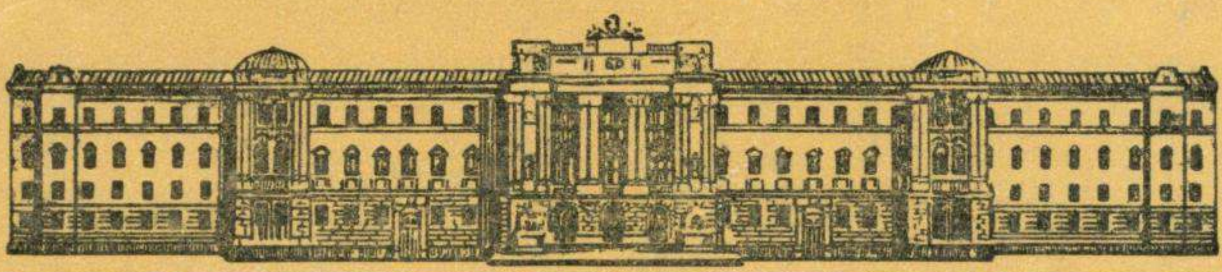


ЛЬВІВСЬКИЙ ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ім. Ів. ФРАНКА

ВІСНИК

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК 7

1972

ВИДАВНИЦТВО ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

ЛЬВІВСЬКИЙ ОРДЕНА ЛЕНІНА
ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ім. Ів. ФРАНКА

ВІСНИК

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК 7

ВИДАВНИЦТВО ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ
1972

УДК - 513

У збірнику вміщені статті з теорії функцій, теорії ймовірностей, диференціальних та інтегральних рівнянь, функціонального аналізу, геометрії і теорії пружності.
Розрахований на наукових працівників, аспірантів та студентів старших курсів.

2-2-3.2-4-2

УДК 517.944:947

МАРІЯ МАРТИНЕНКО

ПРО РОЗВ'ЯЗОК ЕЛІПТИЧНИХ СИСТЕМ В ОБЛАСТЯХ З "ЩІЛИНАМИ"

Доводиться, що за певних припущень розв'язок еліптичної системи може бути зображений за допомогою узагальненого потенціалу простого або подвійного шару.

Розглядається така еліптична система:

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) \equiv \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(B_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(C_i'(x)u\right) - \tag{1}$$

$$-\sum_{i=1}^{3} C_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + B_0(x)u = 0,$$

де $B_{ij}(x) = B_{ji}'(x)$, $B_0(x) = B_0'(x)$ (штрих означає транспонування). Ця система є загальною еліптичною системою другого порядку варіаційного типу від додатно визначеного функціоналу. Припускаємо, що коефіцієнти B_{ij} задовольняють умови*

$$-2\sum_{i,j=1}^{3}\widetilde{B}_{ij}\nu_i\tau_j = \tag{2}$$

$$= Re\left[\int_{+} A_0^{-1}(\beta\nu+\tau)d\beta\right]^{-1}\int_{+}\beta A_0^{-1}(\beta\nu+\tau)d\beta \sum_{i,j=1}^{3}(\widetilde{B}_{ij}+\widetilde{B}_{ji})\nu_i\nu_j ,$$

де $\widetilde{B}_{ij}+\widetilde{B}_{ji} = 2B_{ij}$, $\widetilde{B}_{ij} = \widetilde{B}_{ji}'$, ν та τ – одиничні вектори, $(\tau,\nu)=0$, $\int_{+}(\dots)\,d\beta$ – інтегрування за простим додатно орієнтовним замкненим контуром, який охоплює всі β корені рівняння $\det A_0(\beta\nu+\tau)=0$ з додатними уявними частинами,

---

* Ця умова вперше введена Волошиною М.С. [1]

$$A_0(\alpha) = \sum_{i,j=1}^{3} B_{ij}\,\alpha_i \alpha_j\,, \qquad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\,.$$

Систему (I) запишемо у вигляді

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) \equiv A_0\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) + A_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = 0\,, \tag{3}$$

де $A_0\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ – однорідний оператор другого порядку; $A_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ – оператор, що містить всі інші похідні, $x = (x_1, x_2, x_3)$. Припускаємо, що коефіцієнти оператора $A_0\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ неперервно диференційовані три рази в E_3, коефіцієнти при похідних порядку j ($j = 0, 1$) в операторі $A_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ неперервно диференційовані в E_3 j раз, причому коефіцієнти оператора $A_0\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ будуть порядку $O(F(x))$, похідні до другого порядку від цих коефіцієнтів, коефіцієнти оператора $A_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ та їх похідні до другого порядку зростають не швидше, ніж $F(x)$ при $|x| \to \infty$, де $F(x)$ – така додатна в E_3 функція, що

$$\iiint\limits_{\infty} \frac{dx}{F(x)} < \infty \qquad \text{та} \qquad \frac{|\det(A_0(x, 2\pi i \alpha) - \lambda^2 I)|}{[F(x)]^p |\alpha|^{2p} + \lambda^{2p}} \geq \mu > 0 \tag{4}$$

для кожної точки $x \in E_3$ та для кожної дійсної точки $(\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq 0$, λ – достатньо велике додатне число.

За цих припущень існує фундаментальна матриця системи (I) в евклідовому просторі [2], а ядра потенціалів задач Діріхле та Неймана для системи (I) мають тільки точкову особливість [1].

Позначимо E_3 – тривимірний простір; S – незамкнена поверхня Ляпунова, обмежена гладкою кривою $\mathcal{T}$; $E_3 \setminus S$ – простір зовні S (простір з розрізом вздовж S).

Т е о р е м а I. Нехай функції $u(M)$ та $v(M)$ двічі неперервно диференційовані у $E_3 \setminus S$, регулярні на нескінченності, неперервно диференційовані аж до поверхні S за винятком лінії $\mathcal{T}$, в околі якої їх перші похідні ростуть не швидше ніж $\frac{C}{R_o^{\alpha}(M)}$, де $R_o(M)$ – віддаль до $\mathcal{T}$, $C = const$, $0 < \alpha < 1$. Тоді мають місце такі формули:

$$\iiint_{\omega}\left[v'(x)A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x) + B(u,v)\right]dx = \tag{5}$$

$$= -\iint_S v'_+(y)B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)u_+(y)d_yS + \iint_S v'_-(y)B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)u_-(y)d_yS ,$$

$$\iiint_{\omega}\left\{v'(x)A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x) - \left[u'(x)A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)v(x)\right]'\right\}dx =$$

$$= -\iint_S\left\{v'_+(y)B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)u_+(y) - \left[u'_+(y)B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)v_+(y)\right]'\right\}d_yS + \tag{6}$$

$$+\iint_S\left[v'_-(y)B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)u_-(y) - \left[u'_-(y)B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)v_-(y)\right]'\right]d_yS ,$$

де $dx = (dx_1, dx_2, dx_3)$; штрих означає для звичайної матриці транспонування, а для операторної – ще і перехід до спряженої за Лагранжем; [1]

$$B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right) = 2\sum_{i,j=1}^{3}\nu_i(y)\tilde{B}_{ij}(y)\frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{i=1}^{3}C_i'(y)\nu_i(y) ;$$

$\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – орт нормалі до S ; u_+ , $B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)u_+$, u_- , $B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)u_-$ позначають граничні значення u та $B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)u$ при наближенні до поверхні S по напрямку додатної та від'ємної нормалі відповідно.

Для доведення теореми побудуємо навколо лінії $\mathcal{T}$ трубчасту поверхню як обгортку множини сфер радіуса ε , центри яких лежать на кривій $\mathcal{T}$. Оточимо тепер поверхню S замкненою кусково-гладкою поверхнею S_ε , яка складається з двох поверхонь, "паралельних" до поверхні S і розташованих по різні сторони від S , та з'єднуючої їх частини T_ε трубчастої поверхні; при цьому будемо вважати, що віддаль між поверхнею S та S_1 дорівнює ε , де ε – поки довільна мала величина. Позначимо через D_ε необмежену область, границя якої є поверхня S_ε . Для довільних функцій $u(M)$ та

$v(M)$ неперервно диференційовних у D_ε аж до границі та двічі неперервно диференційовних всередині області D_ε , наявні такі формули:

$$\iiint\limits_{D_\varepsilon}\left\{v'(x)\,A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)+B(u,v)\right\}dx=$$
$$=-\iint\limits_{S_\varepsilon}v'(y)\,B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)u(y)\,d_yS\,, \tag{7}$$
$$\iiint\limits_{D_\varepsilon}\left\{v'(x)A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)-\left[u'(x)A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)v(x)\right]'\right\}dx=$$
$$=-\iint\limits_{S_\varepsilon}\left\{v'(y)B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)u(y)-\left[u'(y)B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)v(y)\right]'\right\}d_yS\,.$$

Це - перша та друга формули Гріна, як відомо, вони мають місце для областей з кусково-гладкою межею.

Перейдемо в формулах (7) до границі при $\varepsilon\to 0$. Очевидно, що границя правих частин буде існувати, якщо інтеграли по трубчастій поверхні T_ε від правих частин формул (7) будуть прямувати до нуля, коли $\varepsilon\to 0$. Введемо на поверхні T_ε дві змінні φ та l , з яких φ є кутом, що зростає від нуля до 2π , а l - довжина дуги лінії $\mathcal{T}$, що відраховується від деякої фіксованої точки в певному напрямку. Тоді елемент площі поверхні трубки T_ε дорівнюватиме $\varepsilon\, dl\, d\varphi$, а інтеграли по трубчастій поверхні від правих частин формул (7) будуть $\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\ell}(\ldots)\,\varepsilon\, dl\, d\varphi$.

Звідси випливає, що при $\varepsilon\to 0$ вищеназвані інтеграли прямують до нуля внаслідок зроблених припущень відносно функцій u та v . Тому в границі при $\varepsilon\to 0$ одержимо формули Гріна (5), (6) для простору з розрізом вздовж S .

Якщо функції u та v визначені в обмеженій області, границя якої складається зі скінченої кількості гладких компонент, що не перетинаються між собою $S=\sum\cup\sigma$, де через $\sum=\bigcup\limits_k\sum_k$ позначено сукупність гладких замкнених поверхонь $\sum_k$, а через $\sigma=\bigcup\limits_k\sigma_k$ - сукупність гладких незамкнених поверхонь σ_k , обмежених гладкими кривими $\mathcal{T}_k$, і мають відповідну кількість похідних у цій області, причому перші похідні функцій $u(M)$ та $v(M)$ поблизу лінії $\mathcal{T}_k$ ведуть себе як $\frac{C}{R_k^\alpha(M)}$, де C - стала; $R_k(M)$ - віддаль від точки M до лінії $\mathcal{T}_k$; $0\le\alpha<1$, тоді мають місце такі формули Гріна:

$$\iiint\limits_{D}\left\{v'(x)\,A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)+B(u,v)\right\}dx=$$

$$=-\iint\limits_{\Sigma}v'(y)\,B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)u(y)\,d_yS-\iint\limits_{\sigma}v'(y)\,B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)u(y)\,d_yS,$$

$$\iiint\limits_{D}\left\{v'(x)\,A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)-\left[u'(x)\,A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)v(x)\right]'\right\}dx=$$

$$=-\iint\limits_{\Sigma}\left\{v'(y)\,B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)u(y)-\left[u'(y)\,B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)v(y)\right]'\right\}d_yS-$$

$$-\iint\limits_{\sigma}\left\{v'(y)\,B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)u(y)-\left[u'(y)\,B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)v(y)\right]'\right\}d_yS.$$

Наявні тут інтеграли по незамкненим поверхням слід розуміти як інтеграли по двосторонній поверхні, тобто

$$\iint\limits_{\sigma_k}f\,d_yS=\iint\limits_{\sigma_k}f_+\,d_yS+\iint\limits_{\sigma_k}f_-\,d_yS,$$

де f_+ та f_- – граничні значення f при наближенні до σ_k "зверху" та "знизу".

Т е о р е м а 2. Нехай $u(x)$ – розв'язок системи (I) у просторі з розрізом вздовж незамкненої поверхні Ляпунова, обмеженої гладкою кривою, регулярний на нескінченності, неперервно ди ференційовний у всьому просторі аж до розрізу за винятком границі цього розрізу, в околі якої він обмежений, а його перші похідні ростуть не швидше, ніж $\frac{C}{R_0^\alpha}$, де C – стала; R_0 – віддаль до границі розрізу; $0\le\alpha<1$. Тоді, якщо при наближенні до розрізу по напрямку додатної та від'ємної нормалі цей розв'язок набирає однакових значень $\left\{[u]_+=[u]_-\right\}$, то він зображається у вигляді узагальненого потенціалу простого шару, коли ж при наближенні до внутрішніх точок розрізу "зверху" та "знизу" (границю виключаємо) –

$$\left[B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)u(y)\right]_{+}=\left[B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)u(y)\right]_{-},$$

то він зображається у вигляді узагальненого потенціалу подвійного шару.

Для доведення теореми застосуємо другу формулу Гріна (6) до вектор-функції $v(y)=\varphi(x,y)$ (де $\varphi(x,y)$ - фундаментальна матриця системи (1)[*] та до розв'язку $u(x)$ системи (1)

$$u(x)=-\iint_S\left\{\varphi'(x,y)\left[B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)u(y)\right]_{+}-\left[u'(y)B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi(x,y)\right]'_{+}\right\}d_yS+$$

$$+\iint_S\left[\varphi'(x,y)\left[B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)u(y)\right]_{-}-\left[u'(y)B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi(x,y)\right]'_{-}\right\}d_yS,$$

або

$$u(x)=\iint_S\left\{\left\{\left[u'(y)B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi(x,y)\right]'_{+}-\left[u'(y)B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi(x,y)\right]'_{-}\right\}-\right.$$
$$\left.-\left\{\varphi'(x,y)\left[B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)u(y)\right]_{+}-\varphi'(x,y)\left[B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)u(y)\right]_{-}\right\}\right\}d_yS. \tag{8}$$

З (8) випливає, що коли розв'язок $u(x)$ системи (1) набирає на S "зверху" та "знизу" однакових значень, тобто $u_+(x)=u_-(x)$, то

$$u(x)=\iint_S\varphi'(x,y)\mu(y)\,d_yS, \tag{9}$$

де

$$\mu(y)=\left[B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)u(y)\right]_{-}-\left[B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)u(y)\right]_{+} \tag{10}$$

Аналогічно, якщо $u(x)$ на S задовольняє умову

$$\left[B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)u(y)\right]_{+}=\left[B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)u(y)\right]_{-},$$

то

$$u(x)=\iint_S\left[B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi(x,y)\right]'\nu(y)\,d_yS, \tag{11}$$

---

[*] Існування $\varphi(x,y)$ випливає із зроблених припущень відносно коефіцієнтів системи (1).

де

$$\vartheta(y) = U_+(y) - U_-(y)$$

Формули (9) та (11) показують, що при виконанні сформульованих у теоремі 2 умов розв'язок системи (1) у просторі з розрізом зображається у вигляді узагальненого потенціалу простого або подвійного шару. При цьому густина узагальненого потенціалу простого шару на границі поверхні шару може мати особливість типу $\frac{C}{R_0^\alpha}$, де $C = const$; $0 \leq \alpha < 1$, R_0 - віддаль до границі поверхні шару. Це випливає з (10).

Теорема 2 узагальнює відомий результат класичної теорії потенціалу [3]. Для часткового випадку рівняння Лапласа ця теорема обгрунтовує використання потенціалу простого шару [4] для ефективного розв'язання задачі Діріхле у просторі з розрізом.

Література

1. Волошина М. С. Про деякі властивості одного класу сильно еліптичних систем диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами. ДАН УРСР, 1958, № 10, 1033-1036.

2. Мельник Д. П. Фундаментальна матриця системи варіаційного типу для необмеженого простору. ДАН УРСР, 1958, № 6.

3. Сретенский Л.Н. Теория Ньютоновского потенциала. М., 1946.

4. Старокадомський Л. О. Потенціал простого шару та інтегральне рівняння 1-го роду з логарифмічною особливістю. Вісник Львівського університету, № 3, серія мех.-мат. Вид-во Львівського ун-ту, 1967.

УДК 519.21

І.Д.КВІТ

КОНТИНУАЛЬНА ЗГОРТКА

В с т у п. Нехай невід'ємнозначна випадкова змінна ξ буде абсолютно неперервна з густиною

$$p(t)=\begin{cases} =0, & t<0, \\ \geq 0, & t>0, \end{cases} \qquad \int_0^\infty p(t)dt=1. \tag{1}$$

Густина суми двох незалежних абсолютно неперервних невід'ємнозначних випадкових змінних, відповідно з густинами $p(t)$ і $q(t)$, дорівнює згортці

$$p(t)*q(t)\equiv\int_0^t p(\tau)q(t-\tau)d\tau, \quad t>0. \tag{2}$$

Якщо два незалежні доданки однаково розподілені, то густину суми, тобто згортку $p(t)*p(t)$, позначаємо коротше $p(t)\Big|_*^2$. Покажемо, що бувають випадки, коли, при довільному додатному l, символ $p(t)\Big|_*^l$ має сенс і є густиною. Тоді вираз $p(t)\Big|_*^l$ називається континуальною згорткою порядку l. Поняття континуальної згортки використовується для виведення генеалогії гама та беселевого розподілів з експонентного розподілу.

З о б р а ж е н н я г у с т и н и. Лапласівське інтегральне перетворення густини (1) назвемо зображенням і позначимо його через $\varphi(z)$;

$$\varphi(z)\equiv Lp(t)=\int_0^\infty e^{-zt}p(t)dt, \qquad (z=x+iy=Re\,z+iJm\,z, \quad i=\sqrt{-1}). \tag{3}$$

Звернемо увагу на деякі властивості зображення (3).

1. Зображення (3) абсолютно збігається принаймні на півплощині $Re\,z\geq 0$. Справді,

$$|\varphi(z)|\leq\int_0^\infty e^{-Re\,z\cdot t}p(t)dt\leq\int_0^\infty p(t)dt=1. \tag{4}$$

Нерівність (4) можемо записати ще у вигляді

$$|\varphi(z)|\leq\varphi(x)\leq\varphi(0)=1. \tag{4'}$$

2. Всі зображення густин на континуальній сукупності прямих $Re\, z = x \geqslant 0$ мають властивість

$$\lim_{|y| \to \infty} \varphi(z) = 0. \tag{5}$$

Це випливає з теореми Рімана-Лебега [2]. Якщо функція $r(t)$ інтегровна в інтервалі (a, b), то при $|y| \to \infty$

$$\int_a^b r(t) e(yt)\, dt \to 0, \tag{6}$$

де функція $e(yt)$ є або $\cos yt$, або $\sin yt$, або e^{iyt}; кожний вираз зліва в (6), при $|y| \to \infty$, є $O\left(\frac{1}{|y|}\right)$. Справді,

$$\varphi(z) = \int_0^\infty e^{-xt} \rho(t) e^{-iyt}\, dt = \int_0^\infty e^{-xt} \rho(t) \cos yt\, dt - i \int_0^\infty e^{-xt} \rho(t) \sin yt\, dt. \tag{3'}$$

Оскільки $r(t) = e^{-xt} \rho(t)$ інтегровна, при кожному $x \geqslant 0$, в інтервалі $(a, b) = (0, \infty)$, то (5) доведено. Крім того,

$$|\varphi(z)| = O\left(\frac{1}{|y|}\right), \qquad (x \geqslant 0,\ |y| \to \infty). \tag{7}$$

3. З (3') випливає, що рівномірно відносно y,

$$\lim_{x \to \infty} \varphi(z) = 0. \tag{8}$$

Тепер, з (5) та (8) виходить, що при $Re\, z \geqslant 0$,

$$\lim_{z \to \infty} \varphi(z) = 0. \tag{9}$$

4. З (3') записуємо

$$\varphi(\bar{z}) = \overline{\varphi(z)}, \tag{10}$$

де рисочка зверху означає комплексну опряженість.

5. Коли (3) записати у вигляді

$$\varphi(z) = u(x,y) + i v(x,y); \qquad u = \int_0^\infty e^{-xt} \rho(t) \cos yt\, dt, \quad v = -\int_0^\infty e^{-xt} \rho(t) \sin yt\, dt; \tag{3''}$$

то відразу видно, що при кожному $x \geqslant 0$, реальна частина зображення є парною функцією y, а уявна частина - непарною функцією y

$$u(x,-y)=u(x,y), \qquad v(x,-y)=-v(x,y), \tag{11}$$

причому

$$u(x,0)=\varphi(x), \qquad v(x,0)\equiv 0.$$

6. Зображення (3) є аналітичною функцією принаймні на правій півплощині $Re\,z>0$. Дійсно, як видно з (3''), $u(x,y)=Re\,\varphi(z)$ та $v(x,y)=Jm\,\varphi(z)$ задовольняють рівняння Коші-Рімана для $x>0$.

Відзначимо, що коли довільна функція $p(t)$ задовольняє умову

$$|p(t)|\leqslant Me^{x_0 t}, \qquad (t>0; \quad M>0, \quad x_0\geqslant 0), \tag{12}$$

де M та x_0 - сталі, то (3) існує та є аналітичною функцією на півплощині $Re\,z>x_0$.

7. З (3) видно, що $\varphi(x)$ з ростом x від 0 до ∞ монотонно спадає від 1 до 0. Таким чином, зображення густини на додатній частині дійсної осі є хвостом деякої функції розподілу $F(x)$. Докладніше

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-\varphi(x), & x\geqslant 0.\end{cases} \tag{13}$$

Співвідношення (13) показує, що кожній абсолютно неперервній невід'ємнозначній випадковій змінній з густиною (1) і зображенням (3) ставиться у відповідність невід'ємнозначна випадкова змінна з функцією розподілу (13). Наприклад, для експонентно розподіленої випадкової змінної маємо

$$p(t)=\lambda e^{-\lambda t}, \qquad (t>0, \ \lambda>0); \qquad \varphi(z)=\frac{\lambda}{z+\lambda}; \qquad F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x}{x+\lambda}, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

Оскільки функція (3) аналітична в правій півплощині, то існує $\varphi'(x)$ при $x>0$, і $F'(x)=-\varphi'(x)$ при $x>0$ є густиною.

8. Задана на $(0, \infty)$ функція φ називається цілком монотонною, якщо вона має похідні $\varphi^{(n)}$ всіх порядків та

$$(-1)^n\varphi^{(n)}(x)\geqslant 0, \qquad x>0. \tag{14}$$

Зображення, як аналітична функція при $Re\, z > 0$, має в правій півплощині похідні всіх порядків, причому

$$(-1)^n \varphi^{(n)}(z) = \int_0^\infty e^{-zt} t^n \rho(t)\, dt\,, \qquad (n = 1, 2, \dots;\ \ Re\, z > 0). \tag{14'}$$

Очевидно, що

$$\int_0^\infty e^{-xt} t^n \rho(t)\, dt \geqslant 0, \qquad x > 0. \tag{14''}$$

Отже, зображення (3) – сповна монотонна функція на додатному боці дійсної осі.

Якщо випадкова змінна ξ з густиною (I) має початковий момент (n - I)-го порядку, то відповідно пронормований вираз (I4$''$) буде густиною, залежною від параметра n. Наприклад, коли $\rho(t)$ – експонентна густина, то дістанемо сім'ю густин

$$q_n(x) = \frac{n\lambda^n}{(\lambda + x)^{n+1}}\,, \qquad (n = 1, 2, \dots;\ \lambda > 0;\ \ x > 0).$$

9. Легко перевірити, що зображення згортки дорівнює добуткові зображень густин, які сплітаємо. Зокрема, коли два незалежні доданки однаково розподілені з густиною (I) і зображенням (3), то згортка $\rho(t)\big|_*^2$ має зображенням квадрат $\varphi(x)$

$$L\rho(t)\big|_*^2 = \varphi^2(z).$$

Очевидно, що густина суми n незалежних однаково розподілених випадкових змінних з густиною (I) і зображенням (3) має зображенням $\varphi^n(z)$

$$L\rho(t)\big|_*^n = \varphi^n(z), \qquad (n = 2, 3, \dots). \tag{15}$$

10. Універсальним засобом знаходження розв'язку інтегрального рівняння (3), коли $\varphi(z)$ – відома, а $\rho(t)$ – шукана функція, є зворотна формула: у кожній точці неперервності густини, коли $t > 0$, маємо

$$\rho(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c - i\infty}^{c + i\infty} e^{\zeta t} \varphi(\zeta)\, d\zeta\,, \tag{16}$$

де $c>0$, c - довільна стала; ζ - біжуча точка на шляху інтегрування прямої $Re\,z=c$, інтеграл (16) не залежить від вибору сталої c і його розуміємо в сенсі головного значення Коші. Зворотна формула (16) символічно записується так:

$$\rho(t)=L^{-1}\varphi(z), \quad t>0. \qquad (16')$$

Формула (16) виводиться в [1].

К о н т и н у а л ь н е з о б р а ж е н н я т а к о н т и н у а л ь н а з г о р т к а. Нехай зображення (3) не має нулів у правій півплощині $Re\,z>0$. Тоді при довільному додатному l, $\varphi^{l}(z)$ розуміємо як $e^{l\ln\varphi(z)}$, де $\ln\varphi(z)$ є головним значенням логарифма. Нехай далі

$$(-1)^{n}\psi^{(n)}(z)\geq 0,\ z>0,\ (n=1,2,\ldots);\ \psi(z)=\left[\ln\frac{1}{\varphi(z)}\right]',\ \varphi(z)\neq 0,\ Re\,z>0. \qquad (17')$$

Тоді $\varphi^{l}(z)$ буде зображенням безмежно подільного розподілу [3]. Вираз $\varphi^{l}(z)$ назвемо континуальним зображенням порядку l, $l>0$. Густину, відповідну континуальному зображенню порядку l, назвемо за означенням континуальною згорткою порядку l, відповідною густині $\rho(t)$, що має зображенням $\varphi(z)$, і позначимо через $\rho(t)\big|_{*}^{l}$:

$$\rho(t)\Big|_{*}^{l}=L^{-1}\varphi^{l}(z), \qquad (\varphi(z)\neq 0,\ Re\,z>0;\ l>0). \qquad (17)$$

Відповідну густині (1) випадкову змінну ξ назвемо тоді континуально сумовною. Зауважимо, що при натуральному $l=n$, $(n=2,3,\ldots)$, $\varphi^{n}(z)$ має сенс без ніяких обмежень на $\varphi(z)$, і

$$\rho(t)\Big|_{*}^{n}=L^{-1}\varphi^{n}(z), \qquad (n=2,3\ldots),$$

є густиною суми n незалежних однаково розподілених випадкових змінних з густиною (1) і зображенням (3).

Очевидно, що континуальна згортка (17) при довільних додатних σ і τ задовольняє співвідношення

$$\left(\rho(t)\Big|_{*}^{\sigma}\right) * \left(\rho(t)\Big|_{*}^{\tau}\right) = \rho(t)\Big|_{*}^{\sigma+\tau}, \quad (\varphi(z)\neq 0,\ Re\, z>0;\ \sigma>0, \tau>0). \tag{18}$$

При кожному $l>0$ густина (17) описує деяку випадкову змінну $\eta(l)$. Сукупність випадкових змінних $\eta(l)$ залежна від неперервного параметра l, $l>0$, є випадковим процесом. Процес керований густиною (17), що задовольняє співвідношення (18), є процесом зі стаціонарними незалежними приростами [3] . Таким чином, випадкова змінна ξ з густиною (1) і зображенням (3), у випадку (17′) породжує випадковий процес $\eta(l)$ зі стаціонарними незалежними приростами та густиною (17) приростів

$$\eta(\sigma+l)-\eta(\sigma).$$

Одиниця операції згортання. Розглянемо густину

$$q_{\varepsilon}(t)=\begin{cases} 0, & t<0, \quad t>\varepsilon>0, \\ \frac{1}{\varepsilon}, & 0\le t\le \varepsilon. \end{cases} \tag{19}$$

Очевидно, що

$$\int_0^{\infty} q_{\varepsilon}(t)dt=1, \qquad L\,q_{\varepsilon}(t)=1+O(\varepsilon). \tag{20}$$

У (19) і (20) спрямуємо ε до нуля. Дістанемо невластиву густину

$$\lim_{\varepsilon\to 0} q_{\varepsilon}(t)=\begin{cases} 0, & t\neq 0, \\ +\infty, & t=0, \end{cases} \equiv \delta(t), \qquad \int_0^{\infty}\delta(t)dt=1, \quad L\delta(t)=1. \tag{21}$$

Нехай $\rho(t)$ буде густиною довільної невід'ємнозначної випадкової змінної. Оскільки зображення згортки дорівнює добуткові зображень густин, які сплітаються, то, з огляду на (21), випливає, що

$$L\left\{\rho(t)*\delta(t)\right\}=\left\{L\rho(t)\right\}\cdot\left\{L\delta(t)\right\}=L\rho(t),$$

або ж

$$\rho(t)*\delta(t)=\rho(t). \tag{22}$$

Отже, δ - функція (21) відіграє роль одиниці відносно операції згортання.

В и п а д к о в а   з г о р т к а. Нехай $\{\xi_k\}$, $(k=1,2,\dots)$ буде послідовність абсолютно неперервних невід'ємнозначних взаємнонезалежних і однаково розподілених випадкових змінних з густиною (1) та зображенням (3). Тоді зображення суми $\eta_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ дорівнює (15). А $\varkappa$ буде невід'ємнозначною цілочисельною випадковою змінною, незалежною від усіх ξ_k, $(k=1,2,\dots)$, що має генератрису $h(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} P\{\varkappa=n\}z^n$, $|z|\le 1$. Утворимо суму випадкового числа $\varkappa$ випадкових змінних ξ_k

$$\eta_\varkappa = \xi_1 + \dots + \xi_\varkappa, \qquad (\varkappa=1,2,\dots); \qquad \eta_0=0.$$

Згідно з формулою повної ймовірності, функція розподілу $\eta_\varkappa$ записується

$$P\{\eta_\varkappa \le t\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\varkappa=n\}P\{\eta_n \le t\}.$$

Звідси, упохіднюючи по t, дістаємо густину $\eta_\varkappa$

$$p(t)\Big|_*^{\varkappa} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\varkappa=n\}\, p(t)\Big|_*^{n}, \qquad p(t)\Big|_*^{1} = p(t), \quad p(t)\Big|_*^{0} = \delta(t). \tag{23}$$

Зображення випадкової згортки (23), тобто густини $\eta_\varkappa$ набирає вигляду

$$\omega(z) = L\,p(t)\Big|_*^{\varkappa} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\varkappa=n\}\, L\,p(t)\Big|_*^{n} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\varkappa=n\}\varphi^n(z) = h(\varphi(z)). \tag{24}$$

П р и к л а д и. 1. Треба знайти континуальну згортку для густини експонентного розподілу.

Оскільки

$$L e^{-at} t^{b} = \frac{\Gamma(b+1)}{(z+a)^{b+1}}, \qquad (a \ge 0, \quad b > -1), \tag{25}$$

та зображення експонентного розподілу

$$L \lambda e^{-\lambda t} = \frac{\lambda}{z+\lambda}, \qquad (\lambda > 0),$$

задовольняє умову (17′), то за означенням (17) згортка порядку $l>0$ для густини експонентного розподілу записується

$$p(t)\Big|_*^{l} = L^{-1}\left(\frac{\lambda}{z+\lambda}\right)^{l} = \frac{\lambda^{l} e^{-\lambda t} t^{l-1}}{\Gamma(l)}, \quad (l>0,\ \lambda>0). \tag{26}$$

Відзначимо, що (26) є густиною гама-розподілу, а при $l = 2,3, \dots$ – густиною розподілу Ерланга. Тому гама-розподіл є континуальною згорткою для густин незалежних однаково експонентно розподілених випадкових змінних.

2. Знайти густину відповідну зображенню

$$\varphi(z)=\left(\frac{\alpha}{z+\alpha}\right)^{\nu} e^{-\frac{\beta^2 z}{4\alpha(z+\alpha)}}, \quad (\alpha>0,\ \beta>0,\ \nu>0) \tag{27}$$

Перший множник у (27) є зображенням густини гама-розподілу. Згідно з (26), маємо

$$L^{-1}\left(\frac{\alpha}{z+\alpha}\right)^{\nu} = \frac{\alpha^{\nu} e^{-\alpha t} t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} = \alpha e^{-\alpha t}\Big|_*^{\nu}. \tag{28}$$

Для другого множника в (27), згідно з (21) та (26), дістаємо

$$L^{-1}\left\{e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} e^{\frac{\beta^2}{4(z+\alpha)}}\right\} = e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} L^{-1}\left\{1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)^{k}\left(\frac{\alpha}{z+\alpha}\right)^{k}\right\} =$$

$$= e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}\left\{\delta(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)^{k}\frac{\alpha^{k} e^{-\alpha t} t^{k-1}}{\Gamma(k)}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)^{k} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}\alpha e^{-\alpha t}\Big|_*^{k}$$

Останній вираз, з огляду на (23), є пуасонівською випадковою згорткою густин однаково показниково розподілених випадкових змінних. Отже,

$$L^{-1}\varphi(z) = \left\{\alpha e^{-\alpha t}\Big|_*^{\nu}\right\} * \left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)^{k} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}\cdot\alpha e^{-\alpha t}\Big|_*^{k}\right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)^{k} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}\cdot\alpha e^{-\alpha t}\Big|_*^{k+\nu}.$$

Таким чином, враховуючи (28), маємо·

$$L^{-1}\varphi(z)=\alpha^{\nu} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} e^{-\alpha t} t^{\nu-1} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,\Gamma(k+\nu)} \left(\frac{\beta\sqrt{t}}{2}\right)^{2k+\nu-1} \right\} \left(\frac{2}{\beta\sqrt{t}}\right)^{\nu-1} .$$

За допомогою модифікованої функції Беселя

$$J_{\nu-1}(\tau)=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,\Gamma(k+\nu)} \left(\frac{\tau}{2}\right)^{2k+\nu-1}, \tag{29}$$

запишемо густину, відповідну зображенню (27), у вигляді

$$L^{-1}\varphi(z)=\alpha^{\nu}\left(\frac{2}{\beta}\right)^{\nu-1} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} e^{-\alpha t} t^{\frac{\nu-1}{2}} J_{\nu-1}(\beta\sqrt{t}),\ (t>0). \tag{30}$$

Густину (30) природно назвати густиною Беселя. Легко перевірити, що при $\alpha=\lambda$, $\beta=0$, $\nu=l$, густина Беселя (30) стає густиною гама-розподілу (26). Співвідношення (27) і (30) вказують на те, що беселів розподіл є розподілом суми двох незалежних випадкових змінних, з яких одна є континуальною сумою незалежних експонентно розподілених випадкових змінних, а друга - пуасонівською випадковою сумою незалежних експонентно розподілених випадкових змінних. Така генеалогія розподілу Беселя.

Література

І. Квіт І. Д. Випадкова змінна та випадковий процес. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1968.

2. Титчмарш Е. Теория функций. М.-Л., 1951.

3. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, том 2, М., 1967.

УДК 517.94

Й.Г.ШІПКА

ПРО ОДНУ РЕАЛІЗАЦІЮ МЕТОДУ НЬЮТОНА-КАНТОРОВИЧА

Дослідженню методу Ньютона-Канторовича присвячено ряд статей [1-4].

Ми поставили собі на меті дослідити як застосовується модифікований метод Ньютона-Канторовича для розв'язування нелінійного інтегро-диференціального рівняння

$$u(x)=\lambda\int_a^b K[x,t,u(t),u'(t)]\,dt, \tag{1}$$

$$u\in C'[a;b], \quad u(a)=u(b)=0. \tag{2}$$

Нехай ядро $K(x,t,u,v)$ буде неперервно-диференційованим і задовольняє умовам

$$\|K'_u(x,t,u_1,v_1)-K'_u(x,t,u_2,v_2)\|\le a_0\|u_1-u_2\|+b_0\|v_1-v_2\|, \tag{3}$$

$$\|K'_v(x,t,u_1,v_1)-K'_v(x,t,u_2,v_2)\|\le a_1\|u_1-u_2\|+b_1\|v_1-v_2\|. \tag{4}$$

Тоді диференціал Фреше оператора

$$P(u)=u-\lambda\int_a^b K(x,t,u,u')\,dt \tag{5}$$

у точці u_0 буде мати вигляд

$$P'(u_0)h(x)=h(x)-\lambda\int_a^b[K'_u(x,t,u_0,u_0')h(t)+K'_v(x,t,u_0,u_0')h'(t)]\,dt,$$

і похідна Фреше задовольняє умові

$$\|P'(u_1)-P'(u_2)\|\le L(\|u_1-u_2\|+\|u_1'-u_2'\|). \tag{6}$$

Згідно з модифікованим методом Ньютона-Канторовича послідовні наближення знаходимо за такою схемою

$$u_{n+1}=u_n-[P'(u_0)]^{-1}P(u_n). \tag{7}$$

Нехай $u_0 = 0$. Позначимо $K_u'(x,t,0,0) = K_0(x,t)$, $K_v'(x,t,0,0) = K_1(x,t)$.

Тоді можна записати, що

$$P'(0) = I - \lambda \int_a^b \left[K_0(x,t) - \frac{\partial K_1(x,t)}{\partial t} \right] dt,$$

де I - тотожний оператор.

