УДК 517.944:947

МАРІЯ МАРТИНЕНКО

ПРО РОЗВ'ЯЗОК ЕЛІПТИЧНИХ СИСТЕМ В ОБЛАСТЯХ З "ЩІЛИНАМИ"

Доводиться, що за певних припущень розв'язок еліптичної системи може бути зображений за допомогою узагальненого потенціалу простого або подвійного шару.

Розглядається така еліптична система:

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) \equiv \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(B_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(C_i'(x)\, u\right) - \tag{1}$$

$$-\sum_{i=1}^{3} C_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + B_0(x) u = 0,$$

де $B_{ij}(x) = B_{ji}'(x)$, $B_0(x) = B_0'(x)$ (штрих означає транспонування). Ця система є загальною еліптичною системою другого порядку варіаційного типу від додатно визначеного функціоналу. Припускаємо, що коефіцієнти B_{ij} задовольняють умови*

$$-2\sum_{i,j=1}^{3}\tilde{B}_{ij}\nu_i\tau_j = \tag{2}$$

$$= Re\left[\int_{+} A_0^{-1}(\beta\nu+\tau)d\beta\right]^{-1}\int_{+}\beta A_0^{-1}(\beta\nu+\tau)d\beta \sum_{i,j=1}^{3}(\tilde{B}_{ij}+\tilde{B}_{ji})\nu_i\nu_j,$$

де $\tilde{B}_{ij}+\tilde{B}_{ji} = 2B_{ij}$, $\tilde{B}_{ij} = \tilde{B}_{ji}'$, ν та τ – одиничні вектори, $(\tau,\nu)=0$, $\int_{+}(\dots)\,d\beta$ – інтегрування за простим додатно орієнтовним замкненим контуром, який охоплює всі β корені рівняння $\det A_0(\beta\nu+\tau)=0$ з додатними уявними частинами,

---

*Ця умова вперше введена Волошаною М.С. [1]

$$A_0(\alpha)=\sum_{i,j=1}^{3} B_{ij}\,\alpha_i\alpha_j\,, \qquad \alpha=(\alpha_1,\ \alpha_2\ ,\ \alpha_3)\ .$$

Систему (I) запишемо у вигляді

$$A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)\equiv A_0\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)+A_1\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)=0\,, \qquad (3)$$

де $A_0\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – однорідний оператор другого порядку; $A_1\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – оператор, що містить всі інші похідні, $x=(x_1,x_2,x_3)$. Припускаємо, що коефіцієнти оператора $A_0\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ неперервно диференційовані три рази в E_3, коефіцієнти при похідних порядку j ($j=0,1$) в операторі $A_1\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ неперервно диференційовані в E_3 j раз, причому коефіцієнти оператора $A_0\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ будуть порядку $O(F(x))$, похідні до другого порядку від цих коефіцієнтів, коефіцієнти оператора $A_1\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ та їх похідні до другого порядку зростають не швидше, ніж $F(x)$ при $|x|\to\infty$, де $F(x)$ – така додатна в E_3 функція, що

$$\iiint\limits_{\infty}\frac{dx}{F(x)}<\infty \qquad \text{та} \qquad \frac{|\det(A_0(x,2\pi i\alpha)-\lambda^2 I)|}{[F(x)]^p|\alpha|^{2p}+\lambda^{2p}}\geq\mu>0 \qquad (4)$$

для кожної точки $x\in E_3$ та для кожної дійсної точки $(\lambda,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\neq0$, λ – достатньо велике додатне число.

За цих припущень існує фундаментальна матриця системи (I) в евклідовому просторі [2], а ядра потенціалів задач Діріхле та Неймана для системи (I) мають тільки точкову особливість [I].

Позначимо E_3 – тривимірний простір; S – незамкнена поверхня Ляпунова, обмежена гладкою кривою $\mathcal{T}$; $E_3\setminus S$ – простір зовні S (простір з розрізом вздовж S).

Т е о р е м а I. Нехай функції $u(M)$ та $v(M)$ двічі неперервно диференційовані у $E_3\setminus S$, регулярні на нескінченності, неперервно диференційовані аж до поверхні S за винятком лінії $\mathcal{T}$, в околі якої їх перші похідні ростуть не швидше ніж $\frac{C}{R_0^{\alpha}(M)}$, де $R_0(M)$ – віддаль до $\mathcal{T}$, $C = const$, $0 < \alpha < 1$. Тоді мають місце такі формули:

$$\iiint_{\Omega} \left[v'(x) A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) + B(u, v) \right] dx = \tag{5}$$

$$= -\iint_S v'_+(y) B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) u_+(y) d_y S + \iint_S v'_-(y) B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) u_-(y) d_y S ,$$

$$\iiint_{\Omega} \left\{ v'(x) A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) - \left[u'(x) A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) v(x) \right]' \right\} dx =$$

$$= -\iint_S \left\{ v'_+(y) B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) u_+(y) - \left[u'_+(y) B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) v_+(y) \right]' \right\} d_y S + \tag{6}$$

$$+ \iint_S \left[v'_-(y) B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) u_-(y) - \left[u'_-(y) B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) v_-(y) \right]' \right] d_y S ,$$

