УДК 518:517.948

М.Я.БАРТІШ

ЕФЕКТИВНІСТЬ МЕТОДІВ ТИПУ НЬЮТОНА

Розглядаємо числові методи типу Ньютона для розв'язування систем нелінійних рівнянь, даємо загальну схему побудови їх і алгоритм для визначення оптимальної (в розумінні кількості операцій, затрачених на обчислення результату) схеми розв'язування конкретної системи рівнянь.

Нехай дано систему рівнянь

$$P(x)=0, \tag{1}$$

де $P(x)$ - нелінійна вектор-функція розмірності N

$$P(x)=\begin{pmatrix} P_1(x_1,\dots,x_N) \\ \vdots \\ P_N(x_1,\dots,x_N) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Щоб розв'язати рівняння (1), використаємо формулу

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-\left[\alpha\left(x^{(k)}\right)\right]^{-1}P\left(x^{(k)}\right), \quad k=0,1,2,\dots, \tag{3}$$

де $\alpha(x)$ - квадратна матриця розмірності N.

Т е о р е м а. Нехай виконуються умови:

1) для $\alpha(x)$ існує обернена матриця в кожній точці кулі $\Omega_0=\left\{x: \|x-x^{(0)}\|\le\rho\right\}$, де $\rho=\sum_{i=0}^{\infty} h^{\frac{\varkappa^i-1}{\varkappa-1}}\eta_0$, причому має місце оцінка $\left\|\left[\alpha(x)\right]^{-1}\right\|\le B$;

2) для x, $y\in\Omega_0$ має місце нерівність

$$\left\|P(x)-P(y)-\alpha(x)(x-y)\right\|\le K\|x-y\|^{\varkappa}, \quad \varkappa>1;$$

3) для початкового наближення $x^{(0)}$ має місце оцінка

$$\left\|\left[\alpha\left(x^{(0)}\right)\right]^{-1}P\left(x^{(0)}\right)\right\|\le\eta_0<1;$$

4) $$h = BK\eta_0^{\varkappa-1} < 1.$$

Тоді рівняння (I) має в кулі Ω_0 розв'язок x^*, до якого збігається послідовність $\{x^{(k)}\}$, визначена за формулою (3), причому

$$\| x^* - x^{(k)} \| \leq h^{\frac{\varkappa^k - 1}{\varkappa - 1}} \eta_0 .$$

Доведення проводиться аналогічно [I] . Методи типу Ньютона будемо розглядати як частковий випадок формули (3). Розкладемо $P(x)$ в ряд Тейлора-Грейвса [4] в околі точки $x^{(k)}$

$$P(x) = P(x^{(k)}) + P'(x^{(k)})(x - x^{(k)}) + \tag{4}$$

$$+ \frac{1}{2} P''(x^{(k)})(x - x^{(k)})^2 + \frac{1}{2} \int_{x^{(k)}}^{x} P'''(\tau)(\tau - x^{(k)})^2 d\tau .$$

Зберігаючи в розкладі (4) два члени і прирівнюючи даний вираз до нуля, одержимо рівняння для визначення $k+1$ -го наближення

$$P(x^{(k)}) + P'(x^{(k)})(x - x^{(k)}) = 0, \tag{5}$$

тобто формулу методу Ньютона [5, I2]

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \Gamma_k P(x^{(k)}), \qquad k = 0, 1, 2, \dots ,$$

де

$$\Gamma_k = [P'(x^{(k)})]^{-1}.$$

Якщо залишити в розкладі (4) три члени і замінити один із добутків $x - x^{(k)}$ виразом $-\Gamma_k P(x^{(k)})$, то для визначення наступного наближення одержимо рівняння

$$P(x^{(k)}) + P'(x^{(k)})(x - x^{(k)}) - \frac{1}{2} P''(x^{(k)}) \Gamma_k P(x^{(k)})(x - x^{(k)}) = 0. \tag{6}$$

З (6) одержуємо формулу методу дотичних гіпербол [7]

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [J - \frac{1}{2} \Gamma_k P''(x^{(k)}) \Gamma_k P(x^{(k)})]^{-1} \Gamma_k P(x^{(k)}) \tag{7}$$

$$k = 0, 1, 2, \dots .$$

Враховуючи рівності

$$\left[J-\tfrac{1}{2}\Gamma_k P''(x^{(k)})\Gamma_k P(x^{(k)})\right]^{-1}=J+\tfrac{1}{2}\Gamma_k P''(x^{(k)})\Gamma_k P(x^{(k)})+O(\|\Gamma_k P(x^{(k)})\|^2), \tag{8}$$

$$P'(x^{(k)}-\tfrac{1}{2}\Gamma_k P(x^{(k)}))=P'(x^{(k)})-\tfrac{1}{2}P''(x^{(k)})\Gamma_k P(x^{(k)})+O(\|\Gamma_k P(x^{(k)})\|^2), \tag{9}$$

$$\Gamma_k P'(x^{(k)}+\tfrac{1}{2}\Gamma_k P(x^{(k)}))=J+\tfrac{1}{2}\Gamma_k P''(x^{(k)})\Gamma_k P(x^{(k)})+O(\|\Gamma_k P(x^{(k)})\|^2). \tag{10}$$

