УДК 519.4:517:513.88

Ю.Л.КИШАКЕВИЧ, В.Е.ЛЯНЦЕ

РАДИКАЛ ОДНОГО НОРМОВАНОГО КІЛЬЦЯ

В [6] А.Я.Повзнер дослідив максимальні ідеали кільця зі згорткою, побудованою за узагальненим зсувом, що відповідає самоспряженому операторові Штурма-Ліувілля на півосі. Оскільки несамоспряжений оператор Штурма-Ліувілля може мати не тільки власні значення, яким відповідають елементарні дільники порядку $m > 1$, але й так звані спектральні особливості (див. [5]), то постає питання, які ускладнення виникають у побудові максимальних ідеалів для несамоспряженого випадку.

Основний результат міститься у теоремі 10 і висновку з неї. Зокрема виявляється, що спектральні особливості не впливають на радикал досліджуваного кільця.

1. Розглянемо диференціальний вираз

$$l_x y(x) = -y''(x) + p(x)y(x) \tag{1}$$

з потенціалом $p(x)$, неперервним при $x \geq 0$ і крайову умову

$$y'(0) - \theta y(0) = 0. \tag{2}$$

Ми не припускаємо, що $\operatorname{Im} p(x) = 0$, $\operatorname{Im} \theta = 0$, а через те крайова задача (1)-(2), взагалі кажучи, не є самоспряженою.

Нехай $u(x,t)$ - функція, задана при $x \geq 0$, $t \geq 0$ з допомогою наступних умов:

а) для будь-яких невід'ємних x і t $u(x,t) = u(t,x)$;

б) якщо $t < x$, то $l_x u(x,t) = l_t u(x,t)$;

в) при $x \geq 0$ $u(x,0) = f(x)$, $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \theta f(x)$, де $f(x)$ - задана функція, двічі неперервно-диференційовна при $x \geq 0$.

Для кожного $t \geq 0$ визначимо оператор A^t: $A^t f(x) = u(x,t)$. Безпосередньо з а) випливає, що $A_x^t f(x) = A_t^x f(t)$; $x, t \geq 0$, де символ

$A_x^t f(x,...)$ означає результат застосування оператора A^t до f як функції змінної x.

Надалі припускаємо, що існує така неперервна і незростаюча при $x \geq 0$ функція $P(x)$, що

$$|p(x)| \leq P(x), \quad x \geq 0 \quad \text{і} \quad \int_0^\infty x P(x) dx < \infty . \qquad (3)$$

Т е о р е м а 1. Існує така функція $a(x,t,z)$, задана при $x \geq 0$, $t \geq 0$, $z \geq 0$, що задовольняє умови:

$$a(x,t,z) = a(t,x,z), \qquad |a(x,t,z)| \leq C\chi(x,t,z) e^{2\int_0^t \tau P(\tau) d\tau}, \qquad (4)$$

що

$$A_x^t f(x) = \frac{1}{2}\left[f(|x-t|) + f(x+t)\right] + \frac{1}{2}\int_0^\infty a(x,t,z) f(z) dz . \qquad (5)$$

При цьому C – деяке число, а $\chi(x,t,z) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad z \in (|x-t|, x+t), \\ 0 & \text{при} \quad z \bar{\in} (|x-t|, x+t). \end{cases}$

Теорему можна довести методом послідовних наближень з попереднім зведенням задачі відшукання $u(x,t) = A_x^t f(x)$ до розв'язування деякого інтегрального рівняння.

З а у в а ж е н н я 1. З теореми випливає, що простір $L_*^1(0,\infty)$ функцій локально сумовних на півосі $(0,\infty)$ можна прийняти за область означення операторів A^t: $\mathcal{D}(A^t) = L_*^1(0,\infty)$.

З а у в а ж е н н я 2. Легко бачити, що $a(x,t,z)$ – неперервна функція в області $|x-t| \leq z \leq x+t$, $x \geq 0$, $t \geq 0$.

2. Неважко довести наступні твердження

Л е м а 1. При $0 \leq t < \infty$, $0 \leq a < b \leq \infty$ візьмемо

$$a_t = \begin{cases} a-t & \text{при} \quad t \leq a \\ 0 & \text{при} \quad a < t < b \\ t-b & \text{при} \quad b \leq t < \infty \end{cases}, \qquad b_t = \begin{cases} b+t & \text{при} \quad b < \infty \\ \infty & \text{при} \quad b = \infty \end{cases} .$$

Якщо $a \leq x \leq b$, то $a_t \leq |x-t| \leq x+t \leq b_t$.

