УДК 517.94

В.Г.КОСТЕНКО, Т.А.ШАРИЙ

ПРО ДОСЛІДЖЕННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО КВАЗІЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ

Розглянемо задачу Діріхле в обмеженій області D з границею $\Gamma \in C_{2+\alpha}$ для рівняння

$$(1+3\lambda p^2+\lambda q^2)r+(1+\lambda p^2+3\lambda q^2)t+4\lambda pqs=0 \qquad (1)$$

і граничними умовами

$$u|_{\Gamma}=\varphi(x,y), \qquad (2)$$

де p, q, r, s, t - позначення Монжа для похідних функції $u(x,y)$ першого і другого порядку; λ - числовий параметр; $\varphi(x,y)$ - задана функція, що належить $C_{2+\alpha}(\Gamma)$.

Рівняння (1) при $\lambda=-\frac{1}{2}$ можна одержати, наприклад, за допомогою варіаційного принципу Остроградського-Гамільтона, виводячи квазілінійне рівняння коливання мембрани і вважаючи потім функцію $u(t,x,y)$ незалежною від часу.

Розв'язок задачі (1), (2), припускаючи, що він існує, будемо шукати у вигляді розкладу в степеневий ряд по параметру λ з коефіцієнтами, що залежать від x і y

$$u(x,y,\lambda)=\sum_{i=0}^{\infty}u_i(x,y)\lambda^i. \qquad (3)$$

Підставляючи ряд (3) в (1) і прирівнюючи нульові коефіцієнти після групування їх при однакових степенях λ, одержимо нескінченну систему рівнянь у частинних похідних

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}=f_n(x,y) \qquad (n=0,1,2,\dots), \qquad (4)$$

де $f_0(x,y)=0$, а для $n=1,2,\ldots$

$$
f_n(x,y)=-\sum_{\ell=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left\{\left[3\left(\frac{\partial u_\ell}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_\ell}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u_{n-1-2\ell}}{\partial x^2}+\right. \tag{5}
$$

$$
\left.+\left[\left(\frac{\partial u_\ell}{\partial x}\right)^2+3\left(\frac{\partial u_\ell}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u_{n-1-2\ell}}{\partial y^2}+4\frac{\partial u_\ell}{\partial x}\frac{\partial u_\ell}{\partial y}\frac{\partial^2 u_{n-1-2\ell}}{\partial x\partial y}\right\}-
$$

$$
-\sum_{\ell=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{\left[\frac{\ell-1}{2}\right]}\left\{\left[6\frac{\partial u_k}{\partial x}\frac{\partial u_{\ell-k}}{\partial x}+2\frac{\partial u_k}{\partial y}\frac{\partial u_{\ell-k}}{\partial y}\right]\frac{\partial^2 u_{n-1-\ell}}{\partial x^2}+\right.
$$

$$
+\left[2\frac{\partial u_k}{\partial x}\frac{\partial u_{\ell-k}}{\partial x}+6\frac{\partial u_k}{\partial y}\frac{\partial u_{\ell-k}}{\partial y}\right]\frac{\partial^2 u_{n-1-\ell}}{\partial y^2}+4\left[\frac{\partial u_k}{\partial x}\frac{\partial u_{\ell-k}}{\partial y}+\frac{\partial u_k}{\partial y}\frac{\partial u_{\ell-k}}{\partial x}\right]\frac{\partial^2 u_{n-1-\ell}}{\partial x\partial y}
$$

У (5) цілу частину числа m позначено $-[m]$.

Задача (1), (2), таким чином, зводиться до послідовності лінійних задач Діріхле

$$
\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}=0, \tag{1_0}
$$

$$
u_0\big|_\Gamma=\varphi(x,y), \tag{2_0}
$$

$$
\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}=f_n(x,y), \tag{1_n}
$$

$$
u_n\big|_\Gamma=0 \tag{2_n}
$$

в області D для знаходження коефіцієнтів ряду (3). При послідовному розв'язуванні цих задач, коефіцієнти $f_n(x,y)$, які виражаються, як видно з (5), через похідні першого і другого порядку функцій u_0 , u_1 , ... , u_{n-1} , будуть відомими. Відомо також [3], що розв'язок $u_0(x,y)$ задачі (1_0), (2_0) існує, єдиний і $u_0(x,y)\in C_{2+\alpha}(\bar{D})$, а єдиний розв'язок задачі (1_n), (2_n) також буде існувати і належатиме $C_{2+\alpha}(\bar{D})$, якщо

