гічну теорему Качополлі про існування розв'язків абстрактних рівнянь в функціональних просторах і оцінки розв'язків такої задачі, встановлені в [2].

Література

1. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. ч. I, М., 1962.
2. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. "Наука", 1964.
3. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. ИЛ, 1957.

УДК 513.8 12

А.І.ПИЛИПОВИЧ

ПРО ШТЕЙНЕРІВСЬКІ ПОБУДОВИ
В ПРОСТОРІ ЛОБАЧЕВСЬКОГО

Як показав М.П.Хоменко [2], для розв'язання задач другого степеня на площині Лобачевського за допомогою однієї лінійки достатньо на цій площині задати допоміжне штейнерівське коло з відзначеним центром і пару паралельних прямих, які визначають невластиву точку абсолюта. Цей результат можна узагальнити на простір Лобачевського.

Т е о р е м а. Всяку конструктивну задачу простору Лобачевського, яку можна розв'язати за допомогою площинографа, сферографа, орисферографа, гіперосферографа, можна розв'язати також одним площинографом, якщо в конструктивному просторі побудувати пару паралельних прямих та допоміжну сферу Ω з відзначеним її центром O.

Для доведення теореми покажемо, що за допомогою площинографа, коли наявні згадані в теоремі допоміжні фігури, можна розв'язати деякі допоміжні конструктивні задачі і на їх основі виконати так звані основні побудови простору Лобачевського та розв'язати головні задачі.

Допоміжні задачі:

1. Побудувати точку D четверту гармонійно спряжену з трьома даними колінеарними точками A, B, C.

2. У площині α задане коло ω своїми п'ятьма точками, дана пряма a і накреслене деяке допоміжне коло k. Побудувати точки перетину кола ω і прямої a.

3. Задано дві паралельні (розбіжні) прямі. Через певну точку провести пряму паралельну (розбіжну) з даними прямими.

4. Задано дві невластиві або ідеальні точки U_∞, V_∞. Провести через них пряму.

5. Через точку O провести площину, перпендикулярну до прямої a, яка не проходить через точку O.

6. З точки O опустити перпендикуляр на площину не інцидентну цій точці.

7. Через довільну точку провести пряму перпендикулярну до прямої a, яка проходить через точку O.

8. У площині π, яка проходить через точку O, дано пару паралельних прямих u, v, що визначають невластиву точку X_∞. Побудувати ще чотири невластивих точки площини π, відмінних від точки X_∞.

9. У довільній площині α, яка проходить через точку O, задати невластиву точку.

10. На довільній прямій p задати невластиві точки.

11. Через задану точку P провести площину, перпендикулярну до прямої, яка не проходить через точку

12. Через точку M провести пряму, перпендикулярну площині α.

13. Поділити відрізок навпіл.

14. Поділити лінійний (двогранний) кут на половини.

15. Перенести заданий відрізок прямої, відклавши його на цій прямій від даної точки.

16. Перенести заданий відрізок на довільну пряму. (Побудувати декілька точок сфери, якщо відомо її центр і радіус).

17. Побудувати площину, яка замикає двогранний кут (паралельну до площин двогранного кута).

18. Побудувати лінійний (двогранний) кут, що дорівнює даному, коли відома одна його сторона і вершина (грань і ребро).

Основні побудови:

19. Через точку провести пряму паралельну даній в заданому напрямку.

20. Дано відрізок паралельності a . Побудувати кут паралельності $\alpha = \Pi(a)$.

21. Дано кут паралельності α . Побудувати відрізок паралельності $a = \Delta(\alpha)$.

22. Через пряму, яка не перетинає дану площину, провести площину, паралельну першій.

23. Побудувати спільний перпендикуляр двох розбіжних площин.

24. Побудувати спільний перпендикуляр двох розбіжних прямих.

Головні задачі.

I. Знайти точки перетину з даною площиною таких заданих поверхонь і ліній: 25) площини, 26) сфери, 27) орисфери, 28) гіперсфери, 29) прямої, 30) кола, 31) орицикла, 32) гіперцикла.

II. Знайти точки перетину з заданою сферою таких заданих поверхонь і ліній: 33) сфери, 34) орисфери, 35) гіперсфери, 36) прямої, 37) кола, 38) орицикла, 39) гіперцикла.

III. Знайти точки перетину з заданою орисферою таких заданих поверхонь та ліній: 40) орисфери, 41) гіперсфери, 42) прямої, 43) кола, 44) орицикла, 45) гіперцикла.

IV. Знайти точки перетину з заданою гіперсферою таких заданих поверхонь та ліній: 46) гіперсфери, 47) прямої, 48) кола, 49) орицикла, 50) гіперцикла.