Припустимо, що

$$\| K_0(x,t) \| \le M_0, \quad \left\| K_0(x,t) - \frac{\partial K_1(x,t)}{\partial t} \right\| \le M_1 .$$

Тоді за теоремою Банаха [1] для існування оберненого оператора $\Gamma_0 = [P'(0)]^{-1}$ можна записати достатню умову

$$|\lambda| < \frac{1}{M_1(b-a)}. \tag{8}$$

За цією ж теоремою має місце оцінка

$$\| \Gamma_0 \| \le \frac{1}{1-|\lambda| M_1(b-a)} = B_0 .$$

Тоді

$$\| \Gamma_0 P(0) \| \le \frac{|\lambda| M_0 (b-a)}{1-|\lambda| M_1 (b-a)} = \eta_0^0 .$$

Щоб знайти кожне послідовне наближення, необхідно розв'язувати лінійне інтегральне рівняння

$$U_{n+1} - \lambda \int_a^b K_2(x,t) U_{n+1} dt = \lambda \int_a^b \left[K(x,t,u_n,u_n') - K_2(x,t) u_n \right] dt , \tag{9}$$

де

$$K_2(x,t) = K_0(x,t) - \frac{\partial K_1(x,t)}{\partial t}.$$

Покажемо, що послідовність u_0, u_1, ..., u_n, ... збігається до u^*, яке є розв'язком рівняння (1), і область збіжності G_0 визначається нерівністю

$$\| u^* - u_0 \| \le r_0 \eta_0 , \tag{10}$$

де r_0 - менший корінь рівняння

$$h_0 r_0^2 - 2 r_0 + 2 = 0;$$

$$h_0 = B_0 \eta_0 L \le \tfrac{1}{2};$$

$$\| u_1 - u_0 \| \le \eta_0^0 ; \quad \| u_1' - u_0' \| \le \eta_0' ;$$

$$\eta_0 = \max(\eta_0^0, \eta_0').$$

Неважко показати, що оператор

$$Au = u - \Gamma_0 P(u)$$

відображає область G_0 в себе

$$\| Au - u_0 \| \le r_0 \eta_0 .$$

Продиференціюємо оператор Au

$$A'u = I - \Gamma_0 P'(u) = \Gamma_0 \left[P'(u_0) - P'(u) \right],$$

$$\| A'u \| \le B_0 L r_0 \eta_0 = h_0 r_0 .$$

Оскільки $r_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h_0}}{h_0}$, то $\| A'u \| \le 1 - \sqrt{1 - 2h_0} = q \le 1$. Отже, оператор Au здійснює стиснуті відображення в області G_0

$$\| Au - Av \| \le q \| u - v \| .$$

Послідовні наближення збігаються з швидкістю

$$\| u_n - u^* \| \le \frac{q^n}{1 - q} \eta_0 .$$

Таким чином ми довели теорему:

Послідовність $u_0 = 0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, яка одержується розв'язуванням рівнянь (9), збігається до розв'язку рівняння (1), якщо виконуються умови (3), (4), (9). Область збіжності G_0 задається нерівністю (10).

Л і т е р а т у р а

1. В е р т г е й м Б. А. Об условиях применения метода Ньютона. ДАН СССР, 1956, 110, № 5.

2. К а н т о р о в и ч Л. В. Функциональный анализ и прикладная математика. УМН, 1948, 3, № 6.

3. М а л ь с а г о в С. М. Применение метода Ньютона-Канторовича к решению нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с ядром Гильберта. Учен. зап. Азерб. ун-та, сер. физ-мат, 1966, № 4.

4. Ч е р н ы ш е н к о Д. М. О некоторых итерационных методах решения нелинейных сингулярных интегральных уравнений. Автореферат кандидатской диссертации. Изд-во Киевского ун-та, 1968.

УДК 517.94

В.Г.КОСТЕНКО, Т.А.ШАРИЙ

ПРО ДОСЛІДЖЕННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО КВАЗІЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ

Розглянемо задачу Діріхле в обмеженій області D з границею $\Gamma \in C_{2+\alpha}$ для рівняння

$$(1+3\lambda p^2+\lambda q^2)r+(1+\lambda p^2+3\lambda q^2)t+4\lambda pqs=0 \qquad (1)$$

і граничними умовами

$$u\big|_{\Gamma}=\varphi(x,y), \qquad (2)$$

де p, q, r, s, t – позначення Монжа для похідних функції $u(x,y)$ першого і другого порядку; λ – числовий параметр; $\varphi(x,y)$ – задана функція, що належить $C_{2+\alpha}(\Gamma)$.

Рівняння (1) при $\lambda=-\frac{1}{2}$ можна одержати, наприклад, за допомогою варіаційного принципу Остроградського-Гамільтона, виводячи квазілінійне рівняння коливання мембрани і вважаючи потім функцію $u(t,x,y)$ незалежною від часу.

Розв'язок задачі (1), (2), припускаючи, що він існує, будемо шукати у вигляді розкладу в степеневий ряд по параметру λ з коефіцієнтами, що залежать від x і y

$$u(x,y,\lambda)=\sum_{i=0}^{\infty}u_i(x,y)\lambda^i. \qquad (3)$$

Підставляючи ряд (3) в (1) і прирівнюючи нульові коефіцієнти після групування їх при однакових степенях λ, одержимо нескінченну систему рівнянь у частинних похідних

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}=f_n(x,y) \qquad (n=0,1,2,\dots), \qquad (4)$$

де $f_0(x,y)=0$, а для $n=1,2,\ldots$

$$f_n(x,y)=-\sum_{e=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left\{\left[3\left(\frac{\partial u_e}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_e}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u_{n-1-2e}}{\partial x^2}+\right. \tag{5}$$

$$\left.+\left[\left(\frac{\partial u_e}{\partial x}\right)^2+3\left(\frac{\partial u_e}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u_{n-1-2e}}{\partial y^2}+4\frac{\partial u_e}{\partial x}\frac{\partial u_e}{\partial y}\frac{\partial^2 u_{n-1-2e}}{\partial x\partial y}\right\}-$$

$$-\sum_{e=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{\left[\frac{e-1}{2}\right]}\left\{\left[6\frac{\partial u_k}{\partial x}\frac{\partial u_{e-k}}{\partial x}+2\frac{\partial u_k}{\partial y}\frac{\partial u_{e-k}}{\partial y}\right]\frac{\partial^2 u_{n-1-e}}{\partial x^2}+\right.$$

$$\left.+\left[2\frac{\partial u_k}{\partial x}\frac{\partial u_{e-k}}{\partial x}+6\frac{\partial u_k}{\partial y}\frac{\partial u_{e-k}}{\partial y}\right]\frac{\partial^2 u_{n-1-e}}{\partial y^2}+4\left[\frac{\partial u_k}{\partial x}\frac{\partial u_{e-k}}{\partial y}+\frac{\partial u_k}{\partial y}\frac{\partial u_{e-k}}{\partial x}\right]\frac{\partial^2 u_{n-1-e}}{\partial x\partial y}\right.$$

У (5) цілу частину числа m позначено $-[m]$.

Задача (1), (2), таким чином, зводиться до послідовності лінійних задач Діріхле

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}=0, \tag{1_0}$$

$$u_0\big|_\Gamma=\varphi(x,y), \tag{2_0}$$

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}=f_n(x,y), \tag{1_n}$$

$$u_n\big|_\Gamma=0 \tag{2_n}$$

в області D для знаходження коефіцієнтів ряду (3). При послідовному розв'язуванні цих задач, коефіцієнти $f_n(x,y)$, які виражаються, як видно з (5), через похідні першого і другого порядку функцій u_0, u_1, ..., u_{n-1}, будуть відомими. Відомо також [3], що розв'язок $u_0(x,y)$ задачі (1_0), (2_0) існує, єдиний і $u_0(x,y)\in C_{2+\alpha}(\bar{D})$, а єдиний розв'язок задачі (1_n), (2_n) також буде існувати і належатиме $C_{2+\alpha}(\bar{D})$, якщо

$f_n(x,y) \in C_\alpha(\bar{D})$. Використавши (5) і $u_0(x,y) \in C_{2+\alpha}(\bar{D})$, легко переконуємося, що $f_n(x,y) \in C_\alpha(\bar{D})$ для всіх $n = 1, 2, .$

Таким чином, коефіцієнти ряду (3) визначаються як розв'язки задач (1_n), (2_n), причому $u_n(x,y) \in C_{2+\alpha}(\bar{D})$ для всіх $n = 0, 1, 2, \dots$.

Для того, щоб ряд (3) давав розв'язок задачі (1), (2), достатньо встановити, що цей ряд можна двічі почленно диференціювати по x і y , а для останнього, в свою чергу, достатньо встановити, що ряд (3) і ряди, які можуть бути одержані з нього диференціюванням по x і y до другого порядку включно, будуть рівномірно збіжними.

Для розв'язків задач (1_0), (2_0) і (1_n), (2_n) відповідно мають місце оцінки Шаудера [3]

$$\| u_0 \|_{2+\alpha,\bar{D}} \le K \| \varphi \|_{2+\alpha,\Gamma} , \tag{6}$$

$$\| u_n \|_{2+\alpha,\bar{D}} \le K \| f_n \|_{\alpha,\bar{D}} , \tag{7}$$

де стала K може бути вибрана незалежною від діаметра області D і від n .

Використовуючи (5) і оцінки (6), (7), послідовно знаходимо

$$\| f_1 \|_{\alpha,\bar{D}} \le \| u_0 \|^3_{2+\alpha,\bar{D}} \le K^3 \| \varphi \|^3_{2+\alpha,\Gamma} ,$$

$$\| u_1 \|_{2+\alpha,\bar{D}} \le K^4 \| \varphi \|^3_{2+\alpha,\Gamma} ,$$

$$\| f_2 \|_{\alpha,\bar{D}} \le 3 \| u_0 \|^2_{2+\alpha,\bar{D}} \| u_1 \|_{2+\alpha,\bar{D}} \le 3K^6 \| \varphi \|^5_{2+\alpha,\Gamma} ,$$

$$\| u_2 \|_{2+\alpha,\bar{D}} \le 3K^7 \| \varphi \|^5_{2+\alpha,\Gamma} ,$$

$$\| f_3 \|_{\alpha,\bar{D}} \le 3 \| u_0 \|^2_{2+\alpha,\bar{D}} \| u_2 \|_{2+\alpha,\bar{D}} + 3 \| u_1 \|^2_{2+\alpha,\bar{D}} \| u_0 \|_{2+\alpha,\bar{D}} \le 2 \cdot 3^2 K^9 \| \varphi \|^7_{2+\alpha,\Gamma} ,$$

$$\| u_3 \|_{2+\alpha,\bar{D}} \le 2 \cdot 3^2 K^{10} \| \varphi \|^7_{2+\alpha,\Gamma} ,$$

$$\|f_4\|_{\alpha,\bar D}\le 3\|U_0\|^2_{2+\alpha,\bar D}\|U_3\|_{2+\alpha,\bar D}+\|U_1\|^3_{2+\alpha,\bar D}+6\|U_0\|_{2+\alpha,\bar D}\|U_1\|_{2+\alpha,\bar D}\|U_2\|_{2+\alpha,\bar D}\le 2^2\cdot 3^3 K^{12}\|\varphi\|^9_{2+\alpha,\Gamma},$$

$$\|U_4\|_{2+\alpha,\bar D}\le 2^2 3^3 K^{13}\|\varphi\|^9_{2+\alpha,\Gamma}$$

і, взагалі, для $n\geqslant 2$

$$\|U_n\|_{2+\alpha,\bar D}\le 2^{n-2}3^{n-1}K^{3n+1}\|\varphi\|^{2n+1}_{2+\alpha,\Gamma}\ . \tag{8}$$

Отже, для ряду

$$\|U_0\|_{2+\alpha,\bar D}+\|U_1\|_{2+\alpha,\bar D}|\lambda|+\ldots+\|U_n\|_{2+\alpha,\bar D}|\lambda|^n+\ldots \tag{3'}$$

можна побудувати мажорантний ряд виду

$$K\|\varphi\|_{2+\alpha,\Gamma}+K^4\|\varphi\|^3_{2+\alpha,\Gamma}|\lambda|+3K^7\|\varphi\|^5_{2+\alpha,\Gamma}|\lambda|^2+$$
$$+2\cdot 3\cdot K^{10}\|\varphi\|^7_{2+\alpha,\Gamma}|\lambda|^3+\ldots+2^{n-2}3^{n-1}K^{3n+1}\|\varphi\|^{2n+1}_{2+\alpha,\Gamma}|\lambda|^n+\ldots \tag{9}$$

За принципом Даламбера останній ряд буде збіжним, якщо

$$|\lambda|<\frac{1}{6K^3\|\varphi\|^2_{2+\alpha,\Gamma}}\ . \tag{10}$$

Отже, ряд (3) і ряди, які одержуються з нього почленним диференціюванням до другого порядку включно, будуть рівномірно збіжними в області $\bar D$, як тільки має місце умова (10). Тим самим встановлено, що розв'язок задачі (1), (2) в області D з границею $\Gamma\in C_{2+\alpha}$ може бути зображений рядом (3), якщо має місце умова (10) і $\varphi(x,y)\in C_{2+\alpha}(\Gamma)$.

Існування розв'язку задачі (1), (2) для $0\le\lambda\le\lambda_0$ можна встановити за допомогою принципу Лере-Шаудера [3]. З цією метою переконаємося спочатку, що рівняння (1) має дивергентну форму і рівномірно еліптичне.

Дійсно, рівняння (1) може бути зображене у вигляді

$$\frac{da_1(p,q,\lambda)}{dx}+\frac{da_2(p,q,\lambda)}{dy}=0, \tag{11}$$

де

$$a_1(p,q,\lambda) = p\left[1+\lambda(p^2+q^2)\right],$$

$$a_2(p,q,\lambda) = q\left[1+\lambda(p^2+q^2)\right].$$

Це означає, що (1) дивергентної форми.

Крім того, для $0 \le \lambda \le \lambda_0$ маємо нерівності

$$(1+3\lambda p^2+\lambda q^2)\xi_1^2 + 4\lambda pq\xi_1\xi_2 + (1+\lambda p^2+3\lambda q^2)\xi_2^2 =$$

$$= (1+\lambda p^2+\lambda q^2)\xi_1^2 + 2\lambda(p\xi_1+q\xi_2)^2 + (1+\lambda p^2+\lambda q^2)\xi_2^2 \geq$$

$$\geq \left[1+\lambda(p^2+q^2)\right]\sum_{i=1}^{2}\xi_i^2 \geq \frac{\lambda_1}{2}\left(1+\sqrt{p^2+q^2}\right)^2\sum_{i=1}^{2}\xi_i^2,$$

$$(1+3\lambda p^2+\lambda q^2)\xi_1^2 + 4\lambda pq\xi_1\xi_2 + (1+\lambda p^2+3\lambda q^2)\xi_2^2 \leq$$

$$\leq (1+3\lambda p^2+\lambda q^2)\xi_1^2 + 2\lambda(q^2\xi_1^2+p^2\xi_2^2) + (1+\lambda p^2+3\lambda q^2)\xi_2^2 \leq$$

$$\leq 3\left[1+\lambda(p^2+q^2)\right]\sum_{i=1}^{2}\xi_i^2 \leq 3\lambda_2\left(1+\sqrt{p^2+q^2}\right)^2\sum_{i=1}^{2}\xi_i^2,$$

де $\lambda_1 = \min(\lambda, 1)$, $\lambda_2 = \max(\lambda, 1)$.

Враховуючи, що при $\lambda = 0$ (1) збігається з рівнянням Лапласа і приймаючи до уваги останні нерівності, одержуємо рівномірну еліптичність (1) для $0 \le \lambda \le \lambda_0$.

Щоб застосувати принцип Лере-Шаудера до задачі (1), (2), достатньо переконатись в наявності оцінки норм в $C_{1+\alpha}(\bar{D})$ всіх розв'язків задачі (1), (2) деякою константою, що залежатиме лише від норми граничних умов (2) в $C_{2+\alpha}(\Gamma)$.

Як видно з [2], така оцінка має місце, якщо виконується нерівність

$$\left(|a_1(p,q,\lambda)|+|a_2(p,q,\lambda)|\right)\left(1+\sqrt{p^2+q^2}\right)\le \mu(|u|)\left(1+\sqrt{p^2+q^2}\right)^m \quad (12)$$

при деякій додатній функції $\mu(|u|)$ і $m>1$.

Для $0\le\lambda\le\lambda_0$ одержимо

$$\left(|p+\lambda p^3+\lambda pq^2| + |q+\lambda p^2 q+\lambda q^3|\right)\left(1+\sqrt{p^2+q^2}\right)\le$$

$$\le \left(|p|+|q|\right)\left[1+\lambda(p^2+q^2)\right]\left(1+\sqrt{p^2+q^2}\right)\le$$

$$\le \sqrt{2}\sqrt{p^2+q^2}\left(1+\lambda_3\sqrt{p^2+q^2}\right)\le\sqrt{2}\lambda_3\left(1+\sqrt{p^2+q^2}\right)^4,$$

де $\lambda_3=\max(\lambda_0,1)$.

Отже, нерівність (12), а з нею і потрібна оцінка норм в $C_{1+\alpha}(\bar{D})$ розв'язків задачі (1), (2) мають місце. Інші умови застосування принципу Лере-Шаудера до задачі (1), (2) виконуються з очевидністю .

Як випливає з принципу Лере-Шаудера, розв'язок задачі (1), (2) для $0\le\lambda\le\lambda_0$ існує.

Єдиність розв'язку задачі (1), (2) випливає з принципу екстремуму.

Що стосується інших крайових задач для рівняння (1), то у випадку, коли граничні умови будуть залежати лінійно від u і нормальної похідної $\frac{\partial u}{\partial n}$, міркування про зображення розв'язків таких задач у вигляді рядів по степенях малого параметра λ з використанням відповідних оцінок [1] шаудеровського типу, а також твердження про існування розв'язків цих задач для $0\le\lambda\le\lambda_0$ з використанням оцінок [2] і принципу Лере-Шаудера можуть бути проведені аналогічно до того, як це було зроблено для задачі Діріхле (1), (2).

Як випливає з [2], існування і єдиність розв'язку крайових задач для рівняння (1) у випадку, коли граничні умови залежать лінійно лише від $\frac{\partial u}{\partial x}$ і $\frac{\partial u}{\partial y}$, можуть бути одержані ще за допомогою принципу Лере-Шаудера. Якщо ж граничні умови для (1) нелінійні по $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, то для доведення існування і єдиності розв'язку відповідної задачі можна використати відому топологічну теорему Качополлі про існування розв'язків абстрактних рівнянь в функціональних просторах і оцінки розв'язків такої задачі, встановлені в [2].

Л і т е р а т у р а

1. А г м о н С., Д у г л и с А., Н и р е н б е р г Л. Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. ч. I, М., 1962.

2. Л а д ы ж е н с к а я О. А., У р а л ь ц е в а Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. "Наука", 1964.

3. М и р а н д а К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. ИЛ, 1957.

УДК 513.8 12

А.І.ПИЛИПОВИЧ

ПРО ШТЕЙНЕРІВСЬКІ ПОБУДОВИ В ПРОСТОРІ ЛОБАЧЕВСЬКОГО

Як показав М.П.Хоменко [2], для розв'язання задач другого степеня на площині Лобачевського за допомогою однієї лінійки достатньо на цій площині задати допоміжне штейнерівське коло з відзначеним центром і пару паралельних прямих, які визначають невластиву точку абсолюта. Цей результат можна узагальнити на простір Лобачевського.

Т е о р е м а. Всяку конструктивну задачу простору Лобачевського, яку можна розв'язати за допомогою площинографа, сферографа, орисферографа, гіперосферографа, можна розв'язати також одним площинографом, якщо в конструктивному просторі побудувати пару паралельних прямих та допоміжну сферу Ω з відзначеним її центром O.

Для доведення теореми покажемо, що за допомогою площинографа, коли наявні згадані в теоремі допоміжні фігури, можна розв'язати деякі допоміжні конструктивні задачі і на їх основі виконати так звані основні побудови простору Лобачевського та розв'язати головні задачі.

Допоміжні задачі:

1. Побудувати точку D четверту гармонійно спряжену з трьома даними колінеарними точками A, B, C.

2. У площині α задане коло ω своїми п'ятьма точками, дана пряма a і накреслене деяке допоміжне коло k . Побудувати точки перетину кола ω і прямої a .

3. Задано дві паралельні (розбіжні) прямі. Через певну точку провести пряму паралельну (розбіжну) з даними прямими.

4. Задано дві невластиві або ідеальні точки U_∞ , V_∞ . Провести через них пряму.

5. Через точку O провести площину, перпендикулярну до прямої a , яка не проходить через точку O .

6. З точки O опустити перпендикуляр на площину не інцидентну цій точці.

7. Через довільну точку провести пряму перпендикулярну до прямої a , яка проходить через точку O .

8. У площині π , яка проходить через точку O , дано пару паралельних прямих u , v , що визначають невластиву точку X_∞ . Побудувати ще чотири невластивих точки площини π , відмінних від точки X_∞.

9. У довільній площині α , яка проходить через точку O , задати невластиву точку.

10. На довільній прямій p задати невластиві точки.

11. Через задану точку P провести площину, перпендикулярну до прямої, яка не проходить через точку

12. Через точку M провести пряму, перпендикулярну площині α .

13. Поділити відрізок навпіл.

14. Поділити лінійний (двогранний) кут на половини.

15. Перенести заданий відрізок прямої, відклавши його на цій прямій від даної точки.

16. Перенести заданий відрізок на довільну пряму. (Побудувати декілька точок сфери, якщо відомо її центр і радіус).

17. Побудувати площину, яка замикає двогранний кут (паралельну до площин двогранного кута).

18. Побудувати лінійний (двогранний) кут, що дорівнює даному, коли відома одна його сторона і вершина (грань і ребро).

Основні побудови:

19. Через точку провести пряму паралельну даній в заданому напрямку.

20. Дано відрізок паралельності a. Побудувати кут паралельності $\alpha = \Pi(a)$.

21. Дано кут паралельності α. Побудувати відрізок паралельності $a = \Delta(\alpha)$.

22. Через пряму, яка не перетинає дану площину, провести площину, паралельну першій.

23. Побудувати спільний перпендикуляр двох розбіжних площин.

24. Побудувати спільний перпендикуляр двох розбіжних прямих.

Головні задачі.

I. Знайти точки перетину з даною площиною таких заданих поверхонь і ліній: 25) площини, 26) сфери, 27) орисфери, 28) гіперсфери, 29) прямої, 30) кола, 31) орицикла, 32) гіперцикла.

II. Знайти точки перетину з заданою сферою таких заданих поверхонь і ліній: 33) сфери, 34) орисфери, 35) гіперсфери, 36) прямої, 37) кола, 38) орицикла, 39) гіперцикла.

III. Знайти точки перетину з заданою орисферою таких заданих поверхонь та ліній: 40) орисфери, 41) гіперсфери, 42) прямої, 43) кола, 44) орицикла, 45) гіперцикла.

IУ. Знайти точки перетину з заданою гіперсферою таких заданих поверхонь та ліній: 46) гіперсфери, 47) прямої, 48) кола, 49) орицикла, 50) гіперцикла.

У. Знайти точки перетину таких заданих ліній: 51) двох прямих,

52) двох кіл, 53) двох орициклів, 54) двох гіперциклів, 55) прямої і кола, 56) прямої і орицикла, 57) прямої і гіперцикла, 58) кола і орицикла, 59) кола і гіперцикла, 60) орицикла і гіперцикла.

Як приклад, розв'яжемо одну з головних задач.

Задача 33. Знайти точки лінії перетину двох заданих сфер $S_1(O_1, A_1)$ і $S_2(O_2, A_2)$.

Для її розв'язання потрібно виконати елементарні побудови 1–16, після чого вона зведеться до задачі 26, яку можна розв'язати на підставі задач 16 і 2.

Задачі 1 і 2 можна розв'язати одним площинографом, тому що для їх розв'язання необхідно проводити лише прямі лінії, які можна одержати як результат перетину двох довільних площин. Розв'язок відомий [1].

Зауваження до задачі 2. Якщо п'ять точок кола є невластивими, тобто задані паралельними прямими, то для побудови двох проективних пучків з невластивими центрами використовуємо задачу 4 (див. нижче).

Задача 3. Розв'язуємо на основі теореми Дезарга.

Задача 4. Нехай невластива точка U_∞ задана паралельними прямими u_1, u_2, а невластива точка V_∞ – прямими v_1, v_2 (рис. 1).

Виберемо на прямих u_1, u_2 відповідно точки A, C, через які проведемо прямі AV_∞, CV_∞ (3). Одержимо повний чотирикутник $ABCD$. Нехай M його діагональна точка. Будуємо точку P, четверту гармонійно спряжену з точками A, C, M (1). Тоді шукану діагональ $U_\infty V_\infty$ проводимо через точку P на основі (3).

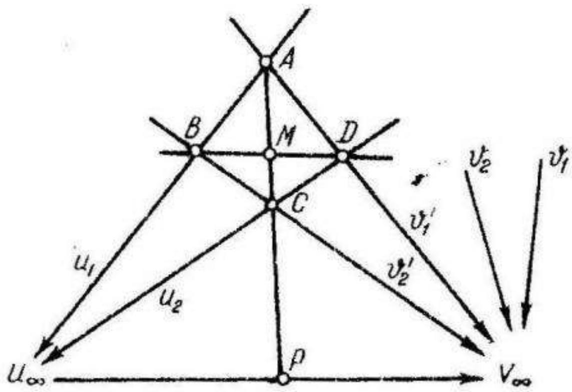


Рис. 1.

Задача 5. Через пряму a проводимо дві довільні площини α, β, які не проходять через O. Будуємо їх полюси A, B, що можна здійснити площинографом на основі (1). Тоді $OA \perp \alpha$, $OB \perp \beta$. Площина OAB – шукана.

З а д а ч а 6. Будуємо полюс A даної площини α (1). Проводимо пряму OA, яка є шуканою.

З а д а ч а 7. Через пряму a проводимо довільну площину α, яка перетне сферу Ω по колу ω. Виберем на прямій a дві довільні точки M, N, які не збігаються з точками перетину прямої a з колом ω. Будуємо поляри m, n точок M, N відносно кола ω (1). Прямі m, n розбіжні, пряма a – їх спільний перпендикуляр. Через вибрану точку проводимо пряму p, розбіжну з прямими m, n (4). Пряма p – шукана.

З а д а ч а 8. Розв'язується за схемою, що наводиться в [1] на основі задач 3, 5, 7.

З а д а ч а 9. Проведемо через пряму u і через точку O площину β, яка перетне площину α по прямій a (рис. 2). Якщо v не лежить у площині β, то проведемо через v довільну площину, яка перетне площину β по прямій s, яка паралельна до u. Маючи в площині β невластиву точку $X_\infty = u \times s$, можна в ній побудувати ще чотири невластиві точки абсолюта (8). Отже, в площині β маємо п'ять точок абсолюта і коло k_1 перетину сфери Ω з площиною β. А тому можемо знайти невластиві точки прямої a (2). Тобто в площині α, яка проходить через точку O, знайдено невластиві точки.

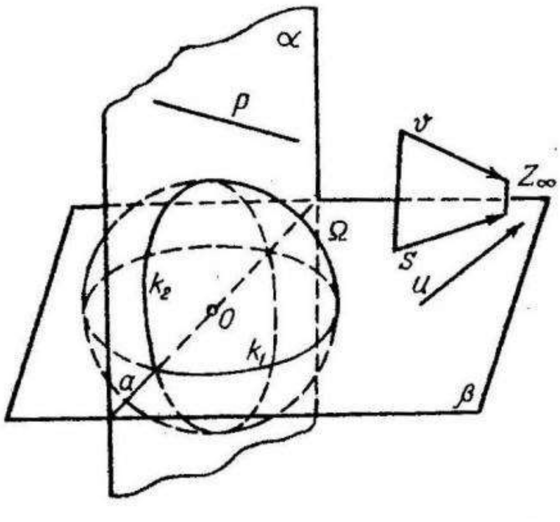


Рис. 2.

З а д а ч а 10. Через p і O проводимо площину α, в якій можемо побудувати невластиву точку на основі (9) (рис. 2). Маючи в площині α коло k_2 перетину сфери Ω з площиною α і невластиву точку, можемо знайти ще чотири точки абсолюта і на основі (2) знайти невластиві точки прямої p.

З а д а ч а 11. Через точку O і пряму a проведемо площину π (рис. 3). Побудуємо площину α, яка проходить через точку O перпендикулярно прямій a (5). $\alpha \times \pi = p$, $\alpha \times a = P$. Знаходимо невластиві точки прямої p – U_∞, V_∞ (10). Виберемо на прямій a довільну точку Q, через яку проводимо прямі QU_∞, QV_∞ (3), на яких знаходимо невластиві точки відповідно Z_∞, Y_∞ (10). Будуємо пряму s через точки Y_∞, Z_∞ (4). Прямі p і s розбіжні, мають спільний перпендикуляр a, тобто проходять через одну і ту ж ідеальну точку $I_1 = p \times s$. Через точку M і точку I_1 проводимо пряму m (3), $m \perp \alpha$. Замінивши пряму p довільною прямою p_1 площини α і побудувавши розбіжну з нею пряму s_1, так як це робилось вище, зможемо через точку M

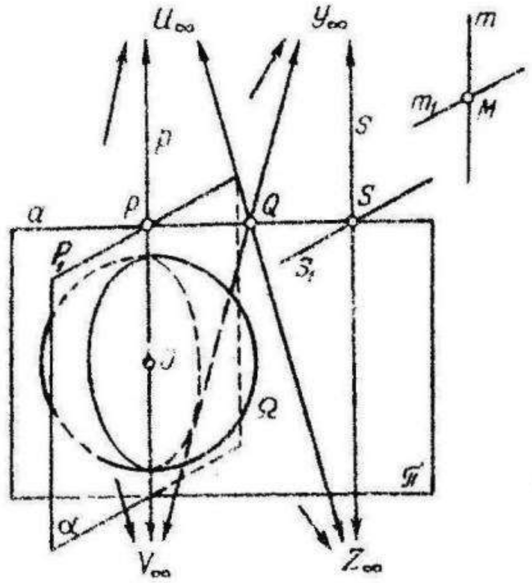
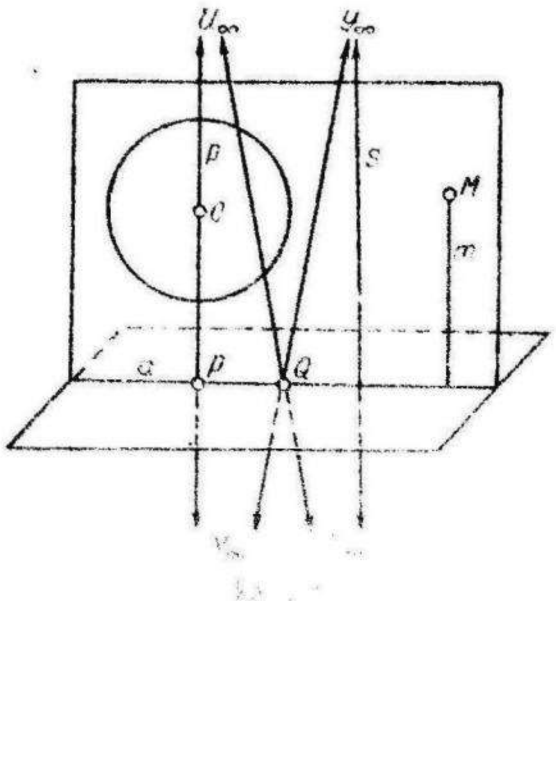


Рис. 3.

провести пряму m_1, розбіжну з прямими p_1, s_1 (3). Але пряма m_1 проходить через точку $I_2 = p_1 \times s_1$, а тому $m_1 \perp \alpha$. Отже, площина, визначена прямими m, m_1 є шукана.

З а д а ч а 12. З точки O опустимо перпендикуляр p на площину α (6) (рис. 4). Через пряму p і точку M проводимо площину β.



$\beta \times \alpha = a$. Будуємо пряму s розбіжну з прямою p, так як це робилось в (11). Маючи розбіжні прямі p і s через точку M проводимо пряму m розбіжну з p і s (3). Пряма m – шукана.

З а д а ч а 13. Через даний відрізок AB проведемо довільну площину π. Через кінці відрізка AB проведемо площини відповідно α, [illegible] (11).

які в перетині з площиною π визначають прямі відповідно a, b. Будуємо ті невластиві точки прямих a, b, які розміщені по різні сторони від прямої AB (10). Нехай це будуть точки відповідно A_∞, B_∞. Тоді пряма $A_\infty B_\infty$, (4), ділить AB навпіл.

З а д а ч а 14. Нехай дано лінійний кут ACB. Будуємо невластиві точки A_∞, B_∞ прямих CA, CB (10), через які проведемо пряму $A_\infty B_\infty$ (4). Через точку C проведемо площину α, перпендикулярну до прямої $A_\infty B_\infty$ (11). $\alpha \times A_\infty B_\infty = P$. Пряма CP - одна з бісектрис кута між двома прямими. Побудова бісекторіальної площини двогранного кута аналогічна.

З а д а ч і 15, 16. Можна розв'язати площинографом за схемою, запропонованою в [1].

З а д а ч а 26. Знайти точки лінії перетину заданої сфери $S_1(O_1, A_1)$ з площиною α.

Через точки O, O_1, A_1 проведемо площину β, яка перетне площину α по прямій a, а сферу Ω по колу ω. Якщо площини α і β виявляться розбіжними або паралельними, то проводимо довільну площину β через O, O_1 так, щоб вона перетнула площину α по деякій прямій a. У площині β вибираємо п'ять довільних прямих, що проходять через O_1, на які переносимо відрізок O_1A_1 (16). Маючи в площині β коло ω і п'ять точок кола k сфери S_1, можна знайти точки перетину прямої a і кола k (2). Змінюючи положення прямої a, можемо знайти безліч потрібних точок.

З а д а ч а 33. Побудувати точки лінії перетину двох заданих сфер $S_1(O_1, A_1)$, $S_2(O_2, A_2)$. Через точки O_1, O_2 проведемо довільну площину π. У точці O_1 побудуємо пряму $a \perp \pi$, а в точці O_2 - $b \perp \pi$ (12). На прямій a відкладемо відрізок $O_1B_1 = O_2A_2$, а на прямій b - $O_2B_2 = O_1A_1$ (16). Будуємо відрізок B_1B_2 та його середину C (13). Через точку C проведемо площину $\alpha \perp B_1B_2$ (11). Нехай $\alpha \times O_1O_2 = D$. Через точку D проведемо площину β, перпендикулярну прямій O_1O_2 (11). Площина β є радикальною площиною сфер S_1 і S_2, а тому проходить через коло перетину цих сфер. Отже, задача звелась до знаходження точок лінії перетину сфери $S_1(O_1, A_1)$ з площиною β (26), яка вже розв'язана.

Така схема розв"язування головних та основних задач.

Л і т е р а т у р а

1. С м о г о р ж е в с ь к и й О. С. Теорія геометричних побудов в просторі Лобачевського. Київ, 1949.

2. Х о м е н к о Н. П. О построениях в геометрии Лобачевского. Київський ун-т, Наукові записки, т. Х, вип. 1, 1951.

УДК 517.917

О.І.БОБИК, М.К.БУГІР

УМОВИ НЕКОЛИВАЛЬНОСТІ РІВНЯНЬ ТРЕТЬОГО І ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКІВ

У цій роботі встановлюються ефективні ознаки неколивальності рівнянь 3-го і 4-го порядків, використовуючи еквівалентність їх рівнянню $v^{(n)}=0$, $n=3,4$. Нагадаємо основні поняття, які будемо використовувати нижче.

О з н а ч е н н я 1. Розв'язок рівняння

$$L_n y = y^{(n)} + p_1(x) y^{n-1} + \cdots + p_n(x) y = 0.$$

коливний на проміжку $[a,b]$, якщо він обертається в нуль на цьому проміжку не менше, ніж n разів, враховуючи кратність. У протилежному випадку розв'язок називають неколивним.

О з н а ч е н н я 2. Якщо всі розв'язки рівняння $L_n y=0$ неколивні, то $L_n y=0$ називають неколивним.

Відомо ряд робіт, присвячених встановленню ефективних ознак коливальності і неколивальності рівнянь 2-го і вищих порядків [2]. У роботах чеського математика В.Шеди показано, що неколивальність розв'язків тісно пов'язана з поняттям еквівалентності рівнянь [3], [4].

Розглянемо рівняння

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(x) y^{(n-k)} = p_{n+1}(x), \qquad (1)$$

$x \in J_1, \quad p_0(x) \neq 0, \quad p_k(x) \in C[a,b], \quad (k=0,\dots,n+1),$

$$\sum_{k=0}^{n} q_k(\xi) v^{(n-k)} = q_{n+1}(\xi), \tag{2}$$

$\xi \in J_2, \quad q_0(\xi) \neq 0, \quad q_k(\xi) \in C[a,b], \quad (k=0,\dots,n+1)$

Означення 3. Рівняння (I) на інтервалі $J_{1x} \subset J_1$ еквівалентне рівнянню (2) на інтервалі $J_{2\xi} \subset J_2$, якщо: а) існують n раз неперервно диференційовані на $J_{1x} \subset J_1$ функції $\xi(x)$ і $t(x)$ такі, що $\xi(J_{1x}) = J_{2\xi}$, $\xi'(x)t(x) \neq 0$ на J_{1x}; б) для будь-якого розв'язку рівняння (2) $v(\xi)$, $y(x) = t(x)v[\xi(x)]$ є розв'язком (I).

Оскільки $t(x) \neq 0$, то нулі розв'язків одного рівняння перейдуть у нулі розв'язків другого рівняння і тому розв'язки еквівалентних рівнянь будуть одночасно коливні або неколивні.