$f_n(x,y) \in C_\alpha(\bar D)$. Використавши (5) і $u_0(x,y) \in C_{2+\alpha}(\bar D)$, легко переконуємося, що $f_n(x,y) \in C_\alpha(\bar D)$ для всіх $n = 1,2,$.

Таким чином, коефіцієнти ряду (3) визначаються як розв'язки задач (1_n), (2_n), причому $u_n(x,y) \in C_{2+\alpha}(\bar D)$ для всіх $n = 0,1,2,\ldots$.

Для того, щоб ряд (3) давав розв'язок задачі (1), (2), достатньо встановити, що цей ряд можна двічі почленно диференціювати по x і y , а для останнього, в свою чергу, достатньо встановити, що ряд (3) і ряди, які можуть бути одержані з нього диференціюванням по x і y до другого порядку включно, будуть рівномірно збіжними.

Для розв'язків задач (1_0), (2_0) і (1_n), (2_n) відповідно мають місце оцінки Шаудера [3]

$$\| u_0 \|_{2+\alpha,\bar D} \le K \| \varphi \|_{2+\alpha,\Gamma} , \tag{6}$$

$$\| u_n \|_{2+\alpha,\bar D} \le K \| f_n \|_{\alpha,\bar D} , \tag{7}$$

де стала K може бути вибрана незалежною від діаметра області D і від n .

Використовуючи (5) і оцінки (6), (7), послідовно знаходимо

$$\| f_1 \|_{\alpha,\bar D} \le \| u_0 \|^3_{2+\alpha,\bar D} \le K^3 \| \varphi \|^3_{2+\alpha,\Gamma} ,$$

$$\| u_1 \|_{2+\alpha,\bar D} \le K^4 \| \varphi \|^3_{2+\alpha,\Gamma} ,$$

$$\| f_2 \|_{\alpha,\bar D} \le 3 \| u_0 \|^2_{2+\alpha,\bar D} \| u_1 \|_{2+\alpha,\bar D} \le 3K^6 \| \varphi \|^5_{2+\alpha,\Gamma} ,$$

$$\| u_2 \|_{2+\alpha,\bar D} \le 3K^7 \| \varphi \|^5_{2+\alpha,\Gamma} ,$$

$$\| f_3 \|_{\alpha,\bar D} \le 3 \| u_0 \|^2_{2+\alpha,\bar D} \| u_2 \|_{2+\alpha,\bar D} + 3 \| u_1 \|^2_{2+\alpha,\bar D} \| u_0 \|_{2+\alpha,\bar D} \le 2 \cdot 3^2 K^9 \| \varphi \|^7_{2+\alpha,\Gamma} ,$$

$$\| u_3 \|_{2+\alpha,\bar D} \le 2 \cdot 3^2 K^{10} \| \varphi \|^7_{2+\alpha,\Gamma} ,$$

$$\|f_4\|_{\alpha,\bar D} \le 3\|u_0\|^2_{2+\alpha,\bar D}\|u_3\|_{2+\alpha,\bar D}+\|u_1\|^3_{2+\alpha,\bar D}+6\|u_0\|_{2+\alpha,\bar D}\|u_1\|_{2+\alpha,\bar D}\|u_2\|_{2+\alpha,\bar D} \le 2^2\cdot 3^3 K^{12}\|\varphi\|^9_{2+\alpha,\Gamma},$$

$$\|u_4\|_{2+\alpha,\bar D} \le 2^2 3^3 K^{13}\|\varphi\|^9_{2+\alpha,\Gamma}$$

і, взагалі, для $n \geqslant 2$

$$\|u_n\|_{2+\alpha,\bar D} \le 2^{n-2}3^{n-1}K^{3n+1}\|\varphi\|^{2n+1}_{2+\alpha,\Gamma} . \tag{8}$$

