ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 70

2009

ISSN 2078-3744

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 70

Львівський національний університет імені Івана Франка
2009

V I S N Y K OF THE LVIV UNIVERSITY

В І С Н И К ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Series Mechanics and Mathematics

Серія механіко-математична

Issue 70

Випуск 70

Scientific journal

Збірник наукових праць

Published 1-2 issues per year

Виходить 1-2 рази на рік

Published since 1965

Видається з 1965 року

Ivan Franko National University of Lviv

Львівський національний університет імені Івана Франка

2009

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. 2009.
Випуск 70. 208 с.

Visnyk of the Lviv University. Series Mechanics and Mathematics. 2009.
Issue 70. 208 p.

У Віснику публікуються праці з теорії крайових задач для диференціальних рівнянь, алгебри, топології, теорії функцій комплексного змінного, функціонального аналізу, теорії ймовірності та статистики, проблем математичного моделювання фізико-механічних процесів і механіки.

Visnyk contains articles on theory of boundary value problems for differential equations, algebra, topology, complex analysis, functional analysis, probability theory and statistics, problems of mathematical modelling of physical and mechanical processes and mechanics.

Адреса редакційної колегії:
Львівський національний університет
імені Івана Франка,
механіко-математичний факультет,
вул. Університетська, 1,
79602, Львів, Україна
тел. (0322) 74-11-07
ел. пошта: lnu.visn.mm@gmail.com
http://blues.franko.lviv.ua
/publish/visnyk.asp

Editorial office address:
Ivan Franko National University
of Lviv,
Mechanical and Mathematical department,
Universytets'ka Str. 1,
UA-79602, Lviv, Ukraine
tel. +(38) (0322) 74-11-07
e-mail: lnu.visn.mm@gmail.com
http://blues.franko.lviv.ua
/publish/visnyk_en.asp

Відповідальний за випуск *М. Зарічний*
Редактор *Н. Плиса*

Друкується за ухвалою Вченої Ради
Львівського національного університету імені Івана Франка

Свідоцтво про державну реєстрацію серія КВ № 14606-3577Р від 29 жовтня 2008 р.

ЗМІСТ

CONTENT

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2009.
Вип. 70. С. 5–13

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech. Math. 2009.
Is. 70. P. 5–13

УДК 519.2

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF JOINT DISTRIBUTION OF THE OVERSHOOT AND THE FIRST PASSAGE TIME OF MARKOV CHAIN FOR THE LEVEL

Soltan ALIEV, Vugar ABDURAKHMANOV

Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan
AZ1141, Baku, Azerbaijan, F. Agayev Str., 9,
e-mail: soltanaliyev@yahoo.com

In the paper we prove a theorem on asymptotic behavior of joint distribution of overshoot and the first passage time of a Markov chain homogeneous in time for the level and partially homogeneous in the space. Local limit theorem for the first passage time follows from this theorem as a corollary.

Key words: Markov chain, limit theorem.

1. Introduction. Let $X = \{X_n = X(u,n),\ n \geqslant 0\}$ be a homogeneous in time Markov chain with values on the real line $R = (-\infty, \infty)$, with the initial value $u \equiv \equiv X(u,0) = X_0$ and transition probability

$$P(u,B) = (X_1 \in B),$$

where $X_1 = X(u,1)$ and let $B \in \beta(R)$ be a σ-algebra of Borel sets in R.

Recently there appeared many papers ([1],[2],[3],[5]), where in some boundary value problems for random walks described by Markov's chain, are studied. In these papers, a linear first passage time of the form

$$\tau_c = \inf\{n \geqslant 0 : \quad X_n \geqslant c\},$$

is considered, here $c \geqslant 0$ and we assume that $\inf\{\oslash\} = \infty$.

The role and importance of the first passage moment τ_c in the theory of boundary problems for random walks and also in applied problems of probability theory and mathematical statistics are explained in the papers [1, 2, 5, 9, 10, 11].

In the present paper we prove a theorem on asymptotic behavior of joint distribution of overshoot $R_c = X_{\tau_c} - c$ and the first passage moment τ_c of the form (1) of the Markov chain X. A local limit theorem follows from this theorem as a corollary under which we understand any statement on the fact that under some conditions there exists a function $P(n,c)$ such that $P(\tau_c = n) = P(n,c)(1 + o(1))$ as $c \to \infty$ $(n = n(c) \to \infty)$.

In particular, there is revealed the effect that when partial homogeneity property is satisfied in the Markov chain the asymptotics of probability $P(\tau_c = n)$ coincides with the asymptotics of the same probability for a case of ordinary process of summation of independent identically distributed random variables with positive mean value and finite variance. The property of asymptotic independence of the overshoot R_c and the first passage time τ_c is also revealed for a partially homogeneous Markov chain in the space, that for ordinary random walk is proved in the papers [9,10].

Notice that asymptotic behavior of probability $P(\tau_c = n)$ in the case when the Markov chain is described by the sums of independent identically distributed random values, is studied in the papers [6,7,8].

2. Conditions and denotation. By $\zeta(u) = X_1 - u$ we denote the jumps of the chain X from the state u for a step whose distribution is defined by the equality

$$P(u + \zeta(u) \in B) = P(u, B), \quad B \in \beta(R).$$

As in [2] for the chain X we assume that this is N-partially homogeneous (or simply partially homogeneous) in the space, i.e. for some $N \geqslant 0$ the transient probability $P(u, dv)$ for $u > N$ and $v > N$ depends only on the difference $v - u$. This means that the chain X behaves for $u > N$ as ordinary process of summation of independent random variables ζ_1, ζ_2 distributed as some random variable ζ, whose distribution on the set $(N - u, \infty)$ coincides with the projection of distribution of the jump $\zeta(u) = X(u, 1) - u$ of the Markov chain X.

Notice that the chain $Y(k)$ defined by the recurrent relations

$$Y(k+1) = \max(0, Y(k) + \zeta_{k+1}),$$

is 0-partially homogeneous. As is known ([1, 2, 11]) such chains describe the work of a number of queening systems.

In sequel, we denote $S_n = \sum_{k=j}^{n} \zeta_k$. We assume that the random variable ζ has the mean value $\mu = E\zeta > 0$ and variance $\sigma^2 = D\zeta < \infty$.

Notice that the paper is a continuation and complementation of the paper [3], where integral limit theorems are studied for the first passage time τ_c of a wider class of the so called asymptotically homogeneous (in time and in space) with drift of Markov's chains, when $E\zeta_n(u) \to \mu \in R$ as $u, n \to \infty$ (here $\zeta_n(x)$ is a jump from the state u at time n).

Let $B_0 \supseteq B_1 \supseteq \ldots$ be some non-increasing sequence of sets in R. As in [4] we say that the chain X_n is asymptotically homogeneous in time and space (in the direction of the set B_n), if the distribution of the jump $\zeta_n(u)$ weakly converges to the distribution of some random variable ζ as $u \to \infty$ uniformly with respect to $u \in B_n$.

Denote the characteristic functions of the random variables $\zeta_n(u) - \mu$ and $\zeta - \mu$ by

$$\varphi_n(\lambda, u) = Ee^{i\lambda(\zeta_n(u) - \mu)}$$

and

$$\varphi_n(\lambda) = Ee^{i\lambda(\zeta - \mu)}, \quad \lambda \in R.$$

3. Formulation and proof of the main result.

Theorem 1. *Let a homogeneous in time Markov chain X with the initial value $u = X_0$ be partially homogeneous in the space $(0 \leqslant N < u < \infty)$, and let a random variable ζ have a non-lattice distribution with $\mu = E\zeta > 0$ and $0 < \sigma^2 = D\zeta < \infty$.*

If $n = n(c) = \dfrac{c}{\mu} + \theta(c)\sqrt{c/\mu}$, $\theta(c) \to \theta \in R$ as $c \to \infty$ then

$$P(\tau_c = n,\ R_c \leqslant x) \sim \frac{\mu\varphi\left(\dfrac{\theta}{\sigma}\mu\right)}{\sigma\sqrt{n}} H(x), \quad c \to \infty$$

uniformly with respect to x, $0 < \delta \leqslant x < \infty$ and θ from a bounded set in R, where

$$H(x) = \frac{1}{ES_{\tau_+}} \int_0^x P\left(S_{\tau_+} > y\right) dy$$

and $\tau_+ = \inf\{n \geqslant 1 \cdot S_n > 0\}$.

