УДК 513.016.4:513.734/.738

С.В.ДЕНИСКО

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ СІТОК ТІССО

Нехай S - поверхня тривимірного евклідового простору, до кожної точки якої приєднано репер $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ з сталою метрикою так, що вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ дотикаються поверхні. А S' - поверхня, на яку поверхня S може відображатись так, що для будь-якої пари відповідних точок M, M' точка M' відносно репера $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ у точці M має одні і ті ж координати. Для зручності це відображення називатимемо відображенням $\sum$.

Т е о р е м а. Для того, щоб сітка Тіссо відображення $\sum$ на поверхні S не залежала від вибору поверхні S', необхідно і достатньо, щоб сітка, утворена векторними лініями полів $\bar{a}$, $\bar{b}$, була геодезичною. При цьому на поверхні S, відмінної від площини, сітка Тіссо відображення $\sum$ містить у собі прямолінійні твірні цієї поверхні.

Д о в е д е н н я. Нехай рівняння поверхонь S, S' відповідно

$$\bar{r}=\bar{r}(u^1,u^2),$$

$$\bar{R}=\bar{r}(u^1,u^2)+\lambda\bar{a}(u^1,u^2)+\mu\bar{b}(u^1,u^2)+\nu\bar{c}(u^1,u^2).$$

Припустимо, що координатна сітка на поверхні S є сіткою Тіссо відображення $\sum$. Тоді

$$\lambda^2\partial_1\bar{a}\,\partial_2\bar{a}+\mu^2\partial_1\bar{b}\,\partial_2\bar{b}+\nu^2\partial_1\bar{c}\,\partial_2\bar{c}+$$
$$+\lambda\mu(\partial_1\bar{a}\,\partial_2\bar{b}+\partial_2\bar{a}\,\partial_1\bar{b})+\lambda\nu(\partial_1\bar{a}\,\partial_2\bar{c}+$$
$$+\partial_2\bar{a}\,\partial_1\bar{c})+\mu\nu(\partial_1\bar{b}\,\partial_2\bar{c}+\partial_2\bar{b}\,\partial_1\bar{c})+$$
$$+\lambda(\partial_1\bar{a}\,\partial_2\bar{r}+\partial_2\bar{a}\,\partial_1\bar{r})+\mu(\partial_1\bar{b}\,\partial_2\bar{r}+$$
$$+\partial_2\bar{b}\,\partial_1\bar{r})+\nu(\partial_1\bar{c}\,\partial_2\bar{r}+\partial_2\bar{c}\,\partial_1\bar{r})=0. \tag{1}$$

Оскільки сітка Тіссо відображення Σ' на поверхні S не залежить від вибору поверхні S', то рівність (1) є тотожність відносно λ, μ, ν. Отже, маємо

$$\left.\begin{array}{l} \partial_1\bar{a}\,\partial_2\bar{a}=0, \quad \partial_1\bar{b}\,\partial_2\bar{b}=0, \quad \partial_1\bar{c}\,\partial_2\bar{c}=0, \\ \partial_1\bar{a}\,\partial_2\bar{b}+\partial_2\bar{a}\,\partial_1\bar{b}=0, \quad \partial_1\bar{a}\,\partial_2\bar{c}+\partial_2\bar{a}\,\partial_1\bar{c}=0, \\ \partial_1\bar{b}\,\partial_2\bar{c}+\partial_2\bar{b}\,\partial_1\bar{c}=0, \quad \partial_1\bar{a}\,\partial_2\bar{r}+\partial_2\bar{a}\,\partial_1\bar{r}=0, \\ \partial_1\bar{b}\,\partial_2\bar{r}+\partial_2\bar{b}\,\partial_1\bar{r}=0, \quad \partial_1\bar{c}\,\partial_2\bar{r}+\partial_2\bar{c}\,\partial_1\bar{r}=0. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Нехай $\bar{e}=\dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$, $\bar{\bar{e}}$ – вектор, додатковий до вектора $\bar{e}$, і $\bar{n}$ – напрямний орт нормалі до поверхні S. Розкладемо вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ на вектори $\bar{e}$, $\bar{\bar{e}}$, $\bar{n}$

$$\bar{a}=a^1\bar{e}, \quad \bar{b}=b^1\bar{e}+b^2\bar{\bar{e}}, \quad \bar{c}=c^1\bar{e}+c^2\bar{\bar{e}}+c^3\bar{n}. \qquad (3)$$