V. Знайти точки перетину таких заданих ліній: 51) двох прямих,

52) двох кіл, 53) двох орициклів, 54) двох гіперциклів, 55) прямої і кола, 56) прямої і орицикла, 57) прямої і гіперцикла, 58) кола і орицикла, 59) кола і гіперцикла, 60) орицикла і гіперцикла.

Як приклад, розв'яжемо одну з головних задач.

З а д а ч а 33. Знайти точки лінії перетину двох заданих сфер $S_1(O_1, A_1)$ і $S_2(O_2, A_2)$.

Для її розв'язання потрібно виконати елементарні побудови 1-16, після чого вона зведеться до задачі 26, яку можна розв'язати на підставі задач 16 і 2.

Задачі 1 і 2 можна розв'язати одним площинографом, тому що для їх розв'язання необхідно проводити лише прямі лінії, які можна одержати як результат перетину двох довільних площин. Розв'язок відомий [1].

З а у в а ж е н н я д о з а д а ч і 2. Якщо п'ять точок кола є невластивими, тобто задані паралельними прямими, то для побудови двох проективних пучків з невластивими центрами використовуємо задачу 4 (див. нижче).

З а д а ч а 3. Розв'язуємо на основі теореми Дезарга.

З а д а ч а 4. Нехай невластива точка U_∞ задана паралельними прямими u_1, u_2, а невластива точка V_∞ - прямими v_1, v_2 (рис. 1).

Виберемо на прямих u_1, u_2 відповідно точки A, C, через які проведемо прямі AV_∞, CV_∞ (3). Одержимо повний чотирикутник $ABCD$. Нехай M його діагональна точка. Будуємо точку P, четверту гармонійно спряжену з точками A, C, M (1). Тоді шукану діагональ $U_\infty V_\infty$ проводимо через точку P на основі (3).

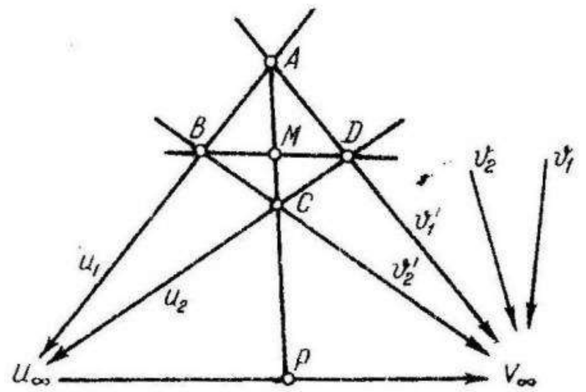


Рис. 1.

З а д а ч а 5. Через пряму a проводимо дві довільні площини α, β, які не проходять через O. Будуємо їх полюси A, B, що можна здійснити площинографом на основі (1). Тоді $OA \perp \alpha$, $OB \perp \beta$. Площина OAB - шукана.

З а д а ч а 6. Будуємо полюс A даної площини α (1). Проводимо пряму OA, яка є шуканою.

З а д а ч а 7. Через пряму a проводимо довільну площину α, яка перетне сферу Ω по колу ω. Виберем на прямій a дві довільні точки M, N, які не збігаються з точками перетину прямої a з колом ω. Будуємо поляри m, n точок M, N відносно кола ω (1). Прямі m, n розбіжні, пряма a – їх спільний перпендикуляр. Через вибрану точку проводимо пряму p, розбіжну з прямими m, n (4). Пряма p – шукана.

З а д а ч а 8. Розв'язується за схемою, що наводиться в [1] на основі задач 3, 5, 7.

З а д а ч а 9. Проведемо через пряму u і через точку O площину β, яка перетне площину α по прямій a (рис. 2). Якщо v не лежить у площині β, то проведемо через v довільну площину, яка перетне площину β по прямій s, яка паралельна до u. Маючи в площині β невластиву точку $X_\infty = u \times s$, можна в ній побудувати ще чотири невластиві точки абсолюта (8). Отже, в площині β маємо п'ять точок абсолюта і коло k_1 перетину сфери Ω з площиною β. А тому можемо знайти невластиві точки прямої a (2). Тобто в площині α, яка проходить через точку O, знайдено невластиві точки.

