2. К а р д а ш А. І., К о с т о в с ь к и й О. М., Ч у л и к І. І. Мажоранти та діаграми Ньютона функцій багатьох змінних. Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-мат., вип. 3, 1967.

3. Ц е г е л и к Г. Г. Теория мажорант и диаграмм Ньютона рядов Дирихле и ее приложения. Тезисы докладов Всесоюзной конференции по теории функций комплексного переменного. Харьков, 1971.

4. A r t e m i a d e s N i c o l a s. Sur les séries de Dirichlet a deux variables. Bull. sci. math., 77, mars-avril, 1953.

УДК 518:512.39

Ю.М.ЩЕРБИНА

ОДИН ІТЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ І ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ РІВНЯНЬ

Для розв'язування нелінійного алгебраїчного або трансцендентного рівняння

$$f(x)=0 \tag{1}$$

пропонується обчислювальний алгоритм

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{(1-\beta)f'(x_n)+\beta f'\left(x_n-\frac{1}{2\beta}\,\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}, \tag{2}$$

де β - дійсне число, $n=0,1,2,\ldots$

Т е о р е м а 1. Нехай виконуються умови:

1) на відрізку $R=\left\{x:|x-x_0|\leq\left(\frac{1}{1-h^2}+\frac{1}{2|\beta|}\right)\eta_0\right\}$

$$|f'(x)|\geq b,\qquad |f''(x)|\leq q,\qquad |f'''(x)|\leq k;$$

2) $h = l\eta_0 < 1$, де $\eta_0 = \dfrac{|f(x_0)|}{b}$,

$$l^2 = \frac{q^2}{4b^2} + \frac{k}{6b} + \frac{k}{8b|\beta|}.$$

Тоді рівняння (1) має на відрізку $R^* = \left\{ x : |x - x_0| \le \dfrac{\eta_0}{1-h^2} \right\}$ розв'язок x^*, до якого збігається послідовність наближень процесу (2), причому

$$|x^* - x_n| \le \frac{h^{3^n - 1}}{1 - h^2}\eta_0. \tag{3}$$

Д о в е д е н н я. Нехай ми вже визначили наближення $x_1, \ldots, x_{n-1}$ $(n \ge 2)$, причому

$$x_i \in R^*, \qquad x_i - \frac{1}{2\beta}\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \in R, \qquad 1 \le i \le n-1.$$

Розглянемо тотожність

$$f(x_n) = f(x_n) - f(x_{n-1}) -$$

$$- \left[(1-\beta) f'(x_{n-1}) + \beta f'\left(x_{n-1} - \frac{1}{2\beta}\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \right) \right] (x_n - x_{n-1}). \tag{4}$$

З (4), розкладаючи $f(x_n)$ в ряд Тейлора в околі x_{n-1} і використовуючи умови теореми, одержимо

$$|f(x_n)| \le \left(\frac{q^2}{4b} + \frac{k}{6} + \frac{k}{8|\beta|} \right) \eta_{n-1}^3, \tag{5}$$

звідки

$$|x_{n+1} - x_n| \le l^2 \eta_{n-1}^3 = \eta_n. \tag{6}$$

Послідовно використовуючи нерівність (6) і умови теореми, можемо записати

$$\eta_n \le h^{3^n - 1}\eta_0.$$

Нерівність

$$|x_0 - x_n| \le \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i \le \frac{\eta_0}{1-h^2}$$

показує, що x_n , а, отже, і вся послідовність $\{x_n\}$ належить $R^* \subset R$, а з нерівності

$$\left|x_0 - x_n + \frac{1}{2\beta}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right| \le |x_0 - x_n| + \frac{1}{2|\beta|}\eta_n \le \left(\frac{1}{1-h^2} + \frac{1}{2|\beta|}\right)\eta_0$$

випливає, що послідовність $\left\{x_n - \frac{1}{2\beta}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right\}$ належить R . Таким чином, ми маємо право використовувати умову I).

З оцінки

$$|x_{n+p} - x_n| \le \frac{h^{3^n-1}}{1-h^2}\eta_0 \qquad (7)$$

випливає, що послідовність $\{x_n\}$ збігається:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*.$$

Використовуючи (5), одержимо

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n)| = |f(x^*)| = 0,$$

тобто x^* - розв'язок рівняння (I). Очевидно, що $x^* \in R$. Із (7) при прямуванні до границі $(p \to \infty)$ одержимо (3).

