УДК 517.94

К.С.КОСТЕНКО

УМОВИ ІНТЕГРУВАННЯ У КВАДРАТУРАХ ДЕЯКИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Знаходимо умови інтегрування в квадратурах звичайних лінійних однорідних рівнянь та одного нелінійного рівняння другого порядку.

Дослідження проводимо за допомогою відомої ознаки Лі [3], згідно з якою рівняння

$$\omega(x, y, y', y'')=0 \qquad (1)$$

інваріантне відносно групи перетворень з інфінітезімальним оператором

$$Uf=\xi(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}+\eta(x,y)\frac{\partial f}{\partial y} \qquad (2)$$

тоді і тільки тоді, коли двічі продовжений оператор (2)

$$U''f=\xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y}+\eta_1\frac{\partial f}{\partial y'}+\eta_2\frac{\partial f}{\partial y''}, \qquad (3)$$

застосований до лівої частини рівняння (1), обертається тотожно в нуль на всіх розв'язках рівняння (1), тобто, коли одночасно задовольняються рівняння

$$U''\omega(x,y,y',y'')=0, \qquad (3')$$

$$\omega(x,y,y',y'')=0. \qquad (1)$$

Якщо з (1) визначити y'' через x, y, y' і підставити в (3), то після цього (3') стане тотожністю по x, y, y'. Коефіцієнти η_i /$i=1,2$/ оператора (3) виражаються за формулами

$$\eta_1=\frac{d\eta}{dx}-y'\frac{d\xi}{dx}, \qquad (4)$$

$$\eta_2=\frac{d\eta_1}{dx}-y''\frac{d\xi}{dx}.$$

Лінійні однорідні рівняння другого порядку

Застосовуючи ознаку Лі до лінійного рівняння

$$\omega = y'' + J(x)y = 0, \tag{5}$$

одержуємо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів оператора (2)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0,\\
&2\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0,\\
&3Jy\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} = 0,\\
&J'y\xi + J\eta - Jy\frac{\partial \eta}{\partial y} + 2Jy\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0,
\end{aligned} \tag{6}$$

з якої випливає

$$\begin{aligned}
&\xi(x,y) = \xi_1(x)y + \xi_2(x),\\
&\eta(x,y) = \xi_1'(x)y^2 + \eta_1(x)y + \eta_2(x),
\end{aligned} \tag{7}$$

і, крім того, повинно бути

$$\begin{aligned}
&\xi_1'' + J\xi_1 = 0,\\
&\xi_1''' + (J\xi_1)' = 0,\\
&\xi_2'' \mp 2\eta_1' = 0,\\
&\eta_1'' + 2J\xi_2' + J'\xi_2 = 0,\\
&\eta_2'' + J\eta_2 = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Очевидно, що всякий тричі неперервно диференційований розв'язок першого рівняння системи (8) буде одночасно розв'язком другого рівняння. Відомо також, що формула Ліувілля дає можливість одержати загальний розв'язок рівняння (5), якщо відомий лише один його частковий розв'язок. Маючи це на увазі і враховуючи, що перше і останнє рівняння системи (8) збігаються з рівнянням (5), природно вважати, що нам відомий лише тривіальний розв'язок рівняння (5) і замість системи (8) розглядати систему

$$\begin{aligned}
&\xi_2'' - 2\eta_1' = 0,\\
&\eta_1'' + 2J\xi_2' + J'\xi_2 = 0,
\end{aligned} \tag{8'}$$

з якої випливає, що

$$\eta_1(x) = \frac{1}{2}\xi_2' + \alpha, \tag{8''}$$

де α – довільна стала, і, крім цього,

$$\xi_2''' + 4J\xi_2' + 2J'\xi_2 = 0. \tag{8'''}$$

Отже, щоб знайти коефіцієнти оператора (2) необхідно визначити хоча б один частковий розв'язок рівняння (8'''). Припустимо, що такий розв'язок $\xi_2(x)$ рівняння (8''') відомий. Тоді (5) буде інваріантним відносно двопараметричної групи перетворень з інфінітезімальними операторами

$$\begin{aligned} U_1 f &= \xi_2(x)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\xi_2' y \frac{\partial f}{\partial y}, \\ U_2 f &= y\frac{\partial f}{\partial y}, \end{aligned} \tag{9}$$

а цього вже досить, щоб одержати загальний розв'язок рівняння (5) у квадратурах.