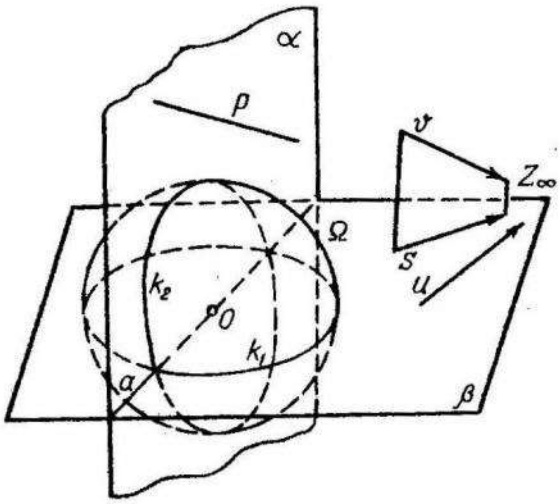


Рис. 2.

З а д а ч а 10. Через p і O проводимо площину α, в якій можемо побудувати невластиву точку на основі (9) (рис. 2). Маючи в площині α коло k_2 перетину сфери Ω з площиною α і невластиву точку, можемо знайти ще чотири точки абсолюта і на основі (2) знайти невластиві точки прямої p.

З а д а ч а 11. Через точку O і пряму a проведемо площину π (рис. 3). Побудуємо площину α, яка проходить через точку O перпендикулярно прямій a (5). $\alpha \times \pi = p$, $\alpha \times a = P$. Знаходимо невластиві точки прямої $p - U_\infty$, V_∞ (10). Виберемо на прямій a довільну точку Q, через яку проводимо прямі QU_∞, QV_∞ (3), на яких знаходимо невластиві точки відповідно Z_∞, Y_∞ (10). Будуємо пряму s через точки Y_∞, Z_∞ (4). Прямі p і s розбіжні, мають спільний перпендикуляр a, тобто проходять через одну і ту ж ідеальну точку $I_1 = p \times s$. Через точку M і точку I_1 проводимо пряму m (3), $m \perp \alpha$. Замінивши пряму p довільною прямою p_1 площини α і побудувавши розбіжну з нею пряму s_1, так як це робилось вище, зможемо через точку M провести пряму m_1, розбіжну з прямими p_1, s_1 (3). Але пряма m_1 проходить через точку $I_2 = p_1 \times s_1$, а тому $m_1 \perp \alpha$. Отже, площина, визначена прямими m, m_1 є шукана.

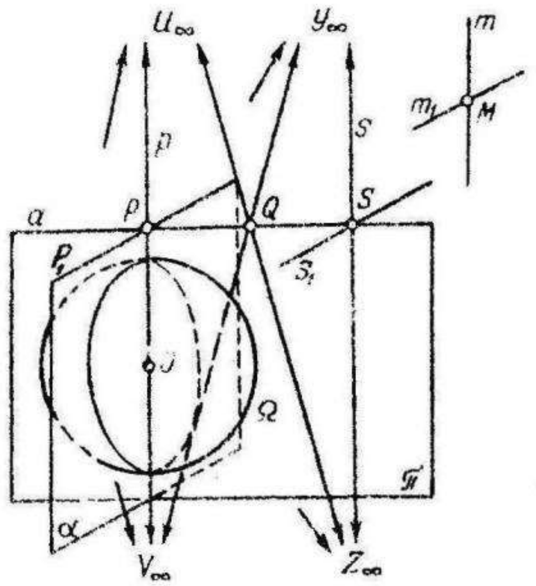
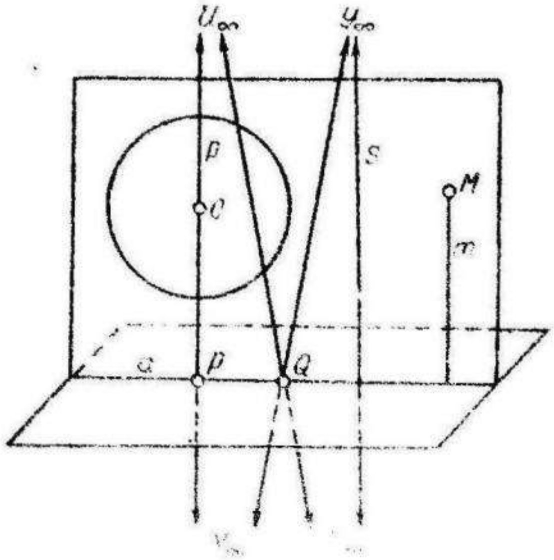


Рис. 3.

З а д а ч а 12. З точки O опустимо перпендикуляр p на площину α (6) (рис. 4). Через пряму p і точку M проводимо площину β. $\beta \times \alpha = a$. Будуємо пряму s розбіжну з прямою p, так як це робилось в (11). Маючи розбіжні прямі p і s через точку M проводимо пряму m розбіжну з p і s (3). Пряма m - шукана.



