УДК 539.3

Т.Л.МАРТИНОВИЧ, Б.М.КОРДУБА

РОЗТЯГ ПЛАСТИНКИ З ЕЛІПТИЧНИМ ОТВОРОМ, КРАЙ ЯКОГО ПІДКРІПЛЕНИЙ ПРУЖНИМ КІЛЬЦЕМ

Розглянемо пружну рівновагу ізотропної пластинки з еліптичним отвором L_1, край якого підсилений пружним кільцем сталого перерізу. Напружено-деформований стан підсилюючого кільця описується рівняннями теорії тонких криволінійних стержнів. Умови спряження пластинки зі стержнем реалізуються на фактичній поверхні їх спаю. На нескінченності пластинка розтягується паралельно осям еліпса зусиллями $\sigma_x^\infty = p$, $\sigma_y^\infty = q$, $\tau_{xy}^\infty = 0$. Підсилюючий стержень вільний від навантаження.

За допомогою функції

$$z = \omega(\zeta) = R\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right), \qquad m = \frac{a_1 - b_1}{a_1 + b_1}; \qquad R = \frac{a_1 + b_1}{2} \tag{1}$$

конформно відобразимо зовнішність одиничного кола γ_1 на зовнішність еліптичного отвору L_1 з півосями a_1 і b_1.

Комплексні потенціали $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$, через які виражаються компоненти тензора напружень у пластинці, а також компоненти деформації стержня e_0 і θ_6 шукаємо у формі рядів

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=0,2,\dots}^{\infty} B_k \zeta^{-k}, \qquad \Psi(\zeta) = \sum_{k=0,2,\dots}^{\infty} B_k' \zeta^{-k}, \tag{2}$$

$$e_0 = \alpha_0 + \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} \alpha_k (\sigma^k + \sigma^{-k}), \qquad \theta_6 = i \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} \beta_k (\sigma^k - \sigma^{-k}), \tag{3}$$

причому σ - афікс точки одиничного контура γ_1 ;

$$B_0 = \frac{p+q}{4}; \qquad B_0' = -\frac{p-q}{2}.$$

Тут B_k , B_k' , α_k і β_k - дійсні величини, які не дорівнюють нулеві тільки з парними індексами. Ці твердження випливають з повної симетрії задачі відносно координатних осей x і y .

Внесемо розклади (I), (2) в крайові умови задачі (2I)-(24) роботи [I] і виконаємо інтегрування вздовж замкнутого контура γ_1 . Тоді одержуємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів розкладу шуканих функцій B_k , B_k' , α_k і β_k :

$$\frac{1}{2} a_{0n}\alpha_0 + \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} a_{kn}\alpha_k + \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} b_{kn}\beta_k = -\frac{1+\varkappa}{4}(p+q)\delta_{1n}, \tag{4}$$

$$\frac{1}{2} c_{0n}\alpha_0 + \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} c_{kn}\alpha_k + \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} \alpha_{kn}\beta_k = \frac{1+k}{2\varkappa}\left[(p-q) - \frac{m}{2}(p+q)\right]\delta_{1n}.$$

$$(n = 1, 3, 5, \dots)$$

Тут

$$a_{kn} = -\frac{1}{2\pi i R}\left\{2\mu\int_{\gamma_1^+}\frac{r_0}{r_1}\left(\sigma^{k-n} + \sigma^{-(k+n)}\right)\omega'(\sigma)\,d\sigma + \right.$$

$$+ \frac{nq}{2h}\int_{\gamma_1^+}\frac{\omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|}\left(\sigma^{k-n} + \sigma^{-(k+n)}\right)d\sigma +$$

$$\left. + \frac{nq}{2h}\int_{\gamma_1^+}(r_1 - r_0)(\sigma^k + \sigma^{-k})\,d\left[\frac{\sigma^{-(n-1)}}{\omega'(\sigma)}\right]\right\};$$

$$b_{kn} = -\frac{1}{2\pi i R}\left\{\frac{nkq}{2h}\int_{\gamma_1^+}\frac{\eta_c r_1}{|\omega'(\sigma)|}(\sigma^k + \sigma^{-k})\,d\left[\frac{\sigma^{-(n-1)}}{\omega'(\sigma)}\right] - \right.$$

$$\left. - 2\mu\int_{\gamma_1^+}\left[\left(\frac{r_1 - r_0}{|\omega'(\sigma)|} + 1\right)\sigma^{k-n} + \left(\frac{(r_1 - r_0)k}{|\omega'(\sigma)|} - 1\right)\sigma^{-(n+k)}\right]\omega'(\sigma)\,d\sigma\right\},$$

$$C_{kn} = -\frac{1}{2\pi i R}\left\{\frac{nq}{2h}\int\limits_{\gamma_1^+}\frac{\omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|}\left(\sigma^{n+k}+\sigma^{n-k}\right)d\sigma + \right.$$