Крім того, вважаючи у (8''') $\xi_2(x)$ довільно заданою достатньо гладкою функцією, одержимо

$$J(x) = \frac{1}{\xi_2^2}\left[-A - \frac{1}{2}\xi_2''\xi_2 + \frac{1}{4}\xi_2'^2\right], \tag{10}$$

де A – довільна стала.

Отже, якщо в (5) $J(x)$ взяти по (10) при довільно заданій функції $\xi_2(x)$ і з деякою довільно заданою сталою A, то таке рівняння (5) буде інваріантним відносно двопараметричної групи перетворень з інфінітезімальними операторами (9), які є лінійно незв'язаними і дужка Пуассона яких $(U_1, U_2)f = 0$. Ця група перетворень має канонічну форму

$$U_1 f = \frac{\partial f}{\partial \zeta}, \qquad U_2 f = \frac{\partial f}{\partial \chi}, \tag{9'}$$

причому

$$\begin{aligned} \zeta &= \int \frac{dx}{\xi_2(x)}, \\ \chi &= -\frac{1}{2}\ln \xi_2(x) + \ln y. \end{aligned} \tag{11}$$

У змінних (11) рівняння (5) зведеться до

$$\frac{d^2 \chi}{d\xi^2} = A - \left(\frac{d\chi}{d\xi}\right)^2 . \qquad (5')$$

Інтегруючи останнє рівняння і потім повертаючись до змінних x і y, одержимо, за умови (10) загальний розв'язок рівняння (5):

$$y = \sqrt{\xi_2(x)}\left[C_1 \cos\left(\sqrt{-A}\int\frac{dx}{\xi_2(x)}\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{-A}\int\frac{dx}{\xi_2(x)}\right)\right] \quad \text{для } A < 0, \qquad (12')$$

$$y = \sqrt{\xi_2(x)}\left[C_1 \exp\left(\sqrt{A}\int\frac{dx}{\xi_2(x)}\right) + C_2 \exp\left(-\sqrt{A}\int\frac{dx}{\xi_2(x)}\right)\right] \quad \text{для } A > 0, \qquad (12'')$$

$$y = \sqrt{\xi_2(x)}\left[C_1\int\frac{dx}{\xi_2(x)} + C_2\right]. \quad \text{для } A = 0 . \qquad (12''')$$

Таким чином, умова (10) при довільному виборі $\xi_2(x)$ дає можливість побудувати широкий клас лінійних однорідних рівнянь другого порядку, загальні розв'язки яких даватимуть відповідно (12'), (12''), (12''') залежно від знака довільної сталої A.

Зокрема, (12'), (12''), (12''') дають загальний розв'язок рівняння з сталими коефіцієнтами

$$y'' - Ay = 0,$$

при $\xi_2(x) = 1$ і рівняння Ейлера

$$y'' + \frac{-A + \frac{1}{4}}{x^2}\, y = 0,$$

при $\xi_2(x) = x$.

З а у в а ж е н н я. Якщо частковий розв'язок $\xi_2(x)$ рівняння (8''') такий, що $\sqrt{\xi_2 x}$ є частковим розв'язком рівняння (5), то в (10) $A=0$ має місце (12'''), яка збігається з розв'язком рівняння (5), що одержується за допомогою формули Ліувілля. Коли ж $\sqrt{\xi_2(x)}$ не буде розв'язком рівняння (5), то в (10) $A \neq 0$ і розв'язки рівняння (5) треба шукати одною з формул (12'), (12'') залежно від знака числа A. Врахувавши твердження, наведене в довіднику Камке [1], приходимо до висновку, що знання одного часткового розв'язку рівняння (8''') завжди дає можливість знайти загальний розв'язок рівняння (5), так і рівняння (8''').

