Л і т е р а т у р а

1. С м о г о р ж е в с ь к и й О. С. Теорія геометричних побудов в просторі Лобачевського. Київ, 1949.

2. Х о м е н к о Н. П. О построениях в геометрии Лобачевского. Київський ун-т, Наукові записки, т. X, вип. I, 1951.

УДК 517.917

О.І.БОБИК, М.К.БУГІР

УМОВИ НЕКОЛИВАЛЬНОСТІ РІВНЯНЬ ТРЕТЬОГО І ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКІВ

У цій роботі встановлюються ефективні ознаки неколивальності рівнянь 3-го і 4-го порядків, використовуючи еквівалентність їх рівнянню $v^{(n)}=0$, $n=3,4$. Нагадаємо основні поняття, які будемо використовувати нижче.

О з н а ч е н н я 1. Розв'язок рівняння

$$L_n y=y^{(n)}+p_1(x)y^{n-1}+\cdots+p_n(x)y=0.$$

коливний на проміжку $[a,b]$, якщо він обертається в нуль на цьому проміжку не менше, ніж n разів, враховуючи кратність. У протилежному випадку розв'язок називають неколивним.

О з н а ч е н н я 2. Якщо всі розв'язки рівняння $L_n y=0$ неколивні, то $L_n y=0$ називають неколивним.

Відомо ряд робіт, присвячених встановленню ефективних ознак коливальності і неколивальності рівнянь 2-го і вищих порядків [2]. У роботах чеського математика В.Шеди показано, що неколивальність розв'язків тісно пов'язана з поняттям еквівалентності рівнянь [3], [4].

Розглянемо рівняння

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(x)y^{(n-k)}=p_{n+1}(x), \tag{1}$$

$x \in J_1, \quad p_0(x) \neq 0, \quad p_k(x) \in C[a,b], \quad (k=0,\dots,n+1),$

$$\sum_{k=0}^{n} q_k(\xi) v^{(n-k)} = q_{n+1}(\xi), \tag{2}$$

$\xi \in J_2, \quad q_0(\xi) \neq 0, \quad q_k(\xi) \in C[a,b], \quad (k=0,\dots,n+1)$

О з н а ч е н н я 3. Рівняння (I) на інтервалі $J_{1x} \subset J_1$ еквівалентне рівнянню (2) на інтервалі $J_{2\xi} \subset J_2$, якщо: а) існують n раз неперервно диференційовані на $J_{1x} \subset J_1$ функції $\xi(x)$ і $t(x)$ такі, що $\xi(J_{1x}) = J_{2\xi}$, $\xi'(x) t(x) \neq 0$ на J_{1x}; б) для будь-якого розв'язку рівняння (2) $v(\xi)$, $y(x) = t(x) v[\xi(x)]$ є розв'язком (I).

Оскільки $t(x) \neq 0$, то нулі розв'язків одного рівняння перейдуть у нулі розв'язків другого рівняння і тому розв'язки еквівалентних рівнянь будуть одночасно коливні або неколивні.

У роботі В.Шеди [3] встановлено такий критерій еквівалентності двох рівнянь:

Т е о р е м а 1. Для того, щоб рівняння

$$y^{(n)} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} p_k(x) y^{(n-k)} = 0, \tag{1'}$$

$$v^{(n)} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} q_k(\xi) v^{(n-k)} = 0 \tag{2'}$$

були еквівалентні, необхідно і достатньо, щоб $\xi'(x)$ була спільним розв'язком системи рівнянь

$$\frac{[\xi'(x)]^n q_k[\xi(x)]}{k! \sqrt{|\xi'(x)|^{n-1}}} = \sum_{r=0}^{k} \sum_{s=0}^{k-r} \frac{p_r(x) A_{n-r-s,\, n-k}}{r!\, s!\, (n-r-s)!} \left[\frac{1}{\sqrt{|\xi'(x)|^{n-1}}} \right]^{(s)}, \tag{3}$$

$(k=2,\dots,n)$

де $A_{a,i}$ цілі раціональні функції від похідних $\xi(x)$ [I]

$$A_{m,k} = m! \sum_{\substack{k_1 \geq 0, \dots, k_m \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_m = k \\ k_1 + 2k_2 + \dots + m k_m = m}} \frac{k!}{k_1! \cdots k_m! (1!)^{k_1} \cdots (m!)^{k_m}} [\xi'(x)]^{k_1} \cdots [\xi^{(m)}(x)]^{k_m}$$

Нижче ми проаналізуємо переозначену систему рівнянь (3) при $n=3$ і $n=4$, і $q_k(\xi)=0$. Зауважимо, що при $k=2$ перше рівняння системи (3) має такий вигляд [3]:

$$\frac{3}{n+1}\xi'^2 q_2[\xi(x)]+\frac{1}{2}\cdot\frac{\xi'''}{\xi'}-\frac{3}{4}\left(\frac{\xi''}{\xi'}\right)^2=\frac{3}{n+1}p_2(x). \quad (3_1)$$

