УДК 519.21

І.Д.КВІТ

КОНТИНУАЛЬНА ЗГОРТКА

В с т у п. Нехай невід'ємнозначна випадкова змінна ξ буде абсолютно неперервна з густиною

$$\rho(t)=\begin{cases}=0; & t<0,\\ \geqslant 0, & t>0,\end{cases} \qquad \int\limits_0^\infty \rho(t)dt=1. \tag{1}$$

Густина суми двох незалежних абсолютно неперервних невід'ємнозначних випадкових змінних, відповідно з густинами $\rho(t)$ і $q(t)$, дорівнює згортці

$$\rho(t)*q(t)\equiv\int\limits_0^t \rho(\tau)q(t-\tau)d\tau, \quad t>0. \tag{2}$$

Якщо два незалежні доданки однаково розподілені, то густину суми, тобто згортку $\rho(t)*\rho(t)$, позначаємо коротше $\rho(t)\Big|_*^2$. Покажемо, що бувають випадки, коли, при довільному додатному l, символ $\rho(t)\Big|_*^l$ має сенс і є густиною. Тоді вираз $\rho(t)\Big|_*^l$ називається континуальною згорткою порядку l. Поняття континуальної згортки використовується для виведення генеалогії гама та беселевого розподілів з експонентного розподілу.

З о б р а ж е н н я г у с т и н и. Лапласівське інтегральне перетворення густини (1) назвемо зображенням і позначимо його через $\varphi(z)$;

$$\varphi(z)\equiv L\rho(t)=\int\limits_0^\infty e^{-zt}\rho(t)dt, \qquad (z=x+iy=Re z+iJm z, \quad i=\sqrt{-1}). \tag{3}$$

Звернемо увагу на деякі властивості зображення (3).

1. Зображення (3) абсолютно збігається принаймні на півплощині $Re z\geqslant 0$. Справді,

$$|\varphi(z)|\leq\int\limits_0^\infty e^{-Re z\cdot t}\rho(t)dt\leqslant\int\limits_0^\infty \rho(t)dt=1. \tag{4}$$

Нерівність (4) можемо записати ще у вигляді

$$|\varphi(z)|\leq\varphi(x)\leq\varphi(0)=1. \tag{4'}$$

2. Всі зображення густин на континуальній сукупності прямих $Re\,z = x \geqslant 0$ мають властивість

$$\lim_{|y|\to\infty} \varphi(z) = 0. \tag{5}$$

Це випливає з теореми Рімана-Лебега [2]. Якщо функція $r(t)$ інтегровна в інтервалі (a, b), то при $|y| \to \infty$

$$\int_a^b r(t)e(yt)dt \to 0, \tag{6}$$

де функція $e(yt)$ є або $\cos yt$, або $\sin yt$, або e^{iyt}; кожний вираз зліва в (6), при $|y| \to \infty$, є $O\left(\frac{1}{|y|}\right)$. Справді,

$$\varphi(z) = \int_0^\infty e^{-xt}\rho(t)e^{-iyt}dt = \int_0^\infty e^{-xt}\rho(t)\cos yt\,dt - i\int_0^\infty e^{-xt}\rho(t)\sin yt\,dt. \tag{3'}$$

Оскільки $r(t) = e^{-xt}\rho(t)$ інтегровна, при кожному $x \geqslant 0$, в інтервалі $(a, b) = (0, \infty)$, то (5) доведено. Крім того,

$$|\varphi(z)| = O\left(\frac{1}{|y|}\right), \qquad (x \geqslant 0,\ |y| \to \infty). \tag{7}$$

3. З (3′) випливає, що рівномірно відносно y,

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(z) = 0. \tag{8}$$

Тепер, з (5) та (8) виходить, що при $Re\,z \geqslant 0$,

$$\lim_{z\to\infty} \varphi(z) = 0. \tag{9}$$

4. З (3′) записуємо

$$\varphi(\bar{z}) = \overline{\varphi(z)}, \tag{10}$$

де рисочка зверху означає комплексну опряженість.