У роботі В.Шеди [3] встановлено такий критерій еквівалентності двох рівнянь:

Теорема 1. Для того, щоб рівняння

$$y^{(n)} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} p_k(x) y^{(n-k)} = 0, \tag{1'}$$

$$v^{(n)} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} q_k(\xi) v^{(n-k)} = 0 \tag{2'}$$

були еквівалентні, необхідно і достатньо, щоб $\xi'(x)$ була спільним розв'язком системи рівнянь

$$\frac{[\xi'(x)]^n q_k[\xi(x)]}{k!\sqrt{|\xi'(x)|^{n-1}}} = \sum_{r=0}^{k} \sum_{s=0}^{k-r} \frac{p_r(x) A_{n-r-s,\,n-k}}{r!s!(n-r-s)!} \left[\frac{1}{\sqrt{|\xi'(x)|^{n-1}}} \right]^{(s)}, \tag{3}$$

$$(k=2,\dots,n)$$

де $A_{e,i}$ цілі раціональні функції від похідних $\xi(x)$ [I]

$$A_{m,k} = m! \sum_{\substack{k_1 \geq 0,\dots,k_m \geq 0 \\ k_1+\dots+k_m = k \\ k_1+2k_2+\dots+mk_m = m}} \frac{k!}{k_1!\cdots k_m!(1!)^{k_1}\cdots(m!)^{k_m}} [\xi'(x)]^{k_1}\cdots[\xi^{(m)}(x)]^{k_m}$$

Нижче ми проаналізуємо переозначену систему рівнянь (3) при $n=3$ і $n=4$, і $q_k(\xi)=0$. Зауважимо, що при $k=2$ перше рівняння системи (3) має такий вигляд [3]:

$$\frac{3}{n+1}\xi'^2 q_2[\xi(x)] + \frac{1}{2}\cdot\frac{\xi'''}{\xi'} - \frac{3}{4}\left(\frac{\xi''}{\xi'}\right)^2 = \frac{3}{n+1}p_2(x). \quad (3_1)$$

Розглянемо рівняння

$$L_3 y = y''' + 3p_2(x)y' + p_3(x)y = 0, \quad (4)$$

$$p_3(x) \in C[a,b], \quad p_2(x) \in C'[a,b].$$

Система (3) в цьому випадку складається з двох рівнянь*

$$\begin{cases} 2\xi'''\xi' - 3\xi''^2 - 3p_2(x)\xi'^2 = 0, \\ \sum\limits_{r=0}^{3}\sum\limits_{s=0}^{3-r}\dfrac{p_r(x)A_{3-r-s,0}}{r!\,s!\,(3-r-s)!}\left[\dfrac{1}{\xi'}\right]^{(s)} = 0. \end{cases}$$

Враховуючи, що $A_{i,0}=0$, $A_{0,0}=1$ і взявши похідні від $\left[\frac{1}{\xi'}\right]$, одержимо

$$\begin{cases} 2\xi'''\xi' - 3\xi''^2 - 3p_2(x)\xi'^2 = 0, \\ -\xi^{IV}\xi'^2 + 6\xi'''\xi''\xi' - 6\xi''^2 - 3p_2(x)\xi''\xi'^2 + p_3(x)\xi'^3 = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Система (5) переозначена і не завжди має розв'язок.

Припустимо, що (4) еквівалентне рівнянню $v'''=0$. Очевидно, що тоді воно неколивне і система (5) має спільний розв'язок. Продиференціювавши перше рівняння з (5), одержимо

$$2\xi^{IV}\xi' = 8\xi'''\xi'' + 6p_2'(x)\xi'^2 + 12p_2(x)\xi''\xi',$$

і підставимо цей вираз у друге рівняння (5), тоді

$$4\xi''(2\xi'''\xi' - 3\xi''^2 - 3p_2(x)\xi'^2) + \xi'^3(2p_3(x) - 3p_2'(x)) \equiv 0.$$

Звідси, тому що $\xi'(x)$ є розв'язком (5), то

$$2p_3(x) - 3p_2'(x) \equiv 0. \quad (6)$$

---

* У системі рівнянь (3) модуль під коренем можна опустити, бо $\xi'<0$ або $\xi'>0$ і рівняння в (3) є однорідні відносно $|\xi'|$.

Покажемо, що умова (6) є достатньою, тобто, якщо коефіцієнти рівняння зв'язані співвідношенням (6), то друге рівняння з системи (5) задовольняється будь-яким розв'язком першого рівняння цієї системи. Нехай $\xi'(x)$ розв'язок першого рівняння (5), тоді

$$3\xi''^2 = 2\xi'''\xi' - 3p_2(x)\xi'^2$$

і

$$M_\xi = -\xi^{IV}\xi'^2 + 6\xi'''\xi''\xi' - 2\xi''(2\xi'''\xi' - 3p_2(x)\xi'^2) -$$

$$- 3p_2(x)\xi''\xi'^2 + p_3(x)\xi'^3 = \xi'(-2\xi^{IV}\xi' + 4\xi'''\xi'' + 3[p_2(x)\xi'^2]').$$

Проінтегруємо $\frac{2M_\xi}{\xi'}$, тоді

$$\int \frac{2M_\xi}{\xi'}dx = -2\xi'''\xi' + 3\xi''^2 + 3p_2(x)\xi'^2 + 3\xi''^2 - 6\int \xi'''\xi''dx =$$

$$= 3\xi''^2 - 6\int \xi'''\xi''dx = const.$$

Отже, $M_\xi = 0$.

Перше рівняння системи (5) замінами $\xi' = exp[\int z\,dx]$, $z = -\frac{1}{2}\frac{u'}{u}$ можна звести до рівняння

$$u'' + \frac{3}{4}p_2(x)u = 0 \qquad (7)$$

при умові, що рівняння (7) неколивне. Неколивальність рівняння (7) гарантуватиме, наприклад, умова $\frac{3}{4}p_2(x) \le \frac{1}{4x^2}$ [2].

Одержані результати можна оформулювати так:

Т е о р е м а 2. Якщо $p_2(x) \le \frac{1}{3x^2}$, то для того, щоб рівняння (4) було еквівалентне рівнянню $v''' = 0$ на проміжку $[a, b]$, необхідно і достатньо, щоб на цьому проміжку виконувалась тотожність (6).

З а у в а ж е н н я 1. Тому що всі розв'язки рівняння $v''' = 0$ неколивні, то неколивними будуть і всі розв'язки рівнянь, коефіцієнти яких задовольняють умовам: $p_2(x) \le \frac{1}{3x^2}$, $3p_2'(x) - 2p_3(x) = 0$. Загальний розв'язок рівнянь, еквівалентних рівнянню $v''' = 0$, можна записати так:

$$y(x) = \frac{1}{\xi'(x)}[C_1 + C_2\xi(x) + C_3\xi^2(x)],$$

де $\xi'(x)$ – спільний розв'язок системи (5).

З а у в а ж е н н я 2. Аналогічно, як і у випадку $n = 3$, можна розглядати клас рівнянь, еквівалентних рівнянню $v^{(n)}=0$, і такими самими міркуваннями, як і при $n=3$, легко показати, що перше і друге рівняння системи (3) (при $k=2$ і $k=3$) сумісні тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти рівняння (I') задовольняють умову (6).

З а у в а ж е н н я 3. Якщо $p_2(x)\le 0$, $p_3(x)\le 0$, то з теореми 2 одержується ознака неколивальності М.Швеця [5]

$$p_2(x)\le 0, \quad p_3(x)\le 0, \quad p_2'(x)-p_3(x)=p_4(x)\le 0.$$

Тепер розглянемо за яких умов рівняння

$$L_4 y = y^{IV}+6p_2(x)y''+4p_3(x)y'+p_4(x)y=0, \qquad (8)$$
$$p_2(x)\in C^1[a,b], \quad p_3(x), \quad p_4(x)\in C[a,b]$$

є еквівалентне рівнянню $v^{IV}=0$. Система (3) для рівняння (8) буде мати такий вигляд

$$\begin{cases} 10\xi'''\xi'-15\xi''^2-12p_2(x)\xi'^2=0, \\ -5\xi^{IV}\xi'^2+30\xi'''\xi''\xi'-30\xi''^3-12p_2(x)\xi''\xi'^2+4p_3(x)\xi'^3=0, \\ 945\xi''^4-1260\xi'''\xi''^2\xi'+180\xi'''^2\xi'^2+240\xi^{IV}\xi''\xi'^2-24\xi^{V}\xi'^3+ \\ +6p_2(x)\left[60\xi''^2\xi'^2-24\xi'''\xi'^3\right]-96p_3(x)\xi''\xi'^3+16p_4(x)\xi'^4=0. \end{cases} \qquad (9)$$

Згідно з зауваженням 2 перше і друге рівняння системи (9) сумісні за умови (6). Якщо через $B\xi'$ позначимо перше рівняння з (9), $(B\xi')'$ – продиференційоване, і $\xi''\xi''\xi'^2$ з $(B\xi')'$ підставимо в третє рівняння (9), то останнє можна згрупувати так:

$$24\xi''\xi'(B\xi')'+(18\xi'''\xi'-51\xi''^2)B\xi'+\xi''^2(180\xi''^2+324p_2(x)\xi'^2)+$$
$$+72p_2(x)\xi'''\xi'^3-24\xi^{V}\xi'^3+144p_2'(x)\xi''\xi'^2+16p_4(x)\xi'^4=0.$$

Тепер коли взяти $\xi'=\exp\left[\pm\frac{3}{\sqrt{5}}\int\sqrt{-p_2(x)}\,dx\right]$, то $180\xi''^2+324p_2(x)\xi'^2=0$ і $p_2(x)=-\frac{20}{(c+x)^2}$, $c - const$.

Отже, справедлива така теорема:

Т е о р е м а 3. Нехай у (8) $p_2(x) = -\frac{20}{(c+x)^2}$, c-const, $p_3(x)$, $p_4(x)$ такі, що функція $u = (c+x)^{\pm 6}$ є розв'язком рівняння

$$-3u^{IV} + 9p_2(x)u'' + 12p_3(x)u' + 2p_4(x)u = 0.$$

Тоді для того, щоб (8) було еквівалентне рівнянню $v^{IV} = 0$, необхідно і достатньо, щоб на проміжку $[a, b]$ виконувалось співвідношення $3p_2'(x) - 2p_3(x) \equiv 0$. Загальний розв'язок еквівалентних рівнянь за цих умов буде мати вигляд:

$$y = (c+x)^{\mp 9}\left[C_1 + (c+x)^{\pm 6}C_2 + (c+x)^{\pm 12}C_3 + (c+x)^{\pm 18}C_4\right].$$

Л і т е р а т у р а

1. С а н с о н е Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. I. ИЛ, 1953.
2. C. A. S w a n s o n. Comparison and Oscillation Theory of Linear Differential Equations, Academic Press, New Jork and London, 1968.
3. V a l t e r Š e d a. Uber die Transformation der linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung, Časopis pestov. mat., 1967, 92:4, 418-435; 1965, 90:4, 385-412.
4. V a l t e r Š e d a. On a class of linear differential equations of order n, n ≥ 3, Časop. pestov. mat., 1967, 92:3, 247-261.
5. M a r k o Š r e c. Einige asymptotische und oscilatorische Eigenschaften der Differentialgleichungen $y''' + A(x)y' + B(x)y = 0$, Czech. Math. Journ., 15(90):3, 1965, 378-393.

УДК 518:517.948

М.Я.БАРТІШ

ЕФЕКТИВНІСТЬ МЕТОДІВ ТИПУ НЬЮТОНА

Розглядаємо числові методи типу Ньютона для розв'язування систем нелінійних рівнянь, даємо загальну схему побудови їх і алгоритм для визначення оптимальної (в розумінні кількості операцій, затрачених на обчислення результату) схеми розв'язування конкретної системи рівнянь.

Нехай дано систему рівнянь

$$P(x)=0, \tag{1}$$

де $P(x)$ - нелінійна вектор-функція розмірності N

$$P(x)=\begin{pmatrix} P_1(x_1,\dots,x_N) \\ \vdots \\ P_N(x_1,\dots,x_N) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Щоб розв'язати рівняння (1), використаємо формулу

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-\left[\alpha\left(x^{(k)}\right)\right]^{-1}P\left(x^{(k)}\right), \quad k=0,1,2,\dots, \tag{3}$$

де $\alpha(x)$ - квадратна матриця розмірності N.

Т е о р е м а. Нехай виконуються умови:

1) для $\alpha(x)$ існує обернена матриця в кожній точці кулі $\Omega_0=\left\{x:\|x-x^{(0)}\|\le\rho\right\}$, де $\rho=\sum_{i=0}^{\infty}h^{\frac{\varkappa^i-1}{\varkappa-1}}\eta_0$, причому має місце оцінка $\left\|\left[\alpha(x)\right]^{-1}\right\|\le B$;

2) для $x,\ y\in\Omega_0$ має місце нерівність

$$\|P(x)-P(y)-\alpha(x)(x-y)\|\le K\|x-y\|^{\varkappa}, \quad \varkappa>1;$$

3) для початкового наближення $x^{(0)}$ має місце оцінка

$$\left\|\left[\alpha\left(x^{(0)}\right)\right]^{-1}P\left(x^{(0)}\right)\right\|\le\eta_0<1;$$

4) $$h = BK\eta_0^{\varkappa-1} < 1.$$

Тоді рівняння (I) має в кулі Ω_0 розв'язок x^*, до якого збігається послідовність $\{x^{(k)}\}$, визначена за формулою (3), причому

$$\| x^* - x^{(k)} \| \leq h^{\frac{\varkappa^k - 1}{\varkappa - 1}} \eta_0 .$$

Доведення проводиться аналогічно [I] . Методи типу Ньютона будемо розглядати як частковий випадок формули (3). Розкладемо $P(x)$ в ряд Тейлора-Грейвса [4] в околі точки $x^{(k)}$

$$P(x) = P(x^{(k)}) + P'(x^{(k)})(x - x^{(k)}) + \tag{4}$$
$$+ \frac{1}{2} P''(x^{(k)})(x - x^{(k)})^2 + \frac{1}{2}\int_{x^{(k)}}^{x} P'''(\tau)(\tau - x^{(k)})^2 d\tau .$$

Зберігаючи в розкладі (4) два члени і прирівнюючи даний вираз до нуля, одержимо рівняння для визначення $k+1$ -го наближення

$$P(x^{(k)}) + P'(x^{(k)})(x - x^{(k)}) = 0, \tag{5}$$

тобто формулу методу Ньютона [5, I2]

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \Gamma_k P(x^{(k)}), \qquad k = 0,1,2,\dots,$$

де

$$\Gamma_k = [P'(x^{(k)})]^{-1}.$$

Якщо залишити в розкладі (4) три члени і замінити один із добутків $x - x^{(k)}$ виразом $-\Gamma_k P(x^{(k)})$, то для визначення наступного наближення одержимо рівняння

$$P(x^{(k)}) + P'(x^{(k)})(x - x^{(k)}) - \frac{1}{2} P''(x^{(k)}) \Gamma_k P(x^{(k)})(x - x^{(k)}) = 0. \tag{6}$$

З (6) одержуємо формулу методу дотичних гіпербол [7]

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [J - \frac{1}{2}\Gamma_k P''(x^{(k)})\Gamma_k P(x^{(k)})]^{-1}\Gamma_k P(x^{(k)}) \tag{7}$$
$$k = 0, 1, 2, \dots .$$

Враховуючи рівності

$$\left[J-\frac{1}{2}\Gamma_k P''(x^{(k)})\Gamma_k P(x^{(k)})\right]^{-1}=J+\frac{1}{2}\Gamma_k P''(x^{(k)})\Gamma_k P(x^{(k)})+O(\|\Gamma_k P(x^{(k)})\|^2), \quad (8)$$

$$P'(x^{(k)}-\frac{1}{2}\Gamma_k P(x^{(k)}))=P'(x^{(k)})-\frac{1}{2}P''(x^{(k)})\Gamma_k P(x^{(k)})+O(\|\Gamma_k P(x^{(k)})\|^2), \quad (9)$$

$$\Gamma_k P'(x^{(k)}+\frac{1}{2}\Gamma_k P(x^{(k)}))=J+\frac{1}{2}\Gamma_k P''(x^{(k)})\Gamma_k P(x^{(k)})+O(\|\Gamma_k P(x^{(k)})\|^2), \quad (10)$$

і формулу (7), ми можемо записати формули методів Чебишева [8]

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-\left[J+\frac{1}{2}\Gamma_k P''(x^{(k)})\Gamma_k P(x^{(k)})\right]\Gamma_k P(x^{(k)}), \quad k=0,1,2,\dots, \quad (11)$$

запропоновані Т.І.Коган [6]

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-\left[P'(x^{(k)}-\frac{1}{2}\Gamma_k P(x^{(k)}))\right]^{-1}P(x^{(k)}), \quad k=0,1,2,\dots \quad (12)$$

і нами [4]

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-\Gamma_k P'(x^{(k)}+\frac{1}{2}\Gamma_k P(x^{(k)}))\Gamma_k P(x^{(k)}), \quad k=0,1,2,\dots \quad (13)$$

Відзначимо, що послідовності $\{x^{(k)}\}$ одержані за формулами (7), (11)-(13) мають кубічну збіжність $(\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|=O\|x^{(k-1)}-x^{(k)}\|^3)$.

Крім названих методів доцільно розглядати їх різницеві аналоги [1,3,4], тобто методи, в обчислюванні схеми яких входять лише вектор-функції $P(x)$. У цьому разі $P'(x)$, $P''(x)$ необхідно замінити поділеними різницями. Поділені різниці першого $P(x,\tilde{x})$ і другого порядків $P(x,\tilde{x},\tilde{\tilde{x}})$ повинні задовольняти умовам:

$$\begin{aligned} &P(x,\tilde{x})(x-\tilde{x})=P(x)-P(\tilde{x}),\\ &P(x,\tilde{x},\tilde{\tilde{x}})(x-\tilde{\tilde{x}})=P(x,\tilde{x})-P(\tilde{x},\tilde{\tilde{x}}). \end{aligned} \quad (14)$$

У [11] введено поділені різниці $R(x,h)$, що задовольняють умові

$$\|R(x,h)-P'(x)\|=O(h). \quad (15)$$

Відзначимо, що порядок збіжності різницевих методів залежить від вибору точки $\tilde{x}^{(\kappa)}$ [1,3,4], або величини h [11] і при певному виборі даних величин не менший від порядку збіжності відповідних нерізницевих методів.

Крім вищерозглянутих методів можна розглядати методи, в яких матриця $\alpha(x^{(\kappa)})$ заміняється новою матрицею $\alpha^*(x^{(\kappa)})$, причому $\alpha^*(x^{(\kappa)}) = \alpha(x^{(\kappa)}) + O(\|x^{(\kappa+1)} - x^{(\kappa)}\|^{\varkappa})$, де $\varkappa$ – порядок збіжності методу. Новий метод буде мати такий же порядок збіжності $\varkappa$.

Отже, враховуючи, що кількість методів типу Ньютона та їх модифікацій необмежена, необхідно мати алгоритм для вибору самого ефективного методу розв'язування системи рівнянь (1). Будемо вважати ефективним той метод, при використанні якого одержуємо результат, виконавши при цьому менше операцій. Тоді не можна користуватися індексом ефективності [9], оскільки число операцій, затрачених на обчислення $P(x)$, $P'(x)$, $P''(x)$ не рівнозначне, крім того, не можна нехтувати останніми операціями.

Ми будемо користуватися співвідношенням, яке дає можливість з двох методів вибрати ефективніший. Метод з порядком збіжності a ефективніший метода з порядком збіжності b, якщо виконується нерівність [2]

$$\frac{Q_1}{Q_2} < \log_b a, \tag{16}$$

де Q_1, Q_2 – кількість операцій*, затрачених на виконання однієї ітерації за відповідним методом. Співвідношення (16) легко вивести, використовуючи індекс ефективності [9]. Користуючись оцінкою (16), можна показати, що метод Ньютона взагалі ефективніший від методів Чебишева [8], дотичних гіпербол [7], запропонованих Т.Коган [6] і нами [4]. Аналогічний висновок можна зробити і про різницеві аналоги вищеназваних методів [1, 3,4,10]. Нами запропоновано модифікацію методу Т.Коган [2], обчислювальна схема якої має вигляд:

---

* Операції додавання, віднімання, множення, ділення будемо вважати рівнозначними.

$$P'(\theta_{k-1})t_k = P'(x^{(k)})$$

початок: $$\theta_k = \begin{cases} x_0 & \text{при } k=0 \\ x^{(k)} - \frac{1}{2} t_k & \text{при } k \neq 0 \end{cases} \tag{17}$$

$$P'(\theta_k) z_k = P(x^{(k)})$$
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - z_k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

і її різницевий аналог:

$$P(x^{(k-1)}, \theta_{k-1}) t_k = P(x^{(k)})$$

початок: $$\theta_k = \begin{cases} \tilde{x}_0 & \text{при } k=0 \\ x^{(k)} - t_k & \text{при } k \neq 0 \end{cases} \tag{18}$$

$$P(x^{(k)}, \theta_k) z_k = P(x^{(k)})$$
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - z_k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Порядок збіжності даних методів $1+\sqrt{2}$. Використовуючи оцінку (16), приходимо до висновку, що схема (17) ефективніша від методу Ньютона, якщо

$$M_P > \frac{2N^2 + N + (1 - \log_2(1+\sqrt{2}))(M_{P'} + \frac{2}{3} N^3 + 1{,}5 N^2)}{\log_2(1+\sqrt{2}) - 1}, \tag{19}$$

а схема (18) ефективніша від різницевого аналогу методу Ньютона, якщо

$$M_P > \frac{2N^2 + N - 0{,}212\left(\frac{2}{3} N^3 + 5{,}5 N^2 + N\right)}{(N+1)\, 0{,}212}, \tag{20}$$

(M_P , $M_{P'}$ - кількість операцій, затрачених на обчислення $P(x)$, $P'(x)$). Оскільки нерівності (19), (20) в основному виконуються, то для розв'язування системи нелінійних алгебраїчних рівнянь доцільно використовувати схеми (17), (18).

Ми не розглядали тут модифікацій методу Ньютона, запропонованих В.Шаманським [13], хоч серед останніх існують модифікації, ефективніші від методу Ньютона. Такі ж модифікації можна одержати і для обчислювальних схем (17), (18).

Всі вищеназвані методи мають суттєвий недолік - вони збігаються лише з близького початкового наближення. Щоб одержати методи, якими можна користуватися у випадку "поганого" початкового наближення, необхідно розглядати формули вигляду

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \gamma_k \left[\alpha(x^{(k)})\right]^{-1} P(x^{(k)}), \tag{21}$$

де $\gamma_k \leq 1$ - параметр, який вибирається з умови мінімуму функції $\left\| P\left(x^{(k)} - \gamma\left[\alpha(x^{(k)})\right]^{-1} P(x^{(k)})\right)\right\|$. Тоді (21) є формулою методу спуску, який локально переходить в метод Ньютона.

Література

1. Бартиш М. Я. О некоторых итерационных методах решения нелинейных операторных уравнений. УМЖ, т. 20, 1968, № 1, 104-113.
2. Бартіш М. Я. Про один ітераційний метод розв'язування функціональних рівнянь. ДАН УРСР, 30, 1968, № 5, 387-390.
3. Бартіш М. Я. Про один ітераційно-різницевий метод. ДАН УРСР, 30, 1968, № 6, 500-505.
4. Бартиш М. Я. О некоторых итерационных методах решения функциональных уравнений. Сибирский матем. журн., 10, 1969, № 3.
5. Канторович Л. В. О методе Ньютона. Тр. матем. ин-та АН СССР, 28, 1949, 104-144.
6. Коган Т. И. Об одном итерационном процессе для функциональных уравнений. Сибирский матем. журн., 8, 1967, № 4, 958-960.
7. Мертвецов М. А. Аналог процесса касательных гипербол для общих функциональных уравнений. ДАН, 88, 1953, № 4, 611-614.
8. Нечепуренко М. И. О методе Чебышева для функциональных уравнений. УМЖ, 9, вып. 2, 1954, 163-170.
9. Островский А. М. Решение уравнений и систем уравнений. М., ИЛ, 1963.
10. Ульм С. Ю. Обобщение метода Стефенсена для решения операторных уравнений. ЖВММФ, 4, 1964, № 6, 1093-1097.
11. Шаманский В. Е. Об одной реализации метода Ньютона, УМЖ, т. 18, 1966, № 6, 135-140.
12. Шаманский В. Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. ч. II, изд. АН УССР, Киев, 1966.
13. Шаманский В. Е. Об одной модификации метода Ньютона, УМЖ, т. 19, 1967, № 1, 133-138.

УДК 517.9:621.3.032.26

Й.В.ЛЮДКЕВИЧ, І.О.ФОМІЧОВ

ПРО ОДИН МЕТОД РОЗРАХУНКУ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОГО ПОЛЯ СИСТЕМИ ЕЛЕКТРОДІВ З ВИДІЛЕННЯМ ОСОБЛИВОСТЕЙ НА ГРАНИЦІ

В [4] при виведенні основних співвідношень за густину розподілу зарядів на поверхні електродів приймався вираз $q(\tau)=4R(\tau)\sigma(\tau)$, де $\sigma(\tau)$ - фізична густина зарядів. Але тому що $R(\tau)$ є постійною величиною тільки у випадку горизонтальних електродів, то доцільно прийняти $q(\tau)=4\sigma(\tau)$, а $R(\tau)$ включити в підінтегральну функцію. При цьому значно поліпшується точність задоволення граничних умов на вертикальних, похилих і криволінійних електродах.

Тоді потенціал електростатичного поля в будь-якій точці (r , z), враховуючи осьову симетрію, визначається за формулою

$$U(r,z)=\int\limits_{L(\tau)} q(\tau)\,\frac{R(\tau)\;K(k)\,d\tau}{\sqrt{[R(\tau)+r]^2+[\xi(\tau)-z]^2}}\,, \tag{1}$$

де $K(k)$ - повний еліптичний інтеграл першого роду;

$L(\tau)$ - твірна деякої поверхні всередині електроду, яка задана параметричними рівняннями виду

$$\left.\begin{aligned} R&=R(\tau),\\ \xi&=\xi(\tau)\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Невідома густина $q(\tau)$ визначається з інтегрального рівняння Фредгольма першого роду

$$\int\limits_{L(\tau)} q(\tau)\,\frac{R(\tau)\cdot K(k)\,d\tau}{\sqrt{[R(\tau)+r]^2+[\xi(\tau)-z]^2}}\Bigg/_{L'(\tau)}=U_0\,, \tag{3}$$

де $L'(\tau)$ - твірна поверхні електроду, на якій задано потенціал U_0.

У зв'язку з тим, що ядро інтегрального рівняння (3) має особливість на границі, то важливо одержати формули, в яких виділена особливість і ядро інтегрального рівняння є всюди регулярне. Одержаний таким чином розв'язок дає можливість проводити числовий розрахунок навіть у випадку електродів нульової товщини.

Розглянемо випадок, коли твірна поверхні електроду задана рівнянням $R = R(\tau)$. Тоді в результаті застосування методу колокацій і зображення густини $q(\xi)$ у вигляді лінійної комбінації раціональних функцій [3]

$$q(\xi) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k \cdot b_k}{b_k^2 + (\xi - \bar{\xi}_k)^2} \tag{4}$$

інтегральне рівняння (3) зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{b_k}{b_k^2 + (\xi - \bar{\xi}_k)^2} \; \frac{R(\xi) \cdot K(k) \, d\xi}{\sqrt{4R^2(\xi) + (\xi - z_j)^2}} = U_0 , \tag{5}$$

де a_k - невідомі коефіцієнти; $\bar{\xi}_k$ - точки на твірній електроду; $j = 1, 2, \ldots, n$; b_k - наперед задані параметри згідно з нерівністю

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\Delta_k}{2} \le b_k \le \Delta_k , \\ &0{,}15 \le \Delta_k \le 0{,}30 . \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Еліптичний інтеграл обчислюється за допомогою апроксимації [1]

$$K(k) = \sum_{i=0}^{4} \bar{a}_i \eta^i + \ln \frac{1}{\eta} \sum_{i=0}^{4} \bar{b}_i \eta^i , \tag{7}$$

де $\bar{a}_i$, $\bar{b}_i$ - відомі коефіцієнти; η на поверхні електроду має вигляд

$$\eta = \frac{(\xi - z_j)^2}{4R^2(\xi) + (\xi - z_j)^2} ; \tag{8}$$

z_j - точки на твірній при $r = R(\xi)$; $\xi_1 \le z_j \le \xi_2$.

Враховуючи (7) і (8), систему (5) запишемо

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \left\{ \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{b_k}{b_k^2+(\xi-\bar{\xi}_k)^2} \frac{R(\xi)}{\sqrt{4R^2(\xi)+(\xi-z_j)^2}} \left[\sum_{i=0}^{4} \bar{a}_i \eta^i + \right.\right.$$

$$\left. + \ln\left[4R^2(\xi)+(\xi-z_j)^2\right] \cdot \sum_{i=0}^{4} \bar{b}_i \eta^i \right] d\xi + \tag{9}$$

$$\left. + \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{b_k}{b_k^2+(\xi-\bar{\xi}_k)^2} \frac{R(\xi)}{\sqrt{4R^2(\xi)+(\xi-z_j)^2}} \sum_{i=0}^{4} \bar{b}_i \eta^i \ln\frac{1}{(\xi-z_j)^2} d\xi \right\} = u_0 .$$

Перший інтеграл в (9) не має особливостей на границі. Ввівши позначення

$$B(\xi) = \frac{b_k}{b_k^2+(\xi-\bar{\xi}_k)^2} \frac{R(\xi)}{\sqrt{4R^2(\xi)+(\xi-z_j)^2}} \cdot \sum_{i=0}^{4} \bar{b}_i \cdot \eta^i , \tag{10}$$

розглянемо другий інтеграл в (9), який має особливість при $\xi = z_j$. Розіб'емо його на два інтеграли

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} B(\xi)\cdot\ln\frac{1}{(\xi-z_j)^2} d\xi = \int_{\xi_1}^{z_j} B(\xi)\cdot\ln\frac{1}{(\xi-z_j)^2} d\xi + \int_{z_j}^{\xi_2} B(\xi)\ln\frac{1}{(\xi-z_j)^2} d\xi . \tag{11}$$

В останніх двох інтегралах замінимо змінні

$$x = \frac{\xi - z_j}{z_j - \xi_1} \quad \text{і} \quad y = \frac{\xi - z_j}{z_j - \xi_2} . \tag{12}$$

Тоді одержимо

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} B(\xi)\ln\frac{1}{(\xi-z_j)^2} d\xi = (\xi_1 - z_j)\ln(\xi_1 - z_j)^2 \int_0^1 B(x)dx + \tag{13}$$

$$+(z_j-\xi_2)\ln(z_j-\xi_2)^2\int_0^1 B(y)dy+2(z_j-\xi_1)\int_0^1 B(x)\ln\frac{1}{x}dx+$$

$$+2(\xi_2-z_j)\int_0^1 B(y)\cdot\ln\frac{1}{y}dy\,.$$

Для інтегралів типу $\int_0^1 f(x)\ln\frac{1}{x}dx$ використовуємо формулу чисельного інтегрування[2]

$$\int_0^1 f(x)\ln\frac{1}{x}dx\approx\sum_{i=1}^{10}A_i f(x_i), \tag{14}$$

де x_i, A_i – задані величини.

Враховуючи (13) і (14), система (9) у випадку одного електрода, твірна якого має вигляд $R=R(\xi)$, запишеться так:

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\Bigg\{\int_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{b_k}{b_k^2+(\xi-\xi_k)^2}\cdot\frac{R(\xi)}{\sqrt{4R^2(\xi)+(\xi-z_j)^2}}\Bigg[\sum_{i=0}^{4}\bar{a}_i\eta^i+$$

$$+\ln\left[4R^2(\xi)+(\xi-z_j)^2\right]\cdot\sum_{i=0}^{4}\bar{b}_i\eta^i\Bigg]d\xi+$$

$$+(\xi_1-z_j)\ln(\xi_1-z_j)^2\int_0^1 B(x)dx+(z_j-\xi_2)\ln(z_j-\xi_2)^2\int_0^1 B(y)dy+ \tag{15}$$

$$+2(z_j-\xi_1)\sum_{i=1}^{10}A_i\cdot B(x_i)+2(\xi_2-z_j)\sum_{i=1}^{10}A_i\cdot B(y_i)\Bigg\}=U_0\,,$$

$$(j=1,2,\ldots,n)\,,$$

де $B(x)$ і $B(y)$ мають вигляд (10), тільки замість ξ потрібно підставити відповідно:

$$\xi=z_j+x(\xi_1-z_j)\qquad і\qquad \xi=z_j+y(\xi_2-z_j)\;;$$

$$
R(\xi)=\begin{cases} R_0 \quad , & \text{якщо } L \text{ - горизонтальна твірна} \\ R_1+\dfrac{R_2-R_1}{\xi_2-\xi_1}(\xi-\xi_1), & \text{якщо } L \text{ - похила твірна;} \\ r_0+\sqrt{\bar{R}^2-(\xi-Z_0)^2}, & \text{якщо } L \text{ - криволінійна твірна у вигляді кола;} \end{cases}
$$

(R_1, ξ_1) і (R_2, ξ_2) – циліндричні координати кінців похилої твірної;

(r_0, Z_0) – координати центра кола; $\bar{R}$ – його радіус.

У випадку одного вертикального електрода система (15) набирає вигляду

$$
\sum_{k=1}^{n} a_k \left\{ \int_{R_1}^{R_2} \frac{b_k}{b_k^2+(R-\bar{R}_k)^2}\,\frac{R}{R+r_j}\left[\sum_{i=0}^{4}\bar{a}_i\left(\frac{R-r_j}{R+r_j}\right)^{2i}+\right.\right.
$$

$$
\left.+2\ln(R+r_j)\cdot\sum_{i=0}^{4}\bar{b}_i\left(\frac{R-r_j}{R+r_j}\right)^{2i}\right]dR+
$$

$$
+(R_1-r_j)\ln(R_1-r_j)^2\int_0^1 B(x)dx+(r_j-R_2)\ln(r_j-R_2)^2\int_0^1 B(y)dy+ \tag{16}
$$

$$
\left.+2(r_j-R_1)\sum_{i=1}^{10}A_i B(x_i)+2(R_2-r_j)\cdot\sum_{i=1}^{10}A_i\cdot B(y_i)\right\}=U_0 ,
$$

$$
(j=1,2,\dots,n),
$$

де $B(x)$ і $B(y)$ визначаються за формулою

$$
B(R)=\frac{b_k}{b_k^2+(R-\bar{R}_k)^2}\cdot\frac{R}{R+r_j}\sum_{i=0}^{4}\bar{b}_i\left(\frac{R-r_j}{R+R_j}\right)^{2i}, \tag{17}
$$

якщо замість R підставляти відповідно

$$R = r_j + (R_1 - r_j)x \quad , \quad R = r_j + (R_2 - r_j)y;$$

r_j – граничні точки на твірній електроду.

Визначивши a_k із системи (15), потенціал поля в будь-якій точці знаходимо за (3). Аналогічно одержуємо формули типу (15) для довільної електронно-оптичної системи.

П р и к л а д. Знайти густину розподілу зарядів для одного горизонтального електрода, якщо $b_k = 0,2125$, $\xi_1 = -0,425$, $\xi_2 = 0,425$, $u_0 = 1$, $R = 0,625$. Тоді, розв'язавши систему (15), при $n = 6$ одержуємо такі значення для a_k:

$$a_1 = 1,65895, \qquad a_4 = 0,209477,$$
$$a_2 = -1,31175, \qquad a_5 = -1,32704,$$
$$a_3 = 0,205999, \qquad a_6 = 1,67716.$$

Точність розв'язку інтегрального рівняння (3) перевірялась шляхом задоволення граничних умов в проміжкових точках (z_k , R_0). При цьому похибка не більше 1-2%. Значення густини $q(\xi)$ наводиться нижче:

ξ	-0,425	-0,31875	-0,10625	0,10625	0,31875	0,425
$q(\xi)$	3,296	0,7256	0,6176	0,6187	0,7278	3,327

Л і т е р а т у р а

1. Д ы м а р с к и й Я. С. и др. Справочник программиста, том I, Л., 1963.

2. К р ы л о в В. И., П а л ь ц е в А. А. Таблицы для численного интегрирования функций с логарифмическими и степенными особенностями. Минск, 1967.

3. Л ю д к е в и ч Й. В. Про уточнення одного методу розрахунку електростатичного поля системи електродів малої товщини. Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., вип. 4, 1969.

4. П р у с о в И. А., В а л ь к о Б. В., Л ю д к е в и ч И. В., Р о м а н и в Л. Е. Расчет электростатического поля системы электродов малой толщины методом нелинейных параметров. Сборник трудов I Всесоюзного семинара по численным методам расчета электронно-оптических систем, 1965. "Вычислительные системы", вып. 26, ИМ СОАН СССР, Новосибирск, 1967.

УДК 519.4:517:513.88

Ю.Л.КИШАКЕВИЧ, В.Е.ЛЯНЦЕ

РАДИКАЛ ОДНОГО НОРМОВАНОГО КІЛЬЦЯ

В [6] А.Я.Повзнер дослідив максимальні ідеали кільця зі згорткою, побудованою за узагальненим зсувом, що відповідає самоспряженому операторові Штурма-Ліувілля на півосі. Оскільки несамоспряжений оператор Штурма-Ліувілля може мати не тільки власні значення, яким відповідають елементарні дільники порядку $m > 1$, але й так звані спектральні особливості (див. [5]), то постає питання, які ускладнення виникають у побудові максимальних ідеалів для несамоспряженого випадку.

Основний результат міститься у теоремі 10 і висновку з неї. Зокрема виявляється, що спектральні особливості не впливають на радикал досліджуваного кільця.

I. Розглянемо диференціальний вираз

$$l_x y(x) = -y''(x) + p(x)y(x) \tag{1}$$

з потенціалом $p(x)$, неперервним при $x \geq 0$ і крайову умову

$$y'(0) - \theta y(0) = 0. \tag{2}$$

Ми не припускаємо, що $\mathrm{Im}\, p(x) = 0$, $\mathrm{Im}\, \theta = 0$, а через те крайова задача (1)-(2), взагалі кажучи, не є самоспряженою.

Нехай $u(x,t)$ – функція, задана при $x \geq 0$, $t \geq 0$ з допомогою наступних умов:

а) для будь-яких невід'ємних x і t $u(x,t) = u(t,x)$;

б) якщо $t < x$, то $l_x u(x,t) = l_t u(x,t)$;

в) при $x \geq 0$ $u(x,0) = f(x)$, $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \theta f(x)$, де $f(x)$ – задана функція, двічі неперервно-диференційовна при $x \geq 0$.