Corollary 1. *(Local limit theorem). Under the conditions of the theorem, we have*

$$P(\tau_c = n) \sim \frac{\mu\varphi\left(\theta\dfrac{\mu}{\sigma}\right)}{\sigma\sqrt{n}}, \quad c \to \infty$$

uniformly with respect to θ from a bounded set R.

Corollary 2. *Under the conditions of the theorem as $c \to \infty$ we have*

$$P(R_c \leqslant x\,|\tau_c = n|) \to H(x), \quad x > 0.$$

Corollary 2 shows that for a Markov chain partially homogeneous in the space of the quantities of the overshoot R_c and the first passage time τ_c are asymptotically independent ([9,10]).

We need the following facts formulated in the form of lemmas.

Lemma 1. *Let a Markov's chain be homogeneous in time and in space, and "limit jump" ζ have finite mean value $\mu = E\zeta > 0$ and variance $\sigma^2 = D\zeta$.*

Assume that the distribution of random variable ζ is non-lattice and the following conditions are satisfied:

1) The central limit theorem, i.e. $\frac{X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \Longrightarrow N(0,1)$ as $n \to \infty$ holds for the chain X.

2) For some non-increasing sequence $B_0 \supseteq B_1 \supseteq \ldots$ of sets in R it holds as $n \to \infty$

$$P(X_k \notin B_k \quad \text{for some} \quad k \geqslant n) = o\left(1/\sqrt{n}\right).$$

3) For any $a > 0$

$$\sup_{x \in B_n,\ \lambda \in [-a,a]} |\varphi_n(\lambda, x) - \varphi(\lambda)|\, o(1/n),\ n \to \infty.$$

Then for any $r > 0$

$$P(X_n \in (x, x+r)) = \frac{r}{\sigma\sqrt{2\pi n}} e^{-\dfrac{(x-n\mu)^2}{2\sigma^2 n}} + o\left(1/\sqrt{n}\right)$$

uniformly with respect to $x \in R$.

The statement of this lemma follows from the central local limit theorem for Markov's chain [4].

Lemma 2. *Let the conditions of Theorem 1 be satisfied. Then for any* $r > 0$

$$P\left(X_n \in (x, x+r)\right) = \frac{r}{\sigma\sqrt{2\pi n}} e^{-\dfrac{(x-n\mu)^2}{2\sigma^2 n}} + o\left(1/\sqrt{n}\right)$$

uniformly with respect to $x \in R$.

This lemma follows from Lemma 1, since in the conditions of Theorem 1 the conditions 1),2) and 3) of Lemma 1 (see also [4]) are satisfied.

By means of Lemma 2 we prove the following lemma that play an important role in the proof of the theorem.

Assume for $n \geqslant 1,\ y \in R$ and $k \geqslant 1$

$$Q_{n,k,h}\left(dx_{1,\dots,}dx_k \mid \quad y = P\left(\zeta_1 \in dx_1, .., \zeta_k \in dx_k\right)\right| \quad X_n \in (y, y+h)) .$$

This is a conditional distribution of random variables $\zeta_1 ..., \zeta_k$ distributed as a random variable $\zeta\left(\zeta\left(u\right)\right)$ given that $X_n \in (y, y+h)$.

Lemma 3. *Let the conditions of Theorem 1 be satisfied. Then*

1) for each k the conditional distribution $Q_{n,k,h}\left(dx_{1,\dots,}dx_k/y\right)$ weakly converges as $n \to \infty$ to an unconditional distribution of random variables $\zeta_1 ..., \zeta_k$ and their convergence is fulfilled uniformly with respect to y, $y - n\mu = O\left(\sqrt{n}\right)$ and h from a bounded set B in $(0, \infty)$, $0 < \inf B \leqslant \sup B < \infty$.

2) For any number $\delta \in (0,1)$ there exists a constant in $M = M(\delta)$ such that for all y, $y - n\mu = O\left(\sqrt{n}\right)$ and $h \in B$ it holds

$$Q_{n,k,h}\left(dx_{1,\dots,}dx_k/y\right) \leqslant MP\left(\zeta \in dx_{1,\dots,}\zeta_k \in dx_k\right).$$

Proof.

$$Q_{n,k,h}\left(dx_{1,\dots,}dx_k/y\right) = \frac{P\left(\zeta \in dx_{1,\dots,}\zeta_k \in dx_k,\ X_n \in (y, y+n)\right)}{P\left(X_n \in (y, y+n)\right)} =$$

$$= \frac{P\left(X_{n-k} \in \left(y - \sum\limits_{i=1}^{k} x_i, y - \sum\limits_{i=1}^{k} x_i + h\right) \mid \quad \zeta_1 \in dx_{1,\dots,}\zeta_k \in dx_k\right)}{P\left(X_n \in (y, y+h)\right)} \times \tag{1}$$

$$\times P\left(\zeta_1 \in dx_{1,\dots,}\zeta_k \in dx_k\right) = \frac{P\left(X_{n-k} \in \left(y - \sum\limits_{i=1}^{k} x_i, y - \sum\limits_{i=1}^{k} x_i + h\right)\right)}{P\left(X_n \in (y, y+h)\right)} \times$$

$$\times P\left(\zeta_1 \in dx_1, \dots, \zeta_k \in dx_k\right)$$

Lemma 2 yields

$$P\left(X_n \in (y, y+h)\right) \sim \frac{h}{\sigma\sqrt{n}} \varphi\varphi\left(\frac{y-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \tag{2}$$

uniformly with the respect to y, $y - n\mu = O\left(\sqrt{n}\right)$ where $\varphi(x)$ is the density of normal distribution with parameters (0,1).

By relation (2) it is easy to show that for the fixed k and $x \in R$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P\left(X_{n-k} \in (y-x, y-x+h)\right)}{P\left(X_n \in (y, y+h)\right)} = 1 \tag{3}$$

uniformly with respect to y, $y - n\mu = O\left(\sqrt{n}\right)$ and h from a bounded set in $(0, \infty)$.

Statement 1) of Lemma 3 follows from (1),(2) and (3).

In order to prove statement 2) of the lemma it suffices to show that as $n \to \infty$

$$\sup_{1\leqslant k\leqslant n(1-\delta)} \frac{P\left(X_{n-k} \in (y-x, y-x+h)\right)}{P\left(X_n \in (y, y+h)\right)} = O\left(1\right) \tag{4}$$

for the fixed x and y, $y - n\mu = O\left(\sqrt{n}\right)$ and h from a bounded set $B \subset (0, \infty)$.

Indeed, relation (4) follows from (2) and the following estimations

$$\sup_{h\in B,\ y:|y-n\mu|\leqslant c\sqrt{n}} \sqrt{n} P\left(X_n \in (y, y+h)\right) < \infty,$$

$$\inf_{h\in B,\ y:|y-n\mu|\leqslant c\sqrt{n}} \sqrt{n} P\left(X_n \in (y, y+h)\right) > 0$$

and

$$\sup_{1\leqslant k\leqslant n(1-\delta)} \sqrt{\frac{n}{n-k}} \leqslant \sqrt{1/\delta}.$$

We need the following lemma.

Lemma 4. *Let all the conditions of the theorem be satisfied. Then for any $\varepsilon > 0$ there exists an integer q_1 such that for sufficiently large c and for all r, h and x from a bounded set in R it holds*

$$I\left(c\right) = P\left(X_n - X_{n-i} \leqslant r, \quad \exists i \in (q_1, n] \quad | \quad X_n \in c + \Delta\,\right) < \varepsilon,$$

where $\Delta = (x, x+h)$.

