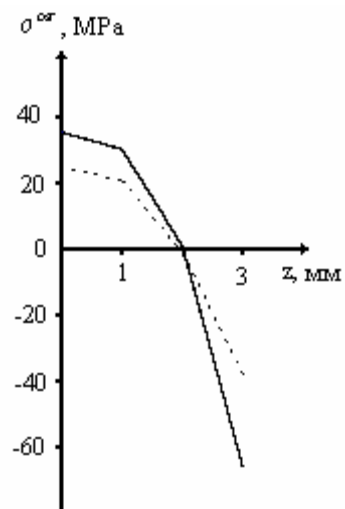


Рис. 6.

рис. 2 – режими охолодження. Кожному з розглянутих режимів нагріву - охолодження відповідає свій закон зміни температури на зовнішній поверхні рис.3 і максимальних розтягуючих напружень рис.4. Максимальні видовження пластини під власною вагою в процесі термообробки зображено на рис.5. Після завершення процесу термообробки в пластині виникають залишкові напруження, які суттєво залежать від вибраного режиму (див. рис. 6).

З аналізу отриманих результатів випливає, що за оптимального режиму скорочується тривалість процесу гартування при забезпеченні заданого рівня залишкових напружень, та виконанні наявних обмежень.

-
1. Гачкевич О.Р., Будз С.Ф., Ірза Є.М., Пеер-Касперська А. Визначення напружено-деформованого стану скляної сферичної оболонки при локальному нагріві // Вісник Донецького університету. 2002, № 2. Серія А. С. 76–78.
 2. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация, М., 1986.
 3. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М., 1975.

THERMAL PROCESSING OPTIMIZATION OF GLASS ELEMENTS AT HIGH TEMPERATURE

Mykola Gachkevych¹, Oleksandr Hachkevych^{1,2},
Yevgen Irza¹, Zygmunt Kasperski², Bohdan Trishch³

¹*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
Naukova Str., 3b 79053 Lviv, Ukraine*

²*Technical University of Opole,
Stanisława Mikolajchuka Str., 5 45-271 Opole, Poland*

³*Ivan Franco National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine*

Numerical approach to the development stress and strain optimum regimes of high temperature heating of glass elements is proposed. The investigations are motivated by considerable levels of stresses and strains during thermal processing of glass elements, the values of these mechanical properties possibly exceeding permissible levels and thus leading to degrading glass elements operational characteristics and even their failure.

Key words: optimization, thermal treatment.

Стаття надійшла до редколегії 20.11.2007
Прийнята до друку 19.11.2008

УДК 517.95

ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ НА НЕСКІНЧЕННОСТІ

Галина ТОРГАН

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Досліджено поведінку узагальненого розв'язку мішаної задачі для нелінійного
параболічного рівняння четвертого порядку при $t \rightarrow \infty$.

Ключові слова: мішана задача, параболічне рівняння.

Параболічні рівняння

$$u_{tt} = \operatorname{div} \sigma(\nabla u) + \Delta u_t - \delta^2 \Delta^2 u,$$

де $\sigma \geq 0$, $0 < \delta < 1$, моделюють процеси фазового переходу у в'язкопружних середовищах з капілярністю. Деякі задачі для таких нелінійних рівнянь досліджено в [2]–[3], для певних квазілінійних параболічних рівнянь четвертого порядку в [4]–[7].

У цій праці одержано поведінку узагальненого розв'язку нелінійного параболічного рівняння четвертого порядку при $t \rightarrow \infty$.

Нехай $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ – обмежена область з межею $\partial\Omega \in C^1$, $Q = \Omega \times (0, +\infty)$, $S = \partial\Omega \times (0, +\infty)$, $Q_{t_1, t_2} = \Omega \times (t_1, t_2)$, $S_{t_1, t_2} = \partial\Omega \times (t_1, t_2)$, $0 \leq t_1 < t_2 \leq +\infty$.

В області Q розглянемо задачу для рівняння

$$u_{tt} + \sum_{i,j,s,l=1}^n (a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j})_{x_s x_l} - \sum_{i=1}^n (a_i(x, t) | u_{tx_i} |^{p-2} u_{tx_i})_{x_i} + \\ + c_0(x, t) | u_t |^{p-2} u_t = f(x, t), \quad (1)$$

з початковими умовами

$$u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), x \in \Omega, \quad (2)$$

і крайовими умовами

$$u|_S = 0, \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_S = 0, \quad (3)$$

де ν – зовнішня нормаль до поверхні S , $p > 2$, $q > 2$.

Введемо простори

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p} < \infty \right\},$$

$$W_0^{1,q}(\Omega) = \left\{ u : u_{x_i} \in L^q(\Omega), u|_{\partial\Omega} = 0, i \in \{1, \dots, n\} \right\}$$

з відповідними нормами

$$\|u\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_{\Omega} |u|^p dx, \quad \|u\|_{W_0^{1,q}(\Omega)}^q = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^q dx;$$

$$L_{loc}^p((0, +\infty); L^p(\Omega)) = \left\{ u : u \in L^p((0, T_1); L^p(\Omega)) \forall T_1, 0 < T_1 < +\infty \right\}.$$

Припустимо виконання таких умов:

$$(A) \quad D^{\alpha} a_{ij}^{sl} \in L^{\infty}(\Omega), a_i, a_{it} \in L^{\infty}(Q), D^{\beta} a_i(\cdot, 0) \in L^{\infty}(\Omega), i, j, s, l \in \{1, \dots, n\},$$

$$\text{де } D^k = \frac{\partial^{|k|}}{\partial^{k_1} x_1 \dots \partial^{k_n} x_n}, |k| = k_1 + \dots + k_n, |\alpha| \leq 2, |\beta| \leq 1, a_i(x, t) \geq A_1 > 0$$

для майже всіх $(x, t) \in Q, i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x) \xi_{ij} \xi_{sl} \geq A_2 \sum_{i,j=1}^n |\xi_{ij}|^2, A_2 > 0,$$

для майже всіх $x \in \Omega$ і всіх $\xi_{ij} \in \mathbf{R}$ таких, що $\xi_{ij} = \xi_{ji}$,

$$a_{ij}^{sl}(x) = a_{sl}^{ij}(x)$$

для майже всіх $x \in \Omega$;

$$(C) \quad c_0, c_{0t} \in L^{\infty}(Q),$$

$$c_0(x, t) \geq C_0 > 0$$

для майже всіх $(x, t) \in Q$.

Означення. Узагальненим розв'язком задачі (1)-(3) називаємо функцію $u \in L_{loc}^{\infty}([0, \infty); H_0^2(\Omega))$ таку, що $u_t \in L_{loc}^{\infty}([0, \infty); H_0^2(\Omega)) \cap L_{loc}^q([0, \infty); W_0^{1,q}(\Omega)) \cap L_{loc}^p([0, \infty); L^p(\Omega))$, $u_{tt} \in L_{loc}^{\infty}([0, \infty); L^2(\Omega))$, яка задовольняє початкові умови (2) та рівність

$$\int_{Q_T} [u_{tt} v + \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} v_{x_s x_l} + \sum_{i=1}^n a_i(x, t) |u_{tx_i}|^{q-2} u_{tx_i} v_{x_i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^n a_i(x, t) |u_{tx_i}|^{q-2} u_{tx_i} v_{x_i} + c_0(x, t) |u_t|^{p-2} u_t v - f(x, t) v] dx dt = 0 \quad (4)$$

для всіх $\tau \in (0, +\infty)$ і $\mathbf{v} \in L_{loc}^2([0, \infty); \mathbf{H}_0^2(\Omega)) \cap L_{loc}^q([0, \infty); \mathbf{W}_0^{1,q}(\Omega)) \cap L_{loc}^p([0, \infty); \mathbf{L}^p(\Omega))$.

Введемо простір $\mathbf{W}_0^{2,r_0}(\Omega)$, де $r_0 = \frac{2n(q-1)}{n+2q-4}$ при $n > 2$ і $r_0 = 2 + \sigma_0$, $\sigma_0 > 0$ при $n \in \{1, 2\}$.

Теорема 1. Нехай виконуються умови (A), (C), $\mathbf{f} \in L^{r'}((0, T); \mathbf{L}^{r'}(\Omega))$, $\mathbf{f}_t \in L^2((0, T); \mathbf{L}^2(\Omega))$, де $\mathbf{r} = \min\{p, q\}$, $T > 0$, $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}_0^2(\Omega) \cap \mathbf{H}^4(\Omega)$, $\mathbf{u}_1 \in \mathbf{W}_0^{2,r_0}(\Omega) \cap \mathbf{L}^{2p-2}(\Omega)$, $p > 2$, $q > 2$. Тоді в області $Q_{0,T}$ існує узагальнений розв'язок задачі (1)-(3).

Доведення цієї теореми цілком подібне до доведення теореми 1.1 [1, с. 167] з використанням методів Гальоркіна та монотонності.

Введемо функцію

$$\mathbf{y}(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \left[\mathbf{u}_t^2 + \sum_{i,j,s,l=1}^n \mathbf{a}_{ij}^{sl}(\mathbf{x}) \mathbf{u}_{x_i x_j} \mathbf{u}_{x_s x_l} \right] e^{-\mu t} d\mathbf{x}, \quad \mu > 0.$$

Згідно з означенням $\mathbf{y} \in C([0, \infty))$.

Теорема 2. Нехай виконуються умови теореми 1 і, крім того,

$$\int_{Q_{t,t+1}} |\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)|^{r'} e^{-\mu t} d\mathbf{x} dt \leq M_1$$

для довільного $t > 0$ і деякого $\mu > 0$, $\mathbf{u}$ – узагальнений розв'язок задачі (1)-(3). Тоді існує така стала M_2 , що $\mathbf{y}(t) \leq M_2$,

$$\int_{Q_{t,t+1}} \left[\sum_{i=1}^n |\mathbf{u}_{x_i}|^q + |\mathbf{u}_t|^p \right] e^{-\mu t} d\mathbf{x} dt \leq M_2 \quad \text{для всіх } t \geq 0.$$

Доведення. Для доведення цієї теореми використаємо методику [1, с. 520].

Розіб'ємо $[0, +\infty)$ на проміжки $[j-1, j]$, $j \in \mathbf{N}$ і нехай $\mathbf{t}_j \in [j-1, j]$ таке, що $\mathbf{y}(\mathbf{t}_j) = \sup_{t \in [j-1, j]} \mathbf{y}(t)$. З рівняння (1) випливає, що для довільних τ і t , $\tau < t$ виконується рівність

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \left[\mathbf{u}_t^2 + \sum_{i,j,s,l=1}^n \mathbf{a}_{ij}^{sl}(\mathbf{x}) \mathbf{u}_{x_i x_j} \mathbf{u}_{x_s x_l} \right] e^{-\mu t} d\mathbf{x} - \frac{1}{2} \int_{\Omega_\tau} \left[\sum_{i,j,s,l=1}^n \mathbf{a}_{ij}^{sl}(\mathbf{x}) \mathbf{u}_{x_i x_j} \mathbf{u}_{x_s x_l} + \right. \\ & \left. + \mathbf{u}_\tau^2 \right] e^{-\mu \tau} d\mathbf{x} + \frac{\mu}{2} \int_{Q_{\tau,t}} \left[\mathbf{u}_t^2 + \sum_{i,j,s,l=1}^n \mathbf{a}_{ij}^{sl}(\mathbf{x}) \mathbf{u}_{x_i x_j} \mathbf{u}_{x_s x_l} \right] e^{-\mu t} d\mathbf{x} dt + \end{aligned} \quad (5)$$

$$+ \int_{Q_{\tau,t}} \left[\sum_{i=1}^n a_i(x,t) |u_{tx_i}|^q + c_0(x,t) |u_t|^p \right] e^{-\mu t} dx dt = \int_{Q_{\tau,t}} f(x,t) u_t e^{-\mu t} dx dt.$$

Враховуючи введену функцію y , рівність (5) можемо записати у вигляді

$$\begin{aligned} y(t) - y(\tau) + \mu \int_{\tau}^t y(t) dt + \int_{Q_{\tau,t}} \left[\sum_{i=1}^n a_i(x,t) |u_{tx_i}|^q + c_0(x,t) |u_t|^p \right] e^{-\mu t} dx dt = \\ = \int_{Q_{\tau,t}} f(x,t) u_t e^{-\mu t} dx dt. \end{aligned} \quad (6)$$

Очевидно, що

$$\int_{Q_{\tau,t}} f(x,t) u_t e^{-\mu t} dx dt \leq \left(\int_{Q_{\tau,t}} |f(x,t)|^{r'} e^{-\mu t} dx dt \right)^{1/r'} \left(\int_{Q_{\tau,t}} |u_t|^r e^{-\mu t} dx dt \right)^{1/r}. \quad (7)$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \int_{Q_{\tau,t}} |u_t|^r e^{-\mu t} dx dt &\leq \int_{Q_{\tau,t}} \left[\chi |u_t|^p + M_3(1-\chi) \sum_{i=1}^n a_i(x,t) |u_{tx_i}|^q \right] e^{-\mu t} dx dt \leq \\ &\leq M_4 \int_{Q_{\tau,t}} \left[\sum_{i=1}^n a_i(x,t) |u_{tx_i}|^q + c_0(x,t) |u_t|^p \right] e^{-\mu t} dx dt, \end{aligned}$$

де $\chi = 1$ при $p \geq q$ і $\chi = 0$ при $p < q$, M_3 – стала з нерівності Фрідрікса, $M_4 > 0$, то з (7) маємо

$$\begin{aligned} \int_{Q_{\tau,t}} f(x,t) u_t e^{-\mu t} dx dt &\leq M_5 \left(\int_{Q_{\tau,t}} |f(x,t)|^{r'} e^{-\mu t} dx dt \right)^{1/r'} \times \\ &\times \left(\int_{Q_{\tau,t}} \left[\sum_{i=1}^n a_i(x,t) |u_{tx_i}|^q + c_0(x,t) |u_t|^p \right] e^{-\mu t} dx dt \right)^{1/r}, \quad M_5 > 0. \end{aligned}$$

Враховавши останню оцінку, з (6) одержимо нерівність

$$\begin{aligned} y(t_3) - y(t_1) + \mu \int_{t_1}^{t_3} y(t) dt + M_6 \int_{Q_{t_1,t_3}} \left[\sum_{i=1}^n a_i(x,t) |u_{tx_i}|^q + \right. \\ \left. + c_0(x,t) |u_t|^p \right] e^{-\mu t} dx dt \leq 3\mu_1 M_1, \end{aligned} \quad (8)$$

де μ_1 залежить від r, A_1, C_0 , $M_6 > 0$.

Далі доведемо, що

$$y(t_{j+2}) \leq \max\{y(t_j); \gamma_0\},$$

де γ_0 – деяка стала. Проведемо доведення для $j = 1$ (його можна повторити для кожного $j > 1$).

Якщо $y(t_3) \leq y(t_1)$, то доведення завершено. Тому припустимо, що $y(t_3) - y(t_1) > 0$. Тоді з (8) випливає оцінка (при $t = t_3, \tau = t_1$)

$$\int_{t_1}^{t_3} y(t) dt \leq \frac{3\mu_1 M_1}{\mu}.$$

Оскільки $t_3 - t_1 \geq 1$, то існує таке $\tau_0 \in (t_1, t_3)$, що

$$y(\tau_0) \leq \frac{3\mu_1 M_1}{\mu}.$$

Отже,

$$y(t_3) - y(t_1) \leq 3\mu_1 M_1, \\ \int_{Q_{t_1, t_3}} \left[\sum_{i=1}^n a_i(x, t) |u_{tx_i}|^q + c_0(x, t) |u_t|^p \right] e^{-\mu t} dx dt \leq \frac{3\mu_1 M_1}{M_6}.$$

Застосовуючи тепер (6) для $t = t_3, \tau = \tau_0$, одержимо

$$y(t_3) \leq y(\tau_0) + 3\mu_1 M_1 \leq 3\mu_1 M_1 \left(\frac{1}{\mu} + 1 \right) = \gamma_0.$$

Тому

$$y(t) \leq \max\{y(t_1), \gamma_0\} \leq \max_{t \in [0, 2]} \{y(t), \gamma_0\} = M_2, t \in [0, 3].$$

Крім того,

$$\int_{Q_{t, t+1}} \left[\sum_{i=1}^n a_i(x, t) |u_{tx_i}|^q + c_0(x, t) |u_t|^p \right] e^{-\mu t} dx dt \leq y(t) + \\ \left(\int_{Q_{t, t+1}} |f(x, t)|^{r'} e^{-\mu t} dx dt \right)^{1/r'} \left(\int_{Q_{t, t+1}} \left[\sum_{i=1}^n a_i(x, t) |u_{tx_i}|^q + c_0(x, t) |u_t|^p \right] e^{-\mu t} dx dt \right)^{1/r} \leq \\ \leq M_2 + M_1^{1/r'} \left(\int_{Q_{t, t+1}} \left[\sum_{i=1}^n a_i(x, t) |u_{tx_i}|^q + c_0(x, t) |u_t|^p \right] e^{-\mu t} dx dt \right)^{1/r}.$$

Отже,

$$\int_{Q_{t,t+1}} \left[\sum_{i=1}^n |u_{tx_i}|^q + |u_t|^p \right] e^{-\mu t} dx dt \leq M_7$$

для всіх $t \geq 0$, M_7 – додатна стала.

1. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М. – 1972.
2. Процак Н. Існування та єдиність розв'язку мішаної задачі для одного параболического нелинейного рівняння // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2001. – Вип. 59. – С. 148–157.
3. Процак Н.П. Мішана задача для нелинейного еволюційного рівняння з другою похідною за часом в узагальнених просторах Лебега // Мат. студії. – 2001. – 16, № 2. – С. 157–168.
4. Abeyaratne R., Knowles J.K. Implications of viscosity and strain gradient effects for the kinetics of propagating phase boundaries in solids // SIAM. J. Appl. Math. – 1991. – 51. – P. 1205–1221.
5. Abeyaratne R., Knowles J.K. Kinetic relations and propagation of phase boundaries in solids // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1991. – 114. – P.119–154.
6. Rybka P., Hoffmann K.-H. Convergence of solutions to the equation of quasi-static approximation of viscoelasticity with capillarity // J. Math. Anal. and Appl. – 1998. – 226, No. 1. – P. 61–81.
7. Slemrod M. Admissibility criteria for propagating phase boundaries a van der Waals fluid // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1983. – P. 37–85.

BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF THE MIXED PROBLEM FOR THE PARABOLIC EQUATION OF THE FOURTH ORDER ON THE INFINITY

Halina Torhan

*Ivan Franco National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine*

In the paper behavior of the generalized solution of the mixed problem for the nonlinear parabolic equation of the fourth order at $t \rightarrow \infty$ is estimated.

Key words: mixed problem, parabolic equation.

Стаття надійшла до редколегії 18.04.2008
Прийнята до друку 19.11.2008

УДК 539.3: 538.3: 536.21: 518.12: 517.96

ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ, ТЕМПЕРАТУРА ТА НАПРУЖЕНИЙ СТАН У СКІНЧЕННОМУ ЦИЛІНДРІ ЗА УМОВ ЙОГО ІНДУКЦІЙНОГО НАГРІВУ

Богдан ДРОБЕНКО¹, Карен КАЗАРЯН², Зигмунт КАСПЕРСЬКИЙ³

¹Інститут прикладних проблем механіки і математики
і.м. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 36 79053 Львів, Україна
²Інститут механіки НАН Вірменії,
просп. Маршала Баграмяна, 24-б 375019 Єреван, Вірменія
³Політехніка Опольська,
вул. Станіслава Миколайчука, 5 45-271 Ополь, Польща

На основі запропонованої раніше математичної моделі опису фізико-механічних процесів в електропровідних тілах за умов дії зовнішніх електромагнітних полів розглянуто задачу про визначення електромагнітних і температурних полів, а також напружено-деформованого стану у скінченному сталевому циліндрі за умов його індукційної обробки.

Ключові слова: зв'язані поля, індукційний нагрів, термомеханічні процеси.

Електромагнітні поля (ЕМП) широко використовують у сучасних технологіях обробки твердих тіл, зокрема, при індукційному нагріві електропровідних тіл з метою підвищення параметрів їхньої міцності та надійності. Відомі класичні методики опису термомеханічної поведінки тіл при індукційному нагріві дали змогу провести конкретні дослідження лише для тіл канонічної форми (розглянуті лише одновимірні за просторовою координатою задачі) переважно в рамках моделі пружного тіла за незалежних від температури характеристик матеріалу. Необхідність проводити розрахунки високотемпературних режимів індукційної обробки термочутливих, здатних до пластичного деформування тіл неканонічної геометричної форми привели до побудови складних математичних моделей і використання універсальних числових підходів. У переважній більшості сучасних праць у цьому напрямі дослідники фокусують свою увагу на розгляді лише електромагнітних і теплових процесів [1-3].

Питанням розробки методології і методики числового моделювання термомеханічних процесів у здатних до пластичного деформування, термочутливих тілах складної форми з різними електропровідністю й здатністю до намагнічування та поляризації за умов дії зовнішнього ЕМП з урахуванням складної історії навантаження й здатності матеріалів зміцнюватись присвячені праці [4, 5]. Мета нашої праці – чисельно

промоделювати процес індукційного нагріву скінченного сталевго циліндра на підставі запропонованої у [4, 5] методики; оцінити збіжність і достовірність отриманих числових результатів шляхом порівняння їх з відомими аналітичними, а також чисельними розв'язками, отриманими на різних скінченно-елементних поділах циліндра за різних кроків часового інтегрування рівнянь електро-магніто-термопружно-пластичності; визначити параметри дискретної моделі, які без втрати точності числових розв'язків допомагають мінімізувати об'єми обчислень, а отже, і час розрахунку.

Розглянемо процес індукційної обробки вільного від механічного навантаження циліндричного тіла V завдовжки $2L$ з радіусом R ($V = \{ (r, z) : r \leq R, |z| \leq L \}$), що перебуває в коаксіальному з ним індукторі, який моделює циліндрична поверхня з радіусом R_i завдовжки $2L_i$ ($r = R_i, |z| \leq L_i$) за заданої у ній густини струму

$$\mathbf{j}^{(0)}(r, z, t) = (0, J_0(1 - e^{-\xi t}) \sin 2\pi\omega t, 0), \quad r = R_i, |z| \leq L_i,$$

де ω – частота; $J_0(1 - e^{-\xi t})$ – амплітуда (параметр ξ характеризує плавність виходу на усталений режим). У початковий момент часу ЕМП у тілі й середовищі немає та заданий розподіл $T_0(r, z)$ температури. Тіло перебуває за умов конвективного теплообміну (з коефіцієнтом β) із зовнішнім середовищем, температура якого T_3 .

ЕМП у системі тіло – зовнішнє середовище та температурне й механічні поля у тілі описуємо відповідно системою рівнянь Максвелла, теплопровідності і співвідношеннями неізотермічної термопружно-пластичної течії [4]. Відповідно до запропонованої методики [4] задачу розв'язуємо у два етапи: на першому – розв'язуємо зв'язану задачу електродинаміки і теплопровідності; на другому – на підставі обчислених значень температури і пондеромоторних сил визначаємо напружений стан тіла.

Попередньо замінивши нескінченний простір скінченою областю Ω з достатньо віддаленою від тіла і заданих струмів межею, застосуємо стандартну процедуру скінченно-елементної дискретизації у варіанті методу зважених залишків [6] до рівнянь Максвелла і теплопровідності. Задача про визначення електромагнітного та температурного полів зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь [4]

$$L_1 \dot{\mathbf{T}}_h(t) + L_0 \mathbf{T}_h(t) = \mathbf{f}_T, \quad \mathbf{T}_h(0) = \mathbf{T}_h^0, \quad (1)$$

$$\mathbf{M}_2 \ddot{\mathbf{E}}_h(t) + \mathbf{M}_1 \dot{\mathbf{E}}_h(t) + \mathbf{M}_0 \mathbf{E}_h(t) = \mathbf{f}_E, \quad \mathbf{E}_h(0) = \dot{\mathbf{E}}_h(0) = 0, \quad (2)$$

стосовно невідомих значень вектора напруженості $\mathbf{E}_h$ електричного поля і температури $\mathbf{T}_h$ у вузлах скінченно-елементного поділу тіла. Матрично-

векторні характеристики задачі (1) – (2) обчислені шляхом підсумовування відповідних характеристик окремих скінченних елементів [4].

Методика числового розв'язування такої задачі з застосуванням різних кроків інтегрування рівнянь (1) та (2) за часом описана у праці [5].

Застосування методу скінченних елементів до задачі другого етапу (визначення напруженого стану тіла на підставі рівнянь термопружно-пластичності) приводить до системи нелінійних алгебричних рівнянь [4], яку розв'язуємо за допомогою методу змінних параметрів пружності (метод Ньютона-Рафсона) [7].

У [8] розглянуто задачу про індукційний нагрів довгого циліндра за припущення, що його пружно-пластичне деформування добре описує умова течіння Треска – Сен-Венана, а матеріал (сталь X18H9T) є ідеально пружно-пластичним, нестисливим.

Розглянемо цю саму задачу для скінченного циліндра ($R = 0,01$ м; $L = 0,04$ м). Кількісні дослідження проведемо за таких значень параметрів: $R_i = 0,0105$ м; $L_i = 0,042$ м; $J_0 = 10^6 = 60$ кА/м²; $\omega = 8 = 30$ кГц; $T_0 = T_s = 20^\circ\text{C}$; $\beta = 13$ (10⁴) Вт/(м²К); $\xi = 10^{-5}$.

Обчислення виконаємо з використанням різних часових кроків і поділів області Ω на скінченні елементи. Зокрема, розглянемо поділи області тіла V на 3х12, 5х20, 10х40, 20х80 елементів. Розміри елементів у середовищі в напрямі від тіла зростають (див. рис. 1). Кроки чисельного інтегрування рівнянь за часом будемо вибирати з множини $\{T_\omega / 16; T_\omega / 32; T_\omega / 64 \dots\}$, де $T_\omega = 2\pi\omega^{-1}$. Щоб дослідити вплив заміни нескінченного простору на скінченну область Ω , розв'яжемо розглядувану задачу для різних областей Ω (які задаватимемо парою параметрів $\{R_0, L_0\}$, див. рис. 1). Отримувані розв'язки будемо порівнювати між собою та з аналітичним розв'язком задачі [8]. На границі S' області Ω , якою наблизимо нескінченний простір, будемо вимагати зникання поля ($E_\varphi = 0$).

Аналіз одержаних результатів показав, що вже при п'яти ізопараметричних скінченних елементах [7] по товщині циліндра (рис. 1, б) за кроку дискретизації за часом $\Delta t_E = T_\omega / 16$ отримуємо достатньо точні розв'язки. Ізолінії напруженості електричного поля у системі циліндр-середовище в момент часу $t = 7,109$ с (момент вимкнення індуктора в [8]) за цих параметрів дискретної моделі задачі зображені на рис. 2 ($R_0 = 0,05$ м; $L_0 = 0,1$ м).

При заміні нескінченного простору на скінчену область Ω з параметрами $R_0 \geq 0,05$ м та $L_0 \geq 0,1$ м у циліндрі отримуємо практично ідентичні розв'язки. У перерізі $z = 0$ вони збігаються (в межах 1%) з аналітичним розв'язком одновимірної задачі [8]. З подальшим зменшенням $R_0 < 0,05$ м і $L_0 < 0,1$ м числові розв'язки у циліндрі починають відрізнятися. На рис. 3 показано розподіл напруженості електричного поля в перерізі $z = 0$ областей Ω , які задавали такими парами параметрів $\{R_0, L_0\}$: $\{0,1$ м; $0,15$ м} (крива 1); $\{0,05$ м; $0,1$ м} (2); $\{0,025$ м; $0,08$ м} (3).

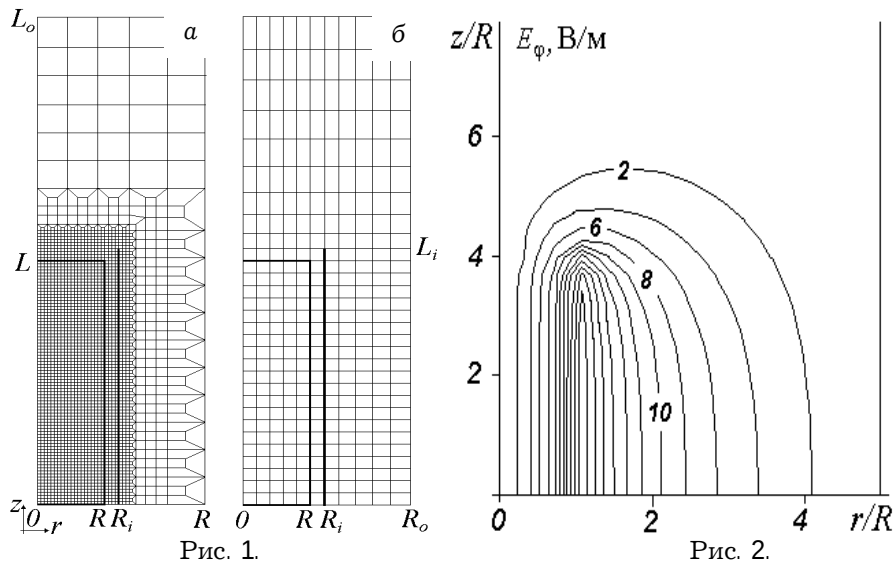


Рис. 1.

Рис. 2.

Якщо вибрати довжину індуктора приблизно на 5% більшою за довжину циліндра, то отримаємо достатньо рівномірний розподіл температури по всій його довжині. Вплив країв на розподіл температурного поля в циліндрі за цієї умови буде мінімальним. На рис. 4 зображено розподіли температури на поверхні циліндричного тіла (уздовж його твірної) у момент часу $t = 7,109$ с залежно від довжин індуктора L_i : 0,04м (крива 1); 0,04125м (2); 0,0418м (3); 0,0425м (4); 0,045м (5) та 0,05м (6).

На рис. 5 показано відповідно ізолінії амплітуд коливань складових E_φ , H_z , H_r напруженостей електричного й магнітного полів, розподілу температури T і еквівалентних напружень $\bar{\sigma}$ у циліндрі у момент часу $t = 7,109$ с. Як бачимо, зона крайового ефекту у випадку електромагнітного поля і температури доволі незначна і охоплює область порядку половини радіусу циліндра. Для напружень вона дещо більша ($\approx 1,5R$). У центральній частині циліндра розподіли усіх параметрів практично незалежні від координати z і добре узгоджуються з відповідними розв'язками [8] (різниця не перевищує 1%).

З погляду часових затрат не раціонально з тим самим часовим кроком продовжити обчислення електромагнітного, температурного та механічного полів; крок інтегрування рівняння теплопровідності й пружно-пластичності за часом можна брати набагато більшими [5]. У цьому разі джерелами в правій частині рівняння теплопровідності й об'ємними силами у рівняннях рівноваги приймаємо усереднені за період T_ω коливання електромагнітної хвилі тепловиділення і пондеромоторні сили (якщо кроки числового інтегрування рівнянь електродинаміки (Δt_E), теплопровідності (Δt_T) і

пружно-пластичності (Δt_M) за часом рівні, джерелами і об'ємними силами є миттєві значення тепловиділень і пондеромоторних сил).

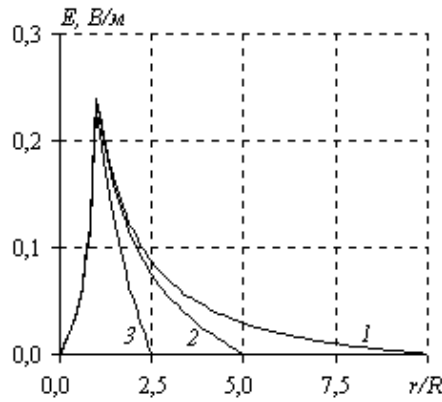


Рис. 3.

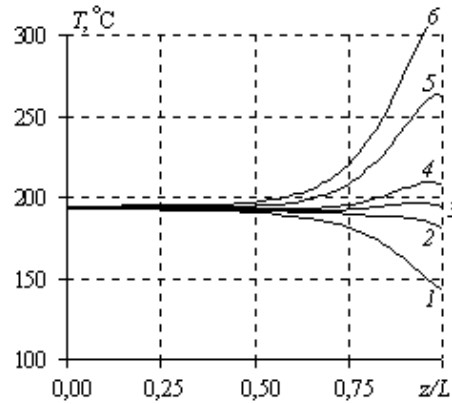


Рис. 4.

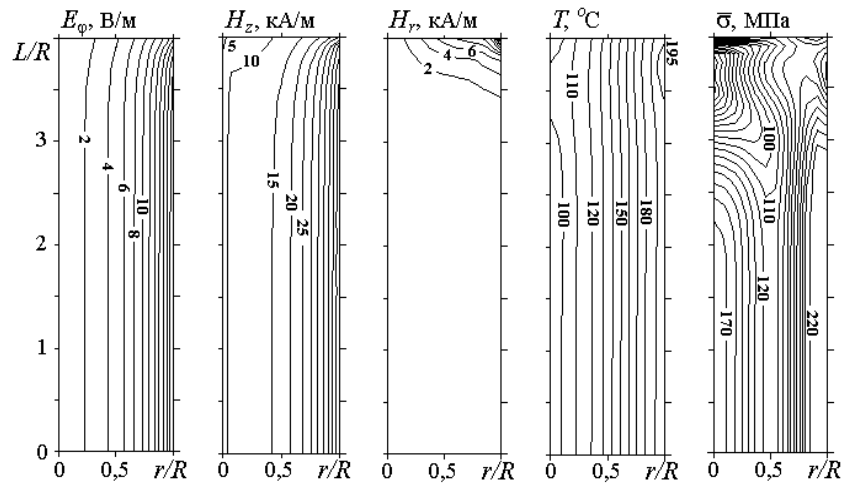


Рис. 5.

На рис. 6 кривими 1-4 показано розподіли температури вздовж радіуса в перерізі $z = 0$ циліндра в момент часу $t = 7$ с, отримані відповідно при розрахунках з кроками $\Delta t_T = 0,209 \cdot 10^{-6}$ с ($T_\omega / 16$); 1 с ($\approx 10^5 T_\omega$); 3,5 с ($\approx 10^6 T_\omega$); 7 с (криві 1-2 практично накладаються одна на одну). На рис. 7 зображено розподіли осевих σ_{zz} і кільцевих $\sigma_{\varphi\varphi}$ напружень у довгому циліндрі ($t = 7,109$ с), отримані в замкненому вигляді в [8]. На цьому самому рисунку з метою порівняння зірочками нанесені розв'язки у перерізі $z = 0$ скінченного циліндра при його поділі 5×20 елементів (див. рис. 1, б) і кроці інтегрування рівнянь термопружно-пластичності $\Delta t_M = 7,109$ с. Бачимо,

що розрахунки температурного поля і напруженого стану для цієї задачі можна вести з кроками $\Delta t_T \approx 10^7 \Delta t_E$, $\Delta t_M = 2\Delta t_T$ без практичної втрати точності, що дає змогу одержати розв'язки просторово двовимірних задач за реальні (досить короткі) часові проміжки. Зокрема, розв'язування такої двовимірної за просторовими змінними нестационарної задачі за оптимально скінченно-елементного поділу і кроці $\Delta t_T = 1$ с займає 4 с часу процесора ATHLON-2000. Час розв'язування цієї задачі з кроком $\Delta t_T = T_\omega / 16$ становить величину приблизно у сім порядків більшу.

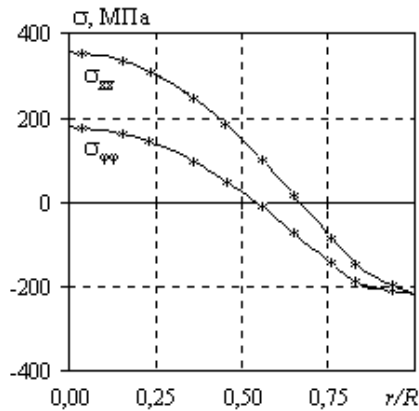


Рис. 6.

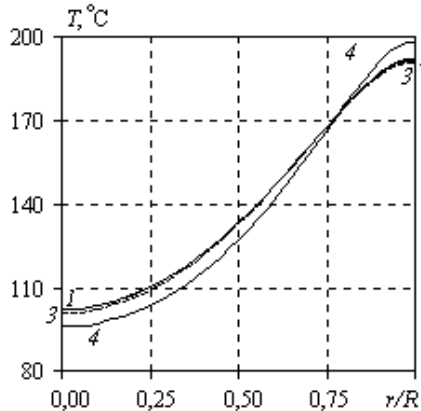


Рис. 7.

Отож, враховуючи інваріантність методу скінченних елементів щодо геометрії області, граничних умов і характеристик матеріалу та покрокове проходження історії зміни електромагніто-термомеханічного стану тіла в часі, запропонована у [4, 5] методика моделювання процесів індукційного нагріву електропровідних тіл допомагає розраховувати електромагнітні, температурні і механічні поля у просторово двовимірних тілах за досить короткі проміжки часу з урахуванням реальних властивостей матеріалів. Цю методику можна використати для побудови оптимальних режимів індукційного нагріву виробів з електропровідних матеріалів, приймаючи за критерій оптимальності максимальне відхилення напружень чи температурних розподілів у тілі від заданих (бажаних) і проводячи керування за рахунок вибору величини струму, його частоти, геометричних параметрів індукторів, їхньої відстані від термооброблюваного тіла тощо.

1. Dolezel I., Barglik J., Ulrych B. Continual induction hardening of axis-symmetric bodies // Journal of Materials Processing Technology. 2005. Vol. 161/ № 2. P. 269–275.
2. Kawaguchi H., Enokizono M., Todaka T. Thermal and magnetic field analysis of induction heating problems // Journal of Materials Processing Technology. – 2005. – Vol. 161, № 2. – P. 193–198.

3. *Nemkov V., Goldstein R.* Computer simulation for fundamental study and practical solutions to induction heating problems // COMPEL: Intern. J. Computations and Math. in Electrical and Electronic Eng. 2003. Vol. 22, № 1. – P. 181–191.
4. *Гачкевич О.Р., Дробенко Б.Д.* Математичне моделювання індукційного нагріву електропровідних тіл // Вісн. Львів. ун-ту. Серія прикладної математики та інформатики. 2004. № 8. С. 97–111.
5. *Гачкевич О., Дробенко Б., Касперський З.* Про один підхід до чисельного моделювання процесу індукційного нагрівання електропровідних тіл // Вісник Донецького університету, сер. А: Природничі науки. 2005. – Вип. 1. – С. 62–65.
6. *Зенкевич О., Морган К.* Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986.
7. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* Finite Element Method: Vol. 1. The Basis. London: Butterworth Heinemann, 2000.
8. *Бурак Я.И., Галапац Б.П., Колодий Б.И.* Упругопластическое равновесие бесконечного цилиндра при индукционном нагреве // Прикладная механика. 1968. – Т. 4, №1. – С. 167–178.

ELECTROMAGNETIC FIELD, TEMPERATURE
AND STRESS STATE IN FINITE CYLINDER
SUBJECTED TO INDUCTION HEATING

Bogdan Drobenko¹, Karen Kazaryan², Zigmund Kasperskiy³

¹*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
Naukova Str., 3b 79053 Lviv, Ukraine*

²*Institute of Mechanics of the NAS of Armenia,
Marshal Bagramyan Str., 24-b 375019 Yerevan, Armenia*

³*Technical University of Opole,
Stanislawa Mikolajchuka Str., 5 45-271 Opole, Poland*

The problem of determination of electromagnetic and temperature fields and strength-stress state of finite steel cylinder subjected to induction heating is considered on the basis of proposed earlier mathematical model of thermomechanical processes in electrically conductive solids subjected to external electromagnetic fields.

Key words: coupled fields, induction heating, thermomechanical processes.

Стаття надійшла до редколегії 15.03.2007

Прийнята до друку 19.11.2008

УДК 517.956

ЗАДАЧА З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО РІВНЯННЯ КОЛИВАНЬ СТРУНИ

Мирослава ПРОХОРЕНКО

Національний університет водного господарства та природокористування,
вул. Соборна, 11 36028 Рівне, Україна

Досліджено питання існування періодичних розв'язків хвильового рівняння з імпульсною дією у моменти часу, визначені самим розв'язком.

Ключові слова: імпульсні диференціальні рівняння в частинних похідних, коливання струни, коливання зі зворотною дією.

При моделюванні механічних, радіотехнічних, фізичних, біологічних та інших процесів виникає необхідність у вивченні диференціальних рівнянь з імпульсною дією [1]. Зокрема, диференціальні рівняння з імпульсною дією в задачах механіки використовували при дослідженні динаміки крокуючих апаратів [2]. В низці статей розглядали питання про існування періодичних розв'язків звичайних диференціальних рівнянь і рівнянь з частинними похідними за наявності імпульсної дії у фіксовані моменти часу [3, 4].

Ця праця є продовженням досліджень [5, 6] та розглядає процес коливання струни з миттєвим збільшенням енергії у моменти, коли повна енергія струни досягає заданого критичного рівня. Тобто, моменти проведення імпульсної дії наперед не задані, а регулюються самим процесом. Для такої задачі досліджено існування простих (таких, які мають один імпульс на періоді) періодичних розв'язків.

1. Формулювання задачі. Коливання струни задамо рівнянням

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - bu - 2\nu u_t - 2cu_x \quad (0 \leq x \leq l, 0 \leq t < \infty, a, b, c, \nu, l = \text{const} > 0), \quad (1)$$

та початковими і граничними умовами

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad u_t(x, 0) = \psi_0(x) \quad (0 \leq x \leq l), \quad (2)$$

$$u_x(0, t) - h_1 u(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) + h_2 u(l, t) = 0 \quad (0 \leq t < \infty), \quad (3)$$

де $u(x, t)$ - зміщення струни в момент часу t , $h_1, h_2 = \text{const} > 0$, $\varphi_0 \in C^2[0, l]$,

$$\psi_0 \in C^1[0, l], \quad \varphi_0|_{x=0,l} = \psi_0|_{x=0,l} = 0, \quad \varphi_0''|_{x=0,l} = 0.$$

За регулюючий функціонал візьмемо повну енергію коливання струни $E_u(t)$, яку визначають зі співвідношення [7]

$$E_u(t) = \frac{1}{2} \int_0^l ((au_x)^2 + (u_t)^2) dx + \frac{a^2}{2} (h_1 u^2(0, t) + h_2 u^2(l, t))$$

з критичним значенням $E_0 > 0$ та імпульсним законом

$$\begin{aligned} (u(x, t+0) - u(x, t-0))|_{E_u(t)=E_0} &= \alpha(x), \\ (u_t(x, t+0) - u_t(x, t-0))|_{E_u(t)=E_0} &= \beta(x) \quad (0 \leq x \leq l), \end{aligned} \quad (4)$$

де $\alpha \in C^2[0, l], \beta \in C^1[0, l]$ - задані функції, причому $\alpha|_{x=0, l} = \beta|_{x=0, l} = 0$,

$$\alpha''|_{x=0, l} = 0.$$

Отже, повне формулювання задачі складається зі співвідношень (1)-(4), причому рівності (1)-(3) справджуються тільки у випадку $E_u(t) \neq E_0$. Якщо $E_u(0) = E_0$, то в умові (4) розглядаємо $\varphi_0(x)$ замість $u(x, t-0)$, $\psi_0(x)$ замість $u_t(x, t-0)$ та 0 замість $t-0$.

Оскільки при дослідженні коливань струни (з врахуванням виконання загальноприйнятих фізичних законів) повна енергія її коливань у початковий момент набуває найбільшого значення, а з плином часу розсіюється, то при заданому E_0 можливі випадки:

а) $E_u(0) < E_0$, тоді імпульсів немає і $E_u(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$;

б) $E_u(0) \geq E_0$, тоді існує момент часу $t = t_* > 0$, коли виконується перший імпульс.

Тепер розпишемо

$$\begin{aligned} E_u(t+0) &= \frac{1}{2} \int_0^l (a^2 (u_x(x, t-0) + \alpha_x(x))^2 + (u_t(x, t-0) + \beta(x))^2) dx + \\ &\quad + \frac{a^2}{2} (h_2 (u(l, t-0) + \alpha(l))^2 + h_1 (u(0, t-0) + \alpha(0))^2) \geq \\ &\geq \frac{1}{4} \int_0^l (a^2 \alpha_x^2(x) + \beta^2(x)) dx + \frac{a^2}{2} (h_2 u^2(l, t-0) + h_1 u^2(0, t-0)) - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^l (a^2 (u_x(x, t-0))^2 + (u_t(x, t-0))^2) dx \geq \frac{1}{4} \int_0^l (a^2 \alpha_x^2(x) + \beta^2(x)) dx - E_0. \end{aligned}$$

Для забезпечення існування нескінченної послідовності імпульсів при заданих E_0, α, β вимагаємо виконання нерівності

$$E_0 < \frac{1}{8} \int_0^l (a^2 \alpha_x^2(x) + \beta^2(x)) dx.$$

Означення. Періодичний розв'язок задачі (1)-(4) назвемо простим, якщо відстань між його сусідніми моментами імпульсів постійна і дорівнює періоду цього розв'язку.

2. Розв'язність задачі. За зазначених умов розв'язок задачі (1)-(3) перед моментом першого імпульсу має вигляд

$$u(x, t) = e^{\tilde{c}x - \nu t} \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_{0n} \cos \omega_n t + \psi_{0n} \sin \omega_n t) \sin(\tau_n x + \theta_n),$$

де

$$\tilde{c} = \frac{c}{2a^2}, \quad \omega_n = \sqrt{a^2 \lambda_n^2 + b - \nu^2}, \quad \lambda_n^2 = \tau_n^2 + c^2,$$

$$\cos \omega_n t := \begin{cases} ch|\omega_n|t & (a^2 \lambda_n^2 + b < \nu^2), \\ 1 & (a^2 \lambda_n^2 + b = \nu^2), \end{cases} \quad \omega_n^{-1} \sin \omega_n t := \begin{cases} |\omega_n|^{-1} sh|\omega_n|t & (a^2 \lambda_n^2 + b < \nu^2), \\ t & (a^2 \lambda_n^2 + b = \nu^2), \end{cases}$$

λ_n та $X_n(x) = e^{\tilde{c}x} \sin(\tau_n x + \theta_n)$ - відповідно власні значення і власні функції задачі

$$X''(x) - 2\tilde{c}X'(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad X'(0) - h_1 X(0) = 0, \quad X'(l) + h_2 X(l) = 0,$$

τ_n - корені рівняння

$$ctg \tau l = \frac{\tau^2 + (\tilde{c} - h_1)(\tilde{c} + h_2)}{\tau(h_1 + h_2)}, \quad \theta_n = \arctg \frac{\tau_n}{h_1 - \tilde{c}},$$

$$\varphi_{0n} = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l \varphi(x) e^{\tilde{c}x} \sin(\tau_n x + \theta_n) dx,$$

$$\psi_{0n} \omega_n = \nu \varphi_{0n} + \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l \psi(x) e^{\tilde{c}x} \sin(\tau_n x + \theta_n) dx,$$

$$\|X_n\|^2 = \frac{e^{2\tilde{c}l} - 1}{4\tilde{c}} - \frac{1}{4(\tau_n^2 + \tilde{c}^2)} (e^{2\tilde{c}l} (\tau_n \sin 2(\tau_n l + \theta_n) + \tilde{c} \cos 2(\tau_n l + \theta_n)) - \tau_n \sin 2\theta_n - \tilde{c} \cos 2\theta_n).$$

Згідно з формулюванням задачі момент першого імпульсу t_1 шукаємо з рівняння

$$a^2 \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_{0n} \cos \omega_n t_1 + \psi_{0n} \sin \omega_n t_1)^2 \left(\left(\frac{\tau_n^2}{\tilde{c}} + \tilde{c} \right) (e^{2\tilde{c}l} - 1) + \frac{\tilde{c}^2 - \tau_n^2}{\tau_n^2 + \tilde{c}^2} (\tau_n \sin 2\theta_n + \tilde{c} \cos 2\theta_n - e^{2\tilde{c}l} (\tau_n \sin 2(\tau_n l + \theta_n) + \tilde{c} \cos 2(\tau_n l + \theta_n))) + \frac{\tau_n \tilde{c}}{\tau_n^2 + \tilde{c}^2} (\tau_n \cos 2\theta_n - \tilde{c} \sin 2\theta_n + e^{2\tilde{c}l} (\tilde{c} \sin 2(\tau_n l + \theta_n) - \tau_n \cos 2(\tau_n l + \theta_n))) + 4h_2 \sin^2(\tau_n l + \theta_n) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +4h_1 \sin^2 \theta_n) + \sum_{n=1}^{\infty} ((\omega_n \psi_{0n} - \nu \varphi_{0n}) \cos \omega_n t_1 - (\nu \psi_{0n} + \omega_n \varphi_{0n}) \sin \omega_n t_1)^2 \left(\frac{e^{2\tilde{c}l} - 1}{\tilde{c}} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{\tau_n^2 + \tilde{c}^2} (e^{2\tilde{c}l} (\tau_n \sin 2(\tau_n l + \theta_n) + \tilde{c} \cos 2(\tau_n l + \theta_n)) - \tau_n \sin 2\theta_n - \tilde{c} \cos 2\theta_n) \right) = \\
& = 8e^{2\iota t_1} E_0.
\end{aligned}$$

Для $t > t_1$ розв'язуємо задачу (1)-(2), а замість умов (3), з урахуванням (4), одержуємо умови

$$\begin{aligned}
u(x, t_1) &= e^{\tilde{c}x} \sum_{n=1}^{\infty} \{e^{-\iota t_1} (\varphi_{0n} \cos \omega_n t_1 + \psi_{0n} \sin \omega_n t_1) + \alpha_n\} \sin(\tau_n x + \theta_n), \\
u_t'(x, t_1) &= e^{\tilde{c}x} \sum_{n=1}^{\infty} \{e^{-\iota t_1} ((\omega_n \psi_{0n} - \nu \varphi_{0n}) \cos \omega_n t_1 - (\nu \psi_{0n} + \omega_n \varphi_{0n}) \sin \omega_n t_1) + \\
& + \beta_n\} \sin(\tau_n x + \theta_n),
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l \alpha(x) e^{\tilde{c}x} \sin(\tau_n x + \theta_n) dx, \\
\beta_n &= \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l \beta(x) e^{\tilde{c}x} \sin(\tau_n x + \theta_n) dx, 0 \leq x \leq l.
\end{aligned}$$

Позначимо вирази у фігурних дужках відповідно φ_{1n} і ψ_{1n} . Тоді розв'язок задачі (1)-(4) при $t_1 < t < t_2$ матиме вигляд

$$u(x, t) = e^{\tilde{c}x - \iota t} \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_{1n} \cos \omega_n t + \psi_{1n} \sin \omega_n t) \sin(\tau_n x + \theta_n).$$

Продовжуючи подібно міркувати, одержимо вигляд розв'язку задачі (1)-(4) для $t_k < t < t_{k+1}$

$$u(x, t) = e^{\tilde{c}x - \iota t} \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_{k,n} \cos \omega_n t + \psi_{k,n} \sin \omega_n t) \sin(\tau_n x + \theta_n) \quad (5)$$

та рівняння для знаходження наступного t_{k+1} моменту імпульсу

$$\begin{aligned}
& a^2 \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_{0n} \cos \omega_n t_{k+1} + \psi_{0n} \sin \omega_n t_{k+1})^2 \left(\left(\frac{\tau_n^2}{\tilde{c}} + \tilde{c} \right) (e^{2\tilde{c}l} - 1) + \frac{\tilde{c}^2 - \tau_n^2}{\tau_n^2 + \tilde{c}^2} (\tau_n \sin 2\theta_n + \right. \\
& + \tilde{c} \cos 2\theta_n - e^{2\tilde{c}l} (\tau_n \sin 2(\tau_n l + \theta_n) + \tilde{c} \cos 2(\tau_n l + \theta_n))) + \frac{\tau_n \tilde{c}}{\tau_n^2 + \tilde{c}^2} (\tau_n \cos 2\theta_n - \\
& - \tilde{c} \sin 2\theta_n + e^{2\tilde{c}l} (\tilde{c} \sin 2(\tau_n l + \theta_n) - \tau_n \cos 2(\tau_n l + \theta_n))) + 4h_2 \sin^2(\tau_n l + \theta_n) + \\
& + 4h_1 \sin^2 \theta_n \left. \right) + \sum_{n=1}^{\infty} ((\omega_n \psi_{0n} - \nu \varphi_{0n}) \cos \omega_n t_{k+1} - (\nu \psi_{0n} + \omega_n \varphi_{0n}) \sin \omega_n t_{k+1})^2 \left(\frac{e^{2\tilde{c}l} - 1}{\tilde{c}} - \right. \\
& - \frac{1}{\tau_n^2 + \tilde{c}^2} (e^{2\tilde{c}l} (\tau_n \sin 2(\tau_n l + \theta_n) + \tilde{c} \cos 2(\tau_n l + \theta_n)) - \tau_n \sin 2\theta_n - \tilde{c} \cos 2\theta_n) \left. \right) = \\
& = 8e^{2\tau_{k+1} E_0}, \tag{6}
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\varphi_{k,n} &= e^{-\tau_k} (\varphi_{k-1,n} \cos \omega_n t_k + \psi_{k-1,n} \sin \omega_n t_k) + \alpha_n, \\
\psi_{k,n} &= e^{-\tau_k} ((\omega_n \psi_{k-1,n} - \nu \varphi_{k-1,n}) \cos \omega_n t_k - (\nu \psi_{k-1,n} + \omega_n \varphi_{k-1,n}) \sin \omega_n t_k) + \beta_n, \\
& k = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

Позначимо через T відстань між сусідніми моментами імпульсів простого періодичного розв'язку задачі (1)-(4).

Теорема. Якщо функції φ_0, ψ_0 при заданому значенні E_0 задовольняють наведені в п. 1 умови, то задача (1)-(4) має, з точністю до довільного зсуву в часі, простий періодичний розв'язок.

Доведення. З (5) маємо, що розв'язок задачі (1)-(4) з деякими функціями φ_0, ψ_0 та E_0 буде простим T -періодичним з імпульсом при $t = 0$ тоді, коли правильними будуть одночасно рівності

$$\begin{aligned}
& e^{-\tau T} (\varphi_{0n} \cos \omega_n T + \psi_{0n} \sin \omega_n T) + \alpha_n = \varphi_{0n}, \\
& e^{-\tau T} ((\omega_n \psi_{0n} - \nu \varphi_{0n}) \cos \omega_n T - (\omega_n \varphi_{0n} + \nu \psi_{0n}) \sin \omega_n T) + \beta_n = \psi_{0n}.
\end{aligned}$$

Підставимо розв'язки $\varphi_{0n} = \varphi_n^*, \psi_{0n} = \psi_n^*$ одержаної системи у (5) та (6) і одержимо вигляд простого періодичного розв'язку

$$u^*(x, t) = e^{\tilde{c}x - \tau t} \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n^* \cos \omega_n t + \psi_n^* \sin \omega_n t) \sin(\tau_n x + \theta_n) \quad (0 < t < T, 0 \leq x \leq l)$$

де

$$\begin{aligned}
\varphi_n^* &= D_n^{-1} (-\alpha_n \omega_n \cos \omega_n T + (\alpha_n \nu + \beta_n) \sin \omega_n T + \alpha_n e^{\tau T}), \\
\psi_n^* &= -D_n^{-1} ((\alpha_n \nu + \beta_n) \cos \omega_n T + \alpha_n \omega_n \sin \omega_n T - \beta_n e^{\tau T}), \\
D_n &= e^{\tau T} + \nu \sin \omega_n T - (\omega_n + 1) \cos \omega_n T + \omega_n e^{-\tau T}
\end{aligned}$$

та рівняння для знаходження періоду T

$$\begin{aligned}
 & a^2 \sum_{n=1}^{\infty} D_n^{-2} \left(\alpha_n \omega_n - (\alpha_n \cos \omega_n T + \beta_n \sin \omega_n T) e^{\nu T} \right)^2 \left(\left(\frac{\tau_n^2}{\tilde{c}} + \tilde{c} \right) (e^{2\tilde{c}l} - 1) + \right. \\
 & + \frac{\tilde{c}^2 - \tau_n^2}{\lambda_n^2 + \tilde{c}^2} (\tau_n \sin 2\theta_n + \tilde{c} \cos 2\theta_n - e^{2\tilde{c}l} (\tau_n \sin 2(\tau_n l + \theta_n) + \tilde{c} \cos 2(\tau_n l + \theta_n))) + \\
 & + \frac{\tau_n \tilde{c}}{\tau_n^2 + \tilde{c}^2} (\tau_n \cos 2\theta_n - \tilde{c} \sin 2\theta_n + e^{2\tilde{c}l} (\tilde{c} \sin 2(\tau_n l + \theta_n) - \tau_n \cos 2(\tau_n l + \theta_n))) + \\
 & + 4h_2 \sin^2(\tau_n l + \theta_n) + 4h_1 \sin^2 \theta_n \Big) + \sum_{n=1}^{\infty} D_n^{-2} ((\omega_n \psi_{0n} - \nu \varphi_{0n}) \cos \omega_n T - \\
 & - (\nu \psi_{0n} + \omega_n \varphi_{0n}) \sin \omega_n T)^2 \left(\frac{e^{2\tilde{c}l} - 1}{\tilde{c}} - \tau_n \sin 2\theta_n - \tilde{c} \cos 2\theta_n - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{\tau_n^2 + \tilde{c}^2} (e^{2\tilde{c}l} (\tau_n \sin 2(\tau_n l + \theta_n) + \tilde{c} \cos 2(\tau_n l + \theta_n))) \right) = 8e^{2\nu T} E_0. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Існування розв'язків рівняння (7) для $T \in (0, +\infty)$ еквівалентне відшукуванню нулів функції

$$\begin{aligned}
 f(T) = & a^2 \sum_{n=1}^{\infty} D_n^{-2} \left(\alpha_n \omega_n - (\alpha_n \cos \omega_n T + \beta_n \sin \omega_n T) e^{\nu T} \right)^2 \left(\left(\frac{\tau_n^2}{\tilde{c}} + \tilde{c} \right) (e^{2\tilde{c}l} - 1) - \right. \\
 & - \frac{\tau_n^2 - \tilde{c}^2}{\tau_n^2 + \tilde{c}^2} (\tau_n \sin 2\theta_n + \tilde{c} \cos 2\theta_n - e^{2\tilde{c}l} (\tau_n \sin 2(\tau_n l + \theta_n) + \tilde{c} \cos 2(\tau_n l + \theta_n))) + \\
 & + \frac{\tau_n \tilde{c}}{\tau_n^2 + \tilde{c}^2} (\tau_n \cos 2\theta_n - \tilde{c} \sin 2\theta_n + e^{2\tilde{c}l} (\tilde{c} \sin 2(\tau_n l + \theta_n) - \tau_n \cos 2(\tau_n l + \theta_n))) + \\
 & + 4h_2 \sin^2(\tau_n l + \theta_n) + 4h_1 \sin^2 \theta_n \Big) + \sum_{n=1}^{\infty} D_n^{-2} ((\omega_n \psi_{0n} - \nu \varphi_{0n}) \cos \omega_n T - \\
 & - (\nu \psi_{0n} + \omega_n \varphi_{0n}) \sin \omega_n T)^2 \left(\frac{e^{2\tilde{c}l} - 1}{\tilde{c}} - \tau_n \sin 2\theta_n - \tilde{c} \cos 2\theta_n - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{\tau_n^2 + \tilde{c}^2} (e^{2\tilde{c}l} (\tau_n \sin 2(\tau_n l + \theta_n) + \tilde{c} \cos 2(\tau_n l + \theta_n))) \right) - 8e^{2\nu T} E_0, T \in (0, +\infty).
 \end{aligned}$$

Правильні границі $\lim_{T \rightarrow +0} f(T) = -\infty$ та $\lim_{T \rightarrow +\infty} f(T) = +\infty$. Звідси функція f на проміжку $(0, +\infty)$ за теоремою Больцано-Коші [7, с.168] має принаймні один нуль. Отож, кожному значенню E_0 відповідає принаймні один простий T — періодичний розв'язок задачі (1)-(4). Теорему доведено.

Автор висловлює вдячність В.М. Кириличу за консультації та обговорення результатів.

1. *Samoilenko A.M., Perestyuk N.A.* Impulsive differential equations // World Scientific Series on Nonlinear Sciences. Ser. A Vol. 14 – Singapore; – New Jersey; – London; – Hong-Kong: World Scientific, 1995.
2. *Ларин В.Б.* Управление шагающими аппаратами – К.: Наук. думка, 1980.
3. *Samoilenko V.Hr., Yelgondyev K.K.* On existence of periodical solutions for differential equations with impulsive effects // Journ. Facta Universitatis. Series: Mechanics, automatic control and robotics. – 1998. – № 2. P. 635–639.
4. *Елгондыев К.К., Хасанов М.* Колебания струны с импульсным воздействием // Крайові задачі для диф. рівнянь: 36. наук. пр. Чернівці: Прут, 2002. – Вип. 10. – С. 96–102.
5. *Myshkis A.D.* Vibrations of the string with energy dissipation and ipulsive feedback support // Nonlin. Anal., Theory, Meth & Appl. 1996. Vol. 26, № 7. P. 1271–1278.
6. *Мышкис А.Д.* Автоколебания струны с импульсной обратной связью // Дифференциальные уравнения. 1998. – Т. 34. № 12. С. 1640–1644.
7. *Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н.* Сборник задач по математической физике. -М.: Физматлит, 2003.
8. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления в 3-х т. – М.: Наука, 1970. – Т. 1.

PROBLEM WITH THE IMPULSE EXCITATION FOR THE MODELLING EQUATION OF OSCILLATIONS OF THE STRING

Myroslava Prokhorenko

*National university of water management and nature resources use
Soborna Str, 11 33028 Rivne, Ukraine*

The problem of existence of periodic solutions of a wave equation with an impulse excitation in the instants defined by a solution is investigated.

Key words: Impulsive partial differential equations, vibrations of string, vibrations with feedback.

Стаття надійшла до редколегії 27.05.2008

Прийнята до друку 19.11.2008

УДК 539.3: 536.424

МОДЕЛЮВАННЯ ФАЗОВОГО ТА НАПРУЖЕНОГО СТАНІВ СТЕРЖНЯ ПРИ КРУЧЕННІ ЗА СТРУКТУРНИХ ЗМІН

Володимир АСТАШКІН¹, Олександр ГАЧКЕВИЧ^{1,2},
Олексій ОНИШКО¹, Богдан БОЖЕНКО^{2,3}

¹Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3б 79053 Львів, Україна

²Політехніка Опольська,

вул. Станіслава Миколайчука, 5 45-271 Ополь, Польща

³Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я.С. Підстригача
НАН України, вул. Дудаєва, 15 79005 Львів, Україна

Запропоновано варіант математичної моделі для кількісного опису термомеханічної поведінки однокомпонентного твердого тіла, в якому під впливом зсувних напружень відбувається структурне перетворення. Прийнято, що ступінь повноти фазового перетворення залежить від інваріантів тензорів напружень і деформацій. Такий підхід дає змогу окремо врахувати вплив формозміни на фазовий склад системи. Як приклад досліджено кручення стержня колового перерізу зі сплаву з пам'яттю форми, яка перебуває в умовах, коли може відбуватися фазове перетворення. Обчислено розподіл залишкових напружень, зумовлених фазовими змінами.

Ключові слова: термомеханіка, інваріанти, структурні перетворення, кручення стержня, залишкові напруження.

У термомеханічних моделях для кількісного опису термомеханічних процесів у деформованих твердих тілах за параметри, які описують механічні процеси, звичайно приймають компоненти тензорів напружень і деформацій. Такий опис зручний, якщо зміни параметрів немеханічних процесів у системі (концентрація, фазовий склад, температура) пов'язані лише зі зміною об'єму. Також відомо, що існують такі процеси в твердих тілах, проходження яких суттєво залежить не лише від зміни об'єму (гідростатичного тиску), а й від зміни форми елемента об'єму, що пов'язана з другим інваріантом тензора напружень чи деформацій. Передусім це стосується фазових перетворень, які можуть відбуватись під впливом зсувних напружень.

Поведінку твердих тіл, в яких відбуваються згадані трансформації внутрішньої будови, зручно описувати за допомогою інваріантів тензорів напружень і деформацій, які можна розглядати як незалежні механічні параметри стану [1]. Інваріантний підхід дає змогу окремо врахувати вплив кульової (зміна об'єму) і девіаторної (зміна форми) частин тензорів напружень і деформацій на фазовий склад системи.

На підставі викладених вище міркувань були сформульовані головні положення макроскопічної термодинамічної моделі для кількісного опису процесу деформування ізотропних твердих тіл, в яких відбуваються фазові (структурні) перетворення, зумовлені впливом всестороннього розтягу – стиску та зсуву [2,3]. Були використані методи механіки суцільного середовища та термодинаміки нерівноважних процесів, які вже неодноразово застосовували раніше для побудови моделей деформівних твердих тіл [4,5].

Мета нашої праці – за допомогою цього підходу дослідити поведінку стержня кругового перерізу, виготовленого зі сплаву, в якому внаслідок дії зсувних напружень відбувається твердофазне мартенситне перетворення (найчастіше такі матеріали в літературі називають “сплавами з пам’яттю форми”). Описуємо, використовуючи сформульовану раніше відповідну математичну модель [6].

В основу використовуваного термодинамічного підходу покладено гіпотезу локальної термодинамічної рівноваги. За параметри стану, що характеризують теплові процеси, вибрано абсолютну температуру T та питому ентропію S . Мартенситне перетворення описується [7] відносним вмістом мартенситу Ξ та питомою спорідненістю перетворення A . Механічні впливи [1], пов’язані зі зміною об’єму, враховуємо через інваріанти тензора напружень σ і тензора деформацій e ; механічні впливи, пов’язані зі зміною форми тіла – відповідно через інваріанти σ_i та e_i , де $\sigma = \Pi_1/3$ – середній гідростатичний тиск; $e = I_1/3$ – відносна зміна середніх лінійних розмірів;

$\sigma_i = \sqrt{3\Pi_2 - \Pi_1^2}/\sqrt{2}$; $e_i = \sqrt{3I_2 - I_1^2}/\sqrt{2}$ – інтенсивності напружень і деформацій;

$\Pi_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ – 1-й інваріант тензора напружень; $I_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ – 1-й інваріант тензора деформацій; $\Pi_2 = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)$ – 2-й інваріант тензора напружень; $I_2 = \varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2 + 2(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2)$ – 2-й інваріант тензора деформацій.

Обмежуємося розглядом випадку, коли у вихідному стані матеріал тіла описується певними початковими значеннями $\Xi = \Xi_0$, і внаслідок відповідних теплових і механічних впливів значення Ξ змінюються. За функцію термодинамічного стану вибираємо вільну енергію $F = F(e, e_i, T, \Xi)$. Узагальнене рівняння Гіббса з використанням інваріантів тензорів напружень і деформацій модифікується до вигляду

$$dF = -SdT + \frac{3}{\rho}\sigma de + \frac{1}{\rho}\sigma_i de_i + Ad\Xi. \quad (1)$$

Тут ρ – густина матеріалу.

Система лінійних рівнянь стану моделі у випадку малого відхилення від початкового рівноважного стану в припущенні, що природний стан є ненапруженим ($T = T_0$, $S = S_0$, $e = 0$, $\sigma = 0$, $e_i = 0$, $\sigma_i = 0$, $\Xi = \Xi_0$, $A = A_0$) запишемо так:

$$\begin{aligned}
S &= S_0 + \frac{c_t}{T_0} t + \frac{1}{\rho} K \alpha e - K_{t\xi} \xi, \\
3\sigma &= K (e - \alpha t - \beta \xi), \\
\sigma_i &= G (e_i - \beta' \xi), \\
A &= A_0 + K_\xi \xi + K_{t\xi} t - \frac{1}{\rho} K \beta e - \frac{1}{\rho} G \beta' e_i,
\end{aligned} \tag{2}$$

де $t = T - T_0$, $\xi = \Xi - \Xi_0$.

Коефіцієнти в (2), (3) характеризують певні фізичні властивості матеріалу моделі. Окремі з них відомі і визначені експериментально, фізичний зміст інших таких: c_t – питома теплоємність; K – модуль всестороннього стиску; G – модуль зсуву; α – температурний коефіцієнт об'ємного розширення; $K_{t\xi}$ – коефіцієнт залежності спорідненості j -го перетворення від температури; β – коефіцієнт зміни об'єму при мартенситному перетворенні; β' – коефіцієнт зміни форми при мартенситному перетворенні; K_ξ – коефіцієнт залежності спорідненості мартенситного перетворення від ступеня повноти. Під час запису системи (2) враховано, що в літературі немає будь-яких відомостей про безпосередню залежність параметра σ_i від зміни об'єму та температури.

Розглянемо довгий стержень кругового перерізу радіуса R , виготовлений із сплаву з пам'яттю форми і навантажений моментом кручення M . Приймаємо, що у початковому стані матеріал стержня перебуває в аустенітній фазі (відносний вміст мартенситу $\Xi = 0$). Температура стержня постійна і є в інтервалі, в якому навіть незначні напруження можуть спричинити виникнення мартенситу [7]. Визначимо фазовий склад стержня, який сформується за дії такого навантаження.

Якщо використати циліндричну систему координат з віссю z , скерованою вздовж осі стержня, то відомо, що за такого навантаження відмінною від нуля буде тільки одна складова тензора напружень

$$\sigma_{\theta z} = \frac{2Mr}{\pi R^4}. \tag{3}$$

Необхідну умову проходження мартенситного перетворення визначаємо з умови мінімуму вільної енергії F за вмістом мартенситу Ξ за фіксованих значень деформації та температури [7], яка для цієї задачі зводиться до вигляду

$$K_\xi \Xi + \frac{E \beta'}{3(1 + \nu) \rho} e_i = 0. \tag{4}$$

де E – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона.

З умови (4) і третього з рівнянь (2) з врахуванням (3) одержимо розподіл мартенситу за товщиною стержня

$$\Xi = \frac{4\sqrt{3}(1+\nu)\beta'Mr}{\pi R^4 [2(1+\nu)\rho K_\xi - E(\beta')^2]}. \quad (5)$$

Якщо тепер зняти зі стержня прикладене навантаження ($M = 0$), то для матеріалів з достатньо широкою петлею гістерезису (тобто таких, в яких без додаткових зовнішніх впливів обернене перетворення не відбувається) [7-9] досягнутий фазовий стан у стержні збережеться і відповідатиме (5). Оскільки, як відомо [8,9], перехід матеріалу з аустеніту в мартенсит супроводжується об'ємним ефектом, то в стержні будуть існувати спричинені фазовим перетворенням залишкові напруження. У нашому формулюванні задачі в цих напруженнях буде тільки одна складова, відмінна від нуля, розподіл якої в стержні матиме вигляд

$$\sigma_r = \frac{2\sqrt{3}(1+\nu)\beta'(\beta' - 2\beta)Mr}{\pi R^4 (2 - 7\nu) [2(1+\nu)\rho K_\xi - E(\beta')^2]}. \quad (6)$$

На підставі формул (4) і (5) проведено обчислення для деяких поширених сплавів з пам'яттю форми. Рис. 1 ілюструє розподіл мартенситу в стержні радіуса $R = 10$ см, спричинений дією моменту кручення $M = 50$ кН·м. На рис. 2 показаний розподіл залишкових напружень, які виникли внаслідок проходження цього перетворення. Лінії 1 відповідають сплаву NiTi [10]: $\rho = 6850$ кг/м³, $\nu = 0,36$, $E = 116$ ГПа, $\beta = 0,5 \cdot 10^{-3}$, $\beta' = 2 \cdot 10^{-3}$, $K_\xi = 50$ м²/с²; лінії 2 – сплаву NiAl: $\rho = 7500$ кг/м³, $\nu = 0,31$, $E = 173$ ГПа, $\beta = 0,8 \cdot 10^{-3}$, $\beta' = 2 \cdot 10^{-3}$, $K_\xi = 50$ м²/с²; лінії 3 – сплаву CuAlNi: $\rho = 8050$ кг/м³, $\nu = 0,36$, $E = 110$ ГПа, $\beta = 0,3 \cdot 10^{-3}$, $\beta' = 10^{-3}$, $K_\xi = 30$ м²/с²; лінії 4 – сплаву CuZn: $\rho = 7920$ кг/м³, $\nu = 0,31$, $E = 120$ ГПа, $\beta = 0,4 \cdot 10^{-3}$, $\beta' = 1,4 \cdot 10^{-3}$, $K_\xi = 30$ м²/с².

Отож, з допомогою запропонованої моделі можна аналізувати напружено-

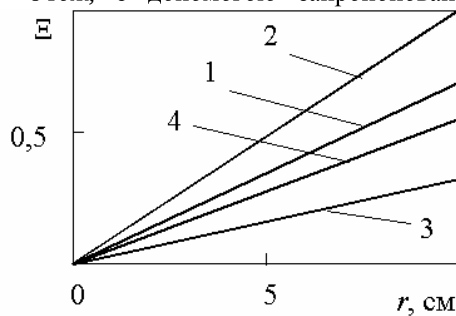


Рис. 1.

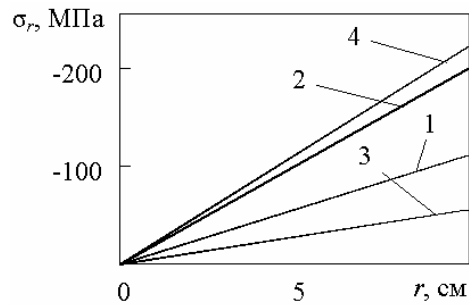


Рис. 2.

деформований стан елементів конструкцій, виготовлених зі сплавів з пам'яттю форми, при мартенситному перетворенні з врахуванням того, що утворення мартенситу спричинене зсувними напруженнями, а зміна об'єму, спричинена цим перетворенням, призводить до виникнення залишкових напружень.

1. Гольденблат И.И. Нелинейные проблемы теории упругости. – М., 1969.
2. Асташкін В., Гачкевич О., Онишко О., Боженко Б. Моделювання з використанням інваріантів тензорів напружень і деформацій термомеханічних процесів у деформованих твердих тілах при врахуванні структурних перетворень // *Машинознавство*. – 2003. – № 11. – С. 14–17.
3. Асташкин В., Боженко Б., Будз С., Онишко А. Моделирование с использованием инвариантов тензоров напряжений и деформаций термомеханических процессов в твердых телах при технологическом нагреве // *Projektowanie procesow i systemow technologicznych*. – Lublin: Societas Scientarium Lublinensis, 2003. – С. 164–170.
4. Підстригач Я.С., Бурак Я.Й. Деякі аспекти побудови нових моделей механіки твердого тіла з урахуванням електромагнітних процесів // *Вісн. АН УРСР*. – 1970. – № 12. – С. 18–31.
5. Асташкин В.И., Бурак Я.И., Онишко А.Е. Термодинамическое описание неравновесных процессов в деформируемых телах в области структурных превращений // *Термодинамика необратимых процессов*. – М.: Наука, 1987. – С. 177–185.
6. Онишко О., Боженко Б., Новацький В. Моделювання термомеханічних явищ в матеріалах з пам'яттю форми // *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*. – Львів, 2003. – С. 71–73.
7. Асташкін В.І., Будз С.Ф., Онишко О.Є. Кількісний опис фізико-механічних процесів у матеріалах з пам'яттю форми // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 1994. – № 4. – С. 60–66.
8. Лихачёв В.А., Кузьмин С.Л., Каменцева З.П. Эффект памяти формы. – Изд-во Ленингр. ун-та, 1987.
9. Сплавы с эффектом памяти формы / Под ред. Х. Фунакубо. – М., 1990.
10. Онишко О.Є., Асташкін В.І. Розрахунок фазового та напруженого стану консольного елемента давача температури при дії силового навантаження // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2001. – 44, № 2. – С. 142–145.

MODELLING OF BEAM PHASE AND STRESS STATE UNDER TORSION DURING STRUCTURAL CHANGES

Volodimir Astashkin¹, Oleksandr Gachkevich^{1,2}, Oleksiy Onishko¹, Bogdan Bogenko^{2,3}

¹*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
Naukova Str., 3b 79053 Lviv, Ukraine*

²*Technical University of Opole,
Stanislawa Mikolajchuka Str., 5 45-271 Opole, Poland*

³*Center of mathematical modeling,
Dudayeva Str., 15 79005 Lviv, Ukraine*

A model for quantitative description of a thermomechanical behavior of deformable solids allowing for structure transformations with use of stress and strain tensor invariants is proposed. Such approach takes into account the influence both of volume and shape changes on the system phase structure. As example, torsion of round beam made of shape memory alloy is investigated. The distribution of residual stresses induced by phase changes is obtained.

Key words: thermo-mechanics, invariant, structural transformations, twisting of bar, remaining tensions.

Стаття надійшла до редколегії 27.11.2007

Прийнята до друку 19.11.2008

УДК 539.3

ПІДКРІПЛЕННЯ СТІЛЬНИКОВОГО ТРУБОПРОВОДУ КІЛЬЦЕВИМИ РЕБРАМИ З ВРАХУВАННЯМ ДІЇ ВІДПОРНИХ ЗУСИЛЬ

Микола СТАЩУК¹, Віктор ОПАНАСОВИЧ², Мар'ян ДОРОШ¹

¹Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України
вул. Наукова, 5 79601 Львів, Україна

²Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Запропоновано дослідження підкріплених трубопроводів із стільниковими (пустотілими) стінками. На підставі класичних рівнянь теорії циліндричних оболонок знайдено усереднені компоненти вектора переміщень. Розв'язок цих рівнянь записали у формі подвійних тригонометричних рядів Фур'є. Враховували відпір ґрунтів.

Ключові слова: стільниковий трубопровід, кільцеві ребра, максимальний прогин трубопроводу, усереднені компоненти переміщень, циліндрична жорсткість, жорсткість на розтяг, замкнена циліндрична оболонка, коефіцієнт відпору ґрунту.

Трубопроводи є головними конструкційними елементами, які мають пряме застосування для прокладання і реновації систем гравітаційної і низьконапірної каналізації, водопроводу та ін.

Мета нашої праці – розглянути труби великого діаметра, які функціонують спільно з навколишнім середовищем [3, 5, 7, 9, 10], зокрема з ґрунтом. В таких трубопроводах зовнішнє навантаження може спричинити деформацію більшу за 3%; при цьому конструкція зберігає свою працездатність.

