і $f(z)$ не перетворюється в нуль у смузі $0 \le x \le \ln 4$.

2. Нехай $k=0$ і $\alpha_0=1$, $\alpha_1=\frac{10}{11}$, $\alpha_2=\alpha_3=\frac{1}{22}$. Тоді

$$R_0=\min\left|\left(\frac{a_0\ \alpha_1}{a_1\alpha_0}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}},\quad \left(\frac{a_0\ \alpha_2}{a_2\ \alpha_0}\right)^{\frac{1}{\lambda_2}},\quad \left(\frac{a_0\ \alpha_3}{a_3\ \alpha_0}\right)^{\frac{1}{\lambda_3}}\right|=\left(\frac{5}{32}\right)^2$$

і $f(z)$ не перетворюється в нуль у півплощині $x > 2\ln 6,4$.

3. Приймемо, що $k=3$ і $\alpha_0=\frac{1}{12}$, $\alpha_1=\frac{10}{12}$, $\alpha_2=\frac{1}{12}$, $\alpha_3=1$.

Тоді

$$r_3=\max\left[\left(\frac{a_0\ \alpha_3}{a_3\alpha_0}\right)^{\frac{1}{\lambda_3-\lambda_0}},\quad \left(\frac{a_1\ \alpha_3}{a_3\ \alpha_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_3-\lambda_1}},\quad \left(\frac{a_2\ \alpha_3}{a_3\ \alpha_2}\right)^{\frac{1}{\lambda_3-\lambda_2}}\right]=\sqrt[\pi]{5,5}$$

і $f(z)$ не перетворюється в нуль у півплощині $x < -\frac{1}{\pi}\ln 5,5$.

Отже, всі нулі поліному Діріхле $f(z)$ лежать в двох смугах

$$-\frac{1}{\pi}\ln 5,5 \le x < 0, \quad \ln 4 < x \le 2\ln 6,4.$$

Л і т е р а т у р а

1. Ц е г е л и к Г. Г. Параметрическая локализация по модулям нулей полиномов и рядов Лорана. Изв. вузов, Математика, 12, 1967.

УДК 519.21

І.Д.КВІТ

ЗОБРАЖЕННЯ ВИПАДКОВОГО ВЕКТОРА

В с т у п. Розглянемо парновимірний евклідів простір R^{2n}, $(n=1,2,\dots)$, точками якого є упорядковані n пар дійсних чисел $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$; $-\infty < x_j < +\infty$, $-\infty < y_j < +\infty$, (j = 1,2,..., n). У просторі R^{2n} введемо комплексну структуру, кладучи $z_j = x_j + iy_j \equiv Re\, z_j + i\, Jm\, z_j$; $i=\sqrt{-1}$. Одержимо n -вимірний комплексний простір C^n точок $(z_1,\dots,z_n)=$

$= (x_1, \dots, x_n) + i(y_1, \dots, y_n) \equiv (Re z_1, \dots, Re z_n) + i(Jm z_1, \dots, Jm z_n)$.
Зокрема, при $n = 1$ дістанемо комплексну площину $C' = C$. Простір C^n при $n \geqslant 2$, можна вважати декартовим добутком n комплексних площин. Точки n-вимірного комплексного простору C^n збігаються з точками $2n$-вимірного дійсного евклідового простору R^{2n}. При $y_j = 0$, $(j = 1, 2, \dots, n)$, точки C^n та R^{2n} утворюють n-вимірний дійсний евклідів простір E^n точок $(x_1, \dots, x_n)$; $-\infty < x_j < +\infty$, $(j = 1, 2, \dots, n)$.

Множину точок $\{x_j \geqslant 0, \ -\infty < y_j < +\infty; \ j = 1, 2, \dots, n\}$ в просторі R^{2n} позначимо через R^{2n}_{+}, а в просторі C^n – через C^n_{+}; сукупність точок $\{x_j > 0, \ -\infty < y_j < +\infty; \ j = 1, 2, \dots, n\}$ позначимо через R^{2n}_{+0} або C^n_{+0}. Аналогічно $\{x_j \geqslant 0, \ y_j = 0; \ j = 1, 2, \dots, n\}$ в просторі R^{2n}, або в просторі C^n, або, що теж саме, $\{x_j \geqslant 0; \ j = 1, 2, \dots, n\}$ в просторі E^n, назвемо першим n-вимірним октантом і позначимо через E^n_{+}; $\{x_j > 0; \ j = 1, 2, \dots, n\}$ позначимо через E^n_{+0}. Перший гіпероктант E^n_{+} можна вважати декартовим добутком n півосей невід'ємних чисел, $E^1_{+} = [0, \infty)$, а E^n_{+0} – добутком $E^1_{+0} = (0, \infty)$.