Proof. We have $I\left(c\right) = I_1\left(c\right) + I_2\left(c\right)$ where

$$I_1\left(c\right) = P\left(X_n - X_{n-i} \leqslant r, \quad \exists i \in (q_1, n] \quad | \quad X_n \in c + \Delta\,\right) < \varepsilon$$

and

$$I_2\left(c\right) = P\left(X_n - X_{n-i} \leqslant r, \quad \exists i \in (n\delta, n) \quad | \quad X_n \in c + \Delta\,\right)$$

At first we estimate $I_2\left(c\right)$. Assuming $n - i = j$ we have

$$I_2\left(c\right) = P\left(X_j - X_n - r, \quad \exists i \in \ [1\left(1-\delta\right)n)\,/X_n \in c + \Delta\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(X_j \geqslant c - x - r, \quad \exists j \in \ [1\left(1-\delta\right)n)\,/X_n \in c + \Delta\right).$$

Hence for $0 < \delta < 1/2$ and $a = c - x - r$ from statement 2 of Lemma 1 we get

$$I_2\left(c\right) \leqslant MP\left(\tau_a \leqslant \left(1-\delta\right)n\right). \tag{5}$$

Further by the strong law of large numbers, for the process τ_c [3] we have

$$\frac{\tau_c}{c} \overset{n-1}{\to} \frac{1}{\mu}.$$

Therefore

$$P\left(\tau_a \leqslant \left(1-\delta\right)n\right) \to 0 \quad \text{as} \quad c \to \infty,$$

since

$$n = n(c) \sim \frac{c}{\mu}.$$

Consequently, it follows from (5) that for sufficiently large c

$$I_2(c) < \frac{c}{2}.$$

Now, let us estimate $I_1(c)$. Notice that it follows from the partial homogeneity property of the chain X_n that in the domain $u > N$ the difference $X_n - X_{n-i}$ is distributed as the sum $S_i = \sum\limits_{i=1}^{i} \zeta_i$ of the steps of the Morkov chain X for i steps. Therefore, from statement 2 of Lemma 3 we have

$$I_1(c) = P(S_i \leqslant r, \quad \exists i \in [q_1, n\delta) / X_n \in c + \Delta) \leqslant MP(S_i \leqslant r, \ \exists i \geqslant q_1). \qquad (6)$$

The strong law of large numbers for the Markov chain [4] holds in the conditions of theorem 1. Therefore, it follows from (6) that $I_1(c) < \varepsilon/2$ is fulfilled for sufficiently large q_1 and c.

Thus, the statement of Lemma 3 is proved.

Proof of the theorem 1. Divide the interval $(0, r]$ into m equal parts and let

$$\Delta_k = \left(\frac{k-1}{m} r, \ \frac{k}{m}\right], \quad k = \overline{1, m}.$$

By the total probability formula we have

$$P(\tau_c = n, \quad R_c \leqslant r) = \sum_{k=1}^{m} P(\tau_c = n / X_n \in c + \Delta_k) P(X_n \in c + \Delta_k). \qquad (7)$$

Considering $\{\tau_c > n\} \subset \{X_n \leqslant c\}$ for sufficiently large c we have

$$\begin{gathered} P(\tau_c = n | \quad X_n \in c + \Delta_k) = P(\tau_c \geqslant n | \quad X_n \in c + \Delta_k) = \\ = P(X_i \leqslant c, \quad 1 \leqslant i < n | \quad X_n \in c + \Delta_k) = \\ = P(X_n - X_i \geqslant X_n - c, \quad 1 \leqslant i < n | \quad X_n \in c + \Delta_k) = \\ = P(X_n - X_i \geqslant X_n - c, \quad 1 \leqslant i < n | \quad X_n \in c + \Delta_k) = \\ = P(S_i \geqslant X_n - c, \quad 1 \leqslant i < n | \quad X_n \in c + \Delta_k). \end{gathered}$$

Hence it is easy to see that

$$P\left(S_i \geqslant \frac{k}{m} r, \quad 1 \leqslant i < n | X_n \in c + \Delta_k\right) \leqslant$$

$$\leqslant P(\tau_c = n | \quad X_n \in c + \Delta_k) \leqslant P\left(S_i \geqslant \frac{k-1}{m} r, \quad 1 \leqslant i < n | \quad X_n \in c + \Delta_k\right). \qquad (8)$$

From (8) and equality (7) we get

$$\sum_{k=1}^{m} P\left(S_i \geqslant \frac{k}{m} r, \quad 1 \leqslant i < n | \quad X_n \in c + \Delta_k\right) P(X_n \in c + \Delta_k) \leqslant$$

$$\leqslant P(\tau_c = n, \quad R_c \leqslant r) \leqslant \sum_{k=1}^{m} P(X_n \in c + \Delta_k) \times \qquad (9)$$

$$\times P\left(S_i \geqslant \frac{k-1}{m}r, \quad 1 \leqslant i < n \,|\quad X_n \in c+\Delta_k\right).$$

Further, it follows from statement 1 of Lemma 2 that for k and fixed $p \geqslant 1$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(S_i \geqslant x, \quad 1 \leqslant i \leqslant p \,|\quad X_n \in c+\Delta_k\right) = P\left(S_i \geqslant x, \quad 1 \leqslant i \leqslant p\right). \tag{10}$$

Since $E\zeta_1 = \mu > 0$, it follows from the strong law of large numbers that for any $\varepsilon > 0$ there exists a sufficiently large integer q_2

$$P\left(S_i \leqslant x, \quad \exists i > q_2\right) < \varepsilon \tag{11}$$

The following bilateral inequalities follow from Lemma 4 and estimation (11) for $q = \max(q_1, q_2)$:

$$P\left(S_i \geqslant x, 1 \leqslant i \leqslant q \,|X_n \in c+\Delta_k\right) - \varepsilon \leqslant P\left(S_i \geqslant x, 1 \leqslant i \leqslant n \,|X_n \in c+\Delta_k\right) \leqslant \tag{12}$$
$$\leqslant P\left(S_i \geqslant x, 1 \leqslant i \leqslant q \,|X_n \in c+\Delta_k\right)$$

and

$$P\left(S_i \geqslant x, 1 \leqslant i \leqslant q\right) - \varepsilon \leqslant P\left(S_i \geqslant x,\ i \geqslant 1\right) \leqslant P\left(S_i \geqslant x,\ 1 \leqslant i \leqslant q\right) \tag{13}$$

It follows from (10),(12) and (13) for $q = p$ that

$$P\left(S_i \geqslant x,\ i \geqslant 1\right) - 2\varepsilon \leqslant P\left(S_i \geqslant x, 1 \leqslant i < n \,|X_n \in c+\Delta_k\right) \leqslant$$
$$\leqslant P\left(S_i \geqslant x,\ i \geqslant 1\right) + 2\varepsilon.$$

From (9) and the last inequality we have

$$\sum_{k=1}^{m}\left(P\left(S_i \geqslant \frac{k}{m}x,\ i \geqslant 1\right) - 2\varepsilon\right) P\left(X_n \in c+\Delta_k\right) \leqslant$$

$$\leqslant P\left(\tau_c = n, R_c \leqslant x\right) \sum_{k=1}^{m}\left(P\left(S_i \geqslant \frac{k-1}{m}x,\ i \geqslant 1\right) + 2\varepsilon\right) P\left(X_n \in c+\Delta_k\right). \tag{14}$$

By lemma 1,

$$P\left(X_n \in c+\Delta_k\right) \sim \frac{\frac{x}{m}}{\sigma\sqrt{n}}\varphi\left(\frac{c-n\mu}{\sigma\sqrt{u}}\right) \tag{15}$$

as $c \to \infty$.

In view of $n = \dfrac{c}{\mu} + \theta(c)\sqrt{c/\mu},\ \theta(c) \to \theta \in R$ as $c \to \infty$, from (15) we find

$$P\left(X_n \in c+\Delta_k\right) \sim \frac{x/m}{\sigma\sqrt{n}}\varphi\left(\frac{\theta\mu}{\sigma}\right) \text{ as } c \to \infty. \tag{16}$$

Substituting (16) into (14) for sufficiently large c we have

$$\varphi\left(\frac{\mu}{\sigma}\theta\right)(1-\varepsilon)\sum_{k=1}^{m}\frac{x}{m}P\left(T \geqslant \frac{k}{m}x\right) - 2\varepsilon,$$

$$\sigma\sqrt{n}P\left(\tau_c = n, R_c \leqslant x\right) \leqslant \varphi\left(\frac{\mu}{\sigma}\theta\right)(1+\varepsilon)\sum_{k=1}^{m}P\left(T \geqslant \frac{k-1}{m}x\right) + 2\varepsilon,$$

where $T = \inf\limits_{i>1} S_i$.

