УДК 517.94

В.Г.КОСТЕНКО, О.О.ВЕСЕЛОВСЬКА

ЗАГАЛЬНЕ ЛІНІЙНЕ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ДРУГОГО ПОРЯДКУ НА ПЛОЩИНІ, ІНВАРІАНТНЕ ВІДНОСНО ОДНІЄЇ ЗАДАНОЇ ГРУПИ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Розглянемо загальне лінійне диференціальне рівняння в частинних похідних 2-го порядку

$$L \equiv A(x,y)r + 2B(x,y)s + C(x,y)t + K(x,y)p + E(x,y)q + Q(x,y)u - f(x,y) = 0^{*)} \quad (1)$$

і виділимо з нього ті рівняння, які залишаються інваріантними відносно групи перетворень з інфінітезімальним оператором

$$Uf = -my\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{x}{m}\frac{\partial f}{\partial y}\ . \quad (2)$$

Для цього використаємо відому ознаку Лі [2], згідно з якою рівняння (1) допускає групу перетворень (2) тоді і тільки тоді, коли двічі продовжений оператор

$$U''f = -my\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{x}{m}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{q}{m}\frac{\partial f}{\partial p} + mp\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{2s}{m}\frac{\partial f}{\partial r} + \left(mr - \frac{t}{m}\right)\frac{\partial f}{\partial s} + 2ms\frac{\partial f}{\partial t}, \quad (3)$$

застосований до лівої частини рівняння (1), обертається в тотожній нуль на всіх розв'язках рівняння (1), тобто коли одночасно задовольняються рівняння

$$U''L = -my\left(\frac{\partial A}{\partial x}r + 2\frac{\partial B}{\partial x}s + \frac{\partial C}{\partial x}t + \frac{\partial K}{\partial x}p + \frac{\partial E}{\partial x}q + \frac{\partial Q}{\partial x}u - \frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{x}{m}\left(\frac{\partial A}{\partial y}r + 2\frac{\partial B}{\partial y}s + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial C}{\partial y}t + \frac{\partial K}{\partial y}p + \frac{\partial E}{\partial y}q + \frac{\partial Q}{\partial y}u - \frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{q}{m}K + mEp - \frac{2}{m}As + 2B\left(mr - \frac{t}{m}\right) + 2mCs = 0, \quad (4)$$
$$L = 0.$$

---

*) Тут p, q, r, s, t – позначення Монжа частинних похідних 1-го і 2-го порядків від функції $u(x,y)$.

Якщо з (I) визначити

$$r = \frac{1}{A}\left(f - 2Bs - Ct - Kp - Eq - Qu\right)$$

і підставити в (4), то одержимо тотожність по всіх змінних x, y, u, p, q, s, t:

$$\begin{aligned} U''L = &- my\left[\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x}\left(f - 2Bs - Ct - Kp - Eq - Qu\right) + 2\frac{\partial B}{\partial x}s + \frac{\partial C}{\partial x}t + \right. \\ &\left. + \frac{\partial K}{\partial x}p + \frac{\partial E}{\partial x}q + \frac{\partial Q}{\partial x}u - \frac{\partial f}{\partial x}\right] + \frac{x}{m}\left[\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial y}\left(f - 2Bs - Ct - Kp - Eq - Qu\right) + \right. \\ &\left. + 2\frac{\partial B}{\partial y}s + \frac{\partial C}{\partial y}t + \frac{\partial K}{\partial y}p + \frac{\partial E}{\partial y}q + \frac{\partial Q}{\partial y}u - \frac{\partial f}{\partial y}\right] - \frac{K}{m}q + mEp - 2\frac{A}{m}s + \\ &+ 2mB\left[\frac{1}{A}\left(f - 2Bs - Ct - Kp - Eq - Qu\right)\right] - 2\frac{B}{m}t + 2mCs \equiv 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Прирівнюючи в тотожності (5) до нуля коефіцієнти при різних степенях похідних p, q, s, t, одержимо таку систему лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних першого порядку:

$$y\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \frac{x}{m^2}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial y}\right) - 2\frac{B}{A} = 0, \tag{6}$$

$$y\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial x}\right) - \frac{x}{m^2}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial y}\right) - 2\frac{B}{A} = 0, \tag{7}$$

$$y\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial x}\right) - \frac{x}{m^2}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial y}\right) - 2\frac{B}{A} + \frac{E}{K} = 0, \tag{8}$$

$$y\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial x}\right) - \frac{x}{m^2}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial y}\right) - 2\frac{B}{A} - \frac{1}{m^2}\frac{K}{E} = 0, \tag{9}$$

$$y\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial x}\right) - \frac{x}{m^2}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial y}\right) - 2\frac{B}{A} - \frac{1}{m^2}\frac{A}{B} + \frac{C}{B} = 0; \tag{10}$$

$$y\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial x}\right) - \frac{x}{m^2}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial y}\right) - 2\frac{B}{A} - \frac{2}{m^2}\frac{B}{C} = 0. \tag{11}$$

