УДК 539.3

В.О.ЛИХАЧОВ

ДВІ ЗАДАЧІ КРУЧЕННЯ

Кручення консольного стержня

Розглянемо консольний стержень довжини h з круглим поперечним перерізом. Початок координат помістимо в закріпленому кінці стержня, вісь OZ направимо по його осі.

Нехай бічна поверхня стержня вільна від напружень, а до торця прикладені дотичні зусилля

$$\tau_{z\theta}(r,h) = f(r), \qquad 0 \le r \le 1.$$

Розв'язування задачі чистого кручення, як відомо [1,2], зводиться до знаходження компонент напружень $\tau_{z\theta}(r,z)$, $\tau_{r\theta}(r,z)$ і переміщення $U_\theta(r,z)$, які можуть бути виражені через функцію переміщень $\psi(r,z)$, що визначається з

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{3}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0. \tag{1}$$

Граничні умови даної задачі

$$\begin{aligned} &U_\theta(r,0)=0, \qquad \tau_{z\theta}(r,h)=f(r) \quad 0 \le r \le 1, \\ &\tau_{r\theta}(1,z)=0, \qquad 0 \le z \le h, \end{aligned} \tag{2}$$

і диференціальне рівняння (1) визначають вибір функції переміщень

$$\psi_{(r,z)} = az + \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{\infty} A_{\rho_k} J_1(\rho_k r)\frac{sh\,\rho_k z}{\rho_k\, ch\,\rho_k h}, \tag{3}$$

де ρ_k - корені рівняння $J_2(\rho_k)=0$, $J_1(x)$, $J_2(x)$ - функції Бесселя першого роду дійсного аргумента.

З (3) випливає:

$$u_\theta(r,z)=r\psi(r,z)=\alpha rz+\sum_{k=1}^{\infty}A_{\rho_k}J_1(\rho_k r)\frac{sh\rho_k z}{\rho_k ch\rho_k h},$$

$$\tau_{z\theta}(r,z)=\mu r\frac{\partial\psi}{\partial z}=\mu\alpha r+\mu\sum_{k=1}^{\infty}A_{\rho_k}J_1(\rho_k r)\frac{ch\rho_k z}{ch\rho_k h}, \qquad (4)$$

$$\tau_{r\theta}(r,z)=\mu r\frac{\partial\psi}{\partial r}=-\mu\sum_{k=1}^{\infty}A_{\rho_k}J_2(\rho_k r)\frac{sh\rho_k z}{ch\rho_k h}.$$

Щоб задовольнити умови (2), коефіцієнти A_{ρ_k} повинні справджувати рівність

$$\mu\alpha r+\mu\sum_{k=1}^{\infty}A_{\rho_k}J_1(\rho_k r)=f(r). \qquad (5)$$

Для визначення коефіцієнтів A_{ρ_k} розкладемо $f(r)$ в ряд Фур'є-Бесселя

$$f(r)=b_0 r+\sum_{k=1}^{\infty}b_k J_1(\rho_k z), \qquad 0<r<1, \qquad (6)$$

де

$$b_k=\frac{2\rho_k^2}{(\rho_k^2-1)J_1^2(\rho_k)+\rho_k^2 J_1'^2(\rho_k)}\int_0^1 tf(t)J_1(\rho_k t)\,dt,$$

$$b_0=4\int_0^1 t^2 f(t)\,dt.$$

З (5) і (6) одержимо

$$\alpha\mu=b_0, \quad \mu A_{\rho_k}=\frac{2\rho_k^2}{(\rho_k^2-1)J_1^2(\rho_k)+\rho_k^2 J_1'^2(\rho_k)}\int_0^1 tf(t)J_1(\rho_k t)\,dt.$$

Тоді

$$\tau_{r\theta}(r,z)=-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_2(\rho_k r)}{J_1^2(\rho_k)}\cdot\frac{sh\rho_k z}{ch\rho_k h}\int_0^1 tf(t)J_1(\rho_k t)\,dt, \qquad (7)$$

$$\tau_{z\theta}(r,z)=4r\int_0^1 t^2 f(t)\,dt+$$

$$+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_1(\rho_k r)}{J_1^2(\rho_k)}\cdot\frac{ch\rho_k z}{ch\rho_k h}\int_0^1 t f(t) J_1(\rho_k t)\,dt .$$

