УДК 539.3

Т.Л.МАРТИНОВИЧ, В.В.БОЖИДАРНИК

КРАЙОВІ УМОВИ В ІНТЕГРАЛЬНІЙ ФОРМІ ЗАДАЧІ ПРО НАПРУЖЕНИЙ СТАН В АНІЗОТРОПНІЙ ПЛАСТИНЦІ З НЕСИМЕТРИЧНО ПІДКРІПЛЕНИМ КРАЄМ

У цій праці пропонується загальний математичний підхід до розв'язування задач про пружну рівновагу анізотропних пластинок з несиметрично підкріпленим краєм.

Розглянемо тонку анізотропну пластинку товщиною $2h$, серединна площина якої займає область S, обмежену простими замкнутими контурами $L=L_1+L_2+\ldots+L_{m+1}$, що не перетинаються між собою. У випадку необмеженої області S зовнішній контур L_{m+1} віддалений у нескінченність. При додатному обході контура L область S залишається зліва. Припускається, що в кожній точці пластинки існує площина пружної симетрії, паралельна серединній площині xoy.

Нехай край пластинки L_1 несиметрично підкріплений пружним стержнем (кільцем) постійного перерізу, а до решти краю пластинки $L'=L-L_1$ прикладені згинаючі моменти $m(s)$, перерізуючі сили $p(s)$ і напруження N і T (N, T - нормальна і дотична складові заданих напружень). Стержень спаяний з пластинкою до деформації таким чином, що площина осі стержня зміщена на величину ζ_2^* від серединної площини пластинки. Незалежно від виду навантаження пластинка буде зазнавати згинаючого і узагальненого плоского напруженого стану.

Для одержання крайових умов розглядуваної задачі в інтегральній формі уявно відкинемо підкріплюючий стержень, а дію його на пластинку замінимо або контактними згинаючими моментами $M_n^{(i)}$, перерізуючими силами $M_n^{(i)} + \partial H_{\tau n}^{(i)}/\partial s$ і напруженнями $N_1^{(i)}$, $T_1^{(i)}$, або значеннями прогинів w_1, їх нормальною похідною $\frac{\partial w_1}{\partial n}$, і переміщеннями u_1, v_1 точок контура L_1 області S.

Вважаючи деформації малими, окремо розглянемо згинаючий і узагальнений плоский напружений стани пластинки. Для кожного з цих напружених станів розглянемо першу основну задачу, коли до контура L_1 прикладені контактні зусилля, і основну змішану задачу, якщо задані зміщення точок контура L_1.

На основі [1-5] крайові умови цих граничних задач у інтегральній формі мають вигляд:

а) У випадку узагальненого плоского напруженого стану

$$\int_{L} \overline{F(\bar t)}\,dU = \int_{L'} \overline{F(\bar t)}(N+iT)\,dt + \int_{L_1} \overline{F(\bar t)}(N_1^{(i)}+iT_1^{(i)})\,dt;$$

$$\int_{L} F(t)\,dU = \int_{L'} F(t)(N+iT)\,dt + \int_{L_1} F(t)(N_1^{(i)}+iT_1^{(i)})\,dt, \qquad (1)$$

$$\int_{L'} \overline{F(\bar t)}\,dU - \int_{L_1} \overline{F(\bar t)}\,dV = \int_{L'} \overline{F(\bar t)}(N+iT)\,dt - \int_{L_1} \overline{F(\bar t)}\,d(u_1+iv_1);$$

$$\int_{L'} F(t)\,dU - \int_{L_1} F(t)\,dV = \int_{L'} F(t)(N+iT)\,dt - \int_{L_1} F(t)\,d(u_1+iv_1).$$

б) У випадку згину

$$\int_{L} \overline{F(\bar t)}\,dV^{*} = -\int_{L'} I(t)\overline{F(\bar t)}\,dt - \int_{L_1} I_1^{(i)}(t)\,\overline{F(\bar t)}\,dt; \qquad (2)$$

$$\int_{L} F(t)\,dV^{*} = -\int_{L'} I(t)F(t)\,dt - \int_{L_1} I_1^{(i)}(t)F(t)\,dt;$$

$$\int_{L'} \overline{F(\bar t)}\,dV^{*} + \int_{L_1} \overline{F(\bar t)}\,dU^{*} = -\int_{L'} I(t)\overline{F(\bar t)}\,dt + 2\int_{L_1} \overline{F(\bar t)}\,d\left[\frac{\partial w_1}{\partial \bar t}\right];$$

$$\int_{L'} F(t)\,dV^{*} + \int_{L_1} F(t)\,dU^{*} = -\int_{L'} I(t)F(t)\,dt + 2\int_{L_1} F(t)\,d\left[\frac{\partial w_1}{\partial \bar t}\right].$$

