

б) Приріст коефіцієнта концентрації напружень зі збільшенням радіуса заокруглення зменшується.

Л і т е р а т у р а

1. Точилин Р. Л., Пивоваров В. П., Гащенко А. Л., Манза В. П. Изготовление пластин и блоков из эпоксидных смол для исследования поляризационно-оптическим методом. "Заводская лаборатория", 33, 1967, № 6.

2. Уфлянд Я. С. Биполярные координаты в теории упругости. М., 1950.

3. Seika M. Stresses in a semi-infinite plate containing a U-type notch under uniform tension. Ing.-Arch., Bd. 27, 1960, N 5.

УДК 539.38

Р. І. МОКРИК, Д. В. ГРИЛІЦЬКИЙ

ДЕЯКІ КОНТАКТНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ІЗОТРОПНОГО ШАРУ МАЛОЇ ТОВЩИНИ

Розглядаємо задачу про тиск штамп на тонкий трансверсально ізотропний шар, що лежить на гладкій недеформованій основі. При розв'язуванні задачі використовується асимптотичний метод "малих" λ , розроблений В. М. Александровим [1, 2] $\lambda = h a^{-1}$ де h - товщина шару, a - половина максимального діаметра області контакту штамп з пружною основою.

§ 1. Як відомо [3], задача про пружну рівновагу безмежного трансверсально ізотропного шару товщиною h , у випадку, коли на його поверхнях $z = 0$ і $z = h$ діють тільки нормальні зусилля $q(x, y)$ зводиться до знаходження функції χ , яка задовольняє рівнянню (позначення ті ж, що в [3]):

$$D \left[(S_1 + S_2) \sin (S_1 - S_2) h D + (S_1 - S_2) \sin (S_1 + S_2) h D \right] X = \frac{q}{G_1}. \quad (1)$$

У випадку, коли навантаження $q(x, y)$ можна зобразити у формі інтегралу Фур'є

$$q(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\alpha', \beta') e^{i(\alpha'x + \beta'y)} d\alpha' d\beta', \quad (2)$$

де $Q(\alpha', \beta') = \frac{1}{2\pi} \iint_R q(x, y) e^{-i(\alpha'x + \beta'y)} d\alpha' d\beta'$; R — область завантаження, то розв'язком рівняння (1) буде функція

$$X = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\alpha', \beta')}{\Phi(\gamma_1^2)} e^{i(\alpha'x + \beta'y)} d\alpha' d\beta'; \quad (\gamma_1^2 = \alpha'^2 + \beta'^2). \quad (3)$$

$$\Phi(\gamma_1^2) = \gamma_1 h \left| (S_1 + S_2) \operatorname{sh} (S_1 - S_2) \gamma_1 h + (S_1 - S_2) \operatorname{sh} (S_1 + S_2) \gamma_1 h \right|, \quad (4)$$

а компонента тензора напружень σ_z і вектора зміщень W будуть мати вигляд

$$\sigma_z = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\alpha', \beta')}{\Phi(\gamma_1^2)} F_{\sigma_z}(\gamma, z, \gamma, h) e^{i(\alpha'x + \beta'y)} d\alpha' d\beta', \quad (5)$$

$$W = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\alpha', \beta')}{\Phi(\gamma_1^2)} F_W(\gamma, z, \gamma, h) e^{i(\alpha'x + \beta'y)} d\alpha' d\beta', \quad (6)$$

$$F_{\sigma_z} = \gamma_1 \left[-G_n(\alpha + \beta S_2^2) S_1 (\alpha - \beta S_1^2) \operatorname{sh} S_2 \gamma_1 h \operatorname{ch} S_1 \gamma_1 z - G_n(\alpha + \beta S_1^2) S_2 (\alpha - \beta S_2^2) \operatorname{sh} S_1 \gamma_1 h \operatorname{ch} S_2 \gamma_1 z \right], \quad (7)$$

$$F_W = \left[-G_n(\alpha + \beta S_2^2) (\gamma - \alpha S_1^2) \operatorname{sh} S_2 \gamma_1 h \operatorname{sh} S_1 \gamma_1 z - G_n(\alpha + \beta S_1^2) (\gamma - \alpha S_2^2) \operatorname{sh} S_1 \gamma_1 h \operatorname{sh} S_2 \gamma_1 z \right]. \quad (8)$$

§ 2. Розглянемо задачу про тиск гладкого штампу на пружний трансверсально ізотропний шар, який лежить без тертя на недеформованій основі.