З а д а ч а 13. Через даний відрізок AB проведемо довільну площину π. Через кінці відрізка AB проведемо площини відповідно α, [illegible] (11).

які в перетині з площиною π визначають прямі відповідно a , b. Будуємо ті невластиві точки прямих a , b , які розміщені по різні сторони від прямої AB (10). Нехай це будуть точки відповідно A_∞ , B_∞ . Тоді пряма $A_\infty B_\infty$, (4), ділить AB навпіл.

З а д а ч а 14. Нехай дано лінійний кут ACB . Будуємо невластиві точки A_∞, B_∞ прямих CA , CB (10), через які проведемо пряму $A_\infty B_\infty$ (4). Через точку C проведемо площину α , перпендикулярну до прямої $A_\infty B_\infty$ (11). $\alpha \times A_\infty B_\infty = P$. Пряма CP - одна з бісектрис кута між двома прямими. Побудова бісекторіальної площини двогранного кута аналогічна.

З а д а ч і 15, 16. Можна розв'язати площинографом за схемою, запропонованою в [1].

З а д а ч а 26. Знайти точки лінії перетину заданої сфери $S_1(O_1, A_1)$ з площиною α .

Через точки O , O_1 , A_1 проведемо площину β , яка перетне площину α по прямій a , а сферу Ω по колу ω . Якщо площини α і β виявляться розбіжними або паралельними, то проводимо довільну площину β через O, O_1 так, щоб вона перетнула площину α по деякій прямій a. У площині β вибираємо п'ять довільних прямих, що проходять через O_1 , на які переносимо відрізок O_1A_1 (16). Маючи в площині β коло ω і п'ять точок кола k сфери S_1 , можна знайти точки перетину прямої a і кола k (2). Змінюючи положення прямої a , можемо знайти безліч потрібних точок.

З а д а ч а 33. Побудувати точки лінії перетину двох заданих сфер $S_1(O_1,$ $_2(O_2,A_2)$. Через точки O_1 , O_2 проведемо довільну площину π . У точці O_1 побудуємо пряму $a \perp \pi$, а в точці O_2 - $b \perp \pi$ (12). На прямій a відкладемо відрізок $O_1B_1 = O_2A_2$, а на прямій b - $O_2B_2 = O_1A_1$ (16). Будуємо відрізок B_1B_2 та його середину C (13). Через точку C проведемо площину $\alpha \perp B_1B_2$ (11). Нехай $\alpha \times O_1O_2 = D$. Через точку D проведемо площину β , перпендикулярну прямій O_1O_2 (11). Площина β є радикальною площиною сфер S_1 і S_2 , а тому проходить через коло перетину цих сфер. Отже, задача звелась до знаходження точок лінії перетину сфери $S_1(O_1, A_1)$ з площиною β (26), яка вже розв'язана.

Така схема розв"язування головних та основних задач.

Л і т е р а т у р а

1. С м о г о р ж е в с ь к и й О. С. Теорія геометричних побудов в просторі Лобачевського. Київ, 1949.

2. Х о м е н к о Н. П. О построениях в геометрии Лобачевского. Київський ун-т, Наукові записки, т. X, вип. I, 1951.

УДК 517.917

О.І.БОБИК, М.К.БУГІР

УМОВИ НЕКОЛИВАЛЬНОСТІ РІВНЯНЬ ТРЕТЬОГО І ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКІВ

У цій роботі встановлюються ефективні ознаки неколивальності рівнянь 3-го і 4-го порядків, використовуючи еквівалентність їх рівнянню $v^{(n)}=0$, $n=3,4$. Нагадаємо основні поняття, які будемо використовувати нижче.

О з н а ч е н н я 1. Розв'язок рівняння

$$L_n y = y^{(n)} + p_1(x) y^{n-1} + \cdots + p_n(x) y = 0.$$

коливний на проміжку $[a,b]$, якщо він обертається в нуль на цьому проміжку не менше, ніж n разів, враховуючи кратність. У протилежному випадку розв'язок називають неколивним.

О з н а ч е н н я 2. Якщо всі розв'язки рівняння $L_n y=0$ неколивні, то $L_n y=0$ називають неколивним.

Відомо ряд робіт, присвячених встановленню ефективних ознак коливальності і неколивальності рівнянь 2-го і вищих порядків [2]. У роботах чеського математика В.Шеди показано, що неколивальність розв'язків тісно пов'язана з поняттям еквівалентності рівнянь [3], [4].

Розглянемо рівняння

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(x) y^{(n-k)} = p_{n+1}(x), \tag{1}$$