Нехай система n випадкових змінних $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ набирає значення з першого n-вимірного октанта E^n_{+}. Тоді називаємо її n-вимірною невід'ємнозначною випадковою змінною або n-вимірним невід'ємнозначним випадковим вектором. Припускаємо, що невід'ємнозначний випадковий вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ буде абсолютно неперервним з густиною

$$p(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} \equiv 0, \text{ якщо хоча б одне } t_j < 0, \\ \geqslant 0, \text{ якщо всі } t_j > 0, \end{cases} \quad \int_0^\infty \dots \int_0^\infty p(t_1, \dots, t_n) dt_n \dots dt_1 = 1. \tag{1}$$

Лапласівське інтегральне перетворення густини (1) назвемо зображенням випадкового вектора ξ і позначимо його через $\varphi(z_1, \dots, z_n)$:

$$\varphi(z_1, \dots, z_n) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-(z_1 t_1 + \dots + z_n t_n)} p(t_1, \dots, t_n) dt_n \dots dt_1 . \tag{2}$$

Інтеграл (2) розуміємо в сенсі Лебега.

Тут йдеться про деякі властивості зображення (2). Основні з них буде проілюстровано для двовимірної гама-густини в наступній статті.

Властивості зображення. З (I) і (2) випливає

$$\varphi(0,\ldots,0)=1. \tag{3}$$

Звідси також дістаємо

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n)=\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty e^{-(x_1t_1+\ldots+x_nt_n)}p(t_1,\ldots,t_n)dt_n\ldots dt_1,\ (x_1,\ldots,x_n)\in E_+^n. \tag{4}$$

Зображення (2) абсолютно збігається принаймні в C_+^n. Дійсно, з нерівностей для інтегралів та з (2), (3) і (4) одержуємо

$$|\varphi(z_1,\ldots,z_n)|\le\varphi(x_1,\ldots,x_n)\le\varphi(0,\ldots,0)=1. \tag{5}$$

Для кожного j, $(j=1,2,\ldots,n)$, та $(z_1,\ldots,z_n)\in C_+^n$, маємо

$$\lim_{|y_j|\to\infty}\varphi(z_1,\ldots,z_n)=0. \tag{6}$$

Властивість (6) випливає з (5) обмеженості зображення та з теореми Рімана-Лебега для одновимірного випадку [3]. Кожний вираз зліва в (6) при $|y_j|\to\infty$ має порядок $O\left(\frac{1}{|y_j|}\right)$.

З виразу

$$\varphi(z_1,\ldots,z_n)=\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty e^{-(x_1t_1+\ldots+x_nt_n)}p(t_1,\ldots,t_n)e^{-i(y_1t_1+\ldots+y_nt_n)}dt_n\ldots dt_1 \tag{7}$$

випливає, що для кожного j, $(j=1,2,\ldots,n)$, рівномірно відносно сукупності y_j та $(z_1,\ldots,z_n)\in C_+^n$, маємо

$$\lim_{x_j\to\infty}\varphi(z_1,\ldots,z_n)=0. \tag{8}$$

Отже, з (6) і (8) виходить, що для кожного j, $(j=1,2,\ldots,n)$, та $(z_1,\ldots,z_n)\in C_+^n$, маємо

$$\lim_{z_j\to\infty}\varphi(z_1,\ldots,z_n)=0. \tag{9}$$

Якщо (2) записати у вигляді

$$\varphi(z_1,\dots,z_n) = u(x_1,y_1;\dots;x_n,y_n) + iv(x_1,y_1;\dots;x_n,y_n) \equiv Re\,\varphi + i\,Jm\,\varphi, \quad (10)$$

де

$$u = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-(x_1t_1+\dots+x_nt_n)} \cos(y_1t_1+\dots+y_nt_n)\rho(t_1,\dots,t_n)dt_n\dots dt_1\,, \quad (11)$$