As $m \to \infty$ and $\varepsilon \to \infty$ the left and right hand sides of the last inequality tend to the limit $\varphi\left(\dfrac{\theta\mu}{\sigma}\right)\int\limits_0^x P\left(T \geqslant y\right)dy$.

Thus

$$P\left(\tau_c = n, \quad R_c \leqslant x\right) \sim \frac{\varphi\left(\dfrac{\theta\mu}{\sigma}\right)}{\sigma\sqrt{n}}\int\limits_0^x P\left(T \geqslant y\right)dy.$$

In order to get the affirmation of the proved theorem from the last relation it sufficies to note the following equality whose proof is in the paper [9]:

$$P\left(T \geqslant y\right) = \frac{\mu}{E\left(S_{\tau_+}\right)}P\left(S_{\tau+} \geqslant y\right),$$

where $\tau_+ = \inf\left\{i \geqslant 1; S_i > 0\right\}$ is the first stair moment for the sum $S_i = \sum\limits_{j=1}^{i}\zeta_j$.

Notice that Corollary 1 directly follows from the statement of the theorem as $x \to \infty$ and Corollary 2 follows from the theorem and Corollary 1.

Remark. Statement of the theorem and its corollaries for an ordinary random walk are contained in the papers [9,10]. Notice that the studying of the boundary value problems for Markov's partially homogeneous chain in many respects can be realized by means of the results of the theory of summation of independent random variables ([2,9,10,12]).

1. *Borovkov A.A.* Asymptotics of probality of crossing of boundary by of trajectory Markov chain. Regular tails of jumps / *Borovkov A.A.* // Theory Probab. Appl. – 2002. – Vol.47, Issue 4. – P. 625-653 (in Russian).
2. *Borovkov A.A.* Asymptotics of probality of passage of boundary by trajectory of Markov chain. Exponentially decreasing tails of jumps / *Borovkov A.A.* // Theory Probab. Appl. – 2003. – Vol.48, №2. – P. 254-273 (in Russian).
3. *Rahimov F.H.* On limit behavior of linear first passage time of the Markov chain / *Rahimov F.H., Abdurakhmanov V.A.* // Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan – 2007. – Vol. XXVII. – P. 69-74.
4. *Korshunov D.A.* Limit theorems for Markov's general chains / *Korshunov D.A.* // Sib. Mat. Zh. – 2001. – Vol. 42, №2. – P. 354-371 (in Russian).
5. *Melfi V.F.* Nonlinear Markov renewal theory with statistical applications / *Melfi V.F.* // Ann. Probab. – 1992. – Vol. 20, №2. – P. 753-771.
6. *Rahimov F.H.* Local limit theorem for the first passage time of random walk / *Rahimov F.H.* // Izv. Azerb. SSR, Ser. fiz-techn-i matem. Nauk. – 1984. №3. – P. 3-7 (in Russian).
7. *Rahimov F.H.* On asymptotic behavior of local probabilities of passage of nonlinear boundaries by perturbated random walk / *Rahimov F.H.* // Dokl. NANA. – 2005. – №4. – P. 10-19 (in Russian).
8. *Eppel M.S.* Local limit theorem for the first moment overshoot / *Eppel M.S.* // Sib. Mat. Zh. – 1979. – Vol. XX. – P. 181-191 (in Russian).
9. *Woodroofe. M.* Nonlinear renewal theory in sequential analysis / *Woodroofe. M.* // – SIAM, 1982.
10. *Siegmund D.* Sequential analysis. Tests and confidence intervals / *Siegmund D.* // New York. etc. Springer-Verlag, 1985.

11. *Kalashnikov V.V.* Quality analysis of behavior of complicated systems by test functions method / *Kalashnikov V.V.* – M., 1978 (in Russian).
12. *Meyn S.P.* Markov Chain and stochastic stability / *Meyn S.P., Tweedle R.L.* – Springer, New York, 1993.

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА СУМІСНОГО РОЗПОДІЛУ ПЕРЕСКОКУ І МОМЕНТУ ПЕРШОГО ВИХОДУ ЗА РІВЕНЬ ЛАНЦЮГА МАРКОВА

Султан АЛІЄВ, Вугар АБДУРАХМАНОВ

Інститут математики і механіки НАН Азербайджану,
AZ1141, Баку, Азербайджан, вул. Ф. Агаева, 9,
e-mail: soltanaliyev@yahoo.com

Доведено теорему про асимптотичну поведінку сумісного розподілу перескоку і моменту першого виходу за рівень ланцюга Маркова. Як наслідок отримується локальна гранична теорема для моменту першого виходу за рівень ланцюга Маркова.

Ключові слова: ланцюг Маркова, гранична теорема.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СОВМЕСТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕСКОКА И МОМЕНТА ПЕРВОГО ВЫХОДА ЗА УРОВЕНЬ ЦЕПИ МАРКОВА

Султан АЛИЕВ, Вугар АБДУРАХМАНОВ

Институт математики и механики НАН Азербайджана,
AZ1141, Баку, Азербайджан, вул. Ф. Агаева, 9,
e-mail: soltanaliyev@yahoo.com

Доказана теорема о асимптотическом поведении совместного распределения перескока и момента первого выхода за уровень цепи Маркова. Как сладствие получена локальная предельная теорема для момента первого выхода за уровень цепи Маркова.

Ключевые слова: цепь Маркова, предельная теорема.

Стаття надійшла до редколегії 29.05.2009

Прийнята до друку 12.06.2009

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2009. *Ser. Mech. Math. 2009.*
Вип. 70. С. 14–37 *Is. 70. P. 14–37*

УДК 517.956

ГЛАДКА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ КВАЗІЛІНІЙНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ ЗАДАЧІ З ВІЛЬНИМИ МЕЖАМИ

Руслан АНДРУСЯК, Наталя БУРДЕЙНА, Володимир КИРИЛИЧ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: kyrylych@franko.lviv.ua

Розглянуто мішану задачу з невідомими межами для одновимірної гіперболічної системи квазілінійних рівнянь першого порядку з нелінійними умовами на поведінку меж області та нелокальними крайовими умовами. За допомогою методу характеристик та теореми Банаха про нерухому точку знайдено достатні умови класичної розв'язності задачі для малих значень часової змінної.

Ключові слова: гіперболічна задача з вільними межами, квазілінійні рівняння, класичний розв'язок, метод характеристик, теорема Банаха.

1. Вступ. Задачі з невідомими межами (задачі Стефана) для параболічних та еліптичних рівнянь описують багато різноманітних проблем фізики, механіки та природознавства [1]. Напевно, першими публікаціями з цієї проблематики для гіперболічних рівнянь і систем були праці [2]-[4], в яких описано математичні моделі газової динаміки, аеропружності, теплопровідності (швидкість поширення тепла скінченна).

При дослідженні гіперболічних задач з невідомими (вільними) межами в цій праці використано методику запропоновану в [5]-[6]. Варто зауважити, що такі задачі найчастіше розглядали для лінійних і напівлінійних гіперболічних рівнянь. Проте, наприклад, задача про визначення невідомої лінії розриву гідродинамічних параметрів потоку рідини або газу є однією з основних проблем гідро-газової динаміки та аеропружності. Саме її математичне формулювання зводиться до вивчення мішаної задачі для квазілінійної системи гіперболічного типу в області з однією або декількома вільними межами. Таким задачам присвячені праці [7]-[10], в яких було знайдено існування та єдиність локального і глобального узагальнених розв'язків для різних типів областей та крайових умов. Класичну розв'язність гіперболічних задач Стефана розглядали досить рідко, зокрема, в монографії [11] досліджено подібну задачу для спеціального виду гіперболічної системи першого порядку в кутовій області.