Ґрунт створює власне навантаження, яке діє безпосередньо на трубопровід у вертикальному напрямі. Варто зазначити, що в результаті взаємодії конструкції з навколишнім середовищем виникає горизонтальний відпір, який значно впливає на деформований стан гнучких труб. Такий горизонтальний відпір треба обов'язково враховувати під час розрахунку та проектування розглядуваних конструкцій.

Особливо вплив відпору ґрунту виявляється, якщо маємо більш ущільнене зовнішнє середовище та трубопроводи великого діаметра. Загальноприйнято у таких випадках використовувати емпіричну формулу [9, 10]

$$\frac{\Delta}{D} = \frac{C_1 q}{C_2 S_R + C_3 S_s}, \quad (1)$$

де Δ - прогин трубопроводу з суцільними стінками (максимальне зменшення вертикального діаметра); q - інтенсивність вертикального навантаження ґрунту; D - серединний діаметр трубопроводу; S_R - кільцева жорсткість труби; S_s - фактор жорсткості ґрунту; C_i ($i=1,2,3$) - сталі, які у різних національних стандартах і

будівельних правилах мають досить суттєву різницю [9]. Рівність (1) відповідає класичній формулі Шпенглера [11].

Підсиливши гнучкі труби пружними кільцевими підпорами, можна збільшити їхню кільцеву жорсткість, що дає змогу оптимізувати параметри конструкції, досягаючи мінімальної маси під час забезпечення достатньої експлуатаційної надійності трубопроводу. Приймаємо, що трубопровід утворений із спіралеподібної трубки. Тоді отримаємо, що стінки трубопроводу стільникові (пустотілі). Такі конструкції невеликої маси, перебуваючи у ґрунті, можуть витримувати значні зовнішні навантаження.

Ми аналітично визначимо максимальний прогин трубопроводу, який взаємодіє з навколишнім пружним середовищем і який підсилений пружними кільцевими ребрами жорсткості. В частковому випадку, а саме, коли маємо трубу без підпор, отримано результати, які зіставляли з даними, одержаними на підставі формули (1) для різних національних стандартів.

Формулювання задачі. Розглянемо довгий стільниковий полімерний трубопровід (рис. 1), виготовлений із спіралеподібної трубки, діаметр якої становить h , а товщина стінки трубки - d . Конструкція міститься в ґрунті на глибині H . Під впливом ваги ґрунту, який розміщений над трубопроводом, одержимо рівномірне розподілене навантаження q (рис. 2), яке сприйматиме конструкція у вертикальному напрямі. На

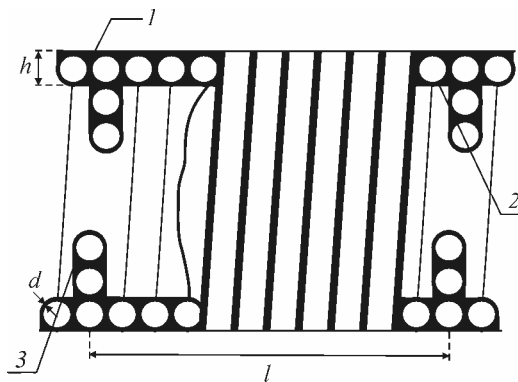


Рис. 1. Стилїникова спіралеподібна труба:
1 – зварний шов; 2 – трубка намотки стінки труби; 3 – пружні кільцеві підпори

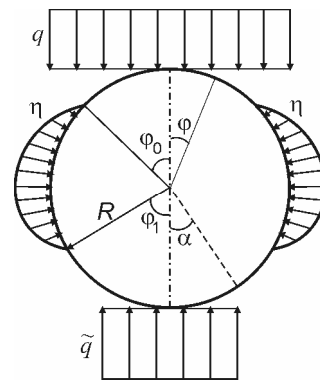


Рис. 2. Схема розподілу навантаження на трубопровід (поперечний переріз)

дно трубопроводу діятиме розподілене навантаження $\tilde{q} = q/\sin \alpha$, де 2α - кут контакту основи трубопроводу, яка сприйматиме навантаження $\tilde{q}$ (рис. 2). Приймаємо, що в радіальному напрямі діятиме відпір ґрунту η (рис. 2) на певній ділянці трубопроводу, вираз якого подано нижче.

Для збільшення кільцевої жорсткості конструкції трубопровід підсилюємо пружними кільцевими підпорами, які розміщені періодично з кроком l .

Оскільки маємо періодичну конструкцію, то нескінченну трубу розбиваємо на скінченні кругові замкнені циліндричні оболонки завдовжки l , на кінцях яких є шпангоути, які мають відповідно жорсткість.

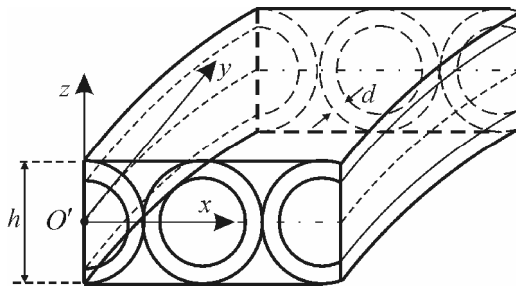


Рис. 3. Схема стінки конструкції, змонтованої пвстотілими стінками

поверхні оболонки будемо харак-теризувати x і $y=R\varphi$, де x - відстань точки по твірній від початкового екваторіального перерізу; φ - кут між початковою і довільною меридіальною площиною, тобто відраховується від вертикальної площини.

Компоненти напружень σ_x та σ_y набуватимуть такого вигляду [9]:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{f(x,z)E}{1-\nu^2} [\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y + z(\chi_x + \nu\chi_y)], \\ \sigma_y &= \frac{f(x,z)E}{1-\nu^2} [\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x + z(\chi_y + \nu\chi_x)],\end{aligned}\quad (2)$$

де $\varepsilon_x, \varepsilon_y; \chi_x, \chi_y$ – компоненти деформацій серединної поверхні оболонки; E – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона матеріалу трубопроводу; $f(x,z)=1$ коли в точці (x,z) стінки циліндричної оболонки є матеріалом та $f(x,z)=0$ – при його відсутності.

Прийmemo позначення $g(x) = \int_{-h/2}^{h/2} f(x,z)dz$, $t(x) = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 f(x,z)dz$, де $g(x)$ та

$t(x)$ – періодичні функції з періодом h .

Силу N_y та згинальний момент M_y [1,8] можемо подати у такому вигляді:

$$N_y = \frac{1}{1-\nu^2} (N'_y + \nu N'_x), \quad M_y = \frac{1}{1-\nu^2} (M'_y + \nu M'_x), \quad (3)$$

де $N'_y = E\varepsilon_y g(x)$, $M'_y = E\chi_y t(x)$ – відповідні складові сили та згинального моменту, які діють в напрямі $O'y$ у поперечному перерізі вирізаного з циліндричної оболонки одного кільця, ширина якого становить h ; $N'_x = E\varepsilon_x g(x)$, $M'_x = E\chi_x t(x)$ – складові сили та згинального моменту на одиницю довжини, які діють в напрямі $O'x$ в поперечному перерізі виділеної з циліндричної оболонки вузької смужки, паралельної до твірної труби. На підставі [6] та з огляду на те, що h мале порівняно з геометричними розмірами серединної поверхні оболонки, можемо зауважити:

Зауваження 1. Деформації ε_y та χ_y – малозміні в перерізі вирізаного кільця.

Розглядаємо трубопроводи великого діаметра. Тому приймаємо, що замкнена циліндрична оболонка складається з кругових вертикальних порожнистих кілець, які між собою зварені.

Побудова розв'язку задачі.

Виріжимо з оболонки малий елемент (рис. 3), який утворений двома парами суміжних площин, що нормальні до її серединної поверхні та введемо змішану систему координат $O'xyz$ (рис. 3).

Положення точки серединної

Зауваження 2. Складові сили N'_x та згинального моменту M'_x , на підставі симетричності зовнішнього навантаження стосовно осі $O'x$, також змінюються мало на проміжку $[x - h/2, x + h/2]$.

Усереднивши складову сили N'_y і згинального моменту M'_y , та компоненти деформацій $\varepsilon_x = N'_x / E g(x)$, $\chi_x = M'_x / E t(x)$ на проміжку $[x - h/2, x + h/2]$ і врахувавши *зауваження 1 і 2*, одержимо такі вирази:

$$\begin{aligned} \int_{x-h/2}^{x+h/2} N'_y dx &\approx \frac{E}{h} \int_{x-h/2}^{x+h/2} \varepsilon_y dx \cdot \int_{x-h/2}^{x+h/2} g(x) dx, \\ \int_{x-h/2}^{x+h/2} M'_y dx &\approx \frac{E}{h} \int_{x-h/2}^{x+h/2} \chi_y dx \cdot \int_{x-h/2}^{x+h/2} t(x) dx, \\ \int_{x-h/2}^{x+h/2} \varepsilon_x dx &\approx \frac{1}{hE} \int_{x-h/2}^{x+h/2} N'_x dx \cdot \int_{x-h/2}^{x+h/2} 1/g(x) dx, \\ \int_{x-h/2}^{x+h/2} \chi_x dx &\approx \frac{1}{hE} \int_{x-h/2}^{x+h/2} M'_x dx \cdot \int_{x-h/2}^{x+h/2} 1/t(x) dx. \end{aligned} \quad (4)$$

Введемо усереднені переміщення

$$u^*(x, y) = \Phi u(x, y), \quad v^*(x, y) = \Phi v(x, y), \quad w^*(x, y) = \Phi w(x, y), \quad (5)$$

де $u(x, y)$, $v(x, y)$ та $w(x, y)$ - компоненти вектора переміщень. Тут $\Phi u = \frac{1}{h} \int_{x-h/2}^{x+h/2} u dx$ -

інтегральний оператор, який усереднює функцію u на проміжку $[x - h/2, x + h/2]$.

Застосувавши теореми диференціювання інтегралів Рімана й параметричних інтегралів [2] до виразів для деформацій [1] $\varepsilon_x = \partial u / \partial x$; $\varepsilon_y = \partial v / \partial y + w/R$; $\chi_y = -\partial^2 w / \partial y^2 - w/R^2$ та $\chi_x = -\partial^2 w / \partial x^2$ і врахувавши співвідношення (5), одержимо усереднені компоненти деформації для замкнутої циліндричної оболонки

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^* &= \frac{\partial u^*(x, y)}{\partial x}; \quad \varepsilon_y^* = \frac{\partial v^*(x, y)}{\partial y} + \frac{w^*}{R}; \\ \chi_y^* &= -\frac{\partial^2 w^*(x, y)}{\partial y^2} - \frac{w^*}{R^2}, \quad \chi_x^* = -\frac{\partial^2 w^*(x, y)}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Отож, з рівностей (3), виразів (4) та усереднених деформації (6) запишемо такі співвідношення для усереднених сил і згинальних моментів:

$$N_y^*(x, y) = B_y^* \varepsilon_y^*(x, y) + \nu B_x^* \varepsilon_x^*(x, y), \quad M_y^*(x, y) = D_y^* \chi_y^* + \nu D_x^* \chi_x^*, \quad (7)$$

де $N_y^* = (\Phi N_y' + \nu \Phi N_x') / (1 - \nu^2)$, $M_y^* = -(\Phi M_y' + \nu \Phi M_x') / (1 - \nu^2)$ – відповідні усереднена сила та згинальний момент; D_y^* , D_x^* та B_y^* , B_x^* – циліндричні жорсткості та жорсткості на розтяг замкненої циліндричної оболонки, які зі співвідношень (4) визначаємо так:

$$B_y^* = \frac{EF}{h(1 - \nu^2)}, \quad B_x^* = \frac{hE}{G(1 - \nu^2)}; \quad D_y^* = \frac{I_x E}{h(1 - \nu^2)}, \quad D_x^* = \frac{hE}{J_x(1 - \nu^2)}. \quad (8)$$

Тут $F = h\Phi g(x)$ – площа перерізу трубки, що утворює стінку труби з урахуванням зварного шва; $G = h\Phi(1/g(x))$; $I_x = h\Phi t(x)$ – момент інерції перерізу трубки набору стінки конструкції з урахуванням зварного шва стосовно осі Ox ; $J_x = h\Phi(1/t(x))$.

Зауважимо, що подібно були усереднені інші рівнодійні сили [1,9] $N_x(x, y)$, $N_{xy}(x, y)$ та згинний $M_x(x, y)$ і крутний $M_{xy}(x, y)$ моменти.

Враховуючи співвідношення (7), на підставі [1, 9] можемо одержати рівняння лінійної моментної теорії анізотропних циліндричних оболонок із суцільними стінками для визначення усереднених компонент вектора переміщень u^* , v^* та w^* . З'ясовано, що за такого формулювання задачі, значення D_y^* і D_x^* , а також B_y^* та B_x^* , суттєво між собою не відрізняються. Тому у подальших обчисленнях приймаємо ізотропність наведеної замкненої оболонки з циліндричною жорсткістю та жорсткістю на розтяг

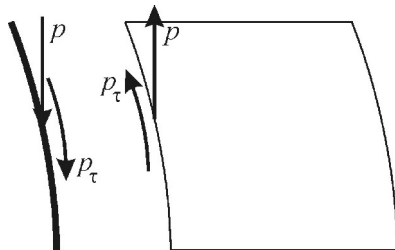


Рис. 4. Схема контакту пружної підпори з циліндричною оболонкою

$$D^* = \frac{I_x E}{h(1 - \nu^2)}, \quad B^* = \frac{EF}{h(1 - \nu^2)},$$

$$\text{де } I_x = h^4/12 - \pi(h/2 - d)^4/4, \quad F = h^2 - \pi(h/2 - d)^2.$$

В результаті взаємодії пружних шпангоутів та циліндричної оболонки на її кінцях виникатимуть невідомі розподілені по ободу взаємодіючі нормальні $p(\varphi)$ та дотичні $p_\tau(\varphi)$ зусилля.

Враховуючи наведені міркування та вирази для рівнодійних зусиль (7), бачимо, що у сформульованій задачі компоненти вектора усереднених переміщень повинні задовольняти рівняння лінійної моментної теорії [1] для ізотропної циліндричної оболонки з суцільною стінкою

$$\begin{aligned} L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w &= 0, \quad L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w = -q'_\tau + p'_\tau, \\ L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w &= -q' + p' - \eta, \end{aligned} \quad (9)$$

де q' , q'_τ – зовнішні розподілені навантаження відповідно у нормальному та дотичному напрямі; p' та p'_τ невідомі нормальні та дотичні розподілені контактні навантаження; η – горизонтальний відпір ґрунту засипки.

Диференціальні оператори L_{kl} , які входять до системи рівнянь (9), визначають так:

$$\begin{aligned} L_{11} &= B \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right), \quad L_{12} = B \frac{1+\nu}{2R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \varphi}, \quad L_{13} = L_{31} = B \frac{\nu}{R} \frac{\partial}{\partial x}, \\ L_{21} &= B \frac{1+\nu}{2R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \varphi}, \quad L_{22} = B \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right), \quad L_{23} = L_{32} = \frac{B}{R^2} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ L_{33} &= D \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \varphi^2} + \frac{1}{R^4} \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} + \frac{2\nu}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2}{R^4} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{R^4} I \right) + \frac{B}{R^2} I. \end{aligned} \quad (10)$$

Тут I – одиничний оператор; R – радіус серединної поверхні циліндричної оболонки.

У рівняннях (9), і нижче, індекс “*” будемо опускати, але розуміючи, що знаходимо усереднені переміщення для замкненої стільникової циліндричної оболонки.

Горизонтальний відпір ґрунту засипки на циліндричну оболонку подамо у вигляді радіальної реакції (рис 2)

$$\eta(\varphi, x) = \begin{cases} kw(\varphi, x), & \text{коли } w(\varphi, x) > 0, \\ 0, & \text{коли } w(\varphi, x) \leq 0, \end{cases} \quad (11)$$

де k – коефіцієнт відпору пружного середовища, що оточує оболонку в нормальному напрямі.

Приймаємо, що $w(\varphi, x) > 0$ набуває значення в прямолінійній області

$$\Omega = \{ \varphi \in [\varphi_0, \pi - \varphi_1] \cup [\pi + \varphi_1, 2\pi - \varphi_0], x \in [0, l] \},$$

де кути φ_0, φ_1 зображені на рис. 2, а їхні значення подано далі.

Розв’язок диференціальної системи рівнянь (10) подаємо у вигляді подвійних тригонометричних рядів Фур’є [8]

$$\begin{aligned} w &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} C_{mn} \cos \frac{m\pi x}{l} \cos n\varphi, \quad v = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} B_{mn} \cos \frac{m\pi x}{l} \sin n\varphi, \\ u &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \cos n\varphi. \end{aligned} \quad (12)$$

При такому формулюванні задачі на кінцях циліндричної оболонки запишемо крайові умови

$$w(\varphi) = W(\varphi), \quad v(\varphi) = V(\varphi); \quad u = 0, \quad \partial w / \partial x = 0, \quad \text{при } x = 0 \text{ та } x = l. \quad (13)$$

Тут $W(\varphi)$, $V(\varphi)$ – компоненти вектора переміщень шпангоутів відповідно у радіальному та тангенціальному напрямках.

Безпосередньою підстановкою $x = 0$ та $x = l$ отримаємо, що компоненти вектора переміщень циліндричної оболонки (12) задовольняють другу групу крайових умов (13).

Зовнішнє навантаження $q(x, \varphi)$ і $\tilde{q}(x, \varphi)$, яке діє на оболонку, подамо у вигляді подвійних тригонометричних рядів Фур'є

$$\begin{aligned} q'(x, \varphi) &= (q(x, \varphi) + \tilde{q}(x, \varphi)) \cos \varphi = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} q_{mn} \cos \frac{m\pi x}{l} \cos n\varphi, \\ q'_\tau(x, \varphi) &= (q(x, \varphi) + \tilde{q}(x, \varphi)) \sin \varphi = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} q_{\tau mn} \cos \frac{m\pi x}{l} \sin n\varphi, \end{aligned} \quad (14)$$

де

$$\begin{aligned} q_{0n} &= -2\pi q \cos \frac{n\pi}{2} / (n^2 - 1) + \\ &+ (-1)^{n-1} q (\sin((n-1)\alpha) / (n-1) + \sin((n+1)\alpha) / (n+1)) / \sin \alpha, \\ q_{\tau 0n} &= -2\pi n q \cos \frac{n\pi}{2} / (n^2 - 1) + \\ &+ (-1)^{n-1} q (\sin((n-1)\alpha) / (n-1) - \sin((n+1)\alpha) / (n+1)) / \sin \alpha, \end{aligned}$$

коли $n = 2, 3, \dots$, а $q_{mn} = q_{\tau mn} = 0$ при $m = 1, 2, 3, \dots$, $n = 2, 3, \dots$.

Щоб привести невідомі контактні зусилля $p(\varphi)$ та $p_\tau(\varphi)$, які виникають в результаті дії шпангоутів на кінцях циліндричної оболонки, до розмірностей розподіленого тиску, треба їх подати у такому вигляді [1, 8]:

$$\begin{aligned} p'(x, \varphi) &= \frac{p(\varphi)}{\Delta x} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} p_{mn} \cos \frac{m\pi x}{l} \cos n\varphi, \\ p'_\tau(x, \varphi) &= \frac{p_\tau(\varphi)}{\Delta x} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} p_{\tau mn} \cos \frac{m\pi x}{l} \sin n\varphi, \end{aligned} \quad (15)$$

де

$$p_{mn} = \begin{cases} (1 + (-1)^m) 2p_n / l, & m = 1, 2, 3, \dots \\ 2p_n / l, & m = 0, \end{cases}, \quad p_{\tau mn} = \begin{cases} (1 + (-1)^m) 2p_{\tau n} / l, & m = 1, 2, 3, \dots \\ 2p_{\tau n} / l, & m = 0. \end{cases}$$

Тут Δx – безмежно мала величина [1, 8]; p_n , $p_{\tau n}$ – невідомі коефіцієнти, які потрібно визначити.

Нормальний відпір ґрунту $\eta(x, \varphi)$ розкладемо у подвійний тригонометричний ряд Фур'є

$$\eta(x, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} C'_{mn} \cos \frac{m\pi x}{l} \cos n\varphi.$$

Врахувавши (11) і (12) та помноживши праву і ліву частини попереднього розвинення на $\cos m\pi x/l \cdot \cos n\varphi d\varphi dx$ і проінтегрувавши праву і ліву частину в межах від 0 до l по x та від 0 до 2π по φ , а також врахувавши ортогональність базисних функцій, отримаємо

$$C'_{mn} = \frac{k}{\pi} \sum_{i=2}^{\infty} C_{mi} f_{in}, \quad n = 2, 3, \dots, \quad m = 0, 1, \dots, \quad (16)$$

$$\text{де } f_{in} = \int_{\varphi_0}^{\pi-\varphi_1} \cos i\varphi \cos n\varphi d\varphi + \int_{\pi+\varphi_1}^{2\pi-\varphi_0} \cos i\varphi \cos n\varphi d\varphi.$$

У розвиненнях (14)–(16) зазначено коефіцієнти при $n = 2, 3, \dots$, оскільки членів $n=0$ та $n=1$ немає у виразах (12).

Підставляючи розвинення (12), (14)–(16) у систему диференціальних рівнянь (9), одержимо для кожного значення m свою систему лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) для визначення невідомих коефіцієнтів A_{mn} , B_{mn} та C_{mn}

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 A_{mn} - \frac{(1-\nu)n^2}{2R^2} A_{mn} - \frac{1+\nu}{2R} \frac{mn\pi}{l} B_{mn} - \frac{\nu}{R} \frac{m\pi}{l} C_{mn} = 0, \\ & -\frac{n^2}{R^2} B_{mn} - \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 B_{mn} - \frac{1+\nu}{2R} \frac{mn\pi}{l} A_{mn} - \frac{n}{R^2} C_{mn} = \frac{-q_{\tau mn} + p_{\tau mn}}{B}, \\ & D \left(\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 + 2 \left(\frac{mn\pi}{Rl}\right)^2 + \frac{n^4}{R^4} - \frac{2\nu}{R^2} \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 - \frac{2n^2}{R^4} + \frac{1}{R^4} \right) C_{mn} + \\ & + \frac{B}{R^2} \left(\frac{R\nu m\pi}{l} A_{mn} + nB_{mn} + C_{mn} \right) = \frac{k}{\pi} \sum_{i=2}^N C_{mi} f_{in} - q_{mn} + p_{mn}, \end{aligned} \quad (17)$$

де $n = 2, 3, \dots$, $m = 0, 1, \dots$

Розв'язавши системи лінійних алгебричних рівнянь (17), для кожної пари m та n одержимо

$$\begin{aligned} B_{mn} &= p_n B'_{mn} + p_{\tau n} B''_{mn} + q_{mn} B'''_{mn} + q_{\tau mn} B^{IV}_{mn}, \\ C_{mn} &= p_n C'_{mn} + p_{\tau n} C''_{mn} + q_{mn} C'''_{mn}, \end{aligned} \quad (18)$$

де C'_{mn} , C''_{mn} , C'''_{mn} , C^{IV}_{mn} та B'_{mn} , B''_{mn} , B'''_{mn} , B^{IV}_{mn} – сталі, вирази яких у цій статті не наводимо з огляду на їхню громіздкість.

Рівняння рівноваги шпангоутів мають вигляд [4]

$$\begin{aligned}
& \frac{E'I_p}{2} \left[\frac{d^3}{d\varphi^3} \left(\frac{d^2 W(\varphi)}{d\varphi^2} + W(\varphi) \right) + \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{d^2 V(\varphi)}{d\varphi^2} + V(\varphi) \right) \right] + \\
& + R^4 \left(-p_\tau(\varphi) + \frac{dp(\varphi)}{d\varphi} \right) = 0, \\
& \frac{E'F_p}{2} \left(\frac{d^2}{d\varphi^2} + 1 \right) \left(\frac{dV(\varphi)}{d\varphi} - W(\varphi) \right) + R^2 \left(-p(\varphi) + \frac{dp_\tau(\varphi)}{d\varphi} \right) = 0, \quad (19)
\end{aligned}$$

де I_p – момент інерції поперечного перерізу кільцевої підпори стосовно осі симетрії підпори; F_p – площа поперечного перерізу кільцевої підпори.

Компоненти вектора переміщень пружних шпангоутів на підставі симетрії подамо у вигляді

$$W(\varphi) = \sum_{n=2}^{\infty} W_n \cos n\varphi, \quad V(\varphi) = \sum_{n=2}^{\infty} V_n \sin n\varphi. \quad (20)$$

Складових переміщень, які зображено членами $n = 0$ та $n = 1$ у розвиненнях (20) – немає, оскільки вони зв'язані з жорстким переміщенням шпангоута. Невідомі контактні зусилля на кільцевих підпорах подамо за допомогою розвинення

$$p(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cos n\varphi, \quad p_\tau(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{\tau n} \sin n\varphi. \quad (21)$$

Підставляючи розвинення (20) та (21) у рівняння рівноваги шпангоута (19) та скориставшись умовою ортогональності тригонометричних функцій, отримаємо такі вирази для визначення коефіцієнтів W_n та V_n :

$$\begin{aligned}
W_n &= -R^2 \frac{(F_k R^2 + I_k) n p_n + (F_k R^2 - n^2 I_k) p_{\tau n}}{2n(n^2 - 1)^2 E I_k F_k}, \\
V_n &= -R^2 \frac{(F_k R^2 + n^2 I_k) n p_n + (F_k R^2 - n^4 I_k) p_{\tau n}}{2n^2(n^2 - 1)^2 E I_k F_k}, \quad (22)
\end{aligned}$$

де $n = 2, 3, \dots$

На підставі перших двох крайових умов (13), враховуючи (18) та (22), отримаємо для кожного n свою систему двох лінійних алгебричних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів p_n та $p_{\tau n}$

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{l} (p_n C'_{0n} + p_{\tau n} C''_{0n} + q_{0n} C'''_{0n} + q_{\tau 0n} C^{IV}_{0n}) + \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{l} (1 + (-1)^m) (p_n C'_{mn} + p_{\tau n} C''_{mn} + q_{mn} C'''_{mn} + q_{\tau mn} C^{IV}_{mn}) = W_n \\
& \frac{2}{l} (p_n B'_{0n} + p_{\tau n} B''_{0n} + q_{0n} B'''_{0n} + q_{\tau 0n} B^{IV}_{0n}) +
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{l} (1 + (-1)^m) (p_n B'_{mn} + p_{rn} B''_{mn} + q_{mn} B'''_{mn} + q_{rmn} B^{IV}_{mn}) = V_n.$$

Тут $n = 2, 3, \dots$, $m = 0, 1, 2, \dots$.

Коефіцієнт відпору ґрунту k у нормальному напрямі залежить від типу ґрунту та його ущільнення. Він нелінійно залежить від зовнішнього навантаження. В багатьох розрахунках трубопроводів з навколишнім пружним середовищем приймають, що

$$E'_s = kR, \quad (23)$$

де E'_s [8] – січний модуль ґрунту.

Числовий розрахунок трубопроводу. На рис. 5–7 показано результати числового розрахунку сформульованої задачі для модуля Юнга $E = 850 \text{ МПа}$ і коефіцієнта Пуассона матеріалу конструкції $\nu = 0.25$; глибині засипки $H = 1 \text{ м}$ та густині ґрунту $\rho = 1700 \text{ кг/м}^3$. Для прикладу вибирали, що дорівнюють $\alpha = \pi/6$. Суцільні лінії на усіх наведених нижче рисунках відповідають трубопроводу з радіусом серединної поверхні оболонки $R = 1 \text{ м}$, а штрихові – з $R = 0.5 \text{ м}$. Діаметр трубки з набору стінки конструкції становив $h = R/20$, а товщина стінки трубки $d = h/10$.

На рис. 5. зображено графічну залежність зведеного максимального прогину $\Delta_{\max}/h$ трубопроводу від коефіцієнта відпору ґрунту k , де $\Delta_{\max} = w(l/2, 0) + w(l/2, \pi)$ – максимальне зменшення діаметра трубо-проводу, який підсилений пружними кільцевими підпорами. Криві 1 і 1' на рис. 5 побудовані для трубопроводів, підсилених періодичними пружними кільцевими підпорами, які утворені з п'яťох порожнистих кілець, які розміщені з кроком $l = 2R$; відповідно криві 2 і 2' побудовані для конструкцій, у яких періодичні підпори розміщені з кроком $l = 3R$.

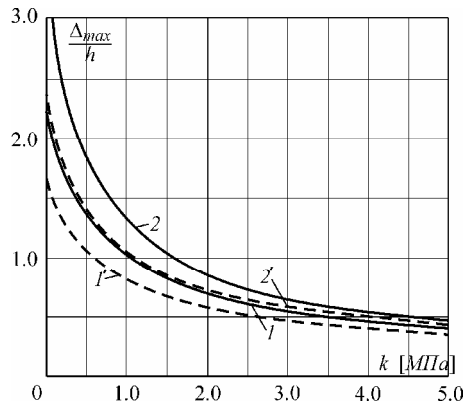


Рис. 5. Зміна зведеного максимального прогину $\Delta_{\max}/h$ трубопроводу від коефіцієнта відпору ґрунту засипки k

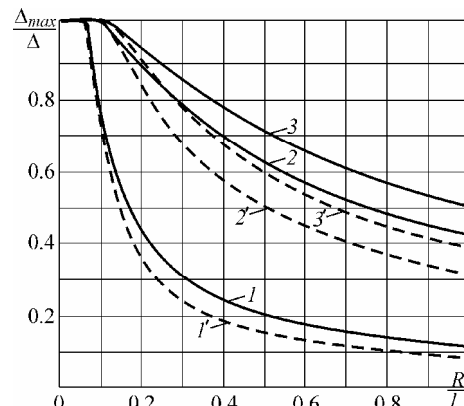


Рис. 6. Зміна зведеного максимального прогину $\Delta_{\max}/\Delta$ від величини R/l

На рис. 6 зображено графічні залежності зведеного максимального прогину конструкції $\Delta_{\max}/\Delta$ від величини R/l , де $\Delta = w(l/2, 0) + w(l/2, \pi)$ – максимальне зменшення діаметра трубопроводу без підпор, тобто, коли $l \rightarrow \infty$. Криві 1 і 1' побудовані для підсилених шпангоутами трубопроводів без урахування відпору землі, криві 2 і 2' побудовані при січному модулі ґрунту $E'_s = 1 \text{ МПа}$, а криві 3 і 3' відповідно, коли $E'_s = 2 \text{ МПа}$.

Криві 1, 1' на рис. 7 відображають відносне переміщення w/h у нормальному напрямі по ободу оболонки на її кінцях, а криві 2 і 2' при $x = l/2$.

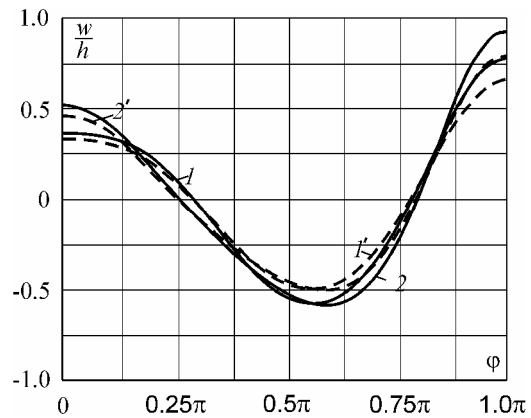


Рис. 7. Залежність відносного нормального переміщення w/h по ободу трубопроводу

В розрахунках приймали, що кути $\varphi_0 \approx 0.26\pi$, $\varphi_1 \approx 0.2\pi$ і, як бачимо з рис. 7, ці, кути спільномірні з кутами, за яких нормальне переміщення w перетворюється в нуль.

Для заданого матеріалу та зовнішнього навантаження у табл. подано деякі результати, отримані для труби без підпор (I) та за формулою (1) (II-V) для різних національних стандартів, коли $h=R/20$ і $d=h/2$.

Розрахунок	R [см]	Δ [см] при $E_s' = 0 \text{ МПа}$	Δ [см] при $E_s' = 1 \text{ МПа}$	Δ [см] при $E_s' = 2 \text{ МПа}$
<i>I</i>	100	33,8	5,5	3,2
<i>II</i>	100	38,4	5,0	2,6
<i>III</i>	100	42,2	5,4	2,9
<i>IV</i>	100	19,0	3,6	1,9
<i>V</i>	100	16,0	2,0	1,1

Числові дані розрахунку *I* відповідають за вищенаведеним алгоритмом розв'язання сформульованої задачі; *II* – за англійським національним стандартом [9]; *III* – за російським національним стандартом [9]; *IV* – за німецьким національним стандартом [9]; *V* – за швейцарським національним стандартом [9]. Зауважимо, що дані за англійським та російським національними стандартами спільномірні з результатами числового розв'язку сформульованої задачі.

1. Авдотин А.С. Прикладные методы расчета оболочек и тонкостенных конструкций. – М., 1969.
2. Архипов Г.И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу – М., 1999.
3. Баженов В. А. Изгиб цилиндрических оболочек в упругой среде – Львов, 1975.
4. Галкин С. И., Левицкая Т. Е. Расчет цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами, на действие сосредоточенных сил // Труды VIII Всесоюзной конференции по теории оболочек та пластин – М., 1973. – С. 647–652.
5. Максимук О. В., Махніцький Р. М., Щербина Н. М. Математичне моделювання та методи розрахунку тонкостінних композитних конструкцій. – Львів, 2005.
6. Работнов Ю.Н. Сопротивление материалов. – М., 1962.
7. Стацук Н. Г. Задачи механики упругих тел с трещиноподобными дефектами. – К., 1993.
8. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.П. Пластины и оболочки. М., 1966.
9. Швабауэр В. В., Гвоздев И. В. Расчет подземного трубопровода из термопластов // Полимерные трубы. – 2007, № 3. – С. 52–56.
10. Jonson L. E. Plastic pipes for water supply and sewage disposal // Borealis. – 1996. – 156. P. 223–233.
11. Spangler M. G. Structural design of flexible pipe culverts. – Iowa Eng. Exp Stat. Bull. 153. – 1941.

**REINFORCEMENT OF CELLULAR PIPELINE BY CIRCULAR RIBS
TAKING INTO ACCOUNT THE ACTION OF EFFORTS****Mykola Stashchuk¹, Viktor Opanasovich², Maryan Dorosh¹**

¹*Karpenko Physico-Mechanical Institute of the NAS of Ukraine,
Naukova Str., 5 79601 Lviv, Ukraine*

²*Ivan Franco National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine*

This work offers investigation of pipelines with cellular (hollow) walls. Basing on the classical equations of theory of cylinder jackets found averaged values of dislocation. Solution of these equations was written in form of double trigonometric Fourier series. Thus it was taken into account repulse of soils

Key words: the faveolate pipe line, ring edges, maximum buckling of the pipe line, average components of conveyances, cylinder stiffness, a self-contained cylinder environment, quotient of repulse of soil.

Стаття надійшла до редколегії 28.05.2007

Прийнята до друку 19.11.2008

КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ ВАЛА І ТІЛА З ЦИЛІНДРИЧНОЮ ПОРОЖНИНОЮ ЗА НАЯВНОСТІ ЗАЗОРУ МІЖ НИМИ**Володимир НЕСТЕР, Георгій СУЛИМ***Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна*

Запропоновано модель керування контактною взаємодією циліндричного вала з простором з циліндричною порожниною. У формулюванні задачі вимагається, щоб при заданому радіальному навантаженні береги щілини один стосовно одного в радіальному напрямі в межах розрізу розходились за певним заданим законом, а на продовженні розрізу взаємного зміщення берегів не було. Така задача зводиться до інтегральних рівнянь, розв'язувати які пропонують методом розривних інтегралів Фур'є. Віднайдено напружено-деформований стан у тілі, зроблено числовий аналіз розв'язків задачі та побудовано відповідні графіки.

Ключові слова: контактна взаємодія, реологічний шар, розривний інтеграл Фур'є, поверхня розриву.

Механіка контактних взаємодій деформівних твердих тіл (Contact Mechanics) є важливою складовою сучасної механіки суцільного середовища. Саме контактною взаємодією визначаються процеси зношування деталей, зокрема у машинобудуванні. Тут важливе значення має фактор руйнування матеріалів у зоні контакту, що визначається контактними умовами. Огляд праць, які пов'язані з механікою контактних взаємодій, зробили Ворович І.І. та Александров В.М. у монографії [2]. У [9] узагальнено літературні дані та результати досліджень авторів з питань визначення контактних напружень при внутрішньому контактуванні циліндричних тіл.

Числово-аналітичні методи і результати розв'язування для важливого кола неklasичних задач механіки контактних взаємодій для пружних тіл, зокрема для циліндра та простору з циліндричною порожниною, подано у праці [1]. Александров В.М. і Пожарський Д.А. для циліндричних тіл розглянули осесиметричні задачі. У цій праці запропоновано неосесиметричну неklasичну математичну модель контактної взаємодії пружного вала з циліндричною порожниною з урахуванням можливості існування реологічних шарів (зовнішніх) на контактуючих поверхнях. Внаслідок постулювання наявності внутрішнього реологічного шару (рис. 1) виникає неосесиметричність задачі. Зазначимо, що можливість існування поверхневих і внутрішніх реологічних шарів є фізично обґрунтованою. Оскільки на поверхні деформівного тіла відбуваються складні фізико-хімічні процеси, то такі поверхні за своїми властивостями відрізняються від середовищ, що до них пристають [10]. Поверхневий натяг на поверхнях рідин і твердих тіл є одним із проявів цього явища. Саме такі відмінності і можуть бути змодельовані шаром зі специфічними властивостями.

Проблема визначення напружено-деформованого стану у взаємодіючих тілах пов'язана з умінням розв'язувати контактні задачі коректним способом. Характерною особливістю контактних задач є те, що з математичного погляду вони здебільшого є задачами зі змішаними крайовими умовами і зводяться до інтегральних рівнянь, які потребують застосування специфічних методів розв'язування [1]. Сформульована у цій праці задача зводиться до інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду, розв'язувати які пропонуємо методом розривних інтегралів Фур'є [4]. Віднайдено напружено-деформований стан у тілі, зроблено числовий аналіз розв'язків задачі та побудовано відповідні графіки.

Схему задачі зображено на рис. 1. Розглянуто необмежене пружне тіло з розрізом по дузі кола, що перебуває в умовах плоскої деформації. На берегах розрізу діє постійне радіальне навантаження величиною $2\mu P_0$. Припускаємо також існування на берегах розрізу межових шарів нульової товщини з певними реологічними властивостями, зведеною характеристикою яких є величина q ($0,5 < q < 1$) [3]. Поза фронтом розрізу

на продовженні дуги кола, а також на відрізку **OB** та півосі **BC** теж існують аналогічні реологічні шари з цією самою зведеною характеристикою q . Будемо вимагати, щоб за заданого радіального навантаження береги щілини один стосовно одного в радіальному напрямі в межах розрізу розходились за певним заданим законом, а на продовженні розрізу взаємного зміщення берегів не було. На кутові переміщення на розрізі та поза ним не накладаються жодні умови і вони визначаються розв'язками задачі. Тобто, кутові переміщення можуть бути розривними при переході через поверхню $\alpha = 1$.

З огляду на це, запропоновану задачу можна вважати моделлю керування контактною взаємодією циліндричного вала (рис. 1, область I) із простором з циліндричною

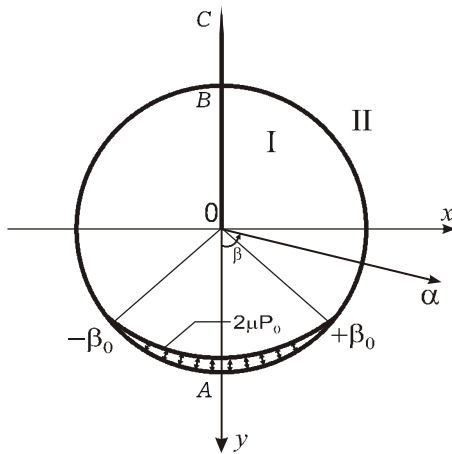


Рис. 1. Схema задачі

порожниною (рис. 1, область II) за допомогою реологічних шарів на їхніх поверхнях і лініях **OB** і **BC**. Умовами контакту цих тіл є рівність радіальних переміщень їхніх поверхонь поза зоною навантаження і допускається проковзування контактуючих поверхонь. Як зазначалося вище, в області навантаження взаємне розходження поверхонь є заданим за певним законом. Зокрема, в частковому випадку можна вимагати, щоб взаємного зміщення берегів в області навантаження і поза ним також не було. Можливість формулювання та розв'язання такої задачі з'ясовано у працях [5, 6, 8]. У нашій праці таке зміщення берегів задамо за законом

$f(\beta^2)(\beta_0^2 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$, де β_0 – величина кута в межах розрізу чи зони навантаження; r – параметр величини зміщення.

Подання розв'язків рівнянь статки пружного тіла через інтеграли Фур'є. Однорідне пружне тіло віднесемо до безрозмірної циліндричної системи координат $(R\alpha, \beta, R\gamma)$ і вважатимемо, що під дією зовнішнього навантаження у ньому реалізується стан плоскої деформації. Тоді ненульові компоненти $Ru_\alpha(\alpha, \beta)$ і $Ru_\beta(\alpha, \beta)$ вектора пружного переміщення $\mathbf{u}(\alpha, \beta)$ будуть розв'язками системи рівнянь статки

$$k^2 \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} - \frac{2}{\alpha} \frac{\partial \omega_\gamma}{\partial \beta} = 0, \quad k^2 \frac{\partial \theta}{\partial \beta} + 2\alpha \frac{\partial \omega_\gamma}{\partial \alpha} = 0 \quad (1)$$

в полярних координатах (α, β) в області $0 \leq \alpha < \infty$, $0 \leq |\beta| < \pi$ стосовно ключових функцій об'ємної деформації θ та єдиної ненульової компоненти ω_γ вектора локального жорсткого повороту $\Omega = 0,5 \text{rot } \mathbf{u}$

$$\begin{aligned} \theta &\equiv \text{div } \mathbf{u} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha u_\alpha) + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u_\beta}{\partial \beta}, \\ \omega_\gamma &\equiv \frac{1}{2} (\text{rot } \mathbf{u})_\gamma = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha u_\beta) - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \beta} \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

У рівняннях (1) та співвідношеннях (2) введено такі позначення: $k^2 = (\lambda + 2\mu)/\mu = 2(1 - \nu)/(1 - 2\nu)$, де λ і μ – пружні сталі Ляме; ν – коефіцієнт Пуассона; R – радіус кола, що містить розріз у межах $-\beta_0 \leq \beta \leq \beta_0$.

Розв'язки рівнянь (1) подамо у вигляді інтегралів Фур'є і у випадку симетричного стосовно кутової координати β навантаження берегів розрізу в області $0 \leq \alpha \leq 1$ (рис. 1, область I) матимемо:

$$\begin{aligned} \theta^{(1)}(\alpha, \beta) &= 4 \int_0^\infty (\xi + 1) \mathbf{H}(\xi) \alpha^\xi \cos(\xi \beta) d\xi, \\ \omega_\gamma^{(1)}(\alpha, \beta) &= 2k^2 \int_0^\infty (\xi + 1) \mathbf{H}(\xi) \alpha^\xi \sin(\xi \beta) d\xi, \end{aligned} \quad (3)$$

а в області $1 \leq \alpha < \infty$ (рис. 1, область II), зникаючі на безмежності значення

$$\begin{aligned} \theta^{(2)}(\alpha, \beta) &= 4 \int_0^\infty (\xi - 1) \mathbf{G}(\xi) \alpha^{-\xi} \cos(\xi \beta) d\xi, \\ \omega_\gamma^{(2)}(\alpha, \beta) &= -2k^2 \int_0^\infty (\xi - 1) \mathbf{G}(\xi) \alpha^{-\xi} \sin(\xi \beta) d\xi. \end{aligned} \quad (4)$$

Маючи розв'язки (3) і (4), з системи рівнянь першого порядку (2) визначимо компоненти $\mathbf{u}_\alpha^{(i)}(\alpha, \beta)$ та $\mathbf{u}_\beta^{(i)}(\alpha, \beta)$ ($i = 1, 2$) вектора пружного переміщення і в області $0 \leq \alpha \leq 1$ запишемо їх так:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\alpha^{(1)}(\alpha, \beta) &= \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \xi \mathbf{V}(\xi) \alpha^\xi \cos(\xi \beta) d\xi - \alpha \int_0^\infty [(k^2 - 1)\xi - 2] \mathbf{H}(\xi) \alpha^\xi \cos(\xi \beta) d\xi, \\ \mathbf{u}_\beta^{(1)}(\alpha, \beta) &= -\frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \xi \mathbf{V}(\xi) \alpha^\xi \sin(\xi \beta) d\xi + \alpha \int_0^\infty [(k^2 - 1)\xi + 2k^2] \mathbf{H}(\xi) \alpha^\xi \sin(\xi \beta) d\xi, \end{aligned} \quad (5)$$

а в області $1 \leq \alpha < \infty$ матимемо:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\alpha^{(2)}(\alpha, \beta) &= \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \xi \mathbf{W}(\xi) \alpha^{-\xi} \cos(\xi \beta) d\xi + \alpha \int_0^\infty [(1 - k^2)\xi - 2] \mathbf{G}(\xi) \alpha^{-\xi} \cos(\xi \beta) d\xi, \\ \mathbf{u}_\beta^{(2)}(\alpha, \beta) &= \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \xi \mathbf{W}(\xi) \alpha^{-\xi} \sin(\xi \beta) d\xi + \alpha \int_0^\infty [(1 - k^2)\xi + 2k^2] \mathbf{G}(\xi) \alpha^{-\xi} \sin(\xi \beta) d\xi. \end{aligned} \quad (6)$$

Функції $\mathbf{W}(\xi)$, $\mathbf{G}(\xi)$, $\mathbf{H}(\xi)$ і $\mathbf{V}(\xi)$ у виразах (5) і (6) – це довільні функції, які треба визначити з крайових умов задачі математичної фізики та умов обмеженості розв'язків.

Компоненти тензора напружень знайдемо на підставі закону Гука за відомими виразами (5)-(6) для компонент вектора пружного переміщення. В області $0 \leq \alpha \leq 1$:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha}^{(1)}(\alpha, \beta) &= 2\mu \left\{ - (k^2 - 1) \int_0^\infty (\xi + 1)(\xi - 2) \mathbf{H}(\xi) \alpha^\xi \cos(\xi \beta) d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\alpha^2} \int_0^\infty \xi(\xi - 1) \mathbf{V}(\xi) \alpha^\xi \cos(\xi \beta) d\xi \right\}, \\ \sigma_{\beta\beta}^{(1)}(\alpha, \beta) &= 2\mu \left\{ (k^2 - 1) \int_0^\infty (\xi + 1)(\xi + 2) \mathbf{H}(\xi) \alpha^\xi \cos(\xi \beta) d\xi - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\alpha^2} \int_0^\infty \xi(\xi - 1) \mathbf{V}(\xi) \alpha^\xi \cos(\xi \beta) d\xi \right\}, \\ \sigma_{\gamma\gamma}^{(1)}(\alpha, \beta) &= 4\mu (k^2 - 2) \int_0^\infty (\xi + 1) \mathbf{H}(\xi) \alpha^\xi \cos(\xi \beta) d\xi, \\ \sigma_{\alpha\beta}^{(1)}(\alpha, \beta) &= 2\mu \left\{ (k^2 - 1) \int_0^\infty \xi(\xi + 1) \mathbf{H}(\xi) \alpha^\xi \sin(\xi \beta) d\xi - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\alpha^2} \int_0^\infty \xi(\xi - 1) \mathbf{V}(\xi) \alpha^\xi \sin(\xi \beta) d\xi \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

і в області $1 \leq \alpha < \infty$ відповідно

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\alpha\alpha}^{(2)}(\alpha, \beta) &= 2\mu \left\{ (\mathbf{k}^2 - 1) \int_0^\infty (\xi - 1)(\xi + 2) \mathbf{G}(\xi) \alpha^{-\xi} \cos(\xi\beta) d\xi - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\alpha^2} \int_0^\infty \xi(\xi + 1) \mathbf{W}(\xi) \alpha^{-\xi} \cos(\xi\beta) d\xi \right\}, \\
 \sigma_{\beta\beta}^{(2)}(\alpha, \beta) &= 2\mu \left\{ -(\mathbf{k}^2 - 1) \int_0^\infty (\xi - 1)(\xi - 2) \mathbf{G}(\xi) \alpha^{-\xi} \cos(\xi\beta) d\xi + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\alpha^2} \int_0^\infty \xi(\xi + 1) \mathbf{W}(\xi) \alpha^{-\xi} \cos(\xi\beta) d\xi \right\}, \\
 \sigma_{\gamma\gamma}^{(2)}(\alpha, \beta) &= 4\mu (\mathbf{k}^2 - 2) \int_0^\infty (\xi - 1) \mathbf{G}(\xi) \alpha^{-\xi} \cos(\xi\beta) d\xi; \\
 \sigma_{\alpha\beta}^{(2)}(\alpha, \beta) &= 2\mu \left\{ (\mathbf{k}^2 - 1) \int_0^\infty \xi(\xi - 1) \mathbf{G}(\xi) \alpha^{-\xi} \sin(\xi\beta) d\xi - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\alpha^2} \int_0^\infty \xi(\xi + 1) \mathbf{W}(\xi) \alpha^{-\xi} \sin(\xi\beta) d\xi \right\}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Для обмеженості розв'язків при $\alpha = 0$ необхідно вважати $\mathbf{V}(\xi) \equiv 0$. Вирази у формулах (5) та (7) перепишемо так:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_\alpha^{(1)}(\alpha, \beta) &= -\alpha \int_0^\infty [(\mathbf{k}^2 - 1)\xi - 2] \mathbf{H}(\xi) \alpha^\xi \cos(\xi\beta) d\xi, \\
 \mathbf{u}_\beta^{(1)}(\alpha, \beta) &= \alpha \int_0^\infty [(\mathbf{k}^2 - 1)\xi + 2\mathbf{k}^2] \mathbf{H}(\xi) \alpha^\xi \sin(\xi\beta) d\xi; \\
 \sigma_{\alpha\alpha}^{(1)}(\alpha, \beta) &= -2\mu (\mathbf{k}^2 - 1) \int_0^\infty (\xi + 1)(\xi - 2) \mathbf{H}(\xi) \alpha^\xi \cos(\xi\beta) d\xi, \\
 \sigma_{\beta\beta}^{(1)}(\alpha, \beta) &= 2\mu (\mathbf{k}^2 - 1) \int_0^\infty (\xi + 1)(\xi + 2) \mathbf{H}(\xi) \alpha^\xi \cos(\xi\beta) d\xi, \\
 \sigma_{\gamma\gamma}^{(1)}(\alpha, \beta) &= 4\mu (\mathbf{k}^2 - 2) \int_0^\infty (\xi + 1) \mathbf{H}(\xi) \alpha^\xi \cos(\xi\beta) d\xi, \\
 \sigma_{\alpha\beta}^{(1)}(\alpha, \beta) &= 2\mu (\mathbf{k}^2 - 1) \int_0^\infty \xi(\xi + 1) \mathbf{H}(\xi) \alpha^\xi \sin(\xi\beta) d\xi.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Формули (6) та (8) залишаються без змін.

Формулювання крайової задачі та метод розривних інтегралів Фур'є. Нехай на берегах розрізу $\alpha = 1 \pm 0$ з кутом розкриття $0 \leq |\beta| \leq \beta_0$ діє постійне навантаження $2\mu\mathbf{P}_0$ (рис. 1). Будемо вимагати, щоб при цьому навантаженні береги щілини один стосовно одного в радіальному напрямі зміщувалися за законом $\mathbf{f}(\beta^2)(\beta_0^2 - \beta^2)^{\frac{1}{r-2}}$. Тоді крайові умови задачі запишемо у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha}^{(1)}(1-0, \beta) &= \sigma_{\alpha\alpha}^{(2)}(1+0, \beta) = -2\mu\mathbf{P}_0 \quad (0 \leq |\beta| \leq \beta_0), \\ \sigma_{\alpha\alpha}^{(1)}(1-0, \beta) &= \mathbf{g}(\beta^2), \quad \sigma_{\alpha\alpha}^{(2)}(1+0, \beta) = \mathbf{h}(\beta^2) \quad (\beta_0 \leq |\beta| \leq \pi); \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\alpha}^{(1)}(1-0, \beta) - \mathbf{u}_{\alpha}^{(2)}(1+0, \beta) &= \mathbf{f}(\beta^2)(\beta_0^2 - \beta^2)^{\frac{1}{r-2}} \quad (0 \leq |\beta| \leq \beta_0), \\ \mathbf{u}_{\alpha}^{(1)}(1-0, \beta) &= \mathbf{u}_{\alpha}^{(2)}(1+0, \beta) \quad (\beta_0 \leq |\beta| \leq \pi). \end{aligned} \quad (12)$$

Невідомі наперед функції $\mathbf{g}(\beta^2)$ і $\mathbf{h}(\beta^2)$ у крайовій умові на напруження (11) назвемо коригувальними. Саме вони забезпечуватимуть виконання крайової умови (12). Радіальні напруження $\sigma_{\alpha\alpha}^{(1)}(1-0, \beta)$ і $\sigma_{\alpha\alpha}^{(2)}(1+0, \beta)$ ($\beta_0 \leq |\beta| \leq \pi$) та дотичні напруження $\sigma_{\alpha\beta}^{(1)}(1-0, \beta)$ і $\sigma_{\alpha\beta}^{(2)}(1+0, \beta)$ ($0 \leq |\beta| \leq \pi$), що визначаються цими функціями, є механічним ефектом існування реологічних шарів або ж необхідним довантаженням для виконання умови (12).

Задовольнивши крайові умови, отримуємо систему інтегральних рівнянь

$$-2\mu(\mathbf{k}^2 - 1) \int_0^{\infty} (\xi + 1)(\xi - 2)\mathbf{H}(\xi) \cos(\xi\beta) d\xi = -2\mu\mathbf{P}_0, \quad 0 \leq |\beta| \leq \beta_0; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} 2\mu \int_0^{\infty} [(\mathbf{k}^2 - 1)(\xi - 1)(\xi + 2)\mathbf{G}(\xi) - \xi(\xi + 1)\mathbf{W}(\xi)] \cos(\xi\beta) d\xi = \\ = -2\mu\mathbf{P}_0, \quad 0 \leq |\beta| \leq \beta_0; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} - \int_0^{\infty} \{[(\mathbf{k}^2 - 1)\xi - 2]\mathbf{H}(\xi) + \xi\mathbf{W}(\xi) + [(1 - \mathbf{k}^2)\xi - 2]\mathbf{G}(\xi)\} \cos(\xi\beta) d\xi = \\ = \mathbf{f}(\beta^2)(\beta_0^2 - \beta^2)^{\frac{1}{r-2}}, \quad 0 \leq |\beta| \leq \beta_0 \end{aligned} \quad (15)$$

стосовно невідомих функцій $\mathbf{H}(\xi)$, $\mathbf{G}(\xi)$ і $\mathbf{W}(\xi)$.

Рівняння (13) після спрощення набуде вигляду

$$\int_0^{\infty} (\mathbf{k}^2 - 1)(\xi + 1)(\xi - 2)\mathbf{H}(\xi) \cos(\xi\beta) d\xi = \mathbf{P}_0 \quad (0 \leq |\beta| \leq \beta_0). \quad (16)$$

Це інтегральне рівняння Фредгольма першого роду стосовно функції

$H(\xi)$ розв'яжемо методом розривних інтегралів Фур'є [4], відповідно до якого підінтегральну функцію подамо у вигляді узагальненого ряду Неймана

$$(k^2 - 1)(\xi + 1)(\xi - 2)H(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{J_{2n-q+1}(\beta_0 \xi)}{\xi^q} \quad (17)$$

з наперед невизначеними коефіцієнтами a_n і параметром q , що є зведеною характеристикою постульованих реологічних шарів. Обмеження $(0,5 < q < 1)$ на цей параметр визначають з фізичної вимоги неперервності характеристик напружено-деформованого стану на краю зони навантаження $|\beta| = \beta_0$, зокрема, компоненти $\sigma_{\alpha\alpha}(1, \beta)$ тензора напружень і $\omega_\gamma(1, \beta)$ вектора локального жорсткого повороту

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow \beta_0 - 0} \sigma_{\alpha\alpha}(1, \beta) &= \lim_{\beta \rightarrow \beta_0 + 0} \sigma_{\alpha\alpha}(1, \beta), \\ \lim_{\beta \rightarrow \beta_0 - 0} \omega_\gamma(1, \beta) &= \lim_{\beta \rightarrow \beta_0 + 0} \omega_\gamma(1, \beta). \end{aligned}$$

Подальші дослідження ґрунтуватимуться на властивостях розривного інтегралу Фур'є [7]. Вираз (17) підставимо в інтегральне рівняння (16) та, помінявши порядок сумування та інтегрування, отримаємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \frac{J_{2n-q+1}(\beta_0 \xi) \cos(\xi \beta)}{\xi^q} d\xi = P_0, \quad 0 \leq |\beta| \leq \beta_0.$$

Під знаком суми міститься розривний інтеграл Фур'є, обчисливши який в області $0 \leq |\beta| \leq \beta_0$ отримуємо алгебричне стосовно коефіцієнтів a_n рівняння

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n - q + 1) \beta_0^{q-1} F(n - q + 1; -n; 1/2; \beta^2 / \beta_0^2)}{2^q \Gamma(n + 1)} = P_0.$$

Оскільки у цій формулі другим параметром гіпергеометричної функції Гаусса $F(n - q + 1; -n; 1/2; \beta^2 / \beta_0^2)$ є від'ємне ціле число, то вона вироджується у поліном степеня $2n$ і відповідно до апроксимаційної теореми Вайєрштрасса про наближення неперервної функції на скінченному інтервалі системою поліномів розв'язок цього рівняння буде таким:

$$a_0 = \frac{P_0 \cdot 2^q}{\beta_0^{q-1} \Gamma(1 - q)}, \quad a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Тому згідно з поданням (17) функцію $H(\xi)$ запишемо так:

$$H(\xi) = \frac{P_0 2^q J_{1-q}(\beta_0 \xi)}{\beta_0^{q-1} \Gamma(1 - q) \xi^q} \frac{1}{(k^2 - 1)(\xi + 1)(\xi - 2)}. \quad (18)$$

За відомою функцією $\mathbf{H}(\xi)$ і поданнями (9)-(10) обчислюють всі характеристики напружено-деформованого стану у внутрішній області тіла $0 \leq \alpha \leq 1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\alpha^{(1)}(\alpha, \beta) &= -\frac{\mathbf{P}_0 2^q \alpha}{\beta_0^{q-1} \Gamma(1-q)(k^2-1)} \int_0^\infty \frac{J_{1-q}(\beta_0 \xi)}{\xi^q} \frac{[(k^2-1)\xi-2]}{(\xi+1)(\xi-2)} \alpha^\xi \cos(\xi\beta) d\xi, \\ \mathbf{u}_\beta^{(1)}(\alpha, \beta) &= \frac{\mathbf{P}_0 2^q \alpha}{\beta_0^{q-1} \Gamma(1-q)(k^2-1)} \int_0^\infty \frac{J_{1-q}(\beta_0 \xi)}{\xi^q} \frac{[(k^2-1)\xi+2k^2]}{(\xi+1)(\xi-2)} \alpha^\xi \sin(\xi\beta) d\xi, \\ \sigma_{\alpha\alpha}^{(1)}(\alpha, \beta) &= -\frac{2\mu \mathbf{P}_0 2^q}{\beta_0^{q-1} \Gamma(1-q)} \int_0^\infty \frac{J_{1-q}(\beta_0 \xi)}{\xi^q} \alpha^\xi \cos(\xi\beta) d\xi, \\ \sigma_{\beta\beta}^{(1)}(\alpha, \beta) &= \frac{2\mu \mathbf{P}_0 2^q}{\beta_0^{q-1} \Gamma(1-q)} \int_0^\infty \frac{J_{1-q}(\beta_0 \xi)}{\xi^q} \frac{(\xi+2)}{(\xi-2)} \alpha^\xi \cos(\xi\beta) d\xi, \\ \sigma_\gamma^{(1)}(\alpha, \beta) &= \frac{4\mu \mathbf{P}_0 2^q (k^2-2)}{\beta_0^{q-1} \Gamma(1-q)(k^2-1)} \int_0^\infty \frac{J_{1-q}(\beta_0 \xi)}{\xi^q (\xi-2)} \alpha^\xi \cos(\xi\beta) d\xi, \\ \sigma_{\alpha\beta}^{(1)}(\alpha, \beta) &= \frac{2\mu \mathbf{P}_0 2^q}{\beta_0^{q-1} \Gamma(1-q)} \int_0^\infty \frac{J_{1-q}(\beta_0 \xi)}{\xi^{q-1} (\xi-2)} \alpha^\xi \sin(\xi\beta) d\xi. \end{aligned} \quad (19)$$

Для визначення невідомих функцій $\mathbf{G}(\xi)$ і $\mathbf{W}(\xi)$ та напружено-деформованого стану у зовнішній області тіла ($1 \leq \alpha < \infty$) треба розв'язати інтегральні рівняння (14), (15), які після спрощення набудуть вигляду

$$\begin{aligned} \int_0^\infty [(k^2-1)(\xi-1)(\xi+2)\mathbf{G}(\xi) - \xi(\xi+1)\mathbf{W}(\xi)] \cos(\xi\beta) d\xi &= -\mathbf{P}_0, \quad 0 \leq |\beta| \leq \beta_0; \quad (20) \\ \int_0^\infty \{[(k^2-1)\xi-2]\mathbf{H}(\xi) + \xi\mathbf{W}(\xi) + [(1-k^2)\xi-2]\mathbf{G}(\xi)\} \cos(\xi\beta) d\xi &= \\ &= -\mathbf{f}(\beta^2)(\beta_0^2 - \beta^2)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq |\beta| \leq \beta_0. \end{aligned} \quad (21)$$

Ці інтегральні рівняння Фредгольма першого роду, аналогічно до (16), розв'яжемо методом розривних інтегралів Фур'є [4]. Для цього підінтегральні функції подамо у вигляді таких узагальнених рядів Неймана:

$$(k^2-1)(\xi-1)(\xi+2)\mathbf{G}(\xi) - \xi(\xi+1)\mathbf{W}(\xi) = \sum_{n=0}^\infty \mathbf{b}_n \frac{J_{2n-q+1}(\beta_0 \xi)}{\xi^q}; \quad (22)$$

$$[(k^2-1)\xi-2]\mathbf{H}(\xi) + \xi\mathbf{W}(\xi) + [(1-k^2)\xi-2]\mathbf{fG}(\xi) = \sum_{n=0}^\infty \mathbf{c}_n \frac{J_{2n+r}(\beta_0 \xi)}{\xi^r} \quad (23)$$

з наперед невизначеними коефіцієнтами b_n , c_n та параметрами q ($0,5 < q < 1$) і r ($r > 3/2$).

Зазначимо, що за такого подання друга умова у формулі (12) згідно з виразом для розривного інтегралу Фур'є в області $|\beta| \geq \beta_0$ виконується автоматично.

Вирази (22)–(23) підставимо в інтегральні рівняння (20)–(21) та, помінявши порядок сумування та інтегрування, отримаємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_0^{\infty} \frac{J_{2n-q+1}(\beta_0 \xi) \cos(\xi \beta)}{\xi^q} d\xi = -P_0, \quad 0 \leq |\beta| \leq \beta_0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_0^{\infty} \frac{J_{2n+r}(\beta_0 \xi) \cos(\xi \beta)}{\xi^r} d\xi = -f(\beta^2) (\beta_0^2 - \beta^2)^{r-\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq |\beta| \leq \beta_0.$$

Обчисливши розривні інтеграли Фур'є в області $0 \leq |\beta| \leq \beta_0$, одержуємо такі рівняння стосовно коефіцієнтів b_n і c_n :

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{\Gamma(n-q+1) \beta_0^{q-1} F\left(n-q+1; -n; 1/2; \beta^2/\beta_0^2\right)}{2^q \Gamma(n+1)} = -P_0, \quad (24)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{\Gamma(n+1/2) \beta_0^{-r} F\left(n+1/2; -n-r+1/2; 1/2; \beta^2/\beta_0^2\right)}{2^r \Gamma(n+r+1/2)} =$$

$$= -f(\beta^2) (\beta_0^2 - \beta^2)^{r-\frac{1}{2}}. \quad (25)$$

Рівняння (25) після відповідних спрощень набуде вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{\Gamma(n+1/2) \beta_0^{-r} F\left(-n; n+r; 1/2; \beta^2/\beta_0^2\right)}{2^r \Gamma(n+r+1/2)} = -f(\beta^2). \quad (26)$$

Без суттєвої втрати загальності, функцію $f(\beta^2)$ у законі розходження берегів розрізу задамо сталою величиною $f(\beta^2) = c = \text{const}$. Тоді рівняння (26) запишемо так:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{\Gamma(n+1/2) \beta_0^{-r} F\left(-n; n+r; 1/2; \beta^2/\beta_0^2\right)}{2^r \Gamma(n+r+1/2)} = -c. \quad (27)$$

Отож, остаточно отримали рівняння (24) і (27) для визначення коефіцієнтів b_n та c_n .

Оскільки у формулі (24) другим, а у формулі (27) – першим параметром гіпергеометричної функції Гаусса є від'ємне ціле число, то вона вироджується у поліном степеня $2n$ і відповідно до апроксимаційної

теореми Вайерштрасса про наближення неперервної функції на скінченному інтервалі системою поліномів розв'язок цих рівнянь буде таким:

$$b_0 = -\frac{P_0 \cdot 2^q}{\beta_0^{q-1} \Gamma(1-q)}, \quad b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

$$c_0 = -\frac{c \cdot 2^r \beta_0^r \Gamma(r+1/2)}{\sqrt{\pi}}, \quad c_n = 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Тому відповідно до подань (22)-(23) та виразу (18) на функції $\mathbf{G}(\xi)$ і $\mathbf{W}(\xi)$ отримаємо таку систему рівнянь:

$$(k^2 - 1)(\xi - 1)(\xi + 2)\mathbf{G}(\xi) - \xi(\xi + 1)\mathbf{W}(\xi) = -\frac{P_0 \cdot 2^q J_{1-q}(\beta_0 \xi)}{\beta_0^{q-1} \Gamma(1-q) \xi^q}; \quad (28)$$

$$[(1 - k^2)\xi - 2]\mathbf{G}(\xi) + \xi\mathbf{W}(\xi) = -\frac{c \cdot 2^r \beta_0^r \Gamma(r+1/2) \mathbf{J}_r(\beta_0 \xi)}{\xi^r \sqrt{\pi}} -$$

$$-\frac{P_0 2^q J_{1-q}(\beta_0 \xi)}{\beta_0^{q-1} \Gamma(1-q) \xi^q} \frac{[(k^2 - 1)\xi - 2]}{(k^2 - 1)(\xi + 1)(\xi - 2)}. \quad (29)$$

Для простоти подальших перетворень та числового обчислення введемо такі позначення:

$$\mathbf{A}(\xi) = (k^2 - 1)(\xi - 1)(\xi + 2), \quad \mathbf{B}(\xi) = -\xi(\xi + 1), \quad \mathbf{D}(\xi) = -\frac{P_0 \cdot 2^q J_{1-q}(\beta_0 \xi)}{\beta_0^{q-1} \Gamma(1-q) \xi^q},$$

$$\mathbf{E}(\xi) = (1 - k^2)\xi - 2, \quad \mathbf{F}(\xi) = \xi, \quad (30)$$

$$\mathbf{V}(\xi) = -\frac{c \cdot 2^r \beta_0^r \Gamma(r+1/2) \mathbf{J}_r(\beta_0 \xi)}{\xi^r \sqrt{\pi}} - \frac{P_0 2^q J_{1-q}(\beta_0 \xi)}{\beta_0^{q-1} \Gamma(1-q) \xi^q} \frac{[(k^2 - 1)\xi - 2]}{(k^2 - 1)(\xi + 1)(\xi - 2)}.$$

Відповідно до позначень (30) та формул (28)-(29) отримаємо таку систему рівнянь на невідомі функції $\mathbf{G}(\xi)$ і $\mathbf{W}(\xi)$:

$$\mathbf{A}(\xi) \cdot \mathbf{G}(\xi) + \mathbf{B}(\xi) \cdot \mathbf{W}(\xi) = \mathbf{D}(\xi),$$

$$\mathbf{E}(\xi) \cdot \mathbf{G}(\xi) + \mathbf{F}(\xi) \cdot \mathbf{W}(\xi) = \mathbf{V}(\xi).$$

Використовуючи її розв'язок

$$\mathbf{G}(\xi) = \frac{\mathbf{F}(\xi)\mathbf{D}(\xi) - \mathbf{B}(\xi)\mathbf{V}(\xi)}{\mathbf{F}(\xi)\mathbf{A}(\xi) - \mathbf{B}(\xi)\mathbf{E}(\xi)}; \quad \mathbf{W}(\xi) = \frac{\mathbf{A}(\xi)\mathbf{V}(\xi) - \mathbf{D}(\xi)\mathbf{E}(\xi)}{\mathbf{F}(\xi)\mathbf{A}(\xi) - \mathbf{B}(\xi)\mathbf{E}(\xi)} \quad (31)$$

та подання (6), (8), визначаємо всі характеристики напружено-деформованого стану в зовнішній області тіла $1 \leq \alpha \leq \infty$.

Отож, вирази (19) та (6), (8) з урахуванням подань (31) повністю визначають напружено-деформований стан у всій області $0 \leq \alpha \leq \infty$,

$0 \leq |\beta| < \pi$, що зайнята тілом.

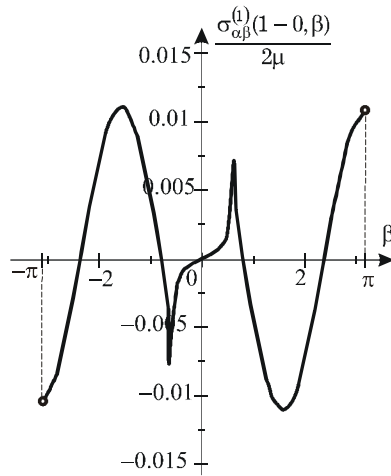


Рис. 2.

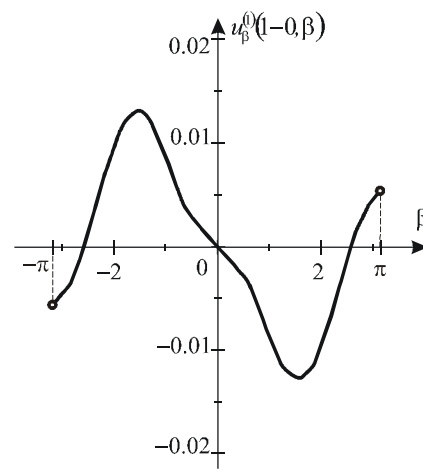


Рис. 3.

Числовий аналіз розв'язків задачі. Побудуємо графіки розподілу дотичних напружень і кутових переміщень на поверхні $\alpha = 1$, $0 \leq |\beta| < \pi$ контакту вала з циліндричною порожниною, а також – у внутрішньому реологічному шарі при зведеній характеристиці реологічних шарів $q = 0,75$ і таких даних: $k^2 = 3,5$ (матеріал – сталь), $\beta_0 = 0,2\pi$, $P_0 = 0,01$, $c = 0,01$, $r = 2$.

На рис. 2 та 3 зображено розподіл відповідно дотичних напружень і кутових переміщень у поверхневому реологічному шарі циліндричного вала (внутрішня задача) при $\alpha = 1 - 0$, $0 \leq |\beta| < \pi$. Для простору з циліндричною порожниною (зовнішня задача) графіки цих величин у поверхневому реологічному шарі при $\alpha = 1 + 0$, $0 \leq |\beta| < \pi$ побудовано на рис. 4 і 5.

Аналіз цих графіків свідчить про те, що при переході через поверхню $\alpha = 1$, $0 \leq |\beta| < \pi$, де постулювалося існування поверхневих реологічних шарів, дотичні напруження та кутові переміщення змінюються стрибково. Крім того, аналогічно змінюються радіальні напруження при переході через цю саму поверхню. За К. Трусделом описані шари можна трактувати як поверхню розриву нульового порядку [12].

Крім того, на внутрішньому реологічному шарі при $0 \leq \alpha < \infty$, $\beta = \pm\pi$ дотичні напруження та кутові переміщення змінюють знак на протилежний, про що свідчать аналіз відповідних формул та графіки на рис. 6. Тут суцільна лінія відображає графік дотичних напружень у внутрішньому реологічному шарі при $0 \leq \alpha < \infty$, $\beta = \pi$, а штрихова – на поверхні $0 \leq \alpha < \infty$, $\beta = -\pi$.

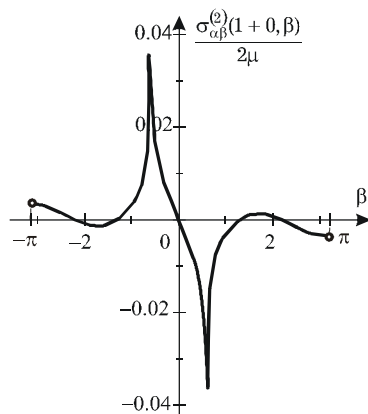


Рис. 4.

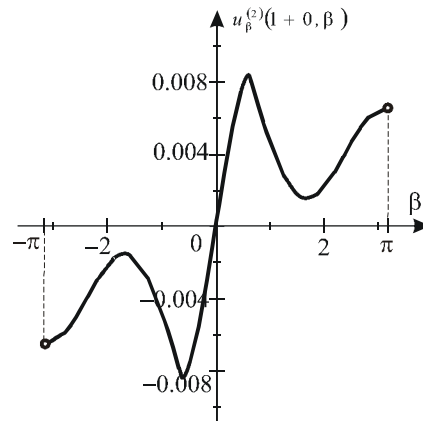


Рис. 5.

Оскільки на внутрішньому реологічному шарі дотичні напруження та кутові переміщення змінюються стрибково, то цей шар також можна вважати за К.Трусделом поверхнею розриву нульового порядку [12]. Або ж трактувати властивості реологічних шарів у вигляді знайдених переміщень і напружень як необхідне зовнішнє довантаження масиву для забезпечення заданих крайових умов (11)-(12).

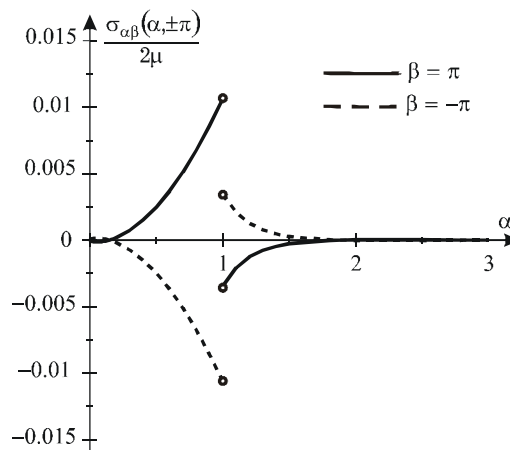


Рис. 6.

Аналіз розв'язку свідчить ще й про те, що постулювання поверхневих і внутрішніх шарів з певними властивостями і фізично обґрунтована вимога неперервності компонент вектора локального жорсткого повороту

$\Omega = 0,5\omega$ на фронті розрізу (рис. 1) в комплексі забезпечують там регулярний розподіл напружень.

Запропоновану неklasичну математичну модель можна використати у новому напрямі механіки, який зараз інтенсивно розвивається – нано- та мікромеханіці. Бо з мініатюризацією механічних об'єктів зростає потреба враховувати, окрім зовнішніх сил, також і поверхневі явища, ефекти міжмолекулярної та міжатомної взаємодії, які внаслідок великої жорсткості твердих тіл можуть проявити себе переважно у мікро- та наномасштабах [10].

1. Александров В.М., Пожарский Д.А. Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. – М., 1998.
2. Воронич И.И., Александров В.М. Механика контактных взаимодействий. – М., 2001.
3. Галазюк В.А., Сулим Г.Т. Рівновага дискової щілини з поверхневим шаром з реологічними властивостями // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – №4. – С. 17–33.
4. Галазюк В.А., Сулим Г.Т. Некласична модель деформування тіл з тріщинами // Вісник Дніпропетровського національного ун-ту. – 2001. – „Механіка”. Вип.4. Т.1 – С. 39–49.
5. Галазюк В.А., Сулим Г.Т., Нестер В.Р. Эффект реологических шарів у пружному просторі з щілиною по дузі кола // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій. Вип. 7. – Львів, 2007. – С. 7–16.
6. Галазюк Виталий, Сулым Георгий, Нестер Владимир. Напряженно-деформированное состояние в теле с разрезом по дуге окружности с учетом реологических слоев // Materiały IV Międzynar. Symp. Mechaniki Zniszczenia Materiałów i Konstrukcji. – (Augustów, Polska, 30 maja – 2 czerwca 2007 r.) – S. 115–119.
7. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М., 1963.
8. Нестер В., Галазюк В., Сулим Г. Эффекты реологических слоев в модели тела с разрезом по дуге окружности // Материалы междунар. науч. конф. «Современные проблемы математики, механики, информатики». – (Тула, Россия, 19-23 ноября 2007 г.) – С. 194–195.
9. Панасюк В.В., Теплий М.Й. Деякі контактні задачі теорії пружності. – К., 1975.
10. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термopужної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів, 2007.

11. *Теплый М.И.* Контактные задачи для областей с круговыми границами. – Львов, 1983.
12. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред / Пер. с англ. – М., 1975.

CONTACT INTERACTION BETWEEN CYLINDRICAL SHAFT AND SPACE WITH CYLINDRICAL CAVITY IN THE PRESENCE OF GAP BETWEEN THEM

Volodymyr Nester, Georgiy Sulym

*Ivan Franco National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine*

The management model of contact interaction between cylindrical shaft and space with cylindrical cavity has been proposed. In the statement of problem crack faces within cut in a radial direction separate according to certain adjusted rule. On a cut continuation the reciprocal displacement of faces is absent. This problem reduces to the integral equations, which solves by the method of disconnected Fourier integrals. The stress-strain state in a body has been investigated, numerical analysis of problem solution has been made and corresponding graphs have been drawn.

Key words: contact interaction, rheological layer, disconnected Fourier integral, rupture face.

Стаття надійшла до редколегії 28.05.2008

Прийнята до друку 19.11.2008

УДК 539.3.