Тут позначено

$$U=\sum_{j=1}^{2}\left[(1+is_j)\varphi_j(z_j)+(1+i\bar{s}_j)\overline{\varphi_j(z_j)}\right];\tag{3}$$

$$V=\sum_{j=1}^{2}\left[(p_j+iq_j)\varphi_j(z_j)+(\bar{p}_j+i\bar{q}_j)\overline{\varphi_j(z_j)}\right];$$

s_j – корені характеристичного рівняння; p_j, q_j – відомі сталі величини; $\varphi_j(z_j)$ – комплексні потенціали змінних $z_j=x+s_jy$ узагальненого плоского напруженого стану [1,5]; t – афікс точки контура L_1;

$$V^*=\sum_{j=1}^{2}\left[\left(q_j^*+i\frac{p_j^*}{\mu_j}\right)\varphi_j^*(z_j^*)+\left(\bar{q}_j^*+i\frac{\bar{p}_j^*}{\bar{\mu}_j}\right)\overline{\varphi_j^*(z_j^*)}\right];$$

$$U^*=\sum_{j=1}^{2}\left[(1+i\mu_j)\varphi_j^*(z_j^*)+(1+i\bar{\mu}_j)\overline{\varphi_j^*(z_j^*)}\right];\tag{4}$$

$$I_1^{(i)}(t)=M_n^{(i)}+i\int_0^s\left(N_n^{(i)}+\frac{\partial H_{\tau n}^{(i)}}{\partial s}\right)ds+iC_1;$$

$$I_j(t)=m_j(s)+i\int_0^s p_j(s)\,ds+iC_j\qquad(j=2,3,\ldots,m+1);\tag{5}$$

μ_j – корені характеристичного рівняння; p_j^*, q_j^* – відомі сталі величини; $\varphi_j^*(z_j^*)$ – комплексні потенціали змінних $z_j^*=x+\mu_jy$ згинаючого напруженого стану [1,5]; C_j – дійсні сталі; $F(z)$ – довільна функція змінної $z=x+iy$, голоморфна в області пластинки S.

Залежності між переміщеннями u_1, v_1, w_1 точок крайнього волокна стержня L_1, спаяного з пластинкою, відносним видовженням e_0 нейтрального (для чистого згину) волокна L_0 і кутами повороту поперечного перерізу стержня θ_τ, θ_n, θ_6 виражаються на підставі [2-4] формулами

$$d(u_1+iv_1)=\left[\frac{r_0}{r_1}e_0+(r_1-r_0)\overset{\circ}{t}\frac{d\theta_6}{dt}-\zeta_0^*\left(\overset{\circ}{t}\frac{d\theta_n}{dt}-\frac{1}{r_1}\theta_\tau\right)+i\theta_6\right]dt,$$

$$2\frac{\partial w_1}{\partial t}=\overset{\circ}{t}\left[\frac{r_0}{r_1}\theta_n-(r_1-r_0)\overset{\circ}{t}\frac{d\theta_\tau}{dt}+i\theta_\tau\right],\quad \overset{\circ}{t}=\frac{dt}{ds}\tag{6}$$

Залежність між контактними зусиллями, що діють зі сторони пластинки на підкриплюючий стержень, і деформацією стержня e_o, θ_n, θ_τ і θ_b виражаються співвідношеннями [2-4]

$$
\begin{aligned}
&(N_1^{(i)} + i T_1^{(i)}) dt = \pm \frac{1}{2h} d\left[\mathring{t}(V_n + i V_\tau)\right] \mp \frac{h^*}{h} \frac{r_2}{r_1} (N_1 + i T_1) dt ;\\
&\mathring{t}(V_n + i V_\tau) = \frac{d}{dt}\left[g(r_0 - r_1) e_o + g \eta_c r_1 \dot{t} \frac{d\theta_b}{dt}\right] + i g e_o \dot{t} \pm 2h^*(r_2 - r_1)\frac{r_2}{r_1}\mathring{t} T_1 ;\\
&I_1^{(i)}(t) = \pm \frac{d}{dt}\left[\mathring{t}(L_\tau - i L_n)\right] \mp 2h \zeta_o^* (N_1^{(i)} + i T_1^{(i)}) + I_1(t);\\
&\mathring{t}(L_\tau - i L_n) = \frac{r_1}{r_0}\left[C \frac{d\theta_\tau}{dt} - i A \frac{d\theta_n}{dt} + \frac{1}{r_1}(C\theta_n + i A \theta_\tau)\mathring{t}\right],
\end{aligned}
\tag{7}
$$