У цій праці знайдено достатні умови існування та єдиності локального класичного розв'язку мішаної задачі для одновимірної гіперболічної системи квазілінійних рівнянь першого порядку з невідомими межами та нелокальними крайовими умовами.

2. Формулювання задачі. В області $G_T^a = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : a_1(t) < x < a_2(t), 0 < t < T\}$, де функції $a_k, k = 1,2$ – наперед невідомі, розглянемо систему квазілінійних рівнянь з частинними похідними

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t,u)\frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(x,t,u), \quad i = \overline{1,n}, \tag{1}$$

$$u(x,t) = (u_1(x,t),...,u_n(x,t)),$$

а поведінку меж області задамо системою диференціальних рівнянь

$$\frac{da_k}{dt} = h_k(t,a,u(a,t)), \quad k = 1,2, \quad a(t) = (a_1(t),a_2(t)), \tag{2}$$

$$u(a,t) = (u(a_1,t),u(a_2,t)).$$

Нехай невідомі функції задовольняють початкові умови

$$a(0) = a^0, \quad a^0 = (a_1^0, a_2^0), \quad a_1^0 < a_2^0, \tag{3}$$

$$u(x,0) = g(x), \quad a_1^0 \leqslant x \leqslant a_2^0, \quad g(x) = (g_1(x),...,g_n(x)) \tag{4}$$

і, визначивши множини

$$I_1 = \{i : \ \lambda_i(a_1^0, 0, g(a_1^0)) > h_1(0, a^0, g(a^0))\},$$

$$I_2 = \{i : \ \lambda_i(a_2^0, 0, g(a_2^0)) < h_2(0, a^0, g(a^0))\},$$

крайові умови запишемо у вигляді

$$u_i(a_k(t),t) = \mu_k^i(t,a(t),\{u_s(a_{k'}(t),t)\}_{\substack{s\notin I_{k'}\\ k'=1,2}}), \qquad i \in I_k, \quad k = 1,2, \ 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{5}$$

Вважаємо, що функції $\lambda_i, f_i : \mathbb{R} \times [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h_k : [0,T] \times \mathbb{R}^{2+2n} \to \mathbb{R}$, $\mu_k^i : [0,T] \times \mathbb{R}^{2+2n-cardI_1-cardI_2} \to \mathbb{R}$, $g_i : [a_1^0, a_2^0] \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$, $k = 1,2$ – задані.

3. Локальна розв'язність задачі. Введемо позначення

$$B_R^n = \{u \in \mathbb{R}^n : |u_i| \leqslant R, \quad i = \overline{1,n}, \}, \quad G = \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant n,\\ x\in[a_1^0,a_2^0]}} |g_i(x)|,$$

$$h_k(0,a^0,g(a^0)) = \mathcal{H}_k, \quad r_k = cardI_k, \quad k = 1,2, \quad \{\omega_{k's}\} = \{\omega_{k's} : \ s \notin I_{k'}, \ k' = 1,2\},$$

$$\Omega_T = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : \ a_1^0 + (\mathcal{H}_1 - 1)t \leqslant x \leqslant a_2^0 + (\mathcal{H}_2 + 1)t, \ 0 \leqslant t \leqslant T, \},$$

$$V_T = \Big\{(t,y) \in \mathbb{R}^3 : \ a_1^0 + (\mathcal{H}_1 - 1)t \leqslant y_1 \leqslant a_1^0 + (\mathcal{H}_1 + 1)t,$$

$$a_2^0 + (\mathcal{H}_2 - 1)t \leqslant y_2 \leqslant a_2^0 + (\mathcal{H}_2 + 1)t, \ 0 \leqslant t \leqslant T\Big\},$$

а також клас функцій $\left(C_L^1(\overline{G_T^a})\right)^n = \left\{u \in (\mathbb{C}^1(\overline{G_T^a}))^n : \quad u_x \in (Lip(\overline{G_T^a}))^n\right\}.$

Означення 1. *Класичним розв'язком задачі (1)-(5) на часовому проміжку* $[0,T_0]$ *називатимемо набір функцій* $(u(x,t),a(t)) \in \Big(C^1_L(\overline{G^a_{T_0}})\Big)^n \times (\mathbb{C}^1([0,T_0]))^2$, $T_0 \leqslant T$, *що задовольняють системи рівнянь (1)-(2),початкові умови (3)-(4) і граничні умови (5). Якщо* $T_0 < T$, *то такий розв'язок назвемо локальним.*

Головним результатом праці є така теорема.

Теорема 1. *Нехай*
1) $\lambda_i(x,t,u),\ f_i(x,t,u) \in \mathbb{C}^{1,0,1}(\Omega_T \times B^n_{G+1}) \cap Lip(\Omega_T \times B^n_{G+1})$,
$\Big\{(\lambda_i)'_x, (\lambda_i)'_{u_j}, (f_i)'_x, (f_i)'_{u_j}\Big\} \subset Lip_{x,u}(\Omega_T \times B^n_{G+1}), i,j = \overline{1,n}$;
2) $g_i(x) \in \mathbb{C}^1([a^0_1,a^0_2])$, $g'_i(x) \in Lip([a^0_1,a^0_2])$, $i = \overline{1,n}$;
3) $h_k(t,y,w) \in Lip(V_T \times B^{2n}_{G+1})$, $k=1,2$;
4) $\mu^i_k(t,y,\{w^{k'}_s\}) \in \mathbb{C}^1\Big(V_T \times B^{2n-r_1-r_2}_{G+1}\Big)$, $\Big\{\mu^i_k, (\mu^i_k)'_t, (\mu^i_k)'_y, (\mu^i_k)'_{w^{k'}_s}\Big\} \subset$
$\subset Lip\Big(V_T \times B^{2n-r_1-r_2}_{G+1}\Big)$, $i \in I_k$, $k=1,2$, $s \notin I_{k'}$, $k'=1,2$;
5) виконуються умови погодження нульового та першого порядків

$$g_i(a^0_k) = \mu^i_k(0,a^0,\{g_s(a^0_{k'})\}), \quad i \in I_k, \quad k=1,2,$$

$$(\mu^i_k)'_t(0,a^0,\{g_s(a^0_{k'})\}) + \sum_{m=1}^{2} (\mu^i_k)'_{a_m}(0,a^0,\{g_s(a^0_{k'})\})\mathcal{H}_m +$$

$$+ \sum_{\substack{k'=1,2\\ s\notin I_{k'}}} (\mu^i_k)'_{w^{k'}_s}(0,a^0,\{g_s(a^0_{k'})\})[(\mathcal{H}_{k'} - \lambda_s(a^0_{k'},0,g(a^0_{k'})))g'_s(a^0_{k'}) + f_s(a^0_{k'},0,g(a^0_{k'}))] =$$

$$= f_i(a^0_k,0,g(a^0_k)) + (\mathcal{H}_k - \lambda_i(a^0_k,0,g(a^0_k)))g'_i(a^0_k), \quad i \in I_k, \quad k=1,2;$$

6) виконується умова

$$\lambda_i(a^0_k,0,g(a^0_k)) \neq \mathcal{H}_k, \quad k=1,2, \quad i=\overline{1,n}.$$

Тоді для деякого $T_0 \leqslant T$ *існує єдиний класичний розв'язок задачі (1)-(5) на часовому проміжку* $[0,T_0]$.