де $dx = (dx_1, dx_2, dx_3)$; штрих означає для звичайної матриці транспонування, а для операторної – ще і перехід до спряженої за Лагранжем; [1]

$$B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) = 2 \sum_{i,j=1}^{3} \nu_i(y) \tilde{B}_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{i=1}^{3} C_i'(y) \nu_i(y) ;$$

$\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – орт нормалі до S ; u_+ , $B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) u_+$, u_-, $B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) u_-$ позначають граничні значення u та $B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) u$ при наближенні до поверхні S по напрямку додатної та від'ємної нормалі відповідно.

Для доведення теореми побудуємо навколо лінії $\mathcal{T}$ трубчасту поверхню як обгортку множини сфер радіуса ε , центри яких лежать на кривій $\mathcal{T}$. Оточимо тепер поверхню S замкненою кусково-гладкою поверхнею S_ε , яка складається з двох поверхонь, "паралельних" до поверхні S і розташованих по різні сторони від S , та з'єднуючої їх частини T_ε трубчастої поверхні; при цьому будемо вважати, що віддаль між поверхнею S та S_ε дорівнює ε , де ε – поки довільна мала величина. Позначимо через D_ε необмежену область, границя якої є поверхня S_ε . Для довільних функцій $u(M)$ та

$v(M)$ неперервно диференційовних у D_ε аж до границі та двічі неперервно диференційовних всередині області D_ε, наявні такі формули:

$$\iiint_{D_\varepsilon}\left\{v'(x)\,A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)+B(u,v)\right\}dx=$$

$$=-\iint_{S_\varepsilon} v'(y)\,B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)u(y)\,d_yS\,, \tag{7}$$

$$\iiint_{D_\varepsilon}\left\{v'(x)A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)-\left[u'(x)A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)v(x)\right]'\right\}dx=$$

$$=-\iint_{S_\varepsilon}\left\{v'(y)B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)u(y)-\left[u'(y)B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)v(y)\right]'\right\}d_yS.$$

Це - перша та друга формули Гріна, як відомо, вони мають місце для областей з кусково-гладкою межею.

Перейдемо в формулах (7) до границі при $\varepsilon\to 0$. Очевидно, що границя правих частин буде існувати, якщо інтеграли по трубчастій поверхні T_ε від правих частин формул (7) будуть прямувати до нуля, коли $\varepsilon\to 0$. Введемо на поверхні T_ε дві змінні φ та l, з яких φ є кутом, що зростає від нуля до 2π, а l - довжина дуги лінії $\mathcal{T}$, що відраховується від деякої фіксованої точки в певному напрямку. Тоді елемент площі поверхні трубки T_ε дорівнюватиме $\varepsilon\, dl\, d\varphi$, а інтеграли по трубчастій поверхні від правих частин формул (7) будуть $\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\ell}(\ldots)\,\varepsilon\, dl\, d\varphi$.

Звідси випливає, що при $\varepsilon\to 0$ вищеназвані інтеграли прямують до нуля внаслідок зроблених припущень відносно функцій u та v. Тому в границі при $\varepsilon\to 0$ одержимо формули Гріна (5), (6) для простору з розрізом вздовж S.

Якщо функції u та v визначені в обмеженій області, границя якої складається зі скінченої кількості гладких компонент, що не перетинаються між собою $S=\sum\cup\sigma$, де через $\sum=\bigcup_k\sum_k$ позначено сукупність гладких замкнених поверхонь $\sum_k$, а через $\sigma=\bigcup_k\sigma_k$ - сукупність гладких незамкнених поверхонь σ_k, обмежених гладкими кривими $\mathcal{T}_k$, і мають відповідну кількість похідних у цій області, причому перші похідні функцій $u(M)$ та $v(M)$ поблизу лінії $\mathcal{T}_k$ ведуть себе як $\frac{C}{R_k^\alpha(M)}$, де C - стала; $R_k(M)$ - віддаль від точки M до лінії $\mathcal{T}_k$; $0\le\alpha<1$, тоді мають місце такі формули Гріна:

$$\iiint\limits_D \left\{ v'(x) A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) + B(u, v) \right\} dx =$$

$$= -\iint\limits_{\Sigma} v'(y) B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) u(y) d_y S - \iint\limits_{\sigma} v'(y) B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) u(y) d_y S,$$

$$\iiint\limits_D \left\{ v'(x) A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) - \left[u'(x) A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) v(x) \right]' \right\} dx =$$

$$= -\iint\limits_{\Sigma} \left\{ v'(y) B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) u(y) - \left[u'(y) B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) v(y) \right]' \right\} d_y S -$$

$$- \iint\limits_{\sigma} \left\{ v'(y) B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) u(y) - \left[u'(y) B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) v(y) \right]' \right\} d_y S.$$

Наявні тут інтеграли по незамкненим поверхням слід розуміти як інтеграли по двосторонній поверхні, тобто

$$\iint\limits_{\sigma_k} f\, d_y S = \iint\limits_{\sigma_k} f_+\, d_y S + \iint\limits_{\sigma_k} f_-\, d_y S,$$

де f_+ та f_- - граничні значення f при наближенні до σ_k "зверху" та "знизу".