Одне нелінійне рівняння другого порядку

Лінійне однорідне рівняння третього порядку

$$z''' + A(x)z'' + B(x)z' + C(x)z = 0 \tag{13}$$

заміною

$$z' = zy \tag{14}$$

зводиться до

$$\omega = y'' + 3yy' + y^3 + A(x)(y' + y^2) + B(x)y + C(x) = 0. \tag{15}$$

Очевидно, що умови інтегрування рівняння (15) в квадратурах одночасно будуть такими ж умовами і для (13). Проте, навряд чи можна вичерпати на цьому шляху всі умови інтегрування рівняння (13) у квадратурах, тому що (13) при заміні (14) дещо втрачає свої групові властивості.

Застосовуючи ознаку Лі до (15), одержимо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів інфінітезімального оператора (2):

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0, \\
\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + 2(A + 3y)\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \\
2\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + (A + 3y)\frac{\partial \xi}{\partial x} + 3(C + By + Ay^2 + y^3)\frac{\partial \xi}{\partial y} + A'\xi + 3\eta = 0, \\
\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - (C + By + Ay^2 + y^3)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - 2\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + (A + 3y)\frac{\partial \eta}{\partial x} + (C' + B'y + A'y^2)\xi + (B + 2Ay + 3y^2)\eta = 0.
\end{gathered} \tag{16}$$

З перших двох рівнянь системи (16) маємо

$$\begin{aligned}
&\xi(x,y) = \xi_1(x)y + \xi_2(x), \\
&\eta(x,y) = -\xi_1(x)y^3 + (\xi_2' - A\xi_1)y^2 + \eta_1(x)y + \eta_2(x).
\end{aligned} \tag{17}$$

Підставляючи (17) в останні два рівняння системи (16) і враховуючи, що результат підстановки повинен бути тотожністю по y, будемо мати

$$\begin{gathered}
\xi_1'' - (A\xi_1)' + B\xi_1 + \eta_1 + \xi_2' = 0, \\
\xi_2'' - (A\xi_2)' - 3\eta_2 - 2\eta_1' - 3C\xi_1 = 0,
\end{gathered} \tag{18}$$

$$\xi_1''' + (B - A^2 - 2A')\xi_2' + (B' + AB - AA' - A'' + 3C)\xi_1 + A'\xi_2 + A\eta_1 + 3\eta_2 +$$

$$+3\eta_1' + 2A\xi_2' = 0,$$

$$\eta_1'' + A\eta_1' + 3\eta_2' + 2A\eta_2 + 2B\xi_2' + B'\xi_2 + C'\xi_1 + 2AC\xi_1 = 0,$$

$$\eta_2'' + A\eta_2' + B\eta_2 + 2C\xi_2' + C'\xi_2 - C\eta_1 = 0.$$

Диференціюванням першого рівняння системи (18) та виключенням η_1 і η_2 з трьох останніх рівнянь тієї ж системи одержуємо

$$\eta_1 = -\xi_1'' + (A\xi_1)' - B\xi_1 - \xi_2',$$

$$3\eta_2 = 3\xi_2'' - (A\xi_2)' + 2\xi_1''' - 2(A\xi_1)'' + 2(B\xi_1)' - 3C\xi_1, \qquad (18')$$