де $g = E^* F$; A і C – жорсткості підкріплюючого стержня на розтяг, згин і кручення; r_1 – радіус кривини крайнього волокна стержня, спаяного з пластинкою; r_0 – радіус кривини нейтрального (для чистого згину) волокна стержня L_o, що знаходиться на віддалі η_c від центральної осі стержня; V_τ, V_n – складові головного вектора; L_τ, L_n – складові головного моменту внутрішніх зусиль у поперечному перерізі стержня; N_1, T_1 і $I_1(t)$ – зовнішні зусилля, прикладені до стержня; $2h^*$ – товщина стержня.

Тут і надалі верхній знак береться при $r_1 < r_0$, нижній – при $r_1 > r_0$.

Нормальні напруження в перерізі стержня σ і внутрішнього зусилля у ньому обчислюються за формулами [2-4]

$$\sigma = E^*\left[\frac{r_0}{r} e_o + \eta \dot{t} \frac{d\theta_b}{dt} - \zeta\left(\dot{t}\frac{d\theta_n}{dt} - \frac{1}{r}\theta_\tau\right)\right]$$

$$L_n = A\frac{r_1}{r_0}\left(\dot{t}\frac{d\theta_n}{dt} - \frac{1}{r_1}\theta_\tau\right), \quad L_\tau = C\frac{r_1}{r_0}\left(\dot{t}\frac{d\theta_\tau}{dt} + \frac{1}{r_1}\theta_n\right);$$

$$L_b = g\eta_c r_1 \dot{t}\frac{d\theta_b}{dt}, \quad V_\tau = g e_o ,$$

де $\eta = r - r_0$ – віддаль довільного волокна стержня від нульової лінії L_o у їх спільній площині.

Тепер у крайові умови (1)-(2) замість $d(u_1 + iv_1)$, $2d\left[\frac{\partial w_1}{d\bar t}\right]$, $(N_1^{(i)} + i\,T_1^{(i)})dt$ і $I_1^{(i)}(t)dt$ підставимо їх вирази (6) і (7). Після нескладних перетворень крайові умови задачі для анізотропної пластинки з несиметрично підкріпленим краєм в інтегральній формі при відсутності навантаження на кільці ($N_1 = 0$, $T_1 = 0$, $I_1(t) = 0$) набирають вигляду

$$\int_L \overline{F(t)}\,dU = \pm\frac{g}{2h}\int_{L_1}\left[(r_0 - r_1)e_0 + \eta_c r_1 \mathring{t}\,\frac{d\theta_{\text{в}}}{dt}\right]\overline{F''(t)}\,d\bar t \mp$$

$$\mp\frac{ig}{2h}\int_{L_1} e_0\,\overline{F'(t)}\,\mathring{t}\,d\bar t + \int_{L'}(N + iT)\overline{F(t)}\,dt\,;$$

$$\int_L F(t)\,dU = \pm\frac{g}{2h}\int_{L_1}\left[(r_0 - r_1)e_0 + \eta_c r_1 t\,\frac{d\theta_{\text{в}}}{dt}\right]d\left[t^2 F'(t)\right] \mp$$

$$\mp\frac{ig}{2h}\int_{L_1} e_0\,F'(t)\,t\,dt + \int_{L'}(N + iT)F(t)\,dt\,;$$

$$\int_{L'} \overline{F(t)}\,dU - \int_{L_1}\overline{F(t)}\,dV = -\int_{L_1}\left[\frac{r_0}{r_1}e_0 + (r_1 - r_0)t\,\frac{d\theta_{\text{в}}}{dt} + i\theta_{\text{в}} -\right.$$

$$\left. - \zeta_0^*\left(t\,\frac{d\theta_n}{dt} - \frac{1}{r_1}\theta_\tau\right)\right]\overline{F(t)}\,dt + \int_{L'}(N + iT)\overline{F(t)}\,dt\,;$$

$$\int_{L'} F(t)\,dU - \int_{L_1} F(t)\,dV = -\int_{L_1}\left[\frac{r_0}{r_1}e_0 + (r_1 - r_0)t\,\frac{d\theta_{\text{в}}}{dt} + i\theta_{\text{в}} -\right. \qquad (8)$$

$$\left. - \zeta_0^*\left(t\,\frac{d\theta_n}{dt} - \frac{1}{r_1}\theta_\tau\right)\right]F(t)\,dt + \int_{L'}(N + iT)F(t)\,dt\,;$$