Будемо вважати, що штамп є циліндричне тіло з поперечним перерізом Ω і область контакту збігається з Ω .

Граничні умови мають вигляд:

при $z=h$, $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$, $\sigma_z = 0$, поза Ω ,

$$W = -d(x, y) = -[d_0 - k_1 x + k_2 y - f(x, y)] \quad \text{в області } \Omega, \quad (9)$$

при $z=0$, $\tau_{zx} = \tau_{zy} = W = 0. \quad (10)$

Невідомим у задачі є тиск між штампом і шаром $q(x, y) = -\sigma_z(x, y)$. Використовуючи (9), (6) і (2), можна записати інтегральне рівняння для знаходження $q(x, y)$

$$\iint_{\Omega} q(\xi, \eta) K(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta = 4\pi^2 G_1 d(x, y), \quad (11)$$

де

$$K(x-\xi, y-\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(\gamma, h) e^{i[\alpha'(x-\xi) + \beta'(y-\eta)]} d\alpha' d\beta'; \quad (12)$$

$$H(\gamma, h) = \frac{G_1 n [(\alpha + \beta S_2^2)(\gamma - d S_1^2) - (\alpha + \beta S_1^2)(\gamma - d S_2^2)] \operatorname{sh} S_2 \gamma h \operatorname{sh} S_1 \gamma_1 h}{\gamma_1 [(S_1 + S_2) \operatorname{sh} (S_1 - S_2) \gamma_1 h + (S_1 - S_2) \operatorname{sh} (S_1 + S_2) \gamma_1 h]} \quad (13)$$

В (13) випливає, що при $S_1 \rightarrow 1$ і $S_2 \rightarrow 1$

$$H(\gamma, h) \rightarrow \frac{\operatorname{sh}^2 \gamma_1 h}{\gamma_1 [2\gamma_1 h + \operatorname{sh} 2\gamma_1 h]},$$

що відповідає випадку ізотропного шару [1].

Після ряду перетворень інтегральне рівняння (11) можна звести до вигляду:

$$\iint_{\Omega} q(\xi, \eta) K\left(\frac{\rho}{h}\right) d\xi d\eta = c \cdot h \cdot d(x, y), \quad (14)$$

де

$$K\left(\frac{\rho}{h}\right) = \int_0^{\infty} H(u) J_0\left(u \frac{\rho}{h}\right) du$$

$u = \chi h$, J_0 - функція Бесселя $c = \frac{4\pi}{n(\alpha\delta - \beta\gamma)}$, $\rho = \sqrt{(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \eta)^2}$.

§ 3. Надалі розглянемо випадок, коли $\lambda < 1$. Введемо нову систему координат x' , y' , зв'язану з границею області Ω так, що вісь y' напрямлена по дотичній до контура області Ω . Скориставшись схемою, запропонованою в [1,2], введемо інтегральне рівняння (14) до вигляду:

$$\int_0^\infty q(r) K^*(\sigma - r) dr = \frac{c}{h} \delta(\sigma), \quad (15)$$

де $\sigma = \frac{x'}{h}$; $K^*(\sigma - r) = \int_0^\infty \frac{H(u)}{u} \cos u (\sigma - r) du$.

Апроксимуючи функцію $\frac{H(u)}{u}$ з великим ступенем точності функцією $\frac{A}{\sqrt{u^2 + B^2}}$, де $A = \frac{s_1 + s_2}{2}$; $B = \frac{s_1 - s_2}{s_1 s_2}$, можна розв'язок шукати з інтегрального рівняння:

$$A \int_0^\infty q(r) K_0[(\sigma - r)B] dr = \frac{c}{h} \delta(\sigma) \quad \sigma \geq 0, \quad (16)$$

де $K_0(z)$ - циліндрична функція нульового порядку.

Інтегральне рівняння (16), ядро якого залежить від різниці аргументів, є рівнянням типу Вінера-Хопфа (4). Якщо ввести нову невідому функцію

$$\psi(\sigma) = \frac{h}{c} A \int_0^\infty q(r) K_0[(\sigma - r)B] dr \quad -\infty < \sigma < \infty, \quad (17)$$

($\psi(\sigma)$ - осадка точок поверхні шару поза штампом) то, розв'язуючи рівняння (16) методом Вінера-Хопфа, знайдемо $q(\sigma)$ при $\sigma \geq 0$ і $\psi(\sigma)$ при $\sigma < 0$.