і

$$v = -\int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-(x_1t_1+\dots+x_nt_n)} \sin(y_1t_1+\dots+y_nt_n)\rho(t_1,\dots,t_n)dt_n\dots dt_1\,, \quad (12)$$

то відразу видно, що при кожному $(x_1,\dots,x_n) \in E^n_+$ дійсна частина зображення відносно сукупності y_j є парною функцією

$$u(x_1,-y_1;\dots;x_n,-y_n) = u(x_1,y_1;\dots;x_n,y_n), \quad (13)$$

а уявна частина - непарною функцією,

$$v(x_1,-y_1;\dots;x_n,-y_n) = -v(x_1,y_1;\dots;x_n,y_n), \quad (14)$$

причому

$$u(x_1,0;\dots;x_n,0) = \varphi(x_1,\dots x_n); \quad v(x_1,0;\dots;x_n,0) \equiv 0. \quad (15)$$

З (10), (13) і (14) дістаємо

$$\varphi(\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_n) = \overline{\varphi(z_1,\dots,z_n)}\,, \quad (16)$$

де рисочка зверху означає комплексну спряженість.

Зображення (2) є аналітичною функцією принаймні в C^n_{+0} . Дійсно, як видно з (11) і (12), функції u та v як функції від $2n$ дійсних змінних $(x_1,y_1;\dots;x_n,y_n)$ однораэово диференційовні. Отже, існують для (10) формальні похідні

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z_j} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y_j}\right), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial \bar{z}_j} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} + i\frac{\partial\varphi}{\partial y_j}\right). \quad (17)$$

Легко перевірити, що в нашому випадку

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}_j}=0, \quad (j=1,2,\dots,n), \qquad (z_1,\dots,z_n)\in C^n_{+0}. \tag{18}$$

Рівняння (18) узагальнюють рівняння Коші-Рімана для випадку функцій багатьох комплексних змінних. Таким чином, зображення (2) - аналітична функція в C^n_{+0}. Умови аналітичності (18) містять $2n$ дійсних рівнянь відносно двох дійсних функцій $(u=Re\varphi,\ v=Jm\varphi)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}-\frac{\partial v}{\partial y_j}=0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y_j}+\frac{\partial v}{\partial x_j}=0, \quad (j=1,2,\dots,n),\ (x_1,y_1,\dots,x_n y_n)\in R^{2n}_{+0}. \tag{19}$$

При $n=2,3,\dots$ система (19) переозначена. При кожному j, $(j=1,2,\dots,n)$ система (19) є системою рівнянь Коші-Рімана для окремої змінної z_j. За теоремою Гартогса [5], якщо однозначна функція комплексних змінних в якійсь області аналітична відносно кожної окремої комплексної змінної z_j, то вона аналітична в цій області відносно сукупності всіх комплексних змінних z_j.

Відзначимо, що коли довільна функція $\rho(t_1,\dots,t_n)$ задовольняє умову

$$|\rho(t_1,\dots,t_n)|\le Me^{\sum_{j=1}^{n}x_j^{(0)}t_j}, \qquad (M>0,\ x_j^{(0)}>0;\ \ t_j>0;\ \ j=1,2,\dots,n), \tag{20}$$

де M та $x_j^{(0)}$ - сталі, то (2) існує та є аналітичною функцією в області $\left\{Re\,z_1>x_1^{(0)},\dots,\ Re\,z_n>x_n^{(0)}\right\}$.

З (4) видно, що $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ з ростом кожного x_j від 0 до ∞, монотонно спадає до 0. Оскільки $\varphi(0,\dots,0)=1$, то $\varphi(x_1,\dots,x_n)$, $(x_1,\dots,x_n)\in E^n_+$, є хвостом деякої функції розподілу з густиною q. Докладніше,

$$\begin{cases}\varphi(x_1,\dots,x_n)=\int_{x_1}^{\infty}\dots\int_{x_n}^{\infty}q(t_1,\dots,t_n)\,dt_n\dots dt_1, \\ q(x_1,\dots,x_n)=\int_0^{\infty}\dots\int_0^{\infty}e^{-(x_1t_1+\dots+x_nt_n)}t_1\dots t_n\,\rho(t_1,\dots,t_n)\,dt_n\dots dt_1.\end{cases} \tag{21}$$

Співвідношення (21) показує, що кожному абсолютно неперервному невід'ємнозначному випадковому векторові з густиною (1) і зображенням (2) ставиться у відповідність інший невід'ємнозначний випадковий вектор з густиною q, (21).