Доведення. Введемо позначення:

$$\Lambda = \max_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ (x,t,u)\in\Omega_T\times B^n_{G+1}}} \Big\{|\lambda_i(x,t,u)|, |(\lambda_i)'_x(x,t,u)|, |(\lambda_i)'_{u_j}(x,t,u)|\Big\};$$

$$F = \max_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ (x,t,u)\in\Omega_T\times B^n_{G+1}}} \Big\{|f_i(x,t,u)|, |(f_i)'_x(x,t,u)|, |(f_i)'_{u_j}(x,t,u)|\Big\};$$

$$H = \max_{\substack{k=1,2\\ (t,y,w)\in V_T\times B^{2n}_{G+1}}} |h_k(t,y,w)|,\ G_1 = \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ x\in[a^0_1,a^0_2]}} |g'_i(x)|,\ \gamma = \min_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ k=1,2}} |\lambda_i(a^0_k,0,g(a^0_k)) - \mathcal{H}_k|;$$

$$M = \max_{\substack{k=1,2, i\in I_k, k'=1,2, s\notin I_{k'},\\ (t,y,\{w^{k'}_s\})\in V_T\times B^{2n-r_1-r_2}_{G+1}}} \Big\{|\mu^i_k(t,y,\{w^{k'}_s\})|, |(\mu^i_k)'_t(t,y,\{w^{k'}_s\})|,$$

$$|(\mu^i_k)'_y(t,y,\{w^{k'}_s\})|, |(\mu^i_k)'_{w^{k'}_s}(t,y,\{w^{k'}_s\})|\Big\}, \quad \mathcal{H} = \max\{\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2\}.$$

Нехай λ_0 – стала Ліпшиця для функцій $\lambda_i(x,t,u)$, $(\lambda_i)'_x(x,t,u)$, $(\lambda_i)'_{u_j}(x,t,u)$, $i,j = \overline{1,n}$ на множині $\Omega_T \times B^n_{G+1}$; f_0 – для $f_i(x,t,u)$, $(f_i)'_x(x,t,u)$, $(f_i)'_{u_j}(x,t,u)$, $i,j = \overline{1,n}$ на $\Omega_T \times B^n_{G+1}$; h_0 – для $h_k(t,y,\omega)$, $k = 1,2$ на $V_T \times B^{2n}_{G+1}$; μ_0 – для $\mu^i_k(t,y,\{w^{k'}_s\})$, $(\mu^i_k)'_t(t,y,\{w^{k'}_s\})$, $(\mu^i_k)'_y(t,y,\{w^{k'}_s\})$, $(\mu^i_k)'_{w^{k'}_s}(t,y,\{w^{k'}_s\})$, $s \notin I_{k'}, k' = 1,2$, $i \in I_k, k = 1,2$ на $V_T \times B^{2n-r_1-r_2}_{G+1}$; g_0 – для $g_i(x), g'_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ на $[a^0_1, a^0_2]$.

Введемо метричний простір $Q = Q(T_0, U, U_1, L, L_1)$, що складається з функцій (u,a), де $u = (u_1,...,u_n), a = (a_1,a_2)$, $u_i \in \mathbb{C}^1(\overline{G^a_{T_0}}), a_k \in \mathbb{C}([0,T_0])$, які задовольняють умови (3)-(4) і такі обмеження:

H1. $(a_k(t) - \mathcal{H}_k t) \in Lip([0,T_0],1), \quad k = 1,2;$

H2. $|u_i(x,t) - \bar g_i(x)| \leqslant U, \quad i = \overline{1,n}, \quad (x,t) \in G^a_{T_0}$, де $U \leqslant \dfrac{1}{2}$, а $\bar g_i(x)$ набуває значення $g_i(a^0_1)$, якщо $x < a^0_1$, $g_i(x)$, якщо $a^0_1 \leqslant x \leqslant a^0_2$ і $g_i(a^0_2)$, якщо $x > a^0_2$;

H3. $u_i \in Lip(G^a_{T_0}, L), \quad i = \overline{1,n};$

H4. $|(u_i)'_x(x,t)| \leqslant U_1, \quad i = \overline{1,n}, \quad (x,t) \in G^a_{T_0};$

H5. $(u_i)'_x \in Lip(G^a_{T_0}, L_1), \quad i = \overline{1,n}.$

Нехай $\{(u^1,a^1),(u^2,a^2)\} \subset Q$, тоді метрику на елементах простору Q визначимо як

$$\rho\Big((u^1,a^1),(u^2,a^2)\Big) = \max\Big\{ \max_{\substack{k=1,2\\ t\in[0,T]}} |a^1_k(t) - a^2_k(t)|, \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ (x,t)\in G^{a^1}_T \cap G^{a^2}_T}} |u^1_i(x,t) - u^2_i(x,t)|,$$

$$\max_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ (x,t)\in G^{a^1}_T \cap G^{a^2}_T}} |(u^1_i)_x(x,t) - (u^2_i)_x(x,t)|\Big\}.$$

Позначимо через $\varphi_i(\tau; x,t,u)$, $i = \overline{1,n}$, розв'язок задачі Коші

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \lambda_i(\xi,\tau,u(\xi,\tau)), \qquad \xi(t) = x, \tag{6}$$

що є характеристикою системи рівнянь (1), причому залежність $\varphi_i(\tau;x,t,u)$ від u є функціоналом. Введемо позначення $\varphi_i(\tau) \overset{def}{=} \varphi_i(\tau;x,t,u)$, якщо треба підкреслити залежність від якогось аргументу, то будемо записувати $\varphi^x_i(\tau)$, $\varphi^t_i(\tau)$, $\varphi^u_i(\tau)$. Часову координату точки перетину функції φ_i з межею області $G^a_{T_0}$ при русі в напрямі спадання аргументу τ позначимо через $\chi_i(x,t;u,a)$, тобто

$$\chi_i(x,t,u;a) = \min\{\tau \ : \ (\varphi_i(\tau),\tau) \in G^a_{T_0}\}.$$

Для $\chi_i(x,t;u,a)$ будемо використовувати аналогічні позначення χ_i, χ^x_i, χ^t_i, χ^u_i, χ^a_i. Проінтегрувавши рівності (1) вздовж відповідних характеристик $\xi = \varphi_i(\tau)$, і співвідношення (2), отримаємо системи інтегро-функціональних рівнянь

$$u_i(x,t) = u_i\Big(\varphi_i(\chi_i),\chi_i\Big) + \int\limits_{\chi_i}^{t} f_i\Big(\varphi_i(\tau),\tau,u(\varphi_i(\tau),\tau)\Big)d\tau, \quad i = \overline{1,n}, \tag{7}$$

$$a_k(t) = a^0_k + \int\limits_0^t h_k(\tau,a(\tau),u(a(\tau),\tau))d\tau, \quad k = 1,2. \tag{8}$$

Зауважимо, набір функцій $(u,a) \in (\mathbb{C}^1(\overline{G^a_{T_0}}))^n \times (\mathbb{C}([0,T_0]))^2$, що задовольняє системи (7) і (8), буде розв'язком (1) і (2).

Нехай $(u,a) \in Q$, тоді згідно з умовами **H1** $-$ **H2**: $(t,a(t),u(a(t),t)) \in V_{T_0} \times B^{2n}_{G+1}$, $(a_k(t),t,u(a_k(t),t)) \in \Omega_{T_0} \times B^n_{G+1}$, $k=1,2$, $G^a_{T_0} \subset \Omega_{T_0}$. Правильні такі співвідношення

$$|h_k(t,a(t),u(a(t),t)) - \lambda_i(a_k(t),t,u(a_k(t),t))| \geqslant |\mathcal{H}_k - \lambda_i(a^0_k,0,g(a^0_k))| -$$
$$-|h_k(t,a(t),u(a(t),t)) - \mathcal{H}_k| - |\lambda_i(a_k(t),t,u(a_k(t),t)) - \lambda_i(a^0_k,0,g(a^0_k))| \geqslant$$
$$\geqslant \gamma - h_0(T_0 + 2(\mathcal{H}+1)(1+ng_0)T_0 + 2nU) - \lambda_0(T_0 + (\mathcal{H}+1)(1+ng_0)T_0 + nU).$$

Якщо

$$h_0(T_0 + 2(\mathcal{H}+1)(1+ng_0)T_0 + 2nU) + \lambda_0(T_0 + (\mathcal{H}+1)(1+ng_0)T_0 + nU) \leqslant \gamma/2, \quad (9)$$

то одержимо оцінку

$$|h_k(t,a(t),u(a(t),t)) - \lambda_i(a_k(t),t,u(a_k(t),t))| \geqslant \gamma/2, \ i=\overline{1,n}, \ k=1,2, \ t \in [0,T_0]. \quad (10)$$

Використаємо (10) та умови (3)-(5) і запишемо систему (7) у вигляді

$$u_i(x,t) = \vartheta_i(x,t;u,a) + \int\limits_{\chi_i}^{t} f_i\Big(\varphi_i(\tau),\tau,u(\varphi_i(\tau),\tau)\Big)d\tau, \quad i = \overline{1,n}, \qquad (11)$$

де

$$\vartheta_i(x,t;u,a) = \begin{cases} g_i(\varphi_i(0)), & \text{якщо } \chi_i = 0, \\ \mu^i_k(\chi_i, a(\chi_i), \{u_s(a_{k'}(\chi_i),\chi_i)\}), & \text{якщо } \chi_i > 0, \\ \varphi_i(\chi_i) = a_k(\chi_i), \quad i \in I_k, \ k=1,2. \end{cases}$$

Зауважимо, набір функцій $(u,a) \in Q$, що задовольняє систему (11), (8), буде класичним розв'язком задачі (1)-(5).