Для кожного $t \geq 0$ визначимо оператор A^t: $A^t f(x) = u(x,t)$. Безпосередньо з а) випливає, що $A^t_x f(x) = A^x_t f(t)$; $x, t \geq 0$, де символ

$A_x^t f(x,\dots)$ означає результат застосування оператора A^t до f як функції змінної x.

Надалі припускаємо, що існує така неперервна і незростаюча при $x \geqslant 0$ функція $P(x)$, що

$$|\rho(x)| \leq P(x), \quad x \geqslant 0 \quad \text{і} \quad \int_0^\infty x P(x)dx < \infty . \tag{3}$$

Т е о р е м а I. Існує така функція $a(x,t,z)$, задана при $x \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, що задовольняє умови:

$$a(x,t,z) = a(t,x,z), \qquad |a(x,t,z)| \leq C\chi(x,t,z)e^{2\int_0^t \tau P(\tau)d\tau}, \tag{4}$$

що

$$A_x^t f(x) = \frac{1}{2}\left[f(|x-t|) + f(x+t)\right] + \frac{1}{2}\int_0^\infty a(x,t,z)f(z)dz . \tag{5}$$

При цьому C – деяке число, а $\chi(x,t,z) = \begin{cases} 1 & \text{при } z \in (|x-t|, x+t), \\ 0 & \text{при } z \bar{\in} (|x-t|, x+t). \end{cases}$

Теорему можна довести методом послідовних наближень з попереднім зведенням задачі відшукання $u(x,t) = A_x^t f(x)$ до розв'язування деякого інтегрального рівняння.

З а у в а ж е н н я I. З теореми випливає, що простір $L_*^1(0,\infty)$ функцій локально сумовних на півосі $(0,\infty)$ можна прийняти за область означення операторів A^t: $\mathcal{D}(A^t) = L_*^1(0,\infty)$.

З а у в а ж е н н я 2. Легко бачити, що $a(x,t,z)$ – неперервна функція в області $|x-t| \leq z \leq x+t$, $x \geqslant 0$, $t \geqslant 0$.

2. Неважко довести наступні твердження

Л е м а I. При $0 \leq t < \infty$, $0 \leq a < b \leq \infty$ візьмемо

$$a_t = \begin{cases} a-t & \text{при } t \leq a \\ 0 & \text{при } a < t < b \\ t-b & \text{при } b \leq t < \infty \end{cases}, \quad b_t = \begin{cases} b+t & \text{при } b < \infty \\ \infty & \text{при } b = \infty \end{cases}.$$

Якщо $a \leq x \leq b$, то $a_t \leq |x-t| \leq x+t \leq b_t$.

Т е о р е м а 2. Існує таке число C_1, що при $0 \leq t < \infty$, $0 \leq a < b \leq \infty$,

$$\sup_{a<x<b} |A_x^t f(x)| \le (1+C_1 t) \sup_{a_t<x<b_t} |f(x)| \tag{6'}$$

$$\left(\int_a^b |A_x^t f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \le (1+C_1 t) \left(\int_{a_t}^{b_t} |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{6''}$$

$$\int_a^b |A_x^t f(x)| dx \le (1+C_1 t) \int_{a_t}^{b_t} |f(x)| dx. \tag{6'''}$$

Т е о р е м а 3. Якщо $|h|<\varepsilon$, то

$$\sup_{a+\varepsilon\le x\le b-\varepsilon} |A_x^{t+h} f(x) - A_x^t f(x)| \le \omega(f, a_t, b_t, \varepsilon) + \sup_{a_t\le z\le b_t} |f(z)| \cdot A(\varepsilon), \tag{7}$$

$$\left(\omega(f,a,b,\varepsilon) = \sup\left\{|f(x') - f(x'')| : |x'-x''|<\varepsilon,\ x', x'' \in [a,b]\right\}\right) \tag{8}$$

при цьому $A(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$ рівномірно в кожному скінченному інтервалі зміни t і не залежить від f.

Т е о р е м а 4. Для кожного $t\ge 0$ і кожного $A\in(a_t, b_t)$ існує така функція $A(\varepsilon)$, що $A(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$ рівномірно в кожному скінченному інтервалі зміни t і

$$\sup_{|h|<\varepsilon} \left\{\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} |A_x^{t+h} f(x) - A_x^t f(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \le \frac{3}{2}\omega_p(f, a_t, b_t, \varepsilon) + 2\left\{\int_0^{2\varepsilon} |f(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ A(\varepsilon)\left\{\int_{a_t}^{b_t} |f(z)|^p dz\right\}^{\frac{1}{p}} + Ct\left\{\int_A^{b_t} |f(z)|^p dz\right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{9}$$

$$\left(\omega_p(f,a,b,\varepsilon) = \sup_{|h|<\varepsilon}\left\{\int_a^b |f(x+h) - f(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}, \quad p=1,2\right) \tag{10}$$

при цьому, число $C>0$ не залежить ні від f, ні від A. Зокрема, при $\varepsilon\to 0$ ліва частина (9) прямує до нуля, якщо $f\in L^p(a_t, b_t)$.

3. Позначимо через L оператор, що відповідає диференціальному виразові (I) і крайовій умові (2). Оператор L задаємо формулою $(Lf)(x) = l_x f(x)$ на функціях f, що мають похідну f', абсолютно неперервну в кожному інтервалі $(0,a)$, $a<\infty$ і задовольняють умову (2). Надалі будемо розглядати звуження L на простір $L^2(0,\infty)$, а також деякі інші його звуження.

Функцію f, задану майже скрізь на півосі $(0,\infty)$, будемо називати фінітною, якщо існує таке a , що $f(x)=0$ майже скрізь при $x>a$. Множину всіх фінітних функцій $f\in L^{p}(0,\infty)$ позначимо через $L_0^{p}(0,\infty)$. З теореми 2 випливає, що для кожного $t\geq 0$

$$A^{t}f\in L_0^{p}\ (0,\infty)\ ,\quad \text{якщо}\quad f\in L_0^{p}\ (0,\infty),\quad p=1,2,\infty.$$

А саме, коли $f(x)=0$ при $x>a$, то $A^{t}f(x)=0$ при $x>a+t$. Нехай для всіх комплексних λ і всіх $x\geq 0$ функція $\omega(x,\lambda)$ задовольняє співвідношення:

$$l_x\,\omega(x,\lambda)=\lambda\omega(x,\lambda);\qquad \omega(0,\lambda)=1;\qquad \omega_x'\ (0,\lambda)=0. \tag{11}$$

Для кожної функції $f\in L_0^{1}(0,\infty)$ інтеграл $\omega(f,\lambda)=\int_0^{\infty}f(x)\,\omega(x,\lambda)dx$ є цілою функцією параметра λ . Цю функцію називатимемо L – перетворенням Фур'є фінітної функції f .

Т е о р е м а 5. Для кожного $t\geq 0$ і всіх комплексних λ виконується наступна рівність

$$\omega(A^{t}f,\lambda)=\omega(f,\lambda)\,\omega(t,\lambda), \tag{12}$$

при цьому $f\in L_0^{1}(0,\infty)$ – довільна (фінітна) функція.

Наведемо деякі факти спектральної теорії оператора L . Доведення нижче викладених тверджень можна знайти в [3], [5]. Надалі будемо вважати, що виконується, крім (3), наступна додаткова умова: існує таке $\varepsilon>0$, що

$$\int_0^{\infty}e^{\varepsilon x}\,|p(x)|\,dx<\infty. \tag{13}$$

При цьому припущенні неперервний спектр оператора L , що розглядається в гільбертовому просторі $L^{2}(0,\infty)$, заповнює піввісь $\lambda\geq 0$. Відповідні власні функції $x\to\omega(x,\lambda)$, $\lambda\geq 0$ (11) обмежені на півосі $(0,\infty)$, однак не інтегровані з квадратом. Є скінченне число власних значень $\lambda_1,\dots,\lambda_\alpha$. Вони задовольняють умову $\arg\lambda_k\neq 0$ і мають скінченні кратності $m_1,\dots,m_\alpha$. Їм відповідають головні (власні і приєднані) функції $x\to\omega^{(j_k)}(x,\lambda_k)$, $k=1,\dots,\alpha$; $j_k=0,\dots,m_k-1$, що є елементами $L^{2}(0,\infty)$, при цьому $\omega^{(j)}=d^{j}\omega/d\lambda^{j}$. Нехай $e(x,\rho)$ – функція, яка при $\operatorname{Im}\rho\geq 0$ задовольняє співвідношення $l_x e(x,\rho)=\rho^{2}e(x,\rho)$, $\lim\limits_{x\to\infty}e(x,\rho)e^{-i x\rho}=1$,

і нехай $\quad a(\rho)=\dfrac{\partial}{\partial x}\,e(0,\rho)-\theta e(0,\rho)$.

Доводиться, що рівняння $a(\rho)=0$ має в півплощині $\operatorname{Im}\rho \geq 0$ скінченне число коренів. Корені рівняння $a(\rho)=0$, для яких $\operatorname{Im}\rho \geq 0$ і $\rho \neq 0$, ми будемо називати сингулярними числами оператора L. Нехай $\rho_1, \ldots, \rho_\alpha$ – всі недійсні, а $\rho_{\alpha+1}, \ldots, \rho_\beta$ – всі дійсні сингулярні числа, тоді числа $\lambda_1=\rho_1^2, \ldots, \lambda_\alpha=\rho_\alpha^2$ утворюють сукупність всіх власних значень оператора L, що розглядається в просторі $L^2(0,\infty)$. При $k=\alpha+1,\ldots,\beta$ числа $\lambda_k=\rho_k^2$ належать неперервному спектру, однак, через їх важливу роль, будемо називати $\lambda_{\alpha+1}, \ldots, \lambda_\beta$ спектральними особливостями оператора L. Рівність Парсеваля, що відповідає оператору L, можна записати в такому вигляді

$$\int_0^\infty f(x)g(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega(f,\lambda)\omega(g,\lambda)\sqrt{\lambda}\, d\lambda}{a(\sqrt{\lambda})a(-\sqrt{\lambda})} + \sum_{k=1}^{\alpha}\left\{\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{m_k-1} M_k(\lambda)\,\omega(f,\lambda)\,\omega(g,\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_k}, \tag{14}$$

де

$$M_k(\lambda)=\frac{(\lambda-\lambda_k)^{m_k}e(0,\sqrt{\lambda})}{(m_k-1)!\,a(\sqrt{\lambda})}; \qquad k=1,\ldots,\alpha;$$

m_k – кратність кореня ρ_k рівняння $a(\rho)=0$.

Якщо оператор має спектральні ососбливості, то для довільних f, $g \in L_0^2(0,\infty)$, інтеграл в правій частині (14), взагалі кажучи, розбігається. Однак цей інтеграл збігається і рівність (14) справедлива, якщо хоч би одна з цих функцій f або g належить лінеалу

$$\mathfrak{H}_0=\left\{h : h \in L_0^2(0,\infty), \omega^{(j)}(h,\lambda_k)=0,\ k=\alpha+1,\ldots,\beta;\ j=0,\ldots,m_k-1\right\}. \tag{15}$$

Через те, що головні функції оператора L, які відповідають спектральним особливостям, не належать $L^2(0,\infty)$, то лінеал $\mathfrak{H}_0$ щільний в просторі $L^2(0,\infty)$. Ця обставина дозволяє нам зробити один важливий для дальшого викладу висновок. Оператор A^t має таку властивість симетричності:

Т е о р е м а 6. Для будь-якого $t \geq 0$ і всіх $f, g \in L^2(0,\infty)$

$$\int_0^\infty [A_x^t f(x)]\, g(x)dx = \int_0^\infty f(x) A_x^t g(x) dx. \tag{16}$$

З а у в а ж е н н я 1. Рівність (16) справедлива і в тому випадку, коли $p(x)$ – тільки сумовна в кожному скінченному інтервалі додатної півосі.

З а у в а ж е н н я 2. Співвідношення (16) справедливе для будь-яких $f \in L_0^2(0,\infty)$, $g \in L_*^2(0,\infty)$ / $L_*^p(0,\infty)$ – множина функцій, інтегрованих у степені p в кожному інтервалі $(0,a)$, $a < \infty$.

Т е о р е м а 7. Для будь-яких $f, g \in L_*^1(0,\infty)$ і будь-яких $t, s \geq 0$

$$A_t^s A_x^t f(x) = A_x^t A_x^s f(x) \quad \text{(асоціативність)} \quad , \qquad (17)$$

$$A_x^s A_x^t f(x) = A_x^t A_x^s f(x) \quad \text{(комутативність)} \quad . \qquad (18)$$

З а у в а ж е н н я. З попереднього випливає, що сім'я операторів A^t задовольняє всі умови визначення операторів узагальненого зсуву [2] за винятком умови нормальності $A^t(A^s)^* = (A^s)^* A^t$. Отже, A^t – оператор узагальненого зсуву, породжений оператором L.

4. Використавши означення L-перетворення Фур'е функцій з локально сумовним квадратом [4], можна довести таке твердження.

Т е о р е м а 8. Для кожного $t \geq 0$ і всіх $f^* \in L_*^2(0,\infty)$: $\omega A^t f^* = \omega(t)\omega f^*$.

В и с н о в о к. Для будь-якої функції $f \in L^2(0,\infty)$ і всіх $t \geq 0$ $\omega(A^t f, \lambda) =$ $= \omega(f,\lambda)\cdot\omega(t,\lambda)$ майже окрізь при $\lambda > 0$ і

$$\omega^{(j_k)}(A^t f, \lambda_k) = \sum_{j=0}^{j_k} \binom{j_k}{j} \omega^{(j_k-j)}(f,\lambda_k)\,\omega^{(j)}(t,\lambda_k) \text{ при } k=1,\dots,\infty;\ j_k=0,\dots,m_k-1.$$

5. Узагальнену згортку $f * g$ функцій f і g визначимо за формулою

$$f * g(t) = (f * g)(t) = \int_0^\infty [A_x^t f(x)] \cdot g(x)\,dx \qquad (19)$$

для будь-яких функцій f і g, для яких права частина (19) має сенс. Позначимо через R_0 нормований простір, що відповідає нормі

$$\| f \| = \int_0^\infty (1+t)|f(t)|\,dt .$$

Т е о р е м а 9. Для будь-яких $f, g \in R_0$ існує $f * g$ і $f * g \in R_0$. Крім того, існує таке число $M > 0$, що

$$\| f * g \| \leq M \cdot \| f \| \cdot \| g \| . \qquad (20)$$

О з н а ч е н н я. З допомогою теореми 7 неважко перевірити, що узагальнена згортка асоціативна і комутативна:

$$(f * g) * h = f * (g * h), \quad f * g = g * f, \quad f, g, h \in R_0 .$$

Отже, внаслідок теореми 9, банахів простір R_0, з узагальненою згорткою як операцією множення, є комутативним нормованим кільцем [1]. Через

R ми позначимо нормоване кільце, одержане в R_0 приєднанням одиниці.

Л е м а 2. Для всіх $f \in R_0$, $A^t f \in R_0$ і існує таке $C > 0$, що

$$\| A^t f \| < C(1+t) \| f \| .$$

6. Спектр $S(L)$ оператора L, що розглядається в гільбертовому просторі $L^2(0,\infty)$, збігається з множиною тих значень λ, для яких функція $x \to \omega(x,\lambda)$ є обмеженою на півосі $(0,\infty)$. Покажемо, що для кожного $\lambda \in S(L)$ множина

$$M_\lambda = \left\{ \xi e + f : f \in R_0, \quad \xi + \int_0^\infty f(x)\,\omega(x,\lambda)\,dx = 0 \right\} \tag{21}$$

є максимальним ідеалом кільця R (e позначає одиницю R). Легко перевірити, що функція F_λ, задана формулою $F_\lambda(\xi e + f) = \xi + \omega(f,\lambda)$ є лінійним неперервним і мультиплікативним функціоналом, заданим на кільці R. Очевидно, кільце R_0 є максимальним ідеалом кільця R. Цей максимальний ідеал є ядром мультиплікативного функціоналу F_∞, що визначається формулою

$$F_\infty(\xi e + f) = \xi, \quad f \in R_0.$$

Т е о р е м а 10. Існує взаємнооднозначна відповідність $\lambda \to M_\lambda$ між точками λ спектра оператора L і максимальними ідеалами M_λ кільця R, відмінними від ідеала $M_\infty = R_0$. Ця відповідність встановлюється формулою (21).

Намітимо доведення теореми. Нехай M – деякий максимальний ідеал кільця R, відмінний від R_0, F – мультиплікативний функціонал, що відповідає ідеалу M: $f - F(f)e \in M$, $f \in R_0$. Виберемо $\varphi \in R_0$ і $\varphi \bar{\in} M$, таке, щоб $F(\varphi) \neq 0$. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $F(\varphi) = 1$. Приймемо $\omega(x) = F(A^x \varphi)$. Внаслідок леми 2

$$|\omega(x)| \le \|F\| \cdot \|A^x \varphi\| \le C \cdot \|F\| (1+x), \qquad 0 \le x < \infty. \tag{22}$$

Звідси випливає існування інтегралу $\omega(f) = \int_0^\infty f(x)\omega(x)\,dx$ для довільної $f \in R_0$. Доводиться співвідношення:

$$\omega(f) = F(f) \cdot F(\varphi) = F(f), \qquad f \in R_0. \tag{23}$$

З рівності (23) легко вивести, що

$$A_x^t\, \omega(x) = \omega(x)\,\omega(t). \tag{24}$$

Нехай $\omega(x)$ - двічі неперервно диференційовна. Тоді з рівності (24) і означення оператора A^* випливає, що $\omega(x)=\omega(x,\lambda)$. Внаслідок (22) робимо висновок, що $\omega(x,\lambda)$ є фактично обмеженою, а через те $\lambda\in S(L)$. Теорема доведена.

Висновок. Радикал кільця R складається з функцій f вигляду:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{m_k-1} C_{kj}\,\omega^{(j)}(x,\lambda_k), \tag{25}$$

де C_{kj} - довільні сталі.

Справді, радикал (як перетин всіх максимальних ідеалів) складається з тих $f\in R_0$, для яких $\omega(f,\lambda)=0$ для всіх $\lambda\in S(L)$. Звідси, внаслідок рівності Парсеваля (14) випливає (25).

Література

1. Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е. Коммутативные нормированные кольца. Физматгиз, М., 1959.
2. Левитан Б. М. Операторы обобщенного сдвига и некоторые их применения. Физматгиз, М., 1962.
3. Лянце В. Э. Несамосопряженный дифференциальный оператор второго порядка на полуоси, добавление I к книге М.А.Неймарка "Линейные дифференциальные операторы", "Наука", М., 1969.
4. Лянце В. Э. Распространение L-преобразования Фурье на функции с локально интегрируемым квадратом, ДАН СССР, т. 158, № 5, 1964.
5. Лянце В. Э. О дифференциальном операторе со спектральными особенностями, I, "Математический сборник", т. 64/106/, № 4, 1964; II, "Математический сборник", т. 65/107/, № I, 1964.
6. Повзнер А. Я. О дифференциальных уравнениях Штурма-Лиувилля на полуоси. "Математический сборник", т. 23/65/, № I, 1948.

УДК 517.94

К.С.КОСТЕНКО

УМОВИ ІНТЕГРУВАННЯ У КВАДРАТУРАХ ДЕЯКИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Знаходимо умови інтегрування в квадратурах звичайних лінійних однорідних рівнянь та одного нелінійного рівняння другого порядку.

Дослідження проводимо за допомогою відомої ознаки Лі [3], згідно з якою рівняння

$$\omega(x, y, y', y'')=0 \qquad (1)$$

інваріантне відносно групи перетворень з інфінітезімальним оператором

$$Uf = \xi(x,y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial f}{\partial y} \qquad (2)$$

тоді і тільки тоді, коли двічі продовжений оператор (2)

$$U''f = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \eta_1\frac{\partial f}{\partial y'} + \eta_2\frac{\partial f}{\partial y''}, \qquad (3)$$

застосований до лівої частини рівняння (1), обертається тотожно в нуль на всіх розв'язках рівняння (1), тобто, коли одночасно задовольняються рівняння

$$U''\omega(x, y, y', y'')=0, \qquad (3')$$

$$\omega(x, y, y', y'')=0. \qquad (1)$$

Якщо з (1) визначити y'' через x, y, y' і підставити в (3), то після цього (3') стане тотожністю по x, y, y'. Коефіцієнти η_i $/i=1,2/$ оператора (3) виражаються за формулами

$$\eta_1 = \frac{d\eta}{dx} - y'\frac{d\xi}{dx}, \qquad (4)$$
$$\eta_2 = \frac{d\eta_1}{dx} - y''\frac{d\xi}{dx}.$$

Лінійні однорідні рівняння другого порядку

Застосовуючи ознаку Лі до лінійного рівняння

$$\omega = y'' + J(x)y = 0, \tag{5}$$

одержуємо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів оператора (2)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0,\\
&2\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0,\\
&3Jy\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} = 0,\\
&J'y\xi + J\eta - Jy\frac{\partial \eta}{\partial y} + 2Jy\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0,
\end{aligned} \tag{6}$$

з якої випливає

$$\begin{aligned}
&\xi(x,y) = \xi_1(x)y + \xi_2(x),\\
&\eta(x,y) = \xi_1'(x)y^2 + \eta_1(x)y + \eta_2(x),
\end{aligned} \tag{7}$$

і, крім того, повинно бути

$$\begin{aligned}
&\xi_1'' + J\xi_1 = 0,\\
&\xi_1''' + (J\xi_1)' = 0,\\
&\xi_2'' \mp 2\eta_1' = 0,\\
&\eta_1'' + 2J\xi_2' + J'\xi_2 = 0,\\
&\eta_2'' + J\eta_2 = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Очевидно, що всякий тричі неперервно диференційований розв'язок першого рівняння системи (8) буде одночасно розв'язком другого рівняння. Відомо також, що формула Ліувілля дає можливість одержати загальний розв'язок рівняння (5), якщо відомий лише один його частковий розв'язок. Маючи це на увазі і враховуючи, що перше і останнє рівняння системи (8) збігаються з рівнянням (5), природно вважати, що нам відомий лише тривіальний розв'язок рівняння (5) і замість системи (8) розглядати систему

$$\begin{aligned}
&\xi_2'' - 2\eta_1' = 0,\\
&\eta_1'' + 2J\xi_2' + J'\xi_2 = 0,
\end{aligned} \tag{8'}$$

з якої випливає, що

$$\eta_1(x) = \frac{1}{2}\xi_2' + \alpha, \tag{8''}$$

де α - довільна стала, і, крім цього,

$$\xi_2''' + 4J\xi_2' + 2J'\xi_2 = 0. \tag{8'''}$$

Отже, щоб знайти коефіцієнти оператора (2) необхідно визначити хоча б один частковий розв'язок рівняння (8'''). Припустимо, що такий розв'язок $\xi_2(x)$ рівняння (8''') відомий. Тоді (5) буде інваріантним відносно двопараметричної групи перетворень з інфінітезімальними операторами

$$\begin{aligned} U_1 f &= \xi_2(x)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\xi_2' y \frac{\partial f}{\partial y}, \\ U_2 f &= y\frac{\partial f}{\partial y}, \end{aligned} \tag{9}$$

а цього вже досить, щоб одержати загальний розв'язок рівняння (5) у квадратурах.

Крім того, вважаючи у (8''') $\xi_2(x)$ довільно заданою достатньо гладкою функцією, одержимо

$$J(x) = \frac{1}{\xi_2^2}\left[-A - \frac{1}{2}\xi_2''\xi_2 + \frac{1}{4}\xi_2'^2\right], \tag{10}$$

де A - довільна стала.

Отже, якщо в (5) $J(x)$ взяти по (10) при довільно заданій функції $\xi_2(x)$ і з деякою довільно заданою сталою A, то таке рівняння (5) буде інваріантним відносно двопараметричної групи перетворень з інфінітезімальними операторами (9), які є лінійно незв'язаними і дужка Пуассона яких $(U_1, U_2)f = 0$. Ця група перетворень має канонічну форму

$$U_1 f = \frac{\partial f}{\partial \zeta}, \qquad U_2 f = \frac{\partial f}{\partial \chi}, \tag{9'}$$

причому

$$\begin{aligned} \zeta &= \int \frac{dx}{\xi_2(x)}, \\ \chi &= -\frac{1}{2}\ln \xi_2(x) + \ln y. \end{aligned} \tag{11}$$

У змінних (11) рівняння (5) зведеться до

$$\frac{d^2\chi}{d\xi^2} = A - \left(\frac{d\chi}{d\xi}\right)^2 . \qquad (5')$$

Інтегруючи останнє рівняння і потім повертаючись до змінних x і y, одержимо, за умови (10) загальний розв'язок рівняння (5):

$$y = \sqrt{\xi_2(x)}\left[C_1 \cos\left(\sqrt{-A}\int\frac{dx}{\xi_2(x)}\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{-A}\int\frac{dx}{\xi_2(x)}\right)\right] \quad \text{для } A<0, \qquad (12')$$

$$y = \sqrt{\xi_2(x)}\left[C_1 \exp\left(\sqrt{A}\int\frac{dx}{\xi_2(x)}\right) + C_2 \exp\left(-\sqrt{A}\int\frac{dx}{\xi_2(x)}\right)\right] \quad \text{для } A>0, \qquad (12'')$$

$$y = \sqrt{\xi_2(x)}\left[C_1\int\frac{dx}{\xi_2(x)} + C_2\right]. \quad \text{для } A=0 . \qquad (12''')$$

Таким чином, умова (10) при довільному виборі $\xi_2(x)$ дає можливість побудувати широкий клас лінійних однорідних рівнянь другого порядку, загальні розв'язки яких даватимуть відповідно (12'), (12''), (12''') залежно від знака довільної сталої A.

Зокрема, (12'), (12''), (12''') дають загальний розв'язок рівняння з сталими коефіцієнтами

$$y'' - Ay = 0,$$

при $\xi_2(x) = 1$ і рівняння Ейлера

$$y'' + \frac{-A + \frac{1}{4}}{x^2}\, y = 0,$$

при $\xi_2(x) = x$.

З а у в а ж е н н я. Якщо частковий розв'язок $\xi_2(x)$ рівняння (8''') такий, що $\sqrt{\xi_2 x}$ є частковим розв'язком рівняння (5), то в (10) $A=0$ має місце (12'''), яка збігається з розв'язком рівняння (5), що одержується за допомогою формули Ліувілля. Коли ж $\sqrt{\xi_2(x)}$ не буде розв'язком рівняння (5), то в (10) $A \neq 0$ і розв'язки рівняння (5) треба шукати одною з формул (12'), (12'') залежно від знака числа A. Врахувавши твердження, наведене в довіднику Камке [1], приходимо до висновку, що знання одного часткового розв'язку рівняння (8''') завжди дає можливість знайти загальний розв'язок рівняння (5), так і рівняння (8''').

Одне нелінійне рівняння другого порядку

Лінійне однорідне рівняння третього порядку

$$z''' + A(x)z'' + B(x)z' + C(x)z = 0 \tag{13}$$

заміною

$$z' = zy \tag{14}$$

зводиться до

$$\omega = y'' + 3yy' + y^3 + A(x)(y' + y^2) + B(x)y + C(x) = 0. \tag{15}$$

Очевидно, що умови інтегрування рівняння (15) в квадратурах одночасно будуть такими ж умовами і для (13). Проте, навряд чи можна вичерпати на цьому шляху всі умови інтегрування рівняння (13) у квадратурах, тому що (13) при заміні (14) дещо втрачає свої групові властивості.

Застосовуючи ознаку Лі до (15), одержимо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів інфінітезімального оператора (2):

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0, \\
\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + 2(A + 3y)\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \\
2\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + (A + 3y)\frac{\partial \xi}{\partial x} + 3(C + By + Ay^2 + y^3)\frac{\partial \xi}{\partial y} + A'\xi + 3\eta = 0, \\
\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - (C + By + Ay^2 + y^3)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - 2\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + (A + 3y)\frac{\partial \eta}{\partial x} + (C' + B'y + A'y^2)\xi + (B + 2Ay + 3y^2)\eta = 0.
\end{gathered} \tag{16}$$

З перших двох рівнянь системи (16) маємо

$$\begin{gathered}
\xi(x,y) = \xi_1(x)y + \xi_2(x), \\
\eta(x,y) = -\xi_1(x)y^3 + (\xi_2' - A\xi_1)y^2 + \eta_1(x)y + \eta_2(x).
\end{gathered} \tag{17}$$

Підставляючи (17) в останні два рівняння системи (16) і враховуючи, що результат підстановки повинен бути тотожністю по y, будемо мати

$$\begin{gathered}
\xi_1'' - (A\xi_1)' + B\xi_1 + \eta_1 + \xi_2' = 0, \\
\xi_2'' - (A\xi_2)' - 3\eta_2 - 2\eta_1' - 3C\xi_1 = 0,
\end{gathered} \tag{18}$$

$$\xi_1''' + (B - A^2 - 2A')\xi_2' + (B' + AB - AA' - A'' + 3C)\xi_1 + A'\xi_2 + A\eta_1 + 3\eta_2 +$$

$$+3\eta_1' + 2A\xi_2' = 0,$$

$$\eta_1'' + A\eta_1' + 3\eta_2' + 2A\eta_2 + 2B\xi_2' + B'\xi_2 + C'\xi_1 + 2AC\xi_1 = 0,$$

$$\eta_2'' + A\eta_2' + B\eta_2 + 2C\xi_2' + C'\xi_2 - C\eta_1 = 0.$$

Диференціюванням першого рівняння системи (18) та виключенням η_1 і η_2 з трьох останніх рівнянь тієї ж системи одержуємо

$$\eta_1 = -\xi_1'' + (A\xi_1)' - B\xi_1 - \xi_2',$$

$$3\eta_2 = 3\xi_2'' - (A\xi_2)' + 2\xi_1''' - 2(A\xi_1)'' + 2(B\xi_1)' - 3C\xi_1, \qquad (18')$$

і

$$3\xi_1^{(IV)} - 3(A\xi_1)''' + A\xi_1''' - A(A\xi_1)'' + 3(B\xi_1)'' + A(B\xi_1)' - 9(C\xi_1)' +$$

$$+3C'\xi_1 + 6\xi_2''' - 2A(A\xi_2)' + 6(B-A')\xi_2' + 3(B'-A'')\xi_2 = 0,$$

$$2\xi_1^{(V)} - 2(A\xi_1)^{(IV)} + 2A\xi_1^{(IV)} - 2A(A\xi_1)''' + 2(B\xi_1)''' +$$

$$+2B\xi_1''' - 3(C\xi_1)'' + 3C\xi_1'' + 2A(B\xi_1)'' - 2B(A\xi_1)'' -$$

$$-3A(C\xi_1)' - 3C(A\xi_1)' + 2B(B\xi_1)' + 3\xi_2^{(IV)} (A\xi_2)''' + 3A\xi_2''' - \qquad (18'')$$

$$-A(A\xi_2)'' + 3B\xi_2'' - B(A\xi_2)' + 9C\xi_2' + 3C'\xi_2 = 0.$$

Отже, щоб одержати двопараметричну групу перетворень, яка залишатиме рівняння (15) інваріантним, достатньо знайти двопараметричну множину розв'язків системи (18"). А для побудови рівняння (15), інваріантного відносно заданої групи перетворень, досить в системі (18) відповідно задати $\xi_1(x)$ і $\xi_2(x)$, після чого система (18") перетвориться в умови на коефіцієнти A, B, C, при виконанні яких відповідне рівняння буде інваріантним відносно заданої групи перетворень.

Нехай, наприклад, $\xi_1(x) = a_1$, $\xi_2(x) = a_2$, де a_1, a_2 – довільні сталі. Тоді, згідно (18')

$$
\begin{aligned}
&\eta_1(x) = a_1 (A' - B), \\
&\eta_2(x) = -\frac{a_2}{3} A' - \frac{a_1}{3} (2A'' - 2B' + 3C),
\end{aligned}
\tag{19}
$$

а система (18″) приводить до умов

$$
\begin{aligned}
&3B' - 2AA' - 3A'' = 0, \\
&3B'' + AB' - 6C' - AA'' - 3A''' = 0, \\
&3C' - BA' - AA'' - A''' = 0, \\
&2B''' + 2AB'' + 2BB' - 2BA'' - 3AC' - 3A'C - 3C'' - 2AA''' - 2A^{(IV)} = 0.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Очевидно, що система (20) сумісна. Її, наприклад, задовольняють довільні сталі A , B , C .

Наведемо міркування, які дадуть можливість знайти всю сукупність розв'язків системи (20). Як відомо [3], множина перетворень, яку допускає диференціальне рівняння, завжди створює групу. Тому, якщо існують A , B, C, які задовольняють систему (20), то за таких A , B, C (15) допускатиме двопараметричну групу перетворень, інфінітезімальні оператори якої, з врахуванням (17) і (19), повинні мати вигляд

$$
\begin{aligned}
&U_1 f = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{A'}{3} \frac{\partial f}{\partial y}, \\
&U_2 f = y \frac{\partial f}{\partial x} - \left[y^3 + Ay^2 + (B - A)y - \frac{2}{3} B' + C + \frac{2}{3} A'' \right] \frac{\partial f}{\partial y}
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Згідно з другою теоремою Лі [2] для груп перетворень дужка Пуассона $(U_1, U_2) f = C_1 U_1 f + C_2 U_2 f$, де C_1 , C_2 – сталі числа. Це й дає можливість знайти всю сукупність розв'язків системи (20). Дійсно, дужка Пуассона операторів (21)

$$
\begin{aligned}
(U_1, U_2) f = -\frac{A'}{3} \frac{\partial f}{\partial x} + \Big[-A'y^2 + (A'' - B')y + \frac{2}{3} B'' - C' - \frac{2}{3} A''' + \\
+ \frac{A'}{3} (3y^2 + 2Ay + B - A') + \frac{A''}{3} y \Big] \frac{\partial f}{\partial y}
\end{aligned}
\tag{22}
$$

може бути лінійною комбінацією операторів (21) з сталими коефіцієнтами і разом з тим оператори (21) будуть інфінітезімальними операторами двопараметричної групи перетворень лише тоді, коли $A' = a$ – стале число. Враховуючи (21) і (22), бачимо, що тоді $C_2 = 0$, тобто

$$(U_1, U_2)f = C_1 U_1 f = -\frac{A'}{3} U_1 f,$$

і в (22) з врахуванням першого рівняння системи (20) повинно бути

$$\frac{2}{3}B'' - C' + \frac{A'B}{3} - \frac{A'^2}{3} = \frac{A'^2}{9}. \tag{23}$$

Тепер знаходимо всі можливі розв'язки системи (20)

$$\begin{aligned} A(x) &= ax + b, \\ B(x) &= \frac{1}{3}(ax+b)^2 + a, \\ C(x) &= \frac{1}{3}(ax+b)\left[\frac{1}{9}(ax+b)^2 + a\right]. \end{aligned} \tag{24}$$

Перевірка показує, що (24) задовольняють рівняння (23).

Таким чином, рівняння (15) з коефіцієнтами (24) допускатиме двопараметричну групу перетворень з інфінітезімальними операторами

$$U_1 f = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{a}{3}\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$U_2 f = y\frac{\partial f}{\partial x} - \Big\{y^3 + (ax+b)y^2 + \frac{1}{3}(ax+b)^2 y - \frac{4}{9}a(ax+b) + \tag{21'}$$
$$+ \frac{1}{3}(ax+b)\left[\frac{1}{9}(ax+b)^2 + a\right]\Big\}\frac{\partial f}{\partial y},$$

що лінійно незв'язані і дужка Пуассона яких $(U_1, U_2)f = -\frac{a}{3}U_1 f$.
Група (21) матиме канонічну форму

$$U_1 f = \frac{\partial f}{\partial \chi}, \qquad U_2 f = \zeta\frac{\partial f}{\partial \zeta} + \chi\frac{\partial f}{\partial \chi}, \tag{25}$$

причому

$$\zeta = z^{\frac{3}{a}}\left(\frac{a}{3} - z^2\right)^{-\frac{3}{2a}},$$

$$\chi = \frac{\zeta}{\frac{y}{x} + \frac{a}{3}}\left[\int\left(\frac{a}{3z^2} - 1\right)^{\frac{3}{2a}}dz - \frac{y}{x}\int z^{-\frac{3}{a}}\left(z - \frac{b}{3}\right)\left(\frac{a}{3} - z^2\right)^{\frac{3}{2a}-1}dz\right], \tag{26}$$

де $z = y + \frac{ax+b}{3}$. У змінних (26) рівняння (15) з коефіцієнтами (24) не міститиме змінної x і його можна буде проінтегрувати в квадратурах. Якщо $a = 0$, то коефіцієнти A, B, C будуть сталими, $(U_1, U_2)f=0$ і канонічними змінними в цьому випадку будуть

$$\zeta = x + \int \frac{y\,dy}{y^3 + Ay^2 + By + C}, \qquad x = -\int \frac{dy}{y^3 + Ay^2 + By + C} \tag{27}$$

Аналогічно можна розглянути деякі інші випадки задавання функцій $\xi_1(x)$ і $\xi_2(x)$, які приводять до рівняння виду (15), що інтегруються в квадратурах.

Література

1. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. ГИФМЛ, М., 1961.
2. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Изд-во Сибирского отделения АН СССР, 1962.
3. S. Lie. Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Leipzig, 1891.