$$+\frac{nq}{2h}\int\limits_{\gamma_1^+}(r_1-r_0)\left(\sigma^{k}+\sigma^{-k}\right)d\left[\frac{\sigma^{n+1}}{\overline{\omega'(\sigma)}}\right]+ \qquad (5)$$

$$\left.+\frac{2\mu}{\varkappa}\int\limits_{\gamma_1^+}\frac{r_0}{r_1}\left(\sigma^{n+k}+\sigma^{n-k}\right)\omega'(\sigma)\,d\sigma\right\};$$

$$d_{kn} = -\frac{1}{2\pi i R}\left\{\frac{knq}{2h}\int\limits_{\gamma_1^+}\frac{\eta_c\, r_1}{|\omega'(\sigma)|}\left(\sigma^{k}+\sigma^{-k}\right)d\left[\frac{\sigma^{n+1}}{\overline{\omega'(\sigma)}}\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{2\mu}{\varkappa}\int\limits_{\gamma_1^+}\left[\left(\frac{(r_1-r_0)k}{|\omega'(\sigma)|}+1\right)\sigma^{k+n}+\left(\frac{(r_1-r_0)k}{|\omega'(\sigma)|}-1\right)\sigma^{n-k}\right]\omega'(\sigma)\,d\sigma\right\},$$

причому δ_{kn} – символ Кронекера. Коефіцієнти розкладу функцій $\Phi(\zeta)$ і $\Psi(\zeta)$ визначаються з рекурентних співвідношень

$$B_2 = \frac{2\mu}{2\pi i R\varkappa}\int\limits_{\gamma_1^+}\left[\frac{r_0}{r_1}e_0 + i\frac{(r_1-r_0)\sigma}{|\omega'(\sigma)|}\frac{d\theta_\delta}{d\sigma}+i\theta_\delta\right]\sigma\,\omega'(\sigma)\,d\sigma +$$

$$+\frac{p-q}{2\varkappa}+\frac{m(\varkappa-1)}{4\varkappa}(p+q); \qquad (6)$$

$$B_{n+1} = mB_{n-1}+\frac{2\mu}{2\pi i R\varkappa}\int\limits_{\gamma_1^+}\left[\frac{r_0}{r_1}e_0 + i\frac{(r_1-r_0)\sigma}{|\omega'(\sigma)|}\frac{d\theta_\delta}{d\sigma}+i\theta_\delta\right]\sigma^{n}\omega'(\sigma)\,d\sigma;$$

$$\bar{B}_2' = m\bar{B}_2+\frac{2\mu}{2\pi i R}\int\limits_{\gamma_1^+}\left[\frac{r_0}{r_1}e_0 + i\frac{(r_1-r_0)}{|\omega'(\sigma)|}\frac{d\theta_\delta}{d\sigma}+i\theta_\delta\right]\sigma^{-1}\omega'(\sigma)\,d\sigma +$$

$$+\frac{1}{4}\left[(1-\varkappa)(p+q)-2m(p-q)\right];$$

$$\tilde{B}'_{n+1} = m\tilde{B}'_{n-1} + nm\tilde{B}_{n+1} + n\tilde{B}_{n-1} + \tag{7}$$

$$+\frac{2\mu}{2\pi R i}\int_{\gamma_1^+}\left[\frac{r_0}{r_1}\ell_0 + i\frac{(r_1-r_0)\sigma}{|\omega'(\sigma)|}\cdot\frac{d\theta_\ell}{d\sigma} + i\theta_\ell\right]\sigma^{-n}\omega'(\sigma)d\sigma, \quad (n=3,5,7,\dots).$$

Тут і далі використовуються позначення, прийняті в [1].

Коефіцієнти (5), (6) і (7) виражаються через інтеграли вигляду

$$I_{(2l)}(m) = m^{(l)}\int_0^1\frac{x^{(2l)}dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-m^2x^2)}} = \frac{1}{4i}\int_{\gamma_1^+}\frac{\sigma^{\pm 2l}d\sigma}{\sqrt{(\sigma^2-m)(1-m\sigma^2)}}, \tag{8}$$

для яких при великих l справедлива оцінка

$$I_{2l} < \frac{\pi}{2}\frac{m^l}{\sqrt{\pi l}} \qquad (l>0). \tag{9}$$

Система (4) квазірегулярна. Доведення грунтується на оцінці (9) інтегралів (7), через які виражаються коефіцієнти системи (5).