Знайдемо загальний розв'язок останньої системи. Для цього спочатку множимо рівняння (10) цієї системи на $\frac{B}{A}$, а рівняння (11) на $\frac{C}{A}$, що дасть

$$y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{B}{A}\right) - \frac{x}{m^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{B}{A}\right) + \frac{1}{m^2} + 2\left(\frac{B}{A}\right)^2 - \frac{C}{A} = 0, \tag{10'}$$

$$y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{C}{A}\right) - \frac{x}{m^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{C}{A}\right) - 2\frac{B}{A}\cdot\frac{C}{A} + \frac{2}{m^2}\frac{B}{A} = 0. \tag{11'}$$

Виключаючи $\frac{C}{A}$ з рівнянь (10′) і (11′), для $\frac{B}{A}=z$ маємо параболічне рівняння другого порядку

$$y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{xy}{m^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{x^2\partial^2 z}{m^4\partial y^2}+\left(6yz-\frac{x}{m^2}\right)\frac{\partial z}{\partial x}-\left(6\frac{xz}{m^2}+\frac{y}{m^2}\right)\frac{\partial z}{\partial y}+4\frac{z}{m^2}+4z^3=0, \quad (12)$$

яке в змінних $\xi=m^2y^2\ x^2,\qquad \eta=m\arcsin\frac{x}{m^2y^2+x^2}$

має канонічну форму

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}+6z\frac{\partial z}{\partial\eta}+\frac{4}{m^2}z\left(1+m^2z^2\right)=0. \quad (13)$$

Розглядаючи (13) як звичайне рівняння другого порядку з параметром ξ і розв'язуючи його груповим методом, знаходимо

$$z=\frac{B}{A}=\frac{m^2y^2-x^2+2mxy\varphi_1}{(m^2y^2+x^2)\varphi_2+2m^2xy-m(m^2y^2-x^2)\varphi_1}, \quad (14)$$

а $\frac{C}{A}$ визначимо з (10)

$$\frac{C}{A}=\frac{(m^2y^2+x^2)\varphi_2-2m^2xy+m(m^2y^2-x^2)\varphi_1}{m^2\left[(m^2y^2+x^2)\varphi_2+2m^2xy-m(m^2y^2-x^2)\varphi_1\right]}. \quad (15)$$

Потім, віднявши від рівняння (9) системи (6)-(11) рівняння (8) і одержане помноживши на $\frac{K}{E}$, дістаємо

$$y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{K}{E}\right)-\frac{x}{m^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{K}{E}\right)-\frac{1}{m^2}\left(\frac{K}{E}\right)^2-1=0,$$

звідки

$$\frac{K}{E}=m\frac{x-my\varphi_3}{my+x\varphi_3}. \quad (16)$$

Аналогічно знаходимо

$$\frac{Q}{E}=\frac{\sqrt{m^2y^2+x^2}\,\varphi_4}{my+x\varphi_3} \quad (17)$$

і

$$\frac{H}{E}=\frac{\sqrt{m^2y^2+x^2}\,\varphi_5}{my+x\varphi_3}. \quad (18)$$

Рівняння (9), помножене на $\frac{1}{m^2}\frac{A}{E}$, додамо до рівняння (11), помноженого на $\frac{C}{E}$. Тоді маємо

$$y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{m^2}\frac{A}{E}+\frac{C}{E}\right)-\frac{x}{m^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{m^2}\frac{A}{E}+\frac{C}{E}\right)-\frac{1}{m^2}\frac{K}{E}\left(\frac{1}{m^2}\frac{A}{E}+\frac{C}{E}\right)=0,$$

звідки

$$\frac{1}{m^2}\frac{A}{E}+\frac{C}{E}=\frac{\sqrt{m^2y^2+x^2}\,\varphi_6}{my+x\varphi_3}. \tag{19}$$