Оскільки метрика репера $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ є сталою, то a^1, b^1, b^2, c^1, c^2, c^3 – сталі величини. Тому згідно (3) умови (2) запишуться таким чином

$$\left.\begin{array}{l} \partial_1\bar{e}\,\partial_2\bar{e}=0, \quad \partial_1\bar{\bar{e}}\,\partial_2\bar{\bar{e}}=0, \quad \partial_1\bar{n}\,\partial_2\bar{n}=0, \\ \partial_1\bar{e}\,\partial_2\bar{\bar{e}}+\partial_2\bar{e}\,\partial_1\bar{\bar{e}}=0, \quad \partial_1\bar{e}\,\partial_2\bar{n}+\partial_2\bar{e}\,\partial_1\bar{n}=0, \\ \partial_1\bar{\bar{e}}\,\partial_2\bar{n}+\partial_2\bar{\bar{e}}\,\partial_1\bar{n}=0, \quad \partial_1\bar{e}\,\partial_2\bar{r}+\partial_2\bar{e}\,\partial_1\bar{r}=0, \\ \partial_1\bar{\bar{e}}\,\partial_2\bar{r}+\partial_2\bar{\bar{e}}\,\partial_1\bar{r}=0, \quad \partial_1\bar{n}\,\partial_2\bar{r}+\partial_2\bar{n}\,\partial_1\bar{r}=0 \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Як відомо [1],

$$\left.\begin{array}{l} \partial_i\bar{e}=\alpha_i\bar{\bar{e}}+\varkappa_{ik}e^k\bar{n}, \\ \partial_i\bar{\bar{e}}=-\alpha_i\bar{e}+\varkappa_{ik}\bar{e}^k\bar{n}, \\ \partial_i\bar{n}=-\varkappa_{ik}e^k\bar{e}-\varkappa_{ik}\bar{e}^k\bar{\bar{e}}, \end{array}\right\} \qquad (5)$$

де α_i – трансверсальний вектор поля $\tilde{e}$; π_{ij} – другий основний тензор поверхні S . Підставивши (5) в (4), матимемо

$$\left.\begin{array}{l}
\alpha_1\alpha_2 + \pi_{1i}\pi_{2k}\, e^i e^k = 0, \quad \alpha_1\alpha_2 + \\
+ \pi_{1i}\pi_{2k}\, \tilde{e}^i \tilde{e}^k = 0, \quad \pi_{1i}\pi_{2k}\, e^i e^k + \\
+ \pi_{1i}\pi_{2k}\, \tilde{\tilde{e}}^i \tilde{\tilde{e}}^k = 0, \quad \pi_{1i}\pi_{2k}\, e^i \tilde{e}^k + \\
+ \pi_{2i}\pi_{1k}\, e^i \tilde{\tilde{e}}^k = 0, \quad \alpha_1 \pi_{2i}\, \tilde{e}^i + \\
+ \alpha_2 \pi_{1i}\, \tilde{e}^i = 0, \quad \alpha_1 \pi_{2i}\, e^i + \alpha_2 \pi_{1i}\, e^i = 0, \\
\alpha_1 \tilde{e}_2 + \alpha_2 \tilde{e}_1 = 0, \quad \alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_1 = 0, \\
\pi_{1i}\, e^i e_2 + \pi_{1i}\, \tilde{e}^i \tilde{e}_2 + \pi_{2i}\, e^i e_1 + \pi_{2i}\, \tilde{e}^i \tilde{e}_1 = 0
\end{array}\right\} \tag{6}$$

Очевидно,

$$\begin{vmatrix} \tilde{e}_2 & \tilde{e}_1 \\ e_2 & e_1 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{7}$$

Тому з рівностей (6_7) і (6_8) випливає

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0. \tag{8}$$

Оскільки $\alpha_i = k_e e_i + k_{\tilde{e}} \tilde{e}_i$, де k_e , $k_{\tilde{e}}$ – геодезичні кривини векторних ліній полів $\bar{e}$, $\tilde{\tilde{e}}$ [1], то згідно з (8), (7) маємо $k_e = k_{\tilde{e}} = 0$.