Як свідчать числові підрахунки, що проводились за формулами (7), напружений стан в стержні радіуса R і будь-якої довжини h $(h \geq R)$ розподіляється так :

а) для $0 < z < h-R$ $\tau_{z\theta}(r,z)=4r\int_0^R t^2 f(t)\,dt$, а напруженням $\tau_{r\theta}(r,z)$ можна нехтувати;

б) для $h > z > h-R$ напружений стан в стержні не залежить від його довжини h. Для цього випадку наводяться таблиці розподілу $\tau_{z\theta}(r,z)$ і $\tau_{r\theta}(r,z)$ при $f(r)=P_0$ $(P_0 - const)$.

Таблиця I

Значення $\dfrac{\tau_{z\theta}(r,z)}{P_0}$

$\frac{h-z}{R}$	Фіксовані значення радіуса, r						
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	1
0,875	0,34I	0,508	0,673	0,837	I,00	I,I64	I,330
0,750	0,345	0,5I2	0,676	0,838	I,00	I,I62	I,326
0,625	0,356	0,522	0,684	0,842	I,00	I,I58	I,32I
0,500	0,374	0,54I	0,699	0,850	I,00	I,I5I	I,3II
0,375	0,4I2	0,579	0,727	0,864	I,00	I,I38	I,29I
0,250	0,489	0,650	0,777	0,888	I,00	I,II2	I,254
0,I25	0,654	0,78I	0,863	0,930	I,00	I,063	I,I78

Таблиця 2

Значення $\frac{\tau_{r\theta}(r,z)}{P_0}$

$\frac{h-z}{R}$	Фіксовані значення радіуса, r						
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	1
0,750	0,0010	0,0037	0,0067	0,0088	0,0092	0,0075	0,0041
0,625	0,0020	0,0071	0,0127	0,0156	0,0171	0,0138	0,0076
0,500	0,0042	0,0144	0,0254	0,0324	0,0329	0,0264	0,0144
0,375	0,0141	0,0304	0,0508	0,0625	0,0620	0,0494	0,0269
0,250	0,0235	0,0686	0,104	0,120	0,115	0,0915	0,0506
0,125	0,0798	0,0971	0,218	0,228	0,210	0,167	0,0972

Кручення циліндричного шару

Нехай в круглий отвір циліндричного шару впаяно порожнистий циліндр. Введемо циліндричну систему координат з початком в центрі циліндра і з віссю OZ, яка направлена по його осі.

Граничні умови приймаються такими :

$$\tau_{z\theta}^{(1)}(r,z)=0 \quad \text{при} \quad z=\pm h, \quad r\geq 1,$$

$$\tau_{z\theta}^{(2)}(r,z)=0 \quad \text{при} \quad z=\pm h, \quad \rho\leq r\leq 1,$$

$$\tau_{r\theta}^{(2)}(r,z)=f(z) \quad \text{при} \quad r=\rho, \quad -h\leq z\leq h,$$

$$\tau_{r\theta}^{(1)}=\tau_{r\theta}^{(2)}(r,z), \quad U_\theta^{(1)}(r,z)=U_\theta^{(2)}(r,z) \quad \text{при} \quad r=1, \quad -h\leq z\leq h,$$

де $1,\rho$ – радіуси циліндра; $2h$ – товщина шару та висота циліндра; індекси (1) або (2) належать величинам, що відносяться відповідно до шару або до циліндра.