Т е о р е м а 2. Існує таке число C_1, що при $0 \leq t < \infty$, $0 \leq a < b \leq \infty$,

$$\sup_{a<x<b} \left| A_x^t f(x) \right| \le (1+C_1 t) \sup_{a_t<x<b_t} |f(x)| \tag{6'}$$

$$\left(\int_a^b \left| A_x^t f(x) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \le (1+C_1 t) \left(\int_{a_t}^{b_t} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{6''}$$

$$\int_a^b \left| A_x^t f(x) \right| dx \le (1+C_1 t) \int_{a_t}^{b_t} |f(x)|\, dx. \tag{6'''}$$

Т е о р е м а 3. Якщо $|h|<\varepsilon$, то

$$\sup_{a+\varepsilon<x<b-\varepsilon} \left| A_x^{t+h} f(x) - A_x^t f(x) \right| \le \omega(f, a_t, b_t, \varepsilon) + \sup_{a_t\le z\le b_t} |f(z)| \cdot A(\varepsilon), \tag{7}$$

$$\left(\omega(f,a,b,\varepsilon) = \sup \left\{ |f(x')-f(x'')| : |x'-x''|<\varepsilon,\ x', x'' \in [a,b] \right\} \right) \tag{8}$$

при цьому $A(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$ рівномірно в кожному окінченному інтервалі зміни t і не залежить від f.

Т е о р е м а 4. Для кожного $t\ge 0$ і кожного $A\in(a_t, b_t)$ існує така функція $A(\varepsilon)$, що $A(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$ рівномірно в кожному окінченному інтервалі зміни t і

$$\sup_{|h|<\varepsilon} \left\{ \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \left| A_x^{t+h} f(x) - A_x^t f(x) \right|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \le \frac{3}{2}\, \omega_p(f, a_t, b_t, \varepsilon) + 2 \left\{ \int_0^{2t} |f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} +$$
$$+ A(\varepsilon) \left\{ \int_{a_t}^{b_t} |f(z)|^p dz \right\}^{\frac{1}{p}} + Ct \left\{ \int_A^{b_t} |f(z)|^p dz \right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{9}$$

$$\left(\omega_p(f,a,b,\varepsilon) = \sup_{|h|<\varepsilon} \left\{ \int_a^b |f(x+h)-f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad p=1,2 \right) \tag{10}$$

при цьому, число $C>0$ не залежить ні від f, ні від A. Зокрема, при $\varepsilon\to 0$ ліва частина (9) прямує до нуля, якщо $f\in L^p(a_t, b_t)$.

3. Позначимо через L оператор, що відповідає диференціальному виразові (I) і крайовій умові (2). Оператор L задаємо формулою $(Lf)(x) = l_x f(x)$ на функціях f , що мають похідну f', абсолютно неперервну в кожному інтервалі $(0,a)$, $a<\infty$ і задовольняють умову (2). Надалі будемо розглядати звуження L на простір $L^2(0,\infty)$, а також деякі інші його звуження.

Функцію f , задану майже скрізь на півосі $(0,\infty)$, будемо називати фінітною, якщо існує таке a, що $f(x)=0$ майже скрізь при $x>a$. Множину всіх фінітних функцій $f\in L^p(0,\infty)$ позначимо через $L_0^p(0,\infty)$. З теореми 2 випливає, що для кожного $t\geqslant 0$

$$A^t f\in L_0^p(0,\infty), \quad \text{якщо} \quad f\in L_0^p(0,\infty), \quad p=1,2,\infty.$$

А саме, коли $f(x)=0$ при $x>a$, то $A^t f(x)=0$ при $x>a+t$. Нехай для всіх комплексних λ і всіх $x\geqslant 0$ функція $\omega(x,\lambda)$ задовольняє співвідношення:

$$l_x\,\omega(x,\lambda)=\lambda\omega(x,\lambda); \qquad \omega(0,\lambda)=1; \qquad \omega_x'(0,\lambda)=0. \tag{11}$$

Для кожної функції $f\in L_0^1(0,\infty)$ інтеграл $\omega(f,\lambda)=\int_0^\infty f(x)\,\omega(x,\lambda)dx$ є цілою функцією параметра λ. Цю функцію називатимемо L – перетворенням Фур'є фінітної функції f.