Величини $\eta_c r_1$, $r_1 - r_0$ і r_0/r_1, що входять у рівності (5)-(7), з достатнім для застосувань ступенем точності обчислюються за формулами [2]

$$\eta_c r_1 = \frac{J_\chi}{F}, \quad r_1 - r_0 = \varepsilon_1, \qquad \frac{r_0}{r_1} = 1 - \frac{\varepsilon_1}{r_1}. \tag{10}$$

Тут J_χ - момент інерції перерізу стержня відносно центральної осі; ε_1 - віддаль від центральної осі стержня до лінії спаю L_1; r_1 - радіус кривизни контура отвору пластинки (крайнього волокна стержня) l_1, який визначається за формулою

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{\omega'(\sigma)}\frac{d}{d\sigma}\left[\frac{\sigma\omega'(\sigma)}{\rho_1|\omega'(\sigma)|}\right] = \frac{R^2(\rho_1^4-m^2)}{\rho_1^5|\omega'(\sigma)|^3}, \quad \rho_1 = 1. \tag{11}$$

Для прямокутного перерізу стержня $2h^* \times b$ одержуємо

$$\frac{q}{hR} = 2\gamma E^* \delta, \quad \eta_c r_1 = \frac{\varepsilon_1^2}{3}, \quad \delta = \frac{b}{R}, \quad \gamma = \frac{h^*}{h}, \quad b = 2\varepsilon_1 . \quad (12)$$

Нормальне напруження в перерізі підсилюючого стержня обчислюється за формулою

$$\sigma = E^* \left[\frac{r_0}{r} \alpha_0 + 2 \sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r} \alpha_k - \frac{k(r-r_0)\beta_k}{R\sqrt{1+m^2-2m\cos 2\theta}} \right) \cos k\theta \right], \quad (13)$$

де r - радіус кривизни довільного волокна стержня.

Напруження в пластинці поблизу лінії спаю з кільцем визначається за формулами

$$\sigma_\theta = 2\sum_{k=0}^{\infty} B_k \cos k\theta + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\left[m\cos(k+2)\theta - m\cos(k-2)\theta - (1-m^2)\cos k\theta\right]}{1+m^2-2m\cos 2\theta} B_k +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^2\cos(k+2)\theta + \cos(k-2)\theta - 2m\cos k\theta}{1+m^2-2m\cos 2\theta} B_k' ; \quad (14)$$

$$\sigma_\rho = 4\sum_{k=0}^{\infty} B_k \cos k\theta - \sigma_\theta .$$

Для числового прикладу візьмемо мідну пластинку і стальне кільце прямокутного перерізу з пружними і геометричними характеристиками:

$\mu = 4{,}42 \cdot 10^5$ $кг/см^2$; $\quad \nu = 0{,}3$; $\quad \varkappa = 2{,}08$;

$E^* = 2{,}1 \cdot 10^6$ $кг/см^2$; $\quad \gamma = 1$; $\quad \delta = 1/16$; $\quad m = 0{,}2$; $\left(\frac{b_1}{a_1} = \frac{2}{3}\right)$.

Пластинка розтягується в напрямку осі Ox зусиллям $p\ (q=0)$. При $m=-0{,}2$ менша вісь еліпса збігається з віссю Ox . Бралось по 7 коефіцієнтів α_n і β_n і розв'язувалась вкорочена система 14 рівнянь (4) на ЕЦОМ "Минск-22". Відкинуті коефіцієнти α_k , $\beta_k\ (k>14)$, як показав проведений аналіз, не впливають на прийняту точність підрахунків вихідної інформації.

Наводимо числові значення нормальних напружень σ_θ в пластинці, σ_1 - в кільці на площадках, перпендикулярних до лінії спаю L_1 при $m=0{,}2$

θ°	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
σ_θ/p	-0,414	-0,327	-0,052	0,399	0,912	1,335	1,617	1,810	1,949	2,005
σ_θ°/p	-1,00	-0,78	-0,23	0,43	1,04	1,54	1,90	2,15	2,29	2,33
σ_ρ/p	-0,147	-0,080	0,034	0,065	0,026	0,040	0,127	0,165	0,166	0,141
σ_1/p	-0,824	-0,605	-0,102	0,794	1,620	2,335	2,885	3,263	3,481	3,551
σ_2/p	-1,556	-1,208	-0,336	0,716	1,692	2,487	3,080	3,485	3,718	3,795

Напруження σ_2 стосується внутрішнього волокна кільця. Контактний тиск на лінії спаю L_1 позначений через σ_ρ

і при $m = -0,2$:

θ°	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
σ_θ/p	-0,729	-0,664	-0,473	-0,156	0,299	0,878	1,553	2,233	2,748	2,938
σ_θ°/p	-1,00	-0,93	-0,72	-0,35	0,19	0,93	1,86	2,85	3,67	4,00
σ_ρ/p	-0,131	-0,115	-0,063	0,010	0,082	0,164	0,267	0,392	0,518	0,576
σ_1/p	-1,248	-1,148	-0,837	-0,298	0,490	1,521	2,713	3,876	4,734	5,048
σ_2/p	-1,624	-1,516	-1,181	-0,602	0,250	1,401	2,826	4,380	5,682	6,204

Через σ_θ° позначено напруження в аналогічній пластинці без підкріплень [3].

Література

1. Мартынович Т. Л. К решению задач о напряженном состоянии в анизотропных пластинках с подкрепленным краем. "Прикладная механика", т. VI, вип. 9, 1970.
2. Мартынович Т. Л. Теория и расчет пластинок с подкрепленным краем. Автореф. докт. дисс., Львовский университет, 1970.
3. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. Гостехиздат, 1951.