Розглянемо рівняння

$$L_3 y = y''' + 3p_2(x)y' + p_3(x)y = 0, \quad (4)$$

$$p_3(x)\in C[a,b], \quad p_2(x)\in C'[a,b].$$

Система (3) в цьому випадку складається з двох рівнянь*

$$\begin{cases} 2\xi'''\xi' - 3\xi''^2 - 3p_2(x)\xi'^2 = 0, \\ \sum\limits_{r=0}^{3}\sum\limits_{s=0}^{3-r}\dfrac{p_r(x)A_{3-r-s,0}}{r!\,s!\,(3-r-s)!}\left[\dfrac{1}{\xi'}\right]^{(s)}=0. \end{cases}$$

Враховуючи, що $A_{i,0}=0$, $A_{0,0}=1$ і взявши похідні від $\left[\frac{1}{\xi'}\right]$, одержимо

$$\begin{cases} 2\xi'''\xi' - 3\xi''^2 - 3p_2(x)\xi'^2 = 0, \\ -\xi^{IV}\xi'^2 + 6\xi'''\xi''\xi' - 6\xi''^2 - 3p_2(x)\xi''\xi'^2 + p_3(x)\xi'^3 = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Система (5) переозначена і не завжди має розв'язок.

Припустимо, що (4) еквівалентне рівнянню $v'''=0$. Очевидно, що тоді воно неколивне і система (5) має спільний розв'язок. Продиференціювавши перше рівняння з (5), одержимо

$$2\xi^{IV}\xi' = 8\xi'''\xi'' + 6p_2'(x)\xi'^2 + 12p_2(x)\xi''\xi',$$

і підставимо цей вираз у друге рівняння (5), тоді

$$4\xi''\left(2\xi'''\xi' - 3\xi''^2 - 3p_2(x)\xi'^2\right) + \xi'^3\left(2p_3(x) - 3p_2'(x)\right) \equiv 0.$$

Звідси, тому що $\xi'(x)$ є розв'язком (5), то

$$2p_3(x) - 3p_2'(x) \equiv 0. \quad (6)$$

---

* У системі рівнянь (3) модуль під коренем можна опустити, бо $\xi'<0$ або $\xi'>0$ і рівняння в (3) є однорідні відносно $|\xi'|$.

Покажемо, що умова (6) є достатньою, тобто, якщо коефіцієнти рівняння зв'язані співвідношенням (6), то друге рівняння з системи (5) задовольняється будь-яким розв'язком першого рівняння цієї системи. Нехай $\xi'(x)$ розв'язок першого рівняння (5), тоді

$$3\xi''^2 = 2\xi'''\xi' - 3p_2(x)\xi'^2$$

і

$$M_\xi = -\xi^{IV}\xi'^2 + 6\xi'''\xi''\xi' - 2\xi''(2\xi'''\xi' - 3p_2(x)\xi'^2) -$$

$$-3p_3(x)\xi''\xi'^2 + p_3(x)\xi'^3 = \xi'\left(-2\xi'''\xi' + 4\xi'''\xi'' + 3\left[p_2(x)\xi'^2\right]'\right).$$

Проінтегруємо $\frac{2M_\xi}{\xi'}$, тоді

$$\int \frac{2M_\xi}{\xi'}dx = -2\xi'''\xi' + 3\xi''^2 + 3p_2(x)\xi'^2 + 3\xi''^2 - 6\int \xi'''\xi''dx =$$

$$= 3\xi''^2 - 6\int \xi'''\xi''dx = const.$$

Отже, $M_\xi = 0$.

Перше рівняння системи (5) замінами $\xi' = exp\left[\int z\,dx\right]$, $z = -\frac{1}{2}\frac{u'}{u}$ можна звести до рівняння

$$u'' + \frac{3}{4}p_2(x)u = 0 \qquad (7)$$

при умові, що рівняння (7) неколивне. Неколивальність рівняння (7) гарантуватиме, наприклад, умова $\frac{3}{4}p_2(x) \le \frac{1}{4x^2}$ [2].

Одержані результати можна сформулювати так:

Т е о р е м а 2. Якщо $p_2(x) \le \frac{1}{3x^2}$, то для того, щоб рівняння (4) було еквівалентне рівнянню $v''' = 0$ на проміжку $[a, b]$, необхідно і достатньо, щоб на цьому проміжку виконувалась тотожність (6).

З а у в а ж е н н я 1. Тому що всі розв'язки рівняння $v''' = 0$ неколивні, то неколивними будуть і всі розв'язки рівнянь, коефіцієнти яких задовольняють умовам: $p_2(x) \le \frac{1}{3x^2}$, $3p_2'(x) - 2p_3(x) = 0$. Загальний розв'язок рівнянь, еквівалентних рівнянню $v''' = 0$, можна записати так:

$$y(x) = \frac{1}{\xi'(x)}\left[C_1 + C_2\xi(x) + C_3\xi^2(x)\right],$$

де $\xi'(x)$ - спільний розв'язок системи (5).