Т е о р е м а 5. Для кожного $t\geqslant 0$ і всіх комплексних λ виконується наступна рівність

$$\omega(A^t f,\lambda)=\omega(f,\lambda)\,\omega(t,\lambda), \tag{12}$$

при цьому $f\in L_0^1(0,\infty)$ – довільна (фінітна) функція.

Наведемо деякі факти спектральної теорії оператора L. Доведення нижче викладених тверджень можна знайти в [3], [5]. Надалі будемо вважати, що виконується, крім (3), наступна додаткова умова: існує таке $\varepsilon>0$, що

$$\int_0^\infty e^{\varepsilon x}\,|p(x)|\,dx<\infty. \tag{13}$$

При цьому припущенні неперервний спектр оператора L, що розглядається в гільбертовому просторі $L^2(0,\infty)$, заповнює піввісь $\lambda\geqslant 0$. Відповідні власні функції $x\to\omega(x,\lambda)$, $\lambda\geqslant 0$ (11) обмежені на півосі $(0,\infty)$, однак не інтегровані з квадратом. Є скінченне число власних значень $\lambda_1,\dots,\lambda_\alpha$. Вони задовольняють умову $\arg\lambda_k\neq 0$ і мають скінченні кратності $m_1,\dots,m_\alpha$. Їм відповідають головні (власні і приєднані) функції $x\to\omega^{(j_k)}(x,\lambda_k)$, $k=1,\dots,\alpha$; $j_k=0,\dots,m_k-1$, що є елементами $L^2(0,\infty)$, при цьому $\omega^{(j)}=d^j\omega/d\lambda^j$. Нехай $e(x,\rho)$ – функція, яка при $\operatorname{Im}\rho\geqslant 0$ задовольняє співвідношення $l_x e(x,\rho)=\rho^2 e(x,\rho)$, $\lim\limits_{x\to\infty} e(x,\rho)e^{-i x\rho}=1$,

і нехай $\quad a(\rho)=\dfrac{\partial}{\partial x}e(0,\rho)-\theta e(0,\rho)$.

Доводиться, що рівняння $a(\rho)=0$ має в півплощині $\operatorname{Im}\rho \geq 0$ скінченне число коренів. Корені рівняння $a(\rho)=0$, для яких $\operatorname{Im}\rho \geq 0$ і $\rho \neq 0$, ми будемо називати сингулярними числами оператора L. Нехай $\rho_1, \ldots, \rho_\alpha$ – всі недійсні, а $\rho_{\alpha+1}, \ldots, \rho_\beta$ – всі дійсні сингулярні числа, тоді числа $\lambda_1=\rho_1^2, \ldots, \lambda_\alpha=\rho_\alpha^2$ утворюють сукупність всіх власних значень оператора L, що розглядається в просторі $L^2(0,\infty)$. При $k=\alpha+1,\ldots,\beta$ числа $\lambda_k=\rho_k^2$ належать неперервному спектру, однак, через їх важливу роль, будемо називати $\lambda_{\alpha+1}, \ldots, \lambda_\beta$ спектральними особливостями оператора L. Рівність Парсоваля, що відповідає оператору L, можна записати в такому вигляді

$$\int_0^\infty f(x)g(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega(f,\lambda)\omega(g,\lambda)\sqrt{\lambda}\, d\lambda}{a(\sqrt{\lambda})a(-\sqrt{\lambda})} + \sum_{k=1}^{\alpha}\left\{\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{m_k-1} M_k(\lambda)\omega(f,\lambda)\omega(g,\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_k}, \tag{14}$$

де

$$M_k(\lambda)=\frac{(\lambda-\lambda_k)^{m_k} e(0,\sqrt{\lambda})}{(m_k-1)!\, a(\sqrt{\lambda})}; \qquad k=1,\ldots,\alpha;$$

m_k – кратність кореня ρ_k рівняння $a(\rho)=0$.