**ЗГИН ПЛАСТИНИ РЕЙССНЕРА З НАСКРІЗНОЮ ТРІЩИНОЮ З
УРАХУВАННЯМ ШИРИНИ ОБЛАСТІ КОНТАКТУ ЇЇ БЕРЕГІВ****Віктор ОПАНАСОВИЧ, Ігор ЯЦИК***Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна*

Досліджено напружено-деформований стан безмежної ізотропної пластини з тріщиною, береги якої вільні від зовнішнього навантаження. Пластина перебуває під дією рівномірно розподілених згинальних моментів на нескінченності. Припускається, що береги тріщини приходять у гладкий контакт по всій довжині тріщини за двовимірною зоною на верхній основі пластини. За рахунок контакту берегів тріщини розв'язок задачі подано у вигляді розв'язку двох задач: плоскої задачі та задачі згину пластин за Рейсснером. На підставі методів теорії функції комплексної змінної та комплексних потенціалів отримано сингулярне інтегральне рівняння, яке розв'язано чисельно за допомогою методу механічних квадратур. Проведено числовий аналіз розв'язку задачі та побудовано графічні залежності для контактного тиску між берегами тріщини та коефіцієнтів інтенсивності моментів при різних параметрах задачі.

Ключові слова: згин, ізотропна пластина, наскрізна тріщина, ширина області контакту, плоска задача теорії пружності, теорія згину за Рейсснером, комплексні потенціали, контактне зусилля, коефіцієнти інтенсивності моментів і зусиль.

Пластини широко застосовують у машинобудуванні та інших галузях техніки. Їхня дієздатність і експлуатаційні характеристики залежать від тріщиноподібних дефектів, які різко знижують діапазон допустимого навантаження. Під час експлуатації пластинчастих елементів важливо знати, як такі дефекти впливають на міцність і механічні характеристики конструкції.

Актуальною проблемою є вивчення напружено-деформованого стану пластини в умовах згину з урахуванням контакту берегів тріщиноподібних дефектів. Формулювання задач згину пластин з тріщинами і методи їх розв'язування подано в монографіях [1, 10, 11]. Проте в них не враховували контакт берегів тріщиноподібних дефектів, хоча з фізичних міркувань зрозуміло, що він впливає на напружено-деформований стан пластини в цілому. В [5, 8, 14–16] розглянуто згин пластини з тріщиноподібними дефектами з урахуванням контакту їхніх берегів, але немає досліджень, пов'язаних із згином пластини за Рейсснером з тріщиною, береги якої контактують по двовимірній зоні.

Мета нашої праці – дослідити згин ізотропної пластини Рейсснера з тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів. Із застосуванням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних

потенціалів розв'язок задачі зведений до системи інтегральних рівнянь, яка розв'язана чисельно за допомогою методу механічних квадратур. Виконано числовий аналіз задачі, на підставі якого побудовано відповідні графічні залежності.

Формулювання задачі. Дослідимо задачу про згин ізотропної пластини завтовшки $2h$ з тріщиною завдовжки $2l$ розподіленими згинними моментами на нескінченності (див. рис. 1). Вважаємо, що під дією зовнішнього навантаження береги тріщини зазнають гладкого контакту по всій довжині тріщини з постійною двовимірною зоною ширини h_1 поблизу

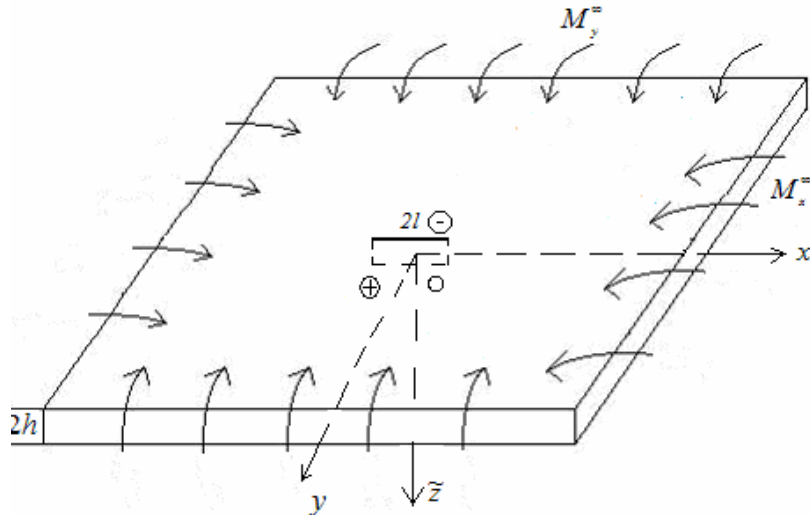


Рис. 1.

верхньої основи пластини, причому до деформування пластини береги тріщини були вільними від зовнішнього навантаження.

Виберемо декартову систему координат Oxy з координатною площиною Oxy у серединній площині пластини з початком координат O у центрі тріщини, спрямувавши вісь Ox по тріщині. Відрізок дійсної осі Ox , для якого $|x| \leq l$, позначимо через L . Позначимо контактне зусилля між берегами тріщини через $-N$ ($N > 0$), а розподілені згинальні моменти на нескінченності, прикладені до пластини, – через M_x^∞ , M_y^∞ .

Надалі дотримуватимемось таких позначень: μ – модуль зсуву; E – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона, $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$.

З урахуванням контакту берегів тріщини розв'язок задачі розбиваємо на дві задачі: плоску задачу теорії пружності та задачу згину пластини з використанням теорії Рейсснера.

Згідно з формулювання задачі на берегах тріщини маємо такі крайові умови:

$$\sigma_{yy}^+ = \sigma_{yy}^- = -N / (2h), \quad \sigma_{xy}^+ = \sigma_{xy}^- = 0, \quad x \in L, \quad (1)$$

$$M_y^+ = M_y^- = M, \quad Q_y^+ = Q_y^- = 0, \quad H_{xy}^+ = H_{xy}^- = 0, \quad x \in L, \quad (2)$$

$$M = \beta h N, \quad \partial_x [v_\Pi] + \alpha h \partial_x [\varphi_y] = 0, \quad x \in L, \quad (3)$$

де σ_{xy} , σ_{yy} та v_Π – відповідно компоненти тензора напружень та проекція вектора переміщення точки на вісь Oy у плоскій задачі, φ_y – усереднений по товщині пластини кут повороту нормалі до серединної площини пластини у задачі згину [13]; M – згинальний момент, Q_y і H_{xy} – поперечна сила і крутний момент відповідно; $\partial_x = \partial/\partial x$, $[f] = f^+ - f^-$; значками «+» і «-» позначено граничні значення функції при прямуванні точки площини до тріщини при $y \rightarrow \pm 0$; $\alpha = \{1 + (1 - \gamma)^2\}/2$, $\beta = 1 - \gamma/3$ і $\gamma = h_1/h$ – зведена ширина області контакту [5].

Треба знайти напружено-деформований стан пластини.

Побудова розв'язку задачі. При визначенні плоского напруженого стану введемо комплексні потенціали $\Phi_\Pi(\mathbf{z})$ і $\Omega_\Pi(\mathbf{z})$, які зникають на нескінченності, а для визначення напружено-деформованого стану пластини виконуються залежності [3]

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} - i\sigma_{xy} &= \Phi_\Pi(\mathbf{z}) + \Omega_\Pi(\bar{\mathbf{z}}) + (\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}) \overline{\Phi'_\Pi(\mathbf{z})}, \\ 2\mu \partial_x(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) &= \kappa \Phi_\Pi(\mathbf{z}) - \Omega_\Pi(\bar{\mathbf{z}}) - (\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}) \overline{\Phi'_\Pi(\mathbf{z})}. \end{aligned} \quad (4)$$

Крайові умови (1) подамо у вигляді

$$(\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^+ - (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^- = 0, \quad x \in L,$$

звідки, врахувавши (4), отримаємо

$$(\Phi_\Pi(\mathbf{x}) - \Omega_\Pi(\mathbf{x}))^+ - (\Phi_\Pi(\mathbf{x}) - \Omega_\Pi(\mathbf{x}))^- = 0, \quad x \in L. \quad (5)$$

Розв'язавши задачу лінійного спряження (5), матимемо

$$\Phi_\Pi(\mathbf{z}) = \Omega_\Pi(\bar{\mathbf{z}}). \quad (6)$$

Враховуючи (4) і (6), з крайової умови

$$(\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^+ + (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^- = -N/h, \quad x \in L$$

одержимо

$$N = -2h(\Phi_\Pi^+(\mathbf{x}) + \Phi_\Pi^-(\mathbf{x})), \quad x \in L. \quad (7)$$

Враховуючи (4) та (6), та задовольняючи умову

$$\partial_x(\mathbf{u}_\Pi + i\mathbf{v}_\Pi)^+ - \partial_x(\mathbf{u}_\Pi + i\mathbf{v}_\Pi)^- = \partial_x[\mathbf{u}_\Pi + i\mathbf{v}_\Pi], \quad x \in L,$$

одержимо

$$\Phi_{\Pi}^{+}(\mathbf{x}) - \Phi_{\Pi}^{-}(\mathbf{x}) = 2\mu/(1 + \kappa) \partial_{\mathbf{x}} [\mathbf{u}_{\Pi} + i\mathbf{v}_{\Pi}] = \mathbf{g}'(\mathbf{x}) = \mathbf{g}'_1(\mathbf{x}) + i\mathbf{g}'_2(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in L. \quad (8)$$

Розв'язок задачі лінійного спряження (8) запишемо так:

$$\Phi_{\Pi}(\mathbf{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mathbf{g}'(\mathbf{t}) d\mathbf{t}}{\mathbf{t} - \mathbf{z}}. \quad (9)$$

На підставі формул Сохоцького-Племелі одержимо

$$\Phi_{\Pi}^{+}(\mathbf{x}) + \Phi_{\Pi}^{-}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\mathbf{g}'(\mathbf{t}) d\mathbf{t}}{\mathbf{t} - \mathbf{x}}, \mathbf{x} \in L. \quad (10)$$

Підставивши (10) у (7), матимемо

$$-\frac{N}{2h} = \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\mathbf{g}'_2(\mathbf{t}) d\mathbf{t}}{\mathbf{t} - \mathbf{x}}, \mathbf{x} \in L, \quad (11)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_L \frac{\mathbf{g}'_1(\mathbf{t}) d\mathbf{t}}{\mathbf{t} - \mathbf{x}} = 0, \mathbf{x} \in L. \quad (12)$$

Розв'язавши сингулярне інтегральне рівняння (12) та врахувавши, що $\int_{-l}^l \mathbf{g}'_1(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = 0$, отримаємо

$$\mathbf{g}'_1(\mathbf{t}) = 0. \quad (13)$$

Для побудови розв'язку задачі згину введемо комплексні потенціали $\Phi(\mathbf{z})$ і $\Psi(\mathbf{z})$ та функцію $\Omega(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$, для яких правильні залежності [2]

$$\mathbf{M}_x + \mathbf{M}_y = -2\mathbf{D}(1 + \nu) \{ \Phi(\mathbf{z}) + \overline{\Phi(\mathbf{z})} \}, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_y - \mathbf{M}_x + 2i\mathbf{H}_{xy} &= 2\mathbf{D}(1 - \nu) \{ \mathbf{z} \overline{\Phi'(\mathbf{z})} + \overline{\Psi(\mathbf{z})} + \\ &+ 4 \{ 2\overline{\Phi''(\mathbf{z})} + i\overline{\Omega''_{zz}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})} \} / (k_*^2(1 - \nu)) \}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\mathbf{Q}_x - i\mathbf{Q}_y = -2\mathbf{D} \{ 2\Phi'(\mathbf{z}) - i\Omega'_z(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) \}, \quad (16)$$

де $k_*^2 = 5/(2h^2)$, а функція $\Omega(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ – розв'язок рівняння Гельмгольца

$$4\Omega''_{zz}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = k_*^2 \Omega(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}). \quad (17)$$

Залежності (14) і (15) перепишемо так:

$$\mathbf{M}_y + i\mathbf{H}_{xy} = 2\mathbf{m} \operatorname{Re} \Phi(\mathbf{z}) + \mathbf{n} \{ \mathbf{z} \overline{\Phi'(\mathbf{z})} + \overline{\Psi(\mathbf{z})} \} + \rho \{ 2\overline{\Phi''(\mathbf{z})} + i\overline{\Omega''_{zz}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})} \}, \quad (18)$$

де $\mathbf{m} = -\mathbf{D}(1 + \nu)$, $\mathbf{n} = \mathbf{D}(1 - \nu)$, $\rho = 4\mathbf{D}/k_*^2$.

Комплексні потенціали $\Phi(\mathbf{z})$ і $\Psi(\mathbf{z})$ подамо у вигляді [10]

$$\Phi(\mathbf{z}) = \Phi_*(\mathbf{z}) + \Gamma, \quad \Psi(\mathbf{z}) = \Psi_*(\mathbf{z}) + \Gamma', \quad (19)$$

де $\Gamma = -\frac{\mathbf{M}_x^\infty + \mathbf{M}_y^\infty}{4\mathbf{D}(1+\nu)}$, $\Gamma' = -\frac{\mathbf{M}_y^\infty - \mathbf{M}_x^\infty}{2\mathbf{D}(1-\nu)}$, а $\Phi_*(\mathbf{z})$ і $\Psi_*(\mathbf{z})$ – голоморфні функції, які зникають на нескінченності.

На підставі результатів праць [6, 7] функції $\Phi_*(\mathbf{z})$ та $\Omega(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ виберемо у вигляді

$$\Phi_*(\mathbf{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^l \frac{\mathbf{g}(\mathbf{t}) d\mathbf{t}}{\mathbf{t} - \mathbf{z}}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{t}) = \mathbf{g}_1(\mathbf{t}) + i\mathbf{g}_2(\mathbf{t}), \quad (20)$$

$$\Omega(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = \frac{\mathbf{k}_*}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ \int_{-l}^l \frac{\mathbf{r} \mathbf{K}_1(\mathbf{k}_* \mathbf{r})}{\mathbf{t} - \mathbf{z}} \omega(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \right\}, \quad \omega(\mathbf{t}) = \omega_1(\mathbf{t}) + i\omega_2(\mathbf{t}), \quad (21)$$

де $\mathbf{r} = \sqrt{(\mathbf{t} - \mathbf{z})(\mathbf{t} - \bar{\mathbf{z}})}$, $\mathbf{g}_1(\mathbf{t})$, $\mathbf{g}_2(\mathbf{t})$, $\omega_1(\mathbf{t})$, $\omega_2(\mathbf{t})$ – заздалегідь невідомі дійсні функції; тут і надалі через $\mathbf{K}_j(\mathbf{x})$ позначатимемо функції Макдональда j -го порядку, властивості яких наведено у [12].

Похідні від функції $\Omega(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$, які входять у вирази (15) і (16), подамо так:

$$\Omega'_z(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = \Omega_1(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) - \frac{i}{2\pi} \int_{-l}^l \frac{\omega(\mathbf{t}) d\mathbf{t}}{(\mathbf{t} - \mathbf{z})^2}, \quad (22)$$

$$\Omega''_{zz}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = \Omega_2(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) - \frac{i}{\pi} \int_{-l}^l \frac{\omega(\mathbf{t}) d\mathbf{t}}{(\mathbf{t} - \mathbf{z})^3}, \quad (23)$$

де

$$\Omega_1(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = \frac{i\mathbf{k}_*^2}{2\pi} \int_{-l}^l \left\{ \frac{\mathbf{r}^2 \mathbf{K}'_1(\mathbf{k}_* \mathbf{r})}{(\mathbf{t} - \mathbf{z})^2} \omega(\mathbf{t}) + \frac{(\mathbf{t} - \bar{\mathbf{z}}) \mathbf{K}_0(\mathbf{k}_* \mathbf{r})}{\mathbf{r}^2} \operatorname{Re} \{ (\mathbf{t} - \bar{\mathbf{z}}) \omega(\mathbf{t}) \} \right\} d\mathbf{t}, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \Omega_2(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = & \frac{\mathbf{k}_*^2}{2\pi} \left\{ \frac{1}{i} \int_{-l}^l \frac{\mathbf{r}^2 \mathbf{K}_2(\mathbf{k}_* \mathbf{r})}{(\mathbf{t} - \mathbf{z})^3} \omega(\mathbf{t}) d\mathbf{t} - \frac{\mathbf{k}_*}{2} \operatorname{Im} \left\{ \int_{-l}^l \frac{\mathbf{r} \mathbf{K}_1(\mathbf{k}_* \mathbf{r})}{\mathbf{t} - \mathbf{z}} \omega(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \right\} + \right. \\ & \left. + \mathbf{k}_* \int_{-l}^l \frac{\mathbf{t} - \mathbf{x}}{\mathbf{r}^3} \mathbf{K}_1(\mathbf{k}_* \mathbf{r}) (\mathbf{t} - \bar{\mathbf{z}}) \operatorname{Im} \{ (\mathbf{t} - \bar{\mathbf{z}}) \omega(\mathbf{t}) \} d\mathbf{t} \right\}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\mathbf{K}'_1(\mathbf{x}) = \mathbf{K}_1(\mathbf{x}) - 1/\mathbf{x}, \quad \mathbf{K}'_2(\mathbf{x}) = \mathbf{K}_2(\mathbf{x}) - 2/\mathbf{x}^2.$$

Врахувавши формули (19) – (25) та ввівши у розгляд функцію

$$\mathbf{V}(\mathbf{z}) = q\bar{\Phi}_*(\mathbf{z}) + \mathbf{z}\bar{\Phi}'_*(\mathbf{z}) + \bar{\Psi}_*(\mathbf{z}) + m_1/(k_*^2\pi i) \int_{-l}^l \delta(\mathbf{t})/(\mathbf{t} - \mathbf{z})^3 d\mathbf{t}, \quad (26)$$

залежності (16) і (18) перепишемо так:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_y + i\mathbf{H}_{xy} = \\ = n \left\{ q(\Phi_*(\mathbf{z}) + 2\Gamma) + \Gamma' + \mathbf{V}(\bar{\mathbf{z}}) + (\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}})\overline{\Phi'_*(\mathbf{z})} + im_1k_*^{-2}\overline{\Omega_2(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})} \right\}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\mathbf{Q}_x - i\mathbf{Q}_y = -2\mathbf{D} \{ \mathbf{P}(\mathbf{z}) - i\Omega_1(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) \}, \quad (28)$$

де

$$\mathbf{P}(\mathbf{z}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^l \frac{\delta(\mathbf{t})}{(\mathbf{t} - \mathbf{z})^2} d\mathbf{t}, \quad (29)$$

$$q = -(1 + \nu)/(1 - \nu), \quad m_1 = 4/(1 - \nu), \quad \delta(\mathbf{t}) \equiv \delta_1(\mathbf{t}) + i\delta_2(\mathbf{t}) = -2g(\mathbf{t}) + i\omega(\mathbf{t}), \quad \delta_1(\mathbf{t}) \text{ і } \delta_2(\mathbf{t}) - \text{дійсні функції.}$$

Скориставшись формулами (21), (24), (25) і властивостями функцій Макдональда, переконуємося, що при переході через вісь $\mathbf{Ox}$ функція $\Omega_1(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ неперервна, а для функцій $\Omega(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ та $\Omega_2(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ справджуються залежності

$$\begin{aligned} \Omega^+(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - \Omega^-(\mathbf{x}, \mathbf{x}) &= \begin{cases} 2\omega_1(\mathbf{x}) & (|\mathbf{x}| < l); \\ 0 & (|\mathbf{x}| > l), \end{cases} \\ \overline{\Omega_2^+(\mathbf{x}, \mathbf{x})} - \overline{\Omega_2^-(\mathbf{x}, \mathbf{x})} &= \begin{cases} -0,5k_*^2\omega_1(\mathbf{x}) & (|\mathbf{x}| < l); \\ 0 & (|\mathbf{x}| > l). \end{cases} \end{aligned} \quad (30)$$

Надалі вважатимемо, що виконуються умови

$$\delta(-l) = \delta(l) = 0. \quad (31)$$

Врахувавши вираз (31), матимемо

$$\mathbf{P}(\mathbf{z}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^l \frac{\delta'(\mathbf{t})}{\mathbf{t} - \mathbf{z}} d\mathbf{t},$$

звідки, скориставшись формулами Сохоцького-Племелі [4], можемо записати

$$\mathbf{P}^+(\mathbf{x}) - \mathbf{P}^-(\mathbf{x}) = -\delta'(\mathbf{x}) \quad (|\mathbf{x}| < l). \quad (32)$$

Задовольнивши за допомогою формули (28) другу крайову умову (2) та врахувавши співвідношення (32), одержимо

$$\delta_2'(\mathbf{x}) = 0. \quad (33)$$

Оскільки правильна формула (31), то з (33) випливає, що $\delta_2(\mathbf{x}) = 0$, тому виконуються залежності

$$\omega_1(\mathbf{x}) = 2\mathbf{g}_2(\mathbf{x}), \quad \omega_2(\mathbf{x}) = -2\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) - \delta_1(\mathbf{x}). \quad (34)$$

Враховавши (27), з першої і третьої крайових умов (2) одержимо задачу лінійного спряження для знаходження функції $\mathbf{V}(\mathbf{z})$

$$\mathbf{V}^+(\mathbf{x}) - \mathbf{V}^-(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{q}\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{i}m_2\mathbf{g}_2(\mathbf{x}) & (|\mathbf{x}| < l); \\ 0 & (|\mathbf{x}| > l), \end{cases}$$

розв'язавши яку, отримаємо

$$\mathbf{V}(\mathbf{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^l \frac{\mathbf{q}\mathbf{g}_1(t) - \mathbf{i}m_2\mathbf{g}_2(t)}{t - \mathbf{z}} dt, \quad m_2 = \frac{5 + \nu}{1 - \nu}. \quad (35)$$

Якщо скористаємось залежністю

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{x}}(\varphi_{\mathbf{x}} + \mathbf{i}\varphi_{\mathbf{y}}) &= \Phi_*(\mathbf{z}) + \frac{m_1}{2} \overline{\Phi_*(\mathbf{z})} + (\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}) \overline{\Phi'_*(\mathbf{z})} + \mathbf{V}(\bar{\mathbf{z}}) + \mathbf{i}m_1 \times \\ &\times \left\{ \frac{\overline{\Omega_2(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})}}{k_*^2} + \frac{\Omega(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})}{4} \right\}, \end{aligned} \quad (36)$$

то отримаємо

$$\partial_{\mathbf{x}}[\varphi_{\mathbf{x}} + \mathbf{i}\varphi_{\mathbf{y}}] = m_1\mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad |\mathbf{x}| \leq l. \quad (37)$$

Оскільки виконується (37), то

$$\partial_{\mathbf{x}}[\varphi_{\mathbf{x}}] = m_1\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \quad \partial_{\mathbf{x}}[\varphi_{\mathbf{y}}] = m_1\mathbf{g}_2(\mathbf{x}). \quad (38)$$

Враховавши (8) і (38), на підставі другої умови (3) матимемо

$$\mathbf{g}'_2(t) = -\frac{2\alpha h m_1 \mu}{1 + \kappa} \mathbf{g}_2(t), \quad t \in L. \quad (39)$$

тому з (11) отримаємо

$$\mathbf{N} = \frac{4\alpha h^2 m_1 \mu}{\pi(1 + \kappa)} \int_L \frac{\mathbf{g}_2(t) dt}{t - \mathbf{x}}. \quad (40)$$

Враховавши (20), (27), (35), (40), з перших крайових умов (2) і (3) отримаємо інтегральне рівняння

$$\int_L \frac{\mathbf{n}_1 + \rho\rho/\mathbf{n} + 2m_1 k_2(k_*|\mathbf{t} - \mathbf{x}|)}{t - \mathbf{x}} \mathbf{g}_2(t) dt = \frac{2\pi \mathbf{M}_y^\infty}{\mathbf{n}}, \quad \mathbf{x} \in L, \quad (41)$$

$$\text{де } \mathbf{n}_1 = \frac{2(3+\nu)}{1-\nu}, \quad \rho\rho = \frac{8\alpha\beta h^3 m_1 \mu}{1+\kappa}.$$

Рівняння (41) доповнюємо додатковою умовою

$$\int_L \mathbf{g}_2(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = 0, \quad (42)$$

що виражає однозначність похідної від усередненого кута повороту нормалі φ_y при обході контуру тріщини.

Зазначимо, що у частковому випадку, коли $\gamma = 0$, рівняння (41) збігається з рівнянням отриманим у [8], а для випадку пластини нульової товщини ($h/l \rightarrow 0$ або $k_l \rightarrow \infty$) – з рівнянням класичної теорії згину пластин [14] з точністю до відповідного множника.

Зробивши заміну $\mathbf{T} = \mathbf{t}/l$, $\mathbf{X} = \mathbf{x}/l$ та ввівши позначення

$$\lambda = 1/(k_l l), \quad \hat{\mathbf{g}}_2(\mathbf{T}) = E h^3 \sqrt{1 - \mathbf{T}^2} \mathbf{g}_2(l\mathbf{T}) / M_y^\infty, \quad (43)$$

рівняння (41) і (42) перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} & 2/(3\pi(1-\nu^2)) \int_{-1}^1 (3+\nu+3\alpha\beta(1+\nu) + \\ & + 4\kappa_2(|\mathbf{T}-\mathbf{X}|/\lambda)) / ((\mathbf{T}-\mathbf{X})\sqrt{1-\mathbf{T}^2}) \hat{\mathbf{g}}_2(\mathbf{T}) d\mathbf{T} = 1, \quad \mathbf{X} \in [-1, 1], \\ & \int_{-1}^1 \hat{\mathbf{g}}_2(\mathbf{T}) / \sqrt{1-\mathbf{T}^2} d\mathbf{T} = 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Для обчислення коефіцієнтів інтенсивності зусиль $\mathbf{K}_I^\pm$ і моментів $\mathbf{K}_M^\pm$ скористаємося залежностями з монографій [2], [11], які після перетворень набудуть вигляду

$$\mathbf{K}_I^\pm = \pm \frac{2\alpha E h^2}{1-\nu} \sqrt{l} \lim_{T \rightarrow \pm 1} \left\{ \sqrt{1-T^2} \mathbf{g}_2(l\mathbf{T}) \right\}, \quad \mathbf{K}_M^\pm = \mu m \sqrt{l} \lim_{T \rightarrow \pm 1} \left\{ \sqrt{1-T^2} \mathbf{g}_2(l\mathbf{T}) \right\}. \quad (45)$$

Як впливає з формул (39) і (45), коефіцієнти $\mathbf{K}_I^\pm$ і $\mathbf{K}_M^\pm$ відрізняються один від одного сталим множником, а саме

$$\mathbf{K}_I^\pm = 3\alpha \mathbf{K}_M^\pm / h.$$

З урахуванням формул (43) і (45) зведені коефіцієнти інтенсивності зусиль $\hat{\mathbf{K}}_I^\pm = \mathbf{K}_I^\pm h / (M_y^\infty \sqrt{l})$ і моментів $\hat{\mathbf{K}}_M^\pm = \mathbf{K}_M^\pm / (M_y^\infty \sqrt{l})$ запишемо у вигляді

$$\hat{\mathbf{K}}_M^\pm = \pm 2\hat{\mathbf{g}}_2(\pm 1)/(3(1-\nu)), \quad \hat{\mathbf{K}}_I^\pm = 3\alpha \hat{\mathbf{K}}_M^\pm.$$

Зауважимо, що при $\gamma = 0$ і $h/l \rightarrow 0$ значення $\tilde{K}_M^\pm$ узгоджуються з відповідними значеннями, обчисленими за класичною теорією згину пластин [14], відрізняючись від них множителем $(1 + \nu)/(3 + \nu)$.

Рівняння (44) розв'язуємо чисельно за допомогою методу механічних квадратур [9]. В результаті отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь стосовно вузлових значень $\hat{g}_2(\mathbf{T}_s)$. Значення функції $\hat{g}_2(\pm 1)$, через які виражаються коефіцієнти інтенсивності моментів, визначають так:

$$\hat{g}_2(1) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S (-1)^{s+1} \hat{g}_2(\mathbf{T}_s) \operatorname{ctg} \left(\frac{2s-1}{4S} \pi \right),$$

$$\hat{g}_2(-1) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S (-1)^{s+S} \hat{g}_2(\mathbf{T}_s) \operatorname{tg} \left(\frac{2s-1}{4S} \pi \right),$$

де $\mathbf{T}_s = \cos \left(\frac{2s-1}{2S} \pi \right)$, S – кількість вузлів методу механічних квадратур.

Числовий аналіз задачі та висновки. Ми провели числовий аналіз задачі при $\nu = 0.3$. На рис. 2 показано розподіл зведеного контактного тиску $\tilde{N} = Nh/M_y^\infty$ вздовж тріщини при різних значеннях відносної товщини пластини h/l і ширини області контакту берегів тріщини γ . Як видно з рис. 2, врахування ширини області контакту приводить до зменшення зведеного контактного тиску, у випадку $h/l \rightarrow 0$ він є сталим вздовж тріщини.

На рис. 3 показані графічні залежності зведених коефіцієнтів інтенсивності моментів $\tilde{K}_M^\pm$ від відносної товщини пластини при різних значеннях γ . Врахування ширини області контакту приводить до збільшення зведених коефіцієнтів інтенсивності моментів.

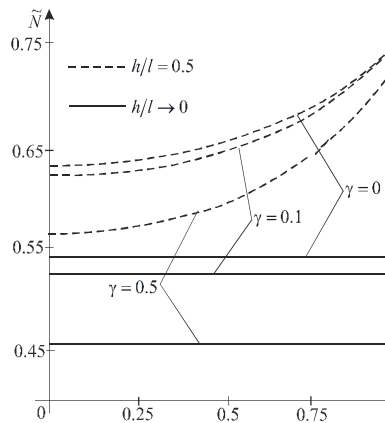


Рис. 2

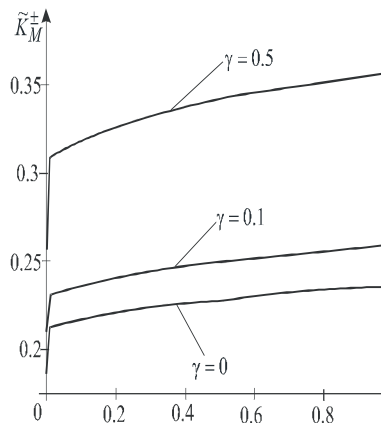


Рис. 3

Зауважимо, що у випадку $\gamma = 0$ і $h/l \rightarrow 0$ отримаємо числові результати статей [8] і [14].

-
1. *Бережницький Л. Т., Делявський М. В., Панасюк В. В.* Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. – К., 1979.
 2. *Мазурак Л. П., Бережницький Л. Т.* Изгиб трансверсально-изотропных пластин с дефектами типа трещин. – К., 1990.
 3. *Мухелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966.
 4. *Мухелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М., 1962.
 5. *Опанасович В. К.* Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її поверхонь // Наукові нотатки Луцького технічного університету. – 2007. – Вип. 20 (2). – С. 123–127.
 6. *Опанасович В. К.* Сингулярні інтегральні рівняння задачі згину пластини з тріщиною за теорією Райсснера // Праці наукового товариства ім. Шевченка. – Том VI: Матеріалознавство і механіка матеріалів. – Львів. – 2001. – С. 120–125.
 7. *Опанасович В. К., Делявський М. В., Подхорецькі А.* Новий підхід до розрахунку напруженого стану плити з тріщиною за теорією Рейсснера // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій: в 3-х т. / Під заг. ред. Панасюка В. – Т. 2: Аналітичні методи в механіці руйнування матеріалів. – 1999. – С. 186–189.
 8. *Опанасович В. К., Новосад В. П., Селіверстов Р. Г.* Врахування контакту берегів тріщини під час згину трансверсально-ізотропної пластини // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій: Збірник наукових праць. – Вип. 5 / За заг. ред. О. Є. Андрейківа, Й. Й. Лучка, В. В. Божидарника. – Львів: Каменяр. – 2002. – С. 148–153.
 9. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацишин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К., 1976.
 10. *Прусов И. А.* Метод сопряжения в теории плит. – Минск, 1975.
 11. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К., 1981.
 12. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган.* – М., 1979.

13. Тимошенко С. П., Войновски-Кригер. Пластины и оболочки. – М., 1966.
14. Шацький І. П. Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами // Доп. АН УРСР. Сер. А. Фіз.-мат. та техн. науки. – 1988. – № 7. – С. 49–51.
15. Шацький І. П., Перепічка В. В. Згин напівнескінченної пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами. Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 1992. – Т. 28. – № 2. – С. 54–58.
16. Шацький І., Перепічка В., Даляк Т., Щербій А. Задачі теорії пластин та оболонок із взаємопов'язаними крайовими умовами на розрізах // Матем. проблеми механіки неоднорідних структур: В 2-х т. – Львів, 2000. – Т. 2. – С. 51–54.

BENDING OF THE REISSNER'S PLATE WITH THROUGH-THE-THICKNESS CRACK TAKING INTO ACCOUNT CONTACT REGION WIDTH OF ITS FACES

Victor Opanasovych, Ihor Yatsyk

*Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine*

In work the tensely-deformed state of isotropic boundless plate with a crack is explored, the faces of which are the external loading free. It is assumed that the crack faces come in the smooth contact on all crack length on a two-dimensional area on overhead plate basis. The numerical analysis of moments intensity factors and contact pressure between the crack faces is conducted, on the basis of which the built proper graphic dependences at different geometrical and mechanical problem parameters.

Key words: bending, isotropic plate, through-the-thickness crack, contact region width, two-dimensional problem of the theory of elasticity, Reissner's theory of bending, complex potentials, contact pressure, moments and efforts intensity factors.

Стаття надійшла до редколегії 28.07.2008

Прийнята до друку 19.11.2008

ПРУЖНОПЛАСТИЧНЕ ДЕФОРМУВАННЯ ТЕРМОЧУТЛИВИХ ТІЛ

Василь ЛАВРЕНЮК, Микола ЛАВРЕНЮК

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
вул. Володимирська, 64 01033 Київ, Україна*

Розглянуто пружнопластичну рівновагу термочутливої скінченної платівки при дії на неї теплового джерела. Для розв'язання задачі використано розроблений авторами модифікований метод граничних елементів. Побудовано ітераційний процес, який зводиться до розв'язання послідовності пружних задач для однорідної платівки. Пластичну задачу розв'язано на підставі методу пружних розв'язків у рамках теорії малих пружнопластичних деформацій, що також приводить до побудови ітераційного процесу на кожному ітераційному кроці задачі термпружної рівноваги платівки. Проаналізовано розподіл полів напружень та інтенсивності дотичних напружень у платівці при нагріві її нерухомим джерелом тепла.

Ключові слова: метод граничних елементів, термпружнопластичність.

Актуальною є задача визначення напружено-деформованого стану елементів конструкцій при складних режимах навантаження, зокрема при високотемпературному навантаженні. Здебільшого початково однорідні тіла стають неоднорідними, оскільки фізико-механічні характеристики у цьому випадку залежать від температури. Крім того, при високотемпературних навантаженнях треба застосовувати пружно-пластичні моделі механіки. Розв'язанню крайових задач термомеханіки в пружному формулюванні присвячені, зокрема, праці [1]-[3].

Мета нашої праці – дослідити напружено-деформований стан термочутливої платівки під дією температурного джерела в пружно-пластичному формулюванні. Для розв'язання задачі використовують розроблений авторами [4], [5] модифікований метод граничних елементів.

Розглядають термочутливе тіло, пружно-пластичні властивості якого залежать від температури тіла, що вважається заданою функцією координат. Будемо вважати, що залежними від температури є модуль Юнга та коефіцієнт лінійного розширення розглядуваного тіла, коефіцієнт Пуассона є сталим: $\nu = \text{const}$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{T})$, $\alpha = \alpha(\mathbf{T})$, $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Нехай $\mathbf{E}_0, \lambda_0, \mu_0$ – пружні характеристики ненагрітого тіла. Для пружного випадку вважатимемо, що напруження та деформації в тілі пов'язані співвідношеннями Дюганеля-Неймана

$$\sigma_{ij}(\mathbf{T}) = \lambda(\mathbf{T})\theta\delta_{ij} + 2\mu(\mathbf{T})\varepsilon_{ij} - 3\mathbf{K}(\mathbf{T})\alpha\mathbf{T}\delta_{ij} \equiv \mathbf{s}_{ij} - 3\mathbf{K}(\mathbf{T})\alpha\mathbf{T}\delta_{ij}. \quad (1)$$

Рівняння рівноваги в переміщеннях для термочутливого тіла можна подати у вигляді:

$$(\lambda_0 + \mu_0) \mathbf{u}_{i,i} \delta_{ij} + \mu_0 \Delta \mathbf{u}_i + \frac{1}{\mathbf{E}(\mathbf{T})} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{T}} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}_j} \mathbb{s}_{ij}^0 - 3 \frac{\mathbf{E}_0}{\mathbf{E}(\mathbf{T})} (\mathbf{K}(\mathbf{T}) \alpha \mathbf{T})_{,i} = 0, \quad (2)$$

де $\mathbb{s}_{ij}^0 = \lambda_0 \mathbf{u}_{i,i} \delta_{ij} + \mu_0 (\mathbf{u}_{i,j} + \mathbf{u}_{j,i})$.

Крайові умови на границі розглядуваного тіла Γ_0 мають вигляд

$$\mathbf{E}(\mathbf{T}) (\lambda_0 \mathbf{u}_{i,i} \delta_{ij} + \mu_0 (\mathbf{u}_{i,j} + \mathbf{u}_{j,i})) \mathbf{n}_j = 3 \mathbf{K}(\mathbf{T}) \alpha \mathbf{T} \mathbf{n}_i \quad (3)$$

Отже, треба знати функції $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{T})$, $\frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{T})}{\partial \mathbf{T}}$, $\alpha = \alpha(\mathbf{T})$, $\frac{\partial \alpha(\mathbf{T})}{\partial \mathbf{T}}$.

Задачу розв'язуємо методом послідовних наближень, який будемо за такою схемою. На першому кроці маємо рівняння рівноваги

$$(\lambda_0 + \mu_0) \mathbf{u}_{i,i} \delta_{ij} + \mu_0 \Delta \mathbf{u}_i - \frac{3\mathbf{E}_0}{\mathbf{E}(\mathbf{T})} (\mathbf{K}(\mathbf{T}) \alpha \mathbf{T})_{,i} = 0 \quad (4)$$

та крайові умови (3). На наступному кроці до доданка $\frac{3\mathbf{E}_0}{\mathbf{E}(\mathbf{T})} (\mathbf{K}(\mathbf{T}) \alpha \mathbf{T})_{,i}$

додають доданок $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{T}} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}_j} \mathbb{s}_{ij}^0$, де $\mathbb{s}_{ij}^0$ – напруження, визначені на попередньому кроці. Крайова задача для цього кроку матиме вигляд

$$(\lambda_0 + \mu_0) \mathbf{u}_{i,i} \delta_{ij} + \mu_0 \Delta \mathbf{u}_i + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{T}} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}_j} \mathbb{s}_{ij}^0 - \frac{3\mathbf{E}_0}{\mathbf{E}(\mathbf{T})} (\mathbf{K}(\mathbf{T}) \alpha \mathbf{T})_{,i} = 0,$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{T}) (\lambda_0 \mathbf{u}_{i,i} \delta_{ij} + \mu_0 (\mathbf{u}_{i,j} + \mathbf{u}_{j,i})) \mathbf{n}_j = 3 \mathbf{K}(\mathbf{T}) \alpha \mathbf{T} \mathbf{n}_i.$$

Розв'язуючи одержану крайову задачу так само, як і на попередньому ітераційному кроці, одержимо значення напружень $\mathbb{s}_{ij}^1$. На k -му ітераційному кроці матимемо таку крайову задачу:

$$(\lambda_0 + \mu_0) \mathbf{u}_{i,i}^{(k)} \delta_{ij} + \mu_0 \Delta \mathbf{u}_i^{(k)} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{T}} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}_j} \mathbb{s}_{ij}^{(k-1)} - \frac{3\mathbf{E}_0}{\mathbf{E}(\mathbf{T})} (\mathbf{K}(\mathbf{T}) \alpha \mathbf{T})_{,i} = 0,$$

$$(\lambda_0 \mathbf{u}_{i,i}^{(k)} \delta_{ij} + \mu_0 (\mathbf{u}_{i,j}^{(k)} + \mathbf{u}_{j,i}^{(k)})) \mathbf{n}_j = \frac{\alpha \mathbf{T} \mathbf{n}_i}{(1 - 2\nu)}. \quad (5)$$

На кожному кроці ітерації систему диференціальних рівнянь у частинних похідних зводимо до системи граничних інтегральних рівнянь, скориставшись співвідношеннями Сомільяно. Остаточню одержимо таку систему граничних інтегральних рівнянь для k -го ітераційного кроку

$$\frac{1}{2} \delta_{ij} \mathbf{u}_j^{(k)}(\mathbf{x}) = \int_{S_0} \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{T}} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}_j} \mathbb{s}_{ij}^{(k-1)} - 3 \frac{\mathbf{E}_0}{\mathbf{E}(\mathbf{T})} (\mathbf{K}(\mathbf{T}) \alpha \mathbf{T})_{,i} \right) \mathbf{U}_i^l(\mathbf{x}, \xi) d\mathbf{S}_0 +$$

$$+ \int_{\Gamma_0} \mathbf{U}_i^l(\mathbf{x}, \xi) \mathbf{s}_{ij}^{(k)} \mathbf{n}_j d\Gamma_0 - \int_{\Gamma_0} \mathbf{g}_j^l(\mathbf{x}, \xi) \mathbf{u}_j^{(k)}(\xi) d\Gamma_0$$

$$(\lambda_0 \mathbf{u}_{i,i}^{(k)} \delta_{ij} + \mu_0 (\mathbf{u}_{i,j}^{(k)} + \mathbf{u}_{j,i}^{(k)})) \mathbf{n}_j \Big|_{\Gamma_0} = \frac{\alpha \mathbf{T} \mathbf{n}_i}{(1 - 2\nu)} \Big|_{\Gamma_0}. \quad (6)$$

Отже, на кожному кроці маємо задачу для однорідної платівки, де неоднорідність матеріалу платівки та температурний вплив враховані в об'ємному потенціалі та в граничних умовах. Густина такого потенціалу визначають з попереднього кроку. Розв'язуючи цю систему за допомогою модифікованого методу граничних елементів [4], [5], одержимо систему лінійних алгебричних рівнянь, розв'язання якої дає змогу визначити всі складові вектора переміщень і тензора напружень на границі розглядуваного тіла

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^{i(k)}(\mathbf{x}') &= (\lambda_0 + 2\mu_0) \mathbf{a}_{1i}^{(k)} + \lambda_0 \mathbf{a}_{5i}^{(k)} - 3K\alpha T \\ \sigma_{22}^{i(k)}(\mathbf{x}') &= (\lambda_0 + 2\mu_0) \mathbf{a}_{5i}^{(k)} + \lambda_0 \mathbf{a}_{1i}^{(k)} - 3K\alpha T \\ \tau_{12}^{i(k)}(\mathbf{x}') &= \mu_0 (\mathbf{a}_{2i}^{(k)} + \mathbf{a}_{4i}^{(k)}), \mathbf{k} = 1, \dots, N_{iter}, \mathbf{i} = 1, \dots, M\end{aligned}\quad (7)$$

та, використовуючи зображення Сомільяно, у внутрішніх точках розглядуваного тіла для $\mathbf{k}$ -го кроку

$$\mathcal{H}_{ij}^{(k)}(\xi) = \int_{\Gamma_0} \mathbf{u}_{ijl}^*(\xi, \mathbf{x}) \mathbf{p}_l^{(k)}(\mathbf{x}) d\Gamma_0(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma_0} \mathbf{p}_{ijl}^*(\xi, \mathbf{x}) \mathbf{u}_l^{(k)}(\mathbf{x}) d\Gamma_0 + \int_S \mathbf{u}_{ijl}^*(\xi, \mathbf{x}) \mathbf{X}_l^{(k)}(\mathbf{x}) dS_0,$$

де

$$\mathbf{X}_i^{(k)}(\mathbf{x}) = \mathcal{H}_{ij}^{(k-1)} - \frac{\mathbf{E}_0}{(1-2\nu)} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}_i} \left(\frac{\alpha(\mathbf{T}) \mathbf{T}}{\mathbf{E}(\mathbf{T})} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{T})}{\partial \mathbf{T}} + \frac{\partial \alpha(\mathbf{T})}{\partial \mathbf{T}} + \alpha(\mathbf{T}) \right), \quad (8)$$

$\mathcal{H}_{ij}^{(k-1)}$ – напруження, визначені на попередньому кроці ітерації, а $\mathbf{u}_{ijl}^*$ та $\mathbf{p}_{ijl}^*$ – оператори напружень від $\mathbf{U}_i^l$ та $\mathbf{g}_j^l$ відповідно.

Отже, одержимо значення всіх компонент напружень. Ітераційний процес триває доти, доки виконується умова $\max_{\mathbf{x} \in S} \|\sigma_{ij}^{(k)} - \sigma_{ij}^{(k-1)}\| > \varepsilon$.

Розглянемо тепер задачу визначення напружено-деформованого стану в термочутливій платівці за умови пружнопластичного деформування. В цьому випадку вважаємо, що напруження та деформації в кожній точці розглядуваного тіла пов'язані такими співвідношеннями:

1) в тих точках, де умова пластичності $T_\sigma > T_y$ не справджується, правильний закон Дюганеля-Неймана

$$\sigma_{ij}(\mathbf{T}) = \frac{\mathbf{E}(\mathbf{T})}{\mathbf{E}_0} (\lambda_0 \theta \delta_{ij} + 2\mu_0 \varepsilon_{ij}) - 3K(\mathbf{T}) \alpha T \delta_{ij};$$

2) в тих точках, де виконується умова пластичності $T_\sigma > T_y$, залежність між інтенсивністю напружень і деформацій приймають у вигляді $T_\sigma - T_y = \mathbf{E}'(\Gamma - \Gamma_y)$. Тут $\mathbf{E}'(\mathbf{T})$ – модуль Юнга, що відповідає ділянці діаграми навантаження $T_\sigma - \Gamma$, яка відповідає пластичному стану,

$$T_\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{ij} - \sigma_{II} \delta_{ij}/3)(\sigma_{ij} - \sigma_{II} \delta_{ij}/3)}, \text{ а } \Gamma = \sqrt{2} \sqrt{(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{II} \delta_{ij}/3)(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{II} \delta_{ij}/3)}.$$

При розв'язанні задачі функції $\mathbf{E}(\mathbf{T})$, $\mathbf{E}'(\mathbf{T})$ вважаємо заданими. Залежність між напруженнями та деформаціями у пластичній зоні виразимо за допомогою такої залежності:

$$\sigma_{ij} = \frac{T_y}{T_\sigma} \sigma_{ij}^e + \frac{\mathbf{E}'(\mathbf{T})}{\mathbf{E}(\mathbf{T})} (\lambda_0 \theta \delta_{ij} + 2\mu_0 \varepsilon_{ij}) - \frac{\mathbf{E}'(\mathbf{T})}{\mathbf{E}(\mathbf{T})} \frac{T_y}{\Gamma} (\lambda_0 \theta^e \delta_{ij} + 2\mu_0 \varepsilon_{ij}^e) - 3\mathbf{K} \alpha \mathbf{T} \delta_{ij}, \quad (9)$$

де індекс e відповідає пружній ділянці діаграми навантаження $T_\sigma - \Gamma$.

Отже, для пластичних зон залежність між напруженнями і деформаціями на m -му кроці ітерації виражають формулою

$$\sigma_{ij}^{(m)} = \frac{T_y}{T_\sigma^{m-1}} \sigma_{ij}^{(m-1)} - \frac{\mathbf{E}'(\mathbf{T})}{\mathbf{E}_0} \left(\frac{T_y}{\Gamma_{n-1}} (\lambda_0 \theta^{(m-1)} \delta_{ij} + 2\mu_0 \varepsilon_{ij}^{(m-1)}) - 3\mathbf{K} \alpha \mathbf{T} \delta_{ij} - \lambda_0 \theta^{(m)} \delta_{ij} - 2\mu_0 \varepsilon_{ij}^{(m)} \right). \quad (10)$$

Тут $T_1, \Gamma_1, \varepsilon_{ij}^1$ – значення першого ітераційного кроку; $\mathbf{E}_{pl}$ – заданий модуль пружності для пластичної ділянки діаграми навантаження; $T_y = T_y(\mathbf{T})$ – задана функція температури, що визначається експериментально.

Отож, система рівнянь для m -ї ітерації по пластичі (та n -ї ітерації по пружній задачі) запишемо у вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda_0 + \mu_0) \mathbf{u}_{i,j}^{(n)(m)} \delta_{ij} + \mu_0 \Delta \mathbf{u}_i^{(n)(m)} + \frac{1}{\mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{T}} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}_j} \mathbf{S}_{ij}^{e(n-1)(m-1)} - \\ - \frac{3\mathbf{E}_0}{\mathbf{E}} (\mathbf{K} \alpha \mathbf{T})_{,i} = 0, \mathbf{x} \in \mathbf{S}_e \\ (\lambda_0 + \mu_0) \mathbf{u}_{i,j}^{(n)(m)} \delta_{ij} + \mu_0 \Delta \mathbf{u}_i^{(n)(m)} + \frac{1}{\mathbf{E}_{pl}} \frac{\partial \mathbf{E}_{pl}}{\partial \mathbf{T}} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}_j} \mathbf{S}_{ij}^{pl(n-1)(m-1)} + \\ + \mathbf{E}_0 \mathbf{A}_{m-1} - \frac{3\mathbf{E}_0}{\mathbf{E}_{pl}} (\mathbf{K}_{pl} \alpha \mathbf{T})_{,i} = 0, \mathbf{x} \in \mathbf{S}_{pl} \end{array} \right.$$

плюс граничні умови:

$$\mathbf{E}(\mathbf{T}) (\lambda_0 \mathbf{u}_{i,j}^{(n)(m)} \delta_{ij} + \mu_0 (\mathbf{u}_{i,j}^{(n)(m)} + \mathbf{u}_{j,i}^{(n)(m)})) \mathbf{n}_j = 3\mathbf{K}(\mathbf{T}) \alpha \mathbf{T} \mathbf{n}_i. \quad (11)$$

Одержану систему диференціальних рівнянь у частинних похідних зведемо до системи гранично-контактних рівнянь. Остаточно одержимо таку систему граничних інтегральних рівнянь для m -ї ітерації по пластичі:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbf{u}_i^{(n)(m)} \delta_{ij} &= \int_{\Gamma_0} \mathbf{U}_i^k \sigma_{kj}^{(n)(m)} \mathbf{n}_j d\Gamma_0 - \int_{\Gamma_0} \mathbf{g}_i^k \mathbf{u}_k^{(n)(m)} d\Gamma_0 - \int_{\mathbf{S}_{pl}} \mathbf{U}_i^k \mathbf{A}_{ij,j}^{(m-1)} d\mathbf{S}_{pl} \\ &- 3 \int_{\mathbf{S}_{pl}} \mathbf{U}_i^k (\mathbf{K}_{pl} \alpha \mathbf{T})_{,i} d\mathbf{S}_{pl} + \int_{\mathbf{S}_e} \left(\mathbf{U}_i^k \frac{1}{\mathbf{E}_e} \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial \mathbf{T}} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}_j} \mathbf{S}_{ij}^{e(n-1)(m-1)} \right) d\mathbf{S}_e \end{aligned}$$

$$+ \int_{S_{pl}} \left(U_i^k \frac{1}{E_{pl}} \frac{\partial E_{pl}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x_j} s_{ij}^{pl(n-1)(m-1)} \right) dS_{pl} - 3 \int_{S_e} U_i^k (K_e \alpha T)_{,i} dS_e. \quad (12)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (12), одержимо значення переміщень і напружень на границі платівки. Отож, на кожному кроці маємо задачу для однорідної платівки, де термочутливість матеріалу платівки та температурний вплив враховані у вигляді псевдомасових сил і додаткових навантажень на границі.

Система (11), (12) за допомогою модифікованого методу граничних елементів зводиться до системи лінійних алгебричних рівнянь, після розв'язання якої знайдемо як розв'язки коефіцієнти апроксимації на границі розглядуваного тіла. На підставі формул апроксимації напружень для m -го кроку пластичної ітерації знайдемо значення напружень на границі тіла

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(n)(m)} &= \frac{E}{E_0} \left\{ (\lambda_0 + 2\mu_0) a_1^{(n)(m)} + \lambda_0 a_5^{(n)(m)} \right\} - 3K \alpha T + \frac{p T_y}{T_\sigma^{m-1}} \left(\varkappa_{11}^{(m-1)} - \frac{E_{pl}}{E_0} (s_{11}^{(m-1)}) \right) \\ \sigma_{22}^{(n)(m)} &= \frac{E}{E_0} \left\{ (\lambda_0 + 2\mu_0) a_5^{(n)(m)} + \lambda_0 a_1^{(n)(m)} \right\} - 3K \alpha T + \frac{p T_y}{T_\sigma^{m-1}} \left(\varkappa_{22}^{(m-1)} - \frac{E_{pl}}{E_0} (s_{22}^{(m-1)}) \right) \\ \tau_{12}^{(n)(m)} &= \frac{E}{E_0} \mu_0 (a_2^{(n)(m)} + a_4^{(n)(m)}) + \frac{p T_y}{T_\sigma^{m-1}} \left(\varkappa_{12}^{(m-1)} - \frac{E_{pl}}{E_0} (s_{12}^{(m-1)}) \right), \end{aligned} \quad (13)$$

де

$$E = \begin{cases} E_e, T_\sigma < T_y, \\ E_{pl}, T_\sigma \geq T_y \end{cases}, \quad p = \begin{cases} 0, T_\sigma < T_y \\ 1, T_\sigma \geq T_y \end{cases}, \quad s_{ij}^{(m-1)} = \lambda_0 \theta^{(m-1)} \delta_{ij} + 2\mu_0 \varepsilon_{ij}^{(m-1)}$$

та всередині платівки для m -го кроку пластичної ітерації:

$$\begin{aligned} s_{ij}^{(n)(m)}(\xi) &= \int_{\Gamma_0} u_{ijl}^*(\xi, x) p_l^{(n)(m)}(x) d\Gamma_0(x) - \int_{\Gamma_0} p_{ijl}^*(\xi, x) u_l^{(n)(m)}(x) d\Gamma_0 \\ &\quad - 3 \int_{S_{pl}} u_{ijl}^*(K_{pl} \alpha T)_{,i} dS_{pl} \\ &\quad + \int_{S_{pl}} u_{ijl}^*(\xi, x) \left(\frac{1}{E_{pl}} \frac{\partial E_{pl}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x_j} s_{ij}^{pl(m-1)} \right) dS_{pl} + \int_{S_e} u_{ijl}^*(\xi, x) \left(\frac{1}{E_e} \frac{\partial E_e}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x_j} s_{ij}^{e(m-1)} \right) dS_e + (14) \\ &\quad + 3 \int_{S_e} u_{ijl}^*(K_e \alpha T)_{,i} dS_e \\ &\quad + \int_{S_{pl}} u_{ijl}^*(\xi, x) \left(\frac{T_y}{T_\sigma^{m-1}} \varkappa_{ij}^{(m-1)} - \frac{E_{pl}}{E_0} \frac{T_y}{T_\sigma^{m-1}} (\lambda_0 \theta^{(m-1)} \delta_{ij} + 2\mu_0 \varepsilon_{ij}^{(m-1)}) \right) dS_{pl}. \end{aligned}$$

Ітераційний процес по пластичі триває доти, доки пластичні зони на двох послідовних кроках не відрізнятимуться, тобто $S_p^m \cong S_p^{m-1}$.

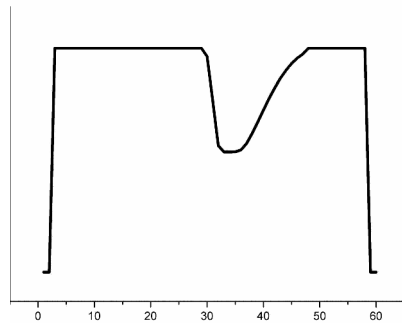


Рис. 1. Зміна модуля Юнга платівки при нагріванні її джерелом тепла

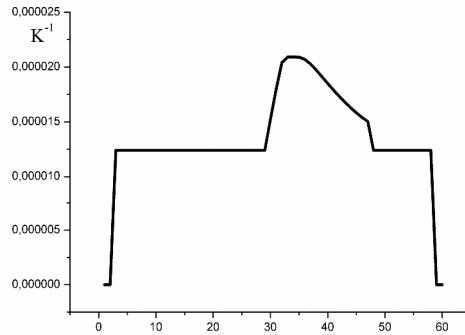


Рис. 2. Зміна коефіцієнта лінійного розширення платівки при нагріванні її джерелом тепла

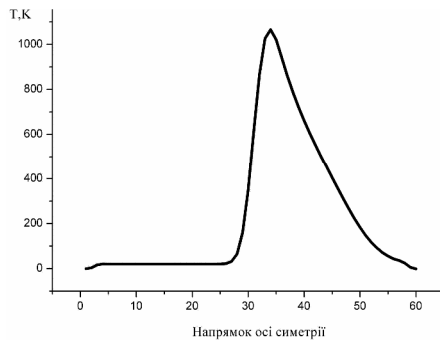


Рис. 3. Розподіл температури при нагріванні платівки джерелом тепла

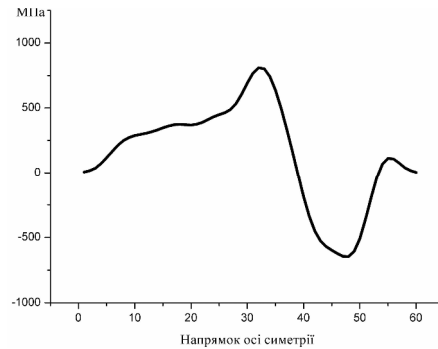


Рис. 4. Розподіл інтенсивності напружень при нагріванні і подальшому охолодженні

Отже, для розв'язання задачі застосовують дві вкладені ітераційні схеми. Перша схема дає змогу одержати розв'язок термопружної задачі з залежними від температури механічними характеристиками. Друга схема дає змогу розглядати термопружнопластичну задачу як послідовність термопружних задач.

Було розглянуто сталеву платівку розміром 16x16 см, завтовшки $d = 0.3$ см. На графіках показано залежність термомеханічних параметрів платівки від температури, розподіл полів температури та напруженого стану платівки при її нагріванні та подальшому охолодженні тепловим джерелом. На рис. 1-4 зображено зміну зазначених характеристик вздовж осі симетрії платівки.

1. *Кушнір Р.М., Попович В.С., Токовий Ю.В.* Про визначення напружень в термочутливих тілах за теплових та силових навантажень // *Интегральные уравнения и их применения: Тезисы докладов международной конференции.* Одесса. – 2005. – С. 82.
2. *Попович В.С., Махоркін І.М.* Про розв'язок задач теплопровідності термочутливих тіл з теплообміном // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 1997. – 40, № 1. – С. 36–44.
3. *Попович В.С.* Моделирование тепловых полей в тонких термочувствительных пластинках // *Моделирование и оптимизация сложных механических систем. Сб. научных трудов.* – К., – 1990. – С. 70–75
4. *Лавренюк В.І.* Про визначення напружено-деформованого стану матриці з включенням методом граничних елементів // *Вісн. Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки.* – 1993. – №2.
5. *Лавренюк В.І., Лавренюк М.В.* – Про застосування методу граничних елементів в задачах термопружності кусково-однорідних тіл. Крайові задачі термомеханіки, Міжнародна конференція, присвячена пам'яті професора Ю.М. Коляно. – Львів, 1996. – Тези доп. – С. 176–180.

ELASTOPLASTIC DEFORMATION OF THERMOSENSITIVE BODIES

Vasyl Lavrenyuk, Mykola Lavrenyuk

*National Taras Shevchenko University of Kyiv
Volodymyrs'ka Str., 64 01033 Kyiv, Ukraine*

The elastoplastic equilibrium of thermosensitive finite plate at action of heat source is considered. For solving this problem the developed by authors modified boundary elements method is used. It was constructed the iterative process, which comes to solving the sequence of elastic problems for homogeneous plate. The plastic problem is solved on the base of elastic solutions method in the framework of the theory of small elastoplastic strains, which also leads to constructing the iterative process on each iterative step of the problem of thermoelastic equilibrium of the plate. It was analysed the obtained distribution of stresses and intensities fields in the plate at heating it with static heat source.

Key words: boundary elements method, thermoelastoplasticity.

Стаття надійшла до редколегії 28.03.2007

Прийнята до друку 19.11.2008

УДК 539.375

ПЛАСТИЧНЕ ВІДШАРОВУВАННЯ ЖОРСТКОГО ПІДКРІПЛЕННЯ БЕРЕГА ТРІЩИНИ ЗА НАЯВНОСТІ ПЕРЕПАДУ ГРАНИЦІ ТЕКУЧОСТІ

Георгій СУЛИМ, Марта КРИВЕНЬ
*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна*

Досліджено розвиток пластичних смуг під час зсуву в околі вершин жорсткого тонкого включення, яке до навантаження перебувало в однобічному механічному контакті з середовищем із великою затримкою текучості. Другий бік включення не контактує з середовищем. Показано, що, окрім пластичної смуги на межі включення-середовище від вершини включення, розвивається також перпендикулярна до включення смуга. Визначено довжини обох смуг залежно від навантаження. Виявлено, що за певного рівня навантаження починає відбуватися розвантаження – смуга на межі включення-середовище починає скорочуватися.

Ключові слова: пластична смуга, тонке включення, текучість, навантаження, тріщина, відшарування.

Недосконалість механічного контакту включення й середовища, що є

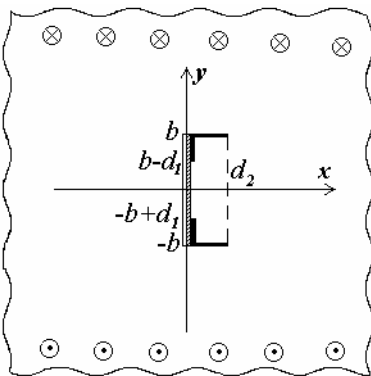


Рис. 1. Схема задачі. Потовщені лінії – пластичні смуги

радіше правилом, аніж винятком, може суттєво впливати на напружено-деформований стан тіла з включенням, зокрема на розвиток пластичних деформацій. Наприклад, відсутність контакту на прикінцевій частині поверхні включення змінює порядок сингулярності поля пружних напружень [1]. З'ясувалось [2, 3], що врахування затримки текучості при переході тіла з пружного стану в пластичний (зуба на діаграмі $\sigma - \varepsilon$) змінює просто радикально передбачувану картину пластичних зон: коли в ідеально пружно-пластичній моделі пластичні деформації формують об'ємні

зони, то урахування затримки текучості призводить до зон, сформованих окремими лініями ковзання. Це й підтверджує експеримент [4]. Тому поєднують в єдиному підході урахування недосконалості механічного контакту включення з середовищем і перепаду межі текучості діаграми напруження-деформація.

Для жорсткого включення, вся поверхня якого до навантаження перебувала в ідеальному механічному контакті з середовищем, пластичні

деформації при його вершині досліджували раніше в [5–7]: спочатку в припущенні про локалізацію пластичних деформацій на межі включення-середовище [5], а згодом і об'ємно розподілених пластичних деформацій з визначенням межі зони пластичних у пружних деформацій [6, 7]. Дослідимо напружено-деформований стан і проаналізуємо розвиток пластичних деформацій у тілі з тонким абсолютно жорстким включенням ($x = 0, |y| \leq b, |z| < \infty$), ліва частина $x = -0, |y| \leq b, |z| < \infty$ поверхні якого не контактує з середовищем, а права перебуває з ним у ідеальному контакті, коли тіло навантажене напруженнями $\tau_{xz} = 0, \tau_{yz} = \tau_\infty$ на нескінченності. Пластичні деформації зароджуються у точках, де максимальне зсувне напруження досягає значення верхнього порогу текучості k_1 , а далі розвиваються вздовж площинок, на яких зсувне напруження дорівнює нижньому порогові текучості k_0 ($k_0 < k_1$). Різниця $k_1 - k_0$ характеризує висоту зуба на діаграмі деформування тіла. Оскільки у випадку ідеального контакту включення з середовищем пластична смуга не може розвиватися на його продовженні [5], а об'ємно розподілені пластичні деформації зі збільшенням навантаження охоплюють точки середовища як завгодно далекі від включення у перпендикулярному до нього напрямі [6, 7], то будемо для однобічно відшарованого включення вважати пластичні деформації локалізованими у двох смугах, які розпочинаються від вершини включення: вертикальній вздовж межі включення-середовище, де до навантаження включення ідеально контактувало з середовищем, і перпендикулярній до включення горизонтальній (рис. 1). Таке припущення, як стане зрозумілим під час розв'язання задачі, забезпечить не перевищення верхнього порогу текучості поза пластичними смугами.

За згаданих умов у тілі виникне антиплоский напружено-деформований стан з асиметричним щодо осі абсцис полем переміщень $w(x, y) = -w(x, -y)$. Його визначення зводиться до знаходження полів напружень у верхній півплощині, точніше в області D – верхній півплощині без відрізків ($x = 0; 0 \leq y \leq b$) та $x = 0; b \leq y \leq b - d_1$. Довжини d_1 вертикальної смуги на межі включення-середовище і горизонтальної d_2 залежать від величини прикладеного навантаження і будуть визначені нижче.

На межі області D напруження є такими:

$$\begin{aligned} \tau_{xz}(x, 0) &= 0 \quad (-\infty < x < 0, \quad y = 0), \quad \tau_{xz}(-0, y) = 0 \quad (x = -0, \quad 0 < y < b), \\ \tau_{yz}(x, b \pm 0) &= k_0 \quad (0 < x < d_2), \quad \tau_{xz}(+0, y) = k_0 \quad (b < y < b - d_1), \\ \tau_{yz}(+0, y) &= 0 \quad (0 < y < b - d_1), \quad \tau_{xz}(x, 0) = 0 \quad (-\infty < x < 0, \quad y = 0), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tau_{yz} = \tau_\infty.$$

Крім того, оскільки ніде в тілі зсувне напруження не може перевищувати верхнього порогу текучості, то всюди в області D повинна виконуватися умова

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 < k_1^2. \quad (2)$$

Пружний розв'язок цієї задачі призводить до сингулярності поля напружень у вершинах включення. Це означає, що за будь-якої величини навантаження досягається верхній поріг текучості. Якщо цей поріг нижчий за $k_0\sqrt{2}$, то може виникнути більше двох смуг. Коли ж $k_1 \geq k_0\sqrt{2}$, крім вертикальної смуги, уздовж якої відбуватиметься пластичне відшаровування, то перпендикулярно до включення розвиватиметься ще одна смуга (див. рис. 1). Інші смуги тоді виникнути не можуть.

Внаслідок умов рівноваги і закону Гука функція

$$\tau(\zeta) = \tau_{yz}(x,y) + i\tau_{xz}(x,y)$$

аналітична в області **D**. Легко перевірити, що умови (1), (2) цілком визначають конформне відображення, яке виконує функція $\tau = \tau(\zeta)$ образом області **D** є квадрат (область **G**) в комплексній площині τ (рис. 2, 3).

Оскільки виконуване функцією $\tau = \tau(\zeta)$ відображення відоме апіорі, то її можна знайти, побудувавши це відображення. Для цього введемо допоміжну комплексну площину t , у якій областям **D** і **G** відповідатиме верхня півплощина (область **H** на рис. 4). Якщо відповідним точкам на межах областей **D** і **G** відповідає спільна точка на межі області **H**, то пара функцій

$$\zeta = \zeta(t), \quad \tau = \tau(t) \quad (t \in \mathbf{H}) \quad (3)$$

визначатиме функцію $\tau = \tau(\zeta)$ параметричним способом.

На межах областей **D** і **G** є рівно три пари точок, а саме A, C і G , координати яких наперед відомі, тому відображення $\tau = \tau(\zeta)$ існує і воно єдине. Области **D** і **G** – прямокутні багатокутники, тому відображення $\zeta = \zeta(t)$ і $\tau = \tau(t)$ можна знайти за допомогою перетворення Крістофеля - Шварца.

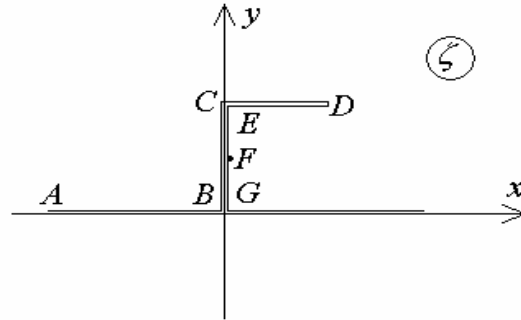
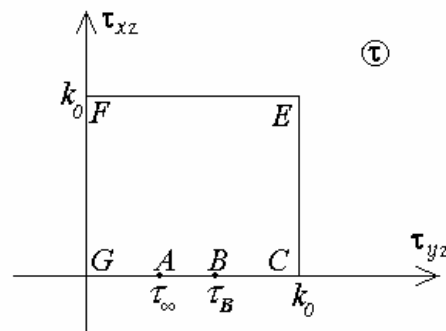


Рис. 2.

Рис. 3. Площина τ

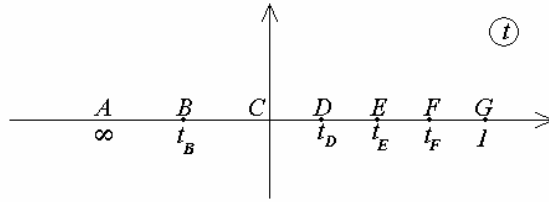


Рис. 4

$$\tau(t) = \frac{k_0}{1} \frac{\int_{t_F}^t F_\tau(\eta) d\eta}{\int_{t_F}^1 |F_\tau(\eta)| d\eta}, \quad (4)$$

де $F_\tau(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\eta(\eta - t_E)(\eta - t_F)(\eta - 1)}}$. Тут і нижче під $\sqrt{\eta - a}$ (a – дійсне число) розумітимемо аналітичну у верхній півплощині функцію, яка набуває дійсних додатних значень, коли η дійсне і $\eta > a$.

Маємо також два рівняння для знаходження двох параметрів t_D, t_F ($0 < t_D < t_F < 1$) перетворення (4): перше – умова рівності сторін фігури $GCDF$ (див. рис. 3) -

$$\int_{t_E}^{t_F} |F_\tau(\eta)| d\eta = \int_{t_F}^1 |F_\tau(\eta)| d\eta \quad (5)$$

і друге – значення τ на нескінченності

$$\int_1^\infty |F_\tau(\eta)| d\eta = \frac{\tau_\infty}{k_0} \int_{t_F}^1 |F_\tau(\eta)| d\eta. \quad (6)$$

Фігура $ABCDEGA$ на рис. 2 – п'ятикутник. Функцію $\zeta = \zeta(t)$ подає такий інтеграл:

$$\zeta = ib + \frac{b}{0} \frac{\int_{t_B}^t F_\zeta(\eta) d\eta}{\int_{t_B}^{t_D} |F_\zeta(\eta)| d\eta}, \quad F_\zeta(\eta) = \frac{(\eta - t_D)\sqrt{\eta}}{\sqrt{(\eta - t_B)(\eta - t_E)(\eta - 1)}}. \quad (7)$$

Параметри перетворення (7) зв'язані двома співвідношеннями, які відповідають рівності сторін BC і EG та CD і DE фігури $ABCDEGA$ (рис. 2),

$$\int_{t_B}^0 |F_\zeta(\eta)| d\eta = \int_{t_E}^1 |F_\zeta(\eta)| d\eta; \quad (8)$$

$$\int_0^{t_D} |F_\zeta(\eta)| d\eta = \int_{t_D}^{t_E} |F_\zeta(\eta)| d\eta. \quad (9)$$

Визначення чотирьох параметрів інтегралів Крістофеля-Шварца (4), (7) звелось до розв'язування двох незалежних систем рівнянь: (5), (6) стосовно параметрів t_E, t_F і (8), (9) - щодо t_B, t_D .

Враховуючи, що у площинах τ і t відомі координати трьох точок, а отже, й довжини відрізків GA, EF, FG фігури $GCEF$ (рис. 3), розв'язок системи (4), (7) стосовно t_E, t_F можна знайти за допомогою такого ітераційного алгоритму:

$$\begin{aligned} t_F^{(i+1)} &= \frac{FG^{(i)} - EF^{(i)}}{FG^{(i)} + EF^{(i)}} + 2t_F^{(i)} \frac{EF^{(i)}}{FG^{(i)} + EF^{(i)}}, \\ t_E^{(i+1)} &= t_E^{(i)} \left(\frac{GA^{(i)} + FG^{(i)}}{FG^{(i)}} - \frac{\tau_\infty}{k_0} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Тут $FG^{(i)}, EF^{(i)}, GA^{(i)}$ - права й ліва частини рівності (5) та ліва частина рівності (6), в яких замість t_F, t_E фігурують $t_F^{(i)}, t_E^{(i)}$ - i -ті наближення шуканих величин. Алгоритм (10) збігається досить швидко, але при близьких до k_0 значеннях τ_∞ область притягання розв'язку дуже звужується.

Для вибору нульового (початкового) $t_F^{(0)}, t_E^{(0)}$ наближення параметрів t_F, t_E систему (5), (6) розв'язували спочатку для $\tau_\infty < 0,5k_0$. Для цього випадку алгоритм (10) не є надто чутливим щодо вибору початкового наближення. Можна прийняти $t_F^{(0)} = 0,6; t_E^{(0)} = 0,3$. Для більших τ_∞ початкові наближення для $\tau_\infty + \Delta\tau_\infty$ ($\Delta\tau_\infty > 0$), близького до τ_∞ , зручно вибирати вже визначені значення цих параметрів для попереднього рівня навантаження τ_∞ .

Параметри t_B, t_D - розв'язки системи рівнянь (8), (9) - визначали за допомогою такої схеми послідовних наближень:

$$t_B^{(i+1)} = 2 \frac{EG^{(i)} t_B^{(i)}}{BC^{(i)} + EG^{(i)}}, \quad t_D^{(i+1)} = 2 \frac{DE^{(i)} t_D^{(i)}}{DE^{(i)} + CD^{(i)}}. \quad (11)$$

Тут $BC^{(i)}, EG^{(i)}, CD^{(i)}, DE^{(i)}$ - ліва й права частини рівнянь (8) і (9), у яких замість t_B, t_D фігурують $t_B^{(i)}, t_D^{(i)}$ - i -ті наближення шуканих величин. Їхні початкові значення $t_B^{(0)}, t_D^{(0)}$ приймали рівними -1 і $t_E/2$ відповідно.

Коли функцію напружень (3) знайдено, легко визначити залежності довжин пластичних смуг від навантаження. У допоміжній площині t горизонтальній смузі відповідає відрізок $[0; t_D]$, а вертикальній - $[t_E, t_F]$, тому з формули (7) для їхніх довжин відповідно отримуємо

$$d_1 = b \int_0^{t_D} |F_\zeta(\eta)| d\eta \bigg/ \int_{t_B}^0 |F_\zeta(\eta)| d\eta, \quad d_2 = b \int_{t_E}^{t_F} |F_\zeta(\eta)| d\eta \bigg/ \int_{t_B}^0 |F_\zeta(\eta)| d\eta, \quad (12)$$

Обчислені за формулами залежності довжин смуг від навантаження зображено на рис. 5. Як засвідчив числовий експеримент, довжина вертикальної смуги, завдяки якій відшаровується включення, спочатку

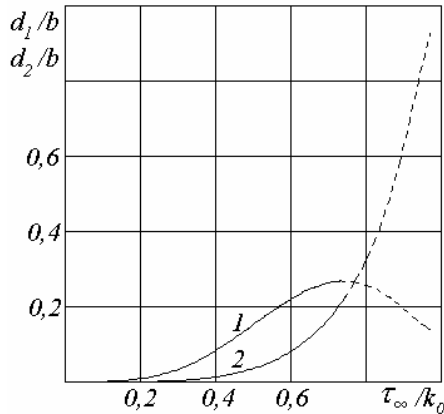


Рис. 5.

пластичне середовище зі збільшенням навантаження росте монотонно, коли навантаження досягає межі текучості, охоплює всю довжину включення [5]. Континуальна пластична зона, що розвивається в ідеально пружно-пластичному середовищі від вершини тонкого жорсткого включення, яке до навантаження ідеально контактувало з середовищем, розвивається поступово, розвантаження не відбувається [6, 7]. На відміну від смуги, локалізованої на поверхні включення, континуальна зона охоплює не більше третини його поверхні. Максимальна частина охопленої пластичними деформаціями поверхні включення близька до знайденої нами частини пластично відшарованої поверхні включення, яке перебуває в однобічному механічному контакті з середовищем із затримкою текучості.

1. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезом, тонких включений и подкреплений. - М., 1982.
2. Сулим Г.Т., Кривень М.В. Формування пластичних смуг періодичною системою тріщин зсуву за поздовжнього зсуву ідеально пружно-пластичного середовища з затримкою текучості. Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій. Вип. 5. / За ред. Й.Й. Лучка. - Львів, 2005. - С. 172-181.
3. Heorhiy Sulym, Marta Kryweń. Odseparowywanie plastyczne cienkiej sztywnej inkluzji w ośrodku z dużym zatrzymaniem płynięcia pod czas

- antypłaskiego stanu odkształcenia. Materiały III Symp. Mech. Zn. Mater. i Konstr. (Augustów, 1-4 czerwca 2005), Białystok, 2005. S. 397–400.
4. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел. – М.: Изд-во ИЛ, 1954.
 5. *Витвицький П.М., Кривень В.А.* Антиплоска пружно-пластична деформація тіла з жорстким тонким включенням // Доп. АН УРСР. Сер.А. – 1979. – № 2. – С. 104–108.
 6. *Крайнов А.Ю., Никитин Л.В.* Антиплоская деформация упругопластического тела с тонким жестким включением // Физ. – хим. мех. материалов. – 1984. – № 1. – С. 42–45.
 7. *Кривень В. А. Ланьош Є.М.* Пружнопластична задача антиплоскої деформації тіла, що містить жорстке ромбічне призматичне включення // Доп. АН УРСР. Сер.А. – 1986. – № 6. – С. 30–34.