Розглянемо випадок плоского круглого в плані штампа радіуса R $\delta(\sigma) = \sigma_0 = \text{const}$, $\sigma = \frac{R-r}{h}$. Тоді розв'язком (16) буде:

$$q(r) = c\sigma_0 \frac{B}{A} \left[\frac{e^{-B\sigma}}{\sqrt{\pi B \sigma}} + \text{erf} \sqrt{B \sigma} \right], \quad \sigma \geq 0,$$

$$\psi(\sigma) = \sigma_0 \left[1 - \text{erf}(\sqrt{B \sigma}) \right], \quad \sigma < 0.$$

З умови рівноваги штамп знаходимо залежність між силою зовнішнього навантаження P , зміщенням штамп δ_0 і розміром області контакту R

$$P = \pi c \delta_0 \frac{B}{A} R^2 \left[\frac{\lambda}{B} \left(1 + \frac{\lambda}{2B} \right) e^{-\frac{B}{\lambda}} + \left(1 + \frac{\lambda}{B} + 2 \frac{\lambda^2}{B^2} \right) \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{B}{\lambda}} \right) \right]$$

На рис. 1 наведені графіки, які показують залежність тиску під плоским круглим в плані штампом від радіальної координати $G = \frac{R-r}{h}$ для двох типів матеріалу: пісковика ($E = 5,35 \cdot 10^5$ кг/см²; $E_t = 4,4 \cdot 10^5$ кг/см²; $\nu = 0,18$; $\nu_t = 0,205$; $G = 2,28 \cdot 10^5$ кг/см²; $G_t = 1,55 \cdot 10^5$ кг/см²) і берилію ($E = 28 \cdot 10^5$ кг/см²; $E_t = 33,5 \cdot 10^5$ кг/см²; $\nu = 0,09$; $\nu_t = 0,04$; $G = 16,25 \cdot 10^5$ кг/см²; $G_t = 16,25 \cdot 10^5$ кг/см²). Розрахунки проведені для випадку $\lambda = 0,1$. Константи A і B мають вигляд:

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{1}{1-\nu} \left[\frac{G}{G_t} - \frac{E}{E_t} \nu_t \right] + \sqrt{\frac{2G(1-\nu_t)}{E_t(1-\nu)}}}; \quad B = \sqrt{\frac{\frac{E_t}{G_t} - 2\nu_t(1+\nu)}{1-\nu_t\nu_2}} + 2 \sqrt{\frac{E_t(1-\nu)}{2G(1-\nu_2)}}$$

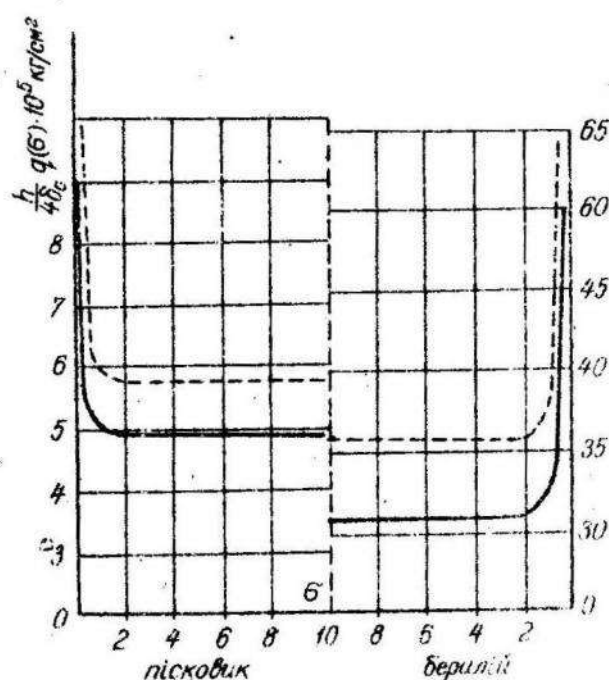


Рис. 1.

На рис. 1 пунктирною лінією зображено залежність тиску під штампом для ізотропного шару $E_t = E$; $G_t = G$; $\nu_t = \nu$; $B = 2$; $A = 1$.