Зауважимо, що β можна вибирати змінним на кожному кроці: $\beta = \beta_n$. Нас особливо цікавить випадок

$$\beta_0 = 1; \qquad \beta_n = \frac{f(x_n)}{2f'(x_n)(x_n - x_{n-1})}, \qquad n \ge 1, \qquad (8)$$

тому що схема (2) тоді набирає простого вигляду

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{(1-\beta_n)f'(x_n) + \beta_n f'(x_{n-1})}, \qquad x_{-1} = x_0 - \frac{1}{2}\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \qquad (9)$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots).$$

Т е о р е м а 2. Нехай виконуються умови:

1) на відрізку $R^* = \left\{ x : |x - x_0| \le \frac{1}{1-h^2} \eta_0 \right\}$

$$|f'(x)| \ge b, \quad |f''(x)| \le q, \quad |f'''(x)| \le k;$$

2) $$h = l\eta_0 < 1, \quad \text{де} \quad \eta_0 = \frac{|f(x_0)|}{b},$$

$$l^2 = \frac{q^2}{4b^2} + \frac{5}{12}\frac{k}{b}.$$

Тоді рівняння (1) має на відрізку R^* розв'язок x^*, до якого збігається послідовність наближень процесу (8)-(9), причому

$$|x^* - x_n| \le \frac{h^{D_n}}{1-h^2}\eta_0,$$

де $D_n = 2D_{n-1} + D_{n-2} + 2$, $\quad D_0 = 0, \quad D_{-1} = 0.$

Доведення аналогічне до попереднього.

Очевидно, що порядок збіжності процесу (2) дорівнює трьом. Для визначення порядку збіжності схеми (8)-(9) одержимо нерівність

$$|x_{n+1} - x_n| \le l^2 \eta_{n-1}^2 \eta_{n-2} = \eta_n, \qquad (n \ge 2),$$

з якої, аналогічно до [2], запишемо рівняння $\rho = 2 + \frac{1}{\rho}$, звідки $\rho = 1 + \sqrt{2}$, де ρ – порядок збіжності.

Індекс ефективності [1] для схеми (2) дорівнює $\sqrt[3]{3}$, а для схеми (8)-(9) – $\sqrt{1+\sqrt{2}}$. Тому що $\sqrt{1+\sqrt{2}} > \sqrt[3]{3}$, то друга модифікація краща за першу. Відзначимо, що схема (8)-(9) за ефективністю краща також методів Ньютона, дотичних гіпербол, Чебишева.

Література

1. Островский А. М. Решение уравнений и систем уравнений. ИЛ, М., 1963.

2. Schmidt J. W. Eine Übertragung der Regula Falsi auf Gleichungen in Banachräumen I. Zeitschr. angew. Math. und Mech., 43, 1963, № 1-2.

УДК 518:512.36

Г.Г.ЦЕГЕЛИК

ВИДІЛЕННЯ СМУГ, В ЯКИХ ПОЛІНОМИ І РЯДИ ДІРІХЛЕ НЕ ПЕРЕТВОРЮЮТЬСЯ В НУЛЬ

За допомогою параметрів, які введені в [1] для дослідження розміщення нулів алгебраїчних поліномів і рядів Лорана, встановлюються достатні умови існування смуг, в яких поліноми і ряди Діріхле не перетворюються в нуль, визначаються права і ліва границі нулів поліномів Діріхле, а також права границя нулів рядів Діріхле.

Розглянемо ряд Діріхле з абсцисою абсолютної збіжності A $(A < \infty)$

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu e^{-\lambda_\nu z}, \tag{1}$$

де $z = x + iy$, $A_0 \neq 0$, $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots$, $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$.

Нехай k $/k \geq 0/$ - деякий фіксований індекс і $\{\alpha_\nu\}$ $/\nu = 0,1,2,\ldots/$ - довільна послідовність додатних чисел (параметрів), яка задовольняє умову

$$\sum_{\nu \neq k} \alpha_\nu = \alpha_k . \tag{2}$$