Якщо оператор має спектральні ососбливості, то для довільних $f, g \in L_0^2(0,\infty)$, інтеграл в правій частині (14), взагалі кажучи, розбігається. Однак цей інтеграл збігається і рівність (14) справедлива, якщо хоч би одна з цих функцій f або g належить лінеалу

$$\mathcal{D}_0 = \left\{h : h\in L_0^2(0,\infty), \omega^{(j)}(h,\lambda_k)=0,\ k=\alpha+1,\ldots,\beta;\ j=0,\ldots,m_k-1\right\}. \tag{15}$$

Через те, що головні функції оператора L, які відповідають спектральним особливостям, не належать $L^2(0,\infty)$, то лінеал $\mathcal{D}_0$ щільний в просторі $L^2(0,\infty)$. Ця обставина дозволяє нам зробити один важливий для дальшого викладу висновок. Оператор A^t має таку властивість симетричності:

Т е о р е м а 6. Для будь-якого $t \geq 0$ і всіх $f, g \in L^2(0,\infty)$

$$\int_0^\infty \left[A_x^t f(x)\right] g(x)dx = \int_0^\infty f(x) A_x^t g(x)dx. \tag{16}$$

З а у в а ж е н н я 1. Рівність (16) справедлива і в тому випадку, коли $p(x)$ – тільки сумовна в кожному скінченному інтервалі додатної півосі.

З а у в а ж е н н я 2. Співвідношення (16) справедливе для будь-яких $f \in L_*^2(0,\infty)$, $g \in L_*^2(0,\infty)$ / $L_*^p(0,\infty)$ – множина функцій, інтегрованих у степені p в кожному інтервалі $(0,a)$, $a<\infty$.

Т е о р е м а 7. Для будь-яких $f, g \in L_*^1(0,\infty)$ і будь-яких $t, s \geq 0$

$$A_t^s A_x^t f(x) = A_x^t A_x^s f(x) \quad \text{(асоціативність)} \quad , \tag{17}$$

$$A_x^s A_x^t f(x) = A_x^t A_x^s f(x) \quad \text{(комутативність)} \quad . \tag{18}$$

З а у в а ж е н н я. З попереднього випливає, що сім'я операторів A^t задовольняє всі умови визначення операторів узагальненого зсуву [2] за винятком умови нормальності $A^t(A^s)^* = (A^s)^* A^t$. Отже, A^t – оператор узагальненого зсуву, породжений оператором L .

4. Використавши означення L -перетворення Фур'є функцій з локально сумовним квадратом [4], можна довести таке твердження.

Т е о р е м а 8. Для кожного $t \geq 0$ і всіх $f^* \in L_*^2(0,\infty)$: $\omega A^t f^* = \omega(t)\omega f^*$.

В и с н о в о к. Для будь-якої функції $f \in L^2(0,\infty)$ і всіх $t \geq 0$ $\omega(A^t f)=$ $= \omega(f,\lambda)\cdot\omega(t,\lambda)$ майже скрізь при $\lambda > 0$ і

$$\omega^{(j_k)}(A^t f, \lambda_k) = \sum_{j=0}^{j_k} \binom{j_k}{j} \omega^{(j_k - j)}(f,\lambda_k)\omega^{(j)}(t,\lambda_k) \text{ при } k=1,\dots,\infty;\ j_k=0,\dots,m_k-1.$$

5. Узагальнену згортку $f * g$ функцій f і g визначимо за формулою

$$f * g(t) = (f * g)(t) = \int_0^\infty [A_x^t f(x)] \cdot g(x)\,dx \tag{19}$$

для будь-яких функцій f і g , для яких права частина (19) має сенс. Позначимо через R_0 нормований простір, що відповідає нормі

$$\| f \| = \int_0^\infty (1+t)|f(t)|\,dt .$$

Т е о р е м а 9. Для будь-яких $f, g \in R_0$ існує $f * g$ і $f * g \in R_0$. Крім того, існує таке число $M > 0$, що

$$\| f * g \| \leq M \cdot \| f \| \cdot \| g \| . \tag{20}$$

О з н а ч е н н я. З допомогою теореми 7 неважко перевірити, що узагальнена згортка асоціативна і комутативна:

$$(f * g) * h = f * (g * h), \quad f * g = g * f, \quad f, g, h \in R_0 .$$

Отже, внаслідок теореми 9, банахів простір R_0 , з узагальненою згорткою як операцією множення, є комутативним нормованим кільцем [1] . Через

R ми позначимо нормоване кільце, одержане в R_0 приєднанням одиниці.