На просторі Q визначимо оператор S : $S(u,a) = (S^u(u,a), S^a(u,a))$, де $S^u(u,a) = (S^u_1(u,a),...,S^u_n(u,a))$, $S^a(u,a) = (S^a_1(u,a), S^a_2(u,a))$, отож,

$$(S^a_k(u,a))(t) = a^0_k + \int\limits_0^t h_k(\tau,a(\tau),u(a(\tau),\tau))d\tau, \quad k=1,2.$$

Тоді, ввівши позначення

$$\tilde{u}(x,t) = \begin{cases} (u_i)'_x(a_1(t),t)(x-a_1(t)) + u(a_1(t),t), & \text{якщо } x < a_1(t), \\ u(x,t), & \text{якщо } a_1(t) \leqslant x \leqslant a_2(t), \\ (u_i)'_x(a_2(t),t)(x-a_2(t)) + u(a_2(t),t), & \text{якщо } x > a_2(t), \end{cases}$$

$$\tilde{\chi_i} \stackrel{def}{=} \chi_i(x,t;\tilde{u},S^a), \qquad \tilde{\varphi_i}(\tau) \stackrel{def}{=} \varphi_i(\tau;x,t,\tilde{u}),$$

запишемо

$$(S^u_i(u,a))(x,t) = \tilde{\vartheta}_i(x,t,\tilde{u},u,a) + \int\limits_{\tilde{\chi_i}}^{t} f_i\Big(\tilde{\varphi_i}(\tau),\tau,\tilde{u}(\tilde{\varphi_i}(\tau),\tau)\Big)d\tau, \quad i=\overline{1,n},$$

де

$$\tilde{\vartheta}_i(x,t,\tilde{u},u,a) = \begin{cases} g_i(\tilde{\varphi_i}(0)), & \text{якщо } \tilde{\chi_i} = 0, \\ \mu^i_k(\tilde{\chi_i}, (S^a(u,a))(\tilde{\chi_i}), \{(S^u_s(u,a))(S^a_{k'}(u,a)(\tilde{\chi_i}),\tilde{\chi_i})\}), & \text{якщо } \tilde{\chi_i} > 0, \\ \tilde{\varphi_i}(\tilde{\chi_i}) = (S^a_k(u,a))(\tilde{\chi_i}), \quad i \in I_k, \ k=1,2. \end{cases}$$

Щоб уникнути громіздких виразів, позначимо $S^u := S^u(u,a)$, $S^a := S^a(u,a)$. Для коректності визначення оператора вимагаємо виконання таких умов

$$h_k(t,a(t),u(a(t),t)) \neq \lambda_i(S_k^a(t),t,\tilde{u}(S_k^a(t),t)), \quad i=\overline{1,n}, \quad k=1,2, \quad t\in[0,T_0], \tag{12}$$

$$\tilde{\chi}_i(S_k^a(t),t)=0, \quad k=1,2, \quad i\notin I_k. \tag{13}$$

Покажемо, що існує набір параметрів (T_0,U,U_1,L,L_1), при яких оператор S відображає повний метричний простір (Q,ρ) в себе, є стискуючим і виконуються умови (12)-(13).

Почнемо з перевірки умов простору. Нехай $(u,a)\in Q$, покажемо, що $(S^u,S^a)\in Q$. Насамперед визначимо обмеження на параметри простору, при яких S^a задовольняє умову **H1.**

Оскільки,

$$\frac{d}{dt}\Big(S_k^a(t)-\mathcal{H}_k t\Big)=|h_k(t,a(t),u(a(t),t))-\mathcal{H}_k|\leqslant h_0(T_0+2(\mathcal{H}+1)(1+ng_0)T_0+2nU),$$

то $\Big(S_k^a(t)-\mathcal{H}_k t\Big)\in Lip\Big([0,T_0],1\Big)$, $k=1,2$, за умов

$$h_0(1+2(\mathcal{H}+1)(1+ng_0))T_0\leqslant\frac{1}{2}, \tag{14}$$

$$h_0 2nU\leqslant\frac{1}{2}. \tag{15}$$

Знайдемо умови на параметри простору, при яких $\tilde{u}\in B_{G+1}$. Розглянемо можливі випадки:

1) $(x,t)\in G^a_{T_0}$, тоді $\tilde{u}_i(x,t)=u_i(x,t)$ і очевидно $\tilde{u}\in B_{G+1}$;

2) $(x,t)\in G^{S^a}_{T_0}\setminus G^a_{T_0}$, і для визначеності $S_1^a(t)\leqslant x\leqslant a_1(t)$. Тоді

$$|\tilde{u}_i(x,t)|=|(u_i)'_x(a_1(t),t)(x-a_1(t))+u_i(a_1(t),t)|\leqslant 2U_1(\mathcal{H}+1)T_0+G+\frac{1}{2}\leqslant G+1,$$

якщо

$$2U_1(\mathcal{H}+1)T_0\leqslant\frac{1}{2}. \tag{16}$$

Тепер можемо перейти до доведення (12)-(13). Розглянемо

$$\begin{gathered}|h_k(t,a(t),u(a(t),t))-\lambda_i(S_k^a(t),t,\tilde{u}(S_k^a(t),t))|\geqslant|\mathcal{H}_k-\lambda_i(a_k^0,0,g(a_k^0))|-\\ -|h_k(t,a(t),u(a(t),t))-\mathcal{H}_k|-|\lambda_i(S_k^a(t),t,\tilde{u}(S_k^a(t),t))-\lambda_i(a_k^0,0,g(a_k^0))|\geqslant\end{gathered}$$

$$\geqslant\gamma-h_0(T_0+2(\mathcal{H}+1)(1+ng_0)T_0+2nU)-\lambda_0(T_0+(\mathcal{H}+1)(1+ng_0)T_0+nU+nU_1 2(\mathcal{H}+1)T_0).$$

Якщо

$$\begin{gathered}h_0(T_0+2(\mathcal{H}+1)(1+ng_0)T_0+2nU)-\\ -\lambda_0(T_0+(\mathcal{H}+1)(1+ng_0)T_0+nU+nU_1 2(\mathcal{H}+1)T_0)\leqslant\gamma/2,\end{gathered} \tag{17}$$

то виводимо оцінку

$$|h_k(t,a(t),u(a(t),t))-\lambda_i(S_k^a(t),t,\tilde{u}(S_k^a(t),t))|\geqslant\gamma/2, \ i=\overline{1,n}, \ k=1,2, \ t\in[0,T_0]. \tag{18}$$

Зауважимо, щоб виконувалась рівність (13), достатньо вимагати виконання такої нерівності:

$$(2(\mathcal{H}+1)+\Lambda)T_0\leqslant a_2^0-a_1^0. \tag{19}$$

Дослідимо, за яких умов (S^u,S^a) задовольняє обмеження **H2** простору Q.

