УДК 517.9:621.3.032.26

Й.В.ЛЮДКЕВИЧ, І.О.ФОМІЧОВ

ПРО ОДИН МЕТОД РОЗРАХУНКУ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОГО ПОЛЯ СИСТЕМИ ЕЛЕКТРОДІВ З ВИДІЛЕННЯМ ОСОБЛИВОСТЕЙ НА ГРАНИЦІ

В [4] при виведенні основних співвідношень за густину розподілу зарядів на поверхні електродів приймався вираз $q(\tau)=4R(\tau)\sigma(\tau)$, де $\sigma(\tau)$ - фізична густина зарядів. Але тому що $R(\tau)$ є постійною величиною тільки у випадку горизонтальних електродів, то доцільно прийняти $q(\tau)=4\sigma(\tau)$, а $R(\tau)$ включити в підінтегральну функцію. При цьому значно поліпшується точність задоволення граничних умов на вертикальних, похилих і криволінійних електродах.

Тоді потенціал електростатичного поля в будь-якій точці (r, z), враховуючи осьову симетрію, визначається за формулою

$$U(r,z)=\int\limits_{L(\tau)} q(\tau)\,\frac{R(\tau)\;K(k)\,d\tau}{\sqrt{\left[R(\tau)+r\right]^2+\left[\xi(\tau)-z\right]^2}}\,, \tag{1}$$

де $K(k)$ - повний еліптичний інтеграл першого роду;

$L(\tau)$ - твірна деякої поверхні всередині електроду, яка задана параметричними рівняннями виду

$$\left.\begin{aligned} R&=R(\tau),\\ \xi&=\xi(\tau)\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Невідома густина $q(\tau)$ визначається з інтегрального рівняння Фредгольма першого роду

$$\int\limits_{L(\tau)} q(\tau)\,\frac{R(\tau)\cdot K(k)\,d\tau}{\sqrt{\left[R(\tau)+r\right]^2+\left[\xi(\tau)-z\right]^2}}\Bigg/_{L'(\tau)}=U_0\;, \tag{3}$$

де $L'(\tau)$ - твірна поверхні електроду, на якій задано потенціал U_0.

У зв'язку з тим, що ядро інтегрального рівняння (3) має особливість на границі, то важливо одержати формули, в яких виділена особливість і ядро інтегрального рівняння є всюди регулярне. Одержаний таким чином розв'язок дає можливість проводити числовий розрахунок навіть у випадку електродів нульової товщини.

Розглянемо випадок, коли твірна поверхні електроду задана рівнянням $R = R(\tau)$. Тоді в результаті застосування методу колокацій і зображення густини $q(\xi)$ у вигляді лінійної комбінації раціональних функцій [3]

$$q(\xi) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k \cdot b_k}{b_k^2 + (\xi - \bar{\xi}_k)^2} \tag{4}$$

інтегральне рівняння (3) зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{b_k}{b_k^2 + (\xi - \bar{\xi}_k)^2} \quad \frac{R(\xi) \cdot K(k)\, d\xi}{\sqrt{4R^2(\xi) + (\xi - z_j)^2}} = U_0 , \tag{5}$$

де a_k - невідомі коефіцієнти; $\bar{\xi}_k$ - точки на твірній електроду; $j = 1, 2, \ldots, n$; b_k - наперед задані параметри згідно з нерівністю

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\Delta_k}{2} \le b_k \le \Delta_k , \\ 0{,}15 \le \Delta_k \le 0{,}30 . \end{array}\right\} \tag{6}$$

Еліптичний інтеграл обчислюється за допомогою апроксимації [1]

$$K(k) = \sum_{i=0}^{4} \bar{a}_i \eta^i + \ln \frac{1}{\eta} \sum_{i=0}^{4} \bar{b}_i \eta^i , \tag{7}$$

де $\bar{a}_i$, $\bar{b}_i$ - відомі коефіцієнти; η на поверхні електроду має вигляд

$$\eta = \frac{(\xi - z_j)^2}{4R^2(\xi) + (\xi - z_j)^2} ; \tag{8}$$

z_j - точки на твірній при $r = R(\xi)$; $\quad \xi_1 \le z_j \le \xi_2$.