З а у в а ж е н н я 2. Аналогічно, як і у випадку $n = 3$, можна розглядати клас рівнянь, еквівалентних рівнянню $v^{(n)}=0$, і такими самими міркуваннями, як і при $n=3$, легко показати, що перше і друге рівняння системи (3) (при $k=2$ і $k=3$) сумісні тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти рівняння (I') задовольняють умову (6).

З а у в а ж е н н я 3. Якщо $p_2(x)\leq 0$, $p_3(x)\leq 0$, то з теореми 2 одержується ознака неколивальності М.Швеца [5]

$$p_2(x)\leq 0, \qquad p_3(x)\leq 0, \qquad p_2'(x)-p_3(x)=p_3(x)\leq 0.$$

Тепер розглянемо за яких умов рівняння

$$L_4 y = y^{IV}+6p_2(x)y''+4p_3(x)y'+p_4(x)y=0, \tag{8}$$
$$p_2(x)\in C^1[a,b], \quad p_3(x), \quad p_4(x)\in C\,[a,b]$$

є еквівалентне рівнянню $v^{IV}=0$. Система (3) для рівняння (8) буде мати такий вигляд

$$\begin{cases} 10\xi'''\xi'-15\xi''^2-12p_2(x)\xi'^2=0, \\ -5\xi^{IV}\xi'^2+30\xi'''\xi''\xi'-30\xi''^3-12p_2(x)\xi''\xi'^2+4p_3(x)\xi'^3=0, \\ 945\xi''^4-1260\xi'''\xi''^2\xi'+180\xi'''^2\xi'^2+240\xi^{IV}\xi''\xi'^2-24\xi^{V}\xi'^3+ \\ +6p_2(x)\left[60\xi''^2\xi'^2-24\xi'''\xi'^3\right]-96p_3(x)\xi''\xi'^3+16p_4(x)\xi'^4=0. \end{cases} \tag{9}$$

Згідно з зауваженням 2 перше і друге рівняння системи (9) сумісні за умови (6). Якщо через $B\xi'$ позначимо перше рівняння з (9), $(B\xi')'$ – продиференційоване, і $\xi^{IV}\xi''\xi'^2$ з $(B\xi')'$ підставимо в третє рівняння (9), то останнє можна згрупувати так:

$$24\xi''\xi'(B\xi')'+(18\xi'''\xi'-51\xi''^2)B\xi'+\xi''^2(180\xi''^2+324p_2(x)\xi'^2)+$$
$$+72p_2(x)\xi'''\xi'^3-24\xi^{V}\xi'^3+144p_2'(x)\xi''\xi'^2+16p_4(x)\xi'^4=0.$$

Тепер коли взяти $\xi'=exp\left[\pm\frac{3}{\sqrt{5}}\int\sqrt{-p_2(x)}\,dx\right]$, то $180\xi''^2+324p_2(x)\xi'^2=0$ і $p_2(x)=-\frac{20}{(c+x)^2}$, $c-const$.

Отже, справедлива така теорема:

Т е о р е м а 3. Нехай у (8) $\rho_2(x) = -\frac{20}{(c+x)^2}$, c-Const, $\rho_3(x)$, $\rho_4(x)$ такі, що функція $u = (c+x)^{\pm 6}$ є розв'язком рівняння

$$-3u^{IV} + 9\rho_2(x)u'' + 12\rho_3(x)u' + 2\rho_4(x)u = 0.$$

Тоді для того, щоб (8) було еквівалентне рівнянню $v^{IV} = 0$, необхідно і достатньо, щоб на промі_ку $[a,b]$ виконувалось співвідношення $3\rho_2'(x) - 2\rho_3(x) \equiv 0$. Загальний розв'язок еквівалентних рівнянь за цих умов буде мати вигляд:

$$y = (c+x)^{\mp 9}\left[C_1 + (c+x)^{\pm 6}C_2 + (c+x)^{\pm 12}C_3 + (c+x)^{\pm 18}C_4\right].$$

Л і т е р а т у р а

1. С а н с о н е Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. I. ИЛ, 1953.

2. C. A. S w a n s o n. Comparison and Oscillation Theory of Linear Differential Equations, Academic Press, New Jork and London, 1968.

3. V a l t e r Š e d a. Uber die Transformation der linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung, Časopis pestov. mat., 1967, 92:4, 418-435; 1965, 90:4, 385-412.

4. V a l t e r S e d a. On a class of linear differential equations of order n, n ≥ 3, Časop. pestov. mat., 1967, 92:3, 247-261.

5. M a r k o Š r e c. Einige asymptotische und oscilatorische Eigenschaften der Differentialgleichungen $y''' + A(x)y' + B(x)y = 0$, Czech. Math. Journ., 15(90):3, 1965, 378-393.