Отже, сітка, утворена векторними лініями полів $\bar{e}$, $\tilde{\tilde{e}}$, є геодезичною, а тому поверхня S є розгортною [1]. Зважаючи на ці дві обставини, векторні лінії поля $\bar{e}$ є геодезичними.

Першу частину нашої теореми доведено.

Згідно з (8) рівності (6) набувають вигляду

$$
\left.\begin{aligned}
&\pi_{1i}\pi_{2k}e^{i}e^{k}=0, \qquad \pi_{1i}\pi_{2k}\tilde{e}^{i}\tilde{e}^{k}=0,\\
&\pi_{1i}\pi_{2k}e^{i}e^{k}+\pi_{1i}\pi_{2k}\tilde{e}^{i}\tilde{e}^{k}=0,\\
&\pi_{1i}\pi_{2k}e^{i}\tilde{e}^{k}+\pi_{2i}\pi_{1k}e^{i}\tilde{e}^{k}=0,\\
&\pi_{1i}e^{i}e_{2}+\pi_{1i}\tilde{e}^{i}\tilde{e}_{2}+\pi_{2i}e^{i}e_{1}+\\
&+\pi_{2i}\tilde{e}^{i}\tilde{e}_{1}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{9}
$$

З умов (9) видно, що поверхня S може бути площиною. В цьому разі рівності (9) є тотожностями.

Розглянемо випадок, коли поверхня відмінна від площини.

Умови (9) рівнозначні умовам

$$
\left.\begin{aligned}
&\pi_{1i}e^{i}=0, \qquad \pi_{1i}\tilde{e}^{i}=0,\\
&\pi_{2i}e^{i}e_{1}+\pi_{2i}\tilde{e}^{i}\tilde{e}_{1}=0,
\end{aligned}\right\} \tag{10}
$$

або

$$
\left.\begin{aligned}
&\pi_{2i}e^{i}=0, \qquad \pi_{2i}\tilde{e}^{i}=0,\\
&\pi_{1i}e^{i}e_{2}+\pi_{1i}\tilde{e}^{i}\tilde{e}_{2}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{11}
$$

З рівностей (10_1), (10_2) згідно з (7) будемо мати

$$
\pi_{11}=\pi_{12}=0. \tag{12}
$$

Оскільки поверхня S не є площиною, (10_3) набуває вигляду

$$
e^{2}e_{1}+\tilde{e}^{2}\tilde{e}_{1}=0. \tag{13}
$$

Але це тотожність. Дійсно,

$$
\left.\begin{aligned}
&e^{2}=e_{1}\varepsilon^{12},\\
&\tilde{e}_{1}=e^{2}\varepsilon_{21},
\end{aligned}\right\} \tag{14}
$$

де ε_{ij} – дискримінантний тензор [1]. Підставляючи (14) в (13), дістаємо тотожність

$$e^2 e_1 (1 + \varepsilon_{21} \varepsilon^{12}) = 0,$$

оскільки $\varepsilon_{21} \varepsilon^{12} = -1$.

Таким чином, згідно з (12), на поверхні S координатна сітка, яка є сіткою Тіссо відображення $\sum$, містить в собі прямолінійні твірні цієї поверхні.

До такого ж висновку приходимо, досліджуючи умови (11).

Теорему доведено.

Література

1. Норден А. П. Теория поверхностей. Гостехиздат, М., 1956.

УДК 517.512

Г.П.ГУБАНОВ, Б.В.КОВАЛЬЧУК

ОЦІНКА ЗАЛИШКУ ПРИ НАБЛИЖЕННІ НЕПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ КЛАСУ ЛІПШИЦЯ ПОЛІНОМАМИ, ЯКІ ПОБУДОВАНІ НА ОСНОВІ ПОЛІНОМІВ, НАЙКРАЩИХ У ЗАДАНІЙ СИСТЕМІ ТОЧОК

Нехай $MH^{\alpha}(-1,1)\ (0<\alpha<1)$ позначає клас функцій $f(x)$, що задовольняють умову Ліпшиця степеня α з константою M на відрізку $[-1,1]$, а $P_n(f;x)$ – поліном степеня $(n-1)$, що наближає функцію $f(x)$ найкращим способом в системі точок $x_k = \cos\frac{k\pi}{n}$.

Розглянемо зрізані середні арифметичні суми від поліномів $P_n(f;x)$, які мають вигляд