5. Коли (3) записати у вигляді

$$\varphi(z) = u(x,y) + iv(x,y); \qquad u = \int_0^\infty e^{-xt}\rho(t)\cos yt\,dt, \quad v = -\int_0^\infty e^{-xt}\rho(t)\sin yt\,dt; \tag{3''}$$

то відразу видно, що при кожному $x \geqslant 0$, реальна частина зображення є парною функцією y , а уявна частина - непарною функцією y

$$u(x,-y) = u(x,y), \qquad v(x,-y) = -v(x,y), \tag{11}$$

причому

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad v(x,0) \equiv 0.$$

6. Зображення (3) є аналітичною функцією принаймні на правій півплощині $Re\, z > 0$. Дійсно, як видно з (3″), $u(x,y) = Re\, \varphi(z)$ та $v(x,y) = Jm\, \varphi(z)$ задовольняють рівняння Коші-Рімана для $x > 0$.

Відзначимо, що коли довільна функція $\rho(t)$ задовольняє умову

$$|\rho(t)| \leq Me^{x_0 t}, \qquad (t>0; \quad M>0, \quad x_0 \geqslant 0), \tag{12}$$

де M та x_0 - сталі, то (3) існує та є аналітичною функцією на півплощині $Re\, z > x_0$.

7. З (3) видно, що $\varphi(x)$ з ростом x від 0 до ∞ монотонно спадає від 1 до 0. Таким чином, зображення густини на додатній частині дійсної осі є хвостом деякої функції розподілу $F(x)$. Докладніше

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1-\varphi(x), & x \geqslant 0. \end{cases} \tag{13}$$

Співвідношення (13) показує, що кожній абсолютно неперервній невід'ємнозначній випадковій змінній з густиною (1) і зображенням (3) ставиться у відповідність невід'ємнозначна випадкова змінна з функцією розподілу (13). Наприклад, для експонентно розподіленої випадкової змінної маємо

$$\rho(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \qquad (t>0, \ \lambda>0); \quad \varphi(z) = \frac{\lambda}{z+\lambda}; \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x<0, \\ \dfrac{x}{x+\lambda}, & x \geqslant 0 \end{cases}.$$

Оскільки функція (3) аналітична в правій півплощині, то існує $\varphi'(x)$ при $x > 0$, і $F'(x) = -\varphi'(x)$ при $x > 0$ є густиною.

8. Задана на $(0, \infty)$ функція φ називається цілком монотонною, якщо вона має похідні $\varphi^{(n)}$ всіх порядків та

$$(-1)^n \varphi^{(n)}(x) \geq 0, \qquad x > 0. \tag{14}$$

Зображення, як аналітична функція при $Re\, z > 0$, має в правій півплощині похідні всіх порядків, причому

$$(-1)^n \varphi^{(n)}(z) = \int_0^\infty e^{-zt} t^n \rho(t) dt\,, \qquad (n = 1, 2, \dots;\ Re\, z > 0). \tag{14'}$$

Очевидно, що

$$\int_0^\infty e^{-xt} t^n \rho(t) dt \geqslant 0, \qquad x > 0. \tag{14''}$$

Отже, зображення (3) – сповна монотонна функція на додатному боці дійсної осі.

Якщо випадкова змінна ξ з густиною (1) має початковий момент (n - 1)-го порядку, то відповідно пронормований вираз (14$''$) буде густиною, залежною від параметра n. Наприклад, коли $\rho(t)$ – експонентна густина, то дістанемо сім'ю густин

$$q_n(x) = \frac{n\lambda^n}{(\lambda + x)^{n+1}}\,, \qquad (n = 1, 2, \dots;\ \lambda > 0;\ x > 0).$$