Наведемо формули для тиску між штампом і шаром у випадку плоского еліптичного в плані штампу з півосями a та b . На осях $x=0$ і $y=0$ маємо таку залежність тиску від відповідних координат:

$$q(x,0) = c d_0 \frac{B}{A} \left\{ \frac{e^{-B \left(\frac{a-x}{h} \right)}}{\sqrt{\pi B \frac{a-x}{h}}} + \operatorname{erf} \left[\sqrt{B \left(\frac{a-x}{h} \right)} \right] \right\},$$

$$q(0,y) = c d_0 \frac{B}{A} \left\{ \frac{e^{-B \left(\frac{b-y}{h} \right)}}{\sqrt{\pi B \frac{b-y}{h}}} + \operatorname{erf} \left[\sqrt{B \left(\frac{b-y}{h} \right)} \right] \right\}.$$

У випадку параболоїдного круглого в плані штампа, коли $d'(r) = d_0 - \omega \frac{r^2}{a^2}$ (a - радіус площадки контакту, $\omega = \frac{a^2}{2R}$, R - радіус кривини параболоїда в його вершині). Формула для тиску набирає вигляду

$$q(r) = c \omega \lambda \frac{1}{A} \left\{ \left[\left(\frac{\lambda}{B} + 2 \right) \left(1 + 2 \frac{a-r}{h} B \right) - \frac{\lambda}{2B} \left(4 \frac{(a-r)^2 B^2}{h^2} + 4 \frac{(a-r)B}{h} - 1 \right) \right] \times \right.$$

$$\times \operatorname{erf} \left(\sqrt{B \frac{a-r}{h}} \right) + \left[\left(\frac{\lambda}{B} + 2 \right) 2 \frac{a-r}{h} B - \right.$$

$$\left. - \lambda \frac{a-r}{h} \left(1 + 2 \frac{a-r}{h} B \frac{e^{-B \frac{a-r}{h}}}{\sqrt{\pi B \frac{a-r}{h}}} \right) \right] \left. \right\},$$

причому між вертикальним зміщенням штампу і розмірами області контакту має місце залежність

$$d_0 = \omega \left[1 + \frac{2\lambda}{B} - \frac{\lambda^2}{2B^2} \right].$$

На рис. 2 наведені графіки залежності для тиску під круглим в плані параболоїдним штампом від радіальної координати для тих же самих матеріалів. З графіків видно, що вплив розглянутої анізотропії на величину контактних напружень може бути значним.

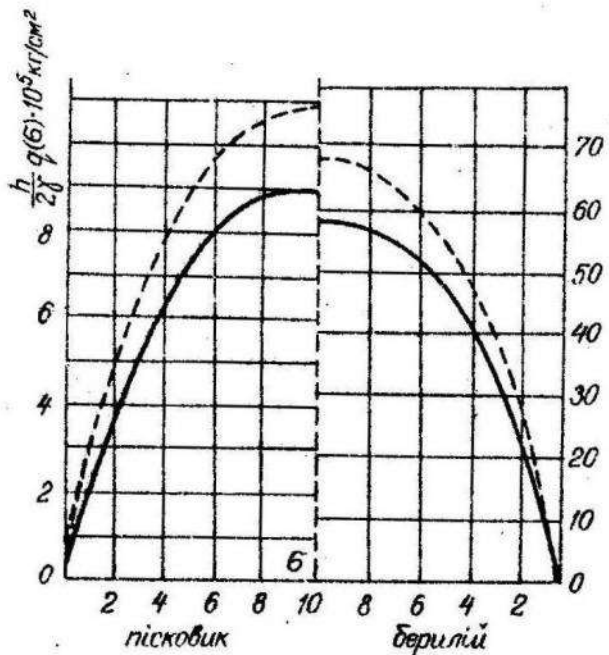


Рис. 2.

Л и т е р а т у р а

1. А л е к с а н д р о в В. М. К решению одного типа двумерных интегральных уравнений. ПММ, т. 28, вып. 3, 1964.
 2. А л е к с а н д р о в В. М. Асимптотическое решение контактной задачи для тонкого упругого слоя. ПММ, т. 33, вып. 1, 1969.
 3. Л е х и ц к и й С. Г. Упругое равновесие трансверсально изотропного слоя и толстой плиты. ПММ, т. 26, вып. 4, 1962.
 4. Н о б я В. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., ИЛ, 1962.
-