УДК 517.55

І.І.ЧУЛИК

ПРО ОБЛАСТЬ ЗБІЖНОСТІ РЯДУ ДІРІХЛЕ ВІД ДВОХ КОМПЛЕКСНИХ ЗМІННИХ

Нехай ряд Діріхле

$$f(z,w) = \sum_{k,l=0}^{\infty} a_{kl}\, e^{\mu_k z + \nu_l w} \tag{1}$$

збігається в повній трубчастій області T_B [1,4], де $\{\mu_k\}$ та $\{\nu_l\}$ - послідовності чисел, що задовольняють умови

$$0 \le \mu_0 < \mu_1 < \ldots ; \qquad 0 \le \nu_0 < \nu_1 < \ldots ,$$

$$\lim_{k\to\infty} \mu_k = \infty , \qquad \lim_{l\to\infty} \nu_l = \infty ,$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{\mu_k} = \lim_{l\to\infty} \frac{\ln l}{\nu_l} = 0 .$$

Позначимо: E - евклідів простір змінних μ, ν, λ; E_f - множина точок (μ_k, ν_l) площини $\mu\nu$, для яких $a_{kl} \ne 0$; $\bar{Q}_f$ - опукла оболонка множини E_f. Для кожної точки $(\mu_k, \nu_l) \in E_f$ побудуємо в E точку $P_{kl}(\mu_k, \nu_l, -\ln|a_{kl}|)$. Множину всіх точок P_{kl} позначимо через Φ_0, а опуклу оболонку множини Φ_0 - через $\bar{\Phi}_f$ [2].

Нехай

$$\varkappa(\mu,\nu) = \inf_{(\mu,\nu,\lambda)\in\bar{\Phi}_f} \lambda ,$$

тоді поверхню, яка описується в E рівнянням

$$\lambda = \varkappa(\mu,\nu), \qquad (\mu,\nu) \in \bar{Q}_f , \tag{2}$$

назвемо діаграмою Ньютона ϑ_f ряду (1).

Т е о р е м а 1. Функція $\varkappa(\mu,\nu)$ опукла на множині $\bar{Q}_f$.

Введемо функцію $T(\mu,\nu) = \exp(-\varkappa(\mu,\nu))$, визначену і неперервну на $\bar{Q}_f$. Ряд

$$\mathfrak{M}_f(z,w) = \sum_{k,l=0}^{\infty} T_{kl}\, e^{\mu_k z + \nu_l w} , \tag{3}$$

де $T_{kl} = T(\mu_k, \nu_l)$, назвемо мажорантою Ньютона ряду (1). Очевидно, що $|a_{kl}| \le T_{kl}$. Позначимо через C_1 і C_2 абсциси збіжності рядів $\mathfrak{M}_f(z, -\infty)$ та $\mathfrak{M}_f(-\infty, w)$ відповідно [3].

Т е о р е м а 2. Якщо C_1, C_2 - скінченні, то для будь-яких $q \in [0, 1]$ існує опукла функція

$$F(1-q, q) = \lim_{t\to\infty} \frac{\varkappa[(1-q)t,\ q\,t\,]}{t} .$$

Т е о р е м а 3. Поверхня $\lambda = F(\mu,\nu)$ є асимптотичним конусом множини ϑ_f.

Позначимо через M інтервал (0,1), а через m множину точок розриву похідної функції $F(1-q,q)$ на $(0,1)$. Множина m скінченна або зчисленна, причому похідна $F_q=\frac{dF}{dq}$ допускає лише розриви першого роду. У кожній точці інтервалу $(0,1)$ існують скінченні ліва F_q^- та права F_q^+ похідні, ліва похідна в точці q не перевищує правої, а обидві похідні зростають разом з q.

Кожній точці $q\in M\setminus m$ зіставимо в площині $xy\left(x=\operatorname{Re}z,\ y=\operatorname{Re}w\right)$ точку

$$x=F-qF_q\ ;\qquad y=F+(1-q)F_q\ , \tag{4}$$

зокрема точку $(b,\ a+b)$ у випадку, якщо $F(1-q,q)=aq+b$ на проміжку $[q_1,q_2]\in M\setminus m$, де a, b – сталі.

Кожній точці $q\in m$ зіставимо пряму

$$(1-q)x+qy=F\ , \tag{5}$$

$$\begin{cases} F-qF_q^+\le x\le F-qF_q^-\ , \\ F+(1-q)F_q^-\le y\le F+(1-q)F_q^+\ , \end{cases} \tag{6}$$

У випадку $q=0,\ q=1$ та скінченних F_0^+ та F_1^- одержимо відповідні промені

$$x=C_1\ ,\qquad y\le C_1+F_0^+\ , \tag{7}$$

$$y=C_2\ ,\qquad x\le C_2-F_1^-\ . \tag{8}$$

Якщо $\lim\limits_{q\to+0}F_q=-\infty$, $\lim\limits_{q\to1-0}F_q=+\infty$, то промені (7), (8) вироджуються в нескінченно віддалені точки із скінченною абсцисою та ординатою.

Рівняння (4)-(8) описують криву

$$\Psi(x,y)=0\ . \tag{9}$$

Крива (9) неперервна та опукла.

Т е о р е м а 4. Числа x, y, які задовольняють (9), є спряженими абсцисами збіжності ряду (3).

Л і т е р а т у р а

1. Г р о м о в В. П. Кратные ряды полиномов Дирихле. Сибирский математический журнал, X, № 3, 1969.

2. Кардаш А. І., Костовський О. М., Чулик І. І. Мажоранти та діаграми Ньютона функцій багатьох змінних. Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-мат., вип. 3, 1967.

3. Цегелик Г. Г. Теория мажорант и диаграмм Ньютона рядов Дирихле и ее приложения. Тезисы докладов Всесоюзной конференции по теории функций комплексного переменного. Харьков, 1971.

4. Artemiades Nicolas. Sur les séries de Dirichlet a deux variables. Bull. sci. math., 77, mars-avril, 1953.

УДК 518:512.39

Ю.М.ЩЕРБИНА

ОДИН ІТЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ І ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ РІВНЯНЬ

Для розв'язування нелінійного алгебраїчного або трансцендентного рівняння

$$f(x)=0 \tag{1}$$

пропонується обчислювальний алгоритм

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{(1-\beta)f'(x_n)+\beta f'\left(x_n-\frac{1}{2\beta}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}, \tag{2}$$

де β - дійсне число, $n=0,1,2,\ldots$

Теорема 1. Нехай виконуються умови:

1) на відрізку $R=\left\{x:|x-x_0|\le\left(\frac{1}{1-h^2}+\frac{1}{2|\beta|}\right)\eta_0\right\}$

$$|f'(x)|\ge b,\qquad |f''(x)|\le q,\qquad |f'''(x)|\le k;$$

2) $h = l\eta_0 < 1$, де $\eta_0 = \frac{|f(x_0)|}{b}$,

$$l^2 = \frac{q^2}{4b^2} + \frac{k}{6b} + \frac{k}{8b|\beta|}.$$

Тоді рівняння (1) має на відрізку $R^* = \left\{ x : |x - x_0| \leq \frac{\eta_0}{1-h^2} \right\}$ розв'язок x^*, до якого збігається послідовність наближень процесу (2), причому

$$|x^* - x_n| \leq \frac{h^{3^n-1}}{1-h^2}\eta_0 . \tag{3}$$

Д о в е д е н н я. Нехай ми вже визначили наближення $x_1, \ldots, x_{n-1}$ $(n \geq 2)$, причому

$$x_i \in R^*, \qquad x_i - \frac{1}{2\beta}\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \in R, \qquad 1 \leq i \leq n-1.$$

Розглянемо тотожність

$$f(x_n) = f(x_n) - f(x_{n-1}) -$$

$$-\left[(1-\beta)f'(x_{n-1}) + \beta f'\left(x_{n-1} - \frac{1}{2\beta}\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}\right)\right](x_n - x_{n-1}) . \tag{4}$$

З (4), розкладаючи $f(x_n)$ в ряд Тейлора в околі x_{n-1} і використовуючи умови теореми, одержимо

$$|f(x_n)| \leq \left(\frac{q^2}{4b} + \frac{k}{6} + \frac{k}{8|\beta|}\right)\eta_{n-1}^3 , \tag{5}$$

звідки

$$|x_{n+1} - x_n| \leq l^2 \eta_{n-1}^3 = \eta_n . \tag{6}$$

Послідовно використовуючи нерівність (6) і умови теореми, можемо записати

$$\eta_n \leq h^{3^n-1}\eta_0 .$$

Нерівність

$$|x_0 - x_n| \le \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i \le \frac{\eta_0}{1-h^2}$$

показує, що x_n, а, отже, і вся послідовність $\{x_n\}$ належить $R^* \subset R$, а з нерівності

$$\left|x_0 - x_n + \frac{1}{2\beta}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right| \le |x_0 - x_n| + \frac{1}{2|\beta|}\eta_n \le \left(\frac{1}{1-h^2} + \frac{1}{2|\beta|}\right)\eta_0$$

випливає, що послідовність $\left\{x_n - \frac{1}{2\beta}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right\}$ належить R. Таким чином, ми маємо право використовувати умову I).

З оцінки

$$|x_{n+p} - x_n| \le \frac{h^{3^n-1}}{1-h^2}\eta_0 \qquad (7)$$

випливає, що послідовність $\{x_n\}$ збігається:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*.$$

Використовуючи (5), одержимо

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n)| = |f(x^*)| = 0,$$

тобто x^* - розв'язок рівняння (I). Очевидно, що $x^* \in R$. Із (7) при прямуванні до границі $(p \to \infty)$ одержимо (3).

Зауважимо, що β можна вибирати змінним на кожному кроці: $\beta = \beta_n$. Нас особливо цікавить випадок

$$\beta_0 = 1; \quad \beta_n = \frac{f(x_n)}{2f'(x_n)(x_n - x_{n-1})}, \quad n \ge 1, \qquad (8)$$

тому що схема (2) тоді набирає простого вигляду

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{(1-\beta_n)f'(x_n) + \beta_n f'(x_{n-1})}, \quad x_{-1} = x_0 - \frac{1}{2}\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \qquad (9)$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Т е о р е м а 2. Нехай виконуються умови:

I) на відрізку $R^* = \left\{ x : |x - x_0| \le \frac{1}{1-h^2} \eta_0 \right\}$

$$|f'(x)| \ge b, \quad |f''(x)| \le q, \quad |f'''(x)| \le k;$$

2) $$h = l\eta_0 < 1, \quad \text{де} \quad \eta_0 = \frac{|f(x_0)|}{b},$$

$$l^2 = \frac{q^2}{4b^2} + \frac{5}{12}\frac{k}{b}$$

Тоді рівняння (I) має на відрізку R^* розв'язок x^*, до якого збігається послідовність наближень процесу (8)-(9), причому

$$|x^* - x_n| \le \frac{h^{D_n}}{1-h^2}\eta_0,$$

де $D_n = 2D_{n-1} + D_{n-2} + 2$, $\quad D_0 = 0, \quad D_{-1} = 0.$

Доведення аналогічне до попереднього.

Очевидно, що порядок збіжності процесу (2) дорівнює трьом. Для визначення порядку збіжності схеми (8)-(9) одержимо нерівність

$$|x_{n+1} - x_n| \le l^2 \eta_{n-1}^2 \eta_{n-2} = \eta_n, \qquad (n \ge 2),$$

з якої, аналогічно до [2], запишемо рівняння $\rho = 2 + \frac{1}{\rho}$, звідки $\rho = 1 + \sqrt{2}$, де ρ - порядок збіжності.

Індекс ефективності [I] для схеми (2) дорівнює $\sqrt[3]{3}$, а для схеми (8)-(9) - $\sqrt{1+\sqrt{2}}$. Тому що $\sqrt{1+\sqrt{2}} > \sqrt[3]{3}$, то друга модифікація краща за першу. Відзначимо, що схема (8)-(9) за ефективністю краща також методів Ньютона, дотичних гіпербол, Чебишева.

Література

1. Островский А. М. Решение уравнений и систем уравнений. ИЛ, М., 1963.

2. Schmidt J. W. Eine Übertragung der Regula Falsi auf Gleichungen in Banachräumen I. Zeitschr. angew. Math. und Mech., 43, 1963, № 1-2.

УДК 518:512.36

Г.Г.ЦЕГЕЛИК

ВИДІЛЕННЯ СМУГ, В ЯКИХ ПОЛІНОМИ І РЯДИ ДІРІХЛЕ НЕ ПЕРЕТВОРЮЮТЬСЯ В НУЛЬ

За допомогою параметрів, які введені в [1] для дослідження розміщення нулів алгебраїчних поліномів і рядів Лорана, встановлюються достатні умови існування смуг, в яких поліноми і ряди Діріхле не перетворюються в нуль, визначаються права і ліва границі нулів поліномів Діріхле, а також права границя нулів рядів Діріхле.

Розглянемо ряд Діріхле з абсцисою абсолютної збіжності A $(A < \infty)$

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu e^{-\lambda_\nu z}, \tag{1}$$

де $z = x + iy$, $A_0 \neq 0$, $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots$, $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$.

Нехай k $/k \geq 0/$ - деякий фіксований індекс і $\{\alpha_\nu\}$ $/\nu = 0, 1, 2, \ldots/$ - довільна послідовність додатних чисел (параметрів), яка задовольняє умову

$$\sum_{\nu \neq k} \alpha_\nu = \alpha_k . \tag{2}$$

Припустимо

$$r_k = \max_{\nu<k}\left(\frac{a_\nu \alpha_k}{a_k \alpha_\nu}\right)^{\frac{1}{\lambda_k-\lambda_\nu}}, \qquad R_k = \inf_{\nu>k}\left(\frac{a_k \alpha_\nu}{a_\nu \alpha_k}\right)^{\frac{1}{\lambda_\nu-\lambda_k}}, \tag{3}$$

де $a_\nu = |A_\nu|$.

Т е о р е м а 1. Якщо при $k>0$ існує такий набір параметрів $\{\alpha_\nu\}$, який задовольняє умову (2), що $R_k > r_k$, то ряд Діріхле (1) не перетворюється в нуль у смузі

$$-\ln R_k \le x \le -\ln r_k .$$

Д о в е д е н н я. Із (3) при $-\ln R_k = \rho_2$, $-\ln r_k = \rho_1$ одержуємо

$$a_\nu e^{-\rho_1(\lambda_\nu-\lambda_k)} \le \frac{a_k}{\alpha_k}\alpha_\nu \qquad (\nu<k),$$

$$a_\nu e^{-\rho_2(\lambda_\nu-\lambda_k)} \le \frac{a_k}{\alpha_k}\alpha_\nu \qquad (\nu>k).$$

Використовуючи умову (2), з останніх нерівностей випливає, що

$$\sum_{\nu<k} a_\nu e^{-\rho_1(\lambda_\nu-\lambda_k)} + \sum_{\nu>k} a_\nu e^{-\rho_2(\lambda_\nu-\lambda_k)} \le a_k .$$

Легко бачити, що для будь-якого x_0 $/\rho_2 \le x_0 \le \rho_1/$ при $R_k > r_k$ виконується умова

$$\sum_{\nu\ne k} a_\nu e^{-x_0(\lambda_\nu-\lambda_k)} < a_k . \tag{4}$$

Покажемо, що ряд Діріхле (1) не перетворюється в нуль у смузі $-\ln R_k \le x \le -\ln r_k$. Дійсно, припустимо протилежне, що існує така точка $z_0 = x_0 + i y_0$, для якої $\rho_2 \le x_0 \le \rho_1$ і $f(z_0) = 0$. Тоді

$$-A_k e^{-\lambda_k z_0} = \sum_{\nu\ne k} A_\nu e^{-\lambda_\nu z_0}$$

або

$$a_k \le \sum_{\nu \ne k} a_\nu e^{-x_0(\lambda_\nu - \lambda_k)},$$

що суперечить (4). Виходить, зроблене припущення невірне. Теорема доведена.

Т е о р е м а 2. Якщо $k=0$, то при будь-якому наборі параметрів $\{\alpha_\nu\}$, який задовольняє умову (2), всі нулі ряду Діріхле (1) лежать у півплощині

$$x \le -\ln R_0 .$$

Розглянемо тепер поліном Діріхле

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu e^{-\lambda_\nu z}. \qquad (5)$$

Для полінома Діріхле (5) теореми 1,2 залишаються справедливими, тільки параметри досить брати для $\nu = 0,1,2,\ldots,n$. Крім того, при $k=n$ для поліномів Діріхле має місце теорема 3.

Т е о р е м а 3. Якщо $k=n$, то при будь-якому наборі параметрів $\{\alpha_\nu\}$ $/\nu = 0,1,2,\ldots,n/$, який задовольняє умову (2), всі нулі полінома Діріхле (5) лежать у півплощині

$$x \ge -\ln r_n .$$

П р и к л а д.

$$f(z) = \left(\frac{\sqrt{57}}{8} - i\right) - 8ie^{-\frac{1}{2}z} + \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}z} + (1 - i\sqrt{3})e^{-\pi z}.$$

Тут

$$a_0 = \frac{11}{8},\quad a_1 = 8,\quad a_2 = \frac{1}{2},\quad a_3 = 2,\quad \lambda_0 = 0,\quad \lambda_1 = \frac{1}{2},\quad \lambda_2 = \frac{3}{2},\ \lambda_3 = \pi.$$

1. Візьмемо $k=1$ і $\alpha_0 = \frac{11}{16}$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \frac{1}{16}$, $\alpha_3 = \frac{4}{16}$.

Тоді

$$r_1 = \left(\frac{a_0\,\alpha_1}{a_1\,\alpha_0}\right)^{\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_0}} = \frac{1}{4},$$

$$R_1 = \min\left\{ \left(\frac{a_1\,\alpha_2}{a_2\,\alpha_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}}, \quad \left(\frac{a_1\,\alpha_3}{a_3\,\alpha_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_3 - \lambda_1}} \right\} = 1$$

і $f(z)$ не перетворюється в нуль у смузі $0 \le x \le \ln 4$.

2. Нехай $k=0$ і $\alpha_0=1$, $\alpha_1=\frac{10}{11}$, $\alpha_2=\alpha_3=\frac{1}{22}$. Тоді

$$R_0=\min\left|\left(\frac{a_0\ \alpha_1}{a_1\alpha_0}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}},\quad \left(\frac{a_0\ \alpha_2}{a_2\ \alpha_0}\right)^{\frac{1}{\lambda_2}},\quad \left(\frac{a_0\ \alpha_3}{a_3\ \alpha_0}\right)^{\frac{1}{\lambda_3}}\right|=\left(\frac{5}{32}\right)^2$$

і $f(z)$ не перетворюється в нуль у півплощині $x>2\ln 6,4$.

3. Приймемо, що $k=3$ і $\alpha_0=\frac{1}{12}$, $\alpha_1=\frac{10}{12}$, $\alpha_2=\frac{1}{12}$, $\alpha_3=1$.

Тоді

$$r_3=\max\left[\left(\frac{a_0\ \alpha_3}{a_3\,\alpha_0}\right)^{\frac{1}{\lambda_3-\lambda_0}},\quad \left(\frac{a_1\ \alpha_3}{a_3\ \alpha_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_3-\lambda_1}},\quad \left(\frac{a_2\ \alpha_3}{a_3\ \alpha_2}\right)^{\frac{1}{\lambda_3-\lambda_2}}\right]=\sqrt[\pi]{5,5}$$

і $f(z)$ не перетворюється в нуль у півплощині $x<-\frac{1}{\pi}\ln 5,5$.

Отже, всі нулі поліному Діріхле $f(z)$ лежать в двох смугах

$$-\frac{1}{\pi}\ln 5,5 \le x<0,\qquad \ln 4<x\le 2\ln 6,4.$$

Література

1. Цегелик Г. Г. Параметрическая локализация по модулям нулей полиномов и рядов Лорана. Изв. вузов, Математика, 12, 1967.

УДК 519.21

І.Д.КВІТ

ЗОБРАЖЕННЯ ВИПАДКОВОГО ВЕКТОРА

Вступ. Розглянемо парновимірний евклідів простір R^{2n}, $(n=1,2,\ldots)$, точками якого є упорядковані n пар дійсних чисел $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$; $-\infty<x_j<+\infty$, $-\infty<y_j<+\infty$, ($j=1,2,\ldots,n$). У просторі R^{2n} введемо комплексну структуру, кладучи $z_j=x_j+iy_j \equiv Re\, z_j + i\, Jm\, z_j$; $i=\sqrt{-1}$. Одержимо n-вимірний комплексний простір C^n точок $(z_1,\ldots,z_n)=$

$= (x_1, \dots, x_n) + i\,(y_1, \dots, y_n) \equiv (Re\, z_1, \dots, Re\, z_n) + i\,(Jm\, z_1, \dots, Jm\, z_n)$.
Зокрема, при $n = 1$ дістанемо комплексну площину $C' = C$. Простір C^n при $n \geqslant 2$, можна вважати декартовим добутком n комплексних площин. Точки n-вимірного комплексного простору C^n збігаються з точками $2n$-вимірного дійсного евклідового простору R^{2n}. При $y_j = 0$, $(j = 1, 2, \dots, n)$, точки C^n та R^{2n} утворюють n-вимірний дійсний евклідів простір E^n точок $(x_1, \dots, x_n)$; $-\infty < x_j < +\infty$, $(j = 1, 2, \dots, n)$.

Множину точок $\{ x_j \geqslant 0,\ -\infty < y_j < +\infty;\ j = 1, 2, \dots, n \}$ в просторі R^{2n} позначимо через R^{2n}_{+}, а в просторі C^n – через C^n_{+}; сукупність точок $\{ x_j > 0,\ -\infty < y_j < +\infty;\ j = 1, 2, \dots, n \}$ позначимо через R^{2n}_{+0} або C^n_{+0}. Аналогічно $\{ x_j \geqslant 0,\ y_j = 0;\ j = 1, 2, \dots, n \}$ в просторі R^{2n}, або в просторі C^n, або, що те ж саме, $\{ x_j \geqslant 0;\ j = 1, 2, \dots, n \}$ в просторі E^n, назвемо першим n-вимірним октантом і позначимо через E^n_{+}; $\{ x_j > 0;\ j = 1, 2, \dots, n \}$ позначимо через E^n_{+0}. Перший гіпероктант E^n_{+} можна вважати декартовим добутком n півосей невід'ємних чисел, $E^1_{+} = [0, \infty)$, а E^n_{+0} – добутком $E^1_{+0} = (0, \infty)$.

Нехай система n випадкових змінних $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ набирає значення з першого n-вимірного октанта E^n_{+}. Тоді називаємо її n-вимірною невід'ємнозначною випадковою змінною або n-вимірним невід'ємнозначним випадковим вектором. Припускаємо, що невід'ємнозначний випадковий вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ буде абсолютно неперервним з густиною

$$p(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} \equiv 0, & \text{якщо хоча б одне } t_j < 0, \\ \geqslant 0, & \text{якщо всі } t_j > 0, \end{cases} \qquad \int_0^\infty \dots \int_0^\infty p(t_1, \dots, t_n)\, dt_n \dots dt_1 = 1. \tag{1}$$

Лапласівське інтегральне перетворення густини (1) назвемо зображенням випадкового вектора ξ і позначимо його через $\varphi(z_1, \dots, z_n)$:

$$\varphi(z_1, \dots, z_n) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-(z_1 t_1 + \dots + z_n t_n)} p(t_1, \dots, t_n)\, dt_n \dots dt_1 . \tag{2}$$

Інтеграл (2) розуміємо в сенсі Лебега.

Тут йдеться про деякі властивості зображення (2). Основні з них буде проілюстровано для двовимірної гама-густини в наступній статті.

В л а с т и в о с т і з о б р а ж е н н я. З (І) і (2) випливає

$$\varphi(0,\ldots,0)=1. \tag{3}$$

Звідси також дістаємо

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n)=\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty e^{-(x_1t_1+\ldots+x_nt_n)}p(t_1,\ldots,t_n)dt_n\ldots dt_1,\ (x_1,\ldots,x_n)\in E_+^n. \tag{4}$$

Зображення (2) абсолютно збігається принаймні в C_+^n. Дійсно, з нерівностей для інтегралів та з (2), (3) і (4) одержуємо

$$|\varphi(z_1,\ldots,z_n)|\le\varphi(x_1,\ldots,x_n)\le\varphi(0,\ldots,0)=1. \tag{5}$$

Для кожного j, $(j=1,2,\ldots,n)$, та $(z_1,\ldots,z_n)\in C_+^n$, маємо

$$\lim_{|y_j|\to\infty}\varphi(z_1,\ldots,z_n)=0. \tag{6}$$

Властивість (6) випливає з (5) обмеженості зображення та з теореми Рімана-Лебега для одновимірного випадку [3]. Кожний вираз зліва в (6) при $|y_j|\to\infty$ має порядок $O\left(\frac{1}{|y_j|}\right)$.

З виразу

$$\varphi(z_1,\ldots,z_n)=\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty e^{-(x_1t_1+\ldots+x_nt_n)}p(t_1,\ldots,t_n)e^{-i(y_1t_1+\ldots+y_nt_n)}dt_n\ldots dt_1 \tag{7}$$

випливає, що для кожного j, $(j=1,2,\ldots,n)$, рівномірно відносно сукупності y_j та $(z_1,\ldots,z_n)\in C_+^n$, маємо

$$\lim_{x_j\to\infty}\varphi(z_1,\ldots,z_n)=0. \tag{8}$$

Отже, з (6) і (8) виходить, що для кожного j, $(j=1,2,\ldots,n)$, та $(z_1,\ldots,z_n)\in C_+^n$, маємо

$$\lim_{z_j\to\infty}\varphi(z_1,\ldots,z_n)=0. \tag{9}$$

Якщо (2) записати у вигляді

$$\varphi(z_1,\dots,z_n)=u(x_1,y_1;\dots;x_n,y_n)+iv(x_1,y_1;\dots;x_n,y_n)\equiv Re\,\varphi+i\,Jm\,\varphi, \quad (10)$$

де

$$u=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x_1t_1+\dots+x_nt_n)}\cos(y_1t_1+\dots+y_nt_n)\rho(t_1,\dots,t_n)dt_n\dots dt_1\,, \quad (11)$$

і

$$v=-\int_0^\infty\dots\int_0^\infty e^{-(x_1t_1+\dots+x_nt_n)}\sin(y_1t_1+\dots+y_nt_n)\rho(t_1,\dots,t_n)dt_n\dots dt_1\,, \quad (12)$$

то відразу видно, що при кожному $(x_1,\dots,x_n)\in E^n_+$ дійсна частина зображення відносно сукупності y_j є парною функцією

$$u(x_1,-y_1;\dots;x_n,-y_n)=u(x_1,y_1;\dots;x_n,y_n), \quad (13)$$

а уявна частина - непарною функцією,

$$v(x_1,-y_1;\dots;x_n,-y_n)=-v(x_1,y_1;\dots;x_n,y_n), \quad (14)$$

причому

$$u(x_1,0;\dots;x_n,0)=\varphi(x_1,\dots x_n);\quad v(x_1,0;\dots;x_n,0)\equiv 0. \quad (15)$$

З (10), (13) і (14) дістаємо

$$\varphi(\bar z_1,\dots,\bar z_n)=\overline{\varphi(z_1,\dots,z_n)}\,, \quad (16)$$

де рисочка зверху означає комплексну спряженість.

Зображення (2) є аналітичною функцією принаймні в C^n_{+0}. Дійсно, як видно з (11) і (12), функції u та v як функції від $2n$ дійсних змінних $(x_1,y_1;\dots;x_n,y_n)$ одноразово диференційовні. Отже, існують для (10) формальні похідні

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z_j}\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}-i\frac{\partial\varphi}{\partial y_j}\right),\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\bar z_j}\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}+i\frac{\partial\varphi}{\partial y_j}\right). \quad (17)$$

Легко перевірити, що в нашому випадку

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}_j}=0, \quad (j=1,2,\dots,n), \qquad (z_1,\dots,z_n)\in C^n_{+0}. \tag{18}$$

Рівняння (18) узагальнюють рівняння Коші-Рімана для випадку функцій багатьох комплексних змінних. Таким чином, зображення (2) - аналітична функція в C^n_{+0}. Умови аналітичності (18) містять $2n$ дійсних рівнянь відносно двох дійсних функцій $(u=Re\varphi,\ v=Jm\varphi)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}-\frac{\partial v}{\partial y_j}=0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y_j}+\frac{\partial v}{\partial x_j}=0, \quad (j=1,2,\dots,n),\ (x_1,y_1,\dots,x_n y_n)\in R^{2n}_{+0}. \tag{19}$$

При $n=2,3,\dots$ система (19) переозначена. При кожному j, $(j=1,2,\dots,n)$ система (19) є системою рівнянь Коші-Рімана для окремої змінної z_j. За теоремою Гартогса [5], якщо однозначна функція комплексних змінних в якійсь області аналітична відносно кожної окремої комплексної змінної z_j, то вона аналітична в цій області відносно сукупності всіх комплексних змінних z_j.

Відзначимо, що коли довільна функція $p(t_1,\dots,t_n)$ задовольняє умову

$$|p(t_1,\dots,t_n)|\le Me^{\sum_{j=1}^{n}x_j^{(0)}t_j}, \qquad (M>0,\ x_j^{(0)}>0;\ \ t_j>0;\ \ j=1,2,\dots,n), \tag{20}$$

де M та $x_j^{(0)}$ - сталі, то (2) існує та є аналітичною функцією в області $\{Re\,z_1>x_1^{(0)},\dots,\ Re\,z_n>x_n^{(0)}\}$.

З (4) видно, що $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ з ростом кожного x_j від 0 до ∞, монотонно спадає до 0. Оскільки $\varphi(0,\dots,0)=1$, то $\varphi(x_1,\dots,x_n)$, $(x_1,\dots,x_n)\in E^n_+$, є хвостом деякої функції розподілу з густиною q. Докладніше,

$$\begin{cases}\varphi(x_1,\dots,x_n)=\int\limits_{x_1}^{\infty}\dots\int\limits_{x_n}^{\infty}q(t_1,\dots,t_n)\,dt_n\dots dt_1, \\ q(x_1,\dots,x_n)=\int\limits_0^{\infty}\dots\int\limits_0^{\infty}e^{-(x_1t_1+\dots+x_nt_n)}t_1\dots t_n\,p(t_1,\dots,t_n)\,dt_n\dots dt_1.\end{cases} \tag{21}$$

Співвідношення (2I) показує, що кожному абсолютно неперервному невід'ємнозначному випадковому векторові з густиною (I) і зображенням (2) ставиться у відповідність інший невід'ємнозначний випадковий вектор з густиною q, (2I).

Кажуть, що функція $f(x_1,\dots,x_n)$, $(x_1,\dots,x_n)\in E^n_{+0}$, цілком монотонна, якщо вона має похідні всіх порядків та

$$(-1)^{k_1+\dots+k_n}\frac{\partial^{k_1+\dots+k_n} f(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}}\geqslant 0,\quad (x_1,\dots,x_n)\in E^n_{+0},\ k_1\geqslant 0,\dots,k_n\geqslant 0. \tag{22}$$

Зображення (2), як аналітична функція в C^n_{+0}, має там похідні всіх порядків, причому в E^n_{+0} для $k_1\geqslant 0,\dots,k_n\geqslant 0$, дістаємо

$$(-1)^{k_1+\dots+k_n}\frac{\partial^{k_1+\dots+k_n}\varphi(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}}=\int_0^\infty\dots\int_0^\infty e^{-(x_1t_1+\dots+x_nt_n)}t_1^{k_1}\dots t_n^{k_n}p(t_1,\dots,t_n)dt_n\dots dt_1. \tag{23}$$

Очевидно, що правий бік (23) невід'ємний в E^n_{+0}. Отже, зображення (2) цілком монотонна функція в області E^n_{+0}.

Зауважимо, що коли випадковий вектор ξ з густиною (I) має початковий момент ($k_1-1,\dots,k_n-1$)-го порядку, то поділений на цей момент вираз (23) буде густиною залежною від параметрів $(k_1,\dots,k_n)$. При $k_1=\dots=k_n=1$, (23) дає q, (2I).

Універсальним способом знаходження розв'язку інтегрального рівняння (2), коли $\varphi(z_1,\dots,z_n)$ - відома, а $p(t_1,\dots,t_n)$ - шукана функція, є зворотна формула: у кожній точці $(t_1,\dots,t_n)\in E^n_{+0}$ неперервності густини маємо

$$p(t_1,\dots,t_n)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty}\dots\int_{c_n-i\infty}^{c_n+i\infty}e^{z_1t_1+\dots+z_nt_n}\varphi(z_1,\dots,z_n)dz_n\dots dz_1, \tag{24}$$

де $c_j>0$, $(j=1,2,\dots,n)$, c_j - довільна стала, z_j - біжуча точка на шляху інтегрування прямій $\operatorname{Re} z_j=c_j$ в z_j - площині; інтеграл (24) не залежить від вибору сталої c_j і його розуміємо в сенсі головного значення Коші.

Виведення формули (24) проводиться повторним застосуванням виведення в одновимірному випадку [1]. При цьому використовується формула Коші [2]

$$\varphi(z_1,\dots,z_n)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty}\dots\int\limits_{c_n-i\infty}^{c_n+i\infty}\frac{\varphi(\zeta_1,\dots,\zeta_n)\,d\zeta_n\dots d\zeta_1}{(\zeta_n-z_n)\dots(\zeta_1-z_1)},\quad (z_1,\dots,z_n)\in C^n_{+0}. \tag{25}$$

Інтеграли (24) при відповідних умовах можуть братися за допомогою теорії лишків.

Якщо компоненти невід'ємнозначного випадкового вектора $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ незалежні, та густина j-ї компоненти дорівнює $\rho_j(t_j)$, а зображення – $\varphi_j(z_j)$, то густина (1) дорівнює $\prod\limits_{j=1}^{n}\rho_j(t_j)$, зображення (2) – $\prod\limits_{j=1}^{n}\varphi_j(z_j)$, а зворотна формула (24) набуває вигляду

$$\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_j-i\infty}^{c_j+i\infty}e^{\zeta_j t_j}\varphi_j(\zeta_j)\,d\zeta_j,\quad c_j>0,$$

і багатовимірний випадок не містить ніяких додаткових труднощів порівняно з одновимірним.

Л і т е р а т у р а

1. К в і т І. Д. Випадкова змінна та випадковий процес. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1968.
2. М а л ь г р а н ж Б. Лекции по теории функций нескольких комплексных переменных. М., 1969.
3. Т и т ч м а р ш Е. Теория функций. М.–Л., 1951.
4. B u r r I. W. Ann. Math. Statist. 13, 1942, 215–232.
5. H a r t o g s F. Math. Ann. 62, 1906, 1–88.

УДК 517.94

В.Г.КОСТЕНКО, О.О.ВЕСЕЛОВСЬКА

ЗАГАЛЬНЕ ЛІНІЙНЕ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ДРУГОГО ПОРЯДКУ НА ПЛОЩИНІ, ІНВАРІАНТНЕ ВІДНОСНО ОДНІЄЇ ЗАДАНОЇ ГРУПИ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Розглянемо загальне лінійне диференціальне рівняння в частинних похідних 2-го порядку

$$L \equiv A(x,y)r + 2B(x,y)s + C(x,y)t + K(x,y)p + E(x,y)q + Q(x,y)u - f(x,y) = 0^{*)} \quad (1)$$

і виділимо з нього ті рівняння, які залишаються інваріантними відносно групи перетворень з інфінітезімальним оператором

$$Uf = -my\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{x}{m}\frac{\partial f}{\partial y}\ . \quad (2)$$

Для цього використаємо відому ознаку Лі [2], згідно з якою рівняння (1) допускає групу перетворень (2) тоді і тільки тоді, коли двічі продовжений оператор

$$U''f = -my\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{x}{m}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{q}{m}\frac{\partial f}{\partial p} + mp\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{2s}{m}\frac{\partial f}{\partial r} + \left(mr - \frac{t}{m}\right)\frac{\partial f}{\partial s} + 2ms\frac{\partial f}{\partial t}\ , \quad (3)$$

застосований до лівої частини рівняння (1), обертається в тотожній нуль на всіх розв'язках рівняння (1), тобто коли одночасно задовольняються рівняння

$$U''L = -my\left(\frac{\partial A}{\partial x}r + 2\frac{\partial B}{\partial x}s + \frac{\partial C}{\partial x}t + \frac{\partial K}{\partial x}p + \frac{\partial E}{\partial x}q + \frac{\partial Q}{\partial x}u - \frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{x}{m}\left(\frac{\partial A}{\partial y}r + 2\frac{\partial B}{\partial y}s + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial C}{\partial y}t + \frac{\partial K}{\partial y}p + \frac{\partial E}{\partial y}q + \frac{\partial Q}{\partial y}u - \frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{q}{m}K + mEp - \frac{2}{m}As + 2B\left(mr - \frac{t}{m}\right) + 2mCs = 0, \quad (4)$$

$$L = 0.$$

---

*) Тут p, q, r, s, t – позначення Монжа частинних похідних 1-го і 2-го порядків від функції $u(x,y)$.