Враховуючи (14)-(19), знаходимо першу сукупність лінійних рівнянь у частинних похідних другого порядку

$$\begin{aligned}&\left[(m^2y^2+x^2)\varphi_2+2m^2xy-m(m^2y^2-x^2)\varphi_1\right]r+2\left[(m^2y^2-x^2)+\right.\\&\left.+2mxy\varphi_1\right]s+\frac{1}{m^2}\left[(m^2y^2+x^2)\varphi_2-2m^2xy+m(m^2y^2-x^2)\varphi_1\right]t+\\&+\frac{1}{m^2\varphi_6}\left[2(x-my\varphi_3)\sqrt{m^2y^2+x^2}\,\varphi_2\right]p+\frac{1}{m^2\varphi_6}\left[2(my+x\varphi_3)\sqrt{m^2y^2+x^2}\,\varphi_2\right]q+\\&+\frac{2}{m^2\varphi_6}(m^2y^2+x^2)\varphi_2\varphi_4u-\frac{2}{m^2\varphi_6}(m^2y^2+x^2)\varphi_2\varphi_5=0,\end{aligned}\tag{20}$$

де $\varphi_1, \ldots, \varphi_6$ – довільні функції від $m^2y^2+x^2$, інваріантних відносно групи перетворень з інфінітезімальним оператором

$$Uf=-my\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{x}{m}\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{2}$$

Але серед рівнянь (1), інваріантних відносно групи перетворень з оператором (2), можуть бути і такі, ліві частини яких є диференціальними інваріантами другого порядку, тобто для яких, згідно з Лі [2], повинно бути $U''L=0$.

Звідси

$$\begin{aligned}&y\frac{\partial A}{\partial x}-\frac{x}{m^2}\frac{\partial A}{\partial y}-2B=0, &&y\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{x}{m^2}\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{1}{m^2}A-C=0,\\&y\frac{\partial C}{\partial x}-\frac{x}{m^2}\frac{\partial C}{\partial y}+\frac{2}{m^2}B=0, &&y\frac{\partial K}{\partial x}-\frac{x}{m^2}\frac{\partial K}{\partial y}-E=0,\\&y\frac{\partial E}{\partial x}-\frac{x}{m^2}\frac{\partial E}{\partial y}-\frac{K}{m^2}=0, &&y\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{x}{m^2}\frac{\partial Q}{\partial y}=0,\\&&&y\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{x}{m^2}\frac{\partial f}{\partial y}=0.\end{aligned}\tag{21}$$

Міркуючи, подібно до попереднього, знаходимо загальний розв'язок системи (2І), а тим самим і другу сукупність лінійних рівнянь у частинних похідних другого порядку, інваріантних відносно групи перетворень з оператором (2)

$$\left\{\frac{m^2}{2}\psi_3 - \frac{m\left[(m^2y^2-x^2)\psi_1 - 2mxy\psi_2\right]}{m^2y^2+x^2}\right\} r + 2\,\frac{2mxy\psi_1 + (m^2y^2-x^2)\psi_2}{m^2y^2+x^2}\, s +$$
$$+\left\{\frac{1}{2}\psi_3 + \frac{\left[(m^2y^2-x^2)\psi_1 - 2mxy\psi_2\right]}{m(m^2y^2+x^2)}\right\} t + \frac{my\psi_4 + x\psi_5}{\sqrt{m^2y^2+x^2}}\, p + \tag{22}$$
$$+\frac{my\psi_5 - x\psi_4}{m\sqrt{m^2y^2+x^2}}\, q + \psi_6 u - \psi_7 = 0,$$

де $\psi_1, \ldots, \psi_7$ – довільні функції від $m^2y^2 + x^2$. Частинним випадком рівняння (22) при $m = 1$ і $\psi_1=\psi_2=\psi_4=\psi_5=\psi_6=\psi_7=0$ є рівняння Лапласа, інваріантне відносно групи обертання.

Таким чином, із рівнянь (І) виділено сукупність рівнянь (20), (22), кожне з яких допускає групу перетворень з інфінітезимальним оператором (2). Цей оператор залишає інваріантними еліптичні області з осями a і b якщо $\frac{b}{a}=m$. Для одержаних сукупностей лінійних рівнянь у частинних похідних (20), (22) в еліптичних областях (еліпс, еліптичне кільце, зовнішність еліпса) можна досліджувати граничні задачі груповим методом.

Література

1. Гюнтер Н. М. Интегрирование уравнений І-го порядка в частных производных. ГТТИЛ, 1934.

2. Lie S. Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Leipzig, 1891.