PLASTIC DELAMINATING OF THE RIGID REINFORCEMENT OF THE CRACK EDGE IN THE PRESENCE OF YIELD DROP

Georgiy Sulym, Marta Kriven

*Ivan Franco National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine*

This paper concerns plasticity bands development under the shear in the tip vicinity of thin rigid inclusion, one edge of which before loading was perfectly bonded to the medium with essential yield delay. The other edge of inclusion does not contact with medium. This results that besides the plasticity band on the medium-inclusion interface also a band perpendicular to the inclusion develops. The lengths of both bands are determined depending on the loading. It is shown that at the certain load rate the stress relief take place: the band on the inclusion-medium interface shortens.

Key words: plastic bar, thin including, loading, crack.

Стаття надійшла до редколегії 21.02.2007

Прийнята до друку 19.11.2008

УДК 539.3

ВИЗНАЧЕННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ І НАПРУЖЕНЬ У ЗІСТИКОВАНИХ СМУГАХ НА ПІДСТАВІ ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНОЇ ФОРМУЛИ ОБЕРНЕННЯ ЛАПЛАСА**Тетяна СОЛЯР**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 36 79053 Львів, Україна*

Наведено алгоритм розрахунку нестационарних температурних полів і спричинених ними напружень для пластин з довільною кількістю смуг, який ґрунтується на безпосередньому обчисленні зображення Лапласа і модифікованій формулі Пруднікова для його обернення.

Ключові слова: зістиковані смуги, перетворення Лапласа, температурні поля, напруження.

Розглянуто задачу про визначення нестационарних температурних полів і напружень у зістикованих тонких безмежних смугах, які нагріваються через торцеві поверхні шляхом конвективного теплообміну з середовищем змінної в часі температури. Через лицеві поверхні $z = \pm h$ відбувається конвективний теплообмін з середовищем нульової температури. Розв'язок цієї задачі в зображеннях Лапласа має дещо простий вигляд. Зокрема, в [1] розв'язок задачі теплопровідності без урахування тепловіддачі з лицевих поверхонь записано у матричному вигляді за допомогою рекурентних формул. В [1] також зазначено, що побудова оригіналів в аналітичному вигляді пов'язана зі складністю знаходження коренів знаменника у зображенні розв'язку, що вимагає проведення достатньо складних обчислень при знаходженні температури. Тому в явному вигляді у літературі такі розв'язки записано для окремих випадків (двох-трьох смуг). Мета нашої праці – розробити алгоритм розрахунку нестационарних температурних полів і напружень для пластин з довільною кількістю смуг, який ґрунтується на безпосередньому обчисленні зображення Лапласа та чисельно-аналітичній формулі для його обернення.

Приймемо, що пластина складається з N смуг. Позначимо через l_j, a_j, λ_j і B_j ширину, коефіцієнти температуропровідності та теплопровідності і тепловіддачу j -ї смуги відповідно.

Рівняння теплопровідності для j -ї смуги, що займає область $x_{j-1} < x < x_j$, $-\infty < y < \infty$, $-h < z < h$ має вигляд

$$\frac{\partial^2 \mathbf{t}_j}{\partial \mathbf{x}^2} - \text{Bi}_j \mathbf{t}_j - \frac{\partial \mathbf{t}_j}{\mathbf{a}'_j \partial \theta} = 0, \quad j = 1, K, N \quad (1)$$

Тут x – координата, що віднесена до деякої характерного розміру H пластинки; h – півтовщина пластинки; $\text{Bi}_j = \frac{\alpha_j^z H^2}{\lambda_j h}$; α_j^z – коефіцієнти тепловіддачі з плоских границь; $\theta = \frac{\mathbf{a}_k \tau}{H^2}$; $\mathbf{a}'_j = \frac{\mathbf{a}_j}{\mathbf{a}_k}$; k – вибраний номер деякої смуги.

Граничні умови за конвективного теплообміну такі:

$$\lambda_1 \frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial \mathbf{n}} + \alpha_1 \mathbf{t}_1 = \alpha_1 \mathbf{f}_1 \quad \text{при } \mathbf{x} = 0, \\ \lambda_N \frac{\partial \mathbf{t}_N}{\partial \mathbf{n}} + \alpha_N \mathbf{t}_N = \alpha_N \mathbf{f}_N \quad \text{при } \mathbf{x} = \mathbf{x}_N, \quad (2)$$

де α_1 / H , α_N / H – коефіцієнти тепловіддачі з границь першої і останньої смуги; $\mathbf{f}_1$ і $\mathbf{f}_N$ – температури середовищ, які омивають ці границі.

Зображення для температури запишемо у вигляді

$$\mathbf{t}_j = \mathbf{f}_{j-1} \text{ch} \mathbf{p}_j (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{j-1}) - \mathbf{Q}_{j-1} \frac{\text{sh} \mathbf{p}_j (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{j-1})}{\lambda_j \mathbf{p}_j}, \quad (3)$$

де $\mathbf{x}_{j-1}$, $\mathbf{f}_{j-1}$, $\mathbf{Q}_{j-1}$ – відповідно координата, зображення температури та віднесеного до H потоку тепла на лівій межі j -ї смуги; $\mathbf{p}_j = \sqrt{\text{Bi}_j + \mathbf{s} / \mathbf{a}_j}$; $\mathbf{s}$ – параметр перетворення Лапласа за часовою координатою θ . Зазначимо, що $\mathbf{Q}_{j-1} = -\lambda_j \left. \frac{\partial \mathbf{t}_j}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{j-1}}$. Із подання (3) випливає, що функції $(\mathbf{f}_j, \mathbf{Q}_j)$ в кінці і на початку смуги пов'язані матричним співвідношенням вигляду [1]

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_j \\ \mathbf{Q}_j \end{pmatrix} = \mathbf{M}_j \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{j-1} \\ \mathbf{Q}_{j-1} \end{pmatrix}, \quad j=1,2,\dots,N, \quad (4)$$

де $\mathbf{M}_j$ – квадратна матриця з елементами

$$\mathbf{m}_{11}^{(j)} = \mathbf{m}_{22}^{(j)} = \text{ch}(\mathbf{p}_j l_j), \quad \mathbf{m}_{12}^{(j)} = -\frac{\text{sh}(\mathbf{p}_j l_j)}{\lambda_j \mathbf{p}_j}, \quad \mathbf{m}_{21}^{(j)} = -\lambda_j \mathbf{p}_j \text{sh}(\mathbf{p}_j l_j).$$

На підставі формули (4) маємо

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_j \\ \mathbf{Q}_j \end{pmatrix} = \mathbf{D}_j \begin{pmatrix} \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{Q}_0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

де $\mathbf{D}_j = \mathbf{M}_j * \mathbf{M}_{j-1} * \mathbf{K} * \mathbf{M}_1$, $\mathbf{f}_0, \mathbf{Q}_0$ – зображення температури і віднесенного до H потоку тепла на границі першої смуги. Підставляючи ці співвідношення у граничні умови, для визначення величин $\mathbf{f}_0, \mathbf{Q}_0$ отримуємо систему рівнянь вигляду

$$\mathbf{Q}_0 + \alpha_1 \mathbf{f}_0 = \alpha_1 \mathbf{f}_1,$$

$$(-\mathbf{d}_{22} + \alpha_N \mathbf{d}_{12}) \mathbf{Q}_0 + (-\mathbf{d}_{21} + \alpha_N \mathbf{d}_{11}) \mathbf{f}_0 = \alpha_N \mathbf{f}_N, \quad (6)$$

де $\mathbf{d}_{ij}$ – елементи матриці $\mathbf{D}_N$; $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_N$ – зображення Лапласа від функцій f_1, f_N .

Формули (5), (6) дають змогу розраховувати зображення температур і потоків тепла на межах довільної смуги, на підставі яких зображення від температури у довільних точках пластини визначають за формулою (3).

Частковий розв'язок, що відповідає знайдений температурі, має вигляд [4]

$$\sigma_{t,y} = -\alpha_{t,j} \mathbf{E}_j \mathbf{T}, \quad \sigma_{t,x} = 0, \quad \tau_{t,xy} = 0, \quad (7)$$

де $\alpha_{t,j}, \mathbf{E}_j$ – коефіцієнт лінійного температурного розширення та модуль Юнга j – ї смуги.

Ці напруження будуть виникати у закріпленій у поздовжньому напрямі (в напрямі осі Oy) пластині. Розглянемо випадок, коли пластина не навантажена. Знайдемо головний вектор $\mathbf{Y}$ і момент $\mathbf{M}$ зусиль, прикладених у поздовжньому напрямі, які відповідають розв'язку (7). Зображення Лапласа від цих величин такі:

$$\mathbf{Y} = -\sum_{j=1}^N \alpha_{t,j} \mathbf{E}_j \mathbf{A}_j, \quad \mathbf{M} = -\sum_{j=1}^N \alpha_j \mathbf{E}_j \mathbf{B}_j,$$

де $\mathbf{A}_j = \frac{1}{p_j \lambda_j} (\mathbf{Q}_{j-1} - \mathbf{Q}_j)$, $\mathbf{B}_j = \frac{1}{p_j \lambda_j} (x_{j-1} \mathbf{Q}_{j-1} - x_j \mathbf{Q}_j) - \frac{1}{p_j} (\mathbf{f}_j - \mathbf{f}_{j-1})$, $p_j = p_j^2$.

Щоб пластина була ненавантаженою, прикладемо до неї знайдені зусилля і момент з протилежним знаком.

Деформації, які будуть виникати у пластині при такому навантаженні, шукаємо у вигляді $\epsilon_y = \mathbf{c}x + \mathbf{d}$, де $\mathbf{c}$ і $\mathbf{d}$ – сталі. З умови, що для j – ї смуги

напруження $\sigma_x = 0$ маємо: $\varepsilon_x = -\nu_j \varepsilon_y$, де ν_j – коефіцієнт Пуассона. Тоді для j – ї смуги запишемо

$$\sigma_y = E_j(c\mathbf{x} + \mathbf{d}). \quad (8)$$

Головний вектор $\mathbf{Y}'$ і момент $\mathbf{M}'$, які відповідають цим зусиллям, матимуть вигляд

$$\mathbf{Y}' = c\mathbf{X}_2 + d\mathbf{X}_1, \mathbf{M}' = c\mathbf{X}_3 + d\mathbf{X}_2,$$

$$\text{де } \mathbf{X}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^N E_j (\mathbf{x}_j^k - \mathbf{x}_{j-1}^k).$$

Прирівнюючи $\mathbf{Y}' = -\mathbf{Y}$, $\mathbf{M}' = -\mathbf{M}$ для знаходження сталих c , d одержимо систему рівнянь

$$c\mathbf{X}_2 + d\mathbf{X}_1 = -\mathbf{Y},$$

$$c\mathbf{X}_3 + d\mathbf{X}_2 = -\mathbf{M}.$$

Додавши вирази (7) і (8), отримуємо зображення для напружень у зістикованих смугах.

Отримані співвідношення дають змогу визначати зображення температури та напружень. Температуру та напруження знаходили за формулою числово-аналітичного обернення Лапласа, яка побудована на підставі формули Пруднікова і має вигляд [2]

$$t(\mathbf{x}, \theta) \cong \frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \exp(s_n \theta) + \frac{1}{1 - \exp(-c)} \left[t_0 + l t'_0 \left[\frac{\theta}{l} + \frac{1}{\exp(c) - 1} \right] \right], \quad (9)$$

$$\text{де } 0 < \theta < l, \quad F_n = t_n - \left(\frac{t_0}{s_n} + \frac{t'_0}{s_n^2} \right), \quad s_n = \frac{(c + 2\pi ni)}{l}, \quad t_n = t(\mathbf{x}, s_n), \quad t_0 = t(\mathbf{x}, 0),$$

$t'_0 = \left. \frac{\partial t}{\partial \theta} \right|_{\theta=0}$, c – параметр. Значення c вибирають так, щоб при $\theta > l$ температура була близькою до свого асимптотичного значення в усій пластині.

Про ефективність цієї формули свідчать праці [2, 3].

Готує Євген Тетляков Розглянуто пластинку, яка складається з трьох смуг. Базовими вибрано дані для першої смуги ($k = 1$) і приймемо, що H – повна ширина пластини. Відносні значення всіх характеристик приймали однаковими, за винятком $\lambda'_2 = m$, $\alpha'_{t,2} = m$, $E'_2 = m$. Тут позначено $\lambda'_j = \lambda_j / \lambda_k$, $\alpha'_{k1} = \alpha_1 / \alpha_k$, $E'_j = E_j / E_k$. Параметрам у формулі обернення (9) надавали значень: $l = 10$, $c = 7$. В рядах утримували до 300 членів, що забезпечувало точність обчислень : 0.1%. Вважали, що нагрівання одностороннє, тобто $f_1 = C$, $f_N = 0$.

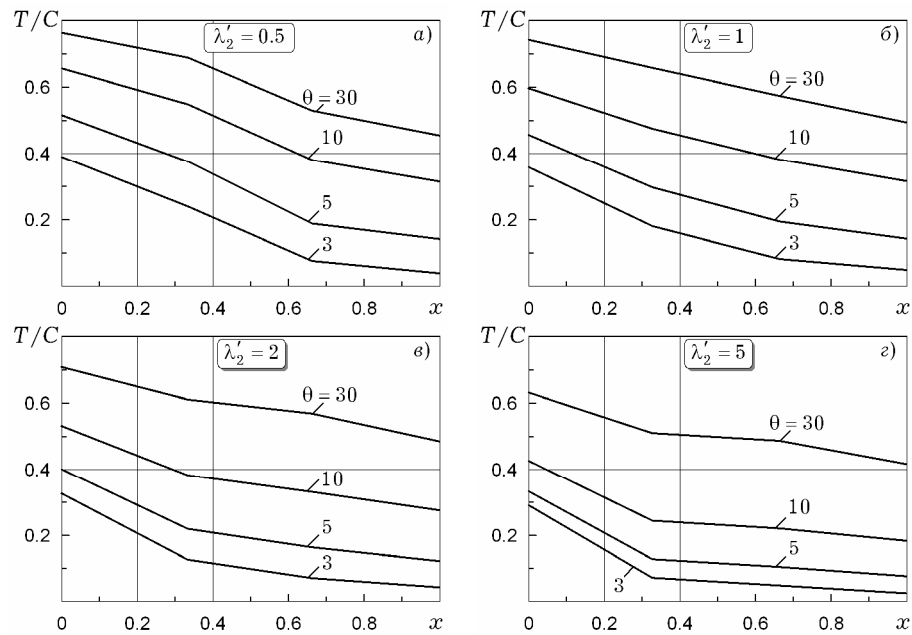


Рис. 1. Розподіл температури у пластинці з трьома зістикованими смугами

На рис. 1. зображено розподіл віднесеної до величини C температури по поперечному перерізі пластинки за значень часового параметра $\theta = 3, 5, 10, 30$. Чотирьом рисункам відповідають значення $m = 0.5, 1, 2, 5$.

Відповідні відносні напруження $\sigma_y' = \sigma_y / C \alpha_{t1} E_1$ показано на рис. 2.

Розглянуто також пластинку, яка складається з восьми смуг однакової ширини. За базову вибрано восьму смугу. Відносні значення всіх характеристик приймали однаковими за винятком $\lambda_5' = \lambda_6' = \lambda_7' = m$, $\alpha_{t,1}' = \alpha_{t,3}' = \alpha_{t,5}' = \alpha_{t,7}' = 2$, $\alpha_3' = \alpha_5' = \alpha_7' = m$, $f_1 = 0$, $f_N = C = \text{const}$ (нагрівання одностороннє). На рис. 3 зображено розподіл температури в часі на стиках пластинок при $x = x_0, x_3, x_6, x_8$ (криві 1-4). Відносні напруження в поперечному напрямі за згаданих вище значень часового параметра зображено на рис. 4.

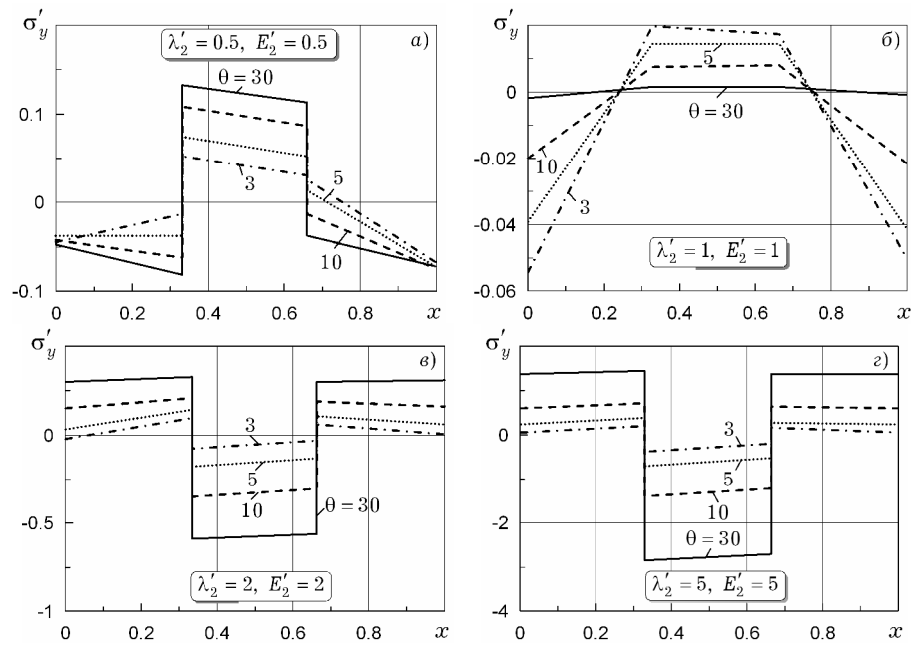


Рис. 2. Розподіл безрозмірних напружень у пластинці з трьома зістикованими смугами

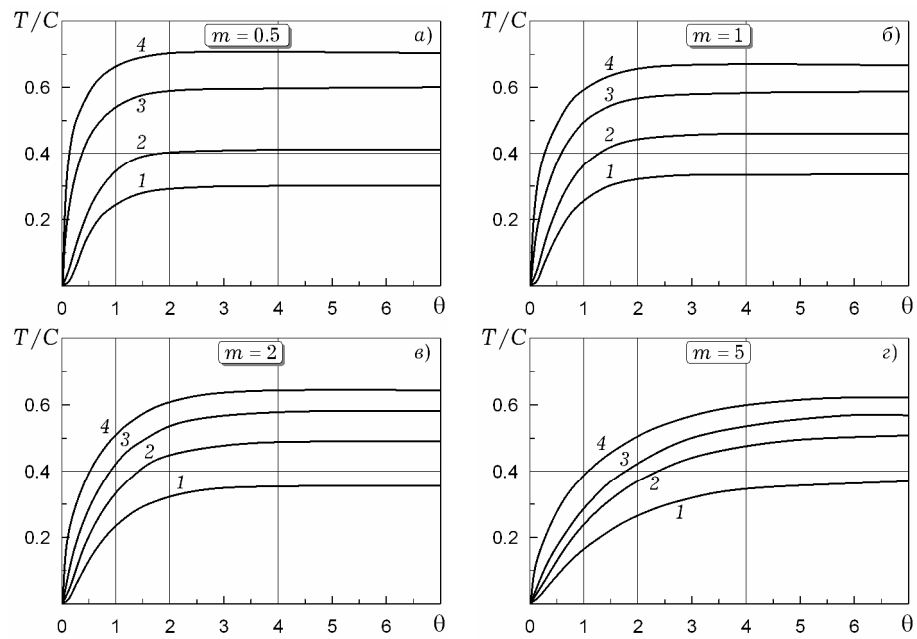


Рис. 3. Температури у пластинці з восьми зістикованих смуг

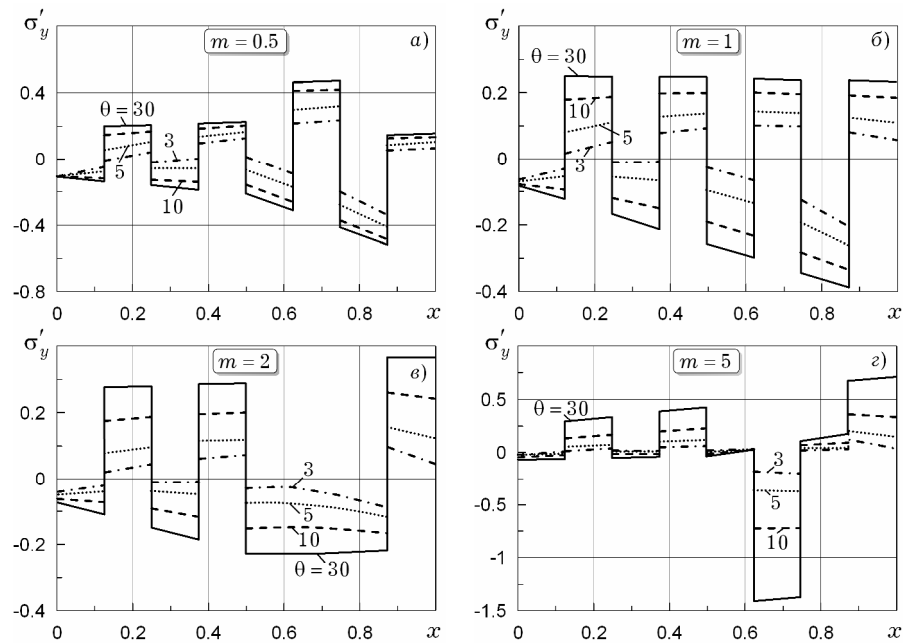


Рис. 4. Розподіл безрозмірних напружень у пластинці з восьми зістикованих смуг у різні моменти часу

На підставі проведених розрахунків можна зробити висновок, що розподіл температури і напружень у неоднорідних пластинах має достатньо складний характер та суттєво залежить від характеристик матеріалу. Визначення напруженого стану композитних пластин треба проводити з повним урахуванням структури тіл. Проведення розрахунків з допомогою спрощених підходів, які ґрунтуються на процедурах усереднення можуть, очевидно, привести до суттєвих похибок в оцінці напруженого стану кусково-однорідних пластин. Запропонований підхід є ефективним і дає змогу досліджувати складні задачі термомеханіки структурованих тіл.

1. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М., 1964.
2. Кушнір Р.М., Максимович В.М., Соляр Т.Я. Визначення нестационарних температур на основі уточнених формул обернення перетворення Лапласа // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002. – 37, № 2. – С.18–26.
3. Кушнір Р.М., Соляр Т.Я. Термопружний стан багатозв'язних пластинок за їх нагріву // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2006. – 42, № 6. – С. 27–33.

4. Подстригач Я.С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. – К., 1972.

DEFINITION OF NON-STATIONARY TEMPERATURE FIELDS AND
STRESSES IN JOINED STRIPS BASED ON NUMERICAL -
ANALITICAL INVERSION FORMULA LAPLACE

Tetyana Solyar

*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
NASU Naukova str. 3b 79053 Lviv, Ukraine*

An algorithm is proposed for calculation of non-stationary temperature fields and stresses induced by them for plates with arbitrary number of strips which is based on direct calculation of the Laplace presentation and Prudnikov modified formula for its inversion.

Key words: joined strips, Laplace transform, temperature fields, stresses.

Стаття надійшла до редколегії 20.12.2006

Прийнята до друку 19.11.2008

УДК 539.4:536.543

ПОШИРЕННЯ У НЕСКІНЧЕННОМУ ТІЛІ ЕЛІПТИЧНОЇ ТРІЩИНИ ВИСОКОТЕМПЕРАТУРНОЇ ПОВЗУЧОСТІ

Наталія САС

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська 1 79000 Львів, Україна

На підставі запропонованого раніше енергетичного підходу і припущення геометричної подібності побудовано математичну модель для визначення кінетики та періоду докритичного росту в нескінченному тілі еліптичної тріщини високотемпературної повзучості. Показано, що еліптична конфігурація тріщини при її поширенні прямує до колової.

Ключові слова: еліптична тріщина, повзучість, енергетичний підхід.

Оцінка високотемпературної міцності та довговічності елементів конструкцій з тріщинами пов'язана з теорією поширення тріщин високотемпературної повзучості. Тут відомо багато експериментальних досліджень (див., наприклад, [1,2]) і декілька теоретичних праць [3-5]. Математичні труднощі, які виникають при моделюванні процесу поширення тріщин високотемпературної повзучості і математичній їхній реалізації, не дали змоги отримати розв'язок багатьох важливих задач цього класу. Розв'язок таких задач для тривимірного тіла досить складний і громіздкий і не завжди може бути реалізований у вигляді для інженерного застосування.

У межах розробленого авторами раніше методу [6-8] пропонується ефективний спосіб наближеного аналітичного визначення кінетики росту плоскої тріщини високотемпературної повзучості в тримірному тілі, який допомагає уникнути при обчисленні принципових математичних труднощів і забезпечує достатню точність кінцевого результату для інженерних розрахунків. Суть цього підходу така.

Формулювання задачі. Розглянемо тривимірне тіло, яке містить еліптичну

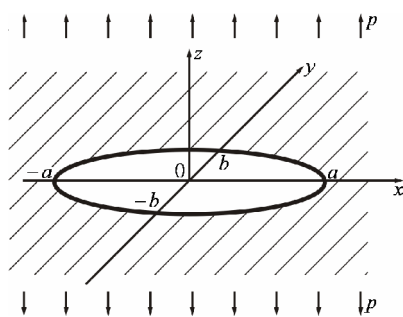


Рис. 1. Схема навантаження тіла з еліптичною тріщиною

макроскопічну тріщину. Введемо прямокутну декартову систему координат $Oxyz$ так, щоб вісь Ox збігалася з великою віссю еліпса довжини $2a$, а вісь Oy – з меншою довжини $2b$ (див.рис.1). У нескінченно віддалених точках до тіла прикладене довготривале розтягуюче напруження p , яке направлене вздовж осі Oz ($\sigma_z(x,y,\infty) = p$). Вважається, що таке тіло піддане дії однорідного високотемпературного поля, яке в зоні передруйнування біля контуру тріщини зумовлює високотемпературну повзучість, що спричиняє поширення тріщини. Задача

полягає у визначенні кінетики поширення еліптичної тріщини в тілі залежно від часу навантаження.

Як відомо з попередніх праць авторів [6-8], швидкість росту такої тріщини V при її прямолінійному поширенні пов'язана з параметрами напружено-деформованого стану в зоні передруйнування такими співвідношеннями:

$$V = f(\lambda), \quad (1)$$

де $f(\lambda) = \frac{2\alpha_0 A_1 \lambda^m}{(1-\lambda)}$; $\lambda = \frac{\delta}{\delta_{IC}} = \frac{K_I^2}{K_{IC}^2}$; $A_1 = A \delta_{IC} \varepsilon_C^{(m-1)}$, A, m – характеристики високотемпературної повзучості матеріалу; σ_0 – усереднене нормальне напруження в зоні передруйнування; δ – розкриття у вершині тріщини; δ_C – критичне значення δ ; K_I – коефіцієнт інтенсивності напружень біля контуру тріщини; K_{IC} – критичне значення K_I .

Далі, як і в [9], робимо так. Розглянемо випадок, коли руйнування тривимірного тіла проходить в одній площині під дією високої температури і постійних нормальних напружень. Оскільки швидкість поширення тріщини V направлена по нормалі до контуру, переміщення довільної точки M біжучого контуру тріщини в напрямі нормалі (рис. 2) за час Δt визначатиметься так:

$$MM' = \Delta t \cdot V. \quad (2)$$

Звідси приріст радіус-вектора $\Delta \rho$ полярної системи $O \rho \theta$ (рис. 2) запишемо у вигляді

$$\Delta \rho = \frac{|MM'|}{\cos \theta} = \frac{\Delta t \cdot V}{\cos \theta}, \quad (3)$$

де θ – кут між напрямом радіус-вектора ρ і нормаллю до контуру тріщини MM' .

Із аналізу геометричної побудови на рис. 2 отримуємо

$$\cos \theta = \rho / \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}\right)^2}. \quad (4)$$

Підставляючи (4) в (3) і переходячи до границі при $\Delta t \rightarrow 0$, величину V визначаємо так:

$$V = \frac{\partial \rho}{\partial t} \left(1 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \right)^2 \right)^{-1/2}. \quad (5)$$

З іншого боку, на підставі (1) і (5) для знаходження невідомої функції $\rho = \rho(t, \varphi)$ одержимо диференціальне рівняння

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = f(\lambda) \left(1 + \rho^{-2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \right)^2 \right)^{1/2}. \quad (6)$$

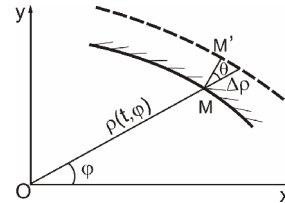


Рис. 2. Схема локального розвитку плоскої тріщини високотемпературної повзучості

за початкових і кінцевих умов

$$\begin{aligned} t = 0, \quad \rho(0, \varphi_0) &= \rho_0; \\ t = t_*, \quad \rho(t_*, \varphi_*) &= \rho_*. \end{aligned} \quad (7)$$

У цьому випадку співвідношення (6), (7) визначають задачу для визначення кінетики поширення та періоду докритичного росту t_* плоскої тріщини. Для визначення величини $\rho = \rho_*$ додається також умова

$$K_{I*}(\rho_*, \varphi_*) = K_{IC}. \quad (8)$$

Метод розв'язування задачі. Користуючись відомими результатами [10], запишемо формулу для обчислення КІН еліптичної тріщини

$$K_I = \frac{p\sqrt{\pi b}}{E(k)} \left[\sin^2 \varphi + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \cos^2 \varphi \right]^{1/4}, \quad (k^2 = 1 - b^2 a^{-2}), \quad (9)$$

за допомогою якої знайдемо значення КІН для заданої задачі у вершинах півосей, тобто при $\varphi = 0$ і $\varphi = \pi/2$

$$K_I^{(a)} = \frac{\sqrt{\pi a} p b}{E(k)}, \quad K_I^{(b)} = \frac{\sqrt{\pi b} p}{E(k)}, \quad (10)$$

де $E(k)$ – еліптичний інтеграл другого роду, який наближено можна подати так:

$$E(k) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2^2} k^2 - \frac{1^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 4^2} k^4 - \dots - \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \right]^2 \frac{k^{2n}}{2n-1} - \dots \right\}. \quad (11)$$

Для реалізації цієї математичної моделі (6), (7) вважатимемо, що контур тріщини при її поширенні весь час зберігає еліптичну форму. Тому для дослідження кінетики її поширення тріщини достатньо знайти кінетику зміни півосей, тобто функції $a = a(t)$ і $b = b(t)$. Для цього, задовольнивши рівняння (6) в точках розміщених на контурі великої і малої осей еліптичної тріщини, тобто при $\varphi = 0$ і $\varphi = \pi/2$, з врахуванням співвідношення (7), (8), отримаємо систему двох диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= 2\alpha_0 A_1 \left(\frac{b}{a} \right)^m \left(\frac{p\sqrt{\pi b}}{E(k)K_{IC}} \right)^{2m} \left/ \left(1 - \frac{b}{a} \left(\frac{p\sqrt{\pi b}}{E(k)K_{IC}} \right)^2 \right) \right. \\ \frac{db}{dt} &= 2\alpha_0 A_1 \left(\frac{p\sqrt{\pi b}}{E(k)K_{IC}} \right)^{2m} \left/ \left(1 - \left(\frac{p\sqrt{\pi b}}{E(k)K_{IC}} \right)^2 \right) \right. \end{aligned} \quad (12)$$

з початковими умовами

$$t = 0, \quad a(0) = a_0, \quad b(0) = b_0. \quad (13)$$

Поділивши у системі (12) друге рівняння на перше, зведемо систему диференціальних рівнянь (12) до одного рівняння, яке має такий вигляд:

$$\frac{db}{da} = \left(\frac{a}{b}\right)^m \left[1 - \frac{\pi b^2 p^2}{a E^2(k) K_{IC}^2} \right] \bigg/ \left[1 - \frac{\pi b p^2}{E^2(k) K_{IC}^2} \right]. \quad (14)$$

Отже, задану задачу зведемо до розв'язку рівняння (14) з умовами (13).

Для спрощення розв'язання рівняння (14) введемо заміну $\varepsilon = 1 - b/a$ і одержимо

$$\frac{db}{da} = 1 - \varepsilon - \frac{ad\varepsilon}{da}. \quad (15)$$

Тоді співвідношення (11) запишемо так:

$$E(k) = \frac{\pi}{2} \{ 1 - 0,05\varepsilon + O(\varepsilon^2) \}, \quad (16)$$

а, відповідно, рівняння (14) матиме вигляд

$$\frac{d\varepsilon}{da} = a^{-1} \left[1 - \varepsilon - (1 - \varepsilon)^{-m} \frac{1 - \pi a p^2 (1 - \varepsilon)^2 E^{-2}(\varepsilon) K_{IC}^{-2}}{1 - \pi a p^2 (1 - \varepsilon) E^{-2}(\varepsilon) K_{IC}^{-2}} + O(\varepsilon^2) \right], \quad (17)$$

з початковими умовами

$$t = 0, \quad a(0) = a_0, \quad \varepsilon(0) = \varepsilon_0. \quad (18)$$

Розкладемо праву частину рівняння (17) в ряди по степенях ε і проінтегруємо з врахуванням умов (18)

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left(\frac{Aa - 1}{Aa_0 - 1} \right) \left(\frac{a_0}{a} \right)^{m+1} + O(\varepsilon_0^2). \quad (19)$$

Застосуємо заміну (15) до системи (12) і розкладемо в ній вирази в ряд по степенях ε з точністю до $O(\varepsilon^2)$. Тоді цю систему можна буде записати наближено так:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= 2\alpha_0 A_1 \left[\frac{(Aa)^m}{1 - Aa} + \frac{(Aa)^m (m + (1 - m)Aa)}{(1 - Aa)^2} \varepsilon + O(\varepsilon^2) \right] \\ \frac{db}{dt} &= 2\alpha_0 A_1 \left[\frac{(Ab)^m}{1 - Ab} + \frac{(Ab)^m (m + (1 - m)Ab)}{(1 - Ab)^2} \varepsilon + O(\varepsilon^2) \right] \end{aligned} \quad (20)$$

Враховуючи співвідношення (19), система (20) набуде вигляду

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= 2\alpha_0 A_1 \left[\frac{(Aa)^m}{1 - Aa} - \frac{(Aa_0)^{m+1}}{Aa_0 - 1} \left[\frac{1}{1 - Aa} + \frac{m}{A} \frac{1}{a} \right] \varepsilon_0 + O(\varepsilon_0^2) \right]; \\ \frac{db}{dt} &= 2\alpha_0 A_1 \left[\frac{(Ab)^m}{1 - Ab} + \frac{(Ab)^m (m + (1 - m)Ab)}{(1 - Ab)^2} \left(\frac{Aa - 1}{Aa_0 - 1} \right) \left(\frac{a_0}{a} \right)^{m+1} \varepsilon_0 + O(\varepsilon_0^2) \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Легко бачити, що з розв'язку рівнянь (21) при $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ і $a = b$ отримаємо відомий [8] результат для аналогу задачі Сакка у випадку високотемпературної повзучості

$$t = \frac{a_*^m}{2\alpha_0 A_1} \left[\frac{a^{1-m}}{1-m} - \frac{a_0^{1-m}}{1-m} - \frac{4p^2}{\pi K_{IC}^2} \frac{a^{2-m}}{2-m} + \frac{4p^2}{\pi K_{IC}^2} \frac{a_0^{2-m}}{2-m} \right]. \quad (22)$$

Для розв'язання системи (21) розглянемо спочатку допоміжну задачу. Визначимо кінетику поширення колової тріщини в тілі при високій температурі і довготривалому статичному навантаженні. Для цього використаємо метод [9] граничної інтерпретації, тобто знайдемо граничні випадки: $a_1(t)$ для всіх $a \rightarrow a_0$ і $a_2(t)$ при $a \rightarrow a_*$. Тоді загальний розв'язок матиме вигляд [9]

$$a''(t) = a_1''(t) + a_2''(t). \quad (23)$$

Для визначення $a_1(t)$ приймемо в рівнянні (22) $a_1(t) = a_0(1 + x(t))$ ($x(t) \rightarrow 0$). Тоді, розклавши праву частину (22) в ряд по степенях $x(t)$ і обмежившись тільки величинами $x(t)$ в першій степені, а також підставивши $x(t) = a_0^{-1}a_1(t) - 1$, отримаємо $a_1(t)$ у такому вигляді:

$$a_1(t) = \left[a_0^{1-m} + \frac{2\alpha_0 A_1 (2-m)(1-m)}{a_*^{m-1} (a_* (2-m) - a_0 (1-m))} t \right]^{\frac{1}{1-m}}. \quad (24)$$

У другому випадку для визначення $a_2(t)$ приймемо $a_2(t) = a_*(1 - x_1(t))$ ($x_1(t) \rightarrow 0$). Проводячи перетворення в (22), аналогічно до попереднього, одержимо

$$a_2(t) = a_* - \left[-\frac{4EA_1 a_*}{3\sigma_0} t + \frac{2a_*^{m+1}}{(m-1)a_0^{m-1}} - \frac{2a_*^m}{(m-2)a_0^{m-2}} + \frac{2a_*^2}{(m-2)(m-1)} \right]^{1/2}. \quad (25)$$

Отже, загальний розв'язок, що характеризує кінетику поширення колової тріщини при високотемпературній повзучості, запишемо

$$a(t) = \left[\left[a_0^{1-m} + \frac{2\alpha_0 A_1 (2-m)(1-m)}{a_*^{m-1} (a_* (2-m) - a_0 (1-m))} t \right]^{\frac{1}{1-m}} \right]^v + \left[a_* - \left[-4\alpha_0 A_1 a_* t + \frac{2a_*^{m+1}}{(m-1)a_0^{m-1}} - \frac{2a_*^m}{(m-2)a_0^{m-2}} + \frac{2a_*^2}{(m-2)(m-1)} \right]^{1/2} \right]^v \Bigg]^{1/v}. \quad (26)$$

Із числового порівняння (22) і (26) знайдемо, що найліпше наближення дає значення $v = -1$.

Проінтегруємо систему (21) з врахуванням крайових умов (18), а також співвідношення (26), отримаємо співвідношення, які характеризують кінетику поширення еліптичної тріщини в тілі при високотемпературній повзучості

$$\begin{cases} a(t) = \frac{(a_0^{1-m} + Ct)^{1/(1-m)}(a_* - (Bt + D)^{1/2})}{(a_0^{1-m} + Ct)^{1/(1-m)} + a_* - (Bt + D)^{1/2}} - \\ - 2\alpha_0 A_1 \left[\frac{\varepsilon_0 (A a_0)^{m+1}}{A a_0 - 1} \left(t + \frac{1}{a_*} I_{01} \right) + \frac{m \varepsilon_0 (A a_0)^{m+1}}{A(A a_0 - 1)} I_{02} \right]; \\ b(t) = a \left(1 - \varepsilon_0 \frac{A a - 1}{A a_0 - 1} \left(\frac{a_0}{a} \right)^{m+1} \right). \end{cases} \quad (27)$$

Тут

$$\begin{aligned} C &= \frac{2\alpha_0 A_1 (2-m)(1-m)}{a_*^{m-1} (a_* (2-m) - a_0 (1-m))}; \quad B = -4\alpha_0 A_1 a_*; \\ D &= \frac{2a_*^{m+1}}{a_0^{m-1} (m-1)} - \frac{2a_*^m}{a_0^{m-2} (m-2)} + \frac{2a_*^2}{(m-1)(m-2)}; \\ a_1 &= C a_0^{m-1} (1-m)^{-1}; \quad N_1 = \frac{2B^2}{a_1} + \frac{6B^2 a_*}{a_1 a_0} - \frac{2B^3}{a_1^2 a_0^2} - 2B a_*^2 - 2BD; \\ N_2 &= (B a_0 + B a_* - a_1 a_0 D) (4a_0 a_1 a_* B - 2B^2) a_1^{-2} a_0^{-2}; \\ N_3 &= (-4a_1 a_0^2 B - 4a_0 a_1 a_* B + 4a_1^2 a_0^2 D + B^2)^{0.5}; \\ N_4 &= \frac{N_1}{2a_0 a_1 B} \ln \left| \frac{\sqrt{Bt + D} - a_0 a_1 t - a_0 - a_*}{\sqrt{D} - a_0 - a_*} \right| + \\ + \frac{B N_1 - 2a_0 a_1 N_2}{a_0 a_1 B N_3} &\left[\operatorname{arth} \left(\frac{-2a_0 a_1 \sqrt{Bt + D} + B}{N_3} \right) - \operatorname{arth} \left(\frac{-2a_0 a_1 \sqrt{D} + B}{N_3} \right) \right]; \\ I_{01} &= -\frac{2}{3B} ((Bt + D)^{3/2} - (D)^{3/2}) + \frac{a_0 a_1 a_* - B}{a_0 a_1} t + \\ &+ \frac{4a_0 a_1 a_* - 2B}{a_0 a_1} (\sqrt{Bt + D} - \sqrt{D}) + N_4; \\ I_{02} &= \frac{-2}{B} \left(\sqrt{Bt + D} - \sqrt{D} + a_* \ln \left| \frac{a_* - \sqrt{Bt + D}}{a_* - \sqrt{D}} \right| \right) + \\ &+ \frac{m-1}{mC} \left((a_0^{1-m} + Ct)^{\frac{m}{m-1}} - a_0^{-m} \right). \end{aligned}$$

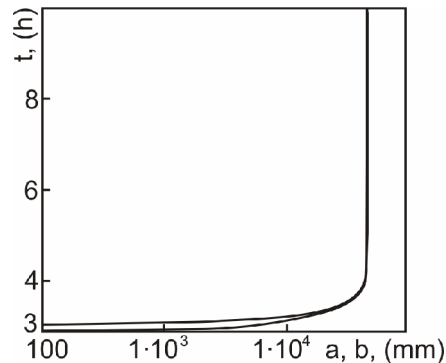


Рис. 3. Графічна залежність великої a (1) і малої b (2) осей еліпса від часу навантаження

На підставі (27) на рис. 3 побудовано графічні залежності зміни півосей еліпса $a(t)$, $b(t)$ від часу t . Тут прийнято $a_0 = 3$ mm; $b_0 = 2$ mm. $T_0 = 732^\circ\text{C}$, $\delta_C = 0.1$ mm, $E = 115$ GPa, $\sigma_0 = 943$ MPa, $A_1 \approx 0,25$, $m \approx 4$, $\alpha_0 = 0,1$, $K_{IC} = 142$ MPa $\sqrt{\text{m}}$

Як видно із рис. 3, при своєму поширенні еліптична тріщина прямує до колової конфігурації. Це аналогічно до поширення втомних тріщин [10].

Висновки. Побудована математична модель і запропонований наближений метод її реалізації для визначення кінетики поширення та періоду докритичного росту еліптичної тріщини високотемпературної повзучості в нескінченному тілі. Показано, що при своєму поширенні така тріщина прямує до колової конфігурації.

1. *Fuji A. and Kitagawa M.* A Comparison of Creep Crack Growth Behaviour in Nickel Based Super Alloy with Low Alloy Steel.// *Advances in Fracture Resistance and Structural Integrity: Selected papers from the 8th Int.Conf. on Fracture (ICF 8)*, Kyiv, Ukraine, 8-14 June 1993. – Pergamon, 1994. – P. 487–495.
2. *Koterazawa R.* Propagation of surface crack under creep and fatigue conditions at elevated temperature // *Proc. Int. Conf. on Creep, ISME, ImechE, ASME, ASTM*, 1986. – P. 291–296.
3. *Тайра С., Отани Р.* Теория високотемпературной прочности материалов. – М., 1986.
4. *Jakowluk A.* Procesy pelzania i zmęczenia w materiałach. – Warszawa, 1993.
5. *Панасюк В. В., Андрейків О. Є., Партон В. З.* Основы механики разрушения. – К.: Наук. думка, 1988. – 488 с.
6. *Андрейків О.Є., Сас Н.Б.* Визначення залишкового ресурсу труби з поверхневою тріщиною при довготривалому тиску і високій температурі // *Машинознавство*. – 2005. № 4. – С. 3–6.

7. *Андрейків О.Є., Сас Н.Б.* Механіка руйнування металічних пластин при високотемпературній повзучості // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2006. № 2. – С. 62–68.
8. *Андрейків О.Є., Сас Н.Б.* Математична модель для визначення періоду докритичного поширення тріщин високотемпературної повзучості в твердих тілах // Доп. НАН України. – 2006. № 5 – С. 47–52.
9. *Андрейкив А. Е.* Пространственное задачи теории трещин. – К., 1982.
10. *Андрейкив А.Е., Дарчук А. И.* Усталостное разрушение и долговечность конструкций. – К., 1992.

ELLIPTIC CRACK PROPAGTION OF HIGH-TEMPERATURE CREEP IN INFINITY SOLID

Natalija Sas

*Ivan Franco National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine*

On the basis of energetic approach and supposition of geometrical similarity offered before, calculation model for determination of kinetics and period of elliptic crack sub critical growth in the infinity solid was formulated. It is shown that elliptic configuration of crack follows to circled configuration at its propagation.

Key words: elliptic crack, creep, power approach.

Стаття надійшла до редколегії 29.09.2006

Прийнята до друку 19.11.2008

УДК 539.3

**ОСЕСИМЕТРИЧНЕ СКРУЧУВАННЯ ЦИЛІНДРА
ЛОКАЛІЗОВАНИМ ПОВЕРХНЕВИМ НАВАНТАЖЕННЯМ ЗА
ІСНУВАННЯ МЕЖОВОГО ШАРУ**

Олександр АНДРЕЙКІВ, Ольга ГАЛАЗЮК

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна*

Запропоновано нову математичну модель напруженого стану в циліндрі при локалізованому поверхневому навантаженні та защемлених кінцях на безмежності, що призводить до його скручування. Доведено існування у цьому випадку дотичних напружень на ненавантаженій поверхні циліндра, що є механічним проявом існування там поверхневого межового шару.

Ключові слова: циліндр, кручення, напруження, межовий шар.

Класична математична модель осесиметричного деформування круглих циліндрів, які скручуються поверхневим навантаженням, побудована [1] на основі системи рівнянь рівноваги в напруженнях та умов сумісності в напруженнях Бельтрамі - Мічела. Цю модель уперше застосував Тимпе до задачі про кручення циліндра кругового поперечного перерізу поверхневим навантаженням. Проте розв'язок визначає такі характеристики напруженого стану, які не існують на поверхні циліндра, що є результатом некоректного формулювання задачі.

Далі для побудови математичної моделі осесиметричного кручення циліндра поверхневим навантаженням за відсутності дилатації запропоновано використати рівняння рівноваги у переміщеннях, які у розглядуваному випадку зводяться до одного рівняння стосовно двох не рівних нулю компонент вектора локального жорсткого повороту $\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{u}$.

Це дає змогу записати усі характеристики напруженого стану через одну гармонійну функцію, яку у циліндричних координатах для необмеженого циліндра можна подати інтегралом Фур'є, що сприяє ефективному розв'язанню так званих задач із частково детермінованими крайовими умовами.

Фізично коректні розв'язки таких задач уможливають створення практично важливих математичних моделей напружено-деформованого стану у циліндрах, які швидко обертаються, за раптового заклинювання їхніх кінців.

Зазначимо, що у класичному формулюванні крайових задач за локалізованих крайових умов необхідно їх довизначити поза областю задання. Як наслідок виникає задача зі змішаними або розривними

крайовими умовами, в якій питання їхньої узгодженості на лінії зміни не розглядається. Це призводить до появи сингулярних ефектів [2], які суперечать гіпотезі суцільності та обмеженням лінійної моделі деформованого твердого тіла.

Подання характеристик напружено-деформованого стану в циліндрі інтегралами Фур'є спрощує процедуру виконання локалізованих крайових умов, оскільки це приводить до інтегрального рівняння Фредгольма першого роду, множину залежних від параметра розв'язків якого знаходять методом розривних інтегралів Фур'є [3]. Уведений параметр можна трактувати як приведену характеристику поверхневого межового шару і ним визначають клас необхідних довантажень, який виконує межовий шар для існування розв'язку задачі та гладкості деформування поверхні циліндра на лінії зміни крайових умов. Зазначимо, що наявність межового шару обґрунтовує існування поверхневої енергії.

1. **Формулювання задачі.** Пружний ізотропний циліндр з радіусом твірної R віднесемо до циліндричної системи координат $(R\alpha, \beta, R\gamma)$ і за умови незмінюваності об'єму $\theta(\alpha, \beta, \gamma) = \text{div } \mathbf{\bar{u}} \equiv 0$, яка трапляється за відсутності дилатації, компоненти вектора пружного переміщення $R\mathbf{\bar{u}}(\alpha, \beta, \gamma)$ в циліндричній системі координат будуть такими:

$$\mathbf{u}_\alpha(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad \mathbf{u}_\beta = \mathbf{u}_\beta(\alpha, \gamma), \quad \mathbf{u}_\gamma(\alpha, \beta, \gamma) = 0. \quad .$$

За таких обставин рівняння Ламе

$$(\lambda + 2\mu)\text{grad div } \mathbf{\bar{u}} - \mu \text{rot rot } \mathbf{\bar{u}} = 0$$

зведеться до одного рівняння

$$\frac{\partial \omega_\alpha}{\partial \gamma} - \frac{\partial \omega_\gamma}{\partial \alpha} = 0 \quad (1)$$

стосовно компонент $\omega_\alpha(\alpha, \gamma)$ і $\omega_\gamma(\alpha, \gamma)$ вектора локального жорсткого повороту $\mathbf{\bar{\Omega}} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{\bar{u}}$, які у циліндричній системі координат визначають компонентою $\mathbf{u}_\beta(\alpha, \gamma)$ вектора $\mathbf{\bar{u}}(\alpha, \gamma)$ так:

$$2\omega_\alpha(\alpha, \gamma) = -\frac{\partial \mathbf{u}_\beta}{\partial \gamma}, \quad 2\omega_\gamma = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha}(\alpha \mathbf{u}_\beta), \quad \omega_\beta(\alpha, \gamma) \equiv 0. \quad (2)$$

Якщо ввести ключову функцію $Q(\alpha, \gamma)$ таку, що $\mathbf{u}_\beta(\alpha, \gamma) = \frac{\partial Q}{\partial \alpha}$, то за поданням (2) знайдемо, що

$$2\omega_\alpha(\alpha, \gamma) = -\frac{\partial^2 Q}{\partial \alpha \partial \gamma}, \quad 2\omega_\gamma(\alpha, \gamma) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\alpha \frac{\partial Q}{\partial \alpha} \right), \quad (3)$$

і, як наслідок, рівняння в частинних похідних (1) набуде вигляду

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\alpha \frac{\partial Q}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial^2 Q}{\partial \gamma^2} \right] = 0. \quad (4)$$

Для виконання рівняння (4) достатньо прийняти, що шукана функція $Q(\alpha, \gamma)$ є розв'язком рівняння Лапласа

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\alpha \frac{\partial Q}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial^2 Q}{\partial \gamma^2} = 0 \quad (5)$$

в області $0 \leq \alpha \leq 1$ і $0 \leq |\gamma| < \infty$.

За відомою функцією $Q(\alpha, \gamma)$ та законом Гука віднайдемо ненульові компоненти тензора напружень і запишемо так:

$$\sigma_{\alpha\beta}(\alpha, \gamma) = \mu \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial Q}{\partial \alpha} \right); \quad \sigma_{\beta\gamma}(\alpha, \gamma) = \mu \frac{\partial^2 Q}{\partial \alpha \partial \gamma}, \quad (6)$$

де $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ - модуль зсуву. Отже, у випадку кручення циліндра поверхневим навантаженням без дилатації його напружений стан визначають тільки дотичними напруженнями, рівень яких зумовлює появу пластичних деформацій (умова пластичності Треска-Мізеса) або спричиняє крихке руйнування.

Розв'язок рівняння Лапласа (5) подамо інтегралом Фур'є

$$Q(\alpha, \gamma) = \int_0^\infty B(\xi) I_0(\xi \alpha) \cos \xi \gamma d\xi, \quad (7)$$

який обмежений в області $0 \leq \alpha \leq 1$, а функція $B(\xi)$ визначається крайовими умовами і забезпечує існування й обмеженість інтеграла в області $(0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq |\gamma| < \infty)$.

За відомою функцією $B(\xi)$ обчислимо компоненту $u_\beta(\alpha, \gamma)$ вектора $\vec{u}$

$$u_\beta(\alpha, \gamma) = \int_0^\infty \xi B(\xi) I_1(\xi \alpha) \cos \xi \gamma d\xi, \quad (8)$$

а за поданням (6) нерівні нулю у цьому випадку компоненти тензора напружень

$$\sigma_{\alpha\beta}(\alpha, \gamma) = -\mu \int_0^\infty \xi^2 B(\xi) I_2(\xi \alpha) \cos \xi \gamma d\xi, \quad (9)$$

$$\sigma_{\beta\gamma}(\alpha, \gamma) = -\mu \int_0^{\infty} \xi^2 \mathbf{B}(\xi) I_1(\xi\alpha) \sin \xi\gamma d\xi, \quad (10)$$

де $I_1(\xi\alpha)$ і $I_2(\xi\alpha)$ - модифіковані функції Бесселя першого та другого порядку. За поданням (2) знайдемо компоненти вектора $\Omega^{\mathbf{r}}$

$$2\omega_{\alpha}(\alpha, \gamma) = \int_0^{\infty} \xi^2 \mathbf{B}(\xi) I_1(\xi\alpha) \sin \xi\gamma d\xi, \quad (11)$$

$$2\omega_{\gamma}(\alpha, \gamma) = \int_0^{\infty} \xi^2 \mathbf{B}(\xi) I_0(\xi\alpha) \cos \xi\gamma d\xi. \quad (12)$$

Аналіз виразів (8)-(12) свідчить про те, що характеристики напружено-деформованого стану є парними функціями змінної γ . Отже, для визначення характеристик напружено-деформованого стану циліндра треба сформулювати крайову задачу для визначення функцій $\mathbf{B}(\xi)$. Як нижче буде з'ясовано, мистецтво математичного моделювання визначається коректним формулюванням крайових умов, які правильно з'ясовують сутність фізичного явища. Зазначимо, що у випадку осесиметричного кручення циліндра існують, на відміну від осесиметричних задач для півпростору і простору, дві не рівні нулю компоненти вектора Ω .

Для визначення функції $\mathbf{B}(\xi)$ розглянемо таку задачу: нехай в області $0 \leq |\gamma| \leq \gamma_0$ на поверхні $\alpha = 1$ безмежного циліндра задана компонента $\omega_{\gamma}(1, \gamma)$ вектора $\Omega^{\mathbf{r}} = \frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{u}^{\mathbf{r}}$ локального жорсткого повороту навколо осі γ

$$2\omega_{\gamma}(1, \gamma) = f(\gamma^2) \quad 0 \leq |\gamma| \leq \gamma_0, \quad (13)$$

що є парною функцією змінної γ . Оскільки відповідно до крайової умови (13) функція $\omega_{\gamma}(1, \gamma)$ є парною функцією змінної γ , то підстановкою подання (12) у крайову умову (13) одержимо інтегральне рівняння Фредгольма першого роду

$$\int_0^{\infty} \xi^2 \mathbf{B}(\xi) I_0(\xi\alpha) \cos \xi\gamma d\xi = f(\gamma^2) \quad 0 \leq |\gamma| \leq \gamma_0 \quad (14)$$

для визначення функції $\mathbf{B}(\xi)$.

Для розв'язання інтегрального рівняння (14) застосуємо метод [3] розривних інтегралів Фур'є, відповідно з яким функцію $\mathbf{B}(\xi)$ подамо узагальненим рядом Неймана

$$\xi^2 \mathbf{B}(\xi) \mathbf{I}_0(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{a}_n \frac{J_{2n-q+1}(\xi \gamma_0)}{\xi^q}, \quad \frac{1}{2} < q < 1 \quad (15)$$

з невизначеними наперед коефіцієнтами $\mathbf{a}_n$ і параметром $\frac{1}{2} < q < 1$.

2. Методика побудови розв'язку. Подальші дослідження ґрунтуватимуться на властивостях розривного інтеграла Фур'є

$$\int_0^{\infty} \frac{J_{\nu}(\mathbf{a}\xi) \cos(\mathbf{b}\xi)}{\xi^{\lambda}} d\xi = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Gamma\left(\frac{1-\lambda+\nu}{2}\right) \mathbf{F}\left(\frac{1-\lambda+\nu}{2}; \frac{1-\lambda-\nu}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\mathbf{b}^2}{\mathbf{a}^2}\right)}{2^{\lambda} \mathbf{a}^{1-\lambda} \Gamma\left(\frac{\nu+\lambda+1}{2}\right)}; [0 < \mathbf{b} < \mathbf{a}] \\ \frac{\sqrt{\pi} \mathbf{a}^{\nu} \Gamma\left(\frac{1-\lambda+\nu}{2}\right) \mathbf{F}\left(\frac{1-\lambda+\nu}{2}; \frac{2-\lambda+\nu}{2}; \nu+1; \frac{\mathbf{a}^2}{\mathbf{b}^2}\right)}{2^{\lambda} \mathbf{b}^{1-\lambda+\nu} \Gamma(\nu+1) \Gamma\left(\frac{\lambda-\nu}{2}\right)}; [0 < \mathbf{a} < \mathbf{b}] \end{array} \right\} \quad (16)$$

при $\frac{1}{2} < \lambda < \nu + 1$ і

$$\int_0^{\infty} \frac{J_{\nu}(\mathbf{a}\xi) \sin(\mathbf{b}\xi)}{\xi^{\lambda}} d\xi = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathbf{b} \Gamma\left(\frac{2-\lambda+\nu}{2}\right) \mathbf{F}\left(\frac{2-\lambda+\nu}{2}; \frac{2-\lambda-\nu}{2}; \frac{3}{2}; \frac{\mathbf{b}^2}{\mathbf{a}^2}\right)}{2^{\lambda-1} \mathbf{a}^{2-\lambda} \Gamma\left(\frac{\nu+\lambda}{2}\right)}; [0 < \mathbf{b} < \mathbf{a}] \\ \frac{\sqrt{\pi} \mathbf{a}^{\nu} \Gamma\left(\frac{2-\lambda+\nu}{2}\right) \mathbf{F}\left(\frac{2-\lambda+\nu}{2}; \frac{1-\lambda+\nu}{2}; \nu+1; \frac{\mathbf{a}^2}{\mathbf{b}^2}\right)}{2^{\lambda} \mathbf{b}^{\nu-\lambda+1} \Gamma(\nu+1) \Gamma\left(\frac{1+\lambda-\nu}{2}\right)}; [0 < \mathbf{a} < \mathbf{b}] \end{array} \right\} \quad (17)$$

при $\frac{1}{2} < \lambda < \nu + 1$.

У виразах (16), (17) $\Gamma(x)$ — гамма-функція; $\mathbf{F}(\mathbf{a}; \mathbf{b}; \mathbf{c}; x^2)$ — гіпергеометрична функція Гаусса, задана гіпергеометричним рядом

$$\mathbf{F}(\mathbf{a}; \mathbf{b}; \mathbf{c}; x^2) = \frac{\Gamma(\mathbf{c})}{\Gamma(\mathbf{a}) \Gamma(\mathbf{b})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mathbf{a} + k) \Gamma(\mathbf{b} + k)}{\Gamma(\mathbf{c} + k)} \frac{x^{2k}}{k!} \quad (18)$$

з одиничним радіусом збіжності при $\mathbf{c} - \mathbf{a} - \mathbf{b} > 0$, причому

$$F(a; b; c; 1) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)},$$

$$F(a; b; c; x^2) = (1-x^2)^{c-a-b} F(c-a; c-b; c; x^2). \quad (19)$$

Зауважимо, що при $a = -k$ або $b = -k$, де $k \in \mathbf{N}_0$ ряд (18) зводиться до полінома степеня $2k$, який можна виразити через поліноми Якобі [4].

Зазначимо такі властивості інтеграла Фур'є:

- а) інтеграли (16), (17) неперервні в точці $|\alpha| = 1$ за умови $c-a-b > 0$;
- б) інтеграли (16) і (17) тотожно дорівнюють нулю для всіх $|\alpha| > 1$, якщо відповідно $1-\lambda-\nu = -2n$ і $\lambda+\nu = 2n$, $n \in \mathbf{N}_0$.

Якщо ряд (15) підставити в інтегральне рівняння (14), поміняти порядок підсумовування та інтегрування й обчислити за формулою (17) відповідний інтеграл, то інтегральне рівняння (14) в області $0 \leq |\gamma| \leq \gamma_0$ стане рядом за повною системою функцій

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n-q+1) \gamma_0^{q-1} F\left(n-q+1; -n; \frac{1}{2}; \frac{\gamma^2}{\gamma_0^2}\right)}{2^1 \gamma_0^{2-q} \Gamma(n+1)} = f(\gamma^2) \quad 0 \leq |\gamma| \leq \gamma_0, \quad (20)$$

оскільки $F\left(n-q+1; -n; \frac{1}{2}; \frac{\gamma^2}{\gamma_0^2}\right) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(n+1)}{2 \Gamma(n+1/2)} P_n^{(-1/2; -q+1/2)}\left(1-2\frac{\gamma^2}{\gamma_0^2}\right)$ є поліномами Якобі. Тому ряд (20) можна записати так:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n-q+1) \gamma_0^{q-1} \sqrt{\pi} P_n^{(-1/2; -q+1/2)}(1-2x^2)}{2^q \Gamma(n+1/2)} = f(\gamma_0^2 x^2) \quad 0 \leq x \leq 1$$

і внаслідок формули ортогональності [4] поліномів Якобі знайдемо a_n

$$a_n = \frac{2^{q+1} (2n+2-q) \Gamma(n+1)}{\gamma_0^{-2+q} \sqrt{\pi} \Gamma(n-q+3/2)} \int_0^1 x^2 (1-x^2)^{-q+1/2} f(\gamma_0^2 x^2) P_n^{(1/2; -q+1/2)}(1-2x^2) dx.$$

Тепер за відомими коефіцієнтами a_n , які за формулою (15) визначають функцію $B(\xi)$, можна за поданнями (8)-(12) обчислити усі характеристики напружено-деформованого стану в циліндрі, які залежатимуть від параметра $1/2 < q < 1$. Зокрема,

$$u_\beta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^\infty \frac{J_{2n-q+1}(\xi \gamma_0)}{\xi^{q+1} I_0(\xi)} I_1(\xi \alpha) \cos \xi \gamma d\xi, \quad (21)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \mu \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^\infty \frac{J_{2n-q+1}(\xi \gamma_0)}{\xi^q I_0(\xi)} I_2(\xi \alpha) \cos \xi \gamma d\xi, \quad (22)$$

$$\sigma_{\beta\gamma} = \mu \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \frac{J_{2n-q+1}(\xi\gamma_0)}{\xi^q I_0(\xi)} I_1(\xi\alpha) \sin \xi\gamma d\xi. \quad (23)$$

Зазначимо, що обмеження на параметр q на відміну від розв'язку Тимпе забезпечує існування усіх невластних інтегралів на поверхні циліндра $\alpha = 1$ і їхню неперервність у точці $\gamma = \gamma_0$.

Для підтвердження цього факту обчислимо за поданням (12) компоненту $\omega_\gamma(1, \gamma)$ в області $\gamma_0 \leq |\gamma| < \infty$. В результаті одержимо такий інтеграл:

$$2\omega_\gamma(1, \gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \frac{J_{2n-q+1}(\xi\gamma_0)}{\xi^q} \cos \xi\gamma d\xi, \quad (24)$$

значення якого в області $\gamma_0 \leq |\gamma| < \infty$ знайдемо за формулою (17) і запишемо так:

$$2\omega_\gamma(1, \gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n-q+1) \sqrt{\pi} F\left(n-q+1; n-q+\frac{3}{2}; 2n-q+2; \frac{\gamma_0^2}{\gamma^2}\right)}{\gamma_0^{-2n+q-1} 2^r \Gamma(2n-q+2) \Gamma\left(-n+q-\frac{1}{2}\right) |\gamma|^{2n-2p+2}}. \quad (25)$$

Оскільки в області $0 \leq |\gamma| \leq \gamma_0$ компонента $\omega_\gamma(1, \gamma)$ задана крайовою умовою (13), а в області $\gamma_0 \leq |\gamma| < \infty$ визначається рядом (25), то відповідно до гіпотези суцільності [6] на лінії $\gamma = \gamma_0$ зміни крайових умов повинна виконуватися гранична рівність

$$\lim_{|\gamma| \rightarrow |\gamma_0| - \varepsilon} \omega_\gamma(1, \gamma) = \lim_{|\gamma| \rightarrow |\gamma_0| + \varepsilon} \omega_\gamma(1, \gamma), \quad (26)$$

виконання якої забезпечує також виконання вимоги [5] неперервної залежності розв'язку крайової задачі від крайових умов. У цьому легко переконатися, якщо в рядах (20) і (25) обчислити за формулою підсумовування (19) значення гіпергеометричної функції Гауса у точці $\gamma = \gamma_0$, яка виконується тільки за умови $q > \frac{1}{2}$, оскільки за виконання цієї умови гіпергеометричний ряд (18) є збіжним у точці $x = 1$.

Отже, в межах запропонованої моделі напружений стан циліндра визначають тільки дотичними напруженнями $\sigma_{\alpha\beta}(\alpha, \gamma)$ і $\sigma_{\beta\gamma}(\alpha, \gamma)$, причому зрізуючі напруження $\sigma_{\beta\gamma}(\alpha, \gamma)$ вздовж радіуса мають закон розподілу (23). Відповідно до цього закону вони дорівнюють нулю на осі циліндра і, на відміну від моделі Кулона [1], нелінійно залежать від осової координати γ .

Якщо у законі (22) розподілу дотичного напруження $\sigma_{\alpha\beta}(\alpha, \gamma)$ врахувати рівність $I_2(\xi\alpha) = -\frac{2}{\xi\alpha} I_1(\xi\alpha) + I_0(\xi\alpha)$, то його можна записати так:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \mu \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{a}_n \left\{ \int_0^{\infty} \frac{J_{2n-q+1}(\xi\gamma_0)I_0(\xi\alpha)}{\xi^q I_0(\xi)} \cos \xi\gamma d\xi - \frac{2}{\alpha} \int_0^{\infty} \frac{J_{2n-q+1}(\xi\gamma_0)I_1(\xi)}{\xi^q I_0(\xi)} \cos \xi\gamma d\xi \right\}$$

і, зокрема, на поверхні циліндра $\alpha = 1$

$$\sigma_{\alpha\beta}(1, \gamma) = \mu \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{a}_n \left\{ \int_0^{\infty} \frac{J_{2n-q+1}(\xi\gamma_0)}{\xi^q} \cos \xi\gamma d\xi - 2 \int_0^{\infty} \frac{J_{2n-q+1}(\xi\gamma_0)I_1(\xi)}{\xi^q I_0(\xi)} \cos \xi\gamma d\xi \right\} \quad (27)$$

Зазначимо, що за умови $q > 1/2$ правильна формула підсумовування (19) гіпергеометричної функції Гауса. Оскільки у поданні (27) перший доданок збігається з сумою подання (24), то вираз закону розподілу дотичного напруження $\sigma_{\alpha\beta}(1, \gamma)$ в області $0 \leq |\gamma| \leq 1$ такий:

$$\sigma_{\alpha\beta}(1, \gamma) = \mu \left\{ f(\gamma^2) - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{a}_n \int_0^{\infty} \frac{J_{2n-q+2}(\xi\gamma_0)I_1(\xi)}{\xi^q I_0(\xi)} \cos \xi\gamma d\xi \right\} \quad (28)$$

і, відповідно, в області $\gamma_0 \leq |\gamma| < \infty$

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}(1, \gamma) = \mu \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{a}_n \frac{\gamma_0^{2n-q+1} \Gamma(n-q+1) \sqrt{\pi}}{2^q \Gamma(2n-q+2) \Gamma(-n+q-\frac{1}{2}) |\gamma|^{2n-2q+2}} \times \\ \times F\left(n-q+\frac{3}{2}; n-q+2; 2n-q+3; \gamma_0^2/\gamma^2\right) - \\ - 2\mu \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{a}_n \int_0^{\infty} \frac{J_{2n-q+2}(\xi\gamma_0)I_1(\xi)}{\xi^q I_0(\xi)} \sin \xi\gamma d\xi. \end{aligned} \quad (29)$$

Отже, дотичне напруження $\sigma_{\alpha\beta}(1, \gamma)$ на поверхні циліндра $\alpha = 1$ в області $\gamma_0 \leq |\gamma| < \infty$ відповідно до виразу (29) складається з двох не тотожних доданків, тому ні за яких обставин не може дорівнювати нулю. Це дає змогу стверджувати: якщо на поверхні циліндра $\alpha = 1$ в області $0 \leq |\gamma| \leq \gamma_0$ задана компонента $\omega_\gamma(1, \gamma)$ вектора локального жорсткого повороту $\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{u}$, то в не навантаженій області $\gamma_0 \leq |\gamma| < \infty$ поверхні циліндра $\alpha = 1$ існують дотичні напруження $\sigma_{\alpha\beta}(1, \gamma)$, що є механічним проявом існування межового шару з приведеною характеристикою $1/2 < q < 1$.

Отже, закон розподілу (29) визначає необхідне довантаження поверхні циліндра в області $\gamma_0 \leq \gamma < \infty$ дотичними напруженнями, яке виконує межовий шар з приведеною характеристикою $1/2 < q < 1$ для забезпечення

існування фізично коректного розв'язку задачі з неперервним розподілом характеристик напруженого стану на лінії $\gamma = \gamma_0$ поверхні циліндра.

У формулюванні Тимпе за відсутності зовнішнього навантаження поверхні циліндра в області $\gamma_0 \leq \gamma < \infty$ вимагається рівність нулю дотичних напружень $\sigma_{\alpha\beta}(1, \gamma)$ у цій області. Можна показати, що за такої вимоги крайова задача про кручення циліндра поверхневим навантаженням в обмеженій області є некоректною і її розв'язок не існує.

Як приклад застосування одержаних вище результатів визначимо напружений стан у циліндрі, який закріплений нерухомо на безмежності і має постійний скрут ω_γ^0 у циліндричному поясі $0 \leq |\gamma| < \gamma_0$. Тоді для визначення коефіцієнтів a_n розвинення (15) відповідно до рівняння (20) одержимо

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n-q+1) \gamma_0^{q-1} F\left(n-q+1; -n; \frac{1}{2}; \frac{\gamma_0^2}{\gamma^2}\right)}{2^q \Gamma(n+1)} = \omega_\gamma^0 \quad 0 \leq |\gamma| \leq \gamma_0,$$

і його розв'язок є таким:

$$a_0 = \frac{2^q \Gamma(1-q) \omega_\gamma^0}{\gamma_0^{q-1}}, \quad a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (30)$$

Тому у цьому випадку

$$\xi \mathbf{B}(\xi) = -\frac{2^q \Gamma(1-q) \omega_\gamma^0}{\gamma_0^{q-1}} \cdot \frac{J_{2n-q+1}(\xi \gamma_0)}{\xi^{q+1}}$$

і обчислені формули визначення напружено-деформованого стану (8)-(12) набудуть вигляду

$$\mathbf{u}_\beta(\alpha, \gamma) = \frac{2^q \Gamma(1-q) \omega_\gamma^0}{\gamma_0^{q-1}} \int_0^\infty \frac{J_{1-q}(\xi \gamma_0)}{\xi^{q+1} I_0(\xi)} I_1(\xi \alpha) \cos \xi \gamma d\xi; \quad (34)$$

$$\mu^{-1} \cdot \sigma_{\alpha\beta}(\alpha, \gamma) = \frac{2^q \Gamma(1-q) \omega_\gamma^0}{\gamma_0^{q-1}} \int_0^\infty \frac{J_{1-q}(\xi \gamma_0)}{\xi^q I_0(\xi)} I_2(\xi \alpha) \cos \xi \gamma d\xi; \quad (35)$$

$$\mu^{-1} \cdot \sigma_{\beta\gamma}(\alpha, \gamma) = \frac{2^q \Gamma(1-q) \omega_\gamma^0}{\gamma_0^{q-1}} \int_0^\infty \frac{J_{1-q}(\xi \gamma_0)}{\xi^q I_0(\xi)} I_1(\xi \alpha) \sin \xi \gamma d\xi; \quad (36)$$

$$2\omega_\gamma(\alpha, \gamma) = \frac{2^q \Gamma(1-q) \omega_\gamma^0}{\gamma_0^{q-1}} \int_0^\infty \frac{J_{1-q}(\xi \gamma_0)}{\xi^q I_0(\xi)} I_0(\xi \alpha) \cos \xi \gamma d\xi; \quad (37)$$

$$2\omega_\alpha(\alpha, \gamma) = \frac{2^q \Gamma(1-q) \omega_\gamma^0}{\gamma_0^{q-1}} \int_0^\infty \frac{J_{1-q}(\xi \gamma_0)}{\xi^q I_0(\xi)} I_1(\xi \alpha) \sin \xi \gamma d\xi; \quad (38)$$

Аналіз розрахункових інтегралів у формулах (34)–(38) свідчить про те, що за виконання нерівності $\frac{1}{2} < q < 1$ на параметр q усі вони існують і є неперервними на лінії $|\gamma| = \gamma_0$, що обмежує область задання крайових умов.

3. Числові результати та їхній аналіз. На рис. 1 показано розподіл дотичних напружень $(\omega_\gamma^0 \mu)^{-1} \sigma_{\alpha\beta}(\alpha, \gamma)$ вздовж осі γ циліндра при фіксованих значеннях змінної α , який визначається виразом (35) при $q = 0,75$ і $\gamma_0 = 1$. Аналіз графіків свідчить про те, що ці напруження досягають максимального значення на поверхні циліндра і змінюють знак біля межі області завантаження. За таких обставин біля поверхні циліндра можливе виникнення зон розшарування і появи тріщин.

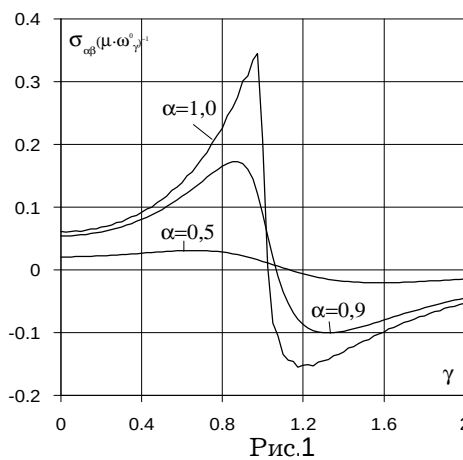


Рис.1

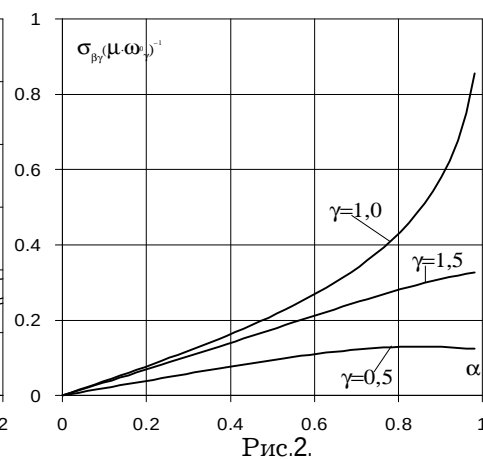


Рис.2.

На рис.2 показано розподіл зрізуючих напружень $(\omega_\gamma^0 \mu)^{-1} \sigma_{\beta\gamma}(\alpha, \gamma)$ при фіксованих значеннях γ вздовж радіуса циліндра при $q = 0,75$ і $\gamma_0 = 1$. Аналіз цих графіків свідчить про те, що максимального значення ці напруження досягають у площині циліндра $\gamma = 1$ на його поверхні $\alpha = 1$.

1. Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л. Кручение упругих тел. – М., 1963.
2. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. О локальных особенностях в математических моделях физических полей // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 41, № 1. – 1998. – С. 12–34.
3. Галазюк В.А., Сулим Г.Т. Неклассическая модель деформирования тел с трещинами // Теор. и прикл. механика. – Харьков. – 2001. – Вып. 33. – С. 63–75.

4. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. – М., 1979.
5. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. – М., 1964.
6. *Трусделл К.* Первоначальный курс механики сплошных сред. – М., 1975.

AXIS SYMMETRICAL CYLINDER TORSION BY THE LOCAL
SURFACE LOADING OF THE CYLINDER IN THE CASE OF
EXISTENCE OF THE BOUNDARY LAYER

Oleksandr Andreykiv, Olha Halazyuk

*Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine*

A new mathematical model of stressed state in cylinder with restrained butt-ends on the infinity in the case of local surface loading which causes its torsion is presented. Also, the existence of tangential stress on the not loaded cylinder surface which provides the existence of the boundary layer is proved.

Key words: cylinder, torsion, stress, boundary layer.

Стаття надійшла до редколегії 27.09.2006
Прийнята до друку 19.11.2008

УДК 539.375; 539.4:536.543

ДОВГОВІЧНІСТЬ ПЛАСТИНИ З ДВОЯКО-ПЕРІОДИЧНОЮ СИСТЕМОЮ ПРЯМОЛІНІЙНИХ ПОВЗУЧО-ВТОМНИХ ТРІЩИН

Ростислав ЛЕСІВ

*Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна*

З допомогою раніше побудованого автором кінетичного рівняння визначено довговічність пластини з двояко-періодичною системою повзучо-втомних тріщин в умовах високої температури. Розглянуто частковий випадок, зокрема аналог задачі Гріффітса для такої системи тріщин, побудовано графічну залежність залишкової довговічності пластини від початкового розміру тріщини.

Ключові слова: довговічність, двояко-періодична система, повзучо-втомна тріщина, коефіцієнт інтенсивності напружень.

Руйнування елементів конструкцій, які працюють в умовах змінного в часі навантаження з довготривалими циклами та при високих температурах, відбувається в результаті росту повзучо-втомної тріщини і досягнення нею критичного розміру. Ця проблема стає особливо актуальною для тіл, які вже містять дефекти типу тріщин.

Сьогодні питання поширення повзучо-втомної тріщини досліджено ще недостатньо добре. Здебільшого відомі теоретичні результати зводяться до опису експериментальних даних (див., наприклад, [1-3]) і узагальнення їх у вигляді певного кінетичного рівняння, такі задачі розглядають як однопараметричні. Проте, задачі про поширення повзучо-втомної тріщини багатопараметричні і треба розвивати теорії, які б враховували всі головні параметри цього явища.