Якщо з (1) визначити

$$r = \frac{1}{A}\left(f - 2Bs - Ct - Kp - Eq - Qu\right)$$

і підставити в (4), то одержимо тотожність по всіх змінних x, y, u, p, q, s, t:

$$\begin{aligned} U''L = &- my\left[\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x}\left(f - 2Bs - Ct - Kp - Eq - Qu\right) + 2\frac{\partial B}{\partial x}s + \frac{\partial C}{\partial x}t + \right. \\ &\left. + \frac{\partial K}{\partial x}p + \frac{\partial E}{\partial x}q + \frac{\partial Q}{\partial x}u - \frac{\partial f}{\partial x}\right] + \frac{x}{m}\left[\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial y}\left(f - 2Bs - Ct - Kp - Eq - Qu\right) + \right. \\ &\left. + 2\frac{\partial B}{\partial y}s + \frac{\partial C}{\partial y}t + \frac{\partial K}{\partial y}p + \frac{\partial E}{\partial y}q + \frac{\partial Q}{\partial y}u - \frac{\partial f}{\partial y}\right] - \frac{K}{m}q + mEp - 2\frac{A}{m}s + \\ &+ 2mB\left[\frac{1}{A}\left(f - 2Bs - Ct - Kp - Eq - Qu\right)\right] - 2\frac{B}{m}t + 2mCs \equiv 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Прирівнюючи в тотожності (5) до нуля коефіцієнти при різних степенях похідних p, q, s, t, одержимо таку систему лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних першого порядку:

$$y\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \frac{x}{m^2}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial y}\right) - 2\frac{B}{A} = 0, \tag{6}$$

$$y\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial x}\right) - \frac{x}{m^2}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial y}\right) - 2\frac{B}{A} = 0, \tag{7}$$

$$y\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial x}\right) - \frac{x}{m^2}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial y}\right) - 2\frac{B}{A} + \frac{E}{K} = 0, \tag{8}$$

$$y\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial x}\right) - \frac{x}{m^2}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial y}\right) - 2\frac{B}{A} - \frac{1}{m^2}\frac{K}{E} = 0, \tag{9}$$

$$y\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial x}\right) - \frac{x}{m^2}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial y}\right) - 2\frac{B}{A} - \frac{1}{m^2}\frac{A}{B} + \frac{C}{B} = 0; \tag{10}$$

$$y\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial x}\right) - \frac{x}{m^2}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial y}\right) - 2\frac{B}{A} - \frac{2}{m^2}\frac{B}{C} = 0. \tag{11}$$

Знайдемо загальний розв'язок останньої системи. Для цього спочатку множимо рівняння (10) цієї системи на $\frac{B}{A}$, а рівняння (11) на $\frac{C}{A}$, що дасть

$$y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{B}{A}\right) - \frac{x}{m^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{B}{A}\right) + \frac{1}{m^2} + 2\left(\frac{B}{A}\right)^2 - \frac{C}{A} = 0, \tag{10'}$$

$$y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{C}{A}\right) - \frac{x}{m^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{C}{A}\right) - 2\frac{B}{A}\cdot\frac{C}{A} + \frac{2}{m^2}\frac{B}{A} = 0. \tag{11'}$$

Виключаючи $\frac{C}{A}$ з рівнянь (10') і (11'), для $\frac{B}{A} = z$ маємо параболічне рівняння другого порядку

$$y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{xy}{m^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{x^2 \partial^2 z}{m^4 \partial y^2} + \left(6yz - \frac{x}{m^2}\right)\frac{\partial z}{\partial x} - \left(6\frac{xz}{m^2} + \frac{y}{m^2}\right)\frac{\partial z}{\partial y} + 4\frac{z}{m^2} + 4z^3 = 0, \quad (12)$$

яке в змінних $\xi = m^2y^2 \; x^2$, $\quad \eta = m \arcsin \frac{x}{m^2y^2 + x^2}$

має канонічну форму

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} + 6z\frac{\partial z}{\partial \eta} + \frac{4}{m^2} z\,(1 + m^2z^2) = 0. \quad (13)$$

Розглядаючи (13) як звичайне рівняння другого порядку з параметром ξ і розв'язуючи його груповим методом, знаходимо

$$z = \frac{B}{A} = \frac{m^2y^2 - x^2 + 2mxy\varphi_1}{(m^2y^2 + x^2)\varphi_2 + 2m^2xy - m(m^2y^2 - x^2)\varphi_1}, \quad (14)$$

а $\frac{C}{A}$ визначимо з (10')

$$\frac{C}{A} = \frac{(m^2y^2 + x^2)\varphi_2 - 2m^2xy + m(m^2y^2 - x^2)\varphi_1}{m^2[(m^2y^2 + x^2)\varphi_2 + 2m^2xy - m(m^2y^2 - x^2)\varphi_1]}. \quad (15)$$

Потім, віднявши від рівняння (9) системи (6)-(11) рівняння (8) і одержане помноживши на $\frac{K}{E}$, дістаємо

$$y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{K}{E}\right) - \frac{x}{m^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{K}{E}\right) - \frac{1}{m^2}\left(\frac{K}{E}\right)^2 - 1 = 0,$$

звідки

$$\frac{K}{E} = m\frac{x - my\varphi_3}{my + x\varphi_3}. \quad (16)$$

Аналогічно знаходимо

$$\frac{Q}{E} = \frac{\sqrt{m^2y^2 + x^2}\,\varphi_4}{my + x\varphi_3} \quad (17)$$

і

$$\frac{H}{E} = \frac{\sqrt{m^2y^2 + x^2}\,\varphi_5}{my + x\varphi_3}. \quad (18)$$

Рівняння (9), помножене на $\frac{1}{m^2}\frac{A}{E}$, додаємо до рівняння (11), помноженого на $\frac{C}{E}$. Тоді маємо

$$y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{m^2}\frac{A}{E}+\frac{C}{E}\right)-\frac{x}{m^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{m^2}\frac{A}{E}+\frac{C}{E}\right)-\frac{1}{m^2}\frac{K}{E}\left(\frac{1}{m^2}\frac{A}{E}+\frac{C}{E}\right)=0,$$

звідки

$$\frac{1}{m^2}\frac{A}{E}+\frac{C}{E}=\frac{\sqrt{m^2y^2+x^2}\ \varphi_6}{my+x\varphi_3}. \tag{19}$$

Враховуючи (14)-(19), знаходимо першу сукупність лінійних рівнянь у частинних похідних другого порядку

$$\begin{aligned}&\left[(m^2y^2+x^2)\varphi_2+2m^2xy-m(m^2y^2-x^2)\varphi_1\right]r+2\left[(m^2y^2-x^2)+\right.\\&\left.+2mxy\varphi_1\right]s+\frac{1}{m^2}\left[(m^2y^2+x^2)\varphi_2-2m^2xy+m(m^2y^2-x^2)\varphi_1\right]t+\\&+\frac{1}{m^2\varphi_6}\left[2(x-my\varphi_3)\sqrt{m^2y^2+x^2}\,\varphi_2\right]p+\frac{1}{m^2\varphi_6}\left[2(my+x\varphi_3)\sqrt{m^2y^2+x^2}\,\varphi_2\right]q+\\&+\frac{2}{m^2\varphi_6}(m^2y^2+x^2)\varphi_2\varphi_4u-\frac{2}{m^2\varphi_6}(m^2y^2+x^2)\varphi_2\varphi_5=0,\end{aligned}\tag{20}$$

де $\varphi_1,\ \dots,\ \varphi_6$ – довільні функції від $m^2y^2+x^2$, інваріантних відносно групи перетворень з інфінітезімальним оператором

$$Uf=-my\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{x}{m}\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{2}$$

Але серед рівнянь (1), інваріантних відносно групи перетворень з оператором (2), можуть бути і такі, ліві частини яких є диференціальними інваріантами другого порядку, тобто для яких, згідно з Лі [2], повинно бути $U''L=0$.

Звідси

$$\begin{aligned}&y\frac{\partial A}{\partial x}-\frac{x}{m^2}\frac{\partial A}{\partial y}-2B=0, &&y\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{x}{m^2}\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{1}{m^2}A-C=0,\\&y\frac{\partial C}{\partial x}-\frac{x}{m^2}\frac{\partial C}{\partial y}+\frac{2}{m^2}B=0, &&y\frac{\partial K}{\partial x}-\frac{x}{m^2}\frac{\partial K}{\partial y}-E=0,\\&y\frac{\partial E}{\partial x}-\frac{x}{m^2}\frac{\partial E}{\partial y}-\frac{K}{m^2}=0, &&y\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{x}{m^2}\frac{\partial Q}{\partial y}=0,\\&\qquad y\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{x}{m^2}\frac{\partial f}{\partial y}=0.\end{aligned}\tag{21}$$

Міркуючи, подібно до попереднього, знаходимо загальний розв'язок системи (21), а тим самим і другу сукупність лінійних рівнянь у частинних похідних другого порядку, інваріантних відносно групи перетворень з оператором (2)

$$\left\{\frac{m^2}{2}\psi_3 - \frac{m\left[(m^2y^2-x^2)\psi_1 - 2mxy\psi_2\right]}{m^2y^2+x^2}\right\} r + 2\,\frac{2mxy\psi_1 + (m^2y^2-x^2)\psi_2}{m^2y^2+x^2}\, s +$$
$$+\left\{\frac{1}{2}\psi_3 + \frac{\left[(m^2y^2-x^2)\psi_1 - 2mxy\psi_2\right]}{m(m^2y^2+x^2)}\right\} t + \frac{my\psi_4 + x\psi_5}{\sqrt{m^2y^2+x^2}}\, p + \tag{22}$$
$$+\frac{my\psi_5 - x\psi_4}{m\sqrt{m^2y^2+x^2}}\, q + \psi_6 u - \psi_7 = 0,$$

де $\psi_1, \ldots, \psi_7$ – довільні функції від $m^2y^2 + x^2$. Частинним випадком рівняння (22) при $m = 1$ і $\psi_1=\psi_2=\psi_4=\psi_5=\psi_6=\psi_7=0$ є рівняння Лапласа, інваріантне відносно групи обертання.

Таким чином, із рівнянь (1) виділено сукупність рівнянь (20), (22), кожне з яких допускає групу перетворень з інфінітезімальним оператором (2). Цей оператор залишає інваріантними еліптичні області з осями a і b якщо $\frac{b}{a}=m$. Для одержаних сукупностей лінійних рівнянь у частинних похідних (20), (22) в еліптичних областях (еліпс, еліптичне кільце, зовнішність еліпса) можна досліджувати граничні задачі груповим методом.

Література

1. Гюнтер Н. М. Интегрирование уравнений 1-го порядка в частных производных. ГТТИЛ, 1934.

2. Lie S. Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Leipzig, 1891.

УДК 513.015.4:513.734/.736

С.В.ДЕНИСКО

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ СІТОК ТІССО

Нехай S - поверхня тривимірного евклідового простору, до кожної точки якої приєднано репер $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ з сталою метрикою так, що вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ дотикаються поверхні. А S' - поверхня, на яку поверхня S може відображатись так, що для будь-якої пари відповідних точок M, M' точка M' відносно репера $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ у точці M має одні і ті ж координати. Для зручності це відображення називатимемо відображенням $\sum$.

Т е о р е м а. Для того, щоб сітка Тіссо відображення $\sum$ на поверхні S не залежала від вибору поверхні S', необхідно і достатньо, щоб сітка, утворена векторними лініями полів $\bar{a}$, $\bar{b}$, була геодезичною. При цьому на поверхні S, відмінної від площини, сітка Тіссо відображення $\sum$ містить у собі прямолінійні твірні цієї поверхні.

Д о в е д е н н я. Нехай рівняння поверхонь S, S' відповідно

$$\bar{r}=\bar{r}(u^1,u^2),$$

$$\bar{R}=\bar{r}(u^1,u^2)+\lambda\bar{a}(u^1,u^2)+\mu\bar{b}(u^1,u^2)+\nu\bar{c}(u^1,u^2).$$

Припустимо, що координатна сітка на поверхні S є сіткою Тіссо відображення $\sum$. Тоді

$$\lambda^2\partial_1\bar{a}\,\partial_2\bar{a}+\mu^2\partial_1\bar{b}\,\partial_2\bar{b}+\nu^2\partial_1\bar{c}\,\partial_2\bar{c}+$$
$$+\lambda\mu(\partial_1\bar{a}\,\partial_2\bar{b}+\partial_2\bar{a}\,\partial_1\bar{b})+\lambda\nu(\partial_1\bar{a}\,\partial_2\bar{c}+$$
$$+\partial_2\bar{a}\,\partial_1\bar{c})+\mu\nu(\partial_1\bar{b}\,\partial_2\bar{c}+\partial_2\bar{b}\,\partial_1\bar{c})+$$
$$+\lambda(\partial_1\bar{a}\,\partial_2\bar{r}+\partial_2\bar{a}\,\partial_1\bar{r})+\mu(\partial_1\bar{b}\,\partial_2\bar{r}+$$
$$+\partial_2\bar{b}\,\partial_1\bar{r})+\nu(\partial_1\bar{c}\,\partial_2\bar{r}+\partial_2\bar{c}\,\partial_1\bar{r})=0. \qquad (1)$$

Оскільки сітка Тіссо відображення $\sum'$ на поверхні S не залежить від вибору поверхні S', то рівність (1) є тотожність відносно λ, μ, ν. Отже, маємо

$$\left.\begin{aligned} &\partial_1\bar{a}\,\partial_2\bar{a}=0, \quad \partial_1\bar{b}\,\partial_2\bar{b}=0, \quad \partial_1\bar{c}\,\partial_2\bar{c}=0,\\ &\partial_1\bar{a}\,\partial_2\bar{b}+\partial_2\bar{a}\,\partial_1\bar{b}=0, \quad \partial_1\bar{a}\,\partial_2\bar{c}+\partial_2\bar{a}\,\partial_1\bar{c}=0,\\ &\partial_1\bar{b}\,\partial_2\bar{c}+\partial_2\bar{b}\,\partial_1\bar{c}=0, \quad \partial_1\bar{a}\,\partial_2\bar{r}+\partial_2\bar{a}\,\partial_1\bar{r}=0,\\ &\partial_1\bar{b}\,\partial_2\bar{r}+\partial_2\bar{b}\,\partial_1\bar{r}=0, \quad \partial_1\bar{c}\,\partial_2\bar{r}+\partial_2\bar{c}\,\partial_1\bar{r}=0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Нехай $\bar{e}=\dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$, $\bar{\bar{e}}$ – вектор, додатковий до вектора $\bar{e}$, і $\bar{n}$ – напрямний орт нормалі до поверхні S. Розкладемо вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ на вектори $\bar{e}$, $\bar{\bar{e}}$, $\bar{n}$

$$\bar{a}=a^1\bar{e}, \quad \bar{b}=b^1\bar{e}+b^2\bar{\bar{e}}, \quad \bar{c}=c^1\bar{e}+c^2\bar{\bar{e}}+c^3\bar{n}. \tag{3}$$

Оскільки метрика репера $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ є сталою, то a^1, b^1, b^2, c^1, c^2, c^3 – сталі величини. Тому згідно (3) умови (2) запишуться таким чином

$$\left.\begin{aligned} &\partial_1\bar{e}\,\partial_2\bar{e}=0, \quad \partial_1\bar{\bar{e}}\,\partial_2\bar{\bar{e}}=0, \quad \partial_1\bar{n}\,\partial_2\bar{n}=0,\\ &\partial_1\bar{e}\,\partial_2\bar{\bar{e}}+\partial_2\bar{e}\,\partial_1\bar{\bar{e}}=0, \quad \partial_1\bar{e}\,\partial_2\bar{n}+\partial_2\bar{e}\,\partial_1\bar{n}=0,\\ &\partial_1\bar{\bar{e}}\,\partial_2\bar{n}+\partial_2\bar{\bar{e}}\,\partial_1\bar{n}=0, \quad \partial_1\bar{e}\,\partial_2\bar{r}+\partial_2\bar{e}\,\partial_1\bar{r}=0,\\ &\partial_1\bar{\bar{e}}\,\partial_2\bar{r}+\partial_2\bar{\bar{e}}\,\partial_1\bar{r}=0, \quad \partial_1\bar{n}\,\partial_2\bar{r}+\partial_2\bar{n}\,\partial_1\bar{r}=0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Як відомо [1],

$$\left.\begin{aligned} &\partial_i\bar{e}=\alpha_i\bar{\bar{e}}+\varkappa_{ik}e^k\bar{n},\\ &\partial_i\bar{\bar{e}}=-\alpha_i\bar{e}+\varkappa_{ik}\bar{e}^k\bar{n},\\ &\partial_i\bar{n}=-\varkappa_{ik}e^k\bar{e}-\varkappa_{ik}\bar{e}^k\bar{\bar{e}}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

де α_i – трансверсальний вектор поля $\hat{e}$; π_{ij} – другий основний тензор поверхні S . Підставивши (5) в (4), матимемо

$$
\left.
\begin{aligned}
&\alpha_1\alpha_2 + \pi_{1i}\pi_{2k}e^i e^k = 0, \quad \alpha_1\alpha_2 + \\
&+ \pi_{1i}\pi_{2k}\tilde{e}^i\tilde{e}^k = 0, \quad \pi_{1i}\pi_{2k}e^i e^k + \\
&+ \pi_{1i}\pi_{2k}\bar{e}^i\bar{e}^k = 0, \quad \pi_{1i}\pi_{2k}e^i\tilde{e}^k + \\
&+ \pi_{2i}\pi_{1k}e^i\tilde{e}^k = 0, \quad \alpha_1\pi_{2i}\tilde{e}^i + \\
&+ \alpha_2\pi_{1i}\tilde{e}^i = 0, \quad \alpha_1\pi_{2i}e^i + \alpha_2\pi_{1i}e^i = 0, \\
&\alpha_1\tilde{e}_2 + \alpha_2\tilde{e}_1 = 0, \quad \alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_1 = 0, \\
&\pi_{1i}e^i e_2 + \pi_{1i}\tilde{e}^i\tilde{e}_2 + \pi_{2i}e^i e_1 + \pi_{2i}\tilde{e}^i\tilde{e}_1 = 0
\end{aligned}
\right\} \tag{6}
$$

Очевидно,

$$
\begin{vmatrix} \tilde{e}_2 & \tilde{e}_1 \\ e_2 & e_1 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{7}
$$

Тому з рівностей (6_7) і (6_8) випливає

$$
\alpha_1 = \alpha_2 = 0. \tag{8}
$$

Оскільки $\alpha_i = k_e e_i + k_{\tilde{e}}\tilde{e}_i$, де k_e , $k_{\tilde{e}}$ – геодезичні кривини векторних ліній полів $\bar{e}$, $\bar{\bar{e}}$ [1], то згідно з (8), (7) маємо $k_e = k_{\tilde{e}} = 0$.

Отже, сітка, утворена векторними лініями полів $\hat{e}$, $\bar{\bar{e}}$, є геодезичною, а тому поверхня S є розгортною [1]. Зважаючи на ці дві обставини, векторні лінії поля $\bar{e}$ є геодезичними.

Першу частину нашої теореми доведено.

Згідно з (8) рівності (6) набувають вигляду

$$\left.\begin{aligned}
&\pi_{1i}\pi_{2k}e^{i}e^{k}=0, \qquad \pi_{1i}\pi_{2k}\tilde{e}^{i}\tilde{e}^{k}=0,\\
&\pi_{1i}\pi_{2k}e^{i}e^{k}+\pi_{1i}\pi_{2k}\tilde{e}^{i}\tilde{e}^{k}=0,\\
&\pi_{1i}\pi_{2k}e^{i}\tilde{e}^{k}+\pi_{2i}\pi_{1k}e^{i}\tilde{e}^{k}=0,\\
&\pi_{1i}e^{i}e_{2}+\pi_{1i}\tilde{e}^{i}\tilde{e}_{2}+\pi_{2i}e^{i}e_{1}+\\
&+\pi_{2i}\tilde{e}^{i}\tilde{e}_{1}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

З умов (9) видно, що поверхня S може бути площиною. В цьому разі рівності (9) є тотожностями.

Розглянемо випадок, коли поверхня відмінна від площини.

Умови (9) рівнозначні умовам

$$\left.\begin{aligned}
&\pi_{1i}e^{i}=0, \qquad \pi_{1i}\tilde{e}^{i}=0,\\
&\pi_{2i}e^{i}e_{1}+\pi_{2i}\tilde{e}^{i}\tilde{e}_{1}=0,
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

або

$$\left.\begin{aligned}
&\pi_{2i}e^{i}=0, \qquad \pi_{2i}\tilde{e}^{i}=0,\\
&\pi_{1i}e^{i}e_{2}+\pi_{1i}\tilde{e}^{i}\tilde{e}_{2}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

З рівностей (10_1), (10_2) згідно з (7) будемо мати

$$\pi_{11}=\pi_{12}=0. \tag{12}$$

Оскільки поверхня S не є площиною, (10_3) набуває вигляду

$$e^{2}e_{1}+\tilde{e}^{2}\tilde{e}_{1}=0. \tag{13}$$

Але це тотожність. Дійсно,

$$\left.\begin{aligned}
&e^{2}=e_{1}\varepsilon^{12},\\
&\tilde{e}_{1}=e^{2}\varepsilon_{21},
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

де ε_{ij} – дискримінантний тензор [1]. Підставляючи (14) в (13), дістаємо тотожність

$$e^2 e_1 (1+\varepsilon_{21}\varepsilon^{12})=0,$$

оскільки $\varepsilon_{21}\varepsilon^{12}=-1$.

Таким чином, згідно з (12), на поверхні S координатна сітка, яка є сіткою Тіссо відображення $\sum$, містить в собі прямолінійні твірні цієї поверхні.

До такого ж висновку приходимо, досліджуючи умови (11).

Теорему доведено.

Л і т е р а т у р а

1. Н о р д е н А. П. Теория поверхностей. Гостехиздат, М., 1956.

УДК 517.512

Г.П.ГУБАНОВ, Б.В.КОВАЛЬЧУК

ОЦІНКА ЗАЛИШКУ ПРИ НАБЛИЖЕННІ НЕПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ КЛАСУ ЛІПШИЦЯ ПОЛІНОМАМИ, ЯКІ ПОБУДОВАНІ НА ОСНОВІ ПОЛІНОМІВ, НАЙКРАЩИХ У ЗАДАНІЙ СИСТЕМІ ТОЧОК

Нехай $MH^{\alpha}(-1,1)\ (0<\alpha<1)$ позначає клас функцій $f(x)$, що задовольняють умову Ліпшиця степеня α з константою M на відрізку $[-1,1]$, а $P_n(f;x)$ – поліном степеня $(n-1)$, що наближає функцію $f(x)$ найкращим способом в системі точок $x_k=\cos\frac{k\pi}{n}$.

Розглянемо зрізані середні арифметичні суми від поліномів $P_n(f;x)$, які мають вигляд

$$\bar{g}_{n,p}(f,x)=\frac{1}{2n(p+1)}\sum_{k=1}^{2n} f(x_k)\left[D_{n,p}(x-x_k)+D_{n,p}(x+x_k)\right],$$

де

$$D_{n,p}(u)=\sin\frac{2n-p-1}{2}u\sin\frac{p+1}{2}u\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2}u, \qquad 0<p<n,$$

та лінійний процес наближення

$$\bar{V}_n(f;x;\Lambda)=\frac{c_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}c_k\lambda_k^{(n-1)}\cos k\arccos x,$$

побудований на основі полінома $P_n(f;x)$ за допомогою трикутної матриці чисел $\Lambda=\left\{\lambda_k^{(n-1)}\right\}$, $k=0,1,2,\dots,n$; $\lambda_0^{(n-1)}=1$; $\lambda_n^{(n-1)}=0$, $n=1,2,\dots$.

Нами вивчається асимптотична поведінка величин

$$E_{n,p}(MH^\alpha(-1,1);x)=\sup_{f\in MH^\alpha(-1,1)}\left|f(x)-\bar{g}_{n,p}(f,x)\right|,$$

$$E_n(MH^\alpha(-1,1);x;\Lambda)=\sup_{f\in MH^\alpha(-1,1)}\left|f(x)-\bar{V}_n(f,x;\Lambda)\right|.$$

Т е о р е м а 1. При $0<\alpha<1$ і $n\to\infty$ має місце асимптотична рівність

$$E_{n,p}(MH^\alpha(-1,1);x)=\frac{M|\sin n\arccos x|}{\pi^{1-\alpha}}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^\alpha \ln\frac{n}{p+1}+O(n^{-\alpha}),$$

$$x\neq\cos\frac{k\pi}{n},$$

рівномірно відносно всіх p $(0\le p\le n)$, $n=1,2,\dots$ і $x\in[-1,1]$,

причому

$$E_{n,p}\left(MH^\alpha(-1,1);\cos\frac{k\pi}{n}\right)=O(n^{-\alpha}).$$

Т е о р е м а 2. Якщо матриця $\lambda_k^{(n-1)}$ $(k=0,1,2,\dots,n;\ \lambda_0^{(n-1)}=1,\ \lambda_n^{(n-1)}=0,\ n=1,2,\dots)$ при всіх n опукла відносно k, тобто $\Delta^2\lambda_k^{(n-1)}\le 0$, а $1-\lambda_1^{(n-1)}=O(n^{-1})$, то при $0<\alpha<1$ рівномірно відносно всіх $x\in[-1,1]$ і p $(0<p<n)$ справедлива асимптотична рівність

$$E_n(MH^\alpha(-1,1);x;\Lambda)=\frac{M|\sin n\arccos x|}{\pi^{1-\alpha}}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^\alpha\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\lambda_k^{(n-1)}}{n-k}+O(n^{-\alpha}),$$

$$x\neq\cos\frac{k\pi}{n},$$

причому

$$E_n\left(MH^{\alpha}(-1,1);\ \cos\frac{k\pi}{n};\ \Lambda\right)=O(n^{-\alpha}).$$

З а у в а ж е н н я I. У періодичному випадку теореми I,2 доведені нами раніше [2,3].

З а у в а ж е н н я 2. Для інтерполяційних поліномів аналогічні результати були одержані в роботі [I]. Для класу функцій, що задовольняють умову $|f(x'')-f(x')|\leq M|x''-x'|$ теорема I (при p=o) і теорема 2 (при $\lambda_k^{(n-1)}=1$) були доведені в [4].

Під час доведення теорем I,2 спираємося на деякі результати, одержані в [4], а також використовуємо метод, застосований у [I].

Л і т е р а т у р а

I. Г а н з б у р г И. М. Распространение одной асимптотической формулы А.Ф.Тимана на классы функций с заданным модулем непрерывности. Изв. АН СССР, серия матем., 27, I963.

2. Г у б а н о в Г. П., К о в а л ь ч у к Б. В. Про лінійні процеси наближення класів функцій тригонометричними поліномами, найкращими в заданій системі точок. Вісник Львівського ун-ту, серія мех.-мат., вип. 4, I969.

3. К о в а л ь ч у к Б. В., Г у б а н о в Г. П. Оцінка залишку при наближенні періодичних функцій зрізаними середніми від поліномів, найкращих в заданій системі точок. Вісник Львівського ун-ту, серія мех.-мат., вип. I, I965.

4. О л о в я н и ш н и к о в В. М. Оценка остатка при приближении периодических функций, удовлетворяющих условию Липшица, полиномами, наилучшими в заданной системе точок. ДАН СССР, 7I, I950, № 4.

УДК 517.946

С.П.ЛАВРЕНЮК

ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ПОТЕНЦІАЛУ ПРОСТОГО ШАРУ

Нехай T_α $(\alpha=1,2)$ - скінченні області, обмежені поверхнями S_α і $\mu_\alpha(x)$ $(\alpha=1,2)$ функції, визначені у всьому просторі $E^n (n\geq 2)$;

$$V(x;S_\alpha;\mu_\alpha)=\int\limits_{S_\alpha}\mu_\alpha(y)\,K(x,y)\,d_yS$$ - потенціал простого шару. Тут $K(x,y)$ - фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа. Потрібно знайти умови для поверхонь S_α і густин $\mu_\alpha(x)$ $(\alpha=1,2)$, щоб з рівності зовнішніх потенціалів [1-3]

$$V(x;S_1;\mu_1)=V(x;S_2;\mu_2),\quad x\in E^n\setminus(\bar{T}_1\cup\bar{T}_2)$$

випливала рівність

$$S_1=S_2,\qquad \mu_1=\mu_2.$$

Нехай ρ, θ сферичні координати точки простору E^n.

Т е о р е м а 1. Нехай S_α $(\alpha=1,2)$ випуклі кусково-гладкі поверхні і μ обмежена сумована функція, постійна на кожному промені, який виходить з точки $O\in(\bar{T}_1\cap\bar{T}_2)$, тобто $\mu=\mu(\theta)$. Якщо потенціали простого шару $V(x;S_\alpha;\mu)$ задовольняють умову

$$V(x;S_1;\mu)=V(x;S_2;\mu),\quad x\in E^n\setminus(\bar{T}_1\cup\bar{T}_2),$$

то $S_1=S_2$.

З а у в а ж е н н я 1. Якщо $V(x;S_1;\mu_1)=V(x;S_2;\mu_2)$ для $x\in E^n\setminus(\bar{T}_1\cup\bar{T}_2)$, де S_α $(\alpha=1,2)$ поверхні класу $A^{(1,\lambda)}$, $\mu_\alpha(x)$ $(\alpha=1,2)$ довільні обмежені сумовані функції, то $T_1\cap T_2\neq\varnothing$.

Позначимо через S^e, S^i відповідно границі областей $T_1\cup T_2$, $T_1\cap T_2$, і, крім того,

$$S_\alpha^e=S^e\cap S_\alpha,\qquad S_\alpha^i=S^i\cap S_\alpha.$$

Т е о р е м а 2. Нехай S_α $(\alpha = 1,2)$ – випуклі кусково-гладкі поверхні, μ_α $(\alpha = 1,2)$ – обмежені сумовані функції, постійні на кожному промені, який виходить з точки $O \in (\bar{T}_1 \cap \bar{T}_2)$, і задовольняють умову

$$\mu_1(\theta) > \mu_2(\theta) > 0.$$

Якщо потенціали простого шару $V(x; S_\alpha; \mu_\alpha)$ задовольняють умову

$$V = (x, S_1; \mu_1) = V(x; S_2; \mu_2), \quad x \in E^n \setminus (\bar{T}_1 \cup \bar{T}_2),$$

то $\bar{T}_2 \supset \bar{T}_1$.

Т е о р е м а 3. Нехай для поверхонь S_α $(\alpha = 1, 2)$ класу $A^{(1,2)}$ і додатних обмежених сумованих функцій $\mu_\alpha(x)$ $(\alpha = 1, 2)$ має місце хоча б одна з нерівностей

$$\int_{S_2^i} \mu_2 \, ds < \int_{S_1^e} \mu_1 \, ds,$$

$$\int_{S_1^i} \mu_1 \, ds < \int_{S_2^e} \mu_2 \, ds.$$

Тоді існує принаймні одна точка $\bar{x} \in E^n \setminus (\bar{T}_1 \cup \bar{T}_2)$, в якій

$$V(\bar{x}, S_1, \mu_1) \neq V(\bar{x}, S_2; \mu_2).$$

З а у в а ж е н н я 2. Нехай S_α $(\alpha = 1, 2)$ поверхні класу $A^{(1,2)}$. Для того, щоб мала місце рівність $V(x; S_1; 1) = V(x; S_2; 1)$ для $x \in E^n \setminus (\bar{T}_1 \cup \bar{T}_2)$ необхідно, щоб $mes\, S_1 = mes\, S_2$.

Л і т е р а т у р а

1. П р и л е п к о А. И. О единственности решения обратных задач метагармонических потенциалов. "Дифференциальные уравнения", 2, 1966, № 2, 194-204.

2. П р и л е п к о А. И. Об единственности определения формы и плотности тела в обратных задачах теории потенциала. ДАН СССР, 193, 1970, № 2, 288-291.

3. П р и л е п к о А. И. Об устойчивости и единственности решения обратных задач обобщенных потенциалов простого слоя. СМЖ, XII, 1971, № 4, 828-836.

УДК 539.3

Т.Л.МАРТИНОВИЧ, Б.М.КОРДУБА

РОЗТЯГ ПЛАСТИНКИ З ЕЛІПТИЧНИМ ОТВОРОМ, КРАЙ ЯКОГО ПІДКРІПЛЕНИЙ ПРУЖНИМ КІЛЬЦЕМ

Розглянемо пружну рівновагу ізотропної пластинки з еліптичним отвором L_1, край якого підсилений пружним кільцем сталого перерізу. Напружено-деформований стан підсилюючого кільця описується рівняннями теорії тонких криволінійних стержнів. Умови спряження пластинки зі стержнем реалізуються на фактичній поверхні їх спаю. На нескінченності пластинка розтягується паралельно осям еліпса зусиллями $\sigma_x^\infty = p$, $\sigma_y^\infty = q$, $\tau_{xy}^\infty = 0$. Підсилюючий стержень вільний від навантаження.

За допомогою функції

$$z = \omega(\zeta) = R\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right), \qquad m = \frac{a_1 - b_1}{a_1 + b_1}; \qquad R = \frac{a_1 + b_1}{2} \tag{1}$$

конформно відобразимо зовнішність одиничного кола γ_1 на зовнішність еліптичного отвору L_1 з півосями a_1 і b_1.

Комплексні потенціали $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$, через які виражаються компоненти тензора напружень у пластинці, а також компоненти деформації стержня e_0 і θ_6 шукаємо у формі рядів

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=0,2,\ldots}^{\infty} B_k \zeta^{-k}, \qquad \Psi(\zeta) = \sum_{k=0,2,\ldots}^{\infty} B_k' \zeta^{-k}, \tag{2}$$

$$e_0 = \alpha_0 + \sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty} \alpha_k (\sigma^k + \sigma^{-k}), \qquad \theta_6 = i\sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty} \beta_k (\sigma^k - \sigma^{-k}), \tag{3}$$

причому σ - афікс точки одиничного контура γ_1;

$$B_0 = \frac{p+q}{4}; \qquad B_0' = -\frac{p-q}{2}.$$

Тут B_k, B_k', α_k і β_k - дійсні величини, які не дорівнюють нулеві тільки з парними індексами. Ці твердження випливають з повної симетрії задачі відносно координатних осей x і y.

Внесемо розклади (I), (2) в крайові умови задачі (2I)-(24) роботи [I] і виконаємо інтегрування вздовж замкнутого контура γ_1. Тоді одержуємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів розкладу шуканих функцій B_k, B_k', α_k і β_k:

$$\frac{1}{2} a_{0n}\alpha_0 + \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} a_{kn}\alpha_k + \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} b_{kn}\beta_k = -\frac{1+\varkappa}{4}(p+q)\delta_{1n}, \tag{4}$$

$$\frac{1}{2} c_{0n}\alpha_0 + \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} c_{kn}\alpha_k + \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} \alpha_{kn}\beta_k = \frac{1+k}{2\varkappa}\left[(p-q) - \frac{m}{2}(p+q)\right]\delta_{1n}.$$
$$(n=1,3,5,\dots)$$

Тут

$$a_{kn} = -\frac{1}{2\pi i R}\left\{2\mu\int_{\gamma_1^+}\frac{r_0}{r_1}\left(\sigma^{k-n} + \sigma^{-(k+n)}\right)\omega'(\sigma)\,d\sigma + \right.$$

$$+\frac{nq}{2h}\int_{\gamma_1^+}\frac{\omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|}\left(\sigma^{k-n} + \sigma^{-(k+n)}\right)d\sigma +$$

$$\left. + \frac{nq}{2h}\int_{\gamma_1^+}(r_1 - r_0)(\sigma^k + \sigma^{-k})\,d\left[\frac{\sigma^{-(n-1)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}\right]\right\};$$

$$b_{kn} = -\frac{1}{2\pi i R}\left\{\frac{nkq}{2h}\int_{\gamma_1^+}\frac{\eta_c r_1}{|\omega'(\sigma)|}(\sigma^k + \sigma^{-k})\,d\left[\frac{\sigma^{-(n-1)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}\right] - \right.$$

$$\left. - 2\mu\int_{\gamma_1^+}\left[\left(\frac{r_1 - r_0}{|\omega'(\sigma)|} + 1\right)\sigma^{k-n} + \left(\frac{(r_1 - r_0)k}{|\omega'(\sigma)|} - 1\right)\sigma^{-(n+k)}\right]\omega'(\sigma)\,d\sigma\right\};$$

$$C_{kn} = -\frac{1}{2\pi i R}\left\{\frac{nq}{2h}\int_{\gamma_1^+}\frac{\omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|}(\sigma^{n+k}+\sigma^{n-k})d\sigma +\right.$$

$$+\frac{nq}{2h}\int_{\gamma_1^+}(r_1-r_0)(\sigma^{k}+\sigma^{-k})\,d\left[\frac{\sigma^{n+1}}{\overline{\omega'(\sigma)}}\right]+ \tag{5}$$

$$\left.+\frac{2\mu}{\varkappa}\int_{\gamma_1^+}\frac{r_0}{r_1}(\sigma^{n+k}+\sigma^{n-k})\,\omega'(\sigma)d\sigma\right\};$$

$$d_{kn} = -\frac{1}{2\pi i R}\left\{\frac{knq}{2h}\int_{\gamma_1^+}\frac{\eta_c\, r_1}{|\omega'(\sigma)|}(\sigma^{k}+\sigma^{-k})\,d\left[\frac{\sigma^{n+1}}{\overline{\omega'(\sigma)}}\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{2\mu}{\varkappa}\int_{\gamma_1^+}\left[\left(\frac{(r_1-r_0)k}{|\omega'(\sigma)|}+1\right)\sigma^{k+n}+\left(\frac{(r_1-r_0)k}{|\omega'(\sigma)|}-1\right)\sigma^{n-k}\right]\omega'(\sigma)d\sigma\right\},$$

причому δ_{kn} – символ Кронекера. Коефіцієнти розкладу функцій $\Phi(\zeta)$ і $\Psi(\zeta)$ визначаються з рекурентних співвідношень

$$B_2 = \frac{2\mu}{2\pi i R\varkappa}\int_{\gamma_1^+}\left[-\frac{r_0}{r_1}e_0 + i\frac{(r_1-r_0)\sigma}{|\omega'(\sigma)|}\frac{d\theta_\sigma}{d\sigma}+i\theta_\sigma\right]\sigma\,\omega'(\sigma)d\sigma +$$

$$+\frac{p-q}{2\varkappa}+\frac{m(\varkappa-1)}{4\varkappa}(p+q); \tag{6}$$

$$B_{n+1} = mB_{n-1}+\frac{2\mu}{2\pi i R\varkappa}\int_{\gamma_1^+}\left[\frac{r_0}{r_1}e_0+i\frac{(r_1-r_0)\sigma}{|\omega'(\sigma)|}\frac{d\theta_\sigma}{d\sigma}+i\theta_\sigma\right]\sigma^{n}\omega'(\sigma)d\sigma;$$

$$\bar{B}_2' = m\bar{B}_2+\frac{2\mu}{2\pi i R}\int_{\gamma_1^+}\left[\frac{r_0}{r_1}e_0+i\frac{(r_1-r_0)}{|\omega'(\sigma)|}\frac{d\theta_\sigma}{d\sigma}+i\theta_\sigma\right]\sigma^{-1}\omega'(\sigma)d\sigma +$$

$$+\frac{1}{4}\left[(1-\varkappa)(p+q)-2m(p-q)\right];$$

$$\tilde{B}'_{n+1} = m\bar{B}'_{n-1} + nm\bar{B}_{n+1} + n\bar{B}_{n-1} + \tag{7}$$

$$+\frac{2\mu}{2\pi R i}\int_{\gamma_1^+}\left[\frac{r_0}{r_1}e_0 + i\,\frac{(r_1-r_0)\sigma}{|\omega'(\sigma)|}\cdot\frac{d\theta_b}{d\sigma} + i\theta_b\right]\sigma^{-n}\omega'(\sigma)d\sigma\,, \qquad (n=3,5,7,\dots).$$

Тут і далі використовуються позначення, прийняті в [1].