Лема 2. Для всіх $f \in R_0$, $A^t f \in R_0$ і існує таке $C > 0$, що

$$\| A^t f \| < C(1+t) \| f \|.$$

6. Спектр $S(L)$ оператора L, що розглядається в гільбертовому просторі $L^2(0,\infty)$, збігається з множиною тих значень λ, для яких функція $x \to \omega(x,\lambda)$ є обмеженою на півосі $(0,\infty)$. Покажемо, що для кожного $\lambda \in S(L)$ множина

$$M_\lambda = \left\{ \xi e + f : f \in R_0, \quad \xi + \int_0^\infty f(x)\,\omega(x,\lambda)\,dx = 0 \right\} \tag{21}$$

є максимальним ідеалом кільця R (e позначає одиницю R). Легко перевірити, що функція F_λ, задана формулою $F_\lambda(\xi e + f) = \xi + \omega(f,\lambda)$ є лінійним неперервним і мультиплікативним функціоналом, заданим на кільці R. Очевидно, кільце R_0 є максимальним ідеалом кільця R. Цей максимальний ідеал є ядром мультиплікативного функціоналу F_∞, що визначається формулою

$$F_\infty(\xi e + f) = \xi, \quad f \in R_0.$$

Теорема 10. Існує взаємнооднозначна відповідність $\lambda \to M_\lambda$ між точками λ спектра оператора L і максимальними ідеалами M_λ кільця R, відмінними від ідеала $M_\infty = R_0$. Ця відповідність встановлюється формулою (21).

Намітимо доведення теореми. Нехай M – деякий максимальний ідеал кільця R, відмінний від R_0, F – мультиплікативний функціонал, що відповідає ідеалу M: $f - F(f)e \in M$, $f \in R_0$. Виберемо $\varphi \in R_0$ і $\varphi \bar{\in} M$, таке, щоб $F(\varphi) \neq 0$. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $F(\varphi) = 1$. Приймемо $\omega(x) = F(A^x \varphi)$. Внаслідок леми 2

$$|\omega(x)| \le \|F\| \cdot \|A^x \varphi\| \le C \cdot \|F\| (1+x), \qquad 0 \le x < \infty. \tag{22}$$

Звідси випливає існування інтегралу $\omega(f) = \int_0^\infty f(x)\omega(x)\,dx$ для довільної $f \in R_0$. Доводиться співвідношення:

$$\omega(f) = F(f) \cdot F(\varphi) = F(f), \qquad f \in R_0. \tag{23}$$

З рівності (23) легко вивести, що

$$A_x^t\, \omega(x) = \omega(x)\,\omega(t). \tag{24}$$

Нехай $\omega(x)$ - двічі неперервно диференційовна. Тоді з рівності (24) і означення оператора A^* випливає, що $\omega(x)=\omega(x,\lambda)$. Внаслідок (22) робимо висновок, що $\omega(x,\lambda)$ є фактично обмеженою, а через те $\lambda \in S(L)$. Теорема доведена.

Висновок. Радикал кільця R складається з функцій f вигляду:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{m_k-1} C_{kj}\,\omega^{(j)}(x,\lambda_k), \tag{25}$$

де C_{kj} - довільні сталі.

Справді, радикал (як перетин всіх максимальних ідеалів) складається з тих $f\in R_0$, для яких $\omega(f,\lambda)=0$ для всіх $\lambda\in S(L)$. Звідси, внаслідок рівності Парсеваля (14) випливає (25).

Література

1. Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е. Коммутативные нормированные кольца. Физматгиз, М., 1959.

2. Левитан Б. М. Операторы обобщенного сдвига и некоторые их применения. Физматгиз, М., 1962.

3. Лянце В. Э. Несамосопряженный дифференциальный оператор второго порядка на полуоси, добавление I к книге М.А.Неймарка "Линейные дифференциальные операторы", "Наука", М., 1969.

4. Лянце В. Э. Распространение L-преобразования Фурье на функции с локально интегрируемым квадратом, ДАН СССР, т. 158, № 5, 1964.

5. Лянце В. Э. О дифференциальном операторе со спектральными особенностями, I, "Математический сборник", т. 64/106/, № 4, 1964; II, "Математический сборник", т. 65/107/, № I, 1964.

6. Повзнер А. Я. О дифференциальных уравнениях Штурма-Лиувилля на полуоси. "Математический сборник", т. 23/65/, № I, 1948.