Т е о р е м а 2. Нехай $u(x)$ - розв'язок системи (I) у просторі з розрізом вздовж незамкненої поверхні Ляпунова, обмеженої гладкою кривою, регулярний на нескінченності, неперервно диференційовний у всьому просторі аж до розрізу за винятком границі цього розрізу, в околі якої він обмежений, а його перші похідні ростуть не швидше, ніж $\frac{C}{R_0^{\alpha}}$, де C - стала; R_0 - віддаль до границі розрізу; $0 \leq \alpha < 1$. Тоді, якщо при наближенні до розрізу по напрямку додатної та від'ємної нормалі цей розв'язок набирає однакових значень $\left\{ [u]_+ = [u]_- \right\}$, то він зображається у вигляді узагальненого потенціалу простого шару, коли ж при наближенні до внутрішніх точок розрізу "зверху" та "знизу" (границю виключаємо) -

$$\left[B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)u(y)\right]_+=\left[B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)u(y)\right]_- ,$$

то він зображається у вигляді узагальненого потенціалу подвійного шару.

Для доведення теореми застосуємо другу формулу Гріна (6) до вектор-функції $v(y)=\varphi(x,y)$ (де $\varphi(x,y)$ - фундаментальна матриця системи (I)[*] та до розв'язку $u(x)$ системи (I)

$$u(x)=-\iint_S\left\{\varphi'(x,y)\left[B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)u(y)\right]_+-\left[u'(y)B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi(x,y)\right]'_+\right\}d_yS+$$

$$+\iint_S\left\{\varphi'(x,y)\left[B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)u(y)\right]_- -\left[u'(y)B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi(x,y)\right]'_-\right\}d_yS ,$$

або

$$u(x)=\iint_S\left\{\left\{\left[u'(y)B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi(x,y)\right]'_+-\left[u'(y)B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi(x,y)\right]'_-\right\}-\right. \tag{8}$$

$$\left.-\left\{\varphi'(x,y)\left[B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)u(y)\right]_+-\varphi'(x,y)\left[B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)u(y)\right]_-\right\}\right\}d_yS .$$

З (8) випливає, що коли розв'язок $u(x)$ системи (I) набирає на S "зверху" та "знизу" однакових значень, тобто $u_+(x)=u_-(x)$, то

$$u(x)=\iint_S\varphi'(x,y)\mu(y)\,d_yS , \tag{9}$$

де

$$\mu(y)=\left[B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)u(y)\right]_- -\left[B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)u(y)\right]_+ \tag{10}$$

Аналогічно, якщо $u(x)$ на S задовольняє умову

$$\left[B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)u(y)\right]_+=\left[B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)u(y)\right]_- ,$$

то

$$u(x)=\iint_S\left[B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi(x,y)\right]'\nu(y)\,d_yS , \tag{11}$$

---

[*] Існування $\varphi(x,y)$ випливає із зроблених припущень відносно коефіцієнтів системи (I).

де

$$\vartheta(y) = U_+(y) - U_-(y)$$

Формули (9) та (11) показують, що при виконанні сформульованих у теоремі 2 умов розв'язок системи (1) у просторі з розрізом зображається у вигляді узагальненого потенціалу простого або подвійного шару. При цьому густина узагальненого потенціалу простого шару на границі поверхні шару може мати особливість типу $\frac{C}{R_0^\alpha}$, де $C = const$; $0 \leq \alpha < 1$, R_0 - віддаль до границі поверхні шару. Це випливає з (10).

Теорема 2 узагальнює відомий результат класичної теорії потенціалу [3]. Для часткового випадку рівняння Лапласа ця теорема обгрунтовує використання потенціалу простого шару [4] для ефективного розв'язання задачі Діріхле у просторі з розрізом.

Л і т е р а т у р а

1. В о л о ш и н а М. С. Про деякі властивості одного класу сильно еліптичних систем диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами. ДАН УРСР, 1958, № 10, 1033-1036.

2. М е л ь н и к Д. П. Фундаментальна матриця системи варіаційного типу для необмеженого простору. ДАН УРСР, 1958, № 6.

3. С р е т е н с к и й Л.Н. Теория Ньютоновского потенциала. М., 1946.

4. С т а р о к а д о м с ь к и й Л. О. Потенціал простого шару та інтегральне рівняння 1-го роду з логарифмічною особливістю. Вісник Львівського університету, № 3, серія мех.-мат. Вид-во Львівського ун-ту, 1967.