Враховуючи (7) і (8), систему (5) запишемо

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \left\{ \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{b_k}{b_k^2+(\xi-\xi_k)^2} \frac{R(\xi)}{\sqrt{4R^2(\xi)+(\xi-z_j)^2}} \left[\sum_{i=0}^{4} \bar{a}_i \eta^i + \right.\right.$$

$$\left. + \ln\left[4R^2(\xi)+(\xi-z_j)^2\right] \cdot \sum_{i=0}^{4} \bar{b}_i \eta^i \right] d\xi + \qquad (9)$$

$$\left. + \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{b_k}{b_k^2+(\xi-\xi_k)^2} \frac{R(\xi)}{\sqrt{4R^2(\xi)+(\xi-z_j)^2}} \sum_{i=0}^{4} \bar{b}_i \eta^i \ln\frac{1}{(\xi-z_j)^2} d\xi \right\} = u_0 .$$

Перший інтеграл в (9) не має особливостей на границі. Ввівши позначення

$$B(\xi) = \frac{b_k}{b_k^2+(\xi-\xi_k)^2} \frac{R(\xi)}{\sqrt{4R^2(\xi)+(\xi-z_j)^2}} \cdot \sum_{i=0}^{4} \bar{b}_i \cdot \eta^i , \qquad (10)$$

розглянемо другий інтеграл в (9), який має особливість при $\xi = z_j$. Розіб'ємо його на два інтеграли

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} B(\xi) \cdot \ln\frac{1}{(\xi-z_j)^2} d\xi = \int_{\xi_1}^{z_j} B(\xi) \cdot \ln\frac{1}{(\xi-z_j)^2} d\xi + \int_{z_j}^{\xi_2} B(\xi) \ln\frac{1}{(\xi-z_j)^2} d\xi . \quad (11)$$

В останніх двох інтегралах замінимо змінні

$$x = \frac{\xi - z_j}{z_j - \xi_1} \qquad \text{і} \qquad y = \frac{\xi - z_j}{z_j - \xi_2} . \qquad (12)$$

Тоді одержимо

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} B(\xi) \ln\frac{1}{(\xi-z_j)^2} d\xi = (\xi_1 - z_j) \ln(\xi_1 - z_j)^2 \int_0^1 B(x) dx + \qquad (13)$$

$$+(z_j-\xi_2)\ln(z_j-\xi_2)^2\int_0^1 B(y)dy+2(z_j-\xi_1)\int_0^1 B(x)\ln\frac{1}{x}dx+$$

$$+2(\xi_2-z_j)\int_0^1 B(y)\cdot\ln\frac{1}{y}dy\,.$$

Для інтегралів типу $\int_0^1 f(x)\ln\frac{1}{x}dx$ використовуємо формулу чисельного інтегрування[2]

$$\int_0^1 f(x)\ln\frac{1}{x}dx\approx\sum_{i=1}^{10}A_i f(x_i),\tag{14}$$

де x_i, A_i – задані величини.

Враховуючи (13) і (14), система (9) у випадку одного електрода, твірна якого має вигляд $R=R(\xi)$, запишеться так:

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\Bigg\{\int_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{b_k}{b_k^2+(\xi-\bar{\xi}_k)^2}\cdot\frac{R(\xi)}{\sqrt{4R^2(\xi)+(\xi-z_j)^2}}\Bigg[\sum_{i=0}^{4}\bar{a}_i\eta^i+$$

$$+\ln\left[4R^2(\xi)+(\xi-z_j)^2\right]\cdot\sum_{i=0}^{4}\bar{b}_i\eta^i\Bigg]d\xi+$$

$$+(\xi_1-z_j)\ln(\xi_1-z_j)^2\int_0^1 B(x)dx+(z_j-\xi_2)\ln(z_j-\xi_2)^2\int_0^1 B(y)dy+\tag{15}$$

$$+2(z_j-\xi_1)\sum_{i=1}^{10}A_i\cdot B(x_i)+2(\xi_2-z_j)\sum_{i=1}^{10}A_i\cdot B(y_i)\Bigg\}=U_0\,,$$

$$(j=1,2,\ldots,n)\,,$$

де $B(x)$ і $B(y)$ мають вигляд (10), тільки замість ξ потрібно підставити відповідно:

$$\xi=z_j+x(\xi_1-z_j)\qquad\text{і}\qquad\xi=z_j+y(\xi_2-z_j)\;;$$

$$R(\xi)=\begin{cases} R_0 \quad , & \text{якщо } L \text{ - горизонтальна твірна} \\ R_1+\dfrac{R_2-R_1}{\xi_2-\xi_1}(\xi-\xi_1), & \text{якщо } L \text{ - похила твірна;} \\ r_0+\sqrt{\bar{R}^2-(\xi-Z_0)^2}, & \text{якщо } L \text{ - криволінійна твірна у вигляді кола;} \end{cases}$$

(R_1, ξ_1) і (R_2, ξ_2) - циліндричні координати кінців похилої твірної;

(r_0, Z_0) - координати центра кола; $\bar{R}$ - його радіус.

