Література

1. Островский А. М. Решение уравнений и систем уравнений. ИЛ, М., 1963.

2. Schmidt J. W. Eine Übertragung der Regula Falsi auf Gleichungen in Banachräumen I. Zeitschr. angew. Math. und Mech., 43, 1963, № 1-2.

УДК 518:512.36

Г.Г.ЦЕГЕЛИК

ВИДІЛЕННЯ СМУГ, В ЯКИХ ПОЛІНОМИ І РЯДИ ДІРІХЛЕ НЕ ПЕРЕТВОРЮЮТЬСЯ В НУЛЬ

За допомогою параметрів, які введені в [1] для дослідження розміщення нулів алгебраїчних поліномів і рядів Лорана, встановлюються достатні умови існування смуг, в яких поліноми і ряди Діріхле не перетворюються в нуль, визначаються права і ліва границі нулів поліномів Діріхле, а також права границя нулів рядів Діріхле.

Розглянемо ряд Діріхле з абсцисою абсолютної збіжності A $(A < \infty)$

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu e^{-\lambda_\nu z}, \tag{1}$$

де $z = x + iy$, $A_0 \neq 0$, $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots$, $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$.

Нехай k $/k \geq 0/$ – деякий фіксований індекс і $\{\alpha_\nu\}$ $/\nu = 0, 1, 2, \ldots/$ – довільна послідовність додатних чисел (параметрів), яка задовольняє умову

$$\sum_{\nu \neq k} \alpha_\nu = \alpha_k . \tag{2}$$

Припустимо

$$r_k = \max_{\nu<k} \left(\frac{a_\nu \alpha_k}{a_k \alpha_\nu}\right)^{\frac{1}{\lambda_k-\lambda_\nu}}, \qquad R_k = \inf_{\nu>k} \left(\frac{a_k \alpha_\nu}{a_\nu \alpha_k}\right)^{\frac{1}{\lambda_\nu-\lambda_k}}, \tag{3}$$

де $a_\nu = |A_\nu|$.

Т е о р е м а I. Якщо при $k>0$ існує такий набір параметрів $\{\alpha_\nu\}$, який задовольняє умову (2), що $R_k > r_k$, то ряд Дірихле (I) не перетворюється в нуль у смузі

$$-\ln R_k \le x \le -\ln r_k .$$

Д о в е д е н н я. Із (3) при $-\ln R_k = \rho_2$, $-\ln r_k = \rho_1$ одержуємо

$$a_\nu e^{-\rho_1(\lambda_\nu-\lambda_k)} \le \frac{a_k}{\alpha_k}\alpha_\nu \quad (\nu<k),$$

$$a_\nu e^{-\rho_2(\lambda_\nu-\lambda_k)} \le \frac{a_k}{\alpha_k}\alpha_\nu \quad (\nu>k).$$

Використовуючи умову (2), з останніх нерівностей випливає, що

$$\sum_{\nu<k} a_\nu e^{-\rho_1(\lambda_\nu-\lambda_k)} + \sum_{\nu>k} a_\nu e^{-\rho_2(\lambda_\nu-\lambda_k)} \le a_k .$$

Легко бачити, що для будь-якого x_0 $/\rho_2 \le x_0 \le \rho_1/$ при $R_k > r_k$ виконується умова

$$\sum_{\nu\ne k} a_\nu e^{-x_0(\lambda_\nu-\lambda_k)} < a_k . \tag{4}$$

Покажемо, що ряд Дірихле (I) не перетворюється в нуль у смузі $-\ln R_k \le x \le -\ln r_k$. Дійсно, припустимо протилежне, що існує така точка $z_0 = x_0 + i y_0$, для якої $\rho_2 \le x_0 \le \rho_1$ і $f(z_0) = 0$. Тоді

$$-A_k e^{-\lambda_k z_0} = \sum_{\nu\ne k} A_\nu e^{-\lambda_\nu z_0}$$

або

$$a_k \le \sum_{\nu \ne k} a_\nu e^{-x_0(\lambda_\nu - \lambda_k)},$$

що суперечить (4). Виходить, зроблене припущення невірне. Теорема доведена.

Т е о р е м а 2. Якщо $k=0$, то при будь-якому наборі параметрів $\{\alpha_\nu\}$, який задовольняє умову (2), всі нулі ряду Діріхле (1) лежать у півплощині

$$x \le -\ln R_0 .$$

Розглянемо тепер поліном Діріхле

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu e^{-\lambda_\nu z}. \tag{5}$$

Для полінома Діріхле (5) теореми 1,2 залишаються справедливими, тільки параметри досить брати для $\nu = 0,1,2,\ldots,n$. Крім того, при $k=n$ для поліномів Діріхле має місце теорема 3.