і формулу (7), ми можемо записати формули методів Чебишева [8]

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-\left[J+\tfrac{1}{2}\Gamma_k P''(x^{(k)})\Gamma_k P(x^{(k)})\right]\Gamma_k P(x^{(k)}), \quad k=0,1,2,\ldots, \tag{11}$$

запропоновані Т.І.Коган [6]

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-\left[P'(x^{(k)}-\tfrac{1}{2}\Gamma_k P(x^{(k)}))\right]^{-1}P(x^{(k)}), \quad k=0,1,2,\ldots \tag{12}$$

і нами [4]

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-\Gamma_k P'(x^{(k)}+\tfrac{1}{2}\Gamma_k P(x^{(k)}))\Gamma_k P(x^{(k)}), \quad k=0,1,2,\ldots \tag{13}$$

Відзначимо, що послідовності $\{x^{(k)}\}$ одержані за формулами (7), (11)-(13) мають кубічну збіжність $(\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|=O\|x^{(k-1)}-x^{(k)}\|^3)$.

Крім названих методів доцільно розглядати їх різницеві аналоги [1,3,4], тобто методи, в обчислюванні схеми яких входять лише вектор-функції $P(x)$. У цьому разі $P'(x)$, $P''(x)$ необхідно замінити поділеними різницями. Поділені різниці першого $P(x,\tilde{x})$ і другого порядків $P(x,\tilde{x},\tilde{\tilde{x}})$ повинні задовольняти умовам:

$$\begin{aligned} &P(x,\tilde{x})(x-\tilde{x})=P(x)-P(\tilde{x}),\\ &P(x,\tilde{x},\tilde{\tilde{x}})(x-\tilde{\tilde{x}})=P(x,\tilde{x})-P(\tilde{x},\tilde{\tilde{x}}). \end{aligned} \tag{14}$$

У [11] введено поділені різниці $R(x,h)$, що задовольняють умові

$$\|R(x,h)-P'(x)\|=O(h). \tag{15}$$

Відзначимо, що порядок збіжності різницевих методів залежить від вибору точки $\tilde{x}^{(\kappa)}$ [1,3,4], або величини h [11] і при певному виборі даних величин не менший від порядку збіжності відповідних нерізницевих методів.

Крім вищерозглянутих методів можна розглядати методи, в яких матриця $\alpha(x^{(\kappa)})$ замінюється новою матрицею $\alpha^*(x^{(\kappa)})$, причому $\alpha^*(x^{(\kappa)}) = \alpha(x^{(\kappa)}) + O(\|x^{(\kappa+1)} - x^{(\kappa)}\|^{\varkappa})$, де $\varkappa$ – порядок збіжності методу. Новий метод буде мати такий же порядок збіжності $\varkappa$.

Отже, враховуючи, що кількість методів типу Ньютона та їх модифікацій необмежена, необхідно мати алгоритм для вибору самого ефективного методу розв'язування системи рівнянь (1). Будемо вважати ефективним той метод, при використанні якого одержуємо результат, виконавши при цьому менше операцій. Тоді не можна користуватися індексом ефективності [9], оскільки число операцій, затрачених на обчислення $P(x)$, $P'(x)$, $P''(x)$ не рівнозначне, крім того, не можна нехтувати останніми операціями.

Ми будемо користуватися співвідношенням, яке дає можливість з двох методів вибрати ефективніший. Метод з порядком збіжності a ефективніший метода з порядком збіжності b, якщо виконується нерівність [2]

$$\frac{Q_1}{Q_2} < \log_b a, \tag{16}$$

де Q_1, Q_2 – кількість операцій*, затрачених на виконання однієї ітерації за відповідним методом. Співвідношення (16) легко вивести, використовуючи індекс ефективності [9]. Користуючись оцінкою (16), можна показати, що метод Ньютона взагалі ефективніший від методів Чебишева [8], дотичних гіпербол [7], запропонованих Т.Коган [6] і нами [4]. Аналогічний висновок можна зробити і про різницеві аналоги вищеназваних методів [1, 3,4,10]. Нами запропоновано модифікацію методу Т.Коган [2], обчислювальна схема якої має вигляд:

---

* Операції додавання, віднімання, множення, ділення будемо вважати рівнозначними.

$$P'(\theta_{k-1})t_k = P'(x^{(k)})$$

початок: $$\theta_k = \begin{cases} x_0 & \text{при} \quad k=0 \\ x^{(k)} - \frac{1}{2}t_k & \text{при} \quad k \neq 0 \end{cases} \tag{17}$$

$$P'(\theta_k)z_k = P(x^{(k)})$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - z_k \qquad k = 0,1,2,$$

і її різницевий аналог:

$$P(x^{(k-1)}, \theta_{k-1})t_k = P(x^{(k)})$$

початок: $$\theta_k = \begin{cases} \tilde{x}_0 & \text{при} \quad k=0 \\ x^{(k)} - t_k & \text{при} \quad k \neq 0 \end{cases} \tag{18}$$

$$P(x^{(k)}, \theta_k)z_k = P(x^{(k)})$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - z_k \qquad k = 0,1,2,$$

Порядок збіжності даних методів $1+\sqrt{2}$. Використовуючи оцінку (16), приходимо до висновку, що схема (17) ефективніша від методу Ньютона, якщо

$$M_P > \frac{2N^2+N+(1-\log_2(1+\sqrt{2}))(M_{P'}+\frac{2}{3}N^3+1{,}5N^2)}{\log_2(1+\sqrt{2})-1}, \tag{19}$$

а схема (18) ефективніша від різницевого аналогу методу Ньютона, якщо

$$M_P > \frac{2N^2+N-0{,}212\left(\frac{2}{3}N^3+5{,}5N^2+N\right)}{(N+1)0{,}212}, \tag{20}$$

(M_P , $M_{P'}$ - кількість операцій, затрачених на обчислення $P(x)$, $P'(x)$). Оскільки нерівності (19), (20) в основному виконуються, то для розв'язування системи нелінійних алгебраїчних рівнянь доцільно використовувати схеми (17), (18).

Ми не розглядали тут модифікацій методу Ньютона, запропонованих В.Шаманським [13], хоч серед останніх існують модифікації, ефективніші від методу Ньютона. Такі ж модифікації можна одержати і для обчислювальних схем (17), (18).

Всі вищеназвані методи мають суттєвий недолік - вони збігаються лише з близького початкового наближення. Щоб одержати методи, якими можна користуватися у випадку "поганого" початкового наближення, необхідно розглядати формули вигляду

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \gamma_k \left[\alpha(x^{(k)})\right]^{-1} P(x^{(k)}), \tag{21}$$

де $\gamma_k \leq 1$ - параметр, який вибирається з умови мінімуму функції $\| P(x^{(k)} - \gamma [\alpha(x^{(k)})]^{-1} P(x^{(k)})) \|$. Тоді (21) є формулою методу спуску, який локально переходить в метод Ньютона.

Література

1. Бартиш М. Я. О некоторых итерационных методах решения нелинейных операторных уравнений. УМЖ, т. 20, 1968, № 1, 104-113.

2. Бартіш М. Я. Про один ітераційний метод розв'язування функціональних рівнянь. ДАН УРСР, 30, 1968, № 5, 387-390.

3. Бартіш М. Я. Про один ітераційно-різницевий метод. ДАН УРСР, 30, 1968, № 6, 500-505.

4. Бартиш М. Я. О некоторых итерационных методах решения функциональных уравнений. Сибирский матем. журн., 10, 1969, № 3.

5. Канторович Л. В. О методе Ньютона. Тр. матем. ин-та АН СССР, 28, 1949, 104-144.

6. Коган Т. И. Об одном итерационном процессе для функциональных уравнений. Сибирский матем. журн., 8, 1967, № 4, 958-960.

7. Мертвецов М. А. Аналог процесса касательных гипербол для общих функциональных уравнений. ДАН, 88, 1953, № 4, 611-614.

8. Нечепуренко М. И. О методе Чебышева для функциональных уравнений. УМЖ, 9, вып. 2, 1954, 163-170.

9. Островский А. М. Решение уравнений и систем уравнений. М., ИЛ, 1963.

10. Ульм С. Ю. Обобщение метода Стефенсена для решения операторных уравнений. ЖВММФ, 4, 1964, № 6, 1093-1097.

11. Шаманский В. Е. Об одной реализации метода Ньютона, УМЖ, т. 18, 1966, № 6, 135-140.

12. Шаманский В. Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. ч. II, изд. АН УССР, Киев, 1966.

13. Шаманский В. Е. Об одной модификации метода Ньютона, УМЖ, т. 19, 1967, № 1, 133-138.