Зараз помістимо лише вираз для напруження $\tau_{r\theta}(r,z)$ в зоні контакту шару та циліндра, якщо $2h=\pi$

$$\tau_{r\theta}(1,z)=\frac{a_o}{2}\rho^2+\sum_{p=1}^{\infty} a_p\,\frac{pK_o(2p)+K_1(2p)}{\Delta}\cos 2pz,$$

де

$$\Delta=2\left[pK_o(2p)+K_1(2p)\right]\Big\{K_1(2p)\left[pI_o(2p\rho)-\frac{1}{\rho}I_1(2p\rho)\right]+$$

$$+I_1(2p)\left[pK_o'(2p\rho)+\frac{1}{\rho}K_1(2p\rho)\right]\Big\}+$$

$$+2lK_1(2p)\Big\{\left[pI_o(2p)-I_1(2p)\right]\left[pK_o(2p\rho)+\frac{1}{\rho}K_1(2p\rho)\right]-$$

$$-\left[pK_o(2p)+K_1(2p)\right]\left[pI_o(2p\rho)-\frac{1}{\rho}I_1(2p\rho)\right]\Big\},$$

тут $l=\frac{\mu_{(2)}}{\mu_{(1)}}$, a_p - коефіцієнти розкладу функції в ряд Фур'є, $I_o(x)$, $I_1(x)$, $K_o(x)$, $K_1(x)$ - функції Бесселя першого та другого роду уявного аргумента.

Нижче наведена таблиця розподілу $\tau_{r\theta}(1,z)$ при $f(z)=P_1 z$ $\left(\frac{\tau_{r\theta}}{P_1}\right)$ та $f(z)=P_2 z^2$ $\left(\frac{\tau_{r\theta}}{P_2}\right)$ залежно від товщини стінок циліндра $(1-\rho)$, від координати z та величини l. (Якщо $f(z)=P_o$, то $\tau_{r\theta}^{(1)}(r,z)=\tau_{r\theta}^{(2)}(r,z)=P_o\frac{\rho^2}{r^2}$).

Таблиця 3

Розподіл напружень

z	l	$\tau_{r\theta} : \rho_1$				$\tau_{r\theta} : \rho_2$		
		$\rho=0,5$	$\rho=0,75$	$\rho=0,9$	$\rho=0,98$	$\rho=0,75$	$\rho=0,9$	$\rho=0,98$
0	0	0,074	0,116	0,130	0,143	0,0269	0,007	-0,001
	1/3	0,083	0,134	0,145	0,148	0,047	0,023	0,0038
	1	0,097	0,165	0,173	0,156	0,084	0,052	0,0124
	3	0,124	0,229	0,241	0,180	0,165	0,130	0,0371
	9	0,156	0,317	0,361	0,242	0,284	0,282	0,104
$\frac{h}{4}$	0	0,110	0,211	0,278	0,322	0,100	0,104	0,111
	1/3	0,116	224	0,289	0,325	0,120	0,121	0,116
	1	0,126	0,246	0,309	0,331	0,155	0,152	0,126
	3	0,145	0,292	0,357	0,348	0,227	0,227	0,152
	9	0,157	0,353	0,442	0,392	0,324	0,361	0,221
$\frac{h}{2}$	0	0,196	0,442	0,636	0,754	0,363	0,478	0,550
	1/3	0,196	0,442	0,636	0,754	0,375	0,491	0,555
	1	0,196	0,442	0,636	0,754	0,392	0,514	0,563
	3	0,196	0,442	0,636	0,754	0,418	0,556	0,585
	9	0,196	0,442	0,636	0,754	0,441	0,606	0,630
$\frac{3h}{4}$	0	0,283	0,672	0,994	1,186	0,825	1,231	1,468
	1/3	0,277	0,660	0,983	1,183	0,805	1,213	1,464
	1	0,267	0,638	0,964	1,177	0,770	1,184	1,454
	3	0,248	0,592	0,916	1,160	0,698	1,105	1,428
	9	0,224	0,530	0,830	1,116	0,602	0,971	1,359
h	0	0,319	0,768	1,143	1,365	1,125	1,826	2,307
	1/3	0,310	0,750	1,127	1,361	1,076	1,763	2,277
	1	0,296	0,718	1,099	1,352	1,000	1,664	2,226
	3	0,269	0,654	1,032	1,328	0,859	1,469	2,108
	9	0,236	0,567	0,911	1,267	0,688	1,191	1,267

Література

1. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. Физматгиз, М., 1963.

2. Соляник-Красса К. А. Упругое равновесие тел. Инженерный сборник, т. 26, 1958.