9. Легко перевірити, що зображення згортки дорівнює добуткові зображень густин, які сплітаємо. Зокрема, коли два незалежні доданки однаково розподілені з густиною (1) і зображенням (3), то згортка $\rho(t)\Big|_*^2$ має зображенням квадрат $\varphi(x)$

$$L\rho(t)\Big|_*^2 = \varphi^2(z).$$

Очевидно, що густина суми n незалежних однаково розподілених випадкових змінних з густиною (1) і зображенням (3) має зображенням $\varphi^n(z)$

$$L\rho(t)\Big|_*^n = \varphi^n(z), \qquad (n = 2, 3, \dots). \tag{15}$$

10. Універсальним засобом знаходження розв'язку інтегрального рівняння (3), коли $\varphi(z)$ – відома, а $\rho(t)$ – шукана функція, є зворотна формула: у кожній точці неперервності густини, коли $t > 0$, маємо

$$\rho(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\zeta t} \varphi(\zeta) d\zeta\,, \tag{16}$$

де $c>0$, c - довільна стала; ζ - біжуча точка на шляху інтегрування прямої $Re\, z = c$, інтеграл (16) не залежить від вибору сталої c і його розуміємо в сенсі головного значення Коші. Зворотна формула (16) символічно записується так:

$$\rho(t) = L^{-1}\varphi(z), \quad t>0. \tag{16'}$$

Формула (16) виводиться в [1].

К о н т и н у а л ь н е з о б р а ж е н н я т а к о н т и н у а л ь н а з г о р т к а. Нехай зображення (3) не має нулів у правій півплощині $Re\, z > 0$. Тоді при довільному додатному l, $\varphi^{l}(z)$ розуміємо як $e^{l \ln\varphi(z)}$, де $\ln\varphi(z)$ є головним значенням логарифма. Нехай далі

$$(-1)^{n}\psi^{(n)}(z) \geq 0, \quad z>0, \quad (n=1,2,\ldots); \quad \psi(z) = \left[\ln\frac{1}{\varphi(z)}\right]', \quad \varphi(z)\neq 0,\ Re\, z>0. \tag{17'}$$

Тоді $\varphi^{l}(z)$ буде зображенням безмежно подільного розподілу [3]. Вираз $\varphi^{l}(z)$ назвемо континуальним зображенням порядку l, $l>0$. Густину, відповідну континуальному зображенню порядку l , назвемо за означенням континуальною згорткою порядку l , відповідною густині $\rho(t)$, що має зображенням $\varphi(z)$, і позначимо через $\rho(t)\Big|_{*}^{l}$:

$$\rho(t)\Big|_{*}^{l} = L^{-1}\varphi^{l}(z), \qquad (\varphi(z)\neq 0, \ Re\, z>0; \ l>0). \tag{17}$$

Відповідну густині (1) випадкову змінну ξ назвемо тоді континуально сумовною. Зауважимо, що при натуральному $l=n$, $(n=2,3,\ldots)$, $\varphi^{n}(z)$ має сенс без ніяких обмежень на $\varphi(z)$, і

$$\rho(t)\Big|_{*}^{n} = L^{-1}\varphi^{n}(z), \qquad (n=2,3\ldots),$$

є густиною суми n незалежних однаково розподілених випадкових змінних з густиною (1) і зображенням (3).

Очевидно, що континуальна згортка (17) при довільних додатних σ і τ задовольняє співвідношення

$$\left(\rho(t)\Big|_{*}^{\sigma}\right) * \left(\rho(t)\Big|_{*}^{\tau}\right) = \rho(t)\Big|_{*}^{\sigma+\tau}, \quad (\varphi(z)\neq 0,\ Re z>0;\ \sigma>0, \tau>0). \tag{18}$$