Коефіцієнти (5), (6) і (7) виражаються через інтеграли вигляду

$$I_{|2l|}(m) = m^{|l|}\int_0^1\frac{x^{|2l|}dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-m^2x^2)}} = \frac{1}{4i}\int_{\gamma_1^+}\frac{\sigma^{\pm 2l}d\sigma}{\sqrt{(\sigma^2-m)(1-m\sigma^2)}}\,, \tag{8}$$

для яких при великих l справедлива оцінка

$$I_{2l} < \frac{\pi}{2}\,\frac{m^l}{\sqrt{\pi l}} \qquad (l>0). \tag{9}$$

Система (4) квазірегулярна. Доведення грунтується на оцінці (9) інтегралів (7), через які виражаються коефіцієнти системи (5).

Величини $\eta_c r_1$, r_1-r_0 і r_0/r_1, що входять у рівності (5)-(7), з достатнім для застосувань ступенем точності обчислюються за формулами [2]

$$\eta_c r_1 = \frac{J_\chi}{F}\,,\quad r_1-r_0=\varepsilon_1\,,\qquad \frac{r_0}{r_1} = 1-\frac{\varepsilon_1}{r_1}. \tag{10}$$

Тут J_χ - момент інерції перерізу стержня відносно центральної осі; ε_1 - віддаль від центральної осі стержня до лінії спаю L_1; r_1 - радіус кривизни контура отвору пластинки (крайнього волокна стержня) L_1, який визначається за формулою

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{\omega'(\sigma)}\,\frac{d}{d\sigma}\left[\frac{\sigma\,\omega'(\sigma)}{\rho_1\,|\omega'(\sigma)|}\right] = \frac{R^2(\rho_1^4-m^2)}{\rho_1^5|\omega'(\sigma)|^3}\,,\quad \rho_1=1. \tag{11}$$

Для прямокутного перерізу стержня $2h^* \times b$ одержуємо

$$\frac{q}{hR} = 2\gamma E^* \delta, \quad \eta_c r_1 = \frac{\varepsilon_1^2}{3}, \quad \delta = \frac{b}{R}, \quad \gamma = \frac{h^*}{h}, \quad b = 2\varepsilon_1 . \tag{12}$$

Нормальне напруження в перерізі підсилюючого стержня обчислюється за формулою

$$\sigma = E^* \left[\frac{r_0}{r} \alpha_0 + 2 \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r} \alpha_k - \frac{k(r-r_0)\beta_k}{R\sqrt{1+m^2-2m\cos 2\theta}} \right) \cos k\theta \right], \tag{13}$$

де r - радіус кривизни довільного волокна стержня.

Напруження в пластинці поблизу лінії спаю з кільцем визначається за формулами

$$\sigma_\theta = 2\sum_{k=0}^{\infty} B_k \cos k\theta + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\left[m\cos(k+2)\theta - m\cos(k-2)\theta - (1-m^2)\cos k\theta\right]}{1+m^2-2m\cos 2\theta} B_k +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^2\cos(k+2)\theta + \cos(k-2)\theta - 2m\cos k\theta}{1+m^2-2m\cos 2\theta} B_k' ; \tag{14}$$

$$\sigma_\rho = 4\sum_{k=0}^{\infty} B_k \cos k\theta - \sigma_\theta .$$

Для числового прикладу візьмемо мідну пластинку і стальне кільце прямокутного перерізу з пружними і геометричними характеристиками:

$\mu = 4{,}42 \cdot 10^5\ кг/см^2$; $\quad \nu = 0{,}3$; $\quad \varkappa = 2{,}08$;

$E^* = 2{,}1 \cdot 10^6\ кг/см^2$; $\quad \gamma = 1$; $\quad \delta = 1/16$; $\quad m = 0{,}2$; $\left(\frac{b_1}{a_1} = \frac{2}{3}\right)$.

Пластинка розтягується в напрямку осі Ox зусиллям $p\ (q=0)$. При $m=-0{,}2$ менша вісь еліпса збігається з віссю Ox . Бралось по 7 коефіцієнтів α_n і β_n і розв'язувалась вкорочена система 14 рівнянь (4) на ЕЦОМ "Минск-22". Відкинуті коефіцієнти α_k , $\beta_k\ (k>14)$, як показав проведений аналіз, не впливають на прийняту точність підрахунків вихідної інформації.

Наводимо числові значення нормальних напружень σ_θ в пластинці, σ_1 - в кільці на площадках, перпендикулярних до лінії спаю L_1 при $m=0{,}2$

θ^0	0^0	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	70^0	80^0	90^0
σ_θ/p	-0,414	-0,327	-0,052	0,399	0,912	1,335	1,617	1,810	1,949	2,005
σ_θ^0/p	-1,00	-0,78	-0,23	0,43	1,04	1,54	1,90	2,15	2,29	2,33
σ_ρ/p	-0,147	-0,080	0,034	0,065	0,026	0,040	0,127	0,165	0,166	0,141
σ_1/p	-0,824	-0,605	-0,102	0,794	1,620	2,335	2,885	3,263	3,481	3,551
σ_2/p	-1,556	-1,208	-0,336	0,716	1,692	2,487	3,080	3,485	3,718	3,795

Напруження σ_2 стосується внутрішнього волокна кільця. Контактний тиск на лінії спаю L_1 позначений через σ_ρ

і при $m = -0,2$:

θ^0	0^0	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	70^0	80^0	90^0
σ_θ/p	-0,729	-0,664	-0,473	-0,156	0,299	0,878	1,553	2,233	2,748	2,938
σ_θ^0/p	-1,00	-0,93	-0,72	-0,35	0,19	0,93	1,86	2,85	3,67	4,00
σ_ρ/p	-0,131	-0,115	-0,063	0,010	0,082	0,164	0,267	0,392	0,518	0,576
σ_1/p	-1,248	-1,148	-0,837	-0,298	0,490	1,521	2,713	3,876	4,734	5,048
σ_2/p	-1,624	-1,516	-1,181	-0,602	0,250	1,401	2,826	4,380	5,682	6,204

Через σ_θ^0 позначено напруження в аналогічній пластинці без підкріплень [3].

Л і т е р а т у р а

1. М а р т ы н о в и ч Т. Л. К решению задач о напряженном состоянии в анизотропных пластинках с подкрепленным краем. "Прикладная механика", т. VI, вып. 9, 1970.

2. М а р т ы н о в и ч Т. Л. Теория и расчет пластинок с подкрепленным краем. Автореф. докт. дисс., Львовский университет, 1970.

3. С а в и н Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. Гостехиздат, 1951.

УДК 539.3

В.О.ЛИХАЧОВ

ДВІ ЗАДАЧІ КРУЧЕННЯ

Кручення консольного стержня

Розглянемо консольний стержень довжини h з круглим поперечним перерізом. Початок координат помістимо в закріпленому кінці стержня, вісь OZ направимо по його осі.

Нехай бічна поверхня стержня вільна від напружень, а до торця прикладені дотичні зусилля

$$\tau_{z\theta}(r,h)=f(r), \qquad 0\leq r\leq 1.$$

Розв'язування задачі чистого кручення, як відомо [1,2], зводиться до знаходження компонент напружень $\tau_{z\theta}(r,z)$, $\tau_{r\theta}(r,z)$ і переміщення $U_\theta(r,z)$, які можуть бути виражені через функцію переміщень $\psi(r,z)$, що визначається з

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{3}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=0. \qquad (1)$$

Граничні умови даної задачі

$$U_\theta(r,0)=0, \qquad \tau_{z\theta}(r,h)=f(r) \quad 0\leq r\leq 1,$$
$$\tau_{r\theta}(1,z)=0, \qquad 0\leq z\leq h, \qquad (2)$$

і диференціальне рівняння (1) визначають вибір функції переміщень

$$\psi(r,z)=az+\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{\infty}A_{\rho_k}J_1(\rho_k r)\frac{sh\rho_k z}{\rho_k ch\rho_k h}, \qquad (3)$$

де ρ_k - корені рівняння $J_2(\rho_k)=0$, $J_1(x)$, $J_2(x)$ - функції Бесселя першого роду дійсного аргумента.

З (3) випливає:

$$u_\theta(r,z)=r\psi(r,z)=\alpha rz+\sum_{k=1}^{\infty}A_{\rho_k}J_1(\rho_k r)\frac{sh\,\rho_k z}{\rho_k ch\,\rho_k h},$$

$$\tau_{z\theta}(r,z)=\mu r\frac{\partial\psi}{\partial z}=\mu\alpha r+\mu\sum_{k=1}^{\infty}A_{\rho_k}J_1(\rho_k r)\frac{ch\,\rho_k z}{ch\,\rho_k h}, \tag{4}$$

$$\tau_{r\theta}(r,z)=\mu r\frac{\partial\psi}{\partial r}=-\mu\sum_{k=1}^{\infty}A_{\rho_k}J_2(\rho_k r)\frac{sh\,\rho_k z}{ch\,\rho_k h}.$$

Щоб задовольнити умови (2), коефіцієнти A_{ρ_k} повинні справджувати рівність

$$\mu\alpha r+\mu\sum_{k=1}^{\infty}A_{\rho_k}J_1(\rho_k r)=f(r). \tag{5}$$

Для визначення коефіцієнтів A_{ρ_k} розкладемо $f(r)$ в ряд Фур'є-Бесселя

$$f(r)=b_0 r+\sum_{k=1}^{\infty}b_k J_1(\rho_k z),\qquad 0<r<1, \tag{6}$$

де

$$b_k=\frac{2\rho_k^2}{(\rho_k^2-1)J_1^2(\rho_k)+\rho_k^2 J_1'^2(\rho_k)}\int_0^1 tf(t)J_1(\rho_k t)\,dt,$$

$$b_0=4\int_0^1 t^2 f(t)\,dt.$$

З (5) і (6) одержимо

$$\alpha\mu=b_0,\quad \mu A_{\rho_k}=\frac{2\rho_k^2}{(\rho_k^2-1)J_1^2(\rho_k)+\rho_k^2 J_1'^2(\rho_k)}\int_0^1 tf(t)J_1(\rho_k t)\,dt.$$

Тоді

$$\tau_{r\theta}(r,z)=-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_2(\rho_k r)}{J_1^2(\rho_k)}\cdot\frac{sh\,\rho_k z}{ch\,\rho_k h}\int_0^1 tf(t)J_1(\rho_k t)\,dt, \tag{7}$$

$$\tau_{z\theta}(r,z) = 4r\int_0^1 t^2 f(t)\,dt +$$

$$+2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\rho_k r)}{J_1^2(\rho_k)} \cdot \frac{ch\,\rho_k z}{ch\,\rho_k h} \int_0^1 t f(t) J_1(\rho_k t)\,dt .$$

Як свідчать числові підрахунки, що проводились за формулами (7), напружений стан в стержні радіуса R і будь-якої довжини h $(h \geq R)$ розподіляється так :

а) для $0 < z < h-R$ $\tau_{z\theta}(r,z) = 4r\int_0^R t^2 f(t)\,dt$, а напруженням $\tau_{r\theta}(r,z)$ можна нехтувати;

б) для $h > z > h-R$ напружений стан в стержні не залежить від його довжини h. Для цього випадку наводяться таблиці розподілу $\tau_{z\theta}(r,z)$ і $\tau_{r\theta}(r,z)$ при $f(r)=P_0$ $(P_0 - const)$.

Таблиця I

Значення $\dfrac{\tau_{z\theta}(r,z)}{P_0}$

$\frac{h-z}{R}$	Фіксовані значення радіуса, r						
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	1
0,875	0,341	0,508	0,673	0,837	1,00	1,164	1,330
0,750	0,345	0,512	0,676	0,838	1,00	1,162	1,326
0,625	0,356	0,522	0,684	0,842	1,00	1,158	1,321
0,500	0,374	0,541	0,699	0,850	1,00	1,151	1,311
0,375	0,412	0,579	0,727	0,864	1,00	1,138	1,291
0,250	0,489	0,650	0,777	0,888	1,00	1,112	1,254
0,125	0,654	0,781	0,863	0,930	1,00	1,063	1,178

Таблиця 2

Значення $\frac{\tau_{r\theta}(r,z)}{p_0}$

$\frac{h-z}{R}$	Фіксовані значення радіуса, r						
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	1
0,750	0,0010	0,0037	0,0067	0,0088	0,0092	0,0075	0,0041
0,625	0,0020	0,0071	0,0127	0,0156	0,0171	0,0138	0,0076
0,500	0,0042	0,0144	0,0254	0,0324	0,0329	0,0264	0,0144
0,375	0,0141	0,0304	0,0508	0,0625	0,0620	0,0494	0,0269
0,250	0,0235	0,0686	0,104	0,120	0,115	0,0915	0,0506
0,125	0,0798	0,0971	0,218	0,228	0,210	0,167	0,0972

Кручення циліндричного шару

Нехай в круглий отвір циліндричного шару впаяно порожнистий циліндр. Введемо циліндричну систему координат з початком в центрі циліндра і з віссю OZ, яка направлена по його осі.

Граничні умови приймаються такими :

$$\tau_{z\theta}^{(1)}(r,z)=0 \quad \text{при} \quad z=\pm h,\ r\geq 1,$$

$$\tau_{z\theta}^{(2)}(r,z)=0 \quad \text{при} \quad z=\pm h,\ \rho\leq r\leq 1,$$

$$\tau_{r\theta}^{(2)}(r,z)=f(z) \quad \text{при} \quad r=\rho,\ -h\leq z\leq h,$$

$$\tau_{r\theta}^{(1)}=\tau_{r\theta}^{(2)}(r,z),\quad U_\theta^{(1)}(r,z)=U_\theta^{(2)}(r,z) \quad \text{при} \quad r=1,\ -h\leq z\leq h,$$

де $1,\rho$ – радіуси циліндра; $2h$ – товщина шару та висота циліндра; індекси (1) або (2) належать величинам, що відносяться відповідно до шару або до циліндра.

Зараз помістимо лише вираз для напруження $\tau_{r\theta}(r,z)$ в зоні контакту шару та циліндра, якщо $2h=\pi$

$$\tau_{r\theta}(1,z) = \frac{a_0}{2}\rho^2 + \sum_{p=1}^{\infty} a_p \frac{pK_0(2p) + K_1(2p)}{\Delta}\cos 2pz ,$$

де

$$\Delta = 2\left[pK_0(2p) + K_1(2p)\right]\left\{K_1(2p)\left[pI_0(2p\rho) - \frac{1}{\rho} I_1(2p\rho)\right] + \right.$$

$$\left. + I_1(2p)\left[pK_0'(2p\rho) + \frac{1}{\rho}K_1(2p\rho)\right]\right\} +$$

$$+ 2lK_1(2p)\left\{\left[pI_0(2p) - I_1(2p)\right]\left[pK_0(2p\rho) + \frac{1}{\rho}K_1(2p\rho)\right] - \right.$$

$$\left. - \left[pK_0(2p) + K_1(2p)\right]\left[pI_0(2p\rho) - \frac{1}{\rho} I_1(2p\rho)\right]\right\} ,$$

тут $l = \frac{\mu_{(2)}}{\mu_{(1)}}$, a_p - коефіцієнти розкладу функції в ряд Фур'є, $I_0(x)$, $I_1(x)$, $K_0(x)$, $K_1(x)$ - функції Бесселя першого та другого роду уявного аргумента.

Нижче наведена таблиця розподілу $\tau_{r\theta}(1,z)$ при $f(z) = p_1 z$ $\left(\frac{\tau_{r\theta}}{p_1}\right)$ та $f(z) = p_2 z^2$ $\left(\frac{\tau_{r\theta}}{p_2}\right)$ залежно від товщини стінок циліндра ($1-\rho$), від координати z та величини l . (Якщо $f(z) = p_0$,то $\tau_{r\theta}^{(1)}(r,z) = \tau_{r\theta}^{(2)}(r,z) = p_0\frac{\rho^2}{r^2}$).

Таблиця 3

Розподіл напружень

z	l	$\tau_{r\theta} : P_1$				$\tau_{r\theta} : P_2$		
		$\rho=0,5$	$\rho=0,75$	$\rho=0,9$	$\rho=0,98$	$\rho=0,75$	$\rho=0,9$	$\rho=0,98$
0	0	0,074	0,116	0,130	0,143	0,0269	0,007	-0,001
	1/3	0,083	0,134	0,145	0,148	0,047	0,023	0,0038
	1	0,097	0,165	0,173	0,156	0,084	0,052	0,0124
	3	0,124	0,229	0,241	0,180	0,165	0,130	0,0371
	9	0,156	0,317	0,361	0,242	0,284	0,282	0,104
$\frac{h}{4}$	0	0,110	0,211	0,278	0,322	0,100	0,104	0,111
	1/3	0,116	224	0,289	0,325	0,120	0,121	0,116
	1	0,126	0,246	0,309	0,331	0,155	0,152	0,126
	3	0,145	0,292	0,357	0,348	0,227	0,227	0,152
	9	0,157	0,353	0,442	0,392	0,324	0,361	0,221
$\frac{h}{2}$	0	0,196	0,442	0,636	0,754	0,363	0,478	0,550
	1/3	0,196	0,442	0,636	0,754	0,375	0,491	0,555
	1	0,196	0,442	0,636	0,754	0,392	0,514	0,563
	3	0,196	0,442	0,636	0,754	0,418	0,556	0,585
	9	0,196	0,442	0,636	0,754	0,441	0,606	0,630
$\frac{3h}{4}$	0	0,283	0,672	0,994	1,186	0,825	1,231	1,468
	1/3	0,277	0,660	0,983	1,183	0,805	1,213	1,464
	1	0,267	0,638	0,964	1,177	0,770	1,184	1,454
	3	0,248	0,592	0,916	1,160	0,698	1,105	1,428
	9	0,224	0,530	0,830	1,116	0,602	0,971	1,359
h	0	0,319	0,768	1,143	1,365	1,125	1,826	2,307
	1/3	0,310	0,750	1,127	1,361	1,076	1,763	2,277
	1	0,296	0,718	1,099	1,352	1,000	1,664	2,226
	3	0,269	0,654	1,032	1,328	0,859	1,469	2,108
	9	0,236	0,567	0,911	1,267	0,688	1,191	1,267

Література

1. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. Физматгиз, М., 1963.

2. Солянник-Красса К. А. Упругое равновесие тел. Инженерный сборник, т. 26, 1958.

УДК 539.3

Т.Л.МАРТИНОВИЧ, В.В.БОЖИДАРНИК

КРАЙОВІ УМОВИ В ІНТЕГРАЛЬНІЙ ФОРМІ ЗАДАЧІ ПРО НАПРУЖЕНИЙ СТАН В АНІЗОТРОПНІЙ ПЛАСТИНЦІ З НЕСИМЕТРИЧНО ПІДКРІПЛЕНИМ КРАЄМ

У цій праці пропонується загальний математичний підхід до розв'язування задач про пружну рівновагу анізотропних пластинок з несиметрично підкріпленим краєм.

Розглянемо тонку анізотропну пластинку товщиною $2h$, серединна площина якої займає область S, обмежену простими замкнутими контурами $L=L_1+L_2+\ldots+L_{m+1}$, що не перетинаються між собою. У випадку необмеженої області S зовнішній контур L_{m+1} віддалений у нескінченність. При додатному обході контура L область S залишається зліва. Припускається, що в кожній точці пластинки існує площина пружної симетрії, паралельна серединній площині xoy.

Нехай край пластинки L_1 несиметрично підкріплений пружним стержнем (кільцем) постійного перерізу, а до решти краю пластинки $L'=L-L_1$ прикладені згинаючі моменти $m(s)$, перерізуючі сили $p(s)$ і напруження N і T (N, T - нормальна і дотична складові заданих напружень). Стержень спаяний з пластинкою до деформації таким чином, що площина осі стержня зміщена на величину ζ_2^* від серединної площини пластинки. Незалежно від виду навантаження пластинка буде зазнавати згинаючого і узагальненого плоского напруженого стану.

Для одержання крайових умов розглядуваної задачі в інтегральній формі уявно відкинемо підкріплюючий стержень, а дію його на пластинку замінимо або контактними згинаючими моментами $M_n^{(i)}$, перерізуючими силами $M_n^{(i)}+\partial H_{\tau n}^{(i)}/\partial s$ і напруженнями $N_1^{(i)}$, $T_1^{(i)}$, або значеннями прогинів w_1, їх нормальною похідною $\frac{\partial w_1}{\partial n}$, і переміщеннями u_1, v_1 точок контура L_1 області S.

Вважаючи деформації малими, окремо розглянемо згинаючий ї узагальнений плоский напружений стани пластинки. Для кожного з цих напружених станів розглянемо першу основну задачу, коли до контура L_1 прикладені контактні зусилля, і основну змішану задачу, якщо задані зміщення точок контура L_1.

На основі [1-5] крайові умови цих граничних задач у інтегральній формі мають вигляд:

а) У випадку узагальненого плоского напруженого стану

$$\int_{L} \overline{F(\bar{t})}dU = \int_{L'} \overline{F(\bar{t})}(N+iT)dt + \int_{L_1} \overline{F(\bar{t})}(N_1^{(i)} + iT_1^{(i)})dt;$$

$$\int_{L} F(t)dU = \int_{L'} F(t)(N+iT)dt + \int_{L_1} F(t)(N_1^{(i)} + iT_1^{(i)})dt, \tag{1}$$

$$\int_{L'} \overline{F(\bar{t})}dU - \int_{L_1} \overline{F(\bar{t})}dV = \int_{L'} \overline{F(\bar{t})}(N+iT)dt - \int_{L_1} \overline{F(\bar{t})}d(u_1+iv_1);$$

$$\int_{L'} F(t)dU - \int_{L_1} F(t)dV = \int_{L'} F(t)(N+iT)dt - \int_{L_1} F(t)d(u_1+iv_1).$$

б) У випадку згину

$$\int_{L} \overline{F(\bar{t})}dV^* = -\int_{L'} I(t)\overline{F(\bar{t})}dt - \int_{L_1} I_1^{(i)}(t)\overline{F(\bar{t})}dt; \tag{2}$$

$$\int_{L} F(t)dV^* = -\int_{L'} I(t)F(t)dt - \int_{L_1} I_1^{(i)}(t)F(t)dt;$$

$$\int_{L'} \overline{F(\bar{t})}dV^* + \int_{L_1} \overline{F(\bar{t})}dU^* = -\int_{L'} I(t)\overline{F(\bar{t})}dt + 2\int_{L_1} \overline{F(\bar{t})}d\left[\frac{\partial w_1}{\partial \bar{t}}\right];$$

$$\int_{L'} F(t)dV^* + \int_{L_1} F(t)dU^* = -\int_{L'} I(t)F(t)dt + 2\int_{L_1} F(t)d\left[\frac{\partial w_1}{\partial \bar{t}}\right].$$

Тут позначено

$$U=\sum_{j=1}^{2}\left[(1+is_j)\varphi_j(z_j)+(1+i\bar{s}_j)\overline{\varphi_j(z_j)}\right];\qquad (3)$$

$$V=\sum_{j=1}^{2}\left[(p_j+iq_j)\varphi_j(z_j)+(\bar{p}_j+i\bar{q}_j)\overline{\varphi_j(z_j)}\right];$$

s_j – корені характеристичного рівняння; p_j, q_j – відомі сталі величини; $\varphi_j(z_j)$ – комплексні потенціали змінних $z_j=x+s_jy$ узагальненого плоского напруженого стану [1,5]; t – афікс точки контура L_1;

$$V^*=\sum_{j=1}^{2}\left[\left(q_j^*+i\frac{p_j^*}{\mu_j}\right)\varphi_j^*(z_j^*)+\left(\bar{q}_j^*+i\frac{\bar{p}_j^*}{\bar{\mu}_j}\right)\overline{\varphi_j^*(z_j^*)}\right];$$

$$U^*=\sum_{j=1}^{2}\left[(1+i\mu_j)\varphi_j^*(z_j^*)+(1+i\bar{\mu}_j)\overline{\varphi_j^*(z_j^*)}\right];\qquad (4)$$

$$l_1^{(i)}(t)=M_n^{(i)}+i\int_0^s\left(N_n^{(i)}+\frac{\partial H_{\tau n}^{(i)}}{\partial s}\right)ds+iC_1;$$

$$l_j(t)=m_j(s)+i\int_0^s p_j(s)\,ds+iC_j\qquad (j=2,3,\dots,m+1);\qquad (5)$$

μ_j – корені характеристичного рівняння; p_j^*, q_j^* – відомі сталі величини; $\varphi_j^*(z_j^*)$ – комплексні потенціали змінних $z_j^*=x+\mu_jy$ згинального напруженого стану [1,5]; C_j – дійсні сталі; $F(z)$ – довільна функція змінної $z=x+iy$, голоморфна в області пластинки S.

Залежності між переміщеннями u_1, v_1, w_1 точок крайнього волокна стержня L_1, спаяного з пластинкою, відносним видовженням e_0 нейтрального (для чистого згину) волокна L_0 і кутами повороту поперечного перерізу стержня θ_τ, θ_n, θ_6 виражаються на підставі [2–4] формулами

$$d(u_1+iv_1)=\left[\frac{r_0}{r_1}e_0+(r_1-r_0)\overset{\circ}{t}\frac{d\theta_6}{dt}-\zeta_0^*\left(\overset{\circ}{t}\frac{d\theta_n}{dt}-\frac{1}{r_1}\theta_\tau\right)+i\theta_6\right]dt,$$

$$2\frac{\partial w_1}{\partial t}=\overset{\circ}{t}\left[\frac{r_0}{r_1}\theta_n-(r_1-r_0)\overset{\circ}{t}\frac{d\theta_\tau}{dt}+i\theta_\tau\right],\quad \overset{\circ}{t}=\frac{dt}{ds}\qquad (6)$$

Залежність між контактними зусиллями, що діють зі сторони пластинки на підкриплюючий стержень, і деформацією стержня e_0, θ_n, θ_τ і θ_b виражаються співвідношеннями [2-4]

$$
\begin{aligned}
&(N_1^{(i)} + i T_1^{(i)})dt = \pm \frac{1}{2h} d\left[\overset{\circ}{t}(V_n + i V_\tau)\right] + \frac{h^*}{h}\frac{r_2}{r_1}(N_1 + i T_1)dt;\\
&\overset{\circ}{t}(V_n + i V_\tau) = \frac{d}{dt}\left[g(r_0 - r_1)e_0 + g\eta_c r_1 \overset{\circ}{t}\frac{d\theta_b}{dt}\right] + ige_0\dot{t} \pm 2h^*(r_2 - r_1)\frac{r_2}{r_1}\overset{\circ}{t}T_1;\\
&I_1^{(i)}(t) = \pm \frac{d}{dt}\left[\overset{\circ}{t}(L_\tau - iL_n)\right] + 2h\zeta_0^*(N_1^{(i)} + iT_1^{(i)}) + I_1(t);\\
&\overset{\circ}{t}(L_\tau - iL_n) = \frac{r_1}{r_0}\left[C\frac{d\theta_\tau}{dt} - iA\frac{d\theta_n}{dt} + \frac{1}{r_1}(C\theta_n + iA\theta_\tau)\overset{\circ}{t}\right],
\end{aligned} \tag{7}
$$

де $g = E^*F$; A і C - жорсткості підкріплюючого стержня на розтяг, згин і кручення; r_1 - радіус кривини крайнього волокна стержня, спаяного з пластинкою; r_0 - радіус кривини нейтрального (для чистого згину) волокна стержня L_0, що знаходиться на віддалі η_c від центральної осі стержня; V_τ, V_n - складові головного вектора; L_τ, L_n - складові головного моменту внутрішніх зусиль у поперечному перерізі стержня; N_1, T_1 і $I_1(t)$ - зовнішні зусилля, прикладені до стержня; $2h^*$ - товщина стержня.

Тут і надалі верхній знак береться при $r_1 < r_0$, нижній - при $r_1 > r_0$.

Нормальні напруження в перерізі стержня σ і внутрішнього зусилля у ньому обчислюються за формулами [2-4]

$$\sigma = E^*\left[\frac{r_0}{r}e_0 + \eta\dot{t}\frac{d\theta_b}{dt} - \zeta\left(\dot{t}\frac{d\theta_n}{dt} - \frac{1}{r}\theta_\tau\right)\right]$$

$$L_n = A\frac{r_1}{r_0}\left(\dot{t}\frac{d\theta_n}{dt} - \frac{1}{r_1}\theta_\tau\right), \quad L_\tau = C\frac{r_1}{r_0}\left(\dot{t}\frac{d\theta_\tau}{dt} + \frac{1}{r_1}\theta_n\right);$$

$$L_b = g\eta_c r_1\dot{t}\frac{d\theta_b}{dt}, \quad V_\tau = ge_0,$$

де $\eta = r - r_0$ - віддаль довільного волокна стержня від нульової лінії L_0 у їх спільній площині.

Тепер у крайові умови (1)-(2) замість $d(u_1 + iv_1)$, $2d\left[\frac{w_1}{d\bar{t}}\right]$, $(N_1^{(i)} + i\,T_1^{(i)})dt$ і $I_1^{(i)}(t)dt$ підставимо їх вирази (6) і (7). Після нескладних перетворень крайові умови задачі для анізотропної пластинки з несиметрично підкріпленим краєм в інтегральній формі при відсутності навантаження на кільці ($N_1 = 0$, $T_1 = 0$, $I_1(t) = 0$) набирають вигляду

$$\int\limits_{L} \overline{F(t)}\,dU = \pm\frac{g}{2h}\int\limits_{L_1}\left[(r_0 - r_1)\,e_0 + \eta_c\, r_1 \overset{\circ}{t}\,\frac{d\theta_b}{dt}\right]\overline{F''(t)}\,d\bar{t} \mp$$

$$\mp\frac{ig}{2h}\int\limits_{L_1} e_0\,\overline{F'(t)}\,\overset{\circ}{t}\,d\bar{t} + \int\limits_{L'}(N + iT)\overline{F(t)}\,dt\,;$$

$$\int\limits_{L} F(t)\,dU = \pm\frac{g}{2h}\int\limits_{L_1}\left[(r_0 - r_1)e_0 + \eta_c\, r_1\, t\,\frac{d\theta_b}{dt}\right]d\left[t^2 F'(t)\right] \mp$$

$$\mp\frac{ig}{2h}\int\limits_{L_1} e_0\,F'(t)\,t\,dt + \int\limits_{L'}(N + iT)F(t)\,dt\,;$$

$$\int\limits_{L'} \overline{F(t)}\,dU - \int\limits_{L_1}\overline{F(t)}\,dV = -\int\limits_{L_1}\left[\frac{r_0}{r_1}e_0 + (r_1 - r_0)\,t\,\frac{d\theta_b}{dt} + i\theta_b -\right.$$

$$\left.-\zeta_0^*\left(t\,\frac{d\theta_n}{dt} - \frac{1}{r_1}\,\theta_\tau\right)\right]\overline{F(t)}\,dt + \int\limits_{L'}(N + iT)\overline{F(t)}\,dt\,;$$

$$\int\limits_{L'} F(t)\,dU - \int\limits_{L_1} F(t)\,dV = -\int\limits_{L_1}\left[\frac{r_0}{r_1}e_0 + (r_1 - r_0)\,t\,\frac{d\theta_b}{dt} + i\theta_b -\right. \qquad (8)$$

$$\left.-\zeta_0^*\left(t\,\frac{d\theta_n}{dt} - \frac{1}{r_1}\,\theta_\tau\right)\right]F(t)\,dt + \int\limits_{L'}(N + iT)F(t)\,dt\,;$$

$$\int\limits_{L} \overline{F(t)}\,dV^* = \pm\int\limits_{L_1}\frac{r_1}{r_0}\left[C\,\frac{d\theta_\tau}{d\bar{t}} - iA\,\frac{d\theta_n}{d\bar{t}} + \frac{1}{r_1}\left(C\theta_n + iA\theta_\tau\right)t\right]\overline{F'(t)}\,d\bar{t} \mp$$

$$\mp i\zeta_0^* g\int_{L_1} e_0\overline{F'(t)}\,i\,d\bar{t} \pm \zeta_0^* g\int_{L_1}\left[(r_0-r_1)e_0+\eta_c r_1 i\,\frac{d\theta_b}{dt}\right]\overline{F''(t)}\,d\bar{t}-$$

$$-\int_{L'} I(t)\overline{F(t)}\,dt\ ;$$

$$\int_{L} F(t)\,dV^* = \pm\int_{L_1}\frac{r_1}{r_0}\left[C\,\frac{d\theta_t}{d\bar{t}}-iA\,\frac{d\theta_n}{d\bar{t}}+\frac{1}{r_1}\left(C\theta_n+iA\theta_t\right)i\right]F(t)\,dt\mp$$

$$\mp i\zeta_0^* g\int_{L_1} e_0\,i\,F'(t)\,dt \pm \zeta_0^* g\int_{L_1}\left[(r_0-r_1)e_0+\eta_c r_1 i\,\frac{d\theta_b}{dt}\right]d\left[i^2F'(t)\right]-$$

$$-\int_{L'} I(t)F(t)\,dt\ ;$$

$$\int_{L'}\overline{F(t)}\,dV^*+\int_{L_1}\overline{F(t)}\,dU^* = -\int_{L_1} i\left[\frac{r_0}{r_1}\theta_n-(r_1-r_0)i\,\frac{d\theta_t}{dt}+i\theta_t\right]\overline{F'(t)}\,d\bar{t}-$$

$$-\int_{L'} I(t)\overline{F(t)}\,dt\ ;$$

$$\int_{L'} F(t)\,dV^*+\int_{L_1} F(t)\,dU^* = -\int_{L_1} i\left[\frac{r_0}{r_1}\theta_n-(r_1-r_0)i\,\frac{d\theta_t}{dt}+i\theta_t\right]F'(t)\,dt-$$

$$-\int_{L'} I(t)F(t)\,dt\,.$$

Крайові умови (8) служать для визначення комплексних потенціалів $\varphi_j(z_j)$, $\varphi_j^*(z_j^*)$ і компонент деформації стержня e_0, θ_n, θ_t, θ_b.

Література

1. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. ГТТИ, М., 1957.

2. Мартынович Т. Л. К решению задач о напряженном состоянии в изотропных пластинках с подкрепленным краем. "Прикладная механика", т. VI, вып. 9, 1970.

3. Мартынович Т. Л., Нищенко И. А. Об изгибе тонких

изотропных плит и плит с подкрепленным краем. Труды УП Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. "Наука", М., 1970.

4. Мартынович Т. Л. Теория и расчет пластинок с подкрепленным краем. Автореферат докт. дисс., Львовский университет, 1970.

5. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. ГТТИ, М., 1951.

6. Савин Г. Н. Флейшман Н. П. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. "Наукова думка", 1964.

7. Труды Николаевского кораблестроительного института. "Строительная механика судовых машин", вып. 32, 1969, вып. 40, 1970.

8. Шереметьев М. П. Пластинки с подкрепленным краем. Изд-во Львовского ун-та, 1960.

УДК 539.319

О. І. ДУМАНСЬКИЙ

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ПЛАСТИНКИ-СМУГИ, ПОСЛАБЛЕНОЇ ВИТОЧКОЮ

В інженерній практиці дуже часто зустрічаються випадки, коли пластинка має форму безмежної смуги, послабленої виточкою, розміри якої сумірні з шириною пластинки L.

Вивченню напруженого стану таких пластинок-смуг присвячений зміст нашої експериментальної роботи.

Використовувався поляризаційно-оптичний метод дослідження напружень (метод фотопружності). Вимірювання проводились на координатно-синхронному поляриметрі КСП-5 із слюдяним компенсатором СКК-2.

Прозорі пластинки мали товщину 3 мм і виготовлялись із епоксидної смоли ЭД-5 холодним затвердінням [1].

Пластинка-смуга з еліптичною виточкою

Розглянемо пластинки-смуги з еліптичною виточкою, які розтягуються на безмежності однорідними зусиллями p. Дослідження еліптичних виточок проводимо із такими параметрами:

$$\frac{a}{b} > 1, \quad (2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6),$$

$$\frac{a}{b} < 1, \quad (0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4;\ 0{,}5;\ 0{,}6;\ 0{,}8)$$

і колова виточка, як частковий випадок еліптичної, тобто $\frac{a}{b} = 1$, де a і b – півосі еліпса. При кожному фіксованому розмірі еліптичної виточки мінялась ширина смуги, тобто мінялось співвідношення $\frac{a}{L}$.

Досліджувались напруження на контурі еліптичних виточок.