Т е о р е м а 3. Якщо $k=n$, то при будь-якому наборі параметрів $\{\alpha_\nu\}$ $/\nu=0,1,2,\ldots,n/$, який задовольняє умову (2), всі нулі полінома Діріхле (5) лежать у півплощині

$$x \ge -\ln r_n .$$

П р и к л а д.

$$f(z)=\left(\frac{\sqrt{57}}{8}-i\right)-8ie^{-\frac{1}{2}z}+\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}z}+(1-i\sqrt{3})e^{-\pi z}.$$

Тут

$$a_0=\frac{11}{8},\quad a_1=8,\quad a_2=\frac{1}{2},\quad a_3=2,\quad \lambda_0=0,\quad \lambda_1=\frac{1}{2},\quad \lambda_2=\frac{3}{2},\quad \lambda_3=\pi.$$

1. Візьмемо $k=1$ і $\alpha_0=\frac{11}{16}$, $\alpha_1=1$, $\alpha_2=\frac{1}{16}$, $\alpha_3=\frac{4}{16}$.

Тоді

$$r_1=\left(\frac{a_0\,\alpha_1}{a_1\,\alpha_0}\right)^{\frac{1}{\lambda_1-\lambda_0}}=\frac{1}{4},$$

$$R_1=\min\left|\left(\frac{a_1\,\alpha_2}{a_2\,\alpha_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}},\qquad \left(\frac{a_1\,\alpha_3}{a_3\,\alpha_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_3-\lambda_1}}\right|=1$$

і $f(z)$ не перетворюється в нуль у смузі $0 \le x \le \ln 4$.

2. Нехай $k=0$ і $\alpha_0=1$, $\alpha_1=\frac{10}{11}$, $\alpha_2=\alpha_3=\frac{1}{22}$. Тоді

$$R_0 = \min\left[\left(\frac{a_0\ \alpha_1}{a_1\alpha_0}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}}, \left(\frac{a_0\ \alpha_2}{a_2\ \alpha_0}\right)^{\frac{1}{\lambda_2}}, \left(\frac{a_0\ \alpha_3}{a_3\ \alpha_0}\right)^{\frac{1}{\lambda_3}}\right] = \left(\frac{5}{32}\right)^2$$

і $f(z)$ не перетворюється в нуль у півплощині $x > 2\ln 6{,}4$.

3. Приймемо, що $k=3$ і $\alpha_0=\frac{1}{12}$, $\alpha_1=\frac{10}{12}$, $\alpha_2=\frac{1}{12}$, $\alpha_3=1$.

Тоді

$$r_3 = \max\left[\left(\frac{a_0\ \alpha_3}{a_3\alpha_0}\right)^{\frac{1}{\lambda_3-\lambda_0}}, \left(\frac{a_1\ \alpha_3}{a_3\ \alpha_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_3-\lambda_1}}, \left(\frac{a_2\ \alpha_3}{a_3\ \alpha_2}\right)^{\frac{1}{\lambda_3-\lambda_2}}\right] = \sqrt[\pi]{5{,}5}$$

і $f(z)$ не перетворюється в нуль у півплощині $x < -\frac{1}{\pi}\ln 5{,}5$.

Отже, всі нулі поліному Діріхле $f(z)$ лежать в двох смугах

$-\frac{1}{\pi}\ln 5{,}5 \le x < 0$, $\ln 4 < x \le 2\ln 6{,}4$.

Література

1. Цегелик Г. Г. Параметрическая локализация по модулям нулей полиномов и рядов Лорана. Изв. вузов, Математика, 12, 1967.

УДК 519.21

І.Д.КВІТ

ЗОБРАЖЕННЯ ВИПАДКОВОГО ВЕКТОРА

Вступ. Розглянемо парновимірний евклідів простір R^{2n}, $(n=1,2,\dots)$, точками якого є упорядковані n пар дійсних чисел $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$; $-\infty < x_j < +\infty$, $-\infty < y_j < +\infty$, ($j = 1,2,\dots, n$). У просторі R^{2n} введемо комплексну структуру, кладучи $z_j = x_j + iy_j \equiv Re\, z_j + i\, Jm\, z_j$; $i = \sqrt{-1}$. Одержимо n-вимірний комплексний простір C^n точок $(z_1,\dots,z_n)=$