УДК 517.94

Й.Г.ШІПКА

ПРО ОДНУ РЕАЛІЗАЦІЮ МЕТОДУ НЬЮТОНА-КАНТОРОВИЧА

Дослідженню методу Ньютона-Канторовича присвячено ряд статей [1-4].

Ми поставили собі на меті дослідити як застосовується модифікований метод Ньютона-Канторовича для розв'язування нелінійного інтегро-диференціального рівняння

$$u(x) = \lambda \int_a^b K[x, t, u(t), u'(t)]\,dt, \tag{1}$$

$$u \in C'[a;b], \quad u(a) = u(b) = 0. \tag{2}$$

Нехай ядро $K(x,t,u,v)$ буде неперервно-диференційованим і задовольняє умовам

$$\| K_u'(x,t,u_1,v_1) - K_u'(x,t,u_2,v_2) \| \le a_0 \|u_1 - u_2\| + b_0 \|v_1 - v_2\|, \tag{3}$$

$$\| K_v'(x,t,u_1,v_1) - K_v'(x,t,u_2,v_2) \| \le a_1 \|u_1 - u_2\| + b_1 \|v_1 - v_2\|. \tag{4}$$

Тоді диференціал Фреше оператора

$$P(u) = u - \lambda \int_a^b K(x,t,u,u')\,dt \tag{5}$$

у точці u_0 буде мати вигляд

$$P'(u_0)h(x) = h(x) - \lambda \int_a^b [K_u'(x,t,u_0,u_0')h(t) + K_v'(x,t,u_0,u_0')h'(t)]\,dt,$$

і похідна Фреше задовольняє умові

$$\| P'(u_1) - P'(u_2) \| \le L(\|u_1 - u_2\| + \|u_1' - u_2'\|). \tag{6}$$

Згідно з модифікованим методом Ньютона-Канторовича послідовні наближення знаходимо за такою схемою

$$u_{n+1} = u_n - [P'(u_0)]^{-1} P(u_n). \tag{7}$$

Нехай $u_0 = 0$. Позначимо $K_u'(x,t,0,0) = K_0(x,t)$, $K_v'(x,t,0,0) = K_1(x,t)$.

Тоді можна записати, що

$$P'(0) = I - \lambda \int_a^b \left[K_0(x,t) - \frac{\partial K_1(x,t)}{\partial t} \right] dt,$$

де I - тотожний оператор.

Припустимо, що

$$\left\| K_0(x,t) \right\| \le M_0, \quad \left\| K_0(x,t) - \frac{\partial K_1(x,t)}{\partial t} \right\| \le M_1 .$$

Тоді за теоремою Банаха [1] для існування оберненого оператора $\Gamma_0 = \left[P'(0)\right]^{-1}$ можна записати достатню умову

$$|\lambda| < \frac{1}{M_1(b-a)} . \tag{8}$$

За цією ж теоремою має місце оцінка

$$\left\| \Gamma_0 \right\| \le \frac{1}{1-|\lambda| M_1 (b-a)} = B_0 .$$

Тоді

$$\left\| \Gamma_0 P(0) \right\| \le \frac{|\lambda| M_0 (b-a)}{1-|\lambda| M_1 (b-a)} = \eta_0^0 .$$

Щоб знайти кожне послідовне наближення, необхідно розв'язувати лінійне інтегральне рівняння

$$U_{n+1} - \lambda \int_a^b K_2(x,t) U_{n+1} dt = \lambda \int_a^b \left[K(x,t,u_n,u_n') - K_2(x,t) u_n \right] dt , \tag{9}$$

де

$$K_2(x,t) = K_0(x,t) - \frac{\partial K_1(x,t)}{\partial t} .$$

Покажемо, що послідовність u_0, u_1, ..., u_n, ... збігається до u^*, яке є розв'язком рівняння (1), і область збіжності G_0 визначається нерівністю

$$\left\| u^* - u_0 \right\| \le r_0 \eta_0 , \tag{10}$$

де r_0 - менший корінь рівняння

$$h_0 r_0^2 - 2 r_0 + 2 = 0 ;$$

$$h_0 = B_0 \eta_0 L \le \tfrac{1}{2} ;$$

$$\left\| u_1 - u_0 \right\| \le \eta_0^0 ; \quad \left\| u_1' - u_0' \right\| \le \eta_0' ;$$

$$\eta_0 = \max(\eta_0^0, \eta_0') .$$

Неважко показати, що оператор

$$Au = u - \Gamma_0 P(u)$$

відображає область G_0 в себе

$$\| Au - u_0 \| \leq r_0 \eta_0 .$$

Продиференціюємо оператор Au

$$A'u = I - \Gamma_0 P'(u) = \Gamma_0 \left[P'(u_0) - P'(u) \right],$$

$$\| A'u \| \leq B_0 L r_0 \eta_0 = h_0 r_0 .$$

Оскільки $r_0 = \frac{1-\sqrt{1-2h_0}}{h_0}$, то $\| A'u \| \leq 1 - \sqrt{1-2h_0} = q \leq 1$. Отже, оператор Au здійснює стиснуті відображення в області G_0

$$\| Au - Av \| \leq q \| u - v \| .$$

Послідовні наближення збігаються з швидкістю

$$\| u_n - u^* \| \leq \frac{q^n}{1-q} \eta_0 .$$

Таким чином ми довели теорему:

Послідовність $u_0 = 0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, яка одержується розв'язуванням рівнянь (9), збігається до розв'язку рівняння (1), якщо виконуються умови (3), (4), (9). Область збіжності G_0 задається нерівністю (10).

Література

1. В е р т г е й м Б. А. Об условиях применения метода Ньютона. ДАН СССР, 1956, 110, № 5.
2. К а н т о р о в и ч Л. В. Функциональный анализ и прикладная математика. УМН, 1948, 3, № 6.
3. М а л ь с а г о в С. М. Применение метода Ньютона-Канторовича к решению нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с ядром Гильберта. Учен. зап. Азерб. ун-та, сер. физ-мат, 1966, № 4.
4. Ч е р н ы ш е н к о Д. М. О некоторых итерационных методах решения нелинейных сингулярных интегральных уравнений. Автореферат кандидатской диссертации. Изд-во Киевского ун-та, 1968.