При кожному $l>0$ густина (17) описує деяку випадкову змінну $\eta(l)$. Сукупність випадкових змінних $\eta(l)$ залежна від неперервного параметра l, $l>0$, є випадковим процесом. Процес керований густиною (17), що задовольняє співвідношення (18), є процесом зі стаціонарними незалежними приростами [3]. Таким чином, випадкова змінна ξ з густиною (1) і зображенням (3), у випадку (17') породжує випадковий процес $\eta(l)$ зі стаціонарними незалежними приростами та густиною (17) приростів

$$\eta(\sigma+l)-\eta(\sigma).$$

Одиниця операції з'гортання. Розглянемо густину

$$q_\varepsilon(t)=\begin{cases}0, & t<0,\quad t>\varepsilon>0,\\ \frac{1}{\varepsilon}, & 0\le t\le\varepsilon.\end{cases} \tag{19}$$

Очевидно, що

$$\int_0^\infty q_\varepsilon(t)dt=1, \qquad L q_\varepsilon(t)=1+O(\varepsilon). \tag{20}$$

У (19) і (20) спрямуємо ε до нуля. Дістанемо невластиву густину

$$\lim_{\varepsilon\to 0} q_\varepsilon(t)=\begin{bmatrix}0, & t\neq 0,\\ +\infty, & t=0,\end{bmatrix}\equiv\delta(t), \qquad \int_0^\infty\delta(t)dt=1,\quad L\delta(t)=1. \tag{21}$$

Нехай $\rho(t)$ буде густиною довільної невід'ємнозначної випадкової змінної. Оскільки зображення згортки дорівнює добуткові зображень густин, які сплітаються, то, з огляду на (21), випливає, що

$$L\{\rho(t)*\delta(t)\}=\{L\rho(t)\}\cdot\{L\delta(t)\}=L\rho(t),$$

або ж

$$\rho(t)*\delta(t)=\rho(t). \tag{22}$$

Отже, δ - функція (21) відіграє роль одиниці відносно операції згортання.

Випадкова згортка. Нехай $\{\xi_k\}$, $(k=1,2,\ldots)$ буде послідовність абсолютно неперервних невід'ємнозначних взаємнонезалежних і однаково розподілених випадкових змінних з густиною (1) та зображенням (3). Тоді зображення суми $\eta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ дорівнює (15). А $\varkappa$ буде невід'ємнозначною цілочисельною випадковою змінною, незалежною від усіх ξ_k, $(k=1,2,\ldots)$, що має генератрису $h(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} P\{\varkappa=n\}z^n$, $|z|\leq 1$. Утворимо суму випадкового числа $\varkappa$ випадкових змінних ξ_k

$$\eta_\varkappa = \xi_1 + \ldots + \xi_\varkappa, \quad (\varkappa=1,2,\ldots); \quad \eta_0=0.$$

Згідно з формулою повної ймовірності, функція розподілу $\eta_\varkappa$ записується

$$P\{\eta_\varkappa \leq t\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\varkappa=n\}P\{\eta_n \leq t\}.$$

Звідси, упохіднюючи по t, дістаємо густину $\eta_\varkappa$

$$p(t)\Big|_*^{\varkappa} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\varkappa=n\}\, p(t)\Big|_*^{n}, \quad p(t)\Big|_*^{1}=p(t), \quad p(t)\Big|_*^{0}=\delta(t). \tag{23}$$

Зображення випадкової згортки (23), тобто густини $\eta_\varkappa$ набирає вигляду

$$\omega(z)=L\,p(t)\Big|_*^{\varkappa} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\varkappa=n\}\, L\,p(t)\Big|_*^{n} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\varkappa=n\}\varphi^n(z)=h(\varphi(z)). \tag{24}$$

Приклади. 1. Треба знайти континуальну згортку для густини експонентного розподілу.

Оскільки

$$Le^{-at}t^{b} = \frac{\Gamma(b+1)}{(z+a)^{b+1}}, \qquad (a\geq 0, \; b>-1), \tag{25}$$

та зображення експонентного розподілу

$$L\lambda e^{-\lambda t} = \frac{\lambda}{z+\lambda}, \qquad (\lambda>0),$$

задовольняє умову (17'), то за означенням (17) згортка порядку $l>0$ для густини експонентного розподілу записується

$$p(t)\Big|_*^{l} = L^{-1}\left(\frac{\lambda}{z+\lambda}\right)^{l} = \frac{\lambda^{l} e^{-\lambda t} t^{l-1}}{\Gamma(l)}, \quad (l>0,\ \lambda>0). \tag{26}$$

Відзначимо, що (26) є густиною гама-розподілу, а при $l = 2, 3, \ldots$ – густиною розподілу Ерланга. Тому гама-розподіл є континуальною згорткою для густин незалежних однаково експонентно розподілених випадкових змінних.