і

$$3\xi_1^{(IV)} - 3(A\xi_1)''' + A\xi_1''' - A(A\xi_1)'' + 3(B\xi_1)'' + A(B\xi_1)' - 9(C\xi_1)' +$$

$$+3C'\xi_1 + 6\xi_2''' - 2A(A\xi_2)' + 6(B - A')\xi_2' + 3(B' - A'')\xi_2 = 0,$$

$$2\xi_1^{(V)} - 2(A\xi_1)^{(IV)} + 2A\xi_1^{(IV)} - 2A(A\xi_1)''' + 2(B\xi_1)''' +$$

$$+2B\xi_1''' - 3(C\xi_1)'' + 3C\xi_1'' + 2A(B\xi_1)'' - 2B(A\xi_1)'' -$$

$$-3A(C\xi_1)' - 3C(A\xi_1)' + 2B(B\xi_1)' + 3\xi_2^{(IV)}(A\xi_2)''' + 3A\xi_2''' - \qquad (18'')$$

$$-A(A\xi_2)'' + 3B\xi_2'' - B(A\xi_2)' + 9C\xi_2' + 3C'\xi_2 = 0.$$

Отже, щоб одержати двопараметричну групу перетворень, яка залишатиме рівняння (15) інваріантним, достатньо знайти двопараметричну множину розв'язків системи (18"). А для побудови рівняння (15), інваріантного відносно заданої групи перетворень, досить в системі (18) відповідно задати $\xi_1(x)$ і $\xi_2(x)$, після чого система (18") перетвориться в умови на коефіцієнти A, B, C, при виконанні яких відповідне рівняння буде інваріантним відносно заданої групи перетворень.

Нехай, наприклад, $\xi_1(x) = a_1$, $\xi_2(x) = a_2$, де a_1, a_2 – довільні сталі. Тоді, згідно (18')

$$
\begin{aligned}
&\eta_1(x) = a_1(A' - B),\\
&\eta_2(x) = -\frac{a_2}{3}A' - \frac{a_1}{3}(2A'' - 2B' + 3C),
\end{aligned}
\tag{19}
$$

а система (18″) приводить до умов

$$
\begin{aligned}
&3B' - 2AA' - 3A'' = 0,\\
&3B'' + AB' - 6C' - AA'' - 3A''' = 0,\\
&3C' - BA' - AA'' - A''' = 0,\\
&2B''' + 2AB'' + 2BB' - 2BA'' - 3AC' - 3A'C - 3C'' - 2AA''' - 2A^{(IV)} = 0.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Очевидно, що система (20) сумісна. Їй, наприклад, задовольняють довільні сталі A, B, C.

Наведемо міркування, які дадуть можливість знайти всю сукупність розв'язків системи (20). Як відомо [3], множина перетворень, яку допускає диференціальне рівняння, завжди створює групу. Тому, якщо існують A, B, C, які задовольняють систему (20), то за таких A, B, C (15) допускатиме двопараметричну групу перетворень, інфінітезімальні оператори якої, з врахуванням (17) і (19), повинні мати вигляд

$$
\begin{aligned}
&U_1 f = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{A'}{3}\frac{\partial f}{\partial y},\\
&U_2 f = y\frac{\partial f}{\partial x} - \left| y^3 + Ay^2 + (B - A)y - \frac{2}{3}B' + C + \frac{2}{3}A'' \right| \frac{\partial f}{\partial y}
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Згідно з другою теоремою Лі [2] для груп перетворень дужка Пуассона $(U_1, U_2)f = C_1 U_1 f + C_2 U_2 f$, де C_1, C_2 – сталі числа. Це й дає можливість знайти всю сукупність розв'язків системи (20). Дійсно, дужка Пуассона операторів (21)

$$
\begin{aligned}
(U_1, U_2)f = -\frac{A'}{3}\frac{\partial f}{\partial x} + \Big[-A'y^2 + (A'' - B')y + \frac{2}{3}B'' - C' - \frac{2}{3}A''' +\\
+ \frac{A'}{3}(3y^2 + 2Ay + B - A') + \frac{A''}{3}y \Big]\frac{\partial f}{\partial y}
\end{aligned}
\tag{22}
$$