На підставі такої теорії у цій праці зробили спробу побудувати математичну модель, яка б достатньо добре описувала поширення в пластині двояко-періодичної системи повзучо-втомних тріщин і допомагала б визначити на цій основі період їхнього росту.

Формулювання задачі і метод її розв'язку. Розглянемо нескінчену пластинку послаблену двояко-періодичною системою прямолінійних тріщин довжини $2l_0$, центри яких розміщені у вузлах квадратної решітки зі стороною d (рис. 1).

Вважають, що пластина нагріта до високої температури, а на нескінченності розтягується рівномірно розподіленими, змінними в часі зусиллями інтенсивності p (рис. 2), направленими перпендикулярно до лінії розміщення тріщини. Задача полягає у визначенні кількості циклів $N = N_*$, коли довжина повзучо-втомної тріщини підросте до критичного розміру $l(N_*) = l_*$ і відбудеться руйнування.

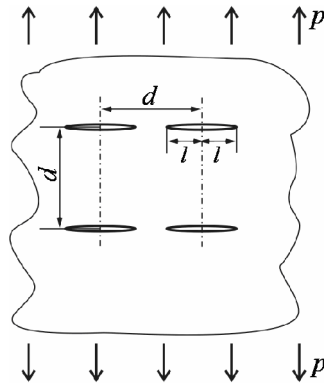


Рис. 1. Схема навантаження пластини послабленої двояко-періодичною системою тріщин

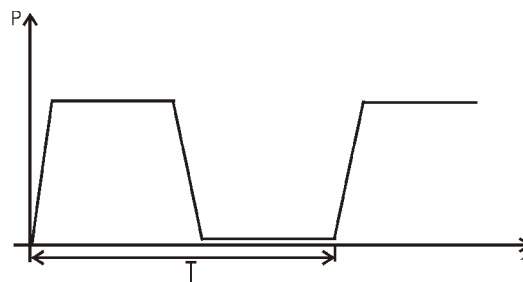


Рис.2. Схема зміни в часі параметра p зовнішнього навантаження

Оскільки в цьому випадку напружено-деформований стан у пластині симетричний стосовно лінії розміщення тріщини, то поширення повзучо-втомної тріщини буде описуватися згідно з [4,5] рівнянням

$$\frac{dl}{dN} = \frac{\alpha E}{4.5\sigma_{of}} \frac{[\delta_{\max} + AT[\delta_{\max}\delta_{fC}^{-1}]^m]}{(\delta_{fC} - \delta_{\max})}, \quad (1)$$

за початкових і кінцевих умов

$$\begin{aligned} N &= 0, \quad l(0) = l_0; \\ N &= N_*, \quad l(N_*) = l_*, \end{aligned} \quad (2)$$

де критичну довжину тріщини визначають з такого критерію

$$\delta_{\max}(l_*) = \delta_{fC}. \quad (3)$$

Тут N – кількість циклів; E – модуль пружності; σ_{of} – границя плинності матеріалу; $\delta_{\max}$ – максимальне розкриття у вершині тріщини; δ_{fC} – критичне значення $\delta_{\max}$; A, m – параметри істинної діаграми розтягу матеріалу.

Отже, задача зведеться до розв'язку рівняння (1) при умовах (2) і (3), де треба знати функцію розкриття у вершині тріщини $\delta_{\max}$. Цю величину визначаємо наближено з допомогою відомого [6] методу еквівалентних напружених станів. Згідно з цим методом за допоміжну задачу вибираємо задачу Гріффітса, для якої

$$\delta_{\max}^{(G)}(l_1) = -8l_1\sigma_{of}E^{-1} \ln \left[\cos \left(\pi p / 2\sigma_{of} \right) \right], \quad (4)$$

$$K_{I\max}^{(G)} = p\sqrt{\pi l_1}. \quad (5)$$

Тут $2l_1$ – довжина тріщини для задачі Гріффітса, $K_{I\max}$ – максимальне значення коефіцієнта інтенсивності напружень. Для розглядуваної нами задачі коефіцієнт інтенсивності напружень визначаємо з допомогою даних [7] так:

$$K_{I\max} = p(\pi l)^{\frac{1}{2}} \left(1 + 8,8 \cdot 10^{-2} \pi \lambda^2 + 3,8 \cdot 10^{-3} \pi^2 \lambda^4 - 2,6 \cdot 10^{-3} \pi^3 \lambda^6 + O(\lambda^8) \right), \quad \lambda = 2ld^{-1}. \quad (6)$$

Тоді згідно з методом еквівалентних напружених станів величину $\delta_{\max}$ визначаємо так:

$$\delta_{\max} = \delta_{\max}^{(G)}(l_1), \quad (7)$$

де l_1 визначається шляхом прирівнювання співвідношень (5) і (6), тобто

$$l_1 = l \left(1 + 8,8 \cdot 10^{-2} \pi \lambda^2 + 3,8 \cdot 10^{-3} \pi^2 \lambda^4 - 2,6 \cdot 10^{-3} \pi^3 \lambda^6 + O(\lambda^8) \right)^2. \quad (8)$$

Підставляючи (8) в (4) і кінцево у (7), знайдемо

$$\delta_{\max} = -8\sigma_{of}lE^{-1} \ln \left[\cos \left(\pi p / 2\sigma_{of} \right) \right] \left(1 + 8,8 \cdot 10^{-2} \pi \lambda^2 + 3,8 \cdot 10^{-3} \pi^2 \lambda^4 - 2,6 \cdot 10^{-3} \pi^3 \lambda^6 + O(\lambda^8) \right)^2. \quad (9)$$

На підставі (9), рівняння (1) запишемо так:

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dN} = & \frac{\alpha E}{4,5\sigma_{of}} \left[-8\sigma_{of}lE^{-1} \ln \left[\cos \left(\pi p / 2\sigma_{of} \right) \right] \times \left(1 + 8,8 \cdot 10^{-2} \pi \lambda^2 + 3,8 \cdot 10^{-3} \pi^2 \lambda^4 - \right. \right. \\ & \left. \left. - 2,6 \cdot 10^{-3} \pi^3 \lambda^6 + O(\lambda^8) \right)^2 + A T \left[-8\sigma_{of}lE^{-1} \ln \left[\cos \left(\pi p / 2\sigma_{of} \right) \right] \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left(1 + 8,8 \cdot 10^{-2} \pi \lambda^2 + 3,8 \cdot 10^{-3} \pi^2 \lambda^4 - 2,6 \cdot 10^{-3} \pi^3 \lambda^6 + O(\lambda^8) \right)^2 \delta_{fC}^{-1} \right]^m \right] \times \\ & \times \left(\delta_{fC} - 8\sigma_{of}lE^{-1} \ln \left[\cos \left(\pi p / 2\sigma_{of} \right) \right] \times \left(1 + 8,8 \cdot 10^{-2} \pi \lambda^2 + 3,8 \cdot 10^{-3} \pi^2 \lambda^4 - \right. \right. \\ & \left. \left. - 2,6 \cdot 10^{-3} \pi^3 \lambda^6 + O(\lambda^8) \right)^2 \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (10)$$

до цього рівняння треба додати умови (2), і умову (3), яка набуде такого вигляду:

$$\begin{aligned} & -8\sigma_{of}l_*E^{-1}\ln\left[\cos\left(\pi p/2\sigma_{of}\right)\right]\times \\ & \times\left(1+8,8\cdot 10^{-2}\pi\lambda^2+3,8\cdot 10^{-3}\pi^2\lambda^4-\right. \\ & \left.-2,6\cdot 10^{-3}\pi^3\lambda^6+O\left(\lambda^8\right)\right)^2=\delta_{fC}. \end{aligned} \quad (11)$$

Отже, розв'язок задачі виконують інтегруванням рівняння (10) при умовах (2) і (11).

Цю задачу можна дещо спрости, коли початкова тріщина довжини $2l_0$ буде макроскопічною. Тоді її розв'язок зведемо до рівняння [4,5]

$$\frac{dl}{dN}=\frac{\alpha E^2}{4,5}\left[K_{I\max}^2\sigma_{of}^{-1}E^{-1}+A\cdot T\left[K_{I\max}^2K_{fC}^{-2}\right]^m\right]^2(K_{fC}^2-K_{I\max}^2)^{-1}, \quad (12)$$

де K_{fC} – критичне значення $K_{I\max}$.

Для визначення періоду докритичного росту тріщини $N=N_*$ до рівняння (12) додаємо початкову і кінцеву умови (2), де критичну довжину $l=l_*$ визначають із критерію Ірвіна [8]

$$K_{I\max}(p,l_*)=K_{fC}. \quad (13)$$

Тоді з врахуванням (6), співвідношення (12) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dN} &= \frac{\alpha E^2}{4,5}\left[p^2\pi l\left(1+8,8\cdot 10^{-2}\pi\lambda^2+3,8\cdot 10^{-3}\pi^2\lambda^4-2,6\cdot 10^{-3}\pi^3\lambda^6+\right.\right. \\ & \left.+O\left(\lambda^8\right)\right)^2\sigma_{of}^{-1}E^{-1}+A\cdot T\left[p^2\pi l\left(1+8,8\cdot 10^{-2}\pi\lambda^2+3,8\cdot 10^{-3}\pi^2\lambda^4-\right.\right. \\ & \left.-2,6\cdot 10^{-3}\pi^3\lambda^6+O\left(\lambda^8\right)\right)^2K_{fC}^{-2}\right]^m\right]^2(K_{fC}^2-p^2\pi l\left(1+8,8\cdot 10^{-2}\pi\lambda^2+\right. \\ & \left.+3,8\cdot 10^{-3}\pi^2\lambda^4-2,6\cdot 10^{-3}\pi^3\lambda^6+O\left(\lambda^8\right)\right)^2)^{-1}. \end{aligned} \quad (14)$$

Спростимо рівняння (14), розклавши його за степенями λ і обмежувачись доданками λ^2 , отримаємо

$$\begin{aligned} dN &= \frac{4,5}{\alpha E^2}(K_{fC}^2-p^2\pi l(1+8,8\cdot 10^{-2}\pi\lambda^2))\times[p^2\pi l\sigma_{of}^{-1}E^{-1}(1+8,8\cdot 10^{-2}\pi\lambda^2)+ \\ & +AT(p^2\pi lK_{fC}^{-2})^m(1+8,8\cdot 10^{-2}\pi\lambda^2)]^{-2}dl. \end{aligned} \quad (15)$$

Проінтегрувавши диференціальне рівняння (15) в межах від 0 до N_* , та від l_0 до l_* , одержимо остаточне рівняння для визначення періоду докритичного росту двояко-періодичної системи повзучо-втомних тріщин

$$N_* = \int_{l_0}^{l_*} \frac{4.5}{\alpha E^2} (K_{fC}^2 - p^2 \pi l (1 + 8,8 \cdot 10^{-2} \pi \lambda^2)) \times [p^2 \pi l \sigma_{of}^{-1} E^{-1} (1 + 8,8 \cdot 10^{-2} \pi \lambda^2) + AT (p^2 \pi l K_{fC}^{-2})^m (1 + 8,8 \cdot 10^{-2} m \pi \lambda^2)]^{-2} dl. \quad (16)$$

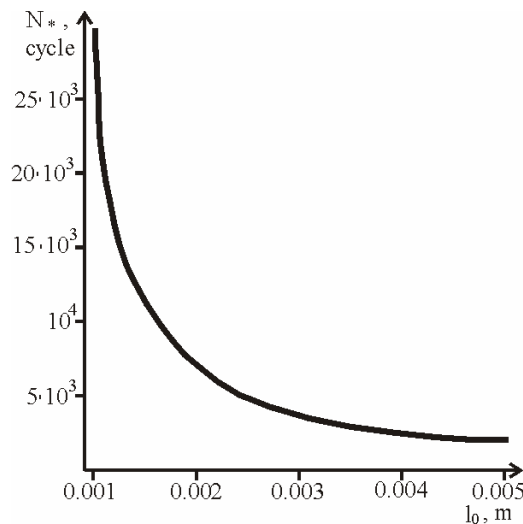


Рис. 3. Графічна залежність залишкової довговічності пластини від початкового розміру тріщини

Для кількісного аналізу співвідношення (16) задамо конкретні значення механічних характеристик і параметрів високотемпературної втоми та повзучості для випадку сталі 321, які досліджувалися в [3]. В результаті отримаємо

$$\begin{aligned} E &= 1,9 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \sigma_t = 450 \text{ МПа}, \\ A &= 6 \cdot 10^{-5}, \quad m = 1,43, \quad d = 0,03 \text{ м}, \\ l_* &= 0,01 \text{ м}, \quad K_{fC} = 90 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}, \quad p = 200 \text{ МПа}. \end{aligned} \quad (17)$$

Враховуючи це, за допомогою числового методу обчислимо співвідношення (16), та подамо графічну залежність залишкового ресурсу пластини $N = N_*$ від початкової довжини тріщини l_0 (рис. 3).

1. Тайра С., Отани Р. Теория высокотемпературной прочности материалов. – М., 1986.

2. *Koterazawa R.* Creep-Fatigue crack growth of metallic materials at elevated temperatures// *Advances in Fracture resistance and structural integrity*. – Pergamon, 1994. – P. 497–504.
3. *Gladwin D.N., Miller D.A., Neate G.J., Priest R.H.* Creep, fatigue and creep-fatigue crack growth rates in parent and simulated HAZ type 321 stainless steel.// *Fatigue and fracture of engineering materials & structures*. 1988. – 11, № 5. – P. 35.
4. *Andrejkiv O., Lesiv R.* Mathematical model for estimating the period of creep-fatigue crack growth in construction materials at high temperature.// *Acta mechanica et automatica*. – 2007. – 1, № 1. – P.7.
5. *Андрейків О.Є., Лесів Р.М.* Визначення періоду докритичного росту повзучо-втомної тріщини в тонкостінних елементах конструкцій.// Збірник тез доповідей «8-й міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові». – Львів.: Національний університет «Львівська політехніка», 23-25 травня 2007, – С. 38.
6. *Андрейкив А.Е., Дарчук А. И.* Усталостное разрушение и долговечность конструкций. – К., 1992.
7. *Саврук М.П.* Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами – К., 1988.
8. *Панасюк В. В., Андрейкив А. Е., Партон В. З.* Основы механики разрушения. – К., 1988.

LIFETIME OF A PLATE WITH DOUBLE-PERIODICAL SYSTEM OF STRAIGHT CREEP-FATIGUE CRACKS

Rostislav Lesiv

*Ivan Franco National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine*

The lifetime of a plate with double-periodical system of creep-fatigue cracks under high temperature is determined with the help of kinetic equation, which was formulated by the author earlier. The analog of the Griffith problem for such a system was examined, and graphical correlation between residual lifetime of the plate and initial crack length was shown.

Key words: lifetime, double-periodical system, creep-fatigue crack, stress intensity factor.

Стаття надійшла до редколегії 31.05.2007

Прийнята до друку 19.11.2008

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧНИЙ АНАЛІЗ ТЕМПЕРАТУРНИХ НАПРУЖЕНЬ У ТОНКІЙ СТРІЧЦІ ДЛЯ ПРОТЯЖНИХ ЗОН НАГРІВУ У ВАКУУМІ

Іван ПРОКОПИШИН¹, Дмитро ХЛЄБНИКОВ¹,
Йосип ГРОБЕР², Артур ЩУКІН²

¹Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

²Компанія Сідрабе, вул. Крустпілс, 17 LV-1073 Рига, Латвія

Розглянуто квазістаціонарну задачу про температурні напруження у тонкій металевій стрічці при нанесенні покриття у вакуумі. Для протяжних технологічних зон отримано асимптотичні вирази для напружень у формі інтегралів Фур'є. Проведено числовий аналіз асимптотичних полів напружень.

Ключові слова: тонка стрічка, вакуумне покриття, температурні напруження, перетворення Фур'є.

Нанесення металевого покриття на тонку стрічку у вакуумі супроводжується нагрівом, який зумовлює температурні напруження [9]. Температурні поля у стрічці для різних технологічних процесів досліджені у праці [4], формули для напружень отримано у [2], а числовий аналіз для локальних зон нагріву проведено у [6]. Далі подаємо асимптотичний аналіз напружень у стрічці для протяжних зон нагріву.

Формулювання задачі. Тонка металева стрічка товщини δ та ширини $2h$ рухається з постійною швидкістю v через технологічну зону. Нерухому прямокутну систему координат Oxy розмістимо в центрі зони, вісь Ox спрямуємо вздовж стрічки в напрямі її руху (рис. 1).

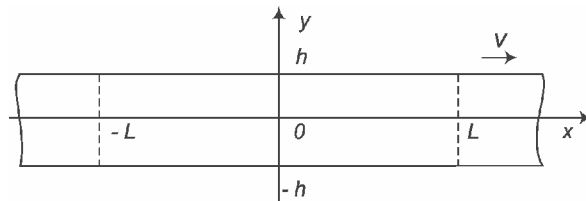


Рис. 1.

Під дією стаціонарного теплового потоку вздовж стрічки усталюються квазістаціонарні поля температури і напружень.

Визначення температурного поля. Для моделювання температурного поля у стрічці взято припущення:

- 1) стрічка нескінченна, а розподіл температури – квазістаціонарний;
- 2) джерело нагріву має сталу інтенсивність W по зоні $-L \leq x \leq L$;
- 3) торці стрічки та її поверхня поза зоною нагріву – теплоізовані;

4) температура стала по товщині стрічки.

Позначимо:

$T(x)$ – температура стрічки в точках з координатою x ;

$T_0 = T(-\infty)$ – температура стрічки в нескінченості до зони нагріву;

$\Theta(x) = T(x) - T_0$ – відносна температура стрічки;

λ – коефіцієнт теплопровідності матеріалу стрічки;

c – питома теплоємність матеріалу стрічки;

ρ – густина матеріалу стрічки;

$s = \rho chv/\lambda$ – безрозмірна швидкість стрічки;

$\xi = x/h$, $\eta = y/h$ – безрозмірні координати;

$2l = 2L/h$ – безрозмірна довжина зони нагріву.

За прийнятих гіпотез задача теплопровідності в нерухомій системі координат Oxy формулюється так [3]:

$$\lambda \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - \rho cv \frac{d\Theta}{dx} + \frac{W}{\delta} f(x) = 0, \quad f(x) = \begin{cases} 1, |x| \leq L \\ 0, |x| > L \end{cases}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \Theta = 0. \quad (1)$$

Її розв'язок легко знайти методом інтегрального перетворення Фур'є [7]

$$\Theta(\xi) = \frac{2Wh^2}{\pi\delta\lambda} \int_0^\infty \frac{t \cos t \xi + s \sin t \xi}{t^2(t^2 + s^2)} \sin lt \, dt. \quad (2)$$

Обчислюючи інтеграл, отримаємо [2]

$$\Theta(\xi) = \frac{Wh^2}{\delta\lambda s} \begin{cases} 2sh(sl)e^{s\xi}/s, & \xi < -l, \\ l + \xi + (1 - e^{-s(l-\xi)})/s, & |\xi| \leq l, \\ 2l, & \xi > l, \end{cases} \quad (3)$$

Температурні напруження. Напруження в стрічці виражають через функцію напружень $E\epsilon$ [1]

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad (4)$$

яка задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = -\alpha E \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}, \quad (5)$$

(α – коефіцієнт лінійного температурного розширення, E – модуль Юнга) та крайові умови

$$F \Big|_{y=\pm h} = \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{y=\pm h} = 0. \quad (6)$$

Метод інтегрального перетворення Фур'є [6,7] для напружень $\bar{\sigma}_m = \lambda \delta \sigma_m / 4\alpha E W h^2$, $m = xx, yy, xy$, отримаємо вирази [2]

$$\bar{\sigma}_{xx}(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty p(t, \eta) \varphi(t, \xi) \sin lt \, dt, \quad (7)$$

$$\bar{\sigma}_{yy}(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty q(t, \eta) \varphi(t, \xi) \sin lt \, dt, \quad (8)$$

$$\bar{\sigma}_{xy}(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty r(t, \eta) \psi(t, \xi) \sin lt \, dt, \quad (9)$$

де

$$p(t, \eta) = \frac{(sh t - t ch t) ch t \eta + t \eta sh t sh t \eta}{t^2(t^2 + s^2)(sh 2t + 2t)}, \quad \varphi(t, \xi) = t \cos t \xi + s \sin t \xi,$$

$$q(t, \eta) = \frac{1}{t^2(t^2 + s^2)} \left(\frac{(sh t + t ch t) ch t \eta - t \eta sh t sh t \eta}{sh 2t + 2t} - \frac{1}{2} \right),$$

$$r(t, \eta) = \frac{t ch t sh t \eta - t \eta sh t ch t \eta}{t^2(t^2 + s^2)(sh 2t + 2t)}, \quad \psi(t, \xi) = t \sin t \xi - s \cos t \xi.$$

Аналіз напруженого стану. Підінтегральні функції у виразах (7)-(9) обмежені в нулі, а при великих t мають асимптотику $O(t^{-3})$. Це дає змогу наблизити їх інтегралами зі скінченною верхньою границею, які для $l < 50$ ефективно обчислюють числовими методами [6]. На практиці існують технологічні процеси з протяжними зонами – $l > 100$.

Виконати граничний перехід при $l \rightarrow \infty$ безпосередньо у формулах (7)-(9) неможливо, оскільки концентрація напружень відбувається у зонах $\xi = \pm l$. Тому введемо нові координати ξ' за формулами $\xi = \pm l + \xi'$. Отримаємо зображення

$$\varphi(t, \xi) \sin lt = \frac{1}{2} [(t \cos \xi' t + s \sin \xi' t) \sin 2lt \pm (-t \sin \xi' t + s \cos \xi' t)(1 - \cos 2lt)],$$

$$\psi(t, \xi) \sin lt = \frac{1}{2} [(t \sin \xi' t - s \cos \xi' t) \sin 2lt \pm (t \cos \xi' t + s \sin \xi' t)(1 - \cos 2lt)].$$

За теоремою Рімана-Лебега [5] для абсолютно інтегрованої на відрізку $[a, b]$ функції виконуються рівності $\lim_{l \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \sin lt \, dt = \lim_{l \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \cos lt \, dt = 0$. Тому для асимптотичних напружень $\tilde{\sigma}_m = \lim_{l \rightarrow \infty} \bar{\sigma}_m$ в зонах $\xi = \pm l$ маємо

$$\tilde{\sigma}_{xx}(\xi', \eta) = \pm \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty p(t, \eta) (-t \sin \xi' t + s \cos \xi' t) dt, \quad (10)$$

$$\tilde{\sigma}_{yy}(\xi', \eta) = \pm \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty q(t, \eta) (-t \sin \xi' t + s \cos \xi' t) dt, \quad (11)$$

$$\tilde{\sigma}_{xy}(\xi', \eta) = \pm \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty r(t, \eta) (t \cos \xi' t + s \sin \xi' t) dt. \quad (12)$$

Зазначимо, що напруження $\tilde{\sigma}_{xx}$ та $\tilde{\sigma}_{yy}$ симетричні по η , а напруження $\tilde{\sigma}_{xy}$ – кососиметричні.

На рис. 2, 3 для параметра $s = 416,5$ показано лінії рівня напружень $\tilde{\sigma}_{xx}$ та $\tilde{\sigma}_{yy}$ в координатах (ξ', η) . Напруження $\tilde{\sigma}_{xx}$ максимальні на краях стрічки $\eta = \pm 1$ при $\xi = l$. Максимальні еквівалентні напруження за енергетичною теорією формозміни $\tilde{\sigma}_e = \left(\tilde{\sigma}_{xx}^2 - \tilde{\sigma}_{xx} \tilde{\sigma}_{yy} + \tilde{\sigma}_{yy}^2 + 3\tilde{\sigma}_{xy}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ збігаються з максимальними напруженнями $\tilde{\sigma}_{xx}$. Напруження $\tilde{\sigma}_{xy}$ значно менші від напружень $\tilde{\sigma}_{xx}$ та $\tilde{\sigma}_{yy}$. В області $\eta = 0$, $\xi = l$ простежуються від'ємні (стискаючі) напруження $\tilde{\sigma}_{yy}$.

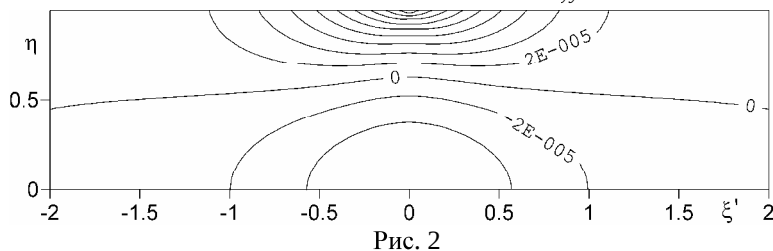


Рис. 2

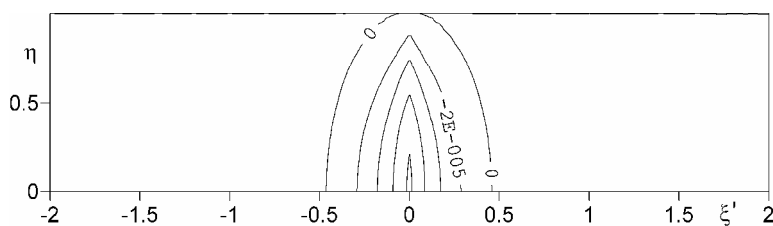


Рис. 3

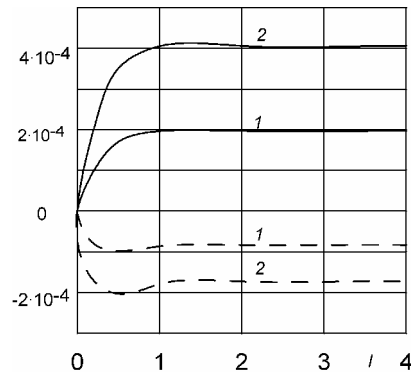


Рис. 4.

На рис. 4 показано залежність максимальних розтягуючих напружень σ_{xx} (суцільні лінії) та максимальних стискуючих напружень σ_{yy} (штрихові лінії) у стрічці від параметра l . Криві 1 побудовано для значення параметра $s = 416,5$, а криві 2 – $s = 200$. Легко бачити, що вже при $l = 3$ напруження близькі до своїх асимптотичних значень.

1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. – М., 1964.
2. Гробер И.Л., Хлебников Д.Г. Температурные напряжения в бесконечной ленте при локальном нагреве в вакууме // Нанесение покрытий в вакууме. – Рига, 1986. – С.96–104.
3. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М., 1964.
4. Клебанов Ю.Д., Нерсисян Р.Г., Сумароков В.Н. Нагрев в вакууме движущегося полосового проката поверхностными стационарными источниками// Создание машин и исследование процессов получения вакуумных конденсационных покрытий: Труды ВНИИМЕТМАШ. – 1977. – № 51. – С.99–105.
5. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. – М., 1989. Т. 3.
6. Прокопишин И., Хлебников Д., Гробер Й., Щукін А. Аналіз температурних напружень у тонкій стрічці за локального нагріву у вакуумі// Машинознавство. – 2008. – 3 с. (у друці).
7. Снеддон И. Преобразование Фурье. – М., 1955.
8. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л., 1967.
9. Mattox D.M. Handbook of Physical Vapor Deposition. – William Andrew Inc., 1998.

**ASYMPTOTIC ANALYSIS OF THERMAL STRESSES IN INFINITE
THIN TAPE FOR LONG HEATING ZONES IN VACUUM****Ivan Prokopyshyn¹, Dmytro Khlebnikov¹,****Yosyp Grobers², Artur Schukin²***¹Ivan Franko National University of L'viv,
Universytetska Str., 1 79000 L'viv, Ukraine**²Sidrabe Inc., Krustpils iela, 17 LV-1073 Riga, Latvia*

Quasi-steady thermal stresses state of metal foil during vacuum deposition is considered. Asymptotic expressions for stresses in form of Fourier integrals are obtained for long heating zones.. Asymptotic stresses fields are analyzed.

Key words: metal foil, vacuum deposition, thermal stresses, Fourier transform.

Стаття надійшла до редколегії 24.05.2007

Прийнята до друку 19.11.2008

АНТИПЛОСКА ЗАДАЧА ДЛЯ ТОНКОГО ПРУЖНОГО ВКЛЮЧЕННЯ У П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОМУ ПРОСТОРІ

Георгій СУЛИМ¹, Роман РАБОШ²

¹Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

²Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача, НАН України
вул. Наукова, 3-б 79060 Львів, Україна

Розглянуто антиплоску статичну задачу для тонкого пружного включення у п'єзоелектричному просторі. Для розв'язування сформульованої задачі було використано метод функцій стрибка. Цей метод заснований на моделюванні включення стрибками векторів переміщень і напружень. Задачу звели до системи двох сингулярних інтегральних рівнянь, яку розв'язали з використанням методу колокацій.

Отримано вирази для узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень, електричної напруженості та електричної індукції у випадках пружного включення, тріщини й абсолютно жорсткого включення. Чисельні результати ілюструють вплив форми пружного включення і п'єзоелектричних властивостей матеріалу середовища на коефіцієнти інтенсивності.

Ключові слова: п'єзоелектричний простір, пружне включення, напружено-деформований стан, коефіцієнти інтенсивності напружень, коефіцієнт інтенсивності електричної індукції, коефіцієнт інтенсивності електричної напруженості.

1. Сучасна механіка деформівного твердого тіла розглядає напружено-деформований стан не лише суто механічних тіл, а й враховує у них вплив і взаємодію різних фізико-механічних полів. Спочатку це стосувалося лише теплового поля і наслідком цього було виникнення термопружності. Пізніше до цього додалися електричні та електромагнітні поля. Потреба у такому аналізі пов'язана зі щораз ширшим використанням у елементах інженерних об'єктів п'єзоелектричного ефекту, який полягає у зміні розмірів тіла (деформування) під час пропускання через нього електричного струму і навпаки – появі імпульсу струму внаслідок деформування середовища. Це явище не є рідкісним і останніми часами увага до його вивчення й урахування у механічних системах стрімко зростає [1–7]. Спричинене це, зокрема, і тим, що цей ефект використовують для конструювання так званих смарт-матеріалів (інтелектуальних матеріалів), властивості яких змінюються під час експлуатації виготовленого з них об'єкта чи робочого тіла, якнайліпше пристосовуючись до режимів навантажування та їхньої зміни.

Задачі електропружності для п'єзоелектричного середовища з тріщинами і отворами були розглянуті, наприклад, в [1–6]. У [7] розглянуто задачу про сферідне включення, а у праці [8] розглянуто задачу про тріщину між п'єзоелектричним круглим включенням і п'єзоелектричним середовищем. Проте питання концентрації механічних та електричних полів поблизу тонких пружних деформівних включень залишилося поза увагою дослідників.

Для розв'язування сформульованої задачі було використано метод функцій стрибка [9], за допомогою якого визначено залежності напруженого стану середовища від

функцій стрибка і зовнішнього навантаження. Використавши граничний перехід в отриманих виразах для визначення напружень і переміщень на лінії контакту матриці з включенням і умови взаємодії пружного включення з навколишнім середовищем [9, 10], отримали систему сингулярних інтегральних рівнянь щодо шуканих функцій стрибка. Цей результат використано для дослідження концентрації механічних та електричних полів у випадку тонкого пружного включення в однорідному п'єзоелектричному просторі.

2. Формулювання задачі. Розглянемо п'єзоелектричний простір, віднесений до декартової системи координат $Ox_1x_2x_3$. Він складається з двох півпросторів, на межі поділу яких розташоване стрічкове пружне включення. У площині Ox_1x_2 межі поділу півпросторів відповідає лінія L , а серединній лінії включення – відрізок $L' = [-a; a] \subset L$. Вважаємо, що матеріали півпросторів відповідають кристалографічному класу $6mm$ і поляризовані вздовж осі Ox_3 . На безмежності діє однорідне поле дотичних напружень $\sigma_{23}^\infty = \tau$, $\sigma_{13}^{(k)\infty} = \tau_1^{(k)}$ й однорідне поле електричної напруженості $E_1^\infty, E_2^{(k)\infty}$ ($k = 1, 2$).

Згідно з [11] для поперечного перерізу розглядуваного простору (площина Ox_1x_2) виконуються визначальні співвідношення (1)–(2), рівняння рівноваги (3) і рівняння електростатики (4)–(5):

$$\sigma_{i3}^{(k)} = c_{44}^{(k)} \frac{\partial u_3^{(k)}}{\partial x_i} - e_{15}^{(k)} E_i^{(k)}, \quad (1)$$

$$D_i^{(k)} = e_{15}^{(k)} \frac{\partial u_3^{(k)}}{\partial x_i} + \varepsilon_{11}^{(k)} E_i^{(k)}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}^{(k)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}^{(k)}}{\partial x_2} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial D_1^{(k)}}{\partial x_1} + \frac{\partial D_2^{(k)}}{\partial x_2} = 0, \quad (4)$$

$$E_i^{(k)} = -\frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial x_i} \quad (i, k = 1, 2), \quad (5)$$

де $u_3^{(k)} = u_3^{(k)}(x_1, x_2)$, $\sigma_{i3}^{(k)} = \sigma_{i3}^{(k)}(x_1, x_2)$, $E_i^{(k)} = E_i^{(k)}(x_1, x_2)$, $D_i^{(k)} = D_i^{(k)}(x_1, x_2)$ – переміщення точок в напрямі осі x_3 , компоненти тензора напружень і векторів електричної напруженості та індукції відповідно; $c_{44}^{(k)}$ – пружна стала, виміряна за сталого електричного поля; $e_{15}^{(k)}$ – п'єзоелектрична стала; $\varepsilon_{11}^{(k)}$ – діелектрична проникність, виміряна за сталої деформації; $\varphi^{(k)}(x_1, x_2)$ – електростатичний потенціал; верхній індекс 1 відповідає верхньому півпростору, а 2 – нижньому.

Включення вважається абсолютно електропровідним і настільки тонким, що його вплив можна моделювати стрибком [9] вектора напружень і похідних від зміщень на L' . На решті лінії L контакт між півпросторами ідеальний

$$\sigma_{23}^{(2)} - \sigma_{23}^{(1)} = f_3(x_1) \quad (x_1 \in L'); \quad (6)$$

$$\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial x_1} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial x_1} = f_6(x_1) \quad (x_1 \in L'); \quad (7)$$

$$u_3^{(1)} = u_3^{(2)}, \quad \sigma_{23}^{(1)} = \sigma_{23}^{(2)} \quad (x_1 \in L / L'); \quad (8)$$

$$E_1^{(1)} = E_1^{(2)}, \quad D_2^{(1)} = D_2^{(2)} \quad (x_1 \in L). \quad (9)$$

3. Розв'язування задачі. Згідно з [1] величини механічного та електричного полів розглядуваної задачі можна виразити через комплексні потенціали $\Psi_j^{(k)}(z)$ ($j, k = 1, 2$):

$$\begin{aligned} u_3^{(k)} &= \operatorname{Re} \psi_1^{(k)}(z), \quad \varphi^{(k)} = \operatorname{Re} \psi_2^{(k)}(z), \\ \sigma_{13}^{(k)} - i\sigma_{23}^{(k)} &= c_{44}^{(k)} \Psi_1^{(k)}(z) + e_{15}^{(k)} \Psi_2^{(k)}(z), \\ D_1^{(k)} - iD_2^{(k)} &= e_{15}^{(k)} \Psi_1^{(k)}(z) - \varepsilon_{11}^{(k)} \Psi_2^{(k)}(z), \\ E_1^{(k)} - iE_2^{(k)} &= -\Psi_2^{(k)}(z), \\ \Psi_j^{(k)}(z) &= \frac{d\psi_j^{(k)}(z)}{dz}, \quad z = x_1 + ix_2. \end{aligned} \quad (10)$$

Для знаходження комплексних потенціалів $\Psi_j^{(k)}(z)$ ($j, k = 1, 2$) подамо їх у вигляді

$$\Psi_j^{(k)}(z) = \omega_j^{0(k)}(z) + \omega_j(z) \quad (z \in S^{(k)}; \quad j, k = 1, 2), \quad (11)$$

де $\omega_j(z)$ – функції, які голоморфні у кожній з півплощин $S^{(k)}$, зокрема і прямують до нуля на нескінченності, а $\omega_j^{0(k)}(z)$ – фундаментальні розв'язки у k -ій півплощині.

Фундаментальні розв'язки для такого випадку набувають вигляду [1]

$$\omega_1^{0(k)}(z) = \frac{\tau_1^{(k)} - i\tau + e_{15}^{(k)}(E_1^\infty - iE_2^{(k)\infty})}{c_{44}^{(k)}}, \quad \omega_2^{0(k)}(z) = iE_2^{(k)\infty} - E_1^\infty \quad (k = 1, 2). \quad (12)$$

Підставивши вирази (10) в умови (6)–(7), (9), враховуючи (11) та розв'язуючи відповідні задачі спряження, подібно до того як це зроблено в [12], отримаємо

$$\begin{aligned} \omega_1(z) &= \frac{it_6(z)A^{(k)} + t_3(z)}{B}, \\ \omega_2(z) &= \frac{it_6(z)(A^{(k)}(e_{15}^{(1)} + e_{15}^{(2)}) - Be_{15}^{(1)}) + t_3(z)(e_{15}^{(1)} + e_{15}^{(2)})}{B(\varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{11}^{(2)})}, \end{aligned} \quad (13)$$

де

$$\begin{aligned}
A^{(k)} &= \frac{c_{44}^{(l)} (\varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{11}^{(2)}) + e_{15}^{(l)} (e_{15}^{(1)} + e_{15}^{(2)})}{\varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{11}^{(2)}}, \\
B &= \frac{(c_{44}^{(2)} + c_{44}^{(1)}) (\varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{11}^{(2)}) + (e_{15}^{(1)} + e_{15}^{(2)})^2}{\varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{11}^{(2)}}, \\
t_j(z) &= \frac{1}{\pi} \int_{L'} \frac{f_j(t)}{t-z} dt \quad (z \in S^{(k)}; j = 3, 6; k, l = 1, 2; k \neq l). \quad (14)
\end{aligned}$$

Тоді, підставляючи вирази (11) у формули (10), з урахуванням (12), (13), (14) одержимо

$$u_3^{(k)} = \operatorname{Re} \left(\int \left(\frac{it_6(z) A^{(k)} + t_3(z)}{B} \right) dz + \frac{\tau_1^{(k)} - i\tau + e_{15}^{(k)} (E_1^\infty - iE_2^{(k)\infty})}{c_{44}^{(k)}} z \right), \quad (15,a)$$

$$\begin{aligned}
\varphi^{(k)} &= \operatorname{Re} \int \left(\frac{it_6(z) (A^{(k)} (e_{15}^{(1)} + e_{15}^{(2)}) - B e_{15}^{(l)}) + t_3(z) (e_{15}^{(1)} + e_{15}^{(2)})}{B (\varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{11}^{(2)})} \right) dz - \\
&\quad - \operatorname{Re} (z (iE_2^{(k)\infty} - E_1^\infty)), \quad (15,b)
\end{aligned}$$

$$\sigma_{13}^{(k)} - i\sigma_{23}^{(k)} = \frac{A^{(l)}}{B} t_3(z) + i \left(\frac{A^{(k)} A^{(l)}}{B} - \frac{e_{15}^{(l)} e_{15}^{(2)}}{\varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{11}^{(2)}} \right) t_6(z) + \tau_1^{(k)} - i\tau, \quad (15,b)$$

$$\begin{aligned}
D_1^{(k)} - iD_2^{(k)} &= \frac{C^{(k)}}{B} t_3(z) + i \left(\frac{A^{(k)} C^{(k)}}{B} + \frac{e_{15}^{(l)} \varepsilon_{11}^{(k)}}{\varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{11}^{(2)}} \right) t_6(z) + \\
&\quad + \frac{e_{15}^{(k)}}{c_{44}^{(k)}} (\tau_1^{(k)} - i\tau) + \left(\varepsilon_{11}^{(k)} + \frac{(e_{15}^{(k)})^2}{c_{44}^{(k)}} \right) (E_1^\infty - iE_2^{(k)\infty}), \quad (15,c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_1^{(k)} - iE_2^{(k)} &= - \frac{e_{15}^{(1)} + e_{15}^{(2)}}{B (\varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{11}^{(2)})} t_3(z) + \frac{i (e_{15}^{(l)} B - A^{(k)} (e_{15}^{(1)} + e_{15}^{(2)}))}{B (\varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{11}^{(2)})} t_6(z) + \\
&\quad + E_1^\infty - iE_2^{(k)\infty}, \quad (15,d)
\end{aligned}$$

де

$$C^{(k)} = \frac{e_{15}^{(k)} (\varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{11}^{(2)}) - \varepsilon_{11}^{(k)} (e_{15}^{(1)} + e_{15}^{(2)})}{\varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{11}^{(2)}} \quad (k, l = 1, 2; k \neq l). \quad (16)$$

Для визначення невідомих функцій стрибка $f_3(x_1)$ і $f_6(x_1)$ треба скористатися крайовими умовами [9] взаємодії включення з навколишнім середовищем

$$c_{44}^e \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)_{2h} - \frac{1}{h} \int_{-a}^{x_1} [\sigma_{23}]_{2h} d\xi = \sigma_{13}^c(-a),$$

$$(\sigma_{23})_{2h} + \frac{c_{44}^e}{h} \int_{-a}^{x_1} \left[\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right]_{2h} d\xi = w_-^* \frac{c_{44}^e}{h} \quad (x_1 \in [-a; a]), \quad (17)$$

де $h = h(x_1)$ – функція, яка визначає форму включення; c_{44}^e – модуль зсуву включення, а величини $\sigma_{13}^e(-a)$ і w_-^* визначаються з апіорних формул [9]; $[\sigma_{23}]_{2h} = \sigma_{23}^- - \sigma_{23}^+$, $(\sigma_{23})_{2h} = \sigma_{23}^- + \sigma_{23}^+$, $[\partial u_3 / \partial x_1]_{2h} = \partial u_3^- / \partial x_1 - \partial u_3^+ / \partial x_1$, $(\partial u_3 / \partial x_1)_{2h} = \partial u_3^- / \partial x_1 + \partial u_3^+ / \partial x_1$. Тут і надалі індекси плюс і мінус відповідно позначають граничні значення величин матриці на верхньому та нижньому краях серединної лінії включення.

Використання рівностей (15,a), (15,e) і формул Сохоцького-Племелі [13] дає змогу знайти вирази для стрибків і сум граничних значень напруження σ_{23} і похідної від зміщення u_3 по x_1

$$\begin{aligned} [\sigma_{23}]_{2h} &= f_3(x_1), \quad (\sigma_{23})_{2h} = C_1 t_6(x_1) + C_2 f_3(x_1) + F_\sigma, \\ \left[\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right]_{2h} &= f_6(x_1), \quad \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)_{2h} = C_3 f_6(x_1) + C_4 t_3(x_1) + F_u, \end{aligned} \quad (18)$$

де

$$\begin{aligned} C_1 &= 2 \left(\frac{e_{15}^{(1)} e_{15}^{(2)}}{\varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{11}^{(2)}} - \frac{A^{(1)} A^{(2)}}{B} \right), \\ C_2 &= - \frac{\left((e_{15}^{(1)})^2 - (e_{15}^{(2)})^2 \right) + (c_{44}^{(1)} - c_{44}^{(2)}) (\varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{11}^{(2)})}{\varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{11}^{(2)}}, \\ C_3 &= \frac{A^{(2)} - A^{(1)}}{B}, \quad C_4 = \frac{2}{B}, \\ F_\sigma &= 2\tau, \quad F_u = \frac{\tau_1^{(1)}}{c_{44}^{(1)}} + \frac{\tau_1^{(2)}}{c_{44}^{(2)}} + \left(\frac{e_{15}^{(1)}}{c_{44}^{(1)}} + \frac{e_{15}^{(2)}}{c_{44}^{(2)}} \right) E_1^\infty. \end{aligned} \quad (19)$$

Підставивши (18) в (17), отримуємо два сингулярних інтегральних рівняння стосовно функцій $f_3(x_1)$ і $f_6(x_1)$:

$$\begin{aligned} c_{44}^e (C_3 f_6(x_1) + C_4 t_3(x_1) + F_u) - \frac{1}{h} \int_{-a}^{x_1} f_3(\xi) d\xi &= \sigma_{13}^e(-a), \\ C_1 t_6(x_1) + C_2 f_3(x_1) + F_\sigma + \frac{c_{44}^e}{h} \int_{-a}^{x_1} f_6(\xi) d\xi &= w_-^* \frac{c_{44}^e}{h} \quad (x_1 \in [-a; a]). \end{aligned} \quad (20)$$

У випадку включення в однорідному п'єзоелектричному просторі ($c_{44}^{(1)} = c_{44}^{(2)} = c_{44}$, $e_{15}^{(1)} = e_{15}^{(2)} = e_{15}$, $\varepsilon_{11}^{(1)} = \varepsilon_{11}^{(2)} = \varepsilon_{11}$, $\tau_1^{(1)} = \tau_1^{(2)} = \tau_1$, $E_2^{(1)\infty} = E_2^{(2)\infty} = E_2^\infty$), на підставі (14)–(16) і (19) отримаємо

$$A^{(1)} = A^{(2)} = A = c_{44}(1 + k^2), B = 2A, \quad (21)$$

$$u_3 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int \left(it_6(z) + \frac{1}{c_{44}(1 + k^2)} t_3(z) \right) dz + \operatorname{Re} u_3^0, \quad (22,a)$$

$$\varphi = \frac{e_{15}}{2\varepsilon_{11}c_{44}(1 + k^2)} \operatorname{Re} \int t_3(z) dz + \operatorname{Re} \varphi^0, \quad (22,b)$$

$$\sigma_{13} - i\sigma_{23} = \frac{1}{2} (t_3(z) + ic_{44}t_6(z)) + \sigma_{13}^0 - i\sigma_{23}^0, \quad (22,c)$$

$$D_1 - iD_2 = \frac{ie_{15}}{2} t_6(z) + D_1^0 - iD_2^0, \quad (22,d)$$

$$E_1 - iE_2 = -\frac{e_{15}}{2\varepsilon_{11}c_{44}(1 + k^2)} t_3(z) + E_1^0 - iE_2^0, \quad (22,e)$$

$$C_1 = -c_{44}, C_2 = C_3 = 0, C_4 = \frac{1}{c_{44}(1 + k^2)},$$

$$F_\sigma = 2\tau, F_u = 2 \left(\frac{\tau_1 + e_{15}E_1^\infty}{c_{44}} \right), \quad (23)$$

$$u_3^0 = \frac{\tau_1 + e_{15}E_1^\infty}{c_{44}} z - \frac{\tau + e_{15}E_2^\infty}{c_{44}} iz, \varphi^0 = (iE_2^\infty - E_1^\infty)z, \sigma_{13}^0 - i\sigma_{23}^0 = \tau_1 - i\tau,$$

$$D_1^0 - iD_2^0 = \frac{e_{15}}{c_{44}} (\tau_1 - i\tau) + \varepsilon_{11}(1 + k^2)(E_1^\infty - iE_2^\infty), E_1^0 - iE_2^0 = E_1^\infty - iE_2^\infty, \quad (24)$$

де $k = \frac{e_{15}}{\sqrt{\varepsilon_{11}c_{44}}}$ – коефіцієнт електромеханічного зв'язку.

Тепер система (20) з урахуванням (23) поділяється на два незалежних рівняння

$$\begin{aligned} \frac{c_{44}^e}{c_{44}(1 + k^2)} t_3(x_1) - \frac{1}{h} \int_{-a}^{x_1} f_3(\xi) d\xi &= \sigma_{13}^e(-a) - c_{44}^e F_u, \\ -c_{44} t_6(x_1) + \frac{c_{44}^e}{h} \int_{-a}^{x_1} f_6(\xi) d\xi &= w_-^* \frac{c_{44}^e}{h} - F_\sigma \quad (x_1 \in [-a; a]), \end{aligned} \quad (25)$$

де $\sigma_{13}^e(-a) = 2c_{44}^e \tau_1 / \max(c_{44}^e, c_{44})$, $w_-^* = 2\tau h / \max(c_{44}^e, c_{44})$.

Варто зазначити, що друге рівняння системи (25) не залежить від п'єзоелектричних властивостей матеріалу матриці і збігається з відповідним рівнянням суто пружної задачі [9].

Додаткові умови для розв'язування рівнянь (25) можна отримати з умови однозначності зміщень під час обходу навколо контуру включення та з умови глобальної рівноваги включення [9], які в цьому випадку набувають вигляду

$$\int_{-a}^a f_3(t) dt = 0, \int_{-a}^a f_6(t) dt = 0. \quad (26)$$

Система рівнянь (25) у загальному випадку може бути розв'язана з використанням методу колокацій [9], згідно з яким шукані функції подають у вигляді

$$f_j(t) = \frac{\sum_{n=0}^N A_{jn} T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}, \quad t = \frac{x_1}{a} \quad (x_1 \in [-a; a]; j = 3, 6), \quad (27)$$

де $T_n(t) \equiv \cos(n \arccos(t))$ – многочлени Чебишова першого роду; A_{jn} – невідомі коефіцієнти розвинення.

Перейдемо до полярної системи координат з початком біля правого або лівого кінця включення $z = \pm(z_1 + a)$, $z_1 = re^{i\theta}$. Тут і надалі верхній знак беремо, якщо досліджуємо розподіл польових величин біля правого кінця включення, а нижній – біля лівого. Згідно з [12] для інтегралів типу Коші $t_j(z)$ ($j = 3, 6$) існують асимптотичні вирази

$$t_j(z) = \mp \left(\frac{p_j^\pm}{\sqrt{z_1}} - q_j^\pm + O(\sqrt{r}) \right), \quad p_j^\pm = \lim_{s_m \rightarrow 0} (\sqrt{s_m} f_j(t)),$$

$$q_j^\pm = \pm \lim_{s_m \rightarrow 0 (t \in L')} t_j(t) \quad (j = 3, 6), \quad (28)$$

де $\sqrt{s_m}$ – дугова відстань від точки x на осі L' включення до його кінця, тобто в разі прямування до лівого краю $s_m = x + a$, а у разі прямування до правого краю – $s_m = a - x$.

Тоді з врахуванням формул (28) із рівностей (22, a–d) отримаємо асимптотичні формули розподілу польових величин в околі країв включення

$$u_3 - u_3^0 = \pm \frac{\sqrt{2r}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{K_{3,1}^\pm}{c_{44}} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{K_{3,2}^\pm}{c_{44}(1+k^2)} \cos \frac{\theta}{2} \right) \pm$$

$$\pm \frac{1}{2} \left(\frac{q_3^\pm}{c_{44}(1+k^2)} (a + r \cos \theta) - q_6^\pm r \sin \theta \right) + O(r^{3/2}),$$

$$\varphi - \varphi^0 = \mp \frac{\sqrt{2r} K_E^\pm}{\sqrt{\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \pm \frac{e_{15}(a + r \cos \theta)}{2\varepsilon_{11}c_{44}(1+k^2)} q_3^\pm + O(r^{3/2}),$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{13} - \sigma_{13}^0 \\ \sigma_{23} - \sigma_{23}^0 \end{Bmatrix} = \frac{K_{3,1}^\pm}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{Bmatrix} + \frac{K_{3,2}^\pm}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{Bmatrix} \pm \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} q_3^\pm \\ -c_{44}q_6^\pm \end{Bmatrix} + O(\sqrt{r}),$$

$$\begin{Bmatrix} D_1 - D_1^0 \\ D_2 - D_2^0 \end{Bmatrix} = \frac{K_D^\pm}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{Bmatrix} \pm \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ -e_{15}q_6^\pm \end{Bmatrix} + O(\sqrt{r}),$$

$$\begin{Bmatrix} E_1 - E_1^0 \\ E_2 - E_2^0 \end{Bmatrix} = \frac{K_E^\pm}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{Bmatrix} \pm \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} -\frac{e_{15}}{c_{44}\varepsilon_{11}(1+k^2)} q_3^\pm \\ 0 \end{Bmatrix} + O(\sqrt{r}). \quad (29)$$

Тут $K_{3,1}^\pm$, $K_{3,2}^\pm$ – узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень; $K_D^\pm$ і $K_E^\pm$ – узагальнені коефіцієнти інтенсивності електричної індукції та напруженості. Відповідно до (28) вони залежать від функцій стрибка так:

$$K_{3,2}^\pm - iK_{3,1}^\pm = \mp \sqrt{\frac{\pi}{2}} (p_3^\pm + ic_{44}p_6^\pm), \quad K_D^\pm = \pm \sqrt{\frac{\pi}{2}} e_{15}p_6^\pm, \\ K_E^\pm = \pm \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e_{15}p_3^\pm}{c_{44}\varepsilon_{11}(1+k^2)}. \quad (30)$$

Підставивши вирази (27) у рівності (30), отримуємо такі залежності узагальнених коефіцієнтів інтенсивності від коефіцієнтів розвинення A_{jn} ($j = 3, 6; n = \overline{0, N}$):

$$K_{3,2}^\pm - iK_{3,1}^\pm = \mp \frac{\sqrt{\pi a}}{2} \sum_{n=0}^N (\pm 1)^n (A_{3n} + ic_{44}A_{6n}), \\ K_D^\pm = \pm \frac{e_{15}\sqrt{\pi a}}{2} \sum_{n=0}^N (\pm 1)^n A_{6n}, \quad K_E^\pm = \pm \frac{e_{15}\sqrt{\pi a}}{2\varepsilon_{11}c_{44}(1+k^2)} \sum_{n=0}^N (\pm 1)^n A_{3n}. \quad (31)$$

Згідно з (25) значення сталих A_{3n} ($n = \overline{0, N}$) не залежать від зовнішнього навантаження σ_{23}^0 і зовнішнього електричного поля E_2^0 , а значення сталих A_{6n} ($n = \overline{0, N}$) не залежать від зовнішнього навантаження σ_{13}^0 , від зовнішнього електричного поля E_1^0 і E_2^0 , від п'єзоелектричної сталої і від діелектричної проникності простору.

Отже, згідно з (25) і (31) числові значення коефіцієнта $K_{3,1}^\pm$ збігаються з відповідними числовими значеннями для випадку пружного включення у суто пружному середовищі [9].

При $c_{44}^e = 0$ або $c_{44}^e = \infty$ і $h \rightarrow 0$ із (25) отримують результати для абсолютно електропровідної тріщини й абсолютно жорсткого, абсолютно електропровідного включення на лінії поділу матеріалів відповідно

$$f_3(x_1) = 0, \quad t_6(x_1) = \frac{2\sigma_{23}^0}{c_{44}} \quad (\text{необхідно, щоб } \sigma_{13}^e(-a) = 0); \quad (32)$$

$$f_6(x_1) = 0, \quad t_3(x_1) = -2(\sigma_{13}^0 + e_{15}E_1^0)(1+k^2) \quad (\text{необхідно, щоб } w_-^* = 0). \quad (33)$$

Розв'язок інтегральних рівнянь (32), (33) згідно з [12] має вигляд:
для абсолютно електропровідної тріщини

$$f_6(x_1) = \frac{2\sigma_{23}^0 x_1}{c_{44}\sqrt{a^2 - x_1^2}}, \quad f_3(x_1) = 0; \quad (34)$$

для абсолютно жорсткого й електропровідного включення

$$f_3(x_1) = \frac{-2(\sigma_{13}^0 + e_{15}E_1^0)(1 + k^2)x_1}{\sqrt{a^2 - x_1^2}}, \quad f_6(x_1) = 0. \quad (35)$$

Тоді з (22,а-д) і (30), з використанням (28), (34), (35), отримуємо:
для абсолютно електропровідної тріщини –

$$\begin{aligned} u_3 &= \operatorname{Re} \left(\frac{-i\sigma_{23}^0 \sqrt{z^2 - a^2}}{c_{44}} + \frac{\sigma_{13}^0 z}{c_{44}} + (E_1^0 - iE_2^0) \frac{ze_{15}}{c_{44}} \right), \\ \varphi &= \operatorname{Re} \varphi^0, \quad \sigma_{13} - i\sigma_{23} = \frac{-i\sigma_{23}^0 z}{\sqrt{z^2 - a^2}} + \sigma_{13}^0, \\ D_1 - iD_2 &= \frac{ie_{15}\sigma_{23}^0}{c_{44}} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right) + D_1^0 - iD_2^0, \quad E_1 - iE_2 = E_1^0 - iE_2^0, \\ K_{3,1}^\pm &= K_{3,1}^{\pm T} \equiv \pm \sigma_{23}^0 \sqrt{\pi a}, \quad K_D^\pm = K_D^{\pm T} \equiv \pm \frac{e_{15}\sigma_{23}^0 \sqrt{\pi a}}{c_{44}}, \quad K_{3,2}^\pm = 0, \quad K_E^\pm = 0; \quad (36) \end{aligned}$$

для абсолютно жорсткого й електропровідного включення –

$$\begin{aligned} u_3 &= \operatorname{Re} \left(\frac{(\sigma_{13}^0 + e_{15}E_1^0)\sqrt{z^2 - a^2}}{c_{44}} - \frac{\sigma_{23}^0 + e_{15}E_2^0}{c_{44}} iz \right), \\ \varphi &= \operatorname{Re} \left(\frac{e_{15}(\sigma_{13}^0 + e_{15}E_1^0)(\sqrt{z^2 - a^2} - z)}{\varepsilon_{11}c_{44}} + \varphi^0 \right), \\ \sigma_{13} - i\sigma_{23} &= \frac{(\sigma_{13}^0 + e_{15}E_1^0)(1 + k^2)z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - (\sigma_{13}^0 + e_{15}E_1^0)k^2 - e_{15}E_1^0 - i\sigma_{23}^0, \\ D_1 - iD_2 &= D_1^0 - iD_2^0, \quad E_1 - iE_2 = \frac{e_{15}(\sigma_{13}^0 + e_{15}E_1^0)}{c_{44}\varepsilon_{11}} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right) + E_1^0 - iE_2^0, \\ K_{3,1}^\pm &= 0, \quad K_D^\pm = 0, \quad K_{3,2}^\pm = K_{3,2}^{\pm AJ} \equiv \pm (\sigma_{13}^0 + e_{15}E_1^0)(1 + k^2)\sqrt{\pi a}, \\ K_E^\pm &= K_E^{\pm AJ} \equiv \mp \frac{e_{15}(\sigma_{13}^0 + e_{15}E_1^0)\sqrt{\pi a}}{\varepsilon_{11}c_{44}}. \quad (37) \end{aligned}$$

Треба зазначити, що розподіл електромеханічних полів (29) у п'єзоелектричному просторі з абсолютно електропровідною тріщиною збігається з відповідними результатами праць [4–6].

Зазначимо також, що у випадку пружного стрічкового включення у суто пружному однорідному просторі ($e_{15} = 0$), система рівнянь (25), а також вирази (29)–(31), (36)–(37) для зміщень, механічних напружень і узагальнених коефіцієнтів інтенсивності

$K_{3,1}^{\pm}$, $K_{3,2}^{\pm}$ збігаються з відповідними результатами, отриманими в [10]. Узагальнені коефіцієнти інтенсивності електричної напруженості та індукції, як і можна було очікувати, в цьому випадку дорівнюють нулю.

Для випадку пружного абсолютно електропровідного включення у п'єзoeлектрику введемо нормовані коефіцієнти інтенсивності

$$K_{3,1}^{\pm 0} = \frac{K_{3,1}^{\pm}}{K_{3,1}^{\pm T}}, K_D^{\pm 0} = \frac{K_D^{\pm}}{K_D^{\pm T}}, K_{3,2}^{\pm 0} = \frac{K_{3,2}^{\pm}}{K_{3,2}^{\pm AJ}}, K_E^{\pm 0} = \frac{K_E^{\pm}}{K_E^{\pm AJ}}, \quad (38)$$

де $K_{3,1}^{\pm T}$, $K_D^{\pm T}$ – значення коефіцієнтів $K_{3,1}^{\pm}$ і $K_D^{\pm}$ у випадку абсолютно електропровідної тріщини, а $K_{3,2}^{\pm AJ}$, $K_E^{\pm AJ}$ – значення коефіцієнтів $K_{3,2}^{\pm}$ і $K_E^{\pm}$ у випадку абсолютно жорсткого й електропровідного включення. Тоді з рівностей (31), (36)–(38) отримаємо

$$K_{3,1}^{\pm 0} = K_D^{\pm 0} = \pm \frac{c_{44}}{2\sigma_{23}^0} \sum_{n=0}^N (\pm 1)^n A_{6n},$$

$$K_{3,2}^{\pm 0} = K_E^{\pm 0} = \mp \frac{1}{2(1+k^2)(\sigma_{13}^0 + e_{15}E_1^0)} \sum_{n=0}^N (\pm 1)^n A_{3n}. \quad (39)$$

4. Аналіз результатів. Числові обчислення зроблені для включення з використанням методу колокацій [9] при $a/h_0 = 10$ для різних значень відносної жорсткості включення $k = c_{44}^e/c_{44}$ і параметра форми q включення формально змінної товщини $h(x_1) = h_0(1 - (x_1/a)^2)^{1/(2q)}$ ($q = 1$ – еліптичне включення, $q = 1000$ – практично прямокутне включення). За матеріал простору обрано п'єзокераміку [8] PZT-4 ($c_{44} = 2.56 \cdot 10^{10}$ Н/м², $e_{15} = 12.7$ Кл/м², $\varepsilon_{11} = 64.6 \cdot 10^{-10}$ Кл/(Вм)).

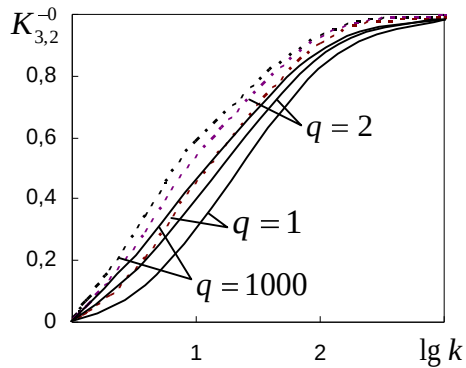


Рис. 1

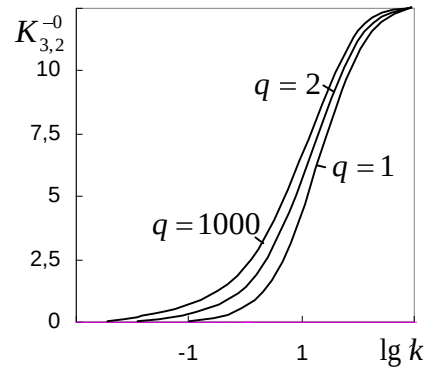


Рис. 2

На рис. 1 зображено залежності нормованого коефіцієнта інтенсивності $K_{3,2}^{-0}$ від параметрів k та q при суто силовому навантаженні ($\sigma_{13}^0 \neq 0$, $\sigma_{23}^0 = E_1^0 = 0$). Суцільні лінії відповідають випадку пружного включення у п'єзоелектричному просторі ($K_{3,2}^{\pm 0} = K_E^{\pm 0}$, $K_{3,1}^{\pm} = K_D^{\pm} = 0$), а штрихові – у суто пружному просторі ($K_E^{\pm} = K_{3,1}^{\pm} = K_D^{\pm} = 0$). В обох випадках цей коефіцієнт практично дорівнює нулю при $k \leq 1$. Для будь-якої форми включення зазначений коефіцієнт інтенсивності у п'єзоелектричному просторі менший, ніж відповідний коефіцієнт у пружному просторі.

На рис. 2 показано залежності однакових між собою коефіцієнтів $K_{3,2}^{-0}$, K_E^{-0} ($K_{3,1}^{\pm} = K_D^{\pm} = 0$) від k та q при суто електричному навантаженні ($E_1^{\infty} \neq 0$, $\sigma_{13}^0 = \sigma_{23}^0 = 0$) для випадку п'єзоелектричного середовища з пружним включенням. Ці коефіцієнти прямують до нуля при $k \rightarrow 0$. Для випадку пружного середовища з пружним включенням при суто електричному навантаженні всі узагальнені коефіцієнти інтенсивності дорівнюють нулю.

У табл. наведено деякі значення (у процентах) модуля відносної різниці $\Delta = K_{3,2}^{-0}|_{q=1000} - K_{3,2}^{-0}|_{q=1} / K_{3,2}^{-0}|_{q=1000}$ між значеннями коефіцієнта $K_{3,2}^{-0}$ у випадку п'єзоелектричного простору з практично прямокутним включенням і з еліптичним включенням. Оскільки $K_{3,2}^{\pm 0} = K_E^{\pm 0}$, то значення відносної різниці є однаковими для коефіцієнтів $K_{3,2}^{-0}$ і K_E^{-0} . При суто механічному навантаженні та при суто електричному навантаженні модуль відносної різниці Δ зменшується при зростанні k від 96% при $k = 0.001$ до 1% при $k = 1000$.

Таблиця

k	$ \Delta $ ($\sigma_{13}^0 \neq 0$, $E_1^\infty = \sigma_{23}^0 = 0$)	$ \Delta $ ($E_1^\infty \neq 0$, $\sigma_{13}^0 = \sigma_{23}^0 = 0$)
0,001	95,85960961	95,85964053
0,01	95,16724715	95,16693891
0,1	90,44900194	90,4489518
0,7109024	76,67666065	76,67738232
0,8688884	74,42244657	74,4228174
1,1500004	70,9532294	70,95406045
3,929615	51,48495429	51,48645155
10	34,20938125	34,20721379
100	6,362637487	6,362672322
1000	0,707465894	0,709615691

5. Висновки.

1. Для абсолютно електропровідної тріщини:

а) коефіцієнт інтенсивності напружень $K_{3,1}^{\pm T}$ залежить від механічного навантаження σ_{23}^0 і збігається з відповідним коефіцієнтом, отриманим у [10] для випадку тріщини у пружному просторі;

б) коефіцієнт інтенсивності електричної індукції $K_D^{\pm T}$ залежить від механічного навантаження σ_{23}^0 , від п'єзоелектричної сталої і від модуля пружності матеріалу простору;

в) коефіцієнти інтенсивності напружень $K_{3,2}^{\pm}$ і електричної напруженості $K_E^{\pm}$ дорівнюють нулю.

2. Для абсолютно жорсткого й електропровідного включення:

а) коефіцієнт інтенсивності напружень $K_{3,2}^{\pm AJ}$ і коефіцієнт інтенсивності електричної напруженості $K_E^{\pm AJ}$ не залежать від механічного навантаження σ_{23}^0 і від зовнішнього електричного поля E_2^0 ;

б) коефіцієнти інтенсивності напружень $K_{3,1}^{\pm}$ і електричної індукції $K_D^{\pm}$ дорівнюють нулю.

3. Для пружного абсолютно електропровідного включення:

а) числові значення коефіцієнта $K_{3,1}^{\pm}$ збігаються з відповідними значеннями для випадку пружного включення у суто пружному середовищі [9] і не залежать від зовнішнього навантаження σ_{13}^0 , від зовнішнього електричного поля E_1^0 , E_2^0 , від п'єзоелектричної сталої і діелектричної проникності простору;

б) значення коефіцієнта $K_D^{\pm}$ не залежать від зовнішнього навантаження σ_{13}^0 , від зовнішнього електричного поля E_1^0 , E_2^0 і діелектричної проникності простору;

в) значення коефіцієнтів $K_{3,2}^{\pm}$ і $K_E^{\pm}$ не залежать від механічного навантаження σ_{23}^0 і зовнішнього електричного поля E_2^0 ;

г) модуль відносної різниці Δ між значеннями коефіцієнта $K_{3,2}^{-0}$ (коефіцієнта K_E^{-0}) у випадку практично прямокутного включення і у випадку еліптичного включення зменшується при зростанні k від 96% при $k = 0.001$ до 0.7% при $k = 1000$.

-
1. *Фильштинский Л.А.* Моделирование физических полей в кусочно-однородных деформируемых телах. Сумы, 2001.
 2. *Li X.-F., Lee K.Y.* Effects of electric field on crack growth for a penny-shaped dielectric crack in a piezoelectric layer // J. Mech. Phys. Solids. 2004. Vol. 52. № 9. P. 2079–2100.
 3. *Li R., Kardomateas G. A.* The Mode III Interface Crack in Piezo-Electro-Magneto-Elastic Dissimilar Bimaterials // J. Appl. Mech. 2006. Vol. 73. № 2. P. 220–227.
 4. *Kwon S.M., Lee K.Y.* Analysis of stress and electric fields in a rectangular piezoelectric body with a center crack under anti-plane shear loading // Int. J. Solids Structures. 2000. Vol. 37. № 35. P. 4859–4869.
 5. *Li S.* On global energy release rate of a permeable crack in a piezoelectric ceramic // J. Appl. Mech. 2003. Vol. 70. № 2. P. 246–252.
 6. *Zhang T.-Y., Tong P.* Fracture mechanics for mode III crack in a piezoelectric material // Int. J. Solids Structures. 1996. Vol. 33. № 3. P. 343–359.
 7. *Hou P.-F., Leung A.Y.T.* A spheroidal inclusion in an infinite magneto-electro-elastic material // Int. J. Eng. Sci. 2004. Vol. 42. № 11–12. P. 1255–1273.
 8. *Wang X., Zhong Z. A.* conducting arc crack between a circular piezoelectric inclusion and an unbounded matrix // Int. J. Solids Structures. 2002. Vol. 39. № 24. P. 5895–5911.
 9. *Божидарник В.В.* Двовимірні задачі теорії пружності й термопружності структурно-неоднорідних тіл. Львів, 1998.
 10. *Сулим Г. Т.* Антиплоская задача для системы линейных включений в изотропной среде // Прикладная математика и механика. 1981. Т. 45. Вып. 2. С. 309–318.
 11. *Новацкий В.* Электромагнитные эффекты в твердых телах. М., 1986.
 12. *Божидарник В.В., Сулим Г.Т.* Элементы теории пластичности та міцності. Львів, 1999.
 13. *Божидарник В.В., Сулим Г.Т.* Элементы теории пружности. Львів, 1994.

ANTI-PLANE PROBLEM FOR A THIN ELASTIC INCLUSION IN A PIEZOELECTRIC MEDIUM

Georgiy Sulym¹, Roman Rabosh²

*¹Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine*

*²Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, NASU
Naukova Str., 3-b 79060 Lviv, Ukraine*

The static anti-plane problem for a thin elastic inclusion in a piezoelectric medium is considered. As a solution procedure the method of discontinuities functions was used. This method is based on modelling the inclusion by discontinuities of displacement and stress vectors. The problem was reduced to the system of two singular integral equations, which was solved using collocation method.

Expressions for generalized stress intensity factors, electric field intensity factor and electric displacement intensity factor are obtained in the cases of elastic inclusion, crack and absolutely rigid inclusion. Numerical results illustrate the influence of the shape of elastic inclusion and piezoelectric properties of the medium on intensity factors.

Key words: piezoelectric space, elastic inclusion, stress-strain state, stress intensity factors, electric displacement intensity factor, electric field intensity factor.

Стаття надійшла до редколегії 17.05.2007

Прийнята до друку 19.11.2008

УДК 539.3

ЧИСЛОВЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ДЕФОРМАЦІЙНОЇ ТЕОРІЇ ПЛАСТИЧНОСТІ ПРО ДЕФОРМУВАННЯ МЕТАЛЕВОГО КУТНИКА

Ігор КУЗЬ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Варіаційно-різницький метод побудови різницьких схем розповсюджено на незв'язні області з криволінійною межею. За допомогою цього методу розв'язана плоска задача деформаційної теорії пластичності, яка моделює деформування металевго кутника.

Ключові слова: варіаційно-різницький метод, незв'язна область з криволінійною межею, деформаційна теорія пластичності, напружений стан, металевий кутник.

Дослідження напружено-деформованого стану з'єднувальних елементів конструкцій під дією нерівномірного навантаження є необхідним етапом розрахунку їхньої міцності та надійності. Оскільки такі елементи конструкцій часто мають криволінійну межу [1] і займають незв'язну область, то застосування аналітичних методів розв'язування відповідних крайових задач дуже обмежене.

Мета нашої праці – за допомогою числового методу розв'язати плоску задачу деформаційної теорії пластичності про деформування металевго кутника.

1. Формулювання задачі. Розглядається плоска задача деформаційної теорії пластичності (теорії малих пружно-пластичних деформацій Іллюшина) за активного навантаження в незв'язній області V з криволінійною межею Σ (рис.1), яка моделює напружено-деформований стан у металевому кутнику. З математичного погляду вона полягає у розв'язуванні рівнянь рівноваги у кутнику

$$(C_{ijkl}u_{k,l})_{,j} + X_i = 0 \quad (1)$$

при використанні мішаних крайових умов на його поверхні $\Sigma (\Sigma_u \cup \Sigma_\sigma = \Sigma)$

$$u_i \Big|_{\Sigma_u} = u_i^0, \quad C_{ijkl}u_{k,l}n_j \Big|_{\Sigma_\sigma} = S_i^0. \quad (2)$$

Тут C_{ijkl} - компоненти тензора модулів пружності; u_i, X_i, S_i^0, n_j - компоненти векторів переміщень, об'ємних і поверхневих сил, а також зовнішньої нормалі до поверхні Σ_σ відповідно; $u_{i,j} \equiv \partial u_i / \partial x_j$. За однаковими індексами, які трапляються в одному виразі двічі, відбувається підсумовування від одиниці до двох.

У випадку плоскої деформації

$$u_1 = u_x(x, y), \quad u_2 = u_y(x, y), \quad u_3 = u_z \equiv 0. \quad (3)$$

Щоб отримати задачу деформаційної теорії пластичності для початково ізотропного матеріалу, треба в (1), (2) прийняти

$$C_{ijkl}(\varepsilon_u) = \lambda(\varepsilon_u)\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\varepsilon_u)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}),$$

$$\mu(\varepsilon_u) = \mu(1 - \omega(\varepsilon_u)), \quad \lambda(\varepsilon_u) = K - \frac{2}{3}\mu(\varepsilon_u), \quad (4)$$

де ε_u – інтенсивність тензора деформацій $\left(\varepsilon_u = \sqrt{e_{ij}e_{ij}}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}\right)$,

K – модуль об'ємного стиску, $\omega(\varepsilon_u)$ – функція пластичності Іллюшина [2].

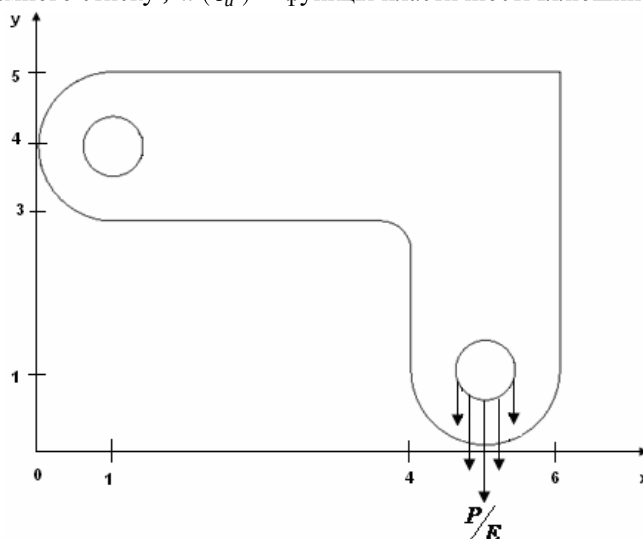


Рис. 1. Геометрія кутника з прикладеним до нього навантаженням

Для матеріалу з лінійним зміцненням $\omega(\varepsilon_u)$ має вигляд

$$\omega(\varepsilon_u) = \begin{cases} (1 - \gamma) \frac{\varepsilon_u - \varepsilon_s}{\varepsilon_u} & \text{при } \varepsilon_u > \varepsilon_s \\ 0 & \text{при } \varepsilon_u \leq \varepsilon_s, \end{cases} \quad (5)$$

де ε_s – межа текучості; $\gamma = \mu'/\mu$ (μ' – модуль зміцнення).

2. Метод розв'язування задачі. Для числового розв'язування задачі (1) - (5) зручно використовувати її варіаційне формулювання [3], яке полягає у мінімізації лагранжіана

$$L = \int_V W dV - \int_V X_i u_i dV - \int_{\Sigma_\sigma} S_i^0 u_i d\Sigma, \quad (6)$$

де $W = \frac{1}{2}C_{ijkl}(\varepsilon_u)u_{i,j}u_{k,l}$ - питома енергія пружно-пластичної деформації.

Запишемо лагранжіан (6) у канонічній області V_0 , якою може бути прямокутник або область, складена з них. Для цього використаємо дискретне взаємно-однозначне відображення сітки в криволінійній області V на рівномірну прямокутну сітку області V_0 (рис.2)

$$x_i = x_i(\beta^1, \beta^2) \quad (i = 1, 2). \quad (7)$$

Тоді $J = \det(A_i^j)$, $g_{ij} = A_i^m A_j^m$, де $A_i^j = \partial x_i / \partial \beta^j$ - матриця Якобі цього відображення. За допомогою (7) запишемо питому енергію деформації W у координатах $\vec{\beta}$

$$W = \frac{1}{2}C^{ijkl}u_{i,j}u_{k,l} = \frac{1}{2}C^{ijkl}(\vec{\beta})B_j^m B_l^n u_{i|m}u_{k|n} = \frac{1}{2}D^{imkn}(\vec{\beta})u_{i|m}u_{k|n},$$

де $u_{i|m} \equiv \partial u_i / \partial \beta^m$, $B_j^m = \partial \beta^m / \partial x_j$, $D^{imkn} = C^{ijkl}B_j^m B_l^n$.

Об'ємні та поверхневі інтеграли перетворюються за формулами

$$\int_V \vec{X} \vec{u} dv = \int_{V_0} J \vec{X} \vec{u} dv, \quad \int_{\Sigma} \vec{S}^0 \vec{u} d\Sigma = \int_{\Sigma_0} q(\vec{\beta}) \vec{S}^0 \vec{u} d\Sigma, \quad (8)$$

де

$$q(\vec{\beta}) = \begin{cases} \sqrt{g_{11}}, & \beta^2 = \{0, l_2\}, \\ \sqrt{g_{22}}, & \beta^1 = \{0, l_1\}. \end{cases}$$

Отже, лагранжіан у прямокутнику V_0 набуде вигляду

$$L_0 = \frac{1}{2} \int_{V_0} J D^{imkn} u_{i|m} u_{k|n} dv - \int_{V_0} J \vec{X} \vec{u} dv - \int_{\Sigma_0} q(\vec{\beta}) \vec{S}^0 \vec{u} d\Sigma, \quad (9)$$

де $dv = d\beta^1 d\beta^2$.