$$\int_L \overline{F(t)}\,dV^* = \pm\int_{L_1}\frac{r_1}{r_0}\left[C\,\frac{d\theta_\tau}{d\bar t} - iA\,\frac{d\theta_n}{d\bar t} + \frac{1}{r_1}\left(C\theta_n + iA\theta_\tau\right)t\right]\overline{F'(t)}\,d\bar t \mp$$

$$\mp i\zeta_0^* g \int_{L_1} e_0 \overline{F'(t)}\, i\, d\bar{t} \pm \zeta_0^* g \int_{L_1} \left[(r_0 - r_1) e_0 + \eta_c r_1 i \frac{d\theta_b}{dt} \right] \overline{F''(t)}\, d\bar{t} -$$

$$- \int_{L'} I(t) \overline{F(t)}\, dt \ ;$$

$$\int_{L} F(t)\, dV^* = \pm \int_{L_1} \frac{r_1}{r_0} \left[C \frac{d\theta_\tau}{d\bar{t}} - iA \frac{d\theta_n}{d\bar{t}} + \frac{1}{r_1} (C\theta_n + iA\theta_\tau) i \right] F(t)\, dt \mp$$

$$\mp i\zeta_0^* g \int_{L_1} e_0 i F'(t)\, dt \pm \zeta_0^* g \int_{L_1} \left[(r_0 - r_1) e_0 + \eta_c r_1 i \frac{d\theta_b}{dt} \right] d\left[i^2 F'(t) \right] -$$

$$- \int_{L'} I(t) F(t)\, dt \ ;$$

$$\int_{L'} \overline{F(t)}\, dV^* + \int_{L_1} \overline{F(t)}\, dU^* = - \int_{L_1} i \left[\frac{r_0}{r_1} \theta_n - (r_1 - r_0) i \frac{d\theta_\tau}{dt} + i\theta_\tau \right] \overline{F'(t)}\, d\bar{t} -$$

$$- \int_{L'} I(t) \overline{F(t)}\, dt \ ;$$

$$\int_{L'} F(t)\, dV^* + \int_{L_1} F(t)\, dU^* = - \int_{L_1} i \left[\frac{r_0}{r_1} \theta_n - (r_1 - r_0) i \frac{d\theta_\tau}{dt} + i\theta_\tau \right] F'(t)\, dt -$$

$$- \int_{L'} I(t) F(t)\, dt \, .$$

Крайові умови (8) служать для визначення комплексних потенціалів $\varphi_j(z_j)$, $\varphi_j^*(z_j^*)$ і компонент деформації стержня e_0, θ_n, θ_τ, θ_b.

Л і т е р а т у р а

1. Л е х н и ц к и й С. Г. Анизотропные пластинки. ГТТИ, М., 1957.
2. М а р т ы н о в и ч Т. Л. К решению задач о напряженном состоянии в изотропных пластинках с подкрепленным краем. "Прикладная механика", т. VI, вып. 9, 1970.
3. М а р т ы н о в и ч Т. Л., Н и щ е н к о И. А. Об изгибе тонких

изотропных плит и плит с подкрепленным краем. Труды УП Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. "Наука", М., 1970.

4. Мартынович Т. Л. Теория и расчет пластинок с подкрепленным краем. Автореферат докт. дисс., Львовский университет, 1970.

5. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. ГТТИ, М., 1951.

6. Савин Г. Н. Флейшман Н. П. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. "Наукова думка", 1964.

7. Труды Николаевского кораблестроительного института. "Строительная механика судовых машин", вып. 32, 1969, вып. 40, 1970.

8. Шереметьев М. П. Пластинки с подкрепленным краем. Изд-во Львовского ун-та, 1960.

УДК 539.319

О.І.ДУМАНСЬКИЙ

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ПЛАСТИНКИ-СМУГИ, ПОСЛАБЛЕНОЇ ВИТОЧКОЮ

В інженерній практиці дуже часто зустрічаються випадки, коли пластинка має форму безмежної смуги, послабленої виточкою, розміри якої сумірні з шириною пластинки L.

Вивченню напруженого стану таких пластинок-смуг присвячений зміст нашої експериментальної роботи.

Використовувався поляризаційно-оптичний метод дослідження напружень (метод фотопружності). Вимірювання проводились на координатно-синхронному поляриметрі КСП-5 із слюдяним компенсатором СКК-2.

Прозорі пластинки мали товщину 3 мм і виготовлялись із епоксидної смоли ЭД-5 холодним затвердінням [1].