На рис. І, 2 наведені графіки, які характеризують залежність коефіці-

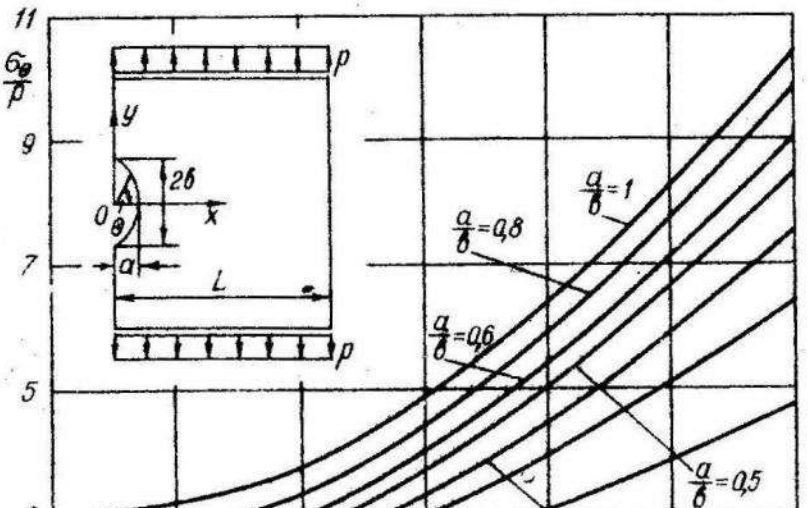


Рис. І.

ента концентрації напружень на контурі еліптичних виточок у точці $\theta = 0$ від співвідношення $\frac{a}{L}$.

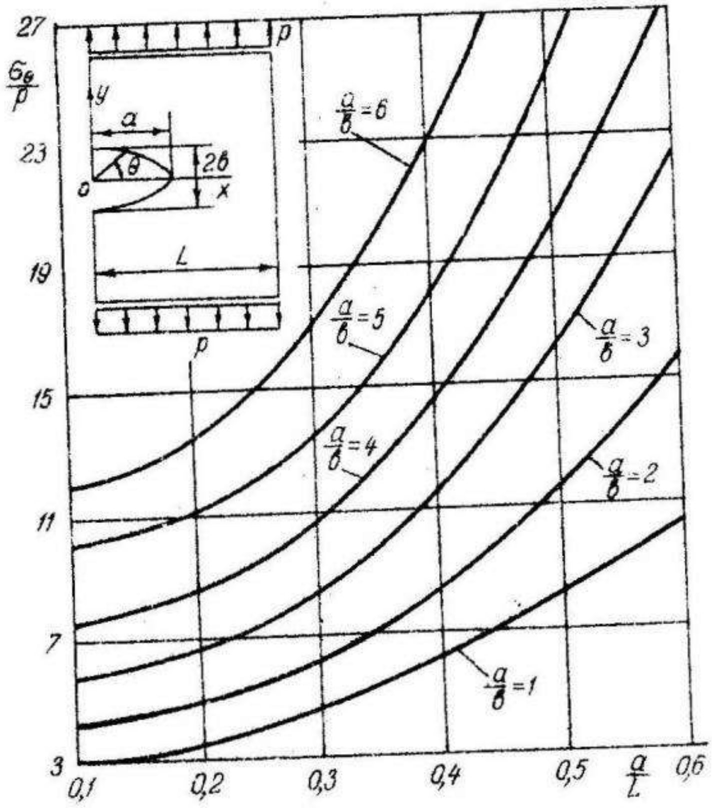


Рис. 2.

Використовуючи дані проведеного дослідження, можна зробити висновки:

а) Для нескінчених пластинок з еліптичними виточками, параметри яких $\frac{a}{b}\leq 1$ значення коефіцієнта концентрації напружень у точці $\theta = 0$ прямує до значення $1+2\frac{a}{b}$. Це підтверджує теоретичні розрахунки, проведені в роботах [2] і [3].

б) Для пластинок з еліптичними виточками, параметри яких $\frac{a}{b}>1$, цього немає, тут значення коефіцієнта концентрації напружень у точці $\theta=0$ не збігається зі значенням $1+2\frac{a}{b}$

в) Зі зменшенням ширини пластинки L, тобто зі збільшенням відношення $\frac{a}{L}$, концентрація напружень збільшується, зміна коефіцієнта концентрації напружень виражається параболічною залежністю.

На основі проведеного експерименту було встановлено наближену експериментальну формулу для визначення коефіцієнта концентрації напружень у точці $\theta=0$ колової виточки:

$$\frac{\sigma_\theta}{p} = 3 + 20{,}6\left(\frac{R}{L}\right)^2,$$

де

$$0 \le \frac{R}{L} \le 0{,}6\ ,$$

R - радіус колової виточки.

Пластинка-смуга з квадратною виточкою

Експериментально досліджувались значення коефіцієнта концентрації напружень в пластинках-смугах з квадратними виточками, параметри яких

$$\frac{r}{a} = 0{,}3;\ \ 0{,}15;\ \ 0{,}1,$$

де r - радіус заокруглення кутів виточки; a - довжина сторони квадрата.

Пластинки розтягувались на безмежності однорідними зусиллями p.

Досліджувались напруження на контурі квадратної виточки, в точці $\theta = \frac{\pi}{4}$. При кожному фіксованому розмірі квадратної виточки мінялась ширина смуги, тобто, мінялось відношення $\frac{a}{L}$, де L - ширина пластинки.

На рис. 3 наведені графіки залежності коефіцієнта концентрації напружень на контурі квадратної виточки, в точці $\theta = \frac{\pi}{4}$ від відношення $\frac{a}{L}$. Тут же наведений графік і для колової виточки $\frac{r}{a} = 0{,}5$.

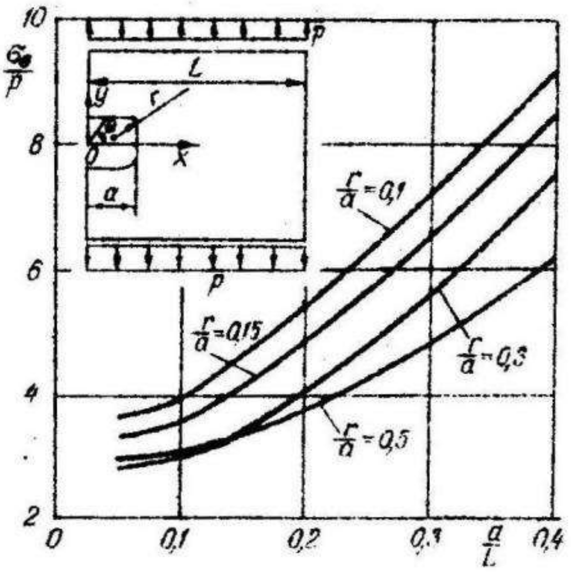


Рис. 3.

На основі проведених досліджень можна зробити висновки:

а) Зі зменшенням ширини пластинки, тобто, зі збільшенням відношення $\frac{a}{L}$ концентрація напружень збільшується.

б) Приріст коефіцієнта концентрації напружень зі збільшенням радіуса заокруглення зменшується.

Література

1. Точилин Г. Л., Пивоваров В. П., Гашко А. Л., Манза В. П. Изготовление пластин и блоков из эпоксидных смол для исследования поляризационно-оптическим методом. "Заводская лаборатория", 33, 1967, № 6.

2. Уфлянд Я. С. Биполярные координаты в теории упругости. М., 1950.

3. Seika M. Stresses in a semi-infinite plate containing a U-type notch under uniform tension. Ing.-Arch., Bd. 27, 1960, N 5.

УДК 539.38

Р.І.МОКРИК, Д.В.ГРИЛІЦЬКИЙ

ДЕЯКІ КОНТАКТНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ІЗОТРОПНОГО ШАРУ МАЛОЇ ТОВЩИНИ

Розглядаємо задачу про тиск штампа на тонкий трансверсально ізотропний шар, що лежить на гладкій недеформованій основі. При розв'язуванні задачі використовується асимптотичний метод "малих" λ, розроблений В.М.Александровим [1,2] $\lambda = ha^{-1}$ де h - товщина шару, a - половина максимального діаметра області контакту штампа з пружною основою.

§ 1. Як відомо [3], задача про пружну рівновагу безмежного трансверсально ізотропного шару товщиною h, у випадку, коли на його поверхнях $z=0$ і $z=h$ діють тільки нормальні зусилля $q(x,y)$ зводиться до знаходження функції χ, яка задовольняє рівнянню (позначення ті ж, що в [3]):

$$D\left[(S_1+S_2)\sin(S_1-S_2)hD+(S_1-S_2)\sin(S_1+S_2)hD\right]X=\frac{q}{G_1}. \quad (1)$$

У випадку, коли навантаження $q(x,y)$ можна зобразити у формі інтегралу Фур'є

$$q(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}Q(\alpha',\beta')e^{i(\alpha'x+\beta'y)}d\alpha'd\beta', \quad (2)$$

де $Q(\alpha',\beta')=\frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega}q(x,y)e^{-i(\alpha'x+\beta'y)}d\alpha'd\beta'$; Ω — область завантаження, то розв'язком рівняння (1) буде функція

$$X=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q(\alpha',\beta')}{\Phi(-\gamma_1^2)}e^{i(\alpha'x+\beta'y)}d\alpha'd\beta'; \quad (\gamma_1^2=\alpha'^2+\beta'^2). \quad (3)$$

$$\Phi(-\gamma_1^2)=\gamma_1 h\left|(S_1+S_2)sh(S_1-S_2)\gamma_1 h+(S_1-S_2)sh(S_1+S_2)\gamma_1 h\right|, \quad (4)$$

а компонента тензора напружень σ_z і вектора змішень W будуть мати вигляд

$$\sigma_z=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q(\alpha',\beta')}{\Phi(-\gamma_1^2)}F_{\sigma_z}(\gamma_1 z,\gamma_1 h)e^{i(\alpha'x+\beta'y)}d\alpha'd\beta', \quad (5)$$

$$W=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q(\alpha',\beta')}{\Phi(-\gamma_1^2)}F_w(\gamma_1 z,\gamma_1 h)e^{i(\alpha'x+\beta'y)}d\alpha'd\beta', \quad (6)$$

$$F_{\sigma_z}=\gamma_1\left[-G_1 n(\alpha+\beta S_2^2)S_1(\alpha_1-\beta_1 S_1^2)sh S_2\gamma_1 h\, ch S_1\gamma_1 z-G_1 n(\alpha+\beta S_1^2)S_2(\alpha_1-\beta_1 S_2^2)sh S_1\gamma_1 h\, ch S_2\gamma_1 z\right], \quad (7)$$

$$F_w=\left[-G_n(\alpha+\beta S_2^2)(\gamma-\delta S_1^2)sh S_2\gamma_1 h\, sh S_1\gamma_1 z-G_1 n(\alpha+\beta S_1^2)(\gamma-\delta S_2^2)sh S_1\gamma_1 h\, sh S_2\gamma_1 z\right]. \quad (8)$$

§ 2. Розглянемо задачу про тиск гладкого штампу на пружний трансверсально ізотропний шар, який лежить без тертя на недеформованій основі.

Будемо вважати, що штамп є циліндричне тіло з поперечним перерізом Ω і область контакту збігається з Ω.

Граничні умови мають вигляд:

при $z=h$, $\tau_{zx}=\tau_{zy}=0$, $\sigma_z=0$, поза Ω,

$$W=-\delta(x,y)=-[\delta_0-k_1x+k_2y-f(x,y)] \text{ в області } \Omega, \tag{9}$$

при $z=0$, $\tau_{zx}=\tau_{zy}=W=0$. (10)

Невідомим у задачі є тиск між штампом і шаром $q(x,y)=-\sigma_z(x,y)$. Використовуючи (9), (6) і (2), можна записати інтегральне рівняння для знаходження $q(x,y)$

$$\iint_\Omega q(\xi,\eta)K(x-\xi,\,y-\eta)\,d\xi\,d\eta=4\pi^2G_1\delta(x,y), \tag{11}$$

де

$$K(x-\xi,\,y-\eta)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}H(\gamma_1h)e^{i[\alpha'(x-\xi)+\beta'(y-\eta)]}d\alpha'd\beta'; \tag{12}$$

$$H(\gamma_1h)=\frac{G_1n[(\alpha+\beta S_2^2)(\gamma-\delta S_1^2)-(\alpha+\beta S_1^2)(\gamma-\delta S_2^2)]\,sh\,S_2\gamma_1h\,sh\,S_1\gamma_1h}{\gamma_1[(S_1+S_2)\,sh\,(S_1-S_2)\gamma_1h+(S_1-S_2)\,sh\,(S_1+S_2)\gamma_1h]} \tag{13}$$

З (13) випливає, що при $S_1\to1$ і $S_2\to1$

$$H(\gamma_1h)\longrightarrow\frac{sh^2\gamma_1h}{\gamma_1[2\gamma_1h+sh\,2\gamma_1h]},$$

що відповідає випадку ізотропного шару [1].

Після ряду перетворень інтегральне рівняння (11) можна звести до вигляду:

$$\iint_\Omega q(\xi,\eta)K\left(\frac{\rho}{h}\right)d\xi\,d\eta=c\cdot h\cdot\delta(x,y), \tag{14}$$

де

$$K\left(\frac{\rho}{h}\right)=\int_0^{\infty}H(u)J_0\left(u\frac{\rho}{h}\right)du$$

$u = \gamma_1 h$, J_0 - функція Бесселя $c = \frac{4\pi}{n(\alpha\delta - \beta\gamma)}$, $\rho = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$.

§ 3. Надалі розглянемо випадок, коли $\lambda < 1$. Введемо нову систему координат x', y', зв'язану з границею області Ω так, що вісь y' напрямлена по дотичній до контура області Ω. Скориставшись схемою, запропонованою в [1,2], зведемо інтегральне рівняння (14) до вигляду:

$$\int_0^\infty q(r) K^*(\sigma - r) dr = \frac{c}{h} \delta(\sigma), \tag{15}$$

де $\sigma = \frac{x'}{h}$; $K^*(\sigma - r) = \int_0^\infty \frac{H(u)}{U} \cos u(\sigma - r) du$.

Апроксимуючи функцію $\frac{H(u)}{U}$ з великим ступенем точності функцією $\frac{A}{\sqrt{U^2 + B^2}}$, де $A = \frac{S_1 + S_2}{2}$; $B = \frac{S_1 + S_2}{S_1 S_2}$, можна розв'язок шукати з інтегрального рівняння:

$$A \int_0^\infty q(r) K_0 \left[(\sigma - r) B\right] dr = \frac{c}{h} \delta(\sigma) \qquad \sigma \geq 0, \tag{16}$$

де $K_0(z)$ - циліндрична функція нульового порядку.

Інтегральне рівняння (16), ядро якого залежить від різниці аргументів, є рівнянням типу Вінера-Хопфа (4). Якщо ввести нову невідому функцію

$$\psi(\sigma) = \frac{h}{c} A \int_0^\infty q(r) K_0 \left|(\sigma - r) B\right| dr \qquad -\infty < \sigma < 0, \tag{17}$$

($\psi(\sigma)$ - осадка точок поверхні шару поза штампом) то, розв'язуючи рівняння (16) методом Вінера-Хопфа, знайдемо $q(\sigma)$ при $\sigma \geq 0$ і $\psi(\sigma)$ при $\sigma < 0$.

Розглянемо випадок плоского круглого в плані штампа радіуса R $\left| \delta(\sigma) = \delta_0 = const \right.$, $\left. \sigma = \frac{R - r}{h} \right|$. Тоді розв'язком (16) буде:

$$q(r) = c\delta_0 \frac{B}{A} \left| \frac{e^{-B\sigma}}{\sqrt{\pi B \sigma}} + erf \sqrt{B\sigma} \right|, \qquad \sigma \geq 0,$$

$$\psi(\sigma) = \delta_0 \left| 1 - erf\left(\sqrt{B\sigma}\right) \right|, \qquad \sigma < 0.$$

З умови рівноваги штампа знаходимо залежність між силою зовнішнього навантаження p, зміщенням штампа δ_0 і розміром області контакту R

$$p = \pi c \delta_0 \frac{B}{A} R^2 \left[\frac{\lambda}{B} \left(1 + \frac{\lambda}{2B} \right) e^{-\frac{B}{\lambda}} + \left(1 + \frac{\lambda}{B} + 2\frac{\lambda^2}{B^2} \right) \mathrm{erf} \sqrt{\frac{B}{\lambda}} \right]$$

На рис. І наведені графіки, які показують залежність тиску під плоским круглим в плані штампом від радіальної координати $\sigma = \frac{R - r}{h}$ для двох типів матеріалу: пісковика ($E = 5{,}35 \cdot 10^5$ кг/см²; $E_1 = 4{,}4 \cdot 10^5$ кг/см²; $\nu = 0{,}18$; $\nu_1 = 0{,}205$; $G = 2{,}28 \cdot 10^5$ кг/см²; $G_1 = 1{,}55 \cdot 10^5$ кг/см²) і берилію ($E = 28 \cdot 10^5$ кг/см²; $E_1 = 33{,}5 \cdot 10^5$ кг/см²; $\nu = 0{,}09$; $\nu_1 = 0{,}04$; $G = 16{,}25 \cdot 10^5$ кг/см²; $G = 16{,}25 \cdot 10^5$ кг/см². Розрахунки проведені для випадку $\lambda = 0{,}1$. Константи A і B мають вигляд:

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{ \frac{1}{1-\nu} \left[\frac{G}{G_1} - \frac{E}{E_1} \nu_1 \right] + \sqrt{\frac{2G(1-\nu_1\nu_2)}{E_1(1-\nu)}} } \qquad B = \sqrt{ \frac{\frac{E_1}{G_1} - 2\nu_1(1+\nu)}{1-\nu_1\nu_2} + 2\sqrt{\frac{E_1(1-\nu)}{2G(1-\nu_1\nu_2)}} }$$

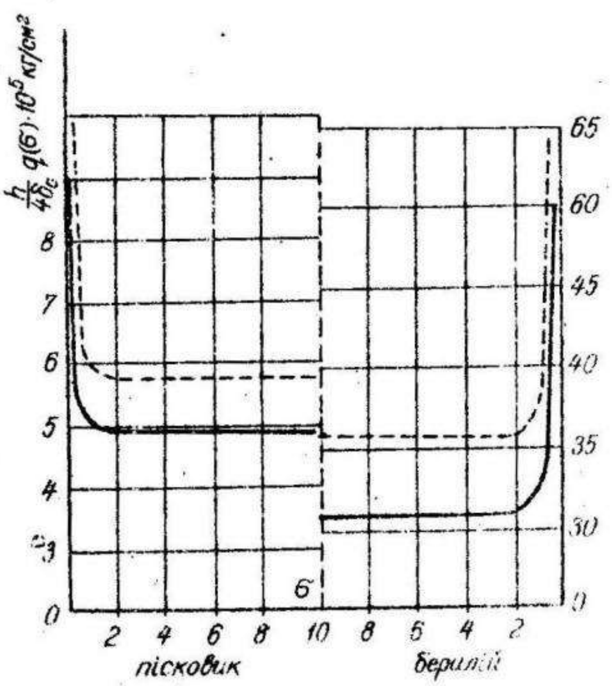


Рис. І.

На рис. І пунктирною лінією зображено залежність тиску під штампом для ізотропного шару / $E_1 = E$; $G_1 = G$; $\nu_1 = \nu$; $B = 2$; $A = 1$ /.

Наведемо формули для тиску між штампом і шаром у випадку плоского еліптичного в плані штампу з півосями a та b. На осях $x=0$ і $y=0$ маємо таку залежність тиску від відповідних координат:

$$q(x,0)=c\delta_0\frac{B}{R}\left\{\frac{e^{-B\left(\frac{a-x}{h}\right)}}{\sqrt{\pi B\frac{a-x}{h}}}+\operatorname{erf}\left[\sqrt{B\left(\frac{a-x}{h}\right)}\right]\right\},$$

$$q(0,y)=c\delta_0\frac{B}{R}\left\{\frac{e^{-B\left(\frac{b-y}{h}\right)}}{\sqrt{\pi B\frac{b-y}{h}}}+\operatorname{erf}\left[\sqrt{B\left(\frac{b-y}{h}\right)}\right]\right\}.$$

У випадку параболоїдного круглого в плані штампа, коли $\delta(r)=\delta_0-\omega\frac{r^2}{a^2}$ (a – радіус площадки контакту, $\omega=\frac{a^2}{2R}$, R – радіус кривини параболоїда в його вершині). Формула для тиску набирає вигляду

$$q(r)=c\omega\lambda\frac{1}{R}\left\{\left[\left(\frac{\lambda}{B}+2\right)\left(1+2\frac{a-r}{h}B\right)-\frac{\lambda}{2B}\left(4\frac{(a-r)^2B^2}{h^2}+4\frac{(a-r)B}{h}-1\right)\right]\times\operatorname{erf}\left(\sqrt{B\frac{a-r}{h}}\right)+\left[\left(\frac{\lambda}{B}+2\right)2\frac{a-r}{h}B-\lambda\frac{a-r}{h}\left(1+2\frac{a-r}{h}B\right)\frac{e^{-B\frac{a-r}{h}}}{\sqrt{\pi B\frac{a-r}{h}}}\right]\right\},$$

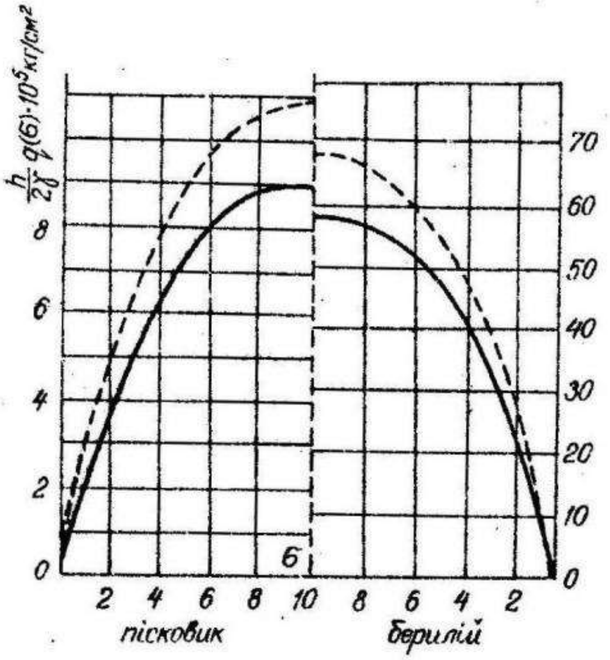


Рис. 2.

причому між вертикальним зміщенням штампу і розмірами області контакту має місце залежність

$$\delta_0=\omega\left[1+\frac{2\lambda}{B}-\frac{\lambda^2}{2B^2}\right].$$

На рис. 2 наведені графіки залежності для тиску під круглим в плані параболоїдним штампом від радіальної координати для тих же самих матеріалів. З графіків видно, що вплив розглянутої анізотропії на величину контактних напружень може бути значним.

Література

1. Александров В. М. К решению одного типа двухмерных интегральных уравнений. ПММ, т. 28, вып. 3, 1964.
2. Александров В. М. Асимптотическое решение контактной задачи для тонкого упругого слоя. ПММ, т. 33, вып. 1, 1969.
3. Лехницкий С. Г. Упругое равновесие трансверсально изотропного слоя и толстой плиты. ПММ, т. 26, вып. 4, 1962.
4. Нобл В. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., ИЛ, 1962.

З М І С Т

М А Т Е М А Т И К А

М Е Х А Н І К А

УДК 517.944:947

О решении эллиптических систем в областях со щелями. М а р т и н е н к о М а р і я. Про розв'язок еліптичних систем в областях зі щілинами. Вісник Львівського ун-ту, вип. 7, серія механіко-математична. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1972, стор. 3-9 (укр.).

Доказывается, что при определенных предположениях относительно решения эллиптической системы уравнений с частными производными второго порядка вариационного типа это решение может быть представлено в пространстве с разрезом вдоль незамкнутой поверхности типа Ляпунова в виде классического обобщенного потенциала простого или двойного слоя. Библ. 4.

УДК 519.21

Континуальная свертка. К в і т І. Д. Континуальна згортка. Вісник Львівського ун-ту, вип. 7, серія механіко-математична. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1972, стор. 10-18 (укр.).

Понятие континуальной свертки используется для вывода генеалогии распределений гамма и Бесселя из экспоненциального распределения. Библ. 3.

УДК 517.94

Об одной реализации метода Ньютона-Канторовича. Ш і п к а Й. Г. Про одну реалізацію методу Ньютона-Канторовича. Вісник Львівського ун-ту, вип. 7, серія механіко-математична. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1972, стор. 19-21 (укр.).

Выведены условия, при которых интегро-дифференциальное уравнение

$$u(x)-\lambda\int_a^b K\left[x,t,\ u(t),\ u'(t)\right]dt=0$$

разрешимо по методу Ньютона-Канторовича. Библ. 4.

УДК 517.94

Об исследовании граничных задач для одного квазилинейного уравнения. К о с т е н к о В. Г., Ш а р и й Т. О. Про дослідження граничних задач для одного квазілінійного рівняння. Вісник Львівського ун-ту, вип. 7, серія механіко-математична. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1972, стор.22-28 (укр.).

Исследованы различные граничные задачи для одного квазилинейного уравнения с параметром. Решения этих задач найдены в виде рядов по степеням достаточно малого параметра. Существование и единственность решений этих задач для произвольных неотрицательных значений параметра установлено при помощи принципа Лера-Шаудера. Библ. 3.

УДК 513.812

О штейнеровских построениях в пространстве Лобачевского. П и л и п о в и ч А. І. Про штейнерівські побудови в просторі Лобачевського. Вісник Львівського ун-ту, вип. 7, серія механіко-математична. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1972, стор. 28-35 (укр.).

Доказывается теорема о том, что всякую конструктивную задачу пространства Лобачевского, разрешимую комплексом инструментов П, С, О, Г (плоскограф, сферограф, орисферограф, гиперсферограф), можно решить одним плоскографом, если в конструктивном пространстве построены вспомогательная сфера и ее центр, а также пара параллельных прямых. Илл. 4. Библ. 3.

УДК 517.917

Условия неколеблемости уравнений 3-го и 4-го порядков. Б о б и к О. І., Б у г і р М. К. Умови неколивальності рівнянь 3-го і 4-го порядків. Вісник Львівського ун-ту, вип. 7, серія механіко-математична. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1972, стор. 35-41 (укр.).

Используя понятие эквивалентности двух уравнений, получены эффективные признаки неколеблемости уравнений 3-го и 4-го порядков. Библ. 5.

УДК 518:517.948

Об эффективности методов типа Ньютона. Б а р т і ш М. Я. Про ефективність методів типу Ньютона. Вісник Львівського ун-ту, вип. 7, серія механіко-математична. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1972, стор. 41-46 (укр.).

Рассматриваются методы типа Ньютона для решения систем нелинейных уравнений. Дано методику построения методов типа Ньютона и их разностных аналогов. Предложено алгоритм определения эффективной вычислительности схемы решения систем уравнений. Библ. 14.

УДК 517.9:621.3.032.26

Об одном методе расчета электростатического поля системы электродов с выделением особенностей на границе. Л ю д к е в и ч Й. В., Ф о м і ч о в І. О. Про один метод розрахунку електростатичного поля системи електродів з виділенням особливостей на границі. Вісник Львівського ун-ту, вип. 7, серія механіко-математична. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1972, стор. 47-52 (укр.).

Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в осесимметричном пространстве с помощью потенциала простого слоя сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма I-го рода, которое решается методом нелинейных параметров. Полученные формулы дают возможность определять потенциал поля для электродов нулевой толщины. Библ. 4

УДК 519.4:517:513:88

О радикале одного нормированного кольца. К и ш а к е в и ч Ю. Л., Л я н ц е В. Е. Про радикал одного нормованого кільця. Вісник Львівського ун-ту, вип. 7, серія механіко-математична. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1972, стор. 53-60 (укр.).

Дается описание максимальных идеалов и радикала кольца со свертыванием, построенным по обобщенному сдвигу, отвечающему несамосопряженному оператору Штурма-Лиувилля на полуоси. Оказывается, что спектральные особенности не влияют на радикал соответствующего кольца. Библ. 6.

УДК 517.94

Об условиях интегрирования в квадратурах некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка. К о с т е н к о К. С. Про умови інтегрування в квадратурах деяких звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку. Вісник Львівського ун-ту, вип. 7, серія механіко-математична. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1972, стор. 61-69 (укр.).

Найдены формулы представления общего решения обыкновенного линейного однородного уравнения 2-го порядка по заданному частному решению соответствующего линейного однородного уравнения 3-го порядка. В одном из частных случаев возникает известная формула Лиувилля. Найдены также некоторые условия интегрирования в квадратурах одного нелинейного уравнения 2-го порядка, тесно связанного с общим линейным однородным уравнением 3-го порядка. Библ. 3.

УДК 517.55

Об области сходимости ряда Дирихле от двух комплексных переменных. Ч у ж и к І. І. Про область збіжності ряду Діріхле від двох комплексних змінних. Вісник Львівського ун-ту, вип. 7, серія механіко-математична. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1972, стор. 69-72 (укр.).

Вводится понятие диаграммы Ньютона ряда Дирихле от двух комплексных переменных и асимптотического конуса этой диаграммы. Получено уравнение границы области сопряженных абсцисс сходимости кратного ряда Дирихле. Библ. 4.

УДК 518:512.39

Об одном итерационном методе для решения нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений. Щ е р б и н а Ю. М. Про один ітераційний метод для розв'язування нелінійних алгебраїчних і трансцендентних рівнянь. Вісник Львівського ун-ту, вип. 7, серія механіко-математична. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1972, стор. 72-76 (укр.).

Для решения нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений предлагается итерационный процесс, зависящий от параметра. Рассмотрена его модификация в случае, если этот параметр изменяется на каждом шаге по некоторому закону. Индекс эффективности предложенного метода равен $\sqrt{1+\sqrt{2}}$, т.е. выше, чем у метода Ньютона. Библ. 2.

УДК 518:512.36

Выделение полос, в которых полиномы и ряды Дирихле не превращаются в нуль. Ц е г е л и к Г. Г. Виділення смуг, в яких поліноми і ряди Діріхле не перетворюються в нуль. Вісник Львівського ун-ту, вип. 7, серія механіко-математична. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1972, стор. 76-79 (укр.).

Рассматриваются полиномы и ряды Дирихле функций одной комплексной переменной. С помощью параметров устанавливаются достаточные условия существования полос, не содержащих нулей полиномов и рядов Дирихле, определяются правая и левая границы нулей полиномов Дирихле, а также правая граница нулей рядов Дирихле. Библ. 1.

УДК 519.21

Изображение случайного вектора. К в і т І. Д. Зображення випадкового вектора. Вісник Львівського ун-ту, вип. 7, серія механіко-математична. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1972, стор. 79-85 (укр.).

Рассматриваются некоторые свойства преобразования Лапласа неотрицательнозначного случайного вектора. На основании свойства полной монотонности изображения и двумерного гама-распределения получено новую шестипараметрическую двумерную плотность, выражающуюся через гипергеометрическую функцию. Библ. 5.

УДК 517.94

Общее линейное дифференциальное уравнение в частных производных 2-го порядка на плоскости, инвариантное относительно одной заданной группы преобразований. К о с т е н к о В. Г., В е с е л о в с ь к а О. О. Загальне лінійне диференціальне рівняння в частинних похідних 2-го порядку на площині, інваріантне відносно однієї заданої групи перетворень. Вісник Львівського ун-ту, вип. 7, серія механіко-математична. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1972, стор. 86-90 (укр.).

Найдены все линейные дифференциальные уравнения в частных производных 2-го порядка на плоскости, каждое из которых допускает группу преобразований с эллиптической траекторией. Библ. 2.

УДК 513.015.4:513.734/.736

О некоторых свойствах сетей Тиссо. Д е н и с к о С. В. Про деякі властивості сіток Тіссо. Вісник Львівського ун-ту, вип. 7, серія механіко-математична. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1972, стор. 91-95 (укр.).

В трехмерном эвклидовом пространстве к каждой точке поверхности присоединен пространственный репер с постоянной метрикой, два вектора которого касаются поверхности. Поверхность преобразуется следующим образом: каждая ее точка смещается на вектор, координаты которого относительно присоединенного к этой точке репера для всех точек одни и те же. В статье изучаются сети Тиссо этого преобразования. Библ. 1.

УДК 517.512

Оценка остатка при приближении непериодических функций класса Липшица полиномами, построенными на основе полиномов, наилучших в заданной системе точек. Г у б а к о в Г. П., К о в а л ь ч у к Б. В. Оцінка залишку при наближенні неперіодичних функцій класу Ліпшиця поліномами, які побудовані на основі поліномів, найкращих у заданій системі точок. Вісник Львівського ун-ту, вип. 7, серія механіко-математична. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1972, стор. 95-97 (укр.).

Получены асимптотические оценки верхних граней уклонений функций класса $MH^{\alpha}(-1,1)$, $0<\alpha<1$ от полиномов, построенных на базе обыкновенных полиномов, наилучших в заданной системе точек. Библ. 5.

УДК 517.946

Единственность решения обратной задачи потенциала простого слоя. Л а в р е н ю к С. П. Єдиність розв'язку оберненої задачі потенціалу простого шару. Вісник Львівського ун-ту, вип. 7, серія механіко-математична. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1972, стор. 98-99 (укр.).

Получены некоторые условия единственности решения обратной задачи теории потенциала слоя в классе выпуклых кусочно-гладких поверхностей и в классе поверхностей Ляпунова. Библ. 3.

УДК 539.3

Растяжение пластинки с эллиптическим отверстием, край которого подкреплен упругим кольцом. Мартинович Т. Л., Кордуба Б.М. Розтяг пластинки з еліптичним отвором, край якого підкріплений пружним кільцем. Вісник Львівського ун-ту, вип. 7, серія механіко-математична. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1972, стор. 100-105 (укр.).

Исследовано упругое равновесие бесконечной изотропной пластинки с эллиптическим отверстием, край которого подкреплен упругим кольцом постоянного сечения. Напряженно-деформированное состояние подкрепляющего кольца описывается уравнениями теории тонких криволинейных стержней. Условия сопряжения пластинки со стержнем записываются на фактической поверхности их спая. На бесконечности пластинка растягивается параллельно осям эллипса. Подкрепляющий стержень не нагружен. Табл. 2. Библ. 3.

УДК 539.3

Две задачи кручения. Лихачов В. О. Дві задачі кручення. Вісник Львівського ун-ту, вип. 7, серія механіко-математична. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1972, стор. 106-111 (укр.).

Рассматриваются две задачи осесимметрического кручения цилиндрических тел. В первой задаче определяется напряженное состояние консольного стержня круглого поперечного сечения, находящегося под действием касательных усилий, приложенных к свободному торцу консоля.

Во второй задаче рассматривается напряженное состояние цилиндрического слоя, в круглое отверстие которого впаян полный цилиндр. Касательные усилия приложены к свободной боковой поверхности цилиндра. Рассмотрены числовые примеры. Находится область, где имеет место принцип Сен-Венана. Табл. 3. Бил. 2.

УДК 539,3

Краевые условия в интегральной форме задачи о напряженном состоянии в анизотропной пластинке с несимметрично подкрепленным краем. Мартинович Т. Л., Божидарник В. В. Крайові умови в інтегральній формі задачі про напружений стан в анізотропній пластинці з несиметрично підкріпленим краєм. Вісник Львівського ун-ту, вип. 7, серія механіко-математична. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1972, стор. 112-118 (укр.).

Предложен общий математический подход к решению задач об упругом равновесии анизотропных пластинок с несимметрично подкрепленным краем.

Получены краевые условия задачи в виде интегральных соотношений, содержащих произвольную функцию, голоморфную в рассматриваемой области. Напряженно-деформированное состояние подкрепляющего стержня (кольца) описывается уравнениями теории тонких криволинейных стержней. Сопряжение пластинки со стержнем осуществлено на фактической поверхности их спая. Библ. 8.

УДК 539.319

Экспериментальное исследование напряженного состояния пластинки-полосы, ослабленной выточкой. Думанський О. І. Експериментальне дослідження напруженого стану пластинки-смуги, послабленої виточкою. Вісник Львівського ун-ту, вип. 7, серія механіко-математична. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1972, стор. 118-122 (укр.).

Приведены результаты исследований концентрации напряжений, которые получены с помощью метода фотоупругости в пластинках-полосах, ослабленных эллиптическими и квадратными выточками.

Получена экспериментальная формула для определения коэффициента концентрации напряжений в круговой выточке в зависимости от ширины пластинки. Илл. 3. Библ. 3.

УДК 539.38

Некоторые контактные задачи для трансверсально изотропного слоя малой толщины. М о к р и к Р. І., Г р и л і ц ь к и й Д. В. Деякі контактні задачі для трансверсально ізотропного шару малої товщини. Вісник Львівського ун-ту, вип. 7, серія механіко-математична. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1972, стор. 122-128 (укр.).

Рассматривается задача о давлении гладкого штампа на трансверсально изотропный слой малой толщины, лежащий без трения на недеформированном основании. Задача решается с помощью применения асимптотического метода "малых λ" [1,2]. Приведены формулы контактных давлений в случае плоского круглого и эллиптического в плане штампов, а также для параболоидального круглого в плане штампа. Графиками проиллюстрировано влияние анизотропии песчаника и бериллия на величину контактных напряжений под плоским круглым и круглым параболоидальным штампами. Илл. 2. Библ. 4.

---о---

Вестник Львовского ордена Ленина
государственного университета
им. Ивана Франко

СЕРИЯ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

Выпуск 7
/На украинском языке/

Объем 8,75 печ. л., 6,6 уч.-изд. л. Тираж 600.
Цена 66 коп. Зак. 932
Издательство Львовского университета,
Львов, Университетская, I
Областная книжная типография Львовского областного
управления по печати,
Львов, Стефаника, II.

Редактор В.В. Войтович, Коректор Б.Й. Ілечко

БГ 07231. Підписано до друку 17.Ш. 1972 р. Формат 60x90 I/16.
Паперов. арк. 4,375. Друк. арк. 8,75. Обл.-вид. арк. 6,6.
Тираж 600. Ціна 66 коп. Зам. 932
Видавництво Львівського університету, Львів,
Університетська, I.
Обласна книжкова друкарня Львівського обласного
управління по пресі.
Львів, Стефаника, II.

66 коп.