Кажуть, що функція $f(x_1,\dots,x_n)$, $(x_1,\dots,x_n)\in E^n_{+0}$, цілком монотонна, якщо вона має похідні всіх порядків та

$$(-1)^{k_1+\dots+k_n}\frac{\partial^{k_1+\dots+k_n}f(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}}\geq 0,\quad (x_1,\dots,x_n)\in E^n_{+0},\ k_1\geq 0,\dots,k_n\geq 0. \quad (22)$$

Зображення (2), як аналітична функція в C^n_{+0}, має там похідні всіх порядків, причому в E^n_{+0} для $k_1\geq 0,\dots,$ $k_n\geq 0$, дістаємо

$$(-1)^{k_1+\dots+k_n}\frac{\partial^{k_1+\dots+k_n}\varphi(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}}=\int_0^\infty\dots\int_0^\infty e^{-(x_1t_1+\dots+x_nt_n)}t_1^{k_1}\dots t_n^{k_n}p(t_1,\dots,t_n)dt_n\dots dt_1. \quad (23)$$

Очевидно, що правий бік (23) невід'ємний в E^n_{+0}. Отже, зображення (2) цілком монотонна функція в області E^n_{+0}.

Зауважимо, що коли випадковий вектор ξ з густиною (1) має початковий момент ($k_1-1,\dots,k_n-1$)-го порядку, то поділений на цей момент вираз (23) буде густиною залежною від параметрів $(k_1,\dots,k_n)$. При $k_1=\dots=k_n=1$, (23) дає q, (21).

Універсальним способом знаходження розв'язку інтегрального рівняння (2), коли $\varphi(z_1,\dots,z_n)$ - відома, а $p(t_1,\dots,t_n)$ - шукана функція, є зворотна формула: у кожній точці $(t_1,\dots,t_n)\in E^n_{+0}$ неперервності густини маємо

$$p(t_1,\dots,t_n)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty}\dots\int_{c_n-i\infty}^{c_n+i\infty}e^{z_1t_1+\dots+z_nt_n}\varphi(z_1,\dots,z_n)dz_n\dots dz_1, \quad (24)$$

де $c_j>0$, $(j=1,2,\dots,n)$, c_j - довільна стала, z_j - біжуча точка на шляху інтегрування прямій $Re\,z_j=c_j$ в z_j - площині; інтеграл (24) не залежить від вибору сталої c_j і його розуміємо в сенсі головного значення Коші.

Виведення формули (24) проводиться повторним застосуванням виведення в одновимірному випадку [1]. При цьому використовується формула Коші [2]

$$\varphi(z_1,\dots,z_n)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty}\dots\int\limits_{c_n-i\infty}^{c_n+i\infty}\frac{\varphi(\zeta_1,\dots,\zeta_n)\,d\zeta_n\dots d\zeta_1}{(\zeta_n-z_n)\dots(\zeta_1-z_1)},\quad (z_1,\dots,z_n)\in C^n_{+0}\,. \tag{25}$$

Інтеграли (24) при відповідних умовах можуть братися за допомогою теорії лишків.

Якщо компоненти невід'ємнозначного випадкового вектора $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ незалежні, та густина j-ї компоненти дорівнює $p_j(t_j)$, а зображення – $\varphi_j(z_j)$, то густина (1) дорівнює $\prod_{j=1}^{n} p_j(t_j)$, зображення (2) – $\prod_{j=1}^{n}\varphi_j(z_j)$, а зворотна формула (24) набуває вигляду

$$\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_j-i\infty}^{c_j+i\infty}e^{\zeta_j t_j}\varphi_j(\zeta_j)\,d\zeta_j\,,\quad c_j>0,$$

і багатовимірний випадок не містить ніяких додаткових труднощів порівняно з одновимірним.

Література

1. Квіт І. Д. Випадкова змінна та випадковий процес. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1968.
2. Мальгранж Б. Лекции по теории функций нескольких комплексных переменных. М., 1969.
3. Титчмарш Е. Теория функций. М.–Л., 1951.
4. Burr I. W. Ann. Math. Statist. 13, 1942, 215–232.
5. Hartogs F. Math. Ann. 62, 1906, 1–88.