Замінивши в (9) усі континуальні функції сітковими, інтеграли – скінченими сумами, похідні – різницеви похідними, отримаємо різницевий аналог лагранжіана L_0^h .

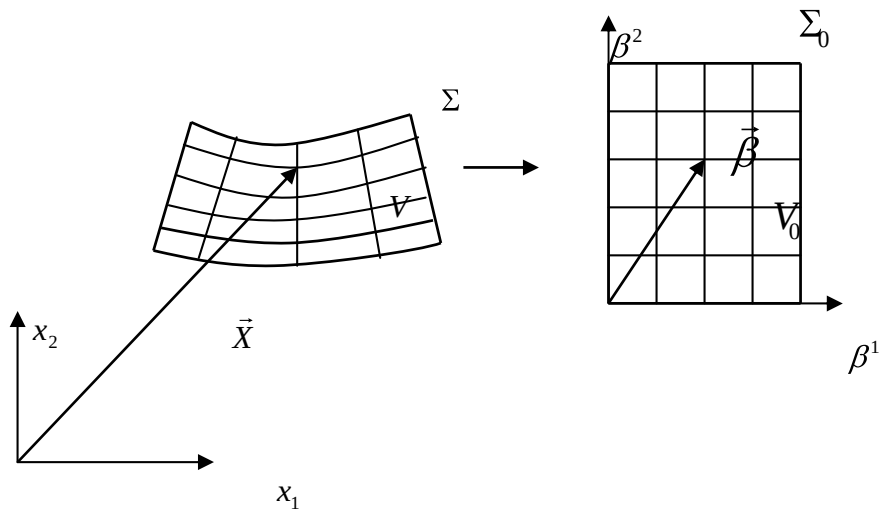


Рис. 2. Відображення сітки в криволінійній області V на рівномірну прямокутну сітку області V_0

Для визначення стаціонарної точки L_0^h у випадку деформаційної теорії пластичності отримаємо системи нелінійних алгебричних рівнянь

$$\vec{P}(\vec{u}) + \vec{F} = 0,$$

які розв'язуються ітераційними методами [4].

Описаний варіаційно-різницевий метод в областях з криволінійною межею реалізований у вигляді пакета програм на мові FORTRAN з підпрограмою побудови сіток на DELPHI.

3. Результати числових досліджень. На рис. 1 зображено геометрію кутника і прикладене до нього навантаження. Верхній отвір закріплений, а зовнішня поверхня кутника вільна від навантажень ($\sigma_{nn} = 0$, $\sigma_{n\tau} = 0$). До нижнього отвору кутника прикладене нерівномірне вертикальне навантаження вздовж нижнього півкола, яке є найбільшим ($P/E = 0,3$) у нижній точці ($x = 5$) цього кола і спадає до нуля на горизонтальному діаметрі.

Усі обчислення проводили у безрозмірних величинах. Модуль пружності $E = 1$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$, межа текучості $\sigma_s = 0,5$, параметр зміцнення $\gamma = 0,2$. Отримані діаграми розподілу напружень σ_{xx}/E , σ_{yy}/E та інтенсивності тензора напружень σ_u/E зображені відповідно на рис. 3-5.

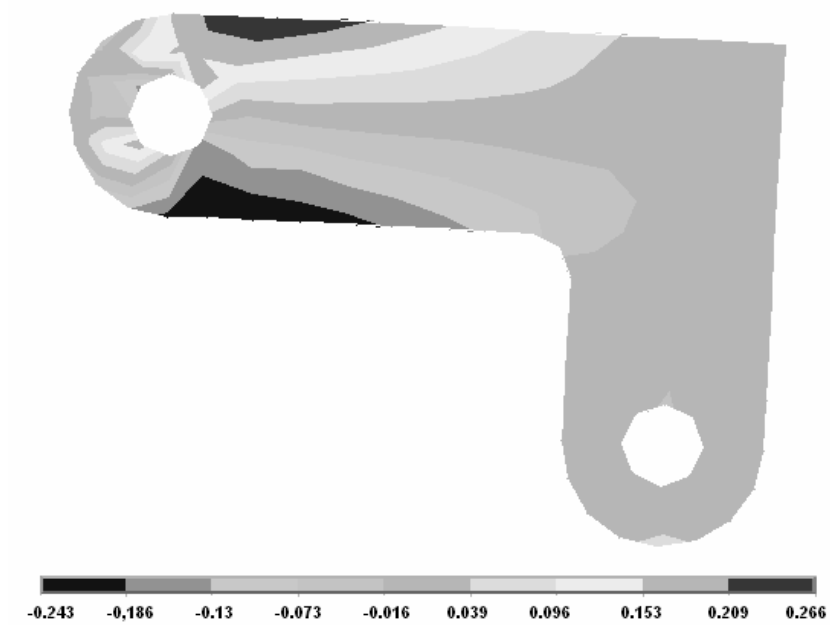
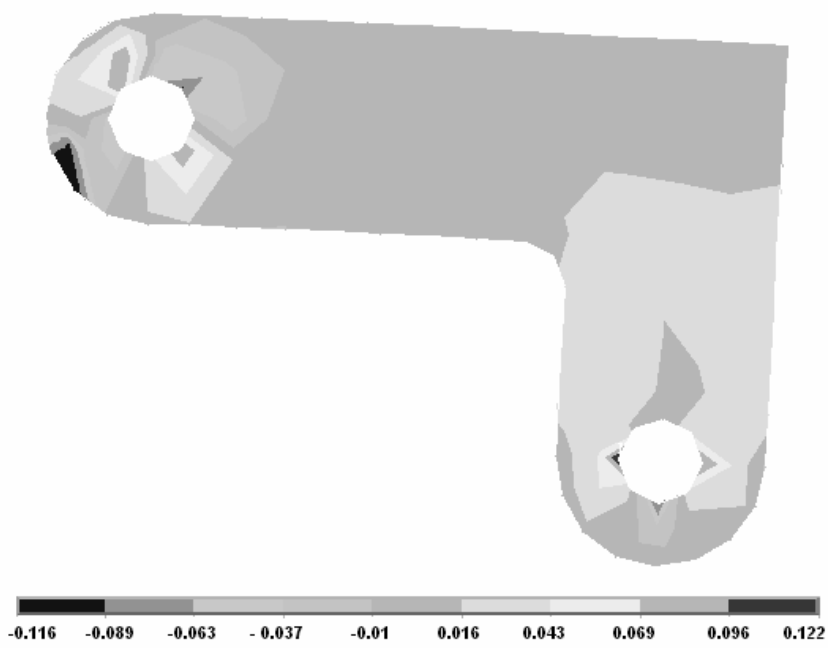


Рис. 3. Діаграма розподілу напружень σ_{xx}/E



4. Діаграма розподілу напружень σ_{yy}/E

Рис.

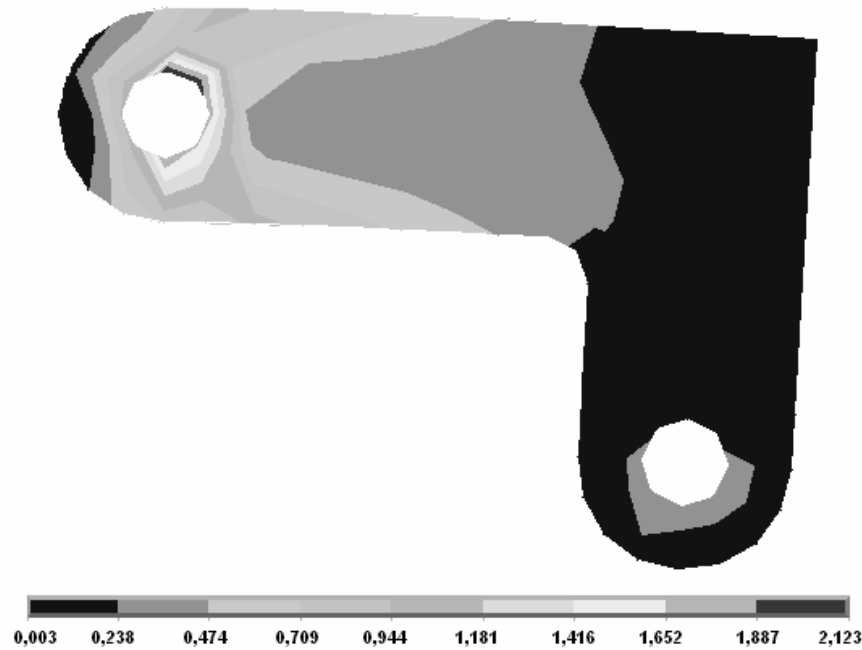


Рис. 5. Діаграма розподілу інтенсивності тензора напружень σ_u/E

На цих рисунках також показано, як буде деформуватися межа кутника.

Як видно з рис. 3, у верхній лівій частині кутника переважають розтягувальні горизонтальні напруження σ_{xx}/E , а у нижній лівій – стискувальні. Розтягувальні напруження σ_{yy}/E з'являються і в околі горизонтального діаметра нижнього отвору кутника (рис. 4).

У пластичному кутнику значення напружень менше, ніж у пружному, та їхній розподіл, особливо в околі лівого отвору, є дещо іншим. Зокрема, розтягувальні напруження σ_{xx}/E з'являються і в нижній частині лівого отвору (рис. 3), максимальні стискувальні напруження σ_{yy}/E з'являються як біля верхнього отвору та біля нижнього (рис. 4).

За допомогою діаграми розподілу інтенсивності тензора напружень σ_u/E (рис. 5) можна визначити області виникнення та розвитку пластичних деформацій. Згідно з умовами текучості Губера-Мізеса пластичне деформування починається тоді, коли інтенсивність тензора напружень σ_u досягає межі текучості σ_s ($\sigma_s=0,5$). Як видно з рис. 5, пластичні деформації зароджуються вздовж правого півкола лівого отвору і розповсюджуються спочатку до нижнього краю кутника вправо приблизно під кутом 45° , а потім так само вниз, від цього ж отвору під кутом 45° догори до верхнього краю кутника.

Отож, отримані поля напружень допомагають виявити області їхньої найбільшої концентрації та за відповідним критерієм руйнування оцінити міцність кутника.

1. Кузь І.С. Численная реализация вариационно-разностного метода для областей с криволинейной границей // Численный анализ, математическое моделирование и их применение в механике. – М., 1988. – С. 59–63.
2. Ильюшин А.А. Пластичность.- М.; Л., 1948.
3. Победра Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. – М., 1981.
4. Шешенин С. В., Кузь И. С. О прикладных итерационных методах // Вычислительная механика деформируемого твердого тела. – М., 1990. – Вып. 1. – С. 63–75.

NUMERICAL SOLUTION OF PLANE PLASTICITY PROBLEM ABOUT METAL ELBOW STRAIN

Ihor Kuz'

*Ivan Franco National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine*

Variational difference method of building finite difference schemes is extended to curvilinear unconnected domains. Using this method for solving plane plasticity problem stress state of metal elbow is investigated.

Key words: variational difference method, curvilinear unconnected domain, strain theory of plasticity, stress state, metal elbow.

Стаття надійшла до редколегії 31.05.2007

Прийнята до друку 19.11.2008

УДК 539.3

ДВОВІСНИЙ ЗГИН МОМЕНТАМИ НА НЕСКІНЧЕННОСТІ КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ ПЛАСТИНИ З ПРЯМОЛІНІЙНОЮ ТРІЩИНОЮ З УРАХУВАННЯМ КОНТАКТУ ЇЇ БЕРЕГІВ

Іван ЗВІЗЛО

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Досліджено згин кусково-однорідної ізотропної пластини з прямолінійною межею поділу матеріалів розподіленими згинними моментами на нескінченності, коли в одній із півплощин наявна тріщина, береги якої контактують по всій довжині під дією зовнішнього навантаження. Із застосуванням методів теорії функції комплексної змінної отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь, яку розв'язано чисельно за допомогою методу механічних квадратур. На підставі числового аналізу розв'язку задачі побудовано графічні залежності контактного тиску та коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів при різних значеннях відношення модулів Юнга матеріалів пластини.

Ключові слова: пластина, тріщина.

Формулювання задачі. Дослідимо задачу про згин кусково-однорідної ізотропної пластини завтовшки $2h$ з прямолінійною межею поділу матеріалів розподіленими згинними моментами на нескінченності, коли в одній із півплощин наявна тріщина, береги якої контактують по всій довжині під дією зовнішнього навантаження (див. рис. 1).

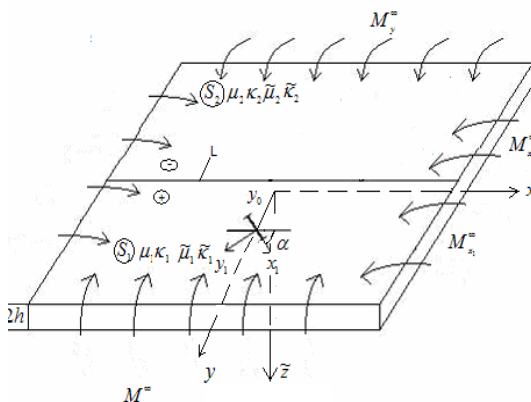


Рис. 1.

Виберемо глобальну декартову систему координат $Oxyz$ з координатною площиною Oxy у серединній площині пластини, спрямувавши вісь Ox вздовж лінії поділу матеріалів, яку позначимо через L . Півплощину, для якої $y > 0$ ($y < 0$), позначимо через S_1 (S_2). Величинам, які належать до S_j півплощини, будемо приписувати індекс j . З тріщиною завдовжки $2l$ зв'яжемо локальну систему координат $O_1x_1y_1$ з початком координат O_1 у центрі тріщини, направивши вісь O_1x_1 по тріщині. Відрізок дійсної осі O_1x_1 , для якого $|x_1| \leq l$, позначимо через L_1 . y_0 – ордината центру тріщини у глобальній системі координат, а $z_0 = iy_0$ – комплексна координата цього центру. Граничним значенням відповідних величин при $y_1 \rightarrow \pm 0$ будемо приписувати значки « $\pm$ ». Позначимо контактне зусилля між берегами тріщини через N , а розподілені

згинальні моменти на нескінченності – через $M_{x_1}^\infty, M_{x_2}^\infty, M_y^\infty$. Вважаємо, що до деформування пластини береги тріщини були вільними від зовнішнього навантаження.

Надалі використовуватимемо такі позначення: $\partial_x = \partial/\partial x$, μ_j – модуль зсуву; E_j – модуль Юнга; ν_j – коефіцієнт Пуассона; $\kappa_j = (3 - \nu_j)/(1 + \nu_j)$, $\tilde{\kappa}_j = (3 + \nu_j)/(1 - \nu_j)$, $\tilde{\mu}_j = [2D_j(1 - \nu_j)]^{-1}$, $D_j = 2E_j h^3 / (3(1 - \nu_j^2))$, σ_{yy} , σ_{xy} – компоненти тензора напружень; u_{II} , v_{II} – компоненти вектора переміщень у плоскій задачі; $P = N_y + \partial_x H_{xy}$ – узагальнена в сенсі Кірхгофа перерізувальна сила; M_y – згинальний момент; w – прогин пластини.

Контакт берегів тріщини розуміємо на підставі [3]. За рахунок контакту берегів тріщини задачу розбиваємо на дві задачі: плоску задачу теорії пружності та задачу згину пластини, користуємося класичною теорією згину пластини.

Згідно з формулюванням задачі на берегах тріщини маємо такі крайові умови:

$$\sigma_{yI_1}^\pm = -N / (2h), \quad \sigma_{xI_1}^\pm = 0, \quad x_1 \in L_1 \quad (1)$$

$$P = 0, \quad M_{y_1}^\pm = hN, \quad x_1 \in L_1, \quad (2)$$

$$[\partial_{x_1} v_{II}] + h [\partial_{x_1 I_1}^2 w] = 0, \quad x_1 \in L_1, \quad (3)$$

де індекс 1 свідчить про прив'язку до системи координат $O_1 x_1 y_1$; квадратні дужки у формулі (3) означають стрибок відповідної величини на берегах тріщини.

На межі поділу матеріалів виконуються умови ідеального механічного контакту

$$\sigma_{yy}^{(1)} - i\sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{yy}^{(2)} - i\sigma_{xy}^{(2)}, \quad u_{II}^{(1)} + iv_{II}^{(1)} = u_{II}^{(2)} + iv_{II}^{(2)}, \quad x \in L, \quad (4)$$

$$(\partial_x w + i\partial_y w)^+ = (\partial_x w + i\partial_y w)^-, \quad (M_y + iP)^+ = (M_y + iP)^-, \quad x \in L. \quad (5)$$

Треба знайти напружено-деформований стан пластини.

Побудова розв'язку задачі. При визначенні плоского напруженого стану введемо комплексні потенціали $\Phi_P^{(j)}(z)$ і $\Psi_P^{(j)}(z)$ та $\Phi_{P1}^{(j)}(z)$ і $\Psi_{P1}^{(j)}(z)$ відповідно у системах координат Oxy та $O_1 x_1 y_1$.

Запишемо формули переходу для комплексних потенціалів від системи координат Oxy до системи координат $O_1 x_1 y_1$

$$\begin{aligned} \Phi_{P1}^{(j)}(z_1) &= \Phi_P^{(j)}(z_1 e^{i\alpha} + z_0), \quad z = z_1 e^{i\alpha} + z_0, \\ \Psi_{P1}^{(j)}(z_1) &= e^{2i\alpha} \left(\Psi_P^{(j)}(z_1 e^{i\alpha} + z_0) + \overline{z_0} \Phi_P^{(j)}(z_1 e^{i\alpha} + z_0) \right) \end{aligned} \quad (6)$$

і навпаки

$$\begin{aligned} \Phi_P(z) &= \Phi_{P1}(z_1), \quad z_1 = e^{-i\alpha}(z - z_0), \\ \Psi_P(z) &= e^{-2i\alpha} [\Psi_{P1}(z_1) - \overline{z_0} \Phi_{P1}'(z_1)], \end{aligned} \quad (7)$$

$$\Psi_P(z) + \bar{z}\Phi_P'(z) = e^{-2i\alpha} [\Psi_{P1}(z_1) + \bar{z}_1\Phi_{P1}'(z_1)],$$

де α – кут між лінією тріщини і віссю абсцис глобальної системи координат.

Правильні залежності [6]

$$\begin{aligned}\sigma_{yy}^{(j)} - i\sigma_{xy}^{(j)} &= \Phi_P^{(j)}(z) + \overline{\Phi_P^{(j)}(z)} + z\overline{\Phi_P^{(j)}(z)} + \overline{\Psi_P^{(j)}(z)}, \\ 2\mu_j(u'_x + iv'_x) &= \kappa_j\Phi_P^{(j)}(z) - \overline{\Phi_P^{(j)}(z)} - z\overline{\Phi_P^{(j)}(z)} - \overline{\Psi_P^{(j)}(z)}.\end{aligned}\quad (8)$$

Комплексні потенціали подамо у вигляді

$$\begin{aligned}\Phi_P^{(1)}(z) &= \Phi_{\Pi}^{(1)}(z) + \Phi_T(z), \quad \Psi_P^{(1)}(z) = \Psi_{\Pi}^{(1)}(z) + \Psi_T(z), \\ \Phi_P^{(2)}(z) &= \Phi_{\Pi}^{(2)}(z), \quad \Psi_P^{(2)}(z) = \Psi_{\Pi}^{(2)}(z),\end{aligned}\quad (9)$$

де комплексні потенціали $\Phi_{\Pi}^{(j)}(z)$ і $\Psi_{\Pi}^{(j)}(z)$ пов'язані з прямолінійною межею, а $\Phi_T(z)$ і $\Psi_T(z)$ – з тріщиною, і їх візьмемо у вигляді [1]

$$\begin{aligned}\Phi_T(z) &= \int_{L_1} g'(t)/(2\pi(t - z_1))dt, \\ \Psi_T(z) &= e^{-2i\alpha}/(2\pi) \int_{L_1} [\overline{g'(t)}/(t - z_1) - \bar{T}e^{i\alpha}g'(t)/(t - z_1)^2]dt, \\ T &= te^{i\alpha} + z_0, \quad g'(t) = 2\mu_1/(i(1 + \kappa_1))\partial_{x_1}([u_1] + i[v_1]).\end{aligned}\quad (10)$$

Введемо аналітичне продовження функції $\Phi_{\Pi}^{(j)}(z)$ з області S_j в область S_{3-j} за формулою

$$\Phi_{\Pi}^{(j)}(z) = -\overline{\Phi_{\Pi}^{(j)}(z)} - z\overline{\Phi_{\Pi}^{(j)}(z)} - \overline{\Psi_{\Pi}^{(j)}(z)}, \quad \overline{\Phi}(z) = \overline{\Phi(\bar{z})}.\quad (11)$$

Тому формули (8) можемо переписати у вигляді

$$\begin{aligned}\sigma_{yy}^{(1)} - i\sigma_{xy}^{(1)} &= \Phi_T(z) + \Phi_{\Pi}^{(1)}(z) + R_1(z), \\ \sigma_{yy}^{(2)} - i\sigma_{xy}^{(2)} &= \Phi_{\Pi}^{(2)}(z) - \Phi_{\Pi}^{(2)}(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi_{\Pi}^{(2)}(z)}, \\ 2\mu_1\partial_x(u + iv) &= \kappa_1(\Phi_T(z) + \Phi_{\Pi}^{(1)}(z)) - R_1(z), \\ 2\mu_2\partial_x(u + iv) &= \kappa_2\Phi_{\Pi}^{(2)}(z) + \Phi_{\Pi}^{(2)}(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi_{\Pi}^{(2)}(z)},\end{aligned}\quad (12)$$

де

$$R_1(z) = \overline{\Phi_T(\bar{z})} + z\overline{\Phi_T(\bar{z})} + \overline{\Psi_T(\bar{z})} - \Phi_{\Pi}^{(1)}(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi_{\Pi}^{(1)}(z)}.$$

Введемо функції

$$\theta_P(z) = \Phi_{\Pi}^{(1)}(z) + \Phi_{\Pi}^{(2)}(z), \quad \Phi_P(z) = \mu_{3-j}\kappa_j\Phi_{\Pi}^{(j)}(z) - \mu_j\Phi_{\Pi}^{(3-j)}(z), \quad z \in S_j. \quad (13)$$

Враховуючи (12) і (13), та задовольняючи умови ідеального механічного контакту на лінії поділу матеріалів (4), отримаємо задачу лінійного спряження

$$T^+(x) - T^-(x) = 0, \quad R^+(x) - R^-(x) = 0, \quad x \in L, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \text{де} \\ T(z) = (\theta_p(z) + \bar{\Phi}_T(z) + z\bar{\Phi}'_T(z) + \bar{\Psi}_T(z), \quad z \in S_1) \cup (\theta_p(z) - \Phi_T(z), \quad z \in S_2), \\ R(z) = (\Phi_p(z) - \mu_2[\bar{\Phi}_T(z) + z\bar{\Phi}'_T(z) + \bar{\Psi}_T(z)], z \in S_1) \cup \\ \cup (\Phi_p(z) - \mu_2\kappa_1\Phi_T(z), z \in S_2). \end{aligned} \quad (15)$$

Розв'язавши крайові задачі (14), враховуючи (15), знайдемо

$$\theta_p(z) = (-\bar{\Phi}_T(z) - z\bar{\Phi}'_T(z) - \bar{\Psi}_T(z), \quad z \in S_1) \cup (\Phi_T(z), \quad z \in S_2), \quad (16)$$

$$\Phi_p(z) = (\mu_2[\bar{\Phi}_T(z) + z\bar{\Phi}'_T(z) + \bar{\Psi}_T(z)], \quad z \in S_1) \cup (\mu_2\kappa_1\Phi_T(z), \quad z \in S_2). \quad (17)$$

Враховуючи (13), одержимо

$$\Phi_{II}^{(j)}(z) = (A_j^{-1}(\Phi_p(z) + \mu_j\theta_p(z)), z \in S_j) \cup (-A_{3-j}^{-1}(-\Phi_p(z) + \mu_j\kappa_{3-j}\theta_p(z)), z \in S_{3-j}),$$

де

$$A_j = \mu_j + \mu_{3-j}\kappa_j. \quad (18)$$

Перейшовши у систему координат $O_1x_1y_1$, з першої крайової умови (1) отримаємо

$$-N(x_1)/(2h) = \int_{L_1} [L(t, x_1)g'(t) + M(t, x_1)\overline{g'(t)}]dt. \quad (19)$$

У рівності (19)

$$\begin{aligned} L(t, x_1) = 1/(\pi(t - x_1)) + A_4 e^{i\alpha}/(2\pi) \left(1/(t e^{-i\alpha} - x_1 e^{i\alpha} - 2iy_0) + 2i(t \sin \alpha + y_0)(1 - e^{-2i\alpha}) \times \right. \\ \left. \times (t e^{i\alpha} - x_1 e^{-i\alpha} + 2iy_0)^{-2} - 8(t \sin \alpha + y_0)(x_1 \sin \alpha + y_0) e^{-2i\alpha}/(t e^{i\alpha} - x_1 e^{-i\alpha} + 2iy_0)^3 \right) - \\ - A_3 e^{-i\alpha}/(2\pi(t e^{i\alpha} - x_1 e^{-i\alpha} + 2iy_0)), \\ M(t, x_1) = A_4 e^{-i\alpha}/(2\pi) \left(1/(t e^{i\alpha} - x_1 e^{-i\alpha} + 2iy_0) - 2i(t \sin \alpha + y_0) \times \right. \\ \left. \times (t e^{-i\alpha} - x_1 e^{i\alpha} - 2iy_0)^{-2} - e^{-i\alpha}(t - x_1)/(t e^{i\alpha} - x_1 e^{-i\alpha} + 2iy_0)^2 \right), \end{aligned} \quad (20)$$

де

$$A_3 = (\mu_1\kappa_2 - \mu_2\kappa_1)/A_2, \quad A_4 = (\mu_2 - \mu_1)/A_1.$$

При дослідженні напруженого стану, пов'язаного зі згином пластини, введемо комплексні потенціали $\Phi_3^{(j)}(z)$ і $\Psi_3^{(j)}(z)$, для яких правильні залежності [2]

$$\begin{aligned}\Phi_3^{(j)}(z) + \overline{\Phi_3^{(j)}(z)} + z \overline{\Phi_3^{(j)}(z)} + \overline{\Psi_3^{(j)}(z)} &= \partial_x g_j, \\ \tilde{\kappa}_j \Phi_3^{(j)}(z) - \overline{\Phi_3^{(j)}(z)} - z \overline{\Phi_3^{(j)}(z)} - \overline{\Psi_3^{(j)}(z)} &= f_j,\end{aligned}\quad (21)$$

де

$$g_j = i(\partial_y w - i\partial_x w), \quad f_j = m_j \left[M_y + iC'_0 + i \int_{-a}^t N_y d\tau + iH_{xy} \right], \quad m_j = -2\tilde{\mu}_j. \quad (22)$$

Комплексні потенціали подамо у вигляді

$$\begin{aligned}\Phi_3^{(1)}(z) &= \Phi_{31}(z) + \Gamma_1 + \Phi_{3T}(z), \quad \Psi_3^{(1)}(z) = \Psi_{31}(z) + \Gamma'_1 + \Psi_{3T}(z), \\ \Phi_3^{(2)}(z) &= \Phi_{32}(z) + \Gamma_2, \quad \Psi_3^{(2)}(z) = \Psi_{32}(z) + \Gamma'_2.\end{aligned}\quad (23)$$

Тут

$$\begin{aligned}\Gamma_j &= -(M_{x_j}^\infty + M_y^\infty)/(4D_j(1 + \nu_j)), \quad \Gamma'_j = (M_y^\infty - M_{x_j}^\infty)/(2D_j(1 - \nu_j)), \\ \Phi_{3T}(z) &= \int_{L_1} Q(t)/(2\pi(t - z_1))dt, \\ \Psi_{3T}(z) &= -e^{-2i\alpha}/(2\pi) \int_{L_1} [\overline{Q(t)}\tilde{\kappa}_1/(t - z_1) + \overline{T} e^{i\alpha} Q(t) \times \\ &\times (t - z_1)^{-2}] dt, \quad Q = -i/(1 + \tilde{\kappa}_1) \partial_x (\partial_x w + i\partial_y w).\end{aligned}\quad (24)$$

Аналітично продовжимо функцію $\Phi_{3j}(z)$ з області S_j в область S_{3-j} за формулою, аналогічною до (11), і введемо функції

$$\theta_3(z) = \Phi_{31}(z) + \Phi_{32}(z), \quad \Phi_3(z) = \tilde{\mu}_{3-j} \tilde{\kappa}_j \Phi_{3j}(z) - \tilde{\mu}_j \Phi_{33-j}(z), \quad z \in S_j, \quad (25)$$

тоді, враховуючи умови ідеального механічного контакту, як це зроблено в плоскій задачі, отримаємо задачі лінійного спряження для визначення функцій $\theta_3(z)$ і $\Phi_3(z)$, розв'язавши які, та врахувавши (25), можна записати явний вигляд для функцій $\Phi_{3j}(z)$, а на підставі формул (21) – (24) можемо знайти

$$M_{y_1}(x_1) + iC' = \int_{L_1} [L_3(t, x_1)Q(t) + M_3(t, x_1)\overline{Q(t)}]dt + KP_1. \quad (26)$$

У рівності (26)

$$\begin{aligned}L_3(t, x_1) &= -1/(4\pi\tilde{\mu}_1) \left\{ 2\tilde{\kappa}_1/(t - x_1) + \tilde{A}_4 e^{i\alpha} \left(-\tilde{\kappa}_1^2/(t e^{-i\alpha} - x_1 e^{i\alpha} - 2iy_0) - 2i(t \sin \alpha + y_0) \times \right. \right. \\ &\times (1 - e^{-2i\alpha})(t e^{i\alpha} - x_1 e^{-i\alpha} + 2iy_0)^{-2} + 8(t \sin \alpha + y_0)(x_1 \sin \alpha + y_0) e^{-2i\alpha} \times \\ &\times (t e^{i\alpha} - x_1 e^{-i\alpha} + 2iy_0)^{-3} \left. \right) + \tilde{A}_3 e^{-i\alpha}/(t e^{i\alpha} - x_1 e^{-i\alpha} + 2iy_0) \left. \right\}, \\ M_3(t, x_1) &= -\tilde{\kappa}_1 \tilde{A}_4 e^{-i\alpha}/(4\pi\tilde{\mu}_1) \left(1/(t e^{i\alpha} - x_1 e^{-i\alpha} + 2iy_0) - 2i(t \sin \alpha + y_0) \times \right.\end{aligned}\quad (27)$$

$$\times (t e^{-i\alpha} - x_1 e^{i\alpha} - 2iy_0)^{-2} - e^{-i\alpha} (t - x_1) / (t e^{i\alpha} - x_1 e^{-i\alpha} + 2iy_0)^2),$$

$$KP_1 = (M_y^\infty (1 + e^{-2i\alpha}) + M_{x_1}^\infty (1 - e^{-2i\alpha})) / 2,$$

де

$$\tilde{A}_3 = (\tilde{\mu}_1 \tilde{\kappa}_2 - \tilde{\mu}_2 \tilde{\kappa}_1) / \tilde{A}_2, \quad \tilde{A}_4 = (\tilde{\mu}_2 - \tilde{\mu}_1) / \tilde{A}_1.$$

Введемо позначення

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= [\partial_{xy}^2 w] / (1 + \tilde{\kappa}_1) = \operatorname{Re} Q, \\ Q_2(t) &= -[\partial_{xx}^2 w] / (1 + \tilde{\kappa}_1) = \operatorname{Im} Q, \\ g'(t) &= g'_1(t) + i g'_2(t). \end{aligned} \quad (28)$$

З крайової умови (3) одержимо

$$g'_1(t) = \beta Q_1(t), \quad \beta = -hE_1 / (1 - \nu_1). \quad (29)$$

Використавши (29), виділивши у (19) і (26) дійсну й уявну частини та підставивши одержані вирази у крайову умову (2), отримаємо систему інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(KP_1) &= \int_{L_1} [-\operatorname{Re}\{2h^2\beta(L(t, x_1) + M(t, x_1)) + L_3(t, x_1) + M_3(t, x_1)\} Q_1(t) + \\ &\quad + 2h^2 \operatorname{Im}\{L(t, x_1) - M(t, x_1)\} g'_2(t) + \operatorname{Im}\{L_3(t, x_1) - M_3(t, x_1)\} Q_2(t)] dt, \\ 0 &= \int_{L_1} [\beta \operatorname{Im}\{L(t, x_1) + M(t, x_1)\} Q_1(t) + \operatorname{Re}\{L(t, x_1) - M(t, x_1)\} g'_2(t)] dt, \\ \operatorname{Im}(KP_1) &= C' - \\ &\quad - \int_{L_1} [\operatorname{Im}\{L_3(t, x_1) + M_3(t, x_1)\} Q_1(t) + \operatorname{Re}\{L_3(t, x_1) - M_3(t, x_1)\} Q_2(t)] dt, \end{aligned} \quad (30)$$

яку доповнюємо додатковими умовами

$$\int_{L_1} g'_2(t) dt = 0, \quad \int_{L_1} Q_j(t) dt = 0, \quad j = \overline{1, 2} \text{ і } \int_{L_1} t Q_2(t) dt = 0,$$

які виражають однозначність переміщень, кутів повороту та прогину при обході контуру тріщини. Зведені коефіцієнти інтенсивності зусиль K_j^* і моментів $K_{j_3}^*$ знайдемо за формулами [1,2]

$$\begin{aligned} K_{1_3}^{*\pm} &= K_{1_3}^\pm / (M_y^\infty \sqrt{l}) = \pm 2/3 (3 + \nu_1) / (1 - \nu_1^2) \lim_{t \rightarrow c} \sqrt{2(c-t)} Q_1^*(t), \\ K_{2_3}^{*\pm} &= K_{2_3}^\pm / (M_y^\infty \sqrt{l}) = \pm 2/3 (3 + \nu_1) / (1 - \nu_1^2) \lim_{t \rightarrow c} \sqrt{2(c-t)} Q_1^*(t), \end{aligned} \quad (31)$$

$$K_1^{*\pm} - i K_2^{*\pm} = K_j^\pm h^2 / (M_y^\infty \sqrt{l}) = \mp \lim_{t \rightarrow c} \sqrt{2(c-t)} g'^*(t), \quad (32)$$

де

$$g'^*(t) = h^2 / M_y^\infty g'(t), \quad Q^*(t) = E_1 h^3 / M_y^\infty Q(t). \quad (33)$$

Отриману систему (30) розв'язуємо чисельно за допомогою методу механічних квадратур [1].

Числовий аналіз задачі. Провели числовий аналіз задачі при $\nu_1 = \nu_2 = 0.33$. На рис. 2-3 показано графічну залежність контактного тиску Nh/M_y^∞ при різних відстанях $d = y_0/l$ для $\alpha = 0$, причому крива 1 відповідає приведеній відстані $d = 0.01$, крива 2 – $d = 0.1$, крива 3 – $d = 1$, крива 4 – $d = 10$. Рис. 2 побудовано при $\tilde{n} = E_2/E_1 = 0$ (випадок півплощини), а рис. 3 – при $\tilde{n} = 10^5$ (випадок жорстко защемленої півплощини). При $d \geq 10$, тобто, коли тріщина досить далеко від межі півплощини, то контактний тиск збігається з результатами [3].

Зауважимо таке: коли $\alpha = 90^\circ$ і $\nu_1 = \nu_2 = 0.25$, то отримаємо числові результати статей [5,6].

На рис. 4 і 5 показано графічну залежність коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів від зміни кута нахилу тріщини α . Рис. 4 побудовано при $\tilde{n} = 0$, а рис. 5 – при $\tilde{n} = 10^5$; в обох випадках $\nu_1 = \nu_2 = 0.33$, $\rho = M_{x_1}^\infty/M_y^\infty = 1$, $d = 1.05$. Для порівняння результатів на цих рисунках розглянуто випадок, коли береги тріщини не контактують; відповідні криві позначено двома штрихами.

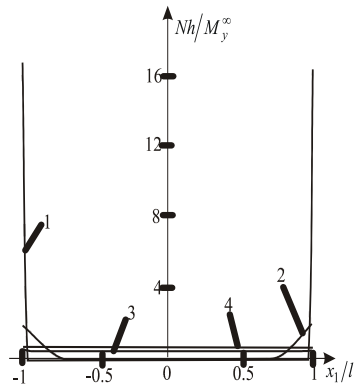


Рис. 2

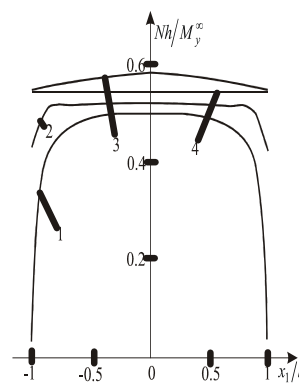


Рис. 3

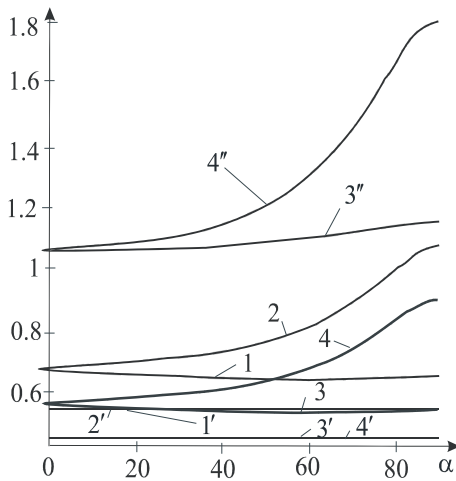


Рис. 4

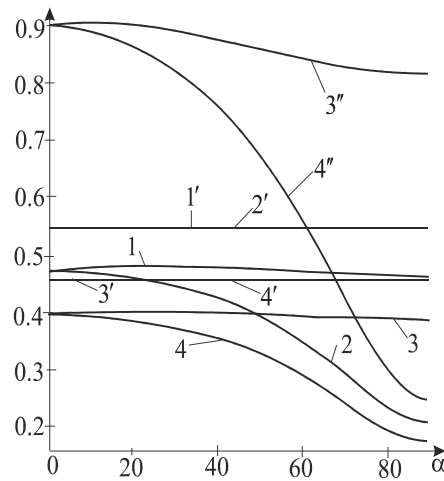


Рис. 5

Відповідність між позначеннями кривих на цих рисунках і коефіцієнтами інтенсивності зусиль $K_j^{\pm}$ і моментів $K_{j3}^{\pm}$ така:

$$1, 1' - K_1^+, \quad 2, 2' - K_1^-, \quad 3, 3', 3'' - K_{13}^+, \quad 4, 4', 4'' - K_{13}^-, \quad (34)$$

де криві без штрихів – з врахуванням контакту берегів тріщини, зі штрихом – тріщина в однорідній ізотропній пластині [3].

1. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацишин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К., 1976.
2. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К., 1981.
3. Шацький І. П. Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами // Доповіді АН УРСР. Сер. А. Фізико-математичні та технічні науки. 1988. – № 7. С. 49–51.
4. Прусов И. П. Метод сопряжения в теории плит. – Минск. – 1975.
5. Шацький І. П., Перепічка В. В. Згин напівнескінченної пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – Т. 28, №2. – 1992. – С. 54–58.
6. Перепічка В. В. Згин напівнескінченної консольної пластини, послабленої розрізом з контактуючими берегами // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 1997. – Т. 40. – №2. – С. 83–86.
7. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966.

8. Опанасович В. К., Слободян Б. С. Згин кусково-однорідної пластини з тріщиною на прямолінійній межі поділу матеріалів з урахуванням контакту її берегів // Мат. мет. та фіз.-мех. поля. – 2007. – Т. 50. – № 1. – С. 168–177.

BIAXIAL BEND BY MOMENTS ON ENDLESSNESS OF LUMP-HOMOGENEOUS PLATE WITH RECTILINEAL CRACK TAKING INTO ACCOUNT CONTACT OF ITS BANKS

Ivan Zvizlo

*Ivan Franco National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine*

In work the bend of lump-homogeneous isotropic plate with the rectilineal border of division of materials by the distributed bend moments on endlessness is explored, when there is a crack in one half plane, the banks of which contact on all length under action of the external loading. With application of methods of theory of function of complex variable and complex potentials of Colosov-Mushelishvili the solve of the problem taken to the system of singular integral equalizations, which is solved by the numerical method of mechanical quadratures. The graphic dependences of contact pressure and coefficients of intensity of efforts and moments at different values of geometrical and mechanical parameters of problem is built.

Key words: plate, crack.

Стаття надійшла до редколегії 21.06.2007

Прийнята до друку 19.11.2008

УДК 539.3

**ДИНАМІЧНА ЦЕНТРАЛЬНОСИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА
ТЕРМОМЕХАНІКИ ДЛЯ ПОРОЖНИСТОЇ ЕЛЕКТРОПРОВІДНОЇ
КУЛІ ЗА УМОВ ПОВЕРХНЕВОЇ ДІЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО
ІМПУЛЬСУ**

Роман МУСІЙ, Галина СТАСЮК

*Національний університет “Львівська політехніка”,
вул. Ст. Бандери, 12 79013 Львів, Україна*

З використанням кубічної апроксимації одержано розв’язок динамічної центральносиметричної задачі для порожнистої кулі, що перебуває в умовах поверхневого електромагнітного навантаження.

Ключові слова: термопружність, електромагнітопружність, пондеромоторні сили, куля, динамічна задача.

У працях [1–2] розглянуто задачу про занурення з великою швидкістю суцільної електропровідної кулі в постійне магнітне поле величиною H_0 . Математичне формулювання задачі термомеханіки для порожнистої кулі, яка перебуває за умов дії зовнішнього нестационарного електромагнітного поля (ЕМП), заданого азимутальною компонентою, на обидвох поверхнях сформульовано у [3–4]. Формулювання задачі електродинаміки за умов дії нестационарного електромагнітного поля на зовнішній поверхні довгого порожнистого циліндра, розв’язок і числовий аналіз відповідної задачі термомеханіки за таких умов електромагнітної дії наведено в працях [5–6]. У цій праці сформульовано задачу термомеханіки для порожнистої електропровідної кулі, яка перебуває за умов дії електромагнітного імпульсу (ЕМІ) на зовнішній поверхні, подано розв’язки сформульованої задачі та проведено числовий аналіз.

Формулювання задачі. Розглядаємо порожнисту пружну електропровідну кулю з внутрішнім r_0 і зовнішнім r_1 радіусами, віднесену до сферичної системи координат (r, φ, θ) . Куля перебуває за умов дії нестационарного ЕМП, заданого значеннями азимутальної компоненти H_φ вектора напруженості магнітного поля $\vec{H} = \{0; H_\varphi(r, t); 0\}$ на її поверхнях; матеріал кулі однорідний, ізотропний і неферромагнітний, а його фізико-механічні характеристики – постійні. Дія ЕМП на кулю спричиняє виникнення джоулевого тепла Q і пондеромоторних сил $\vec{F}$. Ці фактори зумовлюють появу полів температури і механічних напружень у кулі. Розрахунок параметрів цих полів виконуємо за відомою в літературі схемою для задач термомеханіки електропровідних тіл за умов дії зовнішніх ЕМП [7].

У випадку, якщо зовнішня поверхня кулі $r = r_1$ перебуває за умов дії нестационарного ЕМП, заданого значеннями азимутальної компоненти H_φ вектора напруженості магнітного поля $\vec{H}$ на зовнішній поверхні кулі

$$H_\varphi(r_1, t) = H_\varphi^+(t), \quad (1)$$

то на внутрішній поверхні на підставі закону Ампера і теореми Стокса з урахуванням сталості магнітного поля у порожнині кулі записуємо граничну умову третього роду

$$\frac{\partial H_\varphi(r_0, t)}{\partial r} + \frac{H_\varphi(r_0, t)}{r} = 0. \quad (2)$$

Колова компонента $H_\varphi(r, t)$ вектора $\vec{H}$ у кулі на підставі співвідношень Максвелла задовольняє рівняння електродинаміки

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \sigma \mu \frac{\partial}{\partial t} \right) H_\varphi = 0, \quad (3)$$

за граничних умов (1)–(2) на поверхнях $r = r_1$ та $r = r_0$ і нульової початкової умови

$$H_\varphi(r, 0) = 0, \quad (4)$$

що відповідає відсутності поля у початковий момент часу. Тут σ – коефіцієнт електропровідності; μ – магнітна проникність матеріалу циліндра.

За знайденим виразом функції $H_\varphi(r, t)$ питомі густини джоулевих тепловиділень Q і пондеромоторної сили $\vec{F}$ виражають формулами [3, 4]

$$Q = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial H_\varphi}{\partial r} + \frac{H_\varphi}{r} \right)^2, \quad \vec{F} = \left\{ F_r(r, t) = -\mu \left(\frac{\partial H_\varphi}{\partial r} + \frac{H_\varphi}{r} \right) H_\varphi; 0; 0 \right\}. \quad (5)$$

Відомо, що за умов дії імпульсних ЕМП на поверхні електропровідного тіла процес його нагрівання відбувається адіабатично [8]. Тоді розподіл температури в кулі запишемо

$$T(r, t) = T_0(r) + \frac{\kappa}{\lambda} \int_0^t Q(r, t) dt, \quad (6)$$

де λ , κ – коефіцієнти тепло- та температуропровідності, $T_0(r)$ – розподіл температури в кулі в початковий момент часу $t = 0$.

Відмінні від нуля радіальна σ_{rr} , азимутальна $\sigma_{\varphi\varphi}$ та меридіанна $\sigma_{\theta\theta}$ ($\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi}$) компоненти тензора динамічних напружень $\mathcal{E}(r, t)$ визначають зі системи рівнянь динамічної центральносиметричної задачі термопружності [9]

$$\frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial t^2} = W^F + W^T,$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial t^2} + 4c_2^2 \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \sigma_{\varphi\varphi} = 2c_2^2 \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[\frac{2}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \sigma_{rr} + \frac{F_r}{r} \right] + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial t^2} - \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}, \quad (7)$$

$$\text{де } W^F = -\frac{\partial F_r}{\partial r} - \frac{2}{1-\nu} \frac{F_r}{r}, \quad W^T = \alpha \rho \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r}; \quad c_1^2 = \frac{(1-\nu)E}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)},$$

$c_2 = \sqrt{E/(2\rho(1+\nu))}$ – швидкості пружних хвиль розширення та формозміни; α , ν – коефіцієнти лінійного теплового розширення та Пуассона; E – модуль пружності; ρ – густина матеріалу кулі.

За відсутності переміщень і швидкостей переміщень у початковий момент часу $t = 0$ початкові умови на функції σ_{rr} і $\sigma_{\varphi\varphi}$ матимуть вигляд

$$\sigma_{jj}(r, 0) = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{jj}(r, 0)}{\partial t} = -\frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T(r, 0)}{\partial t} \quad (j = r, \varphi). \quad (8)$$

Якщо поверхні кулі перебувають за умов силового навантаження, заданого вектором поверхневих навантажень $\vec{P} = \{P_r; 0; 0\}$, то граничні умови для компоненти σ_{rr} записують

$$\sigma_{rr}(r_0, t) = P_r^-(t) = \sigma_{rr}^-(t); \quad \sigma_{rr}(r_1, t) = P_r^+(t) = \sigma_{rr}^+(t). \quad (9)$$

Відповідно до принципу незалежності фізичних дій: джоулевого тепла та пондеромоторної сили [8], компоненти $\sigma_{jj}(r, t) = 0$ ($j = r, \varphi, \theta$) тензора напружень подають сумою двох складових

$$\sigma_{jj} = \sigma_{jj}^Q + \sigma_{jj}^F, \quad (10)$$

де σ_{jj}^Q і σ_{jj}^F – компоненти, зумовлені відповідно джоулевим теплом Q та пондеромоторною силою $\vec{F}$.

Для визначення компонент σ_{jj}^Q тензора напружень використовуємо систему вихідних рівнянь (7), приймаючи $W^F = 0$, а компоненти σ_{jj}^F шукаємо з системи (7) при $W^T = 0$; початкові та граничні умови для σ_{jj}^Q та σ_{jj}^F отримують аналогічно з умов (8) та (9).

Методика розв’язування. Для знаходження розв’язків сформульованих вище крайових задач електродинаміки, теплопровідності та термопружності використаємо кубічну апроксимацію шуканих функцій за радіальною координатою [4]

$$\Phi(r, t) = \sum_{i=0}^3 a_i^\Phi(t) r^i, \quad \Phi(r, t) = \{H_\varphi, \sigma_{rr}\}. \quad (11)$$

Коефіцієнти $a_i^\Phi(t)$ апроксимаційних поліномів (11) визначаємо через граничні значення $\Phi^\pm(t)$ функцій $\Phi(r, t)$ на поверхнях $r = r_0$ і $r = r_1$ та їхні інтегральні характеристики

$$\Phi_s(t) = \int_{r_0}^{r_1} \Phi(r, t) r^s dr, \quad s = 1, 2 \quad (12)$$

у вигляді

$$\Phi(r, t) = \sum_{i=0}^3 \left[a_{i,1}^{\Phi} \Phi_1(t) + a_{i,2}^{\Phi} \Phi_{\varphi 2}(t) + a_{i,3}^{\Phi} \Phi^+(t) + a_{i,4}^{\Phi} \Phi^-(t) \right] r^i. \quad (13)$$

Зінтегрувавши рівняння електродинаміки (3) та рівняння на радіальну компоненту σ_{rr} тензора напружень системи рівнянь термопружності (7) відповідно до формули (12), отримаємо системи двох диференціальних рівнянь на інтегральні характеристики функції $H_{\varphi}(r, t)$:

$$\begin{cases} \frac{d H_{\varphi 1}(t)}{d t} - d_1^H H_{\varphi 1}(t) - d_2^H H_{\varphi 2}(t) = d_3^H H_{\varphi}^+(t), \\ \frac{d H_{\varphi 2}(t)}{d t} - d_4^H H_{\varphi 1}(t) - d_5^H H_{\varphi 2}(t) = d_6^H H_{\varphi}^+(t) \end{cases} \quad (14)$$

та функції $\sigma_{rr}(r, t)$

$$\begin{cases} \frac{d^2 \sigma_{rr 1}(t)}{d t^2} - d_1^{\sigma} \sigma_{rr 1}(t) - d_2^{\sigma} \sigma_{rr 2}(t) = B_1^T(t) + B_1^F(t), \\ \frac{d^2 \sigma_{rr 2}(t)}{d t^2} - d_5^{\sigma} \sigma_{rr 1}(t) - d_6^{\sigma} \sigma_{rr 2}(t) = B_2^T(t) + B_2^F(t), \end{cases} \quad (15)$$

де

$$\begin{aligned} d_l^H &= \frac{2\alpha_1 a_{1l}^H + 6\alpha_2 a_{2l}^H + 12\alpha_3 a_{3l}^H}{\sigma\mu}, \quad d_{l+3}^H = \frac{2\alpha_2 a_{1l}^H + 6\alpha_3 a_{2l}^H + 12\alpha_4 a_{3l}^H}{\sigma\mu} \quad (l = \overline{1, 3}), \\ d_l^{\sigma} &= c_1^2 (4\alpha_1 a_{1l}^{\sigma} + 10\alpha_2 a_{2l}^{\sigma} + 18\alpha_3 a_{3l}^{\sigma}), \quad d_{l+4}^{\sigma} = c_1^2 (4\alpha_2 a_{1l}^{\sigma} + 10\alpha_3 a_{2l}^{\sigma} + 18\alpha_4 a_{3l}^{\sigma}) \quad (l = \overline{1, 4}); \\ \alpha_i &= \frac{r_1^i - r_0^i}{i}, \quad B_s^j(t) = c_1^2 \int_{r_0}^{r_1} W^j(r, t) r^s dr \quad (j = F, T; s = 1, 2), \end{aligned}$$

$a_{i,1+4}^{\Phi}$, $(i = \overline{0, 3})$ – коефіцієнти, які виражають через геометричні параметри кулі та фізико-механічні характеристики її матеріалу [4].

Розв'язки систем (14) і (15) отримують за допомогою перетворення Лапласа за початкових умов (4) та (8), усереднених за радіальною координатою згідно з формулою (11).

Числовий аналіз результатів. Як приклад знайдено розв'язки задачі за умов дії ЕМІ на зовнішній поверхні кулі, який моделюємо функцією

$$H_{\varphi}^{\pm}(t) = kH_0 (e^{-\beta_1 t} - e^{-\beta_2 t}), \quad (16)$$

де β_1, β_2 – параметри, які відповідають часам фронтів наростання $t_{\phi.n.}$ і спадання $t_{\phi.c.}$ імпульсу; H_0 – максимальне значення напруженості магнітного поля в імпульсі; k – нормуючий коефіцієнт.

Числовий аналіз проведено для порожнистої кулі, виготовленої зі сталі X18H10T з внутрішнім $r_0 = 0,008\text{ м}$ і зовнішнім $r_1 = 0,01\text{ м}$ радіусами за умов дії ЕМІ (16) тривалістю $t_i = 10^{-4}\text{ с}$ і часом фронту наростання $t_{\phi.n.} = t_i/10 = 10^{-5}\text{ с}$ за відсутності силових навантажень на поверхнях кулі.

На рис. 1–7 показано залежності напруженості магнітного поля H_ϕ , пондеромоторної сили F_r , температури T , радіальної σ_{rr} та азимутальної $\sigma_{\phi\phi}$ компонент тензора напружень, а також інтенсивності напружень $\sigma_i = \sqrt{(3I_2 - I_1^2)/2}$, де I_1 та I_2 – перший і другий інваріанти тензора напружень, від часу t у кулі. Криві 1–3 на рис. 1–4 відповідають значенням обчислюваних величин на сферичних поверхнях $r_1 = 0,01\text{ м}$, $r_2 = 0,009\text{ м}$, $r_3 = 0,008\text{ м}$.

На рисунках видно, що за таких умов дії ЕМІ розподіли напруженості магнітного поля, теплових джерел, пондеромоторної сили та температури по товщині характеризуються зменшенням максимальних значень на внутрішній поверхні в 2–2,5 раза порівняно з максимальними значеннями на зовнішній поверхні кулі.

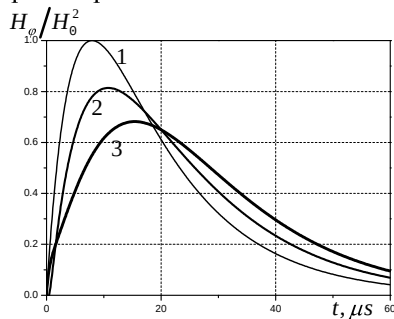


Рис. 1

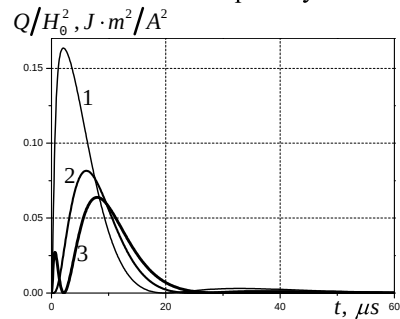


Рис. 2

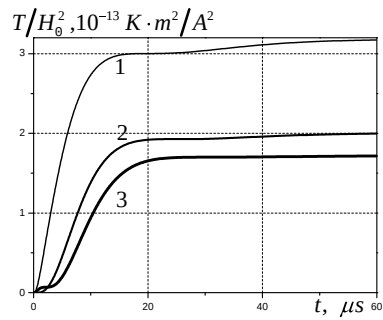
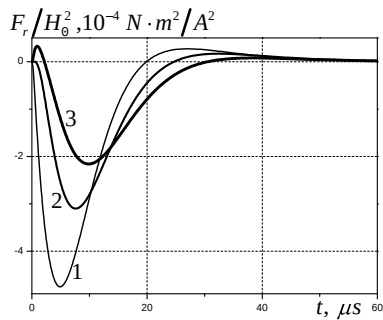


Рис. 3

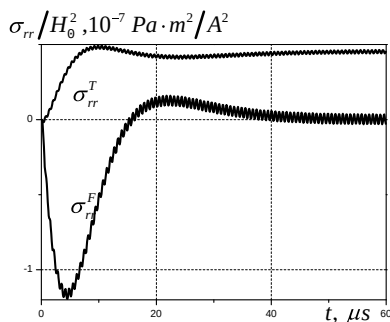


Рис. 4

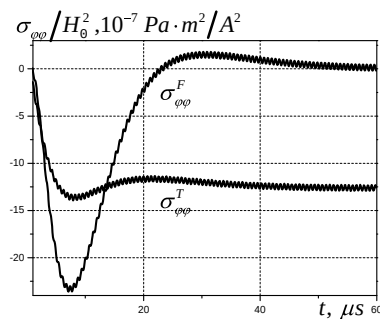


Рис. 5

Розподіли радіальних σ_{rr}^F та σ_{rr}^T напружень, показані на рис. 5, в часі якісно повторюють поведінку відповідних чинників: сили F_r та температури T і досягають максимальних значень приблизно на серединній поверхні порожнистої кулі. Напруження σ_{rr}^F є стискальними, а потім розтягальними і за час $0,5t_i$ дорівнюють нулеві, а напруження σ_{rr}^T є розтягальними і за величиною в 2,5 рази менші за максимальні стискальні напруження σ_{rr}^F . На рис. 6 показано зміну в часі колових $\sigma_{\phi\phi}^F$ при $r = r_0$ і $\sigma_{\phi\phi}^T$

Рис. 6

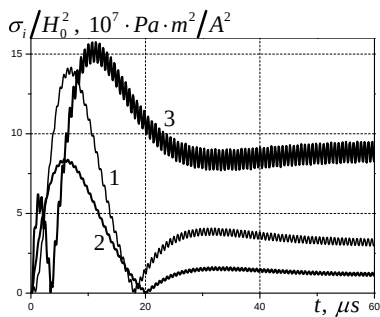


Рис. 7.

при $r = r_1$ напружень (на цих поверхнях вони максимальні). Видно, що колові напруження $\sigma_{\phi\phi}^F$ і $\sigma_{\phi\phi}^T$ в кулі мають стискальний характер і є однакового порядку величини. Стискальні напруження $\sigma_{\phi\phi}^F$ приблизно вдвічі більші за стискальні напруження $\sigma_{\phi\phi}^T$.

Зміна в часі інтенсивності сумарних напружень $\sigma_{jj}^F + \sigma_{jj}^T$, ($j = r, \phi, \theta$) показана на рис. 7. криві 1–3 відповідають їхнім значенням на сферичних поверхнях $r = r_1$, $r = (r_1 + r_0)/2$, $r = r_0$. Макси-

мальні значення інтенсивності напружень досягають на поверхнях порожнистої кулі. На внутрішній поверхні кулі простежуються максимальні амплітуди осциляцій інтенсивності напружень. Отже, визначальний внесок у напружений стан порожнистої кулі, зумовлений дією поверхневого ЕМІ, вносять азимутальні $\sigma_{\phi\phi}$ та меридіанні $\sigma_{\theta\theta}$ напруження.

1. Улітко А.Т., Мольченко Л.В., Ковальчук В.Ф. Магнітопружність при динамічному навантаженні. К. – 1994.

2. Ковальчук В.Ф., Улитко А.Ф. Деформирование и движение проводящей сферы при погружении в магнитное поле // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1986. – № 4. – С. 79–86.
3. Мусій Р. С. Динамічна центрально-симетрична задача електромагнітно-термопружності для електропровідної сфери // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2002. Т. 45, № 1. С. 155–159.
4. Гачкевич А.Р., Мусій Р.С., Стасюк Г.Б. Термомеханическое состояние полый электропроводной сферы при импульсном электромагнитном воздействии // Теоретическая и прикладная механика. Донецьк. 2005, – Вып. 40. – С. 9–17.
5. Стасюк Г.Б. Термонапружений стан довгого порожнистого електропровідного циліндра при односторонній нестационарній електромагнітній дії на поверхні // Конференція молодих вчених з сучасних проблем механіки і математики ім. академіка Я.С. Підстригача 24-26 травня 2004 р. С. 151–153.
6. Стасюк Г.Б. Термонапружений стан електропровідного порожнистого циліндра за умов азимутальної імпульсної електромагнітної дії // Проблеми корозійно-механічного руйнування, інженерія поверхні, діагностичні системи. Відкрита науково-технічна конференція молодих науковців ФМІ НАНУ, Львів, 2005 р., С. 282–285.
7. Гачкевич А.Р. Термомеханика электропроводных тел при воздействии квази-установившихся электромагнитных полей. – К., 1992.
8. Кнопфель Г. Сверхсильные импульсные магнитные поля. Методы генерации и физические эффекты, связанные с созданием импульсных полей мегаэрстедного диапазона. М., 1972.
9. Мусій Р. С. Ключове рівняння і розв'язок у напруженнях центрально-симетричної динамічної задачі термопружності для сфери // Фіз.-хім. механіка матеріалів. 2002. Т. 38, № 1. С. 117–118.

**DYNAMICAL CENTRALSIMETRICAL TASK OF
THERMOMECHANICS FOR A HOLLOW ELECTROCONDUCTIVE
BULLET SUBJECT TO THE CONDITION SUPERFICIAL ACTION OF
ELECTROMAGNETIC IMPULSE**

Roman Musiy, Galina Stasyuk

*Lviv Polytechnic National University,
St. Bandera St. 12 79013 Lviv, Ukraine*

With the use of cube approximation the decision of dynamic centralsimmetrical task is got for a hollow bullet which is in the conditions of the superficial electromagnetic loading.

Key words: thermomechanics, electroconductive bullet, dynamic task.

Стаття надійшла до редколегії 20.02.2007

Прийнята до друку 19.11.2008

УДК 539.377

ТЕМПЕРАТУРНІ НАПРУЖЕННЯ У КОМПОЗИТНІЙ ЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ ПРИ ЛОКАЛЬНОМУ НАГРІВІ

Уляна ЖИДИК

*Національний університет “Львівська політехніка”,
вул. Ст. Бандери 12 79013 Львів, Україна*

Досліджено температурні поля і напруження у циліндричних оболонках із композитних матеріалів. Для дослідження використали модель неоднорідних анізотропних оболонок, яка не накладає жодних обмежень на фізико-механічні характеристики анізотропного матеріалу.

Ключові слова: оболонка, анізотропний, композитний, температура, термopужність.

Дослідження температурних задач теорії оболонок здебільшого проводили для однорідних оболонок із ізотропного або слабо анізотропного матеріалів [4,5,7]. Використання композитних матеріалів із високою анізотропією трансверсальних фізико-механічних характеристик вимагає використання розширених моделей розрахунку оболонок [1,2].

Мета нашої праці – дослідити температурні поля і напруження у циліндричних оболонках із композитних матеріалів. Для дослідження використали модель неоднорідних анізотропних оболонок [2], яка не накладає жодних обмежень на фізико-механічні характеристики анізотропного матеріалу.

Вихідні рівняння термopужності. Розглянемо неоднорідну анізотропну кругову циліндричну оболонку сталої товщини $2h$. Точки простору оболонки віднесемо до ортогональної системи координат x, θ, z , де x – осьова; θ – кругова; z – радіальна координати. Початок координат помістимо у середній поверхні з радіусом R . Цим координатам надалі відповідатимуть індекси 1,2,3, а кома перед індексами 1,2 позначатиме частинні похідні за аргументами x і θ відповідно.

Нехай оболонка перебуває під дією зовнішнього силового навантаження, а також нагрівається джерелами тепла і зовнішнім середовищем шляхом конвективного теплообміну. Термopужну поведінку такої оболонки дослідимо на підставі рівнянь, які одержимо з загальних рівнянь термopужності і теплопровідності неоднорідних оболонок [2] без урахування дифузійних процесів, початкових деформацій та термомеханічної взаємодії.

Тоді компоненти деформації e_{ij} довільної точки оболонки через компоненти деформації середньої поверхні ε_{ij} , κ_{ij} набудуть вигляду

$$e_{11} = \varepsilon_{11} + z\kappa_{11}, \quad e_{13} = \varepsilon_{13} + z\kappa_{13}, \quad e_{33} = \varepsilon_{33},$$

$$\begin{aligned} e_{22} &= (\varepsilon_{22} + z\kappa_{22}) / \left(1 + \frac{z}{R}\right), \quad e_{23} = (\varepsilon_{23} + z\kappa_{23}) / \left(1 + \frac{z}{R}\right), \\ e_{12} &= (\varepsilon_{12} + z\kappa_{12} + z^2\omega_{12}) / \left(1 + \frac{z}{R}\right), \end{aligned} \quad (1)$$

де компоненти деформації середньої поверхні через узагальнені переміщення u_i, γ_i виражаються формулами

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= u_{1,1}, \quad \varepsilon_{22} = (u_3 + u_{2,2}) / R, \quad \varepsilon_{33} = \gamma_3, \quad \omega_{12} = \gamma_{2,1} / R, \\ \varepsilon_{12} &= u_{1,2} / R + u_{2,1}, \quad \varepsilon_{23} = \gamma_2 + (u_{3,2} - u_2) / R, \quad \varepsilon_{13} = \gamma_1 + u_{3,1}, \\ \kappa_{11} &= \gamma_{1,1}, \quad \kappa_{12} = \gamma_{2,1} + \gamma_{1,2} / R + u_{2,1} / R, \quad \kappa_{13} = \gamma_{3,1}, \\ \kappa_{22} &= (\gamma_3 + \gamma_{2,2}) / R, \quad \kappa_{23} = \gamma_{3,2} / R. \end{aligned} \quad (2)$$

Співвідношення між напруженнями і деформаціями для випадку анізотропного матеріалу з однією площиною пружної і теплової симетрії запишемо у скороченому вигляді [3]

$$\sigma_{ij} = c_{ij}e_{ij} - \beta_{ij}^t. \quad (3)$$

Тут $c_{ij}(x, \theta, z)$ – пружні сталі; $\beta_{ij}^t(x, \theta, z) = c_{ij}\alpha_{ij}^t$ – коефіцієнти термпружності; $\alpha_{ij}^t(x, \theta, z)$ – коефіцієнти теплового лінійного розширення.

Рівняння пружності для зусиль і моментів середньої поверхні оболонки запишемо їх у матричному вигляді

$$\begin{aligned} N &= A E + B K - N^t, \\ M &= B^* E + D K - M^t, \\ Q &= k G \Psi, \end{aligned} \quad (4)$$

де N, M, Q і E, K, Ψ – матриці-стовпчики відповідно зусиль-моментів і компонентів деформації середньої поверхні оболонки; k – коефіцієнт зсуву [6]. Матриці жорсткості A, B, B^*, D, G і матриці температурних членів N^t, M^t мають вигляд

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11}/R & A_{12} & A_{13} + B_{13}/R & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} - B_{22}/R & A_{23} & A_{26} - B_{26}/R \\ A_{13} + B_{13}/R & A_{23} & A_{33} + B_{33}/R & A_{36} \\ A_{16} + B_{16}/R & A_{26} & A_{36} + B_{36}/R & A_{66} \\ A_{16} & A_{26} - B_{26}/R & A_{36} & A_{66} - B_{66}/R \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned}
B &= \begin{pmatrix} B_{11} + D_{11}/R & B_{12} & B_{16} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} - D_{22}/R & B_{26} - D_{26}/R & D_{26} \\ B_{13} + D_{13}/R & B_{23} & B_{36} & D_{36} \\ B_{16} + D_{16}/R & B_{26} & B_{66} & D_{66} \\ B_{16} & B_{26} - D_{26}/R & B_{66} - D_{66}/R & D_{66} \end{pmatrix}; \\
B^* &= \begin{pmatrix} B_{11} + D_{11}/R & B_{12} & B_{13} + D_{13}/R & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} - D_{22}/R & B_{23} & B_{26} - D_{26}/R \\ B_{16} + D_{16}/R & B_{26} & B_{36} + D_{36}/R & B_{66} \\ B_{16} & B_{26} - D_{26}/R & B_{36} & B_{66} - D_{66}/R \end{pmatrix}; \\
D &= \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 \end{pmatrix}; \\
G &= \begin{pmatrix} A_{44} + B_{44}/R & A_{45} & B_{44} + D_{44}/R & B_{45} \\ A_{45} & A_{55} - B_{55}/R & B_{45} & B_{55} - D_{55}/R \\ B_{44} + D_{44}/R & B_{45} & D_{44} & D_{45} \\ B_{45} & B_{55} - D_{55}/R & D_{45} & D_{55} \end{pmatrix}; \\
N^t &= \begin{bmatrix} N_{11}^t + M_{11}^t/R & N_{22}^t & N_{33}^t + M_{33}^t/R & N_{12}^t + M_{12}^t/R & N_{12}^t \end{bmatrix}^T; \\
M_t &= \begin{bmatrix} M_{11}^t + L_{11}^t/R & M_{22}^t & M_{12}^t + L_{12}^t/R & M_{12}^t \end{bmatrix}^T,
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
N_{ij}^t &= A_{ij}^t T_1 + B_{ij}^t T_2/h; \quad M_{ij}^t = B_{ij}^t T_1 + D_{ij}^t T_2/h; \quad L_{ij}^t = D_{ij}^t T_1; \\
\{A_{ii}, B_{ij}, D_{ij}\} &= \int_{-h}^h c_{ij} \{1, z, z^2\} dz; \quad \{A_{ij}^t, B_{ij}^t, D_{ij}^t\} = \int_{-h}^h \beta_{ij}^t \{1, z, z^2\} dz.
\end{aligned}$$

Рівняння руху:

$$\begin{aligned}
N_{11,1} + N_{21,2}/R + q_1 &= I_\rho \ddot{u}_1 + J_\rho \ddot{\gamma}_1, \\
N_{12,1} + N_{22,2}/R + N_{23}/R + q_2 &= I_\rho \ddot{u}_2 + J_\rho \ddot{\gamma}_2, \\
N_{13,1} + N_{23,2}/R - N_{22}/R + q_3 &= I_\rho \ddot{u}_3 + J_\rho \ddot{\gamma}_3, \\
M_{11,1} + M_{21,2}/R - N_{13} + m_1 &= J_\rho \ddot{u}_1 + K_\rho \ddot{\gamma}_1, \\
M_{12,1} + M_{22,2}/R - N_{23} + m_2 &= J_\rho \ddot{u}_2 + K_\rho \ddot{\gamma}_2,
\end{aligned} \tag{5}$$

$$M_{13,1} + M_{23,2}/R - M_{22}/R - N_{33} + m_3 = J_\rho \ddot{u}_3 + K_\rho \ddot{\gamma}_3.$$

Тут $\{I_\rho, J_\rho, K_\rho\} = \int_{-h}^h \rho (1 + z/R) \{1, z, z^2\} dz$; ρ – густина матеріалу; крапкою над функцією позначено операцію диференціювання за часом.

Для однозначності розв'язку системи (5) треба задати граничні умови. На кінцях оболонки $x = 0$ і $x = l$ необхідно задати по одній величині з кожної наступної пари $\{N_{11}, u_1\}$, $\{N_{12}, u_2\}$, $\{N_{13}, u_3\}$, $\{M_{11}, \gamma_1\}$, $\{M_{12}, \gamma_2\}$. У початковий момент часу $\tau = 0$ повинні бути задані значення узагальнених переміщень і швидкостей.

Підставляючи рівняння пружності (4) у рівняння руху (5) і враховуючи кінематичні співвідношення (2), одержимо систему рівнянь руху в переміщеннях, яку запишемо в операторній формі

$$L_{sp} y_p = b_s \quad (s, p = 1, 2, \dots, 6), \quad (6)$$

де $y_j = u_j$, $y_{3+j} = \gamma_j$ ($j = 1, 2, 3$); L_{sp} – симетричні диференціальні оператори, які легко визначаються. Вільні члени b_s виражаються через температурні характеристики T_1, T_2 і поверхневі навантаження q_j, m_j .

Система рівнянь (6) разом з граничними та початковими умовами становить динамічну крайову задачу термопружності для неоднорідних анізотропних циліндричних оболонок у переміщеннях. За відомими переміщеннями визначаємо деформації зі співвідношень (2), а зусилля і моменти за рівняннями стану (4). Термонапруження в оболонці знаходимо за формулами (3).

Рівняння теплопровідності. Інтегральні характеристики температури, що входять у вільні члени системи (6), треба визначити з відповідних рівнянь теплопровідності при крайових умовах, заданих на поверхнях та на кінцях оболонки. У випадку конвективного теплообміну на поверхнях оболонки рівняння теплопровідності при лінійному законі розподілу температури по товщині, запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} P_{(1)}^2 T_1 + P_{(2)}^2 T_2 + \lambda_{(1)}^{33} T_2 / (Rh) - C_{(1)} \dot{T}_1 - C_{(2)} \dot{T}_2 &= F_{(1)}, \\ P_{(2)}^2 T_1 + P_{(3)}^2 T_2 - \lambda_{(1)}^{33} T_2 / h^2 + \lambda_{(2)}^{33} T_2 / (Rh) - C_{(2)} \dot{T}_1 - C_{(3)} \dot{T}_2 &= F_{(2)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Тут введено позначення

$$P_{(k)}^2 = \lambda_{(k)}^{11}(\dots)_{,11} + \lambda_{(k)}^{22}(\dots)_{,22} / R^2 + 2\lambda_{(k)}^{12}(\dots)_{,12} / R \quad (k = 1, 2, 3)$$

$$F_{(n)} = (T_1 - t_1^c) \varepsilon_n^t + (T_2 - t_2^c) \varepsilon_{3-n}^t - W_n^t \quad (n = 1, 2)$$

$$\{C_{(k)}, \lambda_{(k)}^{ij}\} = \int_{-h}^h \{c, \lambda^{ij}\} \left(\frac{z}{h}\right)^{k-1} dz \quad (k = 1, 2, 3)$$

$$\varepsilon_n^t = (\alpha_3^+ - (-1)\alpha_3^-); t_n^c = \frac{1}{2}(t_c^+ - (-1)^n t_c^-) \quad (n = 1, 2)$$

W_1^t, W_2^t – інтегральні характеристики джерел тепла; λ^{ij} – коефіцієнти теплопровідності; t_c^+, t_c^- – температура навколишнього середовища на зовнішній і внутрішній поверхнях оболонки; α^+, α^- – коефіцієнти тепловіддачі з цих поверхонь; c – теплоємність.

Антисиметрична шарувата оболонка з перехресним армуванням. Розглянемо оболонку, складену з парного числа ортотропних шарів з однаковою товщиною і властивостями, матеріальні осі яких орієнтовані по чергово під кутами 0 і 90° до осі оболонки (структура з поперечним армуванням). Такі оболонки належать до антисиметричних конструкцій з перехресним армуванням. Легко показати, що в цьому випадку коефіцієнти, які входять до системи (6), приймуть такі значення:

$$\begin{aligned} A_{11} &= A_{22}, A_{13} = A_{23}, A_{44} = A_{55}, A_{16} = A_{26} = A_{36} = A_{45} = 0, \\ B_{11} &= -B_{22}, B_{13} = -B_{23}, B_{44} = -B_{55}, B_{12} = B_{16} = B_{26} = B_{36} = B_{66} = B_{45} = 0, \\ D_{11} &= D_{22}, D_{44} = D_{55}, D_{16} = D_{26} = D_{45} = 0, \\ A_{11}^t &= A_{22}^t, B_{11}^t = -B_{22}^t, D_{11}^t = D_{22}^t, \\ A_{12}^t &= B_{12}^t = B_{33}^t = D_{12}^t = \lambda_{(k)}^{12} = \lambda_{(2)}^{33} = C_{(2)} = 0. \end{aligned}$$

Нехай краї оболонки шарнірно оперті і підтримуються за нульової температури. Тоді при $x = 0$ і $x = l$ повинні виконуватися умови

$$u_3 = u_2 = 0; \gamma_3 = \gamma_2 = 0; N_{11} = M_{11} = 0; T_1 = T_2 = 0. \quad (8)$$

У початковий момент часу температура оболонки дорівнює нулю. Починаючи з часу $\tau = 0$, зовнішня поверхня $z = h$ нагрівається по прямокутній області зовнішнім середовищем, температура якого задана функцією

$$\begin{aligned} t_c^+(x, \theta, \tau) &= t^* [S_-(x - x_0 + d) - S_+(x - x_0 - d)] \times \\ &\times [S_-(\theta - \theta_0 + \eta) - S_+(\theta - \theta_0 - \eta)] [q_0 + \varepsilon \exp(-\omega\tau)], \end{aligned} \quad (9)$$

де $t^*, q_0, \varepsilon, \omega$ – сталі величини; x_0 і θ_0 – відповідно осьова і колова координати середини зони нагріву; $2d$ – її ширина; 2η – кут розхилу зони нагріву;

$$S_+(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}; \quad S_-(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \text{ – одиничні функції.}$$

Внутрішня поверхня $z = -h$ оболонки омивається середовищем з нульовою температурою, $t_c^- = 0$. Коефіцієнти тепловіддачі з поверхонь оболонки приймаємо такими, що дорівнюють $\alpha_t^+ = \alpha_t^- = \alpha_n$. Інерційних і поверхневих сил, а також джерел тепла немає.

Розв'язок системи диференціальних рівнянь (6) і (7) з урахуванням температурного навантаження (9) знаходимо методом інтегральних перетворень Фур'є і Лапласа відповідно до граничних умов (8).

За відомими переміщеннями і температурними характеристиками згідно з формулами (1) – (3) визначаємо компоненти термонапруженого стану оболонки.

Числові результати наведено для шаруватої ортотропної циліндричної оболонки, нагрітої по прямокутній області навколишнім середовищем (9) при $t^* - const$; $\varepsilon = 0$; $q_0 = 1$; $x_0 = \frac{l}{2}$; $d = \frac{l}{4}$; $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$; $\eta = \frac{\pi}{4}$.

Розміри оболонки прийнято такими: $l = 3R$; $h = 0.05R$, а коефіцієнт зсуву $k = \frac{5}{6}$ [6]. За матеріал оболонки взято високомодульний графітоепоксид, для якого характерні такі фізико-механічні властивості: $\nu_{12} = 0.25$; $\nu_{23} = 0.33$;

$$\nu_{13} = 0.25; E_1 = 20E_2; G_{12} = 0.5E_2; G_{23} = 0.2E_2;$$

$$\lambda_1 = 2\lambda_2; \alpha_1^t = 2\alpha_2^t; Bi = h\alpha_3^+/\lambda_{33} = 1.$$

Введемо безрозмірні величини

$$x' = x/l; N'_1 = N_{11}/(t^*E_1h\alpha_1^t); N'_2 = N_{22}/(t^*E_1h\alpha_1^t).$$

На рис. 1, 2 показано розподіл безрозмірних нормального N'_1 і колового N'_2 зусиль вздовж твірної ($0.5 \leq x' \leq 1$). Для заданих параметрів характер поведінки зусиль для оболонок з різною кількістю шарів і однорідної оболонки якісно подібний, але відрізняється величиною. Зміна зусиль має коливний характер. При переході від нагрітої зони до не нагрітої вони міняють знак. Колове зусилля знак міняє більше разів, ніж зусилля нормальне.