Отже, для ряду

$$\|u_0\|_{2+\alpha,\bar D}+\|u_1\|_{2+\alpha,\bar D}|\lambda|+\dots+\|u_n\|_{2+\alpha,\bar D}|\lambda|^n+\dots \tag{3'}$$

можна побудувати мажорантний ряд виду

$$K\|\varphi\|_{2+\alpha,\Gamma}+K^4\|\varphi\|^3_{2+\alpha,\Gamma}|\lambda|+3K^7\|\varphi\|^5_{2+\alpha,\Gamma}|\lambda|^2+$$
$$+2\cdot 3\cdot K^{10}\|\varphi\|^7_{2+\alpha,\Gamma}|\lambda|^3+\dots+2^{n-2}3^{n-1}K^{3n+1}\|\varphi\|^{2n+1}_{2+\alpha,\Gamma}|\lambda|^n+\dots \tag{9}$$

За принципом Даламбера останній ряд буде збіжним, якщо

$$|\lambda| < \frac{1}{6K^3\|\varphi\|^2_{2+\alpha,\Gamma}} . \tag{10}$$

Отже, ряд (3) і ряди, які одержуються з нього почленним диференціюванням до другого порядку включно, будуть рівномірно збіжними в області $\bar D$, як тільки має місце умова (10). Тим самим встановлено, що розв'язок задачі (1), (2) в області D з границею $\Gamma \in C_{2+\alpha}$ може бути зображений рядом (3), якщо має місце умова (10) і $\varphi(x,y) \in C_{2+\alpha}(\Gamma)$.

Існування розв'язку задачі (1), (2) для $0 \le \lambda \le \lambda_0$ можна встановити за допомогою принципу Лере-Шаудера [3]. З цією метою переконаємося спочатку, що рівняння (1) має дивергентну форму і рівномірно еліптичне.

Дійсно, рівняння (1) може бути зображене у вигляді

$$\frac{da_1(p,q,\lambda)}{dx}+\frac{da_2(p,q,\lambda)}{dy}=0, \tag{11}$$

де

$$a_1(p,q,\lambda) = p\left[1+\lambda(p^2+q^2)\right],$$

$$a_2(p,q,\lambda) = q\left[1+\lambda(p^2+q^2)\right].$$

Це означає, що (I) дивергентної форми.

Крім того, для $0\le\lambda\le\lambda_0$ маємо нерівності

$$(1+3\lambda p^2+\lambda q^2)\xi_1^2+4\lambda pq\xi_1\xi_2+(1+\lambda p^2+3\lambda q^2)\xi_2^2=$$

$$=(1+\lambda p^2+\lambda q^2)\xi_1^2+2\lambda(p\xi_1+q\xi_2)^2+(1+\lambda p^2+\lambda q^2)\xi_2^2\ge$$

$$\ge\left[1+\lambda(p^2+q^2)\right]\sum_{i=1}^{2}\xi_i^2\ge\frac{\lambda_1}{2}\left(1+\sqrt{p^2+q^2}\right)^2\sum_{i=1}^{2}\xi_i^2,$$

$$(1+3\lambda p^2+\lambda q^2)\xi_1^2+4\lambda pq\xi_1\xi_2+(1+\lambda p^2+3\lambda q^2)\xi_2^2\le$$

$$\le(1+3\lambda p^2+\lambda q^2)\xi_1^2+2\lambda(q^2\xi_1^2+p^2\xi_2^2)+(1+\lambda p^2+3\lambda q^2)\xi_2^2\le$$

$$\le3\left[1+\lambda(p^2+q^2)\right]\sum_{i=1}^{2}\xi_i^2\le3\lambda_2\left(1+\sqrt{p^2+q^2}\right)^2\sum_{i=1}^{2}\xi_i^2,$$

де $\lambda_1=\min(\lambda,1)$, $\lambda_2=\max(\lambda,1)$.

Враховуючи, що при $\lambda=0$ (I) збігається з рівнянням Лапласа і приймаючи до уваги останні нерівності, одержуємо рівномірну еліптичність (I) для $0\le\lambda\le\lambda_0$.