У випадку одного вертикального електрода система (15) набирає вигляду

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \left\{ \int_{R_1}^{R_2} \frac{b_k}{b_k^2+(R-\bar{R}_k)^2} \, \frac{R}{R+r_j} \left[\sum_{i=0}^{4} \bar{a}_i \left(\frac{R-r_j}{R+r_j} \right)^{2i} + \right.\right.$$

$$\left. +2\ln(R+r_j) \cdot \sum_{i=0}^{4} \bar{b}_i \left(\frac{R-r_j}{R+r_j} \right)^{2i} \right] dR +$$

$$+(R_1-r_j)\ln(R_1-r_j)^2 \int_0^1 B(x)dx + (r_j-R_2)\ln(r_j-R_2)^2 \int_0^1 B(y)dy + \tag{16}$$

$$\left. +2(r_j-R_1)\sum_{i=1}^{10} A_i B(x_i) + 2(R_2-r_j) \cdot \sum_{i=1}^{10} A_i \cdot B(y_i) \right\} = U_0 ,$$

$$(j=1,2,\ldots,n),$$

де $B(x)$ і $B(y)$ визначаються за формулою

$$B(R)=\frac{b_k}{b_k^2+(R-\bar{R}_k)^2} \cdot \frac{R}{R+r_j} \sum_{i=0}^{4} \bar{b}_i \left(\frac{R-r_j}{R+R_j} \right)^{2i}, \tag{17}$$

якщо замість R підставляти відповідно

$$R = r_j + (R_1 - r_j)x \quad \text{і} \quad R = r_j + (R_2 - r_j)y;$$

r_j - граничні точки на твірній електроду.

Визначивши a_k із системи (15), потенціал поля в будь-якій точці знаходимо за (3). Аналогічно одержуємо формули типу (15) для довільної електронно-оптичної системи.

П р и к л а д. Знайти густину розподілу зарядів для одного горизонтального електрода, якщо $b_k = 0{,}2125$, $\xi_1 = -0{,}425$, $\xi_2 = 0{,}425$, $u_0 = 1$, $R = 0{,}625$. Тоді, розв'язавши систему (15), при $n = 6$ одержуємо такі значення для a_k:

$$a_1 = 1{,}65895, \qquad a_4 = 0{,}209477,$$
$$a_2 = -1{,}31175, \qquad a_5 = -1{,}32704,$$
$$a_3 = 0{,}205999, \qquad a_6 = 1{,}67716.$$

Точність розв'язку інтегрального рівняння (3) перевірялась шляхом задоволення граничних умов в проміжкових точках (z_k , R_0). При цьому похибка не більше 1-2%. Значення густини $q(\xi)$ наводиться нижче:

ξ	-0,425	-0,31875	-0,10625	0,10625	0,31875	0,425
$q(\xi)$	3,296	0,7256	0,6176	0,6187	0,7278	3,327

Л і т е р а т у р а

1. Д ы м а р с к и й Я. С. и др. Справочник программиста, том I, Л., 1963.

2. К р ы л о в В. И., П а л ь ц е в А. А. Таблицы для численного интегрирования функций с логарифмическими и степенными особенностями. Минск, 1967.

3. Л ю д к е в и ч Й. В. Про уточнення одного методу розрахунку електростатичного поля системи електродів малої товщини. Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., вип. 4, 1969.

4. П р у с о в И. А., В а л ь к о Б. В., Л ю д к е в и ч И. В., Р о м а н и в Л. Е. Расчет электростатического поля системы электродов малой толщины методом нелинейных параметров. Сборник трудов I Всесоюзного семинара по численным методам расчета электронно-оптических систем, 1965. "Вычислительные системы", вып. 26, ИМ СОАН СССР, Новосибирск, 1967.