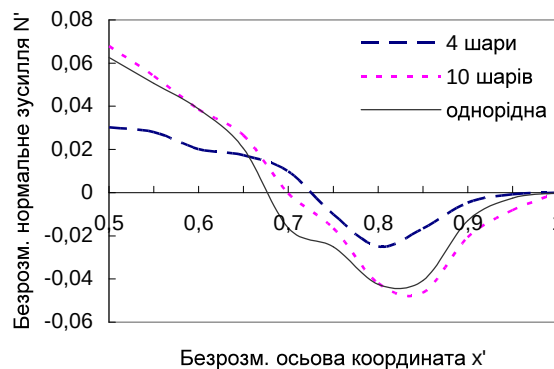


Рис. 1

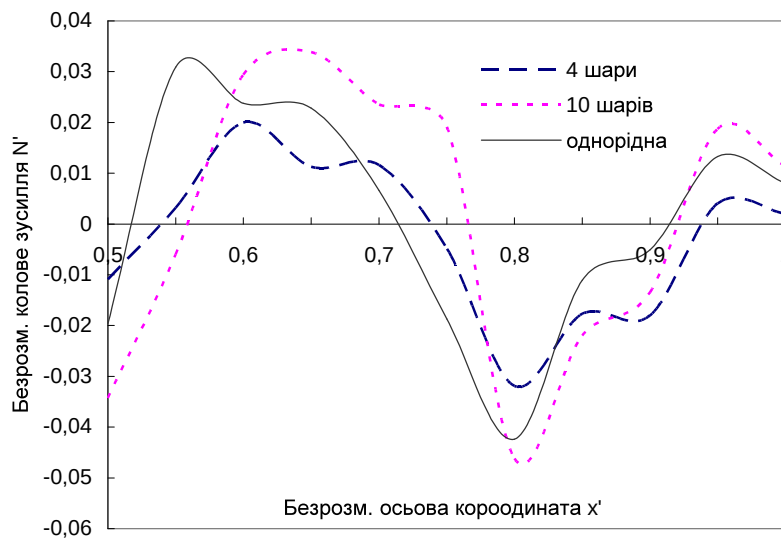


Рис. 2

1. Василенко А. Т., Голуб Г. П., Григоренко Я. М. К определению температурных напряжений в слоистых анизотропных оболочках по уточненной теории // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1977. – № 4. – С. 327–330.
2. Жидик У. В. Математичне моделювання термомеханічної поведінки неоднорідних анізотропних оболонок // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 57. – С. 72–75.
3. Новацкий В. Вопросы термоупругости. – М., 1962.
4. Подстригач Я. С., Швец Р. Н. Термоупругость тонких оболочек. – К., 1978.
5. Huang C. L., Woo H. K. Thermal stresses and displacements induced in a finite orthotropic cylindrical thin shells by an instantaneous thermal shock // J. Thermal Stresses. – 1980. – 3, No. 2 – P. 277–293.
6. Reissner E. The effect of transverse shear deformation on bending of elastic plates // J. Appl. Mech. – 1945. – 12. – P. 426–446.
7. Shirakawa K. Dynamic response of on orthotropic cylindrical shell to rapid heating // J. Sound and Vibr. – 1982. – 83, No. 1 – P. 27–35.

THERMAL STRESSES OF COMPOSITE CYLINDRICAL SHELLS UNDER LOCAL HEATING

Ulyana Zhydyk

*Lviv Polytechnic National University
12 St. Bandera St., 79013 Lviv, Ukraine*

For heterogeneous anisotropic shells the non-stationary equations thermoelasticity and heat conduction equations are proposed. The solution to quasistatic problems for a freely supported finite composite cylindrical shell is obtained.

Key words: shell, anisotropic, composite, temperature, thermoelasticity.

Стаття надійшла до редколегії 19.02.2007

Прийнята до друку 19.11.2008

**ЗАДАЧА БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ АБСТРАКТНИХ
НЕЯВНИХ СУБДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ
ВКЛЮЧЕНЬ****Юрій ДМИТРИШИН***Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна*

Досліджено задачу без початкових умов для абстрактного неявного невинродженого субдиференціального еволюційного включення. Визначено достатні умови для існування єдиного розв'язку цієї задачі без припущень на поведінку розв'язку і вихідних даних при $t \rightarrow -\infty$. Наведено приклад застосування цих абстрактних результатів до розв'язання задачі без початкових умов для одного неявного нелінійного параболічного рівняння з односторонніми крайовими умовами.

Ключові слова: задача без початкових умов, неявне еволюційне включення, нелінійне еволюційне рівняння, субдиференціал, існування, єдиність.

Існує багато праць присвячених вивченню задачі Коші для абстрактних неявних еволюційних включень вигляду

$$(B(u))' + A(u) \ni f, \quad (1)$$

де A і B – монотонні (можливо багатозначні) оператори, що діють з банахового чи гільбертового простору V у спряжений V' . Зазначимо, що ця задача у випадку нелінійних обмежених операторів A і B , один з яких обов'язково субдиференціал, досліджена у [16]. Випадок нелінійного оператора A і лінійного однозначного неперервного оператора B розглянуто в [12, 17, 20]. Питання існування розв'язку задачі Коші для включення (1), коли оператор A – однозначний, а B – субдиференціал, вивчено в праці [18], а коли оператори A і B – субдиференціали – у [9, 11]. Існування періодичних розв'язків для включення (1), коли A і B – субдиференціали, досліджено в [10]. Щодо задачі без початкових умов, то вона для рівняння вигляду (1), тобто, коли оператор A – нелінійний і однозначний, а оператор B – лінійний і однозначний (можливо вироджений) вивчено у [13], а коли $B = I$ (єдиничний оператор) – у [1].

Мета нашої праці – дослідити задачі без початкових умов для неявного субдиференціального еволюційного включення вигляду

$$(Bu(t))' + \partial\Phi(u(t)) \ni f(t), \quad t \in S, \quad (2)$$

де $B: V \rightarrow V'$ – лінійний монотонний оператор; V – дійсний рефлексивний банахів простір; $\partial\Phi$ – субдиференціал власного опуклого півнеперервного знизу функціонала $\Phi: V \rightarrow [0, +\infty]$, $S = (-\infty, T]$ ($T \in \mathbb{R}$) або $S = \mathbb{R}$, і $f: S \rightarrow V'$ – задана функція. Наша мета – визначити достатні умови на вихідні дані B і Φ задачі (2), при яких вона має єдиний розв'язок без припущень на поведінку розв'язку та зростання функції f при $t \rightarrow -\infty$. Зазначимо, що розглядатимемо лише випадок невідродженого включення (2), тобто, коли ядро оператора B складається тільки з нульового елемента.

Основні поняття і головний результат. Для довільного банахового простору X норму в ньому позначатимемо через $\|\cdot\|_X$. Через X' позначатимемо простір спряжений до X , а через $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ – канонічний скалярний добуток між просторами X' та X . Під $L^q_{\text{loc}}(S; X)$, де $q \in [1, +\infty]$ розумітимемо простір (класів еквівалентності) X -значних функцій, вимірних за Бохнером на S , звуження яких на будь-який відрізок $[t_1, t_2] \subset S$ належить $L^q(t_1, t_2; X)$. Простір $L^q_{\text{loc}}(S; X)$ – локально опуклий топологічний векторний простір стосовно системи півнорм $p_{t_1, t_2}(v) = \left(\int_{t_1}^{t_2} \|v(t)\|_X^q dt \right)^{1/q}$, якщо $q \neq \infty$ та $p_{t_1, t_2}(v) = \text{ess sup}_{t \in [t_1, t_2]} \|v(t)\|_X$, $t_1, t_2 \in S$, якщо $q = \infty$. Через $D'(S; X)$ позначатимемо простір X_w -значних розподілів на $\text{int} S$ [2]. Відомо, що простір $L^q_{\text{loc}}(S; X)$ можна ототожнити з деяким підпростором в $D'(S; X)$. Для $v \in L^q_{\text{loc}}(S; X)$ позначатимемо через v' похідну в сенсі простору $D'(S; X)$. Під $W^{1,q}_{\text{loc}}(S; X)$, $q \neq \infty$ розумітимемо локально опуклий топологічний векторний простір функцій $v \in L^q_{\text{loc}}(S; X)$ таких, що $v' \in L^q_{\text{loc}}(S; X)$, стосовно системи півнорм $p_{t_1, t_2}(v) = \left(\int_{t_1}^{t_2} \|v(t)\|_X^q dt + \int_{t_1}^{t_2} \|v'(t)\|_X^q dt \right)^{1/q}$, $t_1, t_2 \in S$. Використовуватимемо також позначення $H^1_{\text{loc}}(S; X) = W^{1,2}_{\text{loc}}(S; X)$. Локально опуклий топологічний векторний простір неперервних функцій з S в X , топологія якого визначається системою півнорм $p_{t_1, t_2}(v) = \sup_{t \in [t_1, t_2]} \|v(t)\|_X$, $t_1, t_2 \in S$, позначатимемо через $C(S; X)$, а множину X -значних абсолютно неперервних функцій на будь-якому відрізку з S – через $AC_{\text{loc}}(S; X)$. Детальніше про простори векторнозначних функцій можна дізнатися в [2, 3, 7].

Вважатимемо, що $p > 2$ – деяке дійсне число, $p' := p/(p-1)$. Нехай V – дійсний рефлексивний банахів простір, а $B: V \rightarrow V'$ – лінійний неперервний оператор такий, що $\langle Bv_1, v_2 \rangle_{V'} = \langle Bv_2, v_1 \rangle_{V'}$ для довільних $v_1,$

$\mathbf{v}_2 \in V$ і $\langle B\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_V > 0$ для будь-якого $\mathbf{v} \in V$, $\{0\}$. Тоді білінійна форма $\langle B\cdot, \cdot \rangle_V$ визначає скалярний добуток, а функціонал $\langle B\cdot, \cdot \rangle_V^{1/2}$ – норму на V . Позначимо поповнення простору V у нормі $\langle B\cdot, \cdot \rangle_V^{1/2}$ через V_B . Очевидно, що вкладення $V \subset V_B$ – щільне і для довільного $\mathbf{v} \in V$ виконується нерівність $\|\mathbf{v}\|_{V_B} \leq \sqrt{\|B\|_L} \cdot \|\mathbf{v}\|_V$. Через ототожнення функціоналів маємо щільне вкладення $V_B' \subset V'$, причому $\|\mathbf{w}\|_{V'} \leq \sqrt{\|B\|_L} \cdot \|\mathbf{w}\|_{V_B'}$ для кожного $\mathbf{w} \in V_B'$. Простори V_B та V_B' є гільбертовими. Оператор B має єдине лінійне неперервне продовження $B : V_B \rightarrow V_B'$. Скалярний добуток на V_B' задовольняє умову

$$(\mathbf{w}, B\mathbf{v})_{V_B'} = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle_V, \quad \mathbf{w} \in V_B', \mathbf{v} \in V, \quad (3)$$

звідки, взявши $\mathbf{w} = B\mathbf{v}$, маємо

$$\|B\mathbf{v}\|_{V_B'} = \|\mathbf{v}\|_{V_B}, \quad \mathbf{v} \in V_B. \quad (4)$$

Отже, оператор $B : V_B \rightarrow V_B'$ є рісовським ізоморфізмом. Обґрунтування цих фактів можна знайти в монографіях [21] та [22].

Надалі нам буде потрібне таке твердження.

Лема 2.1. ([13], лема 2.1) *Нехай $\mathbf{v} \in L_{\text{loc}}^p(S; V)$, $(B\mathbf{v})' \in L_{\text{loc}}^{p'}(S; V')$. Тоді $\mathbf{v} \in C(S; V_B)$, $B\mathbf{v} \in C(S; V_B')$ і функція $\mathbf{t} \mapsto \|\mathbf{v}(\mathbf{t})\|_{V_B}^2 \equiv \|B\mathbf{v}(\mathbf{t})\|_{V_B'}^2$ є абсолютно неперервною на кожному відрізку з S . Відтак,*

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{v}(\mathbf{t})\|_{V_B}^2 = \frac{d}{dt} \|B\mathbf{v}(\mathbf{t})\|_{V_B'}^2 = 2\langle (B\mathbf{v}(\mathbf{t}))', \mathbf{v}(\mathbf{t}) \rangle_V \quad (5)$$

для м.в. $\mathbf{t} \in S$.

Нехай функціонал $\Phi : V \rightarrow [0, +\infty]$ – опуклий, тобто, для будь-яких векторів $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ і числа $0 \leq t \leq 1$ виконується нерівність

$$\Phi(t\mathbf{v} + (1-t)\mathbf{w}) \leq t\Phi(\mathbf{v}) + (1-t)\Phi(\mathbf{w}),$$

та півнеперервний знизу, тобто

$$\mathbf{v}_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mathbf{v} \quad \text{в } V \quad \Rightarrow \quad \Phi(\mathbf{v}) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \Phi(\mathbf{v}_k).$$

Позначимо через $\text{dom}(\Phi) := \{\mathbf{v} \in V : \Phi(\mathbf{v}) < +\infty\}$ ефективну область функціонала Φ . Вважатимемо, що $0 \in \text{dom}(\Phi)$. Субдиференціалом

функціонала Φ називатимемо відображення $\partial\Phi : V \rightarrow 2^{V'}$, визначене за правилом

$$\partial\Phi(v) := \{v^* \in V' : \Phi(w) \geq \Phi(v) + \langle v^*, w - v \rangle_V \quad \forall w \in V\}$$

для кожного $v \in V$. Ми ототожнюватимемо субдиференціал $\partial\Phi$ з його графіком, вважаючи, що елемент $[v, v^*] \in \partial\Phi$ тоді і лише тоді, коли $v^* \in \partial\Phi(v)$. Областю визначення субдиференціала $\partial\Phi$ називатимемо множину $D(\partial\Phi) := \{v \in V : \partial\Phi(v) \neq \emptyset\}$. Рокафеллар у праці [19, теорема А] довів, що субдиференціал $\partial\Phi$ є *максимальним монотонним оператором*, тобто

$$\langle v_1^* - v_2^*, v_1 - v_2 \rangle_V \geq 0 \quad \forall [v_i, v_i^*] \in \partial\Phi, i = 1, 2,$$

і для будь-якого елемента $[v_1, v_1^*] \in V \times V'$

$$\langle v_1^* - v_2^*, v_1 - v_2 \rangle_V \geq 0 \quad \forall [v_2, v_2^*] \in \partial\Phi \Rightarrow [v_1, v_1^*] \in \partial\Phi.$$

Дамо означення розв'язку задачі (2).

Означення 2.1. Функцію $u : S \rightarrow V$ називатимемо *розв'язком* задачі (2), якщо вона задовольняє умови

- 1) $Bu \in AC_{\text{loc}}(S; V')$;
- 2) $u(t) \in D(\partial\Phi)$ для м.в. $t \in S$;
- 3) існує функція $g : S \rightarrow V'$ така, що для м.в. $t \in S$ маємо $g(t) \in \partial\Phi(u(t))$ і

$$(Bu(t))' + g(t) = f(t) \quad \text{в } V'.$$

Тепер сформулюємо і доведемо основний результат цієї праці.

Теорема 2.1. Нехай виконуються умови:

- (i) існує стала $K_1 > 0$ така, що

$$\Phi(v) \geq K_1 \|v\|_V^p \quad \forall v \in \text{dom}(\Phi);$$
- (ii) існують стала $K_2 > 0$ і число $q \in (2, p]$ такі, що для будь-яких $v_1, v_2 \in V$, $v_1^* \in \partial\Phi(v_1)$ і $v_2^* \in \partial\Phi(v_2)$ справджується нерівність

$$\langle v_1^* - v_2^*, v_1 - v_2 \rangle_V \geq K_2 \|v_1 - v_2\|_V^q.$$

Тоді, якщо функція $f \in L_{\text{loc}}^2(S; V_B')$, то задача (2) має єдиний розв'язок u в класі функцій $\{w \in L_{\text{loc}}^p(S; V) : Bw \in W_{\text{loc}}^{1,p'}(S; V')\}$. Крім того, $Bu \in H_{\text{loc}}^1(S; V_B')$, $\Phi(u(\cdot)) \in L_{\text{loc}}^\infty(S)$ і для кожного $t \in S$ функція u задовольняє оцінку

$$\begin{aligned} & \|Bu(t)\|_{V_B'}^2 + \int_{t-1}^t \|(Bu(\tau))'\|_{V_B'}^2 d\tau + \int_{t-1}^t \|u(\tau)\|_V^p d\tau + \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in [t-1, t]} \Phi(u(\tau)) \leq \\ & \leq C_1 + C_2 \int_{t-2}^t \|f(\tau)\|_{V_B'}^2 d\tau, \end{aligned} \quad (6)$$

де C_1, C_2 – додатні сталі, що залежать лише від $K_1, \Phi(0), p$ і $\|B\|_L$.

Доведення. Єдиність. Нехай $u_1, u_2 \in L_{\text{loc}}^p(S; V)$ – два можливі розв'язки задачі (2) такі, що $Bu_1, Bu_2 \in W_{\text{loc}}^{1,p'}(S; V')$. Тоді для кожного $i \in \{1, 2\}$ з означення розв'язку задачі (2) випливає існування функції $g_i : S \rightarrow V'$ такої, що $g_i(t) \in \partial\Phi(u_i(t))$ і

$$(Bu_i(t))' + g_i(t) = f(t) \quad \text{в } V' \quad (7)$$

для м.в. $t \in S$. Приймемо $w := u_1 - u_2$. З рівності (7) отримаємо для м.в. $t \in S$

$$(Bw(t))' + g_1(t) - g_2(t) = 0 \quad \text{в } V'. \quad (8)$$

Помноживши (8) скалярно на w , одержимо

$$\langle (Bw(t))', w(t) \rangle_V + \langle g_1(t) - g_2(t), u_1(t) - u_2(t) \rangle_V = 0$$

для м.в. $t \in S$. Звідси і леми 2.1. отримаємо

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|_{V_B}^2 + \langle g_1(t) - g_2(t), u_1(t) - u_2(t) \rangle_V = 0$$

для м.в. $t \in S$. З останньої рівності, застосувавши до другого доданка умову (ii), отримаємо таку диференціальну нерівність:

$$\frac{1}{2} \frac{dy(t)}{dt} + (y(t))^{q/2} \leq 0 \quad \text{для м.в. } t \in S,$$

де $y(t) = \|u_1(t) - u_2(t)\|_{V_B}^2$. Звідси та леми 1.1 праці [1] випливає, що $y \equiv 0$ на S , тобто, $u_1(t) = u_2(t)$ для м.в. $t \in S$.

Існування. Доведення існування розв'язку задачі (2) проведемо у три кроки.

Крок 1 (Апроксимація розв'язку). Спочатку визначимо функціонал $\Phi_{V_B} : V_B \rightarrow [0, +\infty]$ за правилом: $\Phi_{V_B}(v) := \Phi(v)$, якщо $v \in V$, і $\Phi_{V_B}(v) := +\infty$ в іншому випадку. Зазначимо, що з умови (i), леми IV.5.2 та твердження IV.5.2 монографії [22] випливає, що Φ_{V_B} є власним опуклим півнеперервним знизу функціоналом на гільбертовому просторі V_B , $\operatorname{dom}(\Phi_{V_B}) = \operatorname{dom}(\Phi) \subset V$ і $\partial\Phi_{V_B} = \partial\Phi \cap (V \times V_B')$, де $\partial\Phi_{V_B} : V_B \rightarrow 2^{V_B'}$ – субдиференціал функціонала Φ_{V_B} . З неперервності вкладення $V \subset V_B$,

умови (i) і твердження IV.1.4 монографії [22] впливає існування елемента $u_0 \in \text{dom}(\Phi_{V_B})$ такого, що $\Phi_{V_B}(u_0) \leq \Phi_{V_B}(v)$ для всіх $v \in V_B$. Тому з означення субдиференціала $\partial\Phi_{V_B}$ маємо $0 \in \partial\Phi_{V_B}(u_0)$.

Тепер побудуємо послідовність функцій, що в певному сенсі апроксимують розв'язок задачі (2). Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $T \geq 0$, коли $S = (-\infty, T]$. Визначимо $S_k := S \cap \{t \in \mathbb{I} : t \geq -k\}$, $k \in \mathbb{Y}$. Для кожного числа $k \in \mathbb{Y}$ розглянемо задачу знаходження функції $\hat{u}_k \in L^2_{\text{loc}}(S_k; V_B)$ такої, що $(B\hat{u}_k)' \in L^2_{\text{loc}}(S_k; V_B')$ і

$$(B\hat{u}_k(t))' + \partial\Phi_{V_B}(\hat{u}_k(t)) \ni f(t), \quad t \in S_k, \quad (9a)$$

$$B\hat{u}_k(-k) = Bu_0. \quad (9b)$$

Оскільки оператор B – рісовський ізоморфізмом гільбертового простору V_B на спряжений V_B' , то задача (9) еквівалентна задачі на знаходження функції $\hat{u}_k \in H^1_{\text{loc}}(S_k; V_B)$ такої, що

$$\hat{u}'_k(t) + B^{-1} \circ \partial\Phi_{V_B}(\hat{u}_k(t)) \ni B^{-1}f(t), \quad t \in S_k, \quad (10a)$$

$$\hat{u}_k(-k) = u_0. \quad (10b)$$

Позаяк $u_0 \in \text{dom}(\Phi_{V_B})$, то з [14, твердження 3.12] або [22, твердження IV.5.2] впливає існування єдиного розв'язку задачі (10), а отже, і задачі (9), такого, що $\hat{u}_k(t) \in D(\partial\Phi_{V_B})$ для м.в. $t \in S_k$. Зазначимо, що $D(\partial\Phi_{V_B}) \subset \text{dom}(\Phi_{V_B})$, тому $\hat{u}_k(t) \in V$ для м.в. $t \in S_k$. Продовжимо функцію $\hat{u}_k$ на весь проміжок S , прийнявши її рівною u_0 на $(-\infty, -k]$ і позначимо це продовження через u_k . На підставі того, що $0 \in \partial\Phi_{V_B}(u_0)$ функція $u_k \in H^1_{\text{loc}}(S; V_B)$, $(Bu_k)' \in L^2_{\text{loc}}(S; V_B')$, для кожного $k \in \mathbb{Y}$ є розв'язком задачі без початкових умов

$$(Bu_k(t))' + \partial\Phi_{V_B}(u_k(t)) \ni f_k(t), \quad t \in S, \quad (11)$$

де $f_k(t) = f(t)$ на S_k і $f_k(t) = 0$ на $(-\infty, -k]$. Крім того, $u_k(t) \in V$ для м.в. $t \in S$.

Для того, щоб показати збіжність послідовності $\{u_k\}_{k=1}^{+\infty}$ до розв'язку задачі (2) нам будуть потрібні деякі оцінки апроксимуючих розв'язків u_k , $k \in \mathbb{Y}$.

Крок 2 (Оцінки апроксимуючих розв'язків). Нехай $k \in \mathbb{Y}$ – яке-небудь число. Оскільки функція $u_k \in L^2_{\text{loc}}(S; V_B)$, $(Bu_k)' \in L^2_{\text{loc}}(S; V_B')$ є розв'язком

задачі (11), то існує функція $g_k \in L^2_{\text{loc}}(\mathbf{S}; V_B')$ така, що для м.в. $t \in \mathbf{S}$ маємо $g_k(t) \in \partial\Phi_{V_B}(u_k(t))$ і

$$(Bu_k(t))' + g_k(t) = f_k(t) \quad \text{в } V_B'. \quad (12)$$

Візьмемо функцію $\theta_1 \in C^1(\mathbb{R})$ таку, що $\theta_1(t) = 0$ при $t \in (-\infty, -1]$, $\theta_1(t) = \exp(\frac{t^2}{t^2-1})$ при $t \in (-1, 0)$, $\theta_1(t) = 1$ при $t \in [0, +\infty)$. Очевидно, що

$$\sup_{t \in (-1, +\infty)} \frac{\theta_1'(t)}{\theta_1''(t)} < C_3(\nu) \quad (13)$$

для кожного $0 < \nu < 1$, де $C_3(\nu) > 0$ – стала, що залежить лише від ν .

Нехай $t_1, t_2 \in \mathbf{S}$ ($t_1 < t_2$), $\delta > 0$ – довільні дійсні числа. Приймемо $\theta(t) = \theta_1(\frac{t-t_1}{\delta})$ для кожного $t \in \mathbf{S}$. Очевидно, що $\theta u_k \in L^2_{\text{loc}}(\mathbf{S}; V_B)$. Домножимо (12) скалярно на θu_k та проінтегруємо за t від $t_1 - \delta$ до $\tau \in [t_1, t_2]$. У результаті отримаємо

$$\begin{aligned} & \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t) \langle (Bu_k)', u_k(t) \rangle_{V_B} dt + \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t) \langle g_k(t), u_k(t) \rangle_{V_B} dt = \\ & = \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t) \langle f_k(t), u_k(t) \rangle_{V_B} dt. \end{aligned}$$

Звідси, застосувавши лему 2.1. до першого доданка, матимемо

$$\begin{aligned} & \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t) \frac{d}{dt} \|u_k(t)\|_{V_B}^2 dt + 2 \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t) \langle g_k(t), u_k(t) \rangle_{V_B} dt = \\ & = 2 \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t) \langle f_k(t), u_k(t) \rangle_{V_B} dt. \end{aligned} \quad (14)$$

Інтегруючи частинами перший доданок лівої сторони рівності (14), одержимо

$$\begin{aligned} & \|u_k(\tau)\|_{V_B}^2 + 2 \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t) \langle g_k(t), u_k(t) \rangle_{V_B} dt = \\ & = \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta'(t) \|u_k(t)\|_{V_B}^2 dt + 2 \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t) \langle f_k(t), u_k(t) \rangle_{V_B} dt. \end{aligned} \quad (15)$$

Оскільки $\partial\Phi_{V_B} \subset \partial\Phi$, то $g_k(t) \in \partial\Phi(u_k(t))$ для м.в. $t \in \mathbf{S}$. Звідси і з означення субдиференціала $\partial\Phi$, врахувавши, що $0 \in \text{dom}(\Phi)$, отримаємо

$$\Phi(u_k(t)) \leq \langle g_k(t), u_k(t) \rangle_{V_B} + \Phi(0) \quad (16)$$

для м.в. $t \in \mathbf{S}$. З (16) та умови (i), використовуючи нерівності Гельдера та Коші для першого доданка правої сторони (16), для м.в. $t \in \mathbf{S}$ матимемо

$$K_1 \|u_k(t)\|_V^p \leq \frac{1}{2} \|g_k(t)\|_{V_B'}^2 + \frac{1}{2} \|u_k(t)\|_{V_B}^2 + \Phi(0).$$

Оскільки $u_k \in L_{\text{loc}}^2(S; V_B)$ і $g_k \in L_{\text{loc}}^2(S; V_B')$, то $u_k \in L_{\text{loc}}^p(S; V)$.

Оцінімо тепер перший доданок правої сторони рівності (15), використовуючи (13), неперервність вкладення $V \subset V_B$ та нерівність Юнга

$$\begin{aligned} \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta'(t) \|u_k(t)\|_{V_B}^2 dt &\leq \|B\|_L \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta'(t) \|u_k(t)\|_V^2 dt = \\ &= \|B\|_L \int_{t_1-\delta}^{\tau} \frac{\theta'(t)}{\theta^{2/p}(t)} \theta^{2/p}(t) \|u_k(t)\|_V^2 dt \leq \varepsilon \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t) \|u_k(t)\|_V^p dt + \\ &\quad + C_4 \varepsilon^{-\frac{2}{p-2}} \int_{t_1-\delta}^{t_2} (\theta'(t) \theta^{-2/p}(t))^{\frac{p}{p-2}} dt \leq \\ &\leq \varepsilon \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t) \|u_k(t)\|_V^p dt + C_5 (\delta \cdot \varepsilon)^{-\frac{2}{p-2}}, \end{aligned} \quad (17)$$

де $\varepsilon > 0$ – довільне число; C_4 і C_5 – додатні сталі, що залежать лише від числа p і норми оператора B .

Далі оцінімо другий доданок правої сторони рівності (15), застосовуючи нерівність Юнга з $\eta > 0$

$$\begin{aligned} 2 \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t) \langle f_k(t), u_k(t) \rangle_{V_B} dt &\leq \\ &\leq \eta \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t) \|u_k(t)\|_V^p dt + C_6 \eta^{\frac{1}{1-p}} \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t) \|f_k(t)\|_{V_B'}^p dt, \end{aligned} \quad (18)$$

де $C_6 > 0$ – стала, що залежить від p і норми оператора B .

Оцінімо другий доданок лівої сторони рівності (15), використовуючи (16) та умову (i). У результаті матимемо

$$\begin{aligned} 2 \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t) \langle g_k(t), u_k(t) \rangle_{V_B} dt &\geq 2 \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t) (\Phi(u_k(t)) - \Phi(0)) dt \geq \\ &\geq \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t) (\Phi(u_k(t)) + K_1 \|u_k(t)\|_V^p - 2\Phi(0)) dt. \end{aligned} \quad (19)$$

З (15), використовуючи (17)-(19), вибравши $\varepsilon = \eta = K_1/4$, отримаємо

$$\begin{aligned} \|u_k(\tau)\|_{V_B}^2 + \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t) (\Phi(u_k(t)) + \|u_k(t)\|_V^p) dt &\leq \\ &\leq C_7 \delta^{-\frac{2}{p-2}} + C_8 \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t) \|f_k(t)\|_{V_B'}^p dt + C_9 \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t) \Phi(0) dt, \end{aligned}$$

або, на підставі довільності $\tau \in [t_1, t_2]$ і означення θ ,

$$\max_{t \in [t_1, t_2]} \|u_k(t)\|_{V_B}^2 + \int_{t_1}^{t_2} \|u_k(t)\|_V^p dt + \int_{t_1}^{t_2} \Phi(u_k(t)) dt \leq$$

$$\leq 2C_7\delta^{-\frac{2}{p-2}} + 2C_8 \int_{t_1-\delta}^{t_2} \|f_k(t)\|_{V_B}^{p'} dt + 2C_9\Phi(0)(t_2 - t_1 + \delta), \quad (20)$$

де C_7 , C_8 та C_9 – деякі додатні сталі, що залежать лише від K_1 , p і норми оператора B .

З (20) та означення функції f_k , на підставі довільності t_1 , $t_2 \in S$ та $\delta > 0$, випливає, що

$$\text{послідовність } \{u_k\}_{k=1}^{+\infty} \text{ – обмежена в просторі } C(S; V_B) \cap L_{\text{loc}}^p(S; V); \quad (21)$$

$$\text{послідовність } \{\Phi(u_k(\cdot))\}_{k=1}^{+\infty} \text{ – обмежена в просторі } L_{\text{loc}}^1(S). \quad (22)$$

Знайдемо оцінку похідної $(Bu_k)'$. Нехай t_1 , t_2 і δ – довільні дійсні числа такі, що t_1 , $t_2 \in S$, $t_1 < t_2$ і $\delta > 0$. Домножимо (12) скалярно на функцію $\theta(Bu_k)' \in L_{\text{loc}}^2(S; V_B')$ (функція θ – така ж, як і раніше) та проінтегруємо отриману рівність за t від $t_1 - \delta$ до $\tau \in [t_1, t_2]$

$$\begin{aligned} & \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t) \| (Bu_k(t))' \|_{V_B}^2 dt + \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t) (g_k(t), (Bu_k(t))')_{V_B'} dt = \\ & = \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t) (f_k(t), (Bu_k(t))')_{V_B'} dt. \end{aligned} \quad (23)$$

Оскільки $B : V_B \rightarrow V_B'$ – рісовський ізоморфізм і $u_k' \in L_{\text{loc}}^2(S; V_B)$, $(Bu_k)' \in L_{\text{loc}}^2(S; V_B')$, то, очевидно, що $(Bu_k)' = Bu_k'$ і для м.в. $t \in S$ виконується рівність

$$(g_k(t), (Bu_k(t))')_{V_B'} = \langle g_k(t), u_k'(t) \rangle_{V_B}$$

(див. (3)). Врахувавши, що $g_k \in L^2(t_1 - \delta, t_2; V_B')$, з останньої рівності і леми IV.4.3 монографії [22] випливає, що функція $\Phi_{V_B}(u_k(\cdot)) \in AC([t_1 - \delta, t_2])$ і

$$\frac{d}{dt} \Phi_{V_B}(u_k(t)) = (g_k(t), (Bu_k(t))')_{V_B'} \quad (24)$$

для м.в. $t \in (t_1 - \delta, t_2)$. Використовуючи (24), можемо оцінити другий доданок лівої сторони рівності (23)

$$\begin{aligned} & \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t) (g_k(t), (u_k(t))')_{V_B'} dt = \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t) \frac{d}{dt} \Phi_{V_B}(u_k(t)) dt = \\ & = \Phi_{V_B}(u_k(\tau)) - \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta'(t) \Phi_{V_B}(u_k(t)) dt \geq \\ & \geq \Phi_{V_B}(u_k(\tau)) - \max_{t \in [t_1-\delta, t_2]} \theta'(t) \int_{t_1-\delta}^{t_2} \Phi_{V_B}(u_k(t)) dt. \end{aligned} \quad (25)$$

Використовуючи нерівність Коші, оцінимо праву сторону (23)

$$\begin{aligned} & \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t) (\mathbf{f}_k(t), (\mathbf{B}\mathbf{u}_k(t))')_{V_B'} dt \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t) \|\mathbf{f}_k(t)\|_{V_B'}^2 dt + \frac{1}{2} \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t) \|(\mathbf{B}\mathbf{u}_k(t))'\|_{V_B'}^2 dt. \end{aligned} \quad (26)$$

З (23), нерівностей (25) і (26), врахувавши, що

$$\max_{t \in I} \theta'(t) = \max_{t \in [t_1-\delta, t_1]} \theta'(t) < 3/\delta,$$

матимемо оцінку

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{\tau} \|(\mathbf{B}\mathbf{u}_k(t))'\|_{V_B'}^2 dt + \Phi_{V_B}(\mathbf{u}_k(\tau)) \leq \\ & \leq \int_{t_1-\delta}^{\tau} \|\mathbf{f}_k(t)\|_{V_B'}^2 dt + \frac{6}{\delta} \int_{t_1-\delta}^{t_2} \Phi_{V_B}(\mathbf{u}_k(t)) dt. \end{aligned}$$

Звідси і означення функціонала Φ_{V_B} , за рахунок того, що $\mathbf{u}_k \in \mathbf{L}_{\text{loc}}^p(\mathbf{S}; \mathbf{V})$, маємо

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \|(\mathbf{B}\mathbf{u}_k(t))'\|_{V_B'}^2 dt + \max_{t \in [t_1, t_2]} \Phi(\mathbf{u}_k(t)) \leq \\ & \leq 2 \int_{t_1-\delta}^{t_2} \|\mathbf{f}_k(t)\|_{V_B'}^2 dt + \frac{12}{\delta} \int_{t_1-\delta}^{t_2} \Phi(\mathbf{u}_k(t)) dt. \end{aligned} \quad (27)$$

З нерівності (27), на підставі (22) та означення функції $\mathbf{f}_k$, з огляду на довільність $t_1, t_2 \in \mathbf{S}$ та $\delta > 0$, випливає, що

$$\begin{aligned} & \text{послідовність } \{(\mathbf{B}\mathbf{u}_k)'\}_{k=1}^{+\infty} \text{ — обмежена в просторі } \mathbf{L}_{\text{loc}}^2(\mathbf{S}; \mathbf{V}_B'), \\ (28) & \text{послідовність } \{\Phi(\mathbf{u}_k(\cdot))\}_{k=1}^{+\infty} \text{ — обмежена в просторі } \mathbf{L}_{\text{loc}}^\infty(\mathbf{S}). \end{aligned} \quad (29)$$

З (12), (28) та означення функції $\mathbf{f}_k$ отримуємо, що

$$\text{послідовність } \{\mathbf{g}_k\}_{k=1}^{+\infty} \text{ — обмежена в просторі } \mathbf{L}_{\text{loc}}^2(\mathbf{S}; \mathbf{V}_B'). \quad (30)$$

Крок 3 (Граничний перехід). Оскільки $\mathbf{V}$ — рефлексивний банахів простір, а $\mathbf{V}_B$ — гільбертів простір, то з (21), (28) та (30) (див., наприклад, [2, 7, 22]) випливає, що з послідовності $\{\mathbf{u}_k\}_{k=1}^{+\infty}$ можна виділити підпослідовність, за якою ми збережемо позначення $\{\mathbf{u}_k\}_{k=1}^{+\infty}$ таку, що

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mathbf{u} \quad \text{слабко в } \mathbf{L}_{\text{loc}}^p(\mathbf{S}; \mathbf{V}), \\ (31) & \mathbf{u}_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mathbf{u} \quad * \text{-слабко в } \mathbf{L}_{\text{loc}}^\infty(\mathbf{S}; \mathbf{V}_B), \end{aligned} \quad (32)$$

$$(\mathbf{B}u_k)' \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (\mathbf{B}u)' \quad \text{слабко в } L_{\text{loc}}^2(\mathbf{S}; \mathbf{V}_B'), \quad (33)$$

$$g_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} g \quad \text{слабко в } L_{\text{loc}}^2(\mathbf{S}; \mathbf{V}_B'). \quad (34)$$

Звідси випливає, що $\mathbf{B}u \in \mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\mathbf{S}; \mathbf{V}_B')$.

Покажемо, що

$$u_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u \quad \text{сильно в } L_{\text{loc}}^2(\mathbf{S}; \mathbf{V}_B), \quad (35)$$

Нехай $l, m \in \mathbb{N}$ – довільні числа, а $u_l, u_m \in L_{\text{loc}}^2(\mathbf{S}; \mathbf{V}_B)$, $(\mathbf{B}u_l)'$, $(\mathbf{B}u_m)' \in L_{\text{loc}}^2(\mathbf{S}; \mathbf{V}_B')$ – розв'язки задачі (11), що відповідають $k = l$ і $k = m$ відповідно. Тоді існують функції $g_l, g_m \in L_{\text{loc}}^2(\mathbf{S}; \mathbf{V}_B')$ такі, що для м.в. $t \in \mathbf{S}$ маємо $g_l(t) \in \partial\Phi_{V_B}(u_l(t))$, $g_m(t) \in \partial\Phi_{V_B}(u_m(t))$ і виконується (12) для відповідно $k = l$ та $k = m$. Візьмемо різницю між (12) для $k = l$ та (12) для $k = m$

$$(\mathbf{B}u_l(t))' - (\mathbf{B}u_m(t))' + g_l(t) - g_m(t) = f_l(t) - f_m(t) \quad \text{в } \mathbf{V}_B' \quad (36)$$

для м.в. $t \in \mathbf{S}$.

Нехай $t_1, t_2 \in \mathbf{S}$ ($t_1 < t_2$), $\delta > 0$ – довільні числа, а функція θ – така ж як і раніше. Домножимо (36) скалярно на $\theta(u_l - u_m)$ та проінтегруємо за t від $t_1 - \delta$ до $\tau \in [t_1, t_2]$. У результаті отримаємо

$$\begin{aligned} & \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t) \langle (\mathbf{B}w_{lm}(t))', w_{lm}(t) \rangle_{V_B} dt + \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t) \langle g_l(t) - g_m(t), w_{lm}(t) \rangle_{V_B} dt = \\ & = \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t) \langle f_l(t) - f_m(t), w_{lm}(t) \rangle_{V_B} dt, \end{aligned}$$

де $w_{lm} := u_l - u_m$. Звідси, застосувавши лему 2.1. до першого доданка, а тоді проінтегрувавши його частинами, матимемо

$$\begin{aligned} & \|w_{lm}(\tau)\|_{V_B}^2 + 2 \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t) \langle g_l(t) - g_m(t), w_{lm}(t) \rangle_{V_B} dt = \\ & = \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta'(t) \|w_{lm}(t)\|_{V_B}^2 dt + 2 \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t) \langle f_l(t) - f_m(t), w_{lm}(t) \rangle_{V_B} dt. \end{aligned} \quad (37)$$

Використовуючи умову (ii), оцінимо другий доданок лівої сторони (37)

$$2 \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t) \langle g_l(t) - g_m(t), w_{lm}(t) \rangle_{V_B} dt \geq 2K_2 \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t) \|w_{lm}(t)\|_{V_B}^q dt. \quad (38)$$

Аналогічно, як при доведенні (17), оцінимо перший доданок правої сторони рівності (37)

$$\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta'(t) \|w_{lm}(t)\|_{V_B}^2 dt \leq 2K_2 \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t) \|w_{lm}(t)\|_{V_B}^q dt + C_{10} \delta^{-\frac{2}{q-2}}, \quad (39)$$

де $C_{10} > 0$ – деяка стала, що залежить лише від q і K_2 .

Використовуючи нерівність Гельдера, означення функції θ і неперервність вкладення $V \subset V_B$, оцінимо другий доданок правої сторони (37)

$$\begin{aligned} & 2 \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t) \langle \hat{f}_l(t) - f_m(t), w_{lm}(t) \rangle_{V_B} dt \leq \\ & \leq 2\sqrt{\|B\|_L} \left(\int_{t_1-\delta}^{t_2} \|\hat{f}_l(t) - f_m(t)\|_{V_B}^{p'} dt \right)^{1/p'} \left(\int_{t_1-\delta}^{t_2} \|w_{lm}(t)\|_V^p dt \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (40)$$

З (37)-(40) і означення функції w_{lm} , на підставі довільності $\tau \in [t_1, t_2]$, отримаємо

$$\begin{aligned} & \max_{t \in [t_1, t_2]} \|u_l(t) - u_m(t)\|_{V_B}^2 \leq C_{10} \delta^{-\frac{2}{q-2}} + \\ & + 2\sqrt{\|B\|_L} \left(\int_{t_1-\delta}^{t_2} \|\hat{f}_l(t) - f_m(t)\|_{V_B}^{p'} dt \right)^{1/p'} \left(\int_{t_1-\delta}^{t_2} \|w_{lm}(t)\|_V^p dt \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (41)$$

Оскільки послідовність $\{u_k\}_{k=1}^{+\infty}$ – обмежена в просторі $L_{loc}^p(S; V)$, то з (41), врахувавши довільність чисел $t_1, t_2 \in S$, $\delta > 0$ і фундаментальність послідовності $\{f_k\}_{k=1}^{+\infty}$ в просторі $L_{loc}^{p'}(S; V_B')$, впливає фундаментальність послідовності $\{u_k\}_{k=1}^{+\infty}$ в просторі $C(S; V_B)$, а отже, і в $L_{loc}^2(S; V_B)$. Звідси, використавши повноту простору $L_{loc}^2(S; V_B)$, отримаємо (35).

З (29), (35) і півнеперервності знизу функціонала Φ випливає, що функція $\Phi(u(\cdot)) \in L_{loc}^\infty(S)$.

Перейдемо в (12) до границі при $k \rightarrow \infty$, врахувавши (33), (34) і означення функції f_k . У результаті отримаємо

$$(Bu(t))' + g(t) = f(t) \quad \text{в } V_B' \text{ для м.в. } t \in S.$$

Для завершення доведення теореми залишилося лише показати, що $u(t) \in D(\partial\Phi)$ і $g(t) \in \partial\Phi(u(t))$ для м.в. $t \in S$.

Нехай $t \in S$, $h > 0$ – довільні числа, а $[v, v^*] \in \partial\Phi$ – будь-який елемент. Оскільки $g_k(\tau) \in \partial\Phi(u_k(\tau))$ для м.в. $\tau \in S$, то з монотонності субдиференціала $\partial\Phi$ випливає, що

$$\langle g_k(\tau) - v^*, u_k(\tau) - v \rangle_V \geq 0 \quad \text{для м.в. } \tau \in S.$$

Проінтегруємо цю нерівність за τ від $t-h$ до t

$$\int_{t-h}^t \langle g_k(\tau) - v^*, u_k(\tau) - v \rangle_V d\tau \geq 0. \quad (42)$$

Перейдемо тепер в (42) до границі при $k \rightarrow \infty$, використовуючи (34) і (35). У результаті отримаємо

$$\begin{aligned} \int_{t-h}^t \langle g_k(\tau) - v^*, u_k(\tau) - v \rangle_V d\tau &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} \\ &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_{t-h}^t \langle g(\tau) - v^*, u(\tau) - v \rangle_V d\tau. \end{aligned} \quad (43)$$

З теореми 2 монографії [4, с. 162] випливає, що

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{h} \int_{t-h}^t g(\tau) d\tau &= g(t) \quad \text{для м.в. } t \in S, \\ \lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{h} \int_{t-h}^t u(\tau) d\tau &= u(t) \quad \text{для м.в. } t \in S. \end{aligned}$$

Тому, поділивши (43) на h і спрямувавши h до $+0$, одержимо

$$\langle g(t) - v^*, u(t) - v \rangle_V \geq 0 \quad \text{для м.в. } t \in S.$$

Звідси, на підставі максимальної монотонності $\partial\Phi$ і довільності $[v, v^*] \in \partial\Phi$ випливає, що $[u(t), g(t)] \in \partial\Phi$ для м.в. $t \in S$.

Оцінка розв'язку (6) випливає безпосередньо з оцінок (20) та (27), рівності (4), півнеперервності знизу функціонала Φ , збіжностей (31)-(33), (35) та теорем 1 (с. 173) і 9 (с. 179) монографії [4].

Приклад. У цьому пункті наведемо приклад застосування абстрактних результатів попереднього пункту до розв'язання задачі без початкових умов для одного неявного нелінійного параболічного рівняння з односторонніми крайовими умовами. Зауважимо, що більш загальні задачі без початкових умов можуть бути розв'язані подібним способом.

Отже, нехай Ω – обмежена область в евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) з межею $\partial\Omega$, що є C^1 многовидом розмірності $n-1$ [22]; $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ – одиничний вектор зовнішньої до $\partial\Omega$ нормалі; S – дійсна числова вісь або промінь $(-\infty, T]$, де $T \in \mathbb{R}$. Прийнемо $Q := \Omega \times S$, $\Sigma := \partial\Omega \times S$. Розглянемо задачу без початкових умов: знайти функцію $u : \bar{\Omega} \times S \rightarrow \mathbb{R}$ таку, що

$$\frac{\partial}{\partial t}(b(x)u) - \Delta_p u + |u|^{p-2} u = f(x, t) \quad \text{в } Q, \quad (44a)$$

$$u \geq 0, \quad |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nu \geq 0 \quad \text{на } \Sigma, \quad (44b)$$

$$u + |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nu = 0 \quad \text{на } \Sigma, \quad (44c)$$

де $p > 2$ – дійсне число; $\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ – псевдо лапласіан (p -лапласіан); b і f – деякі задані дійснозначні функції. Якщо функція $u(x, t)$ – температура тіла Ω в точці x в момент часу t , а рівняння (44a) описує процес розподілу тепла в тілі Ω , то $|\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nu$ – керування тепловим

поток на межі $\partial\Omega$, яке підтримує температуру u невід'ємною на $\partial\Omega$. Крайові умови (44b) і (44c) показують, що потрібний стан отримують завдяки джерелам тепла, які розміщені на межі $\partial\Omega$, причому теплові потоки цих джерел дорівнюють нулю в кожній точці $\partial\Omega$, де температура u – строго додатна.

Приймемо $V := W^{1,p}(\Omega)$, де $W^{1,p}(\Omega)$ – простір Соболева (див. [8]). Нехай $b \in L^q(\Omega)$, $b(x) > 0$ для м.в. $x \in \Omega$, де $q := p/(p-2)$. Визначимо оператор $B : V \rightarrow V'$, за правилом

$$\langle Bv, w \rangle_V := \int_{\Omega} b(x)v(x)w(x)dx, \quad v, w \in V.$$

Тоді маємо банахів простір $V_B' \equiv b^{1/2}L^2(\Omega) := \{b^{1/2}v : v \in L^2(\Omega)\}$ з нормою $\|w\|_{V_B'} := \left(\int_{\Omega} b^{-1}(x)w^2(x)dx \right)^{1/2}$, $w \in V_B'$ (див., наприклад, [22]).

Нехай $K := \{v \in V : \gamma v(x) \geq 0 \text{ для м.в. } x \in \partial\Omega\}$, де $\gamma : V \rightarrow L^p(\partial\Omega)$ – оператор сліду. Множина K є замкненим опуклим конусом (див. [22, ст. 70]).

Нехай $f \in L^2_{\text{loc}}(S; b^{1/2}L^2(\Omega))$. За аналогією з [5, с. 294-295] і [22, с. 151] ведемо означення узагальненого розв'язку задачі (44).

Означення 3.1. Функцію $u \in L^p_{\text{loc}}(S; V)$, $bu \in H^1_{\text{loc}}(S; b^{1/2}L^2(\Omega))$ називатимемо *узагальненим розв'язком* задачі (44), якщо $u(t) \in K$ для м.в. $t \in S$ і правильна варіаційна нерівність

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial t} (b(x)u(x,t)) + |u(x,t)|^{p-2} u(x,t) - f(x,t) \right) (v(x) - u(x,t)) dx + \\ & + \int_{\Omega} |\nabla u(x,t)|^{p-2} \nabla u(x,t) \cdot (\nabla v(x) - \nabla u(x,t)) \geq 0 \end{aligned} \quad (45)$$

для м.в. $t \in S$ і всіх $v \in K$.

Тут і далі $u(x,t) := u(t)(x)$, $f(x,t) := f(t)(x)$.

Доведемо тепер існування єдиного узагальненого розв'язку задачі (44).

Визначимо функціонали Ψ , I_K , $\Phi : V \rightarrow [0, +\infty]$ за правилом

$$\begin{aligned} \Psi(v) &= \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^p dx + \frac{1}{p} \int_{\Omega} |v(x)|^p dx, \quad v \in V, \\ I_K(v) &= \begin{cases} 0, & \text{якщо } v \in K, \\ +\infty, & \text{в іншому випадку,} \end{cases} \quad v \in V, \\ \Phi(v) &= \Psi(v) + I_K(v), \quad v \in V. \end{aligned}$$

Очевидно, що функціонал Φ є власним опуклим і півнеперервним знизу. Розглянемо субдиференціальне включення в просторі V'

$$(\mathbf{B}\mathbf{u}(\mathbf{t}))' + \partial\Phi(\mathbf{u}(\mathbf{t})) \ni \mathbf{f}(\mathbf{t}), \quad \mathbf{t} \in S. \quad (46)$$

Оскільки функціонал Ψ – диференційований за Гато, то згідно з [6, твердження 2.4.3] включення (46) можна переписати у вигляді

$$(\mathbf{B}\mathbf{u}(\mathbf{t}))' + \Psi'(\mathbf{u}(\mathbf{t})) + \partial I_K(\mathbf{u}(\mathbf{t})) \ni \mathbf{f}(\mathbf{t}), \quad \mathbf{t} \in S, \quad (47)$$

де $\Psi' : V \rightarrow V'$ – похідна Гато функціонала Ψ . Врахувавши, що для будь-яких $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ маємо

$$\begin{aligned} \langle \Psi'(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle_V &= \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x})|^{p-2} \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \mathbf{w}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \\ &+ \int_{\Omega} |\mathbf{v}(\mathbf{x})|^{p-2} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \mathbf{w}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (48)$$

і, що $\partial I_K(\mathbf{v}) := \{\mathbf{v}^* \in V' : \langle \mathbf{v}^*, \mathbf{w} - \mathbf{v} \rangle_V \leq 0 \quad \forall \mathbf{w} \in K\}$ (див. [6, ст. 62]), можемо включення (47) переписати у вигляді варіаційної нерівності (45).

Отже, для того, щоб довести існування єдиного узагальненого розв'язку задачі (44), використавши теорему 2.1, достатньо показати, що функціонал Φ задовольняє умови (i) і (ii) цієї теореми.

Безпосередньо з означення функціонала Φ випливає, що

$$\Phi(\mathbf{v}) \geq K_3 \|\mathbf{v}\|_V^p \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

де $K_3 > 0$ – деяка стала, що залежить лише від числа p . Нехай $\mathbf{v}_i^* \in \partial\Phi(\mathbf{v}_i)$, $i = 1, 2$. Тоді з означення функціонала Φ і рівності (48), використавши при цьому монотонність субдиференціала ∂I_K і нерівність $(|\mathbf{r}_1|^{p-2}\mathbf{r}_1 - |\mathbf{r}_2|^{p-2}\mathbf{r}_2) \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \geq 2^{2-p}|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^p$ правильну для всіх $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in \mathbb{R}^n$ (див., наприклад, [15, лема 3.6]), отримаємо

$$\langle \mathbf{v}_1^* - \mathbf{v}_2^*, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \rangle_V \geq K_4 \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V^p,$$

де K_4 – додатна стала, що залежить лише від $p, \mathbf{b}$. Отож, з теореми 2.1. випливає існування єдиного розв'язку $\mathbf{u} \in L_{\text{loc}}^p(S; V)$, $\mathbf{b}\mathbf{u} \in H_{\text{loc}}^1(S; \mathbf{b}^{1/2}L^2(\Omega))$, включення (46), тому і єдиного узагальненого розв'язку задачі (44).

Отже, ми довели теорему.

Теорема 3.1. *Задача (44) має єдиний узагальнений розв'язок.*

-
1. Бокало Н. М. О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений // Труды семинара им. И. Г. Петровского. – 1989. – Вып. 14. – С. 3–44.

2. Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М., 1978.
3. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Т. 1: Общая теория. – М., 1962.
4. Иосида К. Функциональный анализ. – М., 1967.
5. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., 1972.
6. Панагиотопулос П. Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функции энергии. – М., 1989.
7. Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. – М., 1969.
8. Adams R. A., Fournier J. J. F. Sobolev spaces. – Oxford, 2003.
9. Aizicovici S., Hokkanen V.-M. Doubly nonlinear equations with unbounded operators // Nonlinear Anal. – 2004. – 58, №5-6. – P. 591–607.
10. Aizicovici S., Hokkanen V.-M. Doubly nonlinear periodic problems with unbounded operators // J. Math. Anal. Appl. – 2004. – 292, №2. – P. 540–557.
11. Akagi G. Doubly nonlinear evolution equations governed by time-dependent subdifferentials in reflexive Banach spaces // J. Differ. Equations. – 2006. – 231, №1. – P. 32–56.
12. Barbu V., Favini A. Existence for an implicit nonlinear differential equation // Nonlinear Anal. – 1998. – 32, №1. – P. 33–40.
13. Bokalo M., Dmytryshyn Yu. Problems without initial conditions for degenerate implicit evolution equations // Electron. J. Differ. Equations. – 2008. – 2008, №4. – P. 1–16.
14. Brezis H. Operateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert. – Amsterdam, London: North-Holland Publishing Comp., 1973.
15. Bystrom J. Sharp constants for some inequalities connected to the p -Laplace operator // J. Inequal. Pure and Appl. Math. – 2005. – 6, №2. – P. 1–8.
16. DiBenedetto E., Showalter R. E. Implicit degenerate evolution equations and applications // SIAM J. Math. Anal. – 1981. – 12, №5. – P. 731–751.
17. Kuttler K. L. Non-degenerate implicit evolution inclusions // Electron. J. Differ. Equations. – 2000. – 2000, №34. – P. 1–20.
18. Maitre E., Witomski P. A pseudo-monotonicity adapted to doubly nonlinear elliptic–parabolic equations // Nonlinear Anal. – 2002. – 50, №2. – P. 223–250.

19. *Rockafellar R. T.* On the maximal monotonicity of subdifferential mappings // *Pacific J. Math.* – 1970. – 33, №1. – P. 209–216.
20. *Rulla J., Showalter R. E.* Diffusion in partially fissured media and implicit evolution systems // *Adv. Math. Sci. Appl.* – 1995. – 5, №1. – P. 163–191.
21. *Showalter R. E.* Hilbert space methods for partial differential equations, volume 1 of Monographs and Studies in Mathematics. – Pitman, London-San Francisco, Calif. – Melbourne, 1977.
22. *Showalter R. E.* Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations, volume 49 of Mathematical Surveys and Monographs. – Providence: Amer. Math. Soc., 1997.

THE PROBLEM WITHOUT INITIAL CONDITIONS FOR ABSTRACT IMPLICIT SUBDIFFERENTIAL EVOLUTION INCLUSIONS

Yuriy DMYTRYSHYN

*Ivan Franco National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine*

We study the problem without initial conditions for an abstract implicit subdifferential evolution inclusion. The sufficient conditions for the existence and uniqueness of a solution for this problem without assumptions on the behaviour of the solution and data-in as $t \rightarrow -\infty$ are established. We also present an example where our abstract result applies to the problem without initial conditions for an implicit nonlinear parabolic equation with unilateral boundary conditions.

Key words: problem without initial condition, implicit evolution inclusion, nonlinear evolution equation, subdifferential, existence, uniqueness.

Стаття надійшла до редколегії 02.09.2008

Прийнята до друку 19.10.2008

УДК 539.3

МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ КРИВОЛІНІЙНОЇ ПЛАСТИНИ З КУТОВИМИ ТОЧКАМИ

Віктор РЕВЕНКО

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3б 79053 Львів, Україна*

Розроблено методику знаходження пружно-деформованого стану криволінійної пластини з кутовими точками. Метод ґрунтується на мінімізації квадратичної форми, яку визначають інтегралом від квадратів відхилення знайденого розв'язку і заданих граничних навантажень. Доведено збіжність розв'язку, а також знайдено оцінку точності задоволення граничних умов. Знайдено залежність між можливими стрибками зовнішніх зусиль у кутовій точці. Проведено числовий аналіз розподілу напружень і деформацій. Визначено якісні та кількісні особливості розподілу напружень у пластині.

Ключові слова: плоска задача, бігармонічне рівняння, криволінійна пластина, квадратична форма, аналітично-числовий метод.

Дослідженню пружно-деформованого стану (ПДС) пластин з кутовими точками присвячені праці [1, 2, 10]. Під час розв'язування плоскої задачі широко застосовують методи теорії комплексного змінного [4], проте для обмежених областей за наявності кутових точок ці методи не завжди ефективні. Внаслідок практичної важливості цієї задачі для її розв'язування у прямокутній області використовували різноманітні аналітичні підходи [1, 3, 11]. Огляд літератури наведено в [3, 11].

В [6, 9] теоретично розроблено новий аналітично-числовий метод розв'язування граничних функціональних рівнянь. Цим методом досліджено ПДС півсмуги [5] та довгої пластини [7]. В [8] метод обґрунтовано до розв'язування граничної задачі для бігармонічного рівняння в обмеженій області з кутовими точками.

Далі досліджено деякі аспекти моделювання ПДС криволінійної пластини за допомогою неортогональних функцій. Знайдено ПДС пластини під дією локальних навантажень. Досліджено збіжність, ефективність, точність задоволення граничних умов.

1. Формулювання задачі. Розглянемо плоску задачу для тонкої пластини сталої товщини h , яка займає в плані однозв'язну випуклу обмежену область D з кусково-гладким контуром L з обмеженою кількістю кутових точок. [4, 8, 9]. На контурі L задано граничні умови в нормальних і дотичних напруженнях

$$h\sigma_n(x,y)|_L = \sigma_g|_L, \quad h\tau_n(x,y)|_L = \tau_g|_L, \quad (1)$$

де зовнішні нормальні та дотичні навантаження σ_g , τ_g є відомими кусково-неперервними функціями вздовж контуру L . Надалі тривимірну пластину будемо

розглядати як двовимірну [4, 9]. Відомо, що граничні значення зовнішніх функцій $\sigma_g|_L$, $\tau_g|_L$ у кутовій точці можуть мати розрив. Позначимо ці значення на різних сторонах у кутовій точці відповідно σ_{gj} , τ_{gj} , $j = \overline{1,2}$, де індекс 1 відповідає верхній стороні кутової області. Розглянемо умови рівноваги в кутовій точці випуклої області D з кутом β і сформулюємо теорему.

Теорема 1. Граничні значення зовнішніх навантажень σ_{gj} , τ_{gj} , $j = \overline{1,2}$ у кутовій точці контуру L при підході до неї з різних боків задовольняють умови

$$(\sigma_{g2} - \sigma_{g1}) \cos \beta = (\tau_{g2} - \tau_{g1}) \sin \beta, \quad (2)$$

де β кут області D після прикладення зовнішніх навантажень.

Доведення. Розмістимо систему координат так, що дотична до верхньої сторони кутової області у кутовій точці після деформації пластини буде паралельною до осі Ox . Зовнішні напруження σ_{g2} , τ_{g2} , які задані на нижній стороні кута (індекс 2), у кутовій точці можна виразити через нормальні та дотичні напруження [10, с. 36]

$$\begin{aligned} \sigma_{g2} / h &= \sigma_x \sin^2 \beta + \sigma_y \cos^2 \beta - 2\tau_{xy} \sin \beta \cos \beta, \\ \tau_{g2} / h &= (\sigma_x - \sigma_y) \sin \beta \cos \beta + \tau_{xy} (\sin^2 \beta - \cos^2 \beta). \end{aligned}$$

Якщо врахувати, що у введеній системі координат $\sigma_y = \sigma_{g1} / h$, $\tau_{xy} = \tau_{g1} / h$, то після виключення з цих рівнянь невідомого значення напруження σ_x одержимо умову (2).

Проаналізуємо, які обмеження накладає умова (2) на зусилля в точках гладкості контуру L . Для точок на гладкій поверхні правильне $\beta = \pi$ і з умови (2) випливає, що $\sigma_{g2} = \sigma_{g1}$ при підході до заданої точки зліва і справа вздовж границі L . Отже, нормальні напруження не повинні мати точок розриву неперервності на поверхні, гладкій після деформації. Із рівнянь рівноваги також випливає, що в точках гладкості контуру L виконується $\tau_{g2} = \tau_{g1}$. Аналіз формули (2) показує, що в загальному випадку розрив неперервності нормальних або дотичних напружень на гладкому контурі буде пов'язаний з відповідною зміною кута контуру в точці розриву, що веде до порушення гіпотез лінійної теорії пружності у цій точці.

Розділення ПДС на основний і збурений. Бігармонічну функцію напружень $\Phi(x, y)$, яка задовольняє умови (1), будемо шукати як суму двох функцій Φ_0 і Φ_p , які відповідно описують ПДС основного та збуреного станів [4, 9]. Враховуючи [6, 8], виділимо основний напружений стан, який відповідає головному вектору сил і моментів, прикладених до контуру пластини. Для цього в область D впишемо прямокутник Π із сторонами $2a$, $2b$. Початок декартової системи координат розмістимо у точці симетрії прямокутника Π , вісь Oy направимо паралельно до сторін прямокутника довжиною $2b$. Позначимо вершини прямокутника буквами: $A(-a, b)$, $B(-a, -b)$, $C(a, -b)$, $D(a, b)$. Сторони між вершинами A і B ; B і C ; і т.д. позначимо цифрами 1, 2, 3, 4, а відповідні лінії контуру L : L_j , $j = \overline{1,4}$.

Розподілені зовнішні навантаження створюють на контурах L_j відповідні нормальні T_j й дотичні Q_j головні сили та моменти M_j , $j = \overline{1,4}$. Ці нормальні й дотичні головні сили та моменти визначають бігармонічну функцію Φ_0 , яка має поліноміальний вигляд і знайдена в [9].

Враховуючи праці [8], подамо функцію напружень збуреного стану для пластини у вигляді ряду

$$\begin{aligned} \Phi_p(\alpha, \gamma) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \operatorname{Re}\{b[z_k^{-1}c_k^j f_j(cz_k, \alpha)\varphi(z_k, \gamma) + \xi_k^{-1}c_k^{2+j} f_j(c\xi_k, \alpha)\psi(\xi_k, \gamma)] + \\ + a[z_k^{-1}c_k^{4+j} f_j(wz_k, \gamma)\varphi(z_k, \alpha) + \xi_k^{-1}c_k^{6+j} f_j(w\xi_k, \gamma)\psi(\xi_k, \alpha)], \end{aligned} \quad (3)$$

де $f_j(z, \alpha) = \exp\{z[(-1)^j \alpha - 1]\}$, $\varphi(z, \gamma) = \gamma \sin z\gamma - \operatorname{tg} z \cos z\gamma$, $\psi(\xi, \gamma) = -\operatorname{ctg} \xi \sin \xi\gamma + \gamma \cos \xi\gamma$ – комплексні функції; $\gamma = y/b$, $\alpha = x/a$ – безрозмірні координати; $c = a/b$, $w = b/a$ – відношення сторін; c_k^j – комплексні коефіцієнти; z_k , ξ_k – безрозмірні комплексні спектральні параметри, відповідно корені характеристичних рівнянь: $F^+(z) \equiv \sin 2z + 2z$, $F^-(\xi) \equiv \sin 2\xi - 2\xi$ [2, 6], для яких $\operatorname{Re} z_k > 0$, $\operatorname{Re} \xi_k > 0$.

2. Перетворення і задоволення граничних умов. Подамо праві частини граничних умов (1) як суму основного і збуреного станів: $\sigma_g = \sigma_{oc} + \sigma_p$, $\tau_g = \tau_{oc} + \tau_p$, де σ_{oc} , τ_{oc} будуть визначати з відомого основного ПДС. Граничні умови для визначення збуреного стану, враховуючи [6], подамо у вигляді проекцій напружень на осі Ox , Oy

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial \Phi_p}{\partial y} \Big|_L = X_{\sigma}|_L, \quad \frac{d}{ds} \frac{\partial \Phi_p}{\partial x} \Big|_L = -Y_{\sigma}|_L, \quad (4)$$

де $X_{\sigma}|_L = (\sigma_p \cos \theta - \tau_p \sin \theta)/h$, $Y_{\sigma}|_L = (\sigma_p \sin \theta + \tau_p \cos \theta)/h$; s – довжина дуги контуру L ; θ – кут між нормаллю до контуру L і віссю Ox . Після інтегрування співвідношень (4) одержимо граничні умови на контурі L

$$\frac{\partial \Phi_p}{\partial x} = P_1(\alpha, \gamma), \quad \frac{\partial \Phi_p}{\partial y} = P_2(\alpha, \gamma), \quad (5)$$

де $P_1(\alpha, \gamma) = -\int_0^s Y_{\sigma} ds + C_1$, $P_2(\alpha, \gamma) = \int_0^s X_{\sigma} ds + C_2$; C_1 , C_2 – сталі інтегрування, які визначають жорстке зміщення тіла і приймемо, що вони дорівнюють нулю. Підставимо функцію напружень (3) в умови (5) і знайдемо явний вигляд граничних умов на контурі L

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^8 \operatorname{Re}\{c_k^j \chi_k^j(\alpha, \gamma)\} = P_1(\alpha, \gamma), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^8 \operatorname{Re}\{c_k^j \psi_k^j(\alpha, \gamma)\} = P_2(\alpha, \gamma), \quad (6)$$

де

$$\begin{aligned}\chi_k^j(\alpha, \gamma) &= (-1)^j f_j(cz_k, \alpha) \varphi(z_k, \gamma), \quad \chi_k^{2+j}(\alpha, \gamma) = (-1)^j f_j(c\xi_k, \alpha) \psi(\xi_k, \gamma), \\ \chi_k^{4+j}(\alpha, \gamma) &= f_j(wz_k, \gamma) \psi(z_k, \alpha), \quad \chi_k^{6+j}(\alpha, \gamma) = f_j(w\xi_k, \gamma) \chi(\xi_k, \alpha), \\ \psi_k^j(\alpha, \gamma) &= f_j(cz_k, \alpha) \psi(z_k, \gamma), \quad \psi_k^{2+j}(\alpha, \gamma) = f_j(c\xi_k, \alpha) \chi(\xi_k, \gamma), \\ \psi_k^{4+j}(\alpha, \gamma) &= (-1)^j f_j(wz_k, \gamma) \varphi(z_k, \alpha), \quad \psi_k^{6+j}(\alpha, \gamma) = (-1)^j f_j(w\xi_k, \gamma) \psi(\xi_k, \alpha), \quad j = \overline{1, 2}; \\ \chi(z, \gamma) &= m(z) \cos(z\gamma) - \gamma \sin(z\gamma), \quad m(z) = 1/z - \operatorname{ctg}(z).\end{aligned}$$

3. Мінімізація відхилення розв'язку від заданих зовнішніх навантажень.

Обмежимося у співвідношеннях (3), (6) скінченною кількістю N щодо індексу k членів ряду. Оскільки кожний доданок у рядах (3) є розв'язком бігармонічного рівняння, то і обрізаний ряд буде точним розв'язком плоскої задачі. У [6, 9] теоретично розроблено метод інтегральних моментів розв'язування граничної задачі для бігармонічного рівняння у прямокутній області. Модифікуємо його на випадок криволінійної області. Перейдемо у граничних умовах (6) від комплексних до дійсних позначень. Для цього виділимо у невідомих комплексних коефіцієнтах $c_k^j, j = \overline{1, 8}$ дійсну й уявну частини: $c_k^j = x_{8k-8+j} + ix_{8(N+k-1)+j}$; аналогічно вчинимо з комплексними функціями, які стоять біля цих коефіцієнтів. Мірою наближення розв'язку (3) до заданих зовнішніх навантажень в граничних умовах (6) є мінімум інтеграла квадратичного відхилення вздовж контуру L

$$\begin{aligned}\Psi\{x_1, \dots, x_{16N}\} &= \oint_L \left\{ \sum_{j=1}^8 \sum_{k=1}^N [x_{8k-8+j} \chi_{rk}^j(\alpha, \gamma) - x_{8(N+k-1)+j} \chi_{yk}^j(\alpha, \gamma)] - P_1(\alpha, \gamma) \right\}^2 + \\ &+ \left\{ \sum_{j=1}^8 \sum_{k=1}^N [x_{8k-8+j} \psi_{rk}^j(\alpha, \gamma) - x_{8(N+k-1)+j} \psi_{yk}^j(\alpha, \gamma)] - P_2(\alpha, \gamma) \right\}^2 ds = \quad (7) \\ &= \sum_{k,j=1}^{16N} x_k x_j W_k^j - 2 \sum_{k=1}^{16N} x_k V_k + P^2,\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}\chi_{rk}^j(\alpha, \gamma) &= \operatorname{Re} \chi_k^j(\alpha, \gamma), \quad \chi_{yk}^j(\alpha, \gamma) = \operatorname{Im} \chi_k^j(\alpha, \gamma), \quad \psi_{rk}^j(\alpha, \gamma) = \operatorname{Re} \psi_k^j(\alpha, \gamma), \\ \psi_{yk}^j(\alpha, \gamma) &= \operatorname{Im} \psi_k^j(\alpha, \gamma); \quad W_{8k-8+j}^{8m-8+n} = \oint_L [\chi_{rk}^j(\alpha, \gamma) \chi_{rm}^n(\alpha, \gamma) + \psi_{rk}^j(\alpha, \gamma) \psi_{rm}^n(\alpha, \gamma)] ds, \\ W_{8(N+k-1)+j}^{8m-8+n} &= \oint_L [\chi_{yk}^j(\alpha, \gamma) \chi_{rm}^n(\alpha, \gamma) + \psi_{yk}^j(\alpha, \gamma) \psi_{rm}^n(\alpha, \gamma)] ds, \\ W_{8(N+k-1)+j}^{8(N+m-1)+n} &= 2 \oint_L [\chi_{rk}^j(\alpha, \gamma) \chi_{ym}^n(\alpha, \gamma) + \psi_{rk}^j(\alpha, \gamma) \psi_{ym}^n(\alpha, \gamma)] ds, \quad k, m \leq N, \quad n, j \leq 8; \\ W_l^d &= W_d^l, \quad l, d \leq 16N; \quad V_l = \operatorname{Re} A_l, \quad V_{l+8N} = -\operatorname{Im} A_l, \quad l \leq 8N; \\ A_{8k-8+j} &= \oint_L [P_1(\alpha, \gamma) \chi_k^j(\alpha, \gamma) + P_2(\alpha, \gamma) \psi_k^j(\alpha, \gamma)] ds, \quad k = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, 8}; \\ P^2 &= \oint_L [P_1(\alpha, \gamma)^2 + P_2(\alpha, \gamma)^2] ds.\end{aligned}$$

Праву частину рівності (7) можна інтерпретувати як додатно визначену квадратичну форму. Отже, функціонал $\Psi\{x_1, \dots, x_{16N}\}$ буде квадратичною формою. Її мінімумом позначимо $F(N)$. Коефіцієнти x_k^N , на яких досягається це мінімальне значення, визначатимуть за формулою (3) наближений розв'язок $\Phi_N(\alpha, \gamma)$. Цей розв'язок для заданого N буде давати найліпше наближення до заданих зовнішніх навантажень у граничних умовах (6). Для визначення мінімуму квадратичної форми знайдемо частинні похідні $\frac{\partial \Psi_N}{\partial x_j}$, прирівняємо їх до нуля і одержимо систему рівнянь

$$\sum_{k=1}^{16N} x_k^N W_k^j = V_j, \quad j = \overline{1, 16N}. \quad (8)$$

Розв'яжемо систему лінійних рівнянь (8). На знайдених коефіцієнтах x_k^N функціонал Ψ_N набуває своє мінімальне значення, яке дорівнює $F(N)$.

Лема. Функція $F(N)$ є невід'ємною, незростаючою і рівною

$$F(N) = \oint_L [P_1(\alpha, \gamma)^2 + P_2(\alpha, \gamma)^2] \mathfrak{H} s - \sum_{k=1}^{16N} x_k V_k. \quad (9)$$

Доведення. За означенням квадратична форма (7) є невід'ємною. Отже, $F(N) \geq 0$. Після підстановки рівнянь (8) в квадратичну форму (7) одержимо вираз (9). Не зростання $F(N)$ доведемо від протилежного. Припустимо, що $F(N) < F(N+1)$. Оскільки квадратична форма Ψ_{N+1} охоплює Ψ_N як частковий випадок, коли $x_k^N = 0$, $k = \overline{16N+1, 16(N+1)}$, то припущення $F(N) < F(N+1)$ суперечить визначенню мінімальності функції $F(N+1)$. Отож, $F(N+1) \leq F(N)$. Кінець доведення.

Означення. Якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує N таке, що $F(N) < \varepsilon$, то границю побудованих бігармонічних функцій $\phi(\alpha, \gamma) = \lim_{N \rightarrow \infty} \Phi_N(\alpha, \gamma)$ будемо називати слабким розв'язком задачі (6).

Введене означення дає змогу чисельно перевірити чи будуть знайдені наближені розв'язки $\Phi_N(\alpha, \gamma)$ наближатися до слабого розв'язку при $N \rightarrow \infty$.

Покажемо, що числове значення $\delta_N = \sqrt{F(N)}$ можна розглядати як відстань між наближеним і точним розв'язком граничної задачі (6).

Теорема 2. Слабкий розв'язок є точним розв'язком задачі (6) у метриці простору $L_2[L]$, а значення δ_N характеризує похибку задоволення функцією $\Phi_N(\alpha, \gamma)$ граничних умов (6).

Доведення. Розглянемо слабкий розв'язок $\phi(\alpha, \gamma) = \lim_{N \rightarrow \infty} \Phi_N(\alpha, \gamma)$. Для функцій $F(N)$, які визначають через функцію $\Phi_N(\alpha, \gamma)$, виконується умова $\lim_{N \rightarrow \infty} F(N) = 0$.

Кожна функція $\Phi_N(\alpha, \gamma)$ задовольняє бігармонічне рівняння. Покажемо, що зі збільшенням N вона буде задовольняти граничні умови (6) з заданою точністю. Згідно з означенням слабкого розв'язку для довільного $\varepsilon > 0$ існує значення N таке, що $F(N) < \varepsilon$. Для довільного N_1 , $N_1 \geq N$ побудуємо функцію Φ_{N_1} . З леми випливає $F(N_1) \leq F(N)$. З виразу функціонала (7) для функцій $\Phi_{N_1}(\alpha, \gamma)$, $N_1 > N$ одержимо такі нерівності:

$$\left\| \sum_{j=1}^8 \sum_{k=1}^N \operatorname{Re}\{a_k^j \chi_k^j(\alpha, \gamma)\} - P_1(\alpha, \gamma) \right\|_{L_2[L]}^2 \leq F(N) < \varepsilon,$$

$$\left\| \sum_{j=1}^8 \sum_{k=1}^N \operatorname{Re}\{a_k^j \psi_k^j(\alpha, \gamma)\} - P_2(\alpha, \gamma) \right\|_{L_2[L]}^2 \leq F(N) < \varepsilon, \quad (10)$$

де $a_k^j = x_{8k-8+j}^{N_1} + ix_{8(N+k-1)+j}^{N_1}$. Із нерівностей (10) випливає, що послідовність функцій $\Phi_N(\alpha, \gamma)$ є фундаментальною в $L_2[L]$. Отже, границя послідовності існує і ми в границі одержимо слабкий розв'язок $\phi(\alpha, \gamma) = \lim_{N \rightarrow \infty} \Phi_N(\alpha, \gamma)$, який точно задовольняє умови (6) у нормі $L_2[L]$. Внаслідок існування і єдиності розв'язку плоскої задачі, слабкий розв'язок буде збігатися у метриці $L_2[L]$ з точним розв'язком задачі (6). Нерівності (10) показують, що значення $F(N)$ є оцінкою похибки задоволення функцією Φ_N граничних умов. Врахувавши лему й вище наведені нерівності, можна вважати, що значення $\sqrt{F(N)}$ є лінійною оцінкою у метриці $L_2[L]$ похибки задоволення функцією $\Phi_N(\alpha, \gamma)$ граничних умов (6). Кінець доведення.

4. Числовий аналіз. Запропонований метод реалізовано для знаходження НДС прямокутної пластини. Аналіз числових розрахунків показав: нульові крайові умови на поверхнях 2, 4 задовольняються з точністю 10^{-18} ; квадратичну форму (7) вибрано так, що квадратний корінь від $\min F$ характеризує точність задоволення граничних умов (6); мінімум квадратичної форми (7), якщо $N \rightarrow \infty$ прямує до нуля.