Щоб застосувати принцип Лере-Шаудера до задачі (I), (2), достатньо переконатись в наявності оцінки норм в $C_{1+\alpha}(\bar D)$ всіх розв'язків задачі (I), (2) деякою константою, що залежатиме лише від норми граничних умов (2) в $C_{2+\alpha}(\Gamma)$.

Як видно з [2], така оцінка має місце, якщо виконується нерівність

$$\left(|a_1(p,q,\lambda)| + |a_2(p,q,\lambda)|\right)\left(1+\sqrt{p^2+q^2}\right) \leq \mu(|u|)\left(1+\sqrt{p^2+q^2}\right)^m \quad (12)$$

при деякій додатній функції $\mu(|u|)$ і $m > 1$.

Для $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$ одержимо

$$\left(|p+\lambda p^3+\lambda p q^2| + |q+\lambda p^2 q+\lambda q^3|\right)\left(1+\sqrt{p^2+q^2}\right) \leq$$

$$\leq \left(|p|+|q|\right)\left[1+\lambda\left(p^2+q^2\right)\right]\left(1+\sqrt{p^2+q^2}\right) \leq$$

$$\leq \sqrt{2}\sqrt{p^2+q^2}\left(1+\lambda_3\sqrt{p^2+q^2}\right) \leq \sqrt{2}\,\lambda_3\left(1+\sqrt{p^2+q^2}\right)^4,$$

де $\lambda_3 = max(\lambda_0, 1)$.

Отже, нерівність (12), а з нею і потрібна оцінка норм в $C_{1+\alpha}(\bar{D})$ розв'язків задачі (1), (2) мають місце. Інші умови застосування принципу Лере-Шаудера до задачі (1), (2) виконуються з очевидністю .

Як випливає з принципу Лере-Шаудера, розв'язок задачі (1), (2) для $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$ існує.

Єдиність розв'язку задачі (1), (2) випливає з принципу екстремуму.

Що стосується інших крайових задач для рівняння (1), то у випадку, коли граничні умови будуть залежати лінійно від u і нормальної похідної $\frac{\partial u}{\partial n}$, міркування про зображення розв'язків таких задач у вигляді рядів по степенях малого параметра λ з використанням відповідних оцінок [1] шаудеровського типу, а також твердження про існування розв'язків цих задач для $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$ з використанням оцінок [2] і принципу Лере-Шаудера можуть бути проведені аналогічно до того, як це було зроблено для задачі Діріхле (1), (2).

Як випливає з [2], існування і єдиність розв'язку крайових задач для рівняння (1) у випадку, коли граничні умови залежать лінійно лише від $\frac{\partial u}{\partial x}$ і $\frac{\partial u}{\partial y}$, можуть бути одержані ще за допомогою принципу Лере-Шаудера. Якщо ж граничні умови для (1) нелінійні по $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, то для доведення існування і єдиності розв'язку відповідної задачі можна використати відому топологічну теорему Качополлі про існування розв'язків абстрактних рівнянь в функціональних просторах і оцінки розв'язків такої задачі, встановлені в [2].

Література

1. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. ч. I, М., 1962.

2. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. "Наука", 1964.

3. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. ИЛ, 1957.

УДК 513.8 12

А.І.ПИЛИПОВИЧ

ПРО ШТЕЙНЕРІВСЬКІ ПОБУДОВИ В ПРОСТОРІ ЛОБАЧЕВСЬКОГО

Як показав М.П.Хоменко [2], для розв'язання задач другого степеня на площині Лобачевського за допомогою однієї лінійки достатньо на цій площині задати допоміжне штейнерівське коло з відзначеним центром і пару паралельних прямих, які визначають невластиву точку абсолюта. Цей результат можна узагальнити на простір Лобачевського.

Теорема. Всяку конструктивну задачу простору Лобачевського, яку можна розв'язати за допомогою площинографа, сферографа, орисферографа, гіперосферографа, можна розв'язати також одним площинографом, якщо в конструктивному просторі побудувати пару паралельних прямих та допоміжну сферу Ω з відзначеним її центром O.