2. Знайти густину відповідну зображенню

$$\Psi(z) = \left(\frac{\alpha}{z+\alpha}\right)^{\nu} e^{-\frac{\beta^2 z}{4\alpha(z+\alpha)}}, \quad (\alpha>0,\ \beta>0,\ \nu>0) \tag{27}$$

Перший множник у (27) є зображенням густини гама-розподілу. Згідно з (26), маємо

$$L^{-1}\left(\frac{\alpha}{z+\alpha}\right)^{\nu} = \frac{\alpha^{\nu} e^{-\alpha t} t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} = \alpha e^{-\alpha t}\Big|_*^{\nu}. \tag{28}$$

Для другого множника в (27), згідно з (21) та (26), дістаємо

$$L^{-1}\left\{e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} e^{\frac{\beta^2}{4(z+\alpha)}}\right\} = e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} L^{-1}\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)^{k}\left(\frac{\alpha}{z+\alpha}\right)^{k}\right\} =$$

$$= e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}\left\{\delta(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)^{k} \frac{\alpha^{k} e^{-\alpha t} t^{k-1}}{\Gamma(k)}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)^{k} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} \alpha e^{-\alpha t}\Big|_*^{k}$$

Останній вираз, з огляду на (23), є пуасонівською випадковою згорткою густин однаково показниково розподілених випадкових змінних. Отже,

$$L^{-1}\Psi(z) = \left\{\alpha e^{-\alpha t}\Big|_*^{\nu}\right\} * \left\{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)^{k} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} \cdot \alpha e^{-\alpha t}\Big|_*^{k}\right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)^{k} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} \cdot \alpha e^{-\alpha t}\Big|_*^{k+\nu}.$$

Таким чином, враховуючи (28), маємо

$$L^{-1}\varphi(z)=\alpha^{\nu} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} e^{-\alpha t} t^{\nu-1}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,\Gamma(k+\nu)} \left(\frac{\beta\sqrt{t}}{2}\right)^{2k+\nu-1}\right\}\left(\frac{2}{\beta\sqrt{t}}\right)^{\nu-1} .$$

За допомогою модифікованої функції Беселя

$$J_{\nu-1}(\tau)=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,\Gamma(k+\nu)} \left(\frac{\tau}{2}\right)^{2k+\nu-1}, \qquad (29)$$

запишемо густину, відповідну зображенню (27), у вигляді

$$L^{-1}\varphi(z)=\alpha^{\nu}\left(\frac{2}{\beta}\right)^{\nu-1} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} e^{-\alpha t}\, t^{\frac{\nu-1}{2}} J_{\nu-1}(\beta\sqrt{t}),\quad (t>0). \qquad (30)$$

Густину (30) природно назвати густиною Беселя. Легко перевірити, що при $\alpha=\lambda$, $\beta=0$, $\nu=l$, густина Беселя (30) стає густиною гама-розподілу (26). Співвідношення (27) і (30) вказують на те, що беселів розподіл є розподілом суми двох незалежних випадкових змінних, з яких одна є континуальною сумою незалежних експонентно розподілених випадкових змінних, а друга - пуасонівською випадковою сумою незалежних експонентно розподілених випадкових змінних. Така генеалогія розподілу Беселя.

Л і т е р а т у р а

1. К в і т І. Д. Випадкова змінна та випадковий процес. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1968.

2. Т и т ч м а р ш Е. Теория функций. М.-Л., 1951.

3. Ф е л л е р В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, том 2, М., 1967.