4.1. Знаходження НДС прямокутної пластини. Для апробації запропонованого методу розв'яжемо граничну задачу для прямокутної пластини, яка займає прямокутну область $D = \{(x, y) \in [-a, a] \times [-b, b]\}$. В цьому випадку область D збігається з прямокутником Π . Вважаємо, що сторони 2, 4 прямокутника вільні від навантажень, а на сторонах 1, 3 задані симетричні стосовно координати γ нормальні $\sigma_m(\gamma)$ і несиметричні дотичні напруження $\tau_m(\gamma)$, $m = 1, 3$. Після виділення основного НДС граничні умови на сторонах 1, 3 набувають вигляду

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re}\{z_k [c_k^1 e^{-z_k c(m-1)} + c_k^2 e^{z_k c(m-2)}] \chi(z_k, \gamma)\} = \sigma_{2m-1}(b\gamma),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re}\{z_k [c_k^1 e^{-z_k c(m-1)} - c_k^2 e^{z_k c(m-2)}] \psi(z_k, \gamma)\} = \tau_{2m-1}(b\gamma), \quad m = \overline{1, 2}.$$

4.2. ПДС пластини під дією змодельованої зосередженої сили. Силу можна моделювати локальним навантаженням, яке описується максимальним значенням, областю локалізації і сумарною силою T_1 . Такі навантаження можна описати їхнім максимальним значенням, областю локалізації та сумарною силою, яку вони створюють.

Нормальну стискаючу силу T_1 , прикладену до прямокутної пластини на стороні 1 в точці $(-1, 0)$, будемо моделювати локалізованим в околі початку координат нормальним навантаженням $h\sigma_1(\gamma)$, яке урівноважується навантаженнями розподіленими на стороні 3. Дотичне навантаження на сторонах пластини приймемо таким, що дорівнює нулю. Розглянемо параболічне навантаження

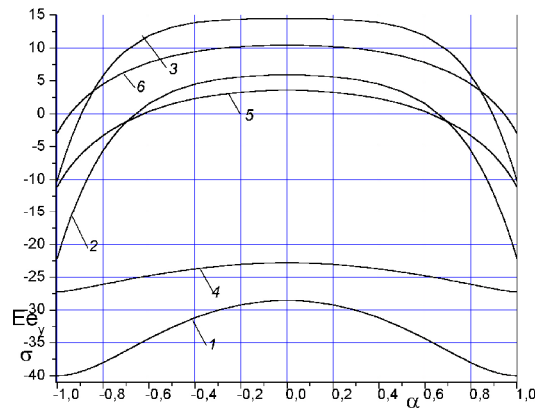
$$\sigma_1(\gamma) = \sigma_M(\gamma_0^2 - \gamma^2)/\gamma_0^2, \quad \gamma \in [-\gamma_0, \gamma_0]; \quad \sigma_1(\gamma) = 0, \quad \gamma \notin [-\gamma_0, \gamma_0],$$

де $\gamma_0 = 1.5/|\sigma_M|$, σ_M – визначає максимальне значення локального навантаження. Для цього навантаження основний ПДС нормується умовою $\sigma_x^0 = 1$, а всі інші компоненти дорівнюють нулю. Внаслідок симетрії розподілу, область локалізації нормальної сили дорівнює $\Delta = 2\gamma_0 = 3/|\sigma_M|$. Наведемо знайдені оцінки мінімуму функції $F(N)$ залежно від значення N : $F(100) = 0.0017$; $F(200) = 3.1 \cdot 10^{-5}$. Похибка задоволення граничних умов при $N = 200$, менша ніж 10^{-2} . Зі збільшенням N мінімум квадратичної форми й похибка задоволення граничних умов швидко наближається до нуля.

Для детального аналізу ПДС треба дослідити як змінюються нормальні напруження під прикладеною силою, а також знайти деформації $e_y = \frac{\partial v}{\partial y}$ у матеріалі пластини. Проведено аналіз розподілу напружень і деформацій залежно від $\alpha = x/b$ при $\gamma = 0$, де нормальні напруження набувають максимальних значень. Дослідження показали, що компоненти тензора напружень і деформацій в перерізі $\gamma = 0$ не суттєво залежать від заданого закону розподілу навантажень. Напруження $\sigma_y(\alpha, 0)$ у випадку $a \gg b$ прямують до значень основного ПДС швидше, ніж $\sigma_x(\alpha, 0)$. Область локалізації напружень $\sigma_y(\alpha, \gamma)$ за змінними α , γ є сумірною зі значенням Δ .

Закономірності розподілу напружень у довгій пластині $a \gg b$ в околі прикладання такої змодельованої сили розглянуто в [7]. Розглянемо випадок $a < b$, $\sigma_M = -40$, при цьому максимальне навантаження $\sigma_{1\max} = -40$ і прикладене в точці $(-1; 0)$, $\Delta = 0.075$. Досліджували розподіл напружень при зміні $\alpha = x/a$ залежно від відношення довжин сторін $c = a/b$. Для значень $c < 0.5$ на розподіл напружень суттєво впливають згінні напруження, які залежать від умов закріплення

пластини. На рис. показано задачі про стиск пластини двома силами $\sigma_M = -40$, симетрично прикладеними посередині сторін $\alpha = \pm 1$, для $a/b = 0.15$.



Напруження в пластині вздовж осі Ox при стиску двома силами: 1 – $\sigma_x(\alpha, 0)$; 2 – $\sigma_y(\alpha, 0)$; 3 – $Ee_y(\alpha, 0)$; 4 – $\sigma_y(\alpha, 0.02)$; 5 – $\tau_{xy}(\alpha, 0.02)$; 6 – $Ee_y(\alpha, 0.02)$

Як бачимо, за стиску тонкої пластини на деякій відстані від краю виникає зона значних розтягуючих напружень σ_y і деформації e_y . Зауважимо, що такі додатні деформації можуть спричинити руйнування пластини з крихких матеріалів за її стиску.

ВИСНОВКИ. Розроблено аналітично-числовий метод розв'язування двовимірних граничних задач теорії пружності, показана його збіжність і точність. Метод ґрунтується на мінімізації квадратичної форми, яка є інтегральною мірою наближення шуканого розв'язку до заданих граничних навантажень. Доведено збіжність нового аналітично-числового методу розв'язування двовимірних граничних задач теорії пружності. Показано, що похибку задоволення граничних умов визначає корінь квадратний з мінімуму квадратичної форми (7), і похибка зі збільшенням N наближається до нуля.

Числовим моделюванням знайдено, що при інженерній оцінці руйнування матеріалу пластини в зоні дії локально зосередженої сили, крім напружень σ_x , треба враховувати також вплив σ_y . З'ясовано, що напруження $\sigma_y(\alpha, 0)$ набагато швидше, ніж $\sigma_x(\alpha, 0)$ змінюються, так що уже на відстані порядку Δ їхній знак під максимальним значенням прикладеної сили міняється на протилежний. Знайдено, що під прикладеною стискаючою силою виникає зона значних розтягуючих напружень σ_y і деформації e_y , що може спричинити руйнування пластини з крихких матеріалів.

Запропоновану методику обчислень можна використати до уточненого розрахунку напружень в околі прикладання сил у балках і тонких пластинах. Для цього до знайдених у статті напружень треба додати напруження, зумовлені силами, які залежать від умов закріплення.

1. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф.* Пространственные задачи теории упругости и пластичности // Т. 3. Равновесие упругих тел канонической формы. – К., 1985.
2. *Космодамианский А.С., Шалдырван В.А.* Толстые многосвязные пластины. – К., 1978.
3. *Мелешко В.В.* Бигармоническая задача для прямоугольника: история и современность // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – 47, № 3. – С. 45–68.
4. *Мухелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М., 1966.
5. *Ревенко В.П.* Застосування нового аналітично-числового методу Остроградського до розв'язування плоскої задачі теорії пружності // Доп. НАН України. – 2007. – № 4. – С. 59–65.
6. *Ревенко В.П.* Розвиток спектрального методу Штурма-Ліувілля розв'язування граничної задачі для бігармонічного рівняння // Нелінійні коливання. – 2003. – 6, N.3. – С. 368–377.
7. *Ревенко В.П.* Дослідження розподілу напружень у прямокутній пластині під дією розподілених навантажень // Фіз. – хім. механіка матеріалів. – 2007 – 43, № 3, – С. 12–18.
8. *Ревенко В.П.* Про застосування нового аналітично-числового методу до розв'язування граничної задачі для бігармонічного рівняння у обмеженій області з кутовими точками// Математичний вісник Наукового товариства ім. Шевченка. – 2006. – том 3. – С. 113–125.
9. *Ревенко В.П.* Знаходження плоского напруженого стану прямокутної пластини методом інтегральних моментів // Вісник Львівського університету. Сер. мех.-мат. – 2006. – Вип. 65. – С. 232–240.
10. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – М., 1975.
11. *Шалдырван В.А.* Некоторые результаты и проблемы трехмерной теории пластин (обзор) // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 2. – С. 45–69.

THE METHOD OF A SOLUTION OF A PLANE PROBLEM FOR A CURVILINEAR PLATE WITH ANGULAR POINTS

Victor Revenko

*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
Naukova Str., 3b 79053 Lviv, Ukraine*

It is proposed a method of the solution of a plane problem for a curvilinear plate with angular points. The method is based on minimization of the quadratic form which characterizes integral of a square-law deviation of the found solution from the set boundary conditions. Convergence of the gained solution is proved, and also the estimation of precision of satisfaction of boundary conditions is found. The numerical analysis of a stress distribution and strains in a plate is carried out. Qualitative peculiarities of a stress distribution in a plate are determined.

Key words: plane elastostatics problem, biharmonic equation, curvilinear plate, quadratic form, analytical and numerical method.

Стаття надійшла до редколегії 16.03.2007

Прийнята до друку 19.11.2008

УДК 539.3:519.6

**ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ПЛАСТИНИ З
ОТВОРОМ НА ОСНОВІ ПОЛЯРИЗАЦІЙНО-ОПТИЧНОГО МЕТОДУ****Етери ГАРТ, Олена ЛИСИЦИНА, Євген ПРОКОПАЛО***Дніпропетровський національний університет,
просп. Гагаріна 72 49050 Дніпропетровськ, Україна*

Експериментально досліджено напружено-деформований стан поздовжньо навантаженої пластини з прямокутним отвором для перевірки вірогідності результатів числових розрахунків, виконаних із використанням проекційно-ітераційної модифікації методу скінченних елементів. Проведено контроль рівномірної деформації у відповідних перерізах пластини за допомогою індикаторів годинникового типу.

Ключові слова: пластина з отвором, метод скінченних елементів, поляризаційно-оптичний метод, проекційно-ітераційний метод.

Під час проектування пластинчастих і оболонкових конструкцій у різних галузях техніки досить часто їхнім елементам надають складні форми, отвори різних конфігурацій, припускають зміни поперечних перетинів і т. ін. Ці чинники сприяють виникненню концентрації напружень [5, 6]. У таких випадках постає необхідність в уточнених розрахунках міцності і оптимізації параметрів цих конструкцій. Для інженерної практики важливе значення мають наближені методи розв'язування таких задач. Найбільш ефективними числовими методами розв'язування крайових і варіаційних задач вважають проекційно-ітераційні методи [1–3]. Для задач механіки дуже важливими є питання перевірки вірогідності отриманих числових розв'язків.

Для експериментального підтвердження вірогідності одержаних на підставі проекційно-ітераційного методу числових результатів розв'язування задачі про напружено-деформований стан навантаженої у поздовжньому напрямі пластини з прямокутним отвором [2–4] використовували поляризаційно-оптичний метод (метод фотопружності).

Формулювання експерименту. Зразок у вигляді прямокутної пластини (рис. 1) завдовжки $L_1 = 0,08$ м, завширшки $L_2 = 0,06$ м, завтовшки $h = 0,0073$ м із квадратним отвором $(L_1'' - L_1') \times (L_2'' - L_2') = 0,02 \times 0,02$ м виготовили з оптично-чутливого матеріалу на основі епоксидної смоли ЕД-20 і мали такі механічні характеристики: модуль пружності $E = 3300$ МПа; межа пропорційності $\sigma_B = 55$ МПа; коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,37$.

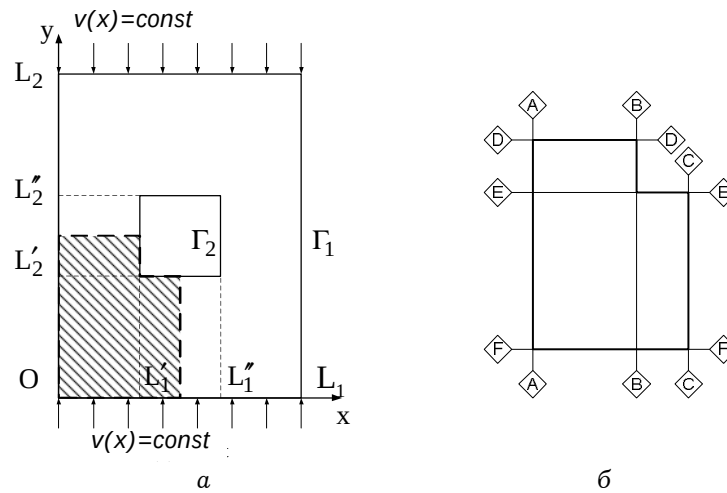


Рис. 1.

a – геометрія і схема навантаження пластини;
б – характерні перерізи моделі.

Експеримент виконували на поляризаційному устаткуванні ППУ-5 (рис. 2), зразок розміщували у приладі так, щоб забезпечувалася його рівновага під дією осьового навантаження $P(x) = 6,153$ МПа.

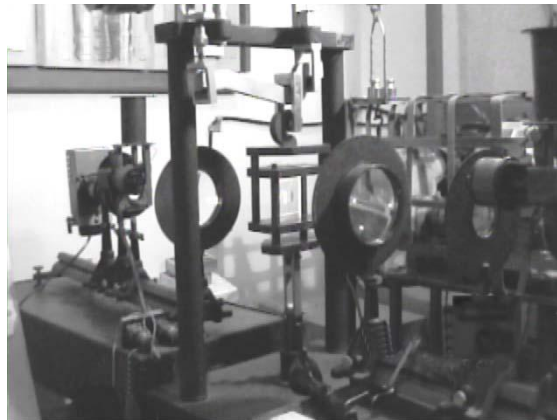


Рис. 2. Поляризаційно-проекційний прилад ППУ-5

Аналіз напружено-деформованого стану проводили на підставі побудови картин ізохром для порівняння з числовими результатами аналізу відповідної математичної моделі, які отримали за допомогою проекційно-ітераційного методу.

Принцип роботи кругового полярископа (рис. 3) полягає у тому, що промені, які виходять із джерела світла (S), зводяться конденсатором у пучок, який після проходження призми поляризатора (P) поляризується. В ході подальшого розповсюдження поляризовані промені, проходячи крізь матеріал моделі (M) і аналізатор (A), потрапляють на екран.

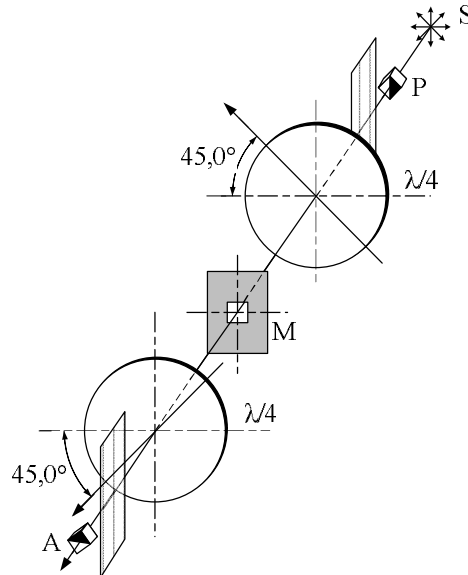


Рис. 3. Схема поляризаційно-оптичного приладу

Виявлені на шляху променів чвертьхвильові пластинки з матеріалу, який має властивості подвійного заломлення променів, виконують кругову поляризацію світлового пучка. Їхні параметри і розташування підбрано так, що вплив першої пластини компенсується дією другої. Отож, в аналізатор потрапляють промені, які змінили фазу внаслідок впливу оптичної анізотропії напруженого матеріалу. Як джерело білого світла (S) використали ртутну лампу, що приводить до кольорової картини ізохром.

Безпосередньо перед отриманням картини ізохром та ізоклін проводили визначення ціни смуги моделі. Для цього використовували тарувальний зразок, який досліджували за умов чистого згину при просвічуванні поляризованим світлом. Отримані значення ціни смуги моделі $\sigma_0^{(t)} = 2,16$

МПа та ціни смуги матеріалу $\sigma_0^{(l)} = 2,9$ МПа/м застосовували для відновлення картини напружень за методикою, що описана, зокрема в [9]. Крім того, перед виконанням експерименту зробили розрахунки, які підтвердили міцність зразка на всьому проміжку зміни навантаження.

Результати експерименту. Під час експерименту одержали картини ізоклін (рис. 4), ізохром, результати тарування та відновлені після обробки експериментальних даних поля переміщень і напружень.

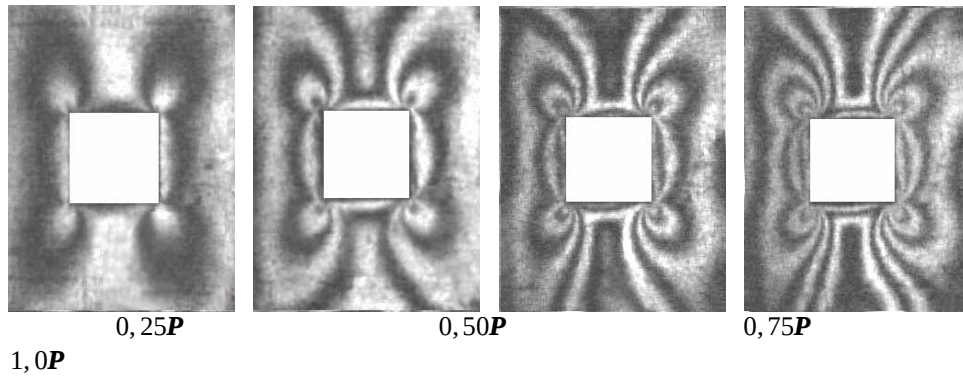


Рис. 4. Ізокліни, отримані при послідовному навантаженні зразка з кроком $0,25P$

Під час виконання експерименту навантаження прикладали квазістатично, документування проводили через однакові прирости тиску на гранях зразка, а переміщення $v(x)$ визначали за допомогою індикатора годинникового типу з ціною поділки шкали $0,001$ мм, що підтвердило рівномірність прикладання зусиль і збереження планарності зразка. Відновлення полів напружень проводили за методикою, викладеною в [9].

Математичне формулювання задачі. Розглядаємо задачу про напружено-деформований стан ізотропної пластини, послабленої прямокутним отвором в її центрі, для якої на частині γ зовнішньої межі Γ_1 (при $y = L_2$, $0 \leq x \leq L_1$; при $y = 0$, $0 \leq x \leq L_1$) задано переміщення $v(x) = \text{const}$, а на решті зовнішньої межі і на внутрішній частині Γ_2 – нормальні й дотичні напруження дорівнюють нулю (див. рис. 1). Враховуючи варіаційний принцип мінімуму потенціальної енергії, математична модель цієї задачі має такий вигляд [7]. У класі функцій, які мають кусково-неперервну похідну в області $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, де $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ межа області

$$\Omega = \{0 < x < L'_1, 0 < y < L_2\} \cup \{L'_1 \leq x \leq L''_1, 0 < y < L'_2\} \cup \\ \cup \{L'_1 \leq x \leq L''_1, L'_2 < y < L_2\} \cup \{L''_1 < x < L_1, 0 < y < L_2\},$$

і задовольняють умови

$$u(x)=0, \quad v(x) = \text{const} \quad (y = L_2, 0 \leq x \leq L_1; y = 0, 0 \leq x \leq L_1),$$

треба знайти функції $u(x,y), v(x,y)$, які забезпечують мінімум функціонала

$$I[u,v] = \int_{\Omega} \left\{ 2\mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} dx dy, \quad (1)$$

де $u(x,y)$, $v(x,y)$ - проекції вектора переміщень відповідно на осі Ox та Oy ; $\lambda, \mu > 0$ - константи Ляме.

Деформації ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{xy} і напруження σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} визначають за відомими формулами [7].

Задача знаходження мінімуму функціонала (1) є задачею умовної мінімізації у гільбертовому просторі

$$I[z] \rightarrow \inf, \quad z \in Z, \quad (2)$$

де $I[z]$ – лінійний неперервний функціонал, обмежений знизу на множині кінематично припустимих переміщень Z дійсного гільбертового простору $H = W_2^{(1)}(\Omega)$.

Метод розв'язування. Наближений розв'язок задачі мінімізації (2) шукатимемо за допомогою проекційно-ітераційного методу, який поєднує ідеї методу скінченних елементів (МСЕ) як методу проекційного типу, а також ітераційного методу верхньої релаксації [8]. За проекційно-ітераційним варіантом МСЕ [3] апроксимуємо задачу (2) послідовністю задач умовної мінімізації в скінченновимірних просторах, які ізоморфні підпросторам простору H

$$I_h[z_h] \rightarrow \inf, \quad z_h \in Z_h \subset H, \quad (3)$$

де $h = h_1, h_2, \dots (h_{n+1} < h_n, n = 1, 2, \dots)$ – характерний розмір n -ї скінченно-елементної сітки, утвореної прямокутними лагранжевими елементами першого ступеня; $z_h = (z_h^{(1)}, z_h^{(2)})^T$ – вектор вузлових переміщень з компонентами $z_h^{(1)}, z_h^{(2)}$, які відповідають проекціям переміщень u і v на осі Ox та Oy ; Z_h – множина кінематично припустимих вузлових переміщень (дискретний аналог множини $Z \subset H$); H_h – скінченновимірний простір векторних сіткових функцій, які визначено на сітці з кроком $h = h_n$.

Для кожної з отриманих дискретних задач (3), починаючи з задачі, яка визначена на найгрубшій сітці, методом верхньої релаксації будуватимемо лише декілька наближень, останнє з яких з використанням лінійної інтерполяції приймаємо за початкове наближення до розв'язку такої $(n+1)$ -ї задачі мінімізації. В результаті отримаємо такий ітераційний процес:

$$\begin{aligned} z_{h,i}^{(k+1)} &= z_{h,i}^{(k)} + \omega (z_{h,i}^{(*)} - z_{h,i}^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots, k_n - 1, \quad h = h_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad i = \overline{1, N_n}, \\ z_h^{(0)} &= \Phi_{n+1} \Phi_n^{-1} z_\tau^{(k_n)}, \quad h = h_{n+1}, \quad \tau = h_n, \quad n = 1, 2, \dots; \quad (z_h^{(0)} \in Z_h, \quad h = h_1), \end{aligned} \quad (4)$$

де $0 < \omega < 2$ – параметр релаксації; N_n – загальна кількість кроків на n -й сітці; $\mathbf{z}_h^{(0)}$, $\mathbf{h} = \mathbf{h}_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, – початкове наближення до точки мінімуму функції $I_h[\mathbf{z}_h]$, $\mathbf{h} = \mathbf{h}_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, яке одержали при інтерполяції $\mathbf{z}_h^{(k_n)}$, $\mathbf{h} = \mathbf{h}_n$, $n = 1, 2, \dots$, на дрібнішу триангуляцію, при $\mathbf{h} = \mathbf{h}_1$ $\mathbf{z}_h^{(0)}$ – довільна сіткова функція із $\mathbf{Z}_h$; Φ_n^{-1} – лінійний інтерполювальний оператор, що ставить у взаємно однозначну відповідність кожній сітковій функції $\mathbf{z}_h \in \mathbf{H}_h$ її неперервний в області $\bar{\Omega}$ інтерполант; Φ_n – лінійний оператор, який виконує обернене відображення; $\mathbf{z}_{h,i}^{(*)}$ – точка мінімуму функції

$$I_i^{(k)}[\mathbf{z}_{h,i}] = I_h[\mathbf{z}_{h,1}^{(k)}, \mathbf{z}_{h,2}^{(k)}, \dots, \mathbf{z}_{h,i}^{(k)}, \mathbf{z}_{h,i+1}^{(k-1)}, \dots, \mathbf{z}_{h,N}^{(k-1)}].$$

Так само, як у [1], можна перевірити виконання умов теореми про збіжність проекційно-ітераційного методу (4) для задачі (2).

Числовий аналіз. Проекційно-ітераційний варіант МСЕ зреалізували на вкладених вдвічі скінченно-елементних сітках (13–17, 25–33, 49–65, 97–129, 193–257), сформованих прямокутними лагранжевими елементами першого ступеня ($\mathbf{h}_{n+1} = \mathbf{h}_n / 2$) з точністю розрахунків 10^{-5} , при параметрі релаксації $\omega = 1,75$. Кількість k_n наближень, які будують на n -му кроці ($n = 1, 2, \dots$) проекційно-ітераційного процесу обирали, враховуючи похибки визначення наближеного розв’язку $\mathbf{z}_h^{(k)}$ n -ї скінченновимірної задачі, зумовленої похибкою дискретизації, тобто якнайменше ціле k , яке задовольняє нерівність

$$\|\mathbf{z}_h^{(k)} - \mathbf{z}_h^{(k-1)}\| \leq \varepsilon_n, \quad k = 1, 2, \dots,$$

де ε_n – задана точність обчислень на кожній сітці.

Номер сітки	Сітка	Параметр e_n	Проекційно-ітераційний МСЕ	
			k_n	час розрахунку, с
1	13–17	$0,1 \cdot 10^{-5}$	26	0,01
2	25–33	$0,8 \cdot 10^{-5}$	37	0,04
3	49–65	$0,4 \cdot 10^{-5}$	103	0,24
4	97–129	$0,2 \cdot 10^{-5}$	273	2,49
5	193–257	$0,1 \cdot 10^{-5}$	690	26,3
5	193–257	$0,1 \cdot 10^{-5}$	6646	261,69

У таблиці для прикладу подано результати числової реалізації традиційного МСЕ і його проекційно-ітераційного варіанту на комп'ютері Pentium III, 933 MHz, з 512 Mb оперативної пам'яті. Помітно, що враховуючи нульове початкове наближення, яке задається на найгрубшій сітці з кількістю вузлів 13–17, наближений розв'язок вихідної задачі проекційно-ітераційним МСЕ отримали за $26+37+103+273+690=1129$ ітерацій. Під час розв'язування цієї задачі традиційним МСЕ на одній останній сітці з нульовим початковим наближенням розв'язок знайшли за 6646 ітерацій. З погляду витрат часу розрахунків на комп'ютері проекційно-ітераційний варіант МСЕ виявився у 9 разів ефективнішим від звичайного МСЕ. На рис. 5 показано результати розрахунку різниці головних нормальних напружень $\sigma_1 - \sigma_2$ для зіставлення з картою ізохром, яку отримали в експерименті при дії тиску P .

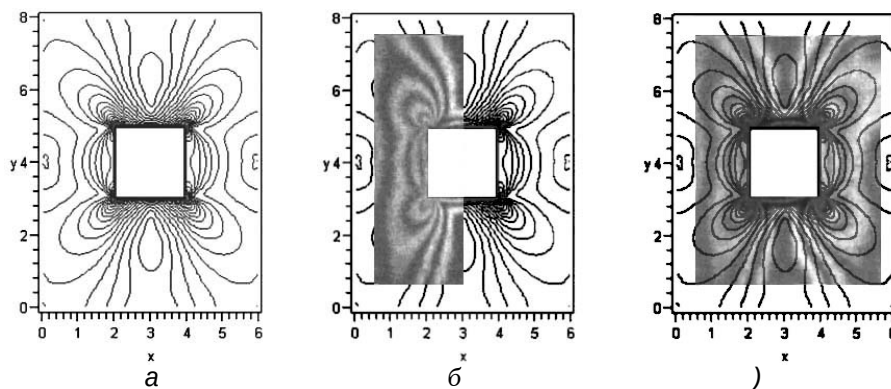


Рис. 5. Результати розрахунку $\sigma_1 - \sigma_2$ на сітці 193–257:

а – лінії однакового рівня;

б, в – результат зіставлення фотографій ізохрм і ліній рівня

Після відновлення полів напружень числові результати порівняно з експериментальними даними для характерних перерізів, зображених на заштрихованій частині моделі (див. рис. 1, б): А–А ($x = 0, 0 \leq y \leq L_2/2$);

В–В ($x = L_1', 0 \leq y \leq L_2/2$); С–С ($x = L_1/2, 0 \leq y \leq L_2/2$); Д–Д

($0 \leq x \leq L_1', y = L_2/2$); Е–Е ($0 \leq x \leq L_1/2, y = L_2'$); Ф–Ф

($0 \leq x \leq L_1/2, y = 0$).

На рис. 6–11 зображено розподіл головних напружень, отриманих у експерименті (пунктирна лінія) і числово (суцільна лінія) зі застосуванням проекційно-ітераційного алгоритму. Помітний хороший збіг значень головних і дотичних напружень у межах точності експерименту.

Варто зазначити, що експериментальні дані для перерізу Ф–Ф одержали під час екстраполяції поліномами 6-го ступеня значень напружень у прилеглих зонах моделі, оскільки картина ізохром і ізохлін в цьому перерізі

внаслідок конструктивних особливостей приладу, в якому навантажується зразок, немає.

Деякі локальні збурення у місцях концентрації напружень пов'язані зі спотвореннями оптики і високою мірою густини ізохром у кутах отвору, що створює труднощі під час визначення напружень.

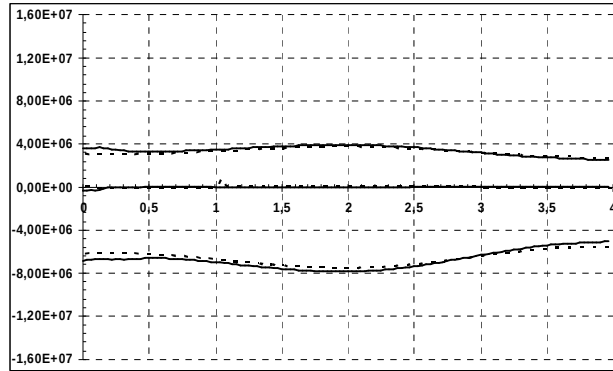


Рис. 6. Напруження в перерізі А–А

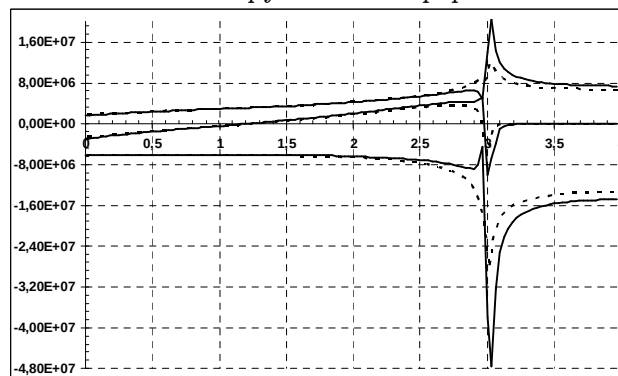


Рис. 7. Напруження перерізі В–В

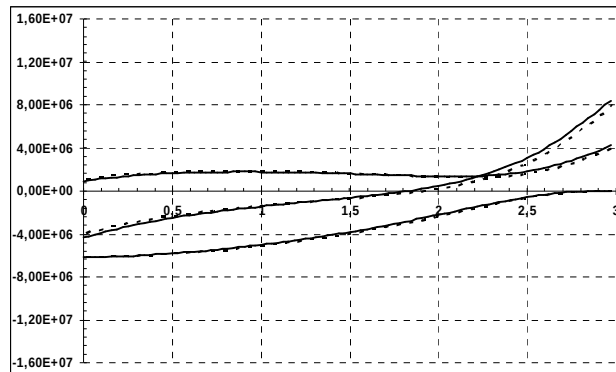


Рис. 8. Напруження в перерізі С–С

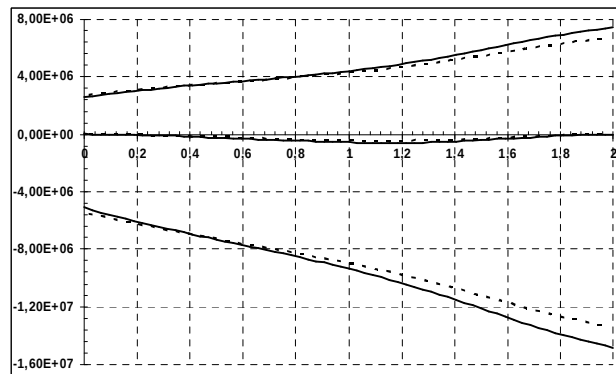


Рис. 9. Напруження в перерізі D–D

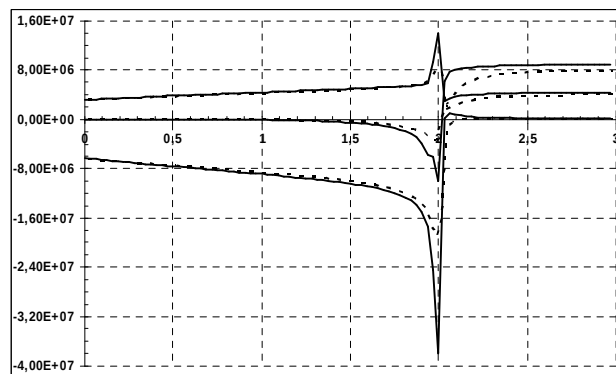


Рис. 10. Напруження в перерізі Е–Е

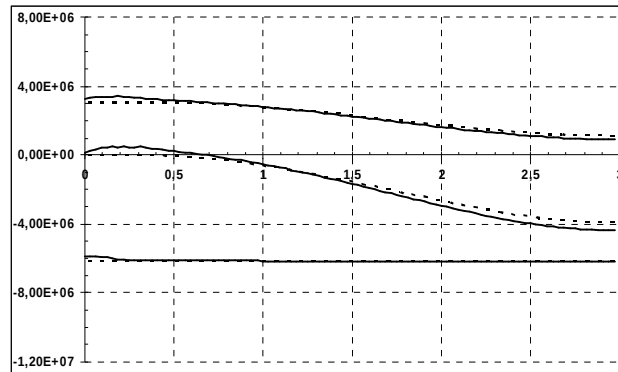


Рис. 11. Напруження в перерізі F–F

Висновки. Внаслідок експериментальних досліджень напружено-деформованого стану пластини з прямокутним отвором на підставі поляризаційно-оптичного методу отримано картини ізохром, ізоклін і відновлено поля переміщень і напружень. Експериментальні дані використали для оцінки коректності створеної математичної моделі та ефективності обчислювального алгоритму проекційно-ітераційного МСЕ. Проведене дослідження дає змогу зробити висновок про значні переваги з погляду зменшення витрат машинного часу застосування проекційно-ітераційного варіанту МСЕ до розв'язування задач теорії пружності для пластин з отвором порівняно зі звичайним МСЕ при незначному ускладненні обчислювального алгоритму. Зазначимо також, що зі збільшенням кількості невідомих задачі переваги проекційно-ітераційного методу суттєво збільшуються.

1. Балашова С. Д., Тавадзе (Гарт) Э. Л. О сходимости проекционно-итерационного метода решения экстремальной задачи с ограничениями // Математические модели и вычислительные методы в прикладных задачах. – Днепропетровск, 1996. – С. 128–134.
2. Гарт Э. Л., Гарт Л. Л. Применение проекционно-итерационного метода к исследованию напряженно-деформированного состояния пластины с отверстием // Вісник Донецьк. Ун-ту. Природничі науки. – Донецьк, 2002. – Вип. 2. – С. 54–58.
3. Гарт Э. Л., Борисовская И. В. Исследование вычислительной эффективности проекционно-итерационных вариантов методов конечных элементов и конечных разностей // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка. – 2004. – Вип. 8. – Т. 2. – С. 44–51.

4. Гарт Э. Л., Лисицына Е. А. Численные и экспериментальные исследования напряженно-деформированного состояния пластины с прямоугольным отверстием при сжатии / Э. Л. Гарт, Е. А. Лисицына // Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – Днепропетровск, 2006. – Т. 10. – С. 11–19.
5. Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Чехов В.Н. Методы расчета оболочек. Т.1. Теория оболочек, ослабленных отверстиями. К., 1980.
6. Зирка А. И., Чернопиский Д. И. Экспериментальные исследования концентраций напряжений в толстых цилиндрических оболочках с прямоугольными отверстиями при осевом сжатии // Прикладная механіка. 2001. – Т. 37. – № 5. С. 133–135.
7. Молчанов И. Н. Численные методы решения некоторых задач теории упругости. – К., 1979.
8. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. – М., 1978.
9. Экспериментальные методы исследования деформаций и напряжений: Справочное пособие / Под ред. Б. С. Касаткина. – К., 1981.

EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF PLATE WITH HOLE BASED ON THE METHOD OF PHOTOELASTICITY

Eteri Hart, Elena Lisicina, Evgen Prokopalo

*Dnipropetrovsk National University,
Gagarin Str., 72 49050 Dnipropetrovsk, Ukraine*

The experimental research of state-and-strained state of axial loaded plate with rectangular hole for verification of correctness of numerical results based on the projective-iterative modifications of finite elements methods is developed. The control of the uniform deformation by means of hourtype indicators is realized.

Key words: plate with hole, finite elements method, method of photoelasticity, projective-iterative method.

Стаття надійшла до редколегії 08.02.2007

Прийнята до друку 19.11.2008

УДК 539.3

НЕСТАЦІОНАРНЕ ОСЕСИМЕТРИЧНЕ ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ В ШАРУВАТОМУ ПІВПРОСТОРІ, ЗУМОВЛЕНЕ ІМПУЛЬСНИМ НАГРІВАННЯМ

Ольга ТУРЧИН¹, Ігор ТУРЧИН²¹Національний лісотехнічний університет України,
вул. Генерала Чупринки, 103 79057 Львів, Україна²Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

З використанням методу поліномів Лагерра та інтегрального перетворення Ганкеля одержано аналітичний розв'язок плоскої нестационарної задачі теплопровідності для багат шарового півпростору при імпульсному осесиметричному нагріванні.

Ключові слова: нестационарна теплопровідність, шаруваті тіла, перетворення Ганкеля, поліноми Лагерра.

Дослідження нестационарного процесу теплопровідності в неоднорідних тілах і фізико-механічних явищ, що його супроводжують, є актуальним у зв'язку з багатьма проблемами сучасних технологічних завдань [1]. В сучасній літературі практично немає аналітичних підходів, що дають змогу вирішити сформульовану задачу та одержати достовірні числові результати для довільної кількості складових композитного тіла, їхніх фізико-механічних властивостей та виду теплового навантаження. Мета нашої праці - на основі методу інтегрального перетворення Лагерра [2] розробити методику побудови розв'язку нестационарних двовимірних задач теплопровідності для плоско-шаруватих композитів, які перебувають в умовах імпульсного температурного навантаження.

Розглянемо композит, віднесений до циліндричної системи координат $\mathbf{r}, \mathbf{z}$ ($0 \leq \mathbf{r} < \infty$; $0 \leq \mathbf{z} < \infty$), що складається з $\mathbf{M}$ шарів різної товщини та з різними фізико-механічними властивостями (елемент з номером $\mathbf{M}$ - півпростір). У момент часу $t = 0$ на його граничній поверхні починає діяти імпульсне осесиметричне джерело тепла інтенсивності $q^*(\mathbf{r}, t)$. Вважаючи, що початкова температура композита дорівнює нулю, температурне поле в ньому визначимо розв'язком початково-крайової задачі, яка в безрозмірних змінних ρ, γ, τ набуде вигляду:

$$\partial_{\rho\rho}^2 \mathbf{T}^{(i)} + \rho^{-1} \partial_{\rho} \mathbf{T}^{(i)} + \partial_{\gamma\gamma}^2 \mathbf{T}^{(i)} = \alpha_i^{-1} \partial_{\tau} \mathbf{T}^{(i)}, \quad i = \overline{1, \mathbf{M}}; \quad (1)$$

$$\mathbf{T}^{(i)} = 0, \tau = 0, i = \overline{1, \mathbf{M}}; \quad (2)$$

$$\mathbb{X}_T^{(1)} \partial_\gamma \mathbf{T}^{(1)} = -\mathbf{q} * (\rho, \tau), \gamma = 0; \quad \partial_\gamma \mathbf{T}^{(M)} = \mathbf{T}^{(M)} = 0, \quad \gamma \rightarrow \infty; \quad (3)$$

$$\mathbf{T}^{(i)} = \mathbf{T}^{(i+1)}, \quad \mathbb{X}_T^{(i)} \partial_\gamma \mathbf{T}^{(i)} = \mathbb{X}_T^{(i+1)} \partial_\gamma \mathbf{T}^{(i+1)}, \quad \gamma = \gamma_i, \quad i = \overline{1, M-1}, \quad (4)$$

де $\rho = \mathbf{r}/\mathbf{d}$, $\gamma = \mathbf{z}/\mathbf{d}$, $\tau = \mathbf{a}_0 \mathbf{t}/\mathbf{d}^2$, $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i/\mathbf{a}_0$, $\mathbb{X}_T^{(i)} = \lambda_T^{(i)}/\lambda_T^{(0)}$, $\gamma_i = \sum_{k=1}^i \mathbb{H}_k$, $\mathbb{H}_i = \mathbf{h}_i/\mathbf{d}$, $\lambda_T^{(i)}, \mathbf{a}_i$ - відповідно, коефіцієнти тепло- і температуропровідності, $\mathbf{h}_i$ - товщина i -го шару, $\lambda_T^{(0)}, \mathbf{a}_0, \mathbf{d}$ - деякі розмірні величини, які визначають з міркувань зручності проведення числового аналізу.

Застосовуючи до рівнянь (1), крайових умов (3) та умов спряження (4) інтегральне перетворення Ганкеля-Лагерра, після врахування початкових умов (2) одержимо трикутну послідовність крайових задач

$$\mathbf{d}_\gamma^2 \bar{\mathbf{T}}_n^{(i)} - \omega_i^2 \bar{\mathbf{T}}_n^{(i)} = \beta_i \sum_{m=0}^{n-1} \bar{\mathbf{T}}_m^{(i)}, \quad i = \overline{1, M}, \quad (5)$$

$$\mathbb{X}_T^{(1)} \mathbf{d}_\gamma \bar{\mathbf{T}}_n^{(1)} \Big|_{\gamma=0} = -\bar{\mathbf{q}}_n(\xi), \quad \bar{\mathbf{T}}_n^{(M)} \Big|_{\gamma \rightarrow \infty} = 0, \quad (6)$$

$$\bar{\mathbf{T}}_n^{(i)} = \bar{\mathbf{T}}_n^{(i+1)}; \quad \mathbb{X}_T^{(i)} \mathbf{d}_\gamma \bar{\mathbf{T}}_n^{(i)} = \mathbb{X}_T^{(i+1)} \mathbf{d}_\gamma \bar{\mathbf{T}}_n^{(i+1)}, \quad \gamma = \gamma_i, \quad i = \overline{1, M-1}. \quad (7)$$

У формулах (5)-(7) $\bar{\mathbf{T}}_n^{(i)}(\xi, \gamma) = \int_0^\infty \rho \left[\int_0^\infty \mathbf{e}^{-\lambda \tau} \mathbf{T}^{(i)}(\rho, \gamma, \tau) \mathbf{L}_n(\lambda \tau) \mathbf{d}\tau \right] \mathbf{J}_0(\rho \xi) \mathbf{d}\rho$,

$\mathbf{n} = 0, 1, 2, \dots$ - зображення за Лагерром і Ганкелем, $\mathbf{L}_n(\cdot)$ - поліноми Лагерра, $\omega_i^2 = \xi^2 + \beta_i$, $\beta_i = \lambda/\mathbf{a}_i$, λ - масштабний множник.

Загальний розв'язок трикутної послідовності (5) згідно з результатами праці [2] подамо у вигляді алгебричної згортки

$$\bar{\mathbf{T}}_n^{(i)}(\xi, \gamma) = \sum_{j=0}^n \left[\mathbf{A}_{n-j}^{(i)}(\xi) \mathbf{G}_j^{(i)}(\xi, \gamma) + \mathbf{B}_{n-j}^{(i)}(\xi) \mathbf{W}_j^{(i)}(\xi, \gamma) \right], \quad i = \overline{1, M}, \quad \mathbf{n} = 0, 1, 2, \dots, \quad (8)$$

де $\mathbf{A}_{n-j}^{(i)}(\xi)$ та $\mathbf{B}_{n-j}^{(i)}(\xi)$ - довільні функції параметра перетворення ξ .

Безпосередня підстановка подання (8) у послідовності (5) після групування доданків біля довільних $\mathbf{A}_{n-j}^{(i)}(\xi)$ та $\mathbf{B}_{n-j}^{(i)}(\xi)$ дасть послідовність рівнянь

$$\sum_{j=0}^n \mathbf{A}_{n-j}^{(i)}(\xi) \left[\mathbf{d}_\gamma^2 \mathbf{G}_j^{(i)}(\xi, \gamma) - \omega_i^2 \mathbf{G}_j^{(i)}(\xi, \gamma) - \beta_i \sum_{k=0}^{j-1} \mathbf{G}_k^{(i)}(\xi, \gamma) \right] + \\ + \sum_{j=0}^n \mathbf{B}_{n-j}^{(i)}(\xi) \left[\mathbf{d}_\gamma^2 \mathbf{W}_j^{(i)}(\xi, \gamma) - \omega_i^2 \mathbf{W}_j^{(i)}(\xi, \gamma) - \beta_i \sum_{k=0}^{j-1} \mathbf{W}_k^{(i)}(\xi, \gamma) \right] = 0, \quad \mathbf{n} = 0, 1, 2, \mathbf{K}$$

Внаслідок довільності $A_{n-j}^{(i)}(\xi)$ та $B_{n-j}^{(i)}(\xi)$ з останньої послідовності одержимо, що $G_j^{(i)}(\xi, \gamma)$ та $W_j^{(i)}(\xi, \gamma)$ є лінійно незалежними розв'язками трикутної послідовності звичайних алгебричних рівнянь

$$d_{\gamma}^2 G_j^{(i)}(\xi, \gamma) - \omega_i^2 G_j^{(i)}(\xi, \gamma) = \beta_i \sum_{k=0}^{j-1} G_k^{(i)}(\xi, \gamma) \quad (9)$$

$$d_{\gamma}^2 W_j^{(i)}(\xi, \gamma) - \omega_i^2 W_j^{(i)}(\xi, \gamma) = \beta_i \sum_{k=0}^{j-1} W_k^{(i)}(\xi, \gamma). \quad (10)$$

Враховуючи структуру послідовностей (9), (10) і незалежність їхніх фундаментальних розв'язків, подамо їх з використанням методу невизначених коефіцієнтів у вигляді

$$G_j(\gamma, \omega_i) = \exp(-\omega_i \gamma) \sum_{k=0}^j a_{j,k}^i \frac{(\omega_i \gamma)^k}{k!}; \quad W_j(\gamma, \omega_i) = \exp(\omega_i \gamma) \sum_{k=0}^j a_{j,k}^i \frac{(-\omega_i \gamma)^k}{k!}. \quad (11)$$

Безпосередня підстановка розв'язків (11) в рівняння (9), (10) приводить до рекурентних співвідношень

$$a_{j,k+1}^i = 0.5 \left(a_{j,k+2}^i - \frac{\beta_i}{\omega_i^2} \sum_{m=k}^{j-1} a_{m,k}^i \right).$$

За відомих $G_j^{(i)}(\xi, \gamma)$ та $W_j^{(i)}(\xi, \gamma)$ довільні $A_{n-j}^{(i)}(\xi)$ та $B_{n-j}^{(i)}(\xi)$ одержимо задовольняючи крайові умови, умови спряження шарів та умови на безмежності. В результаті прийдемо до трикутної послідовності лінійних рівнянь

$$[b_{k,l}] \{A_n^{(1)}, B_n^{(1)}, \dots, A_n^{(l)}, B_n^{(l)}, \dots, A_n^{(M)}\}^T = \{c_n^k\}, \quad B_n^{(M)} \equiv 0, n = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

У системах (12), внаслідок ідентичності умов спряження, структура матриці $[b_{k,l}]$ має вигляд

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & 0 & & & & & & \mathbf{L} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,4} & 0 & & & & \mathbf{L} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,4} & 0 & & & & \mathbf{L} \\ & & & & & & & & \mathbf{L} \\ 0 & \mathbf{L} & 0 & b_{2i,2i-1} & b_{2i,2i} & b_{2i,2i+1} & b_{2i,2i+2} & 0 & \mathbf{L} \\ 0 & \mathbf{L} & 0 & b_{2i+1,2i} & b_{2i+1,2i+1} & b_{2i+1,2i+2} & b_{2i+1,2i+2} & 0 & \mathbf{L} \\ & & & & & & & & \mathbf{L} \\ 0 & & & \mathbf{L} & & 0 & b_{2M-2,2M-3} & b_{2M-2,2M-2} & b_{2M-2,2M-1} \\ 0 & & & \mathbf{L} & & 0 & b_{2M-1,2M-3} & b_{2M-1,2M-2} & b_{2M-1,2M-1} \end{pmatrix}$$

Коефіцієнти $b_{k,l}$ не залежать від n і набувають вигляду:

$$b_{1,1} = -\omega_1; b_{1,2} = \omega_1; b_{2i,2i-1} = e^{-\omega_i \gamma_i}; b_{2i,2i} = e^{\omega_i \gamma_i}; b_{2i,2i+1} = -e^{-\omega_{i+1} \gamma_i};$$

$$b_{2i,2i+2} = -e^{\omega_{i+1} \gamma_i}; b_{2i+1,2i-1} = -\mathbb{X}_T^{(i)} \omega_i e^{-\omega_i \gamma_i}; b_{2i+1,2i} = \mathbb{X}_T^{(i)} \omega_i e^{\omega_i \gamma_i};$$

$$b_{2i+1,2i+1} = \mathbb{X}_T^{(i+1)} \omega_{i+1} e^{-\omega_{i+1} \gamma_i}; b_{2i+1,2i+2} = -\mathbb{X}_T^{(i+1)} \omega_{i+1} e^{\omega_{i+1} \gamma_i}; i = \overline{1, M-1}.$$

Стовпець вільних членів $\mathbf{c}_n^k$ складається з комбінації $\bar{\mathbf{q}}_n(\xi)$ і невідомих $\mathbf{A}_m^{(i)}, \mathbf{B}_m^{(i)}, m = \overline{0, n-1}$, одержаних при попередніх значеннях $\mathbf{n}$.

Шляхом елементарних перетворень систему (12) можна звести до трикутного вигляду

$$\begin{pmatrix} b_{1,1}^* & b_{1,2}^* & 0 & & \mathbf{L} & & 0 \\ & \mathbf{O} & & & & & \\ 0 & & b_{2i-1,2i-1}^* & b_{2i-1,2i}^* & 0 & \mathbf{L} & 0 \\ 0 & \mathbf{L} & 0 & b_{2i,2i}^* & b_{2i,2i+1}^* & b_{2i,2i+2}^* & 0 \\ 0 & & \mathbf{L} & 0 & b_{2i+1,2i+1}^* & b_{2i+1,2i+2}^* & 0 \\ & & & & \mathbf{O} & & \\ 0 & & & \mathbf{L} & 0 & & b_{2M-1,2M-1}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_n^{(1)} \\ \mathbf{B}_n^1 \\ \mathbb{M} \\ \mathbf{A}_n^{(i)} \\ \mathbf{B}_n^{(i)} \\ \mathbb{M} \\ \mathbf{A}_n^{(M)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{n,1}^* \\ \mathbf{c}_{n,2}^* \\ \mathbb{M} \\ \mathbf{c}_{n,2i}^* \\ \mathbf{c}_{n,2i+1}^* \\ \mathbb{M} \\ \mathbf{c}_{n,2M-1}^* \end{pmatrix}, \quad (13)$$

де

$$b_{1,1}^* = -\omega_1; b_{1,2}^* = \omega_1; b_{2i,2i}^* = 2\mathbb{X}_T^{(i)} \omega_i \exp(\omega_i \gamma_i), i = \overline{1, M-1};$$

$$b_{2i,2i+1}^* = \exp(-\omega_{i+1} \gamma_i) (\mathbb{X}_T^{(i+1)} \omega_{i+1} - \mathbb{X}_T^{(i)} \omega_i), i = \overline{1, M-1};$$

$$b_{2i,2i+2}^* = -\exp(\omega_{i+1} \gamma_i) (\mathbb{X}_T^{(i+1)} \omega_{i+1} + \mathbb{X}_T^{(i)} \omega_i), i = \overline{1, M-2};$$

$$b_{2i+1,2i+1}^* = \exp(-\omega_{i+1} \gamma_i) \left[\exp(-\omega_i \gamma_i) (\mathbb{X}_T^{(i+1)} \omega_{i+1} - \mathbb{X}_T^{(i)} \omega_i) b_{2i-1,2i}^* - \right. \\ \left. - \exp(\omega_i \gamma_i) (\mathbb{X}_T^{(i+1)} \omega_{i+1} + \mathbb{X}_T^{(i)} \omega_i) b_{2i-1,2i-1}^* \right], i = \overline{1, M-1}; \quad (14)$$

$$b_{2i+1,2i+2}^* = -\exp(\omega_{i+1} \gamma_i) \left[\exp(-\omega_i \gamma_i) (\mathbb{X}_T^{(i+1)} \omega_{i+1} + \mathbb{X}_T^{(i)} \omega_i) b_{2i-1,2i}^* - \right. \\ \left. - \exp(\omega_i \gamma_i) (\mathbb{X}_T^{(i+1)} \omega_{i+1} - \mathbb{X}_T^{(i)} \omega_i) b_{2i-1,2i-1}^* \right], i = \overline{1, M-2}.$$

З трикутної системи алгебричних (13), використовуючи «зворотний хід» і вигляд коефіцієнтів $b_{i,j}^*$, одержимо її рекурентний розв'язок для довільного значення $\mathbf{M}$

$$\begin{aligned}
 A_n^{(M)} &= \frac{c_{n,2M-1}^*}{b_{2M-1,2M-1}^*}; \quad B_n^{(i)} = \frac{1}{b_{2i,2i}^*} (c_{n,2i}^* - B_n^{(i+1)} b_{2i,2i+2}^* - A_n^{(i+1)} b_{2i,2i+1}^*); \\
 A_n^{(i)} &= \frac{1}{b_{2i-1,2i-1}^*} (c_{n,2i-1}^* - B_n^{(i)} b_{2i-1,2i}^*), \quad i = \overline{M-1, 1}.
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Знайшовши всі $A_n^{(i)}$ і $B_n^{(i)}$, а отже, за формулою (8) і $\bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma)$, розв'язок задачі (1)-(4) остаточно подамо у вигляді

$$T^{(i)}(\rho, \gamma, \tau) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \xi \bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) J_0(\xi \rho) d\xi \right] L_n(\lambda \tau). \tag{16}$$

Числовий аналіз проводили для півпростору з властивостями алюмінієвого стопа [4] ($a_2 = 11,9 \times 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{с}$, $\lambda_T^{(2)} = 36 \text{ Вт} / (\text{м} \cdot \text{К})$) та покриття виготовленого з кераміки [4] ($a_1 = 90,6 \times 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{с}$, $\lambda_T^{(1)} = 222 \text{ Вт} / (\text{м} \cdot \text{К})$).

Теплове навантаження границі композита було задано співвідношенням

$$q^*(\rho, \tau) = q^* S_+(1 - \rho)(1 - \rho^2)^2 S_+(2 - \tau)((\tau - 1)^2 - 1)^2,$$

де q^* - деяка розмірна величина; $S_+(g)$ - асиметрична функція Хевісайда. За d було взято радіус ділянки нагрівання і прийнято $h_1 = 0,5$.

На рис. 1 показано результати обчислення безрозмірного температурного поля $T^* = T^{(i)} d / q^*$ вздовж осі γ при $\alpha = 1$ в різні моменти безрозмірного часу, а на рис. 2 залежність безрозмірної температури в різних точках поверхні поділу матеріалів композита від часової змінної.

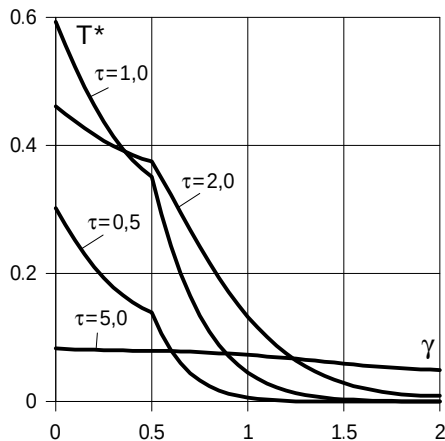


Рис. 1

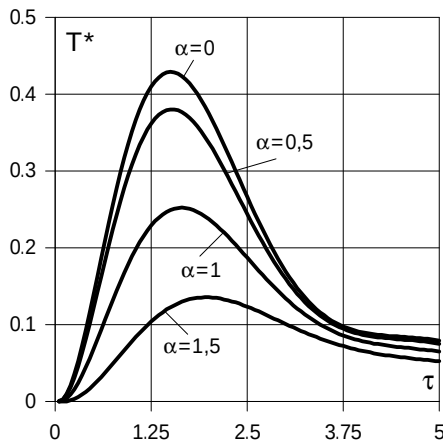


Рис. 2

Як видно з наведеного, найбільшого значення температурне поле набуває в центрі ділянки нагріву в моменти часу, які відповідають закінченню дії імпульсного нагріву. Причому для значень часової змінної $\tau > 5$ температурне поле за глибиною композита набуває практично лінійної залежності.

-
1. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К., 1992.
 2. Галазюк В.А. Метод поліномів Чебишева-Лагерра в змішаній задачі для лінійного диференціального рівняння другого порядку в часткових похідних з постійними коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1981. – № 1. – С. 3–7.
 3. Снеддон И. Преобразования Фурье. – М., 1955.
 4. Tanigawa Y. Some Basic Thermoelastic Problems for Nonhomogeneous Structural Materials // Appl. Mech. Rev.,(ASME). – 1995. – Vol. 48, No. 6. – P. 287–300.
 5. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. – М., 1979.

QUASISTATIC PROBLEM OF HEAT CONDUCTIVITY IN THE LAYERED HALFSpace FROM IMPULSIVE HEATING

Olha Turchyn¹, Ihor Turchyn²

¹National Forestry University of Ukraine,
General Chuprinka Str., 103 79057 Lviv, Ukraine

²Ivan Franco National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine

With the use of method of polynomials of Laguerre and integral transformation of Hankel the analytical decision of quasistatic problem of heat conductivity is got for the system of layer-halfspace at the impulsive symmetric heating.

Key words: heat conductivity, quasistatic problem, stratified bodies, polynomials of Laguerre.

Стаття надійшла до редколегії 08.06.2007

Прийнята до друку 19.11.2008

КОНТАКТ ЖОРСТКИХ ТІЛ ПІД ДІЄЮ ЗМІННОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Олександр ЛЮБІН

*Хмельницький національний університет,
вул. Інститутська, 11 29016 Хмельницький, Україна*

У статті побудовано математичну модель контактної взаємодії жорстких циліндрових тіл з урахуванням тертя. Числовий розв'язок цієї задачі отримано з допомогою MATHCAD 2000.

Ключові слова: контактна взаємодія, циліндричне тіло, тертя, числовий розв'язок.

У працях [1, 2, 4, 7], в яких наведено аналітичні підходи до розв'язання контактних задач зі зносом, накладені на змінне в часі навантаження обмеження пов'язані лише з нехтуванням динамічними ефектами [1] чи необхідністю збільшення розмірів контактної області [7].

У розвиток результатів [6] розглянута можливість керування зносом за рахунок змінного навантаження з метою подовження ресурсу роботи спряження.

Формулювання та розв'язання зносоконтактної задачі. Розглядають контактну взаємодію між жорстким довгим суцільним циліндром D_1 радіуса R_1 , який з радіальним початковим прозором Δ поміщений у жорсткий корпус (обойму) D_2 з внутрішнім радіусом $R_2 = R_1 + \Delta$. Циліндр D_1 обертається навколо осі з постійною кутовою швидкістю ϖ та притиснутий до внутрішньої поверхні корпусу D_2 вертикальним змінним навантаженням $Q(s)$, яке припадає на одиницю довжини циліндра. Осі тіл D_1, D_2 – паралельні, зміщення осі циліндра колінеарне до діючого навантаження.

За припущенням, при контактній взаємодії відбувається зношування внутрішньої поверхні корпусу, силами тертя та зносом циліндра нехтуємо.

Математична модель зносоконтактної задачі (ЗКЗ) містить:

1) умову контакту

$$u_w(\varphi, s) = \Delta \left[\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_0(s)} - 1 \right]; \quad (1)$$

2) умову рівноваги циліндра D_1

$$Q(s) = R_1 \int_{-\varphi_0(s)}^{\varphi_0(s)} \sigma(\varphi, s) \cos \varphi d\varphi; \quad (2)$$

3) закон зношування внутрішньої поверхні корпусу

$$\frac{\partial \mathbf{u}_w(\varphi, \mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}} = k_w \alpha [\sigma(\varphi, \mathbf{s})]^m \mathbf{s}^{\alpha-1}. \quad (3)$$

Тут $\mathbf{u}_w(\varphi, \mathbf{s})$ – лінійний знос; $\sigma(\varphi, \mathbf{s})$ – контактний тиск; φ – кутова координата, відлічувана від лінії дії $\mathbf{Q}(\mathbf{s})$, $-\varphi_0(\mathbf{s}) \leq \varphi \leq \varphi_0(\mathbf{s})$; $\varphi_0(\mathbf{s})$ – змінний напівкут контакту; $\mathbf{s}$ – шлях тертя для точки корпусу з координатою $\varphi = 0$, яка є в контакті з початку процесу; k_w , $m \geq 1$, $0 < \alpha \leq 1$ – числові характеристики зносу матеріалу, які визначають на підставі експериментальних випробовувань.

Закон зношування у формі (3) відповідає зносу за моделлю старіння [5], для $\alpha = 1$ маємо загальний степеневий закон залежності інтенсивності зносу від контактного тиску.

У результаті розв'язання ЗКЗ треба визначити кут $\varphi_0(\mathbf{s})$, контактний тиск $\sigma(\varphi, \mathbf{s})$ та знос $\mathbf{u}_w(\varphi, \mathbf{s})$.

Для розв'язання ЗКЗ виконаємо такі дії.

Продиференціюємо по $\mathbf{s}$ обидві частини (1). Одержимо

$$\frac{\partial \mathbf{u}_w(\varphi, \mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}} = \Delta \cos \varphi \frac{\sin \varphi_0(\mathbf{s})}{\cos^2 \varphi_0(\mathbf{s})} \frac{d\varphi_0(\mathbf{s})}{d\mathbf{s}}. \quad (4)$$

Враховуючи закон зношування (3), маємо

$$\sigma(\varphi, \mathbf{s}) = \left[\frac{\Delta}{k_w \alpha \mathbf{s}^{\alpha-1}} \frac{\sin \varphi_0(\mathbf{s})}{\cos^2 \varphi_0(\mathbf{s})} \frac{d\varphi_0(\mathbf{s})}{d\mathbf{s}} \right]^{1/m} \cos^{1/m} \varphi. \quad (5)$$

Підставимо (5) в умову рівноваги (2)

$$\mathbf{Q}(\mathbf{s}) = \mathbf{R}_1 \left[\frac{\Delta}{k_w \alpha \mathbf{s}^{\alpha-1}} \frac{\sin \varphi_0(\mathbf{s})}{\cos^2 \varphi_0(\mathbf{s})} \frac{d\varphi_0(\mathbf{s})}{d\mathbf{s}} \right]^{1/m} \mathbf{F}[\varphi_0(\mathbf{s}), m], \quad (6)$$

$$\text{де } \mathbf{F}[\varphi_0(\mathbf{s}), m] = \int_{-\varphi_0(\mathbf{s})}^{\varphi_0(\mathbf{s})} \cos^{\frac{1}{m}+1} \varphi d\varphi.$$

Порівнюючи співвідношення (5) і (6), отримаємо

$$\sigma(\varphi, \mathbf{s}) = \frac{\mathbf{Q}(\mathbf{s}) \cos^{\frac{1}{m}} \varphi}{\mathbf{R}_1 \mathbf{F}[\varphi_0(\mathbf{s}), m]}, \quad (7)$$

тобто величина контактного тиску не залежить безпосередньо від параметра α у законі зношування (3).

На підставі диференціального рівняння (6) знаходимо залежність між $\mathbf{s}$ та $\varphi_0(\mathbf{s})$

$$\frac{k_w \alpha}{\Delta R_1^m} \int_0^s \xi^{\alpha-1} [Q(\xi)]^m d\xi = \int_0^{\varphi_0(s)} \frac{\sin z}{\cos^2 z} F^m[z, m] dz. \quad (8)$$

Лінійний знос $u_w(\varphi, s)$ внутрішньої поверхні корпусу за відомими величинами $\varphi_0(s)$ визначаємо за співвідношенням (1).

Для жорстких тіл D_1, D_2 з формули (7) випливає, що контактний тиск не дорівнює нулеві на кінцях області контакту, це збігається з результатом [2, с. 92, формула (2.33)].

Формулювання та розв'язання задачі керування. Технічний ресурс вузла тертя визначають як напрацювання (в одиницях часу чи довжини шляху тертя) від початку експлуатації до переходу його у стан, при якому його подальше використання недоцільне або недопустиме (граничний стан).

Граничний стан зумовлений одним з факторів: а) цілковитим зносом антифрикційного елемента (покриття); б) гранично допустимими значеннями радіального прозору або зносу; в) гранично допустимим кутом контакту.

На підставі (1) максимальний знос поверхні корпусу простежується в точці з координатою $\varphi = 0$, тобто

$$\max u_w(\varphi, s) = u_w(0, s) = \Delta \left(\frac{1}{\cos \varphi_0(s)} - 1 \right). \quad (9)$$

Нехай граничний стан спряження визначають гранично допустимим зносом u_w^{zp} або гранично допустимим кутом контакту $2\varphi_0^{zp}$. З (9) випливає, що ці величини пов'язані співвідношенням

$$u_w^{zp} = \Delta \left(\frac{1}{\cos \varphi_0^{zp}} - 1 \right), \quad (10)$$

або

$$\varphi_0^{zp} = \arccos \frac{\Delta}{u_w^{zp} + \Delta}. \quad (11)$$

Подано діюче навантаження $Q(s)$ у вигляді такої функції змінної s

$$Q(s) = Q(s, \mu_0, \mu_1, \mu_2) = \mu_0 + \mu_1 \cdot s + \mu_2 \cdot s^2,$$

при цьому обмежимо $Q(s)$ умовою

$$Q(s) \leq Q_{cp}, \quad (12)$$

де Q_{cp} — задане значення граничного навантаження.

Сформулюємо задачу керування так: треба знайти такі значення параметрів μ_0, μ_1, μ_2 у функції $Q(s)$, щоб забезпечити досягнення

заданих величин $\mathbf{u}_w^{zp}$ або φ_0^{zp} для максимально можливого значення шляху тертя $\mathbf{s}$.

Математична модель задачі керування полягає у знаходженні максимуму функції

$$V(\mathbf{s}, \mu_0, \mu_1, \mu_2) = \frac{k_w \alpha}{\Delta \mathbf{R}_1^m} \int_0^{\mathbf{s}} \xi^{\alpha-1} (\mu_0 + \mu_1 \cdot \xi + \mu_2 \cdot \xi^2)^m d\xi \quad (13)$$

з обмеженнями

$$\begin{aligned} \mu_0 > 1, \quad \mu_1 > 0, \quad \mu_2 > 0, \quad \mathbf{s} > \mathbf{s}_{\min}, \quad \mu_0 + \mu_1 \cdot \mathbf{s} + \mu_2 \cdot \mathbf{s}^2 \leq Q_{zp}, \\ |U(\varphi_0^{zp}) - V(\mathbf{s}, \mu_0, \mu_1, \mu_2)| \leq \varepsilon, \end{aligned} \quad (14)$$

де $\mathbf{s}_{\min}$ – деяке задане мінімальне значення шляху тертя, яке може змінюватись в процесі розв'язання задачі з метою досягнення $\mathbf{s} = \mathbf{s}_{\max}$, ε – точність визначення кореня рівняння (8),

$$U[\varphi_0^{zp}] = \int_0^{\varphi_0^{zp}} \frac{\sin z}{\cos^2 z} \left[\int_{-z}^z (\cos \varphi)^{\frac{1}{m}+1} d\varphi \right]^m dz.$$

Розв'язання задачі (13), (14) проведено чисельним методом засобами системи MathCAD 2000 з використання функції Maximize.

На рис. 1-3 зображено графіки зміни шляху тертя, навантаження та максимального контактного тиску для тих самих геометричних даних і величин $k_w, Q_{zp}, \varphi_0^{zp}$ для низки значень параметрів m, α .

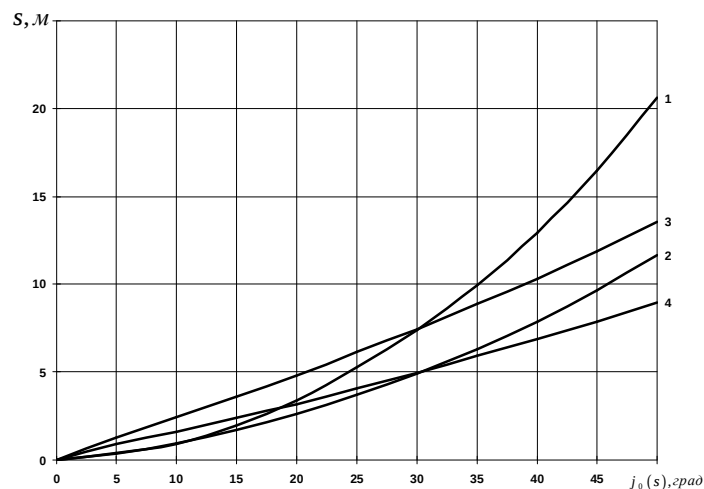


Рис. 1. Залежність $[s, \varphi_0(s)]$

$1 - s \cdot 10^{-5}, m = 1, \alpha = 0,7;$ $2 - s \cdot 10^{-4}, m = 1, \alpha = 1;$
 $3 - s \cdot 10^{-3}, m = 1,2; \alpha = 0,7;$ $4 - s \cdot 10^{-3}, m = 1,4; \alpha = 0,5.$

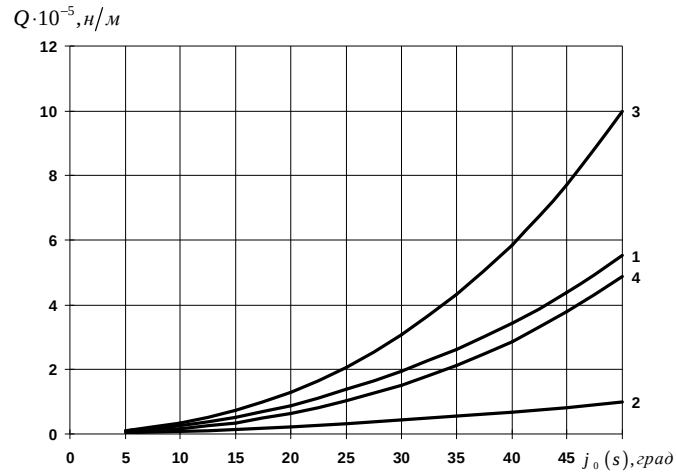


Рис. 2. Графіки навантаження $Q(s)$

$1 - m = 1, \alpha = 0,7;$ $2 - m = 1, \alpha = 1;$ $3 - m = 1,2; \alpha = 0,7;$ $4 - m = 1,4; \alpha = 0,5.$

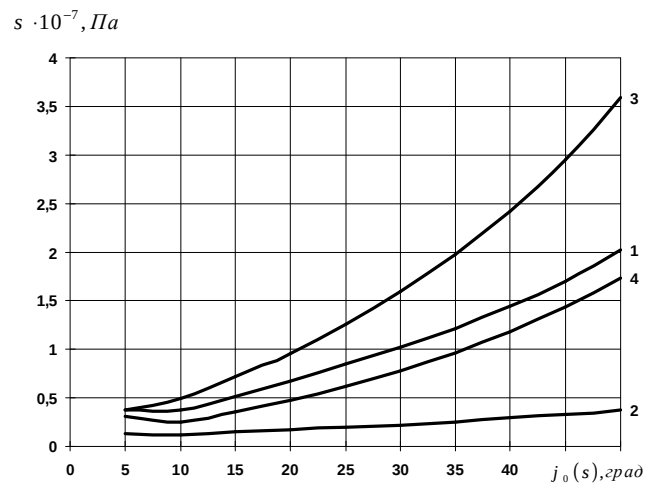


Рис. 3. Графіки зміни максимального контактного тиску $\sigma_{\max} = \sigma(0, s)$

$1 - m = 1, \alpha = 0,7;$ $2 - m = 1, \alpha = 1;$ $3 - m = 1,2; \alpha = 0,7;$ $4 - m = 1,4; \alpha = 0,5.$

1. Александров В.М., Коваленко Е.В. Аналитическое решение контактной задачи об изнашивании сопряжения вал – втулка // Трение и износ. – 1987. – Т. 8. – № 6. – С. 985–995.
2. Галахов М.А., Усов П.П. Дифференциальные и интегральные уравнения математической теории трения. – М., 1990.
3. Дьяконов В. Mathcad 2000: Учебный курс. – СПб: Питер, 2000.
4. Коваленко Е.В. К расчету изнашивания сопряжения вал–втулка // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1982. – № 6. – С. 66–72.
5. Кузьменко А.Г., Кузьменко В.А., Насер Гассан Ахмед. Модели переходных процессов при изнашивании // Проблемы трибологии / Problems of Tribology // 1997. – № 3. – С. 81–121.
6. Любин А.Г. Об управлении процессом изнашивания вкладыша радиального подшипника скольжения // Проблемы трибологии / Problems of Tribology /. – 2003. – № 2. – С. 81–85.
7. Солдатенков И.А. Изнашивание покрытий в упругих сопряжениях при изменяющейся площадке контакта // Трение и износ. – 1987. – Т. 8. – № 2. – С. 206–213.

CONTACT PROBLEM FOR RIGID BODIES UNDER VARIABLE LOAD

Alexander Lyubin

*National University of Khmelnytsky,
Instytuyska Str., 11 29016 Khmelnytsky, Ukraine*

The article presents mathematical model of contact interaction of rigid cylindrical bodies with take into consideration for wear. Numerical solution for control problem of wear is obtained by MathCAD 2000.

Key words: contact interaction, cylinder body, wear, numerical solution.

Стаття надійшла до редколегії 15.09.2006

Прийнята до друку 19.11.2008

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

1. Стаття повинна містити результати нових досліджень автора з повним їхнім доведенням. Не доцільно робити великі огляди вже опублікованих результатів. Робити посилання на неопубліковані праці не можна.

2. Текст статті набирають на комп'ютері українською чи англійською мовами. До редакційної колегії потрібно подавати:

два примірники статті з підписом автора (співавторів) на останній сторінці;
назву статті, резюме (резюме повинно передавати зміст основних результатів статті, а не лише повторювати її назву), ключові слова, ім'я, прізвище автора, місце роботи, адресу українською, англійською та російською мовами, електронну адресу; електронний варіант статті та резюме на дискеті 3,5" (редколегія повертає авторів дискету; тексти можна надіслати за адресою lnu.visn.mtm@gmail.com);

довідка про автора (співавторів), у якій треба зазначити ім'я, по батькові та прізвище автора, місце роботи, посаду, домашню адресу, телефон та електронну адресу.

Оптимальний обсяг статті до 12 сторінок. Розмір шрифтів 10pt, висота сторінки – 190 mm, ширина – 135 mm.

3. Вимоги до набору.

Текст статті створювати у версії $\text{\LaTeX}$ з кодуванням кирилических шрифтів „Кирилиця (Windows)“ (кодова сторінка 1251).

На першій сторінці статті потрібно зазначити номер УДК.

Номери формул ставити з правого боку і нумерувати лише формули, на які є посилання.

У посиланнях на теорему з монографії зазначити сторінку, на якій вона описана.

Рисунки до статті подавати у графічному форматі ВМР чи РСХ. Назва рисунка чи його номер не входять у зображення їх треба створювати засобами $\text{\LaTeX}$ 'у. Вибираючи розмір графічного зображення, належить врахувати, що воно буде надруковане на принтері з роздільною здатністю 600 dpi.

Літературу подавати загальним списком у порядку посилань на джерела в тексті статті.

Зразки бібліографічного опису книги, статті, препринту, дисертації, депонованого рукопису, тез доповідей конференцій (з'їздів та ін.):

1. *Грабович А.І.* Назва / *Грабович А.І.* – К.: Вища школа, 1985. – 196 с.
2. *Петренко О.Б.* Назва / *Петренко О.Б., Шинк М.М.* – Л.: Афіша, 2001. – 196 с.
3. *Кравчук О.М.* Назва / *Кравчук О.М.* // Укр. мат. журн. – 1985. – Т. 2, №2. – С. 4-20.
4. *Кравчук О.М.* Назва / *Кравчук О.М., Потічний М.М.* // Матем. Студії – 1995. – Т. 2, №2. – С. 4-20.

5. *Михайленко Г.Д.* Назва / *Михайленко Г.Д.* – Л.: ІППММ, 1993. – 9 с. – (Препринт / НАН України, Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача: 80.1).
6. *Михайленко Г.Д.* Назва / *Михайленко Г.Д., Степаняк С.І.* – Л.: ІППММ, 1993. – 9 с. – (Препринт / НАН України, Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача: 80.1).
7. *Колмаз Ю. А.* Назва: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук. / *Колмаз Ю.А.* – К., 2008. – 20 с.
8. *Сеник С.М.* Назва / *Сеник С.М.* – К., 1992. – 17 с. – Деп. в ДНТБ України, В2020-1995.
9. *Сеник С.М.* Назва / *Сеник С.М., Мандрик І.Т.* – К., 1992. – 17 с. – Деп. в ДНТБ України, В2020-1995.
10. *Муравський В.К.* Назва / *Муравський В.К.* // Наукова конф. "Нелінійні диференціальні рівняння": тези доп., 27 серпня - 2 вересня 1994 р., Київ. – К.: КНУ ім. Т. Г. Шевченка, 1994. – С. 540-551.
11. *Муравський В.К.* Назва / *Муравський В.К., Ліско С.В.* // Наукова конф. "Нелінійні диференціальні рівняння": тези доп., 27 серпня - 2 вересня 1994 р., Київ. – К.: КНУ ім. Т. Г. Шевченка, 1994. – С. 540-551.