може бути лінійною комбінацією операторів (21) з сталими коефіцієнтами і разом з тим оператори (21) будуть інфінітезімальними операторами двопараметричної групи перетворень лише тоді, коли $A' = a$ – стале число. Враховуючи (21) і (22), бачимо, що тоді $C_2 = 0$, тобто

$$(U_1, U_2)f = C_1 U_1 f = -\frac{A'}{3} U_1 f,$$

і в (22) з врахуванням першого рівняння системи (20) повинно бути

$$\frac{2}{3}B'' - C' + \frac{A'B}{3} - \frac{A'^2}{3} = \frac{A'^2}{9}. \tag{23}$$

Тепер знаходимо всі можливі розв'язки системи (20)

$$\begin{aligned} A(x) &= ax + b, \\ B(x) &= \frac{1}{3}(ax+b)^2 + a, \\ C(x) &= \frac{1}{3}(ax+b)\left[\frac{1}{9}(ax+b)^2 + a\right]. \end{aligned} \tag{24}$$

Перевірка показує, що (24) задовольняють рівняння (23).

Таким чином, рівняння (15) з коефіцієнтами (24) допускатиме двопараметричну групу перетворень з інфінітезімальними операторами

$$U_1 f = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{a}{3}\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$U_2 f = y\frac{\partial f}{\partial x} - \left\{y^3 + (ax+b)y^2 + \frac{1}{3}(ax+b)^2 y - \frac{4}{9}a(ax+b) + \frac{1}{3}(ax+b)\left[\frac{1}{9}(ax+b)^2 + a\right]\right\}\frac{\partial f}{\partial y}, \tag{21'}$$

що лінійно незв'язані і дужка Пуассона яких $(U_1, U_2)f = -\frac{a}{3}U_1 f$.

Група (21) матиме канонічну форму

$$U_1 f = \frac{\partial f}{\partial \chi}, \qquad U_2 f = \zeta\frac{\partial f}{\partial \zeta} + \chi\frac{\partial f}{\partial \chi}, \tag{25}$$

причому

$$\zeta = z^{\frac{1}{a}}\left(\frac{a}{3} - z^2\right)^{-\frac{3}{2a}},$$

$$\chi = \frac{\zeta}{\frac{y}{x} + \frac{a}{3}}\left[\int\left(\frac{a}{3z^2} - 1\right)^{\frac{3}{2a}} dz - \frac{y}{x}\int z^{-\frac{3}{a}}\left(z - \frac{b}{3}\right)\left(\frac{a}{3} - z^2\right)^{\frac{3}{2a} - 1} dz\right], \tag{26}$$

де $z = y + \frac{ax+b}{3}$. У змінних (26) рівняння (15) з коефіцієнтами (24) не міститиме змінної x і його можна буде проінтегрувати в квадратурах. Якщо $a=0$, то коефіцієнти A, B, C будуть сталими, $(U_1, U_2)f=0$ і канонічними змінними в цьому випадку будуть

$$\zeta = x + \int \frac{y\,dy}{y^3+Ay^2+By+C}, \qquad \chi = -\int \frac{dy}{y^3+Ay^2+By+C} \tag{27}$$

Аналогічно можна розглянути деякі інші випадки задавання функцій $\xi_1(x)$ і $\xi_2(x)$, які приводять до рівняння виду (15), що інтегруються в квадратурах.

Література

1. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. ГИФМЛ, М., 1961.
2. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Изд-во Сибирского отделения АН СССР, 1962.
3. S. Lie. Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Leipzig, 1891.

УДК 517.55

І.І.ЧУЛИК

ПРО ОБЛАСТЬ ЗБІЖНОСТІ РЯДУ ДІРІХЛЕ ВІД ДВОХ КОМПЛЕКСНИХ ЗМІННИХ

Нехай ряд Діріхле

$$f(z,w)=\sum_{k,l=0}^{\infty} a_{kl}\, e^{\mu_k z + \nu_l w} \tag{1}$$

збігається в повній трубчастій області T_B [1,4], де $\{\mu_k\}$ та $\{\nu_l\}$ – послідовності чисел, що задовольняють умови