Розглянемо випадок $\tilde{\chi}_i = 0$. Оскільки

$$|S_i^u(x,t) - \bar{g}_i(x)| \leqslant |g_i(\widetilde{\varphi}_i(0)) - \bar{g}_i(x)| + \int\limits_0^t |f_i(\widetilde{\varphi}_i(\tau), \tau, \tilde{u}(\widetilde{\varphi}_i(\tau), \tau))| d\tau \leqslant (g_0\Lambda + F)T_0,$$

то достатньо вимагати виконання нерівності

$$(g_0\Lambda + F)T_0 \leqslant U. \tag{20}$$

Розглянемо випадок $\tilde{\chi}_i > 0$ і попередньо доведемо допоміжну оцінку

$$|S_i^u(S_k^a(t), t) - g_i(a_k^0)| = |g_i(\tilde{\varphi}_i^{S_k^a(t),t}(0)) - g_i(a_k^0)| +$$

$$+ \int\limits_{\tilde{\chi}_i}^t |f_i(\tilde{\varphi}_i(\tau), \tau, \tilde{u}(\tilde{\varphi}_i(\tau), \tau))| d\tau \leqslant g_0(H + \Lambda)T_0 + FT_0.$$

Враховуючи умови погодження нульового порядку, маємо

$$|S_i^u(x,t) - \bar{g}_i(x)| \leqslant |\mu_k^i(\tilde{\chi}_i, S^a(\tilde{\chi}_i), \{S_s^u(S_{k'}^a(\tilde{\chi}_i), \tilde{\chi}_i)\}) -$$

$$-\mu_k^i(0, a^0, \{S_s^u(a_{k'}^0, 0)\})| + |g_i(a_k^0) - \bar{g}_i(x)| + \int\limits_{\tilde{\chi}_i}^t |f_i(\tilde{\varphi}_i(\tau), \tau, \tilde{u}(\tilde{\varphi}_i(\tau), \tau))| d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \mu_0(T_0 + 2HT_0 + 2n(g_0(H + \Lambda) + F)T_0) + g_0(H + \Lambda)T_0 + FT_0.$$

Тому, якщо

$$\Big(\mu_0(1 + 2H + 2n(g_0(H + \Lambda) + F)) + g_0(H + \Lambda) + F\Big)T_0 \leqslant U, \tag{21}$$

то

$$|S_i^u(x,t) - \bar{g}_i(x)| \leqslant U, \quad (x,t) \in G_{T_0}^{S^a}.$$

Для наступних оцінок нам знадобиться стала Ліпшиця для функції $\tilde{u}$ за двома змінними. Доведемо її спочатку за змінною x для можливих випадків розміщення точки (x,t) :

1) $\{(x_1,t), (x_2,t)\} \in G_{T_0}^{S^a} \setminus G_{T_0}^a$:

$$|\Delta_j \tilde{u}_i(x_j,t)| \leqslant |\Delta_j((u_i)'_x(a_1(t),t)(x_j - a_1(t)) + u_i(a_1(t),t))| \leqslant U_1|\Delta x_j|;$$

2) $(x_1,t) \in G_{T_0}^{S^a} \setminus G_{T_0}^a$, $(x_2,t) \in G_{T_0}^a$:

$$|\Delta_j \tilde{u}_i(x_j,t)| \leqslant |((u_i)'_x(a_1(t),t)(x_1 - a_1(t)) + u_i(a_1(t),t)) - u_i(x_2,t)| \leqslant$$

$$\leqslant U_1|x_1 - a_1(t)| + L|a_1(t) - x_2| \leqslant \max\{U_1, L\}|\Delta x_j|;$$

3) $\{(x_1,t), (x_2,t)\} \in G_{T_0}^a$:

$$|\Delta_j \tilde{u}_i(x_j,t)| \leqslant L|\Delta x_j|.$$

Отже, для довільного випадку $|\Delta_j \tilde{u}_i(x_j,t)| \leqslant \max\{U_1, L\}|\Delta x_j|$. Тепер знайдемо сталу Ліпшиця за змінною t. Розглянувши ті ж випадки, що й попередньо, маємо:

1) $|\Delta_j \tilde{u}_i(x,t_j)| \leqslant |\Delta_j((u_i)'_x(a_1(t_j),t_j)||(x - a_1(t_1))| + U_1|\Delta_j a_1(t_j)| +$
$+|\Delta_j u_i(a_1(t_j),t_j)| \leqslant \Big(L_1(\mathcal{H} + 2)2(\mathcal{H} + 1)T_0 + U_1(\mathcal{H} + 1) + L(\mathcal{H} + 2)\Big)|\Delta t_j|,$

$$|\Delta_j \tilde{u}_i(x,t_j)| \leqslant (1 + U_1(1 + \mathcal{H}) + L(\mathcal{H} + 2))|\Delta t_j|,$$

при
$$2L_1(\mathcal{H}+2)(\mathcal{H}+1)T_0 \leqslant 1; \tag{22}$$
2) $|\Delta_j \tilde{u}_i(x,t_j)| \leqslant |(u_i)'_x(a_1(t_1),t_1)|(x-a_1(t_1)) + u_i(a_1(t_1),t_1) - u_i(x,t_2)| \leqslant$
$\leqslant U_1|a_1(t_2)-a_1(t_1)| + L|a_1(t_2)-a_1(t_1)| + L|\Delta t_j| \leqslant ((U_1+L)(1+\mathcal{H})+L)|\Delta t_j|$;
3) $|\Delta_j \tilde{u}_i(x,t_j)| \leqslant L|\Delta t_j|$.

Для довільного випадку правильна оцінка
$$|\Delta_j \tilde{u}_i(x,t_j)| \leqslant (1+(U_1+L)(1+\mathcal{H})+L)|\Delta t_j|.$$

Підсумовуючи попередні результати, можемо визначити загальну сталу Ліпшиця за двома змінними для функції $\tilde{u}$, а саме
$$\tilde{L} = 1+(U_1+L)(1+\mathcal{H})+L.$$

Доведемо твердження, які знадобляться нам надалі.

Лема 1. *Нехай* $(x_j,t_j) \in G^a_{T_0},\ j=1,2,(u,a)\in Q$, *тоді функція* $\varphi_i(\tau)$ *задовольняє нерівність*
$$|\Delta_j \varphi_i(\tau;x_j,t,u)| \leqslant e^{\lambda_0(1+nL)T_0}|\Delta x_j|; \qquad |\Delta_j \varphi_i(\tau;x,t_j,u)| \leqslant \Lambda e^{\lambda_0(1+nL)T_0}|\Delta t_j|.$$

Доведення. Запишемо $\varphi_i(\tau;x_j,t,u)$ як розв'язок рівняння (6) у вигляді
$$\varphi_i(\tau;x_j,t,u) \ = \ x_j + \int\limits_t^\tau \lambda_i(\varphi_i(\theta;x_j,t,u),\theta,u(\varphi_i(\theta;x_j,t,u),\theta))d\theta, \quad j=1,2.$$
Розглянемо різницю цих виразів і застосуємо до неї лему Гронуолла-Белмана. Отож, отримуємо твердження леми. Другу оцінку доводимо аналогічно. □

Зауваження 1. Припустивши, що
$$\lambda_0(1+n\tilde{L})T_0 \leqslant 1 \tag{23}$$
та використавши попередню лему, отримуємо оцінки для функції $\widetilde{\varphi}_i(\tau)$ в області $G^{S^a}_{T_0}$:
$$|\Delta_j \widetilde{\varphi}^{x_j}_i(\tau)| \leqslant e|\Delta x_j|, \qquad |\Delta_j \widetilde{\varphi}^{t_j}_i(\tau)| \leqslant \Lambda e|\Delta t_j|.$$

Лема 2. *Нехай* $\{(x_1,t_1),(x_2,t_2)\} \subset G^{S^a}_{T_0},\ k=1,2,\ (u,a)\in Q$ *і для фіксованого* $k\in\{1,2\}$*:* $\widetilde{\varphi}^{x_j,t_j}_i(\tilde{\chi}_i{}^{x_j,t_j}) = S^a_k(\tilde{\chi}^{x_j,t_j}_i)$, $j=1,2$, *причому параметри* T_0 *та* U *є достатньо малими, а саме задовольняють умови (17) та*
$$\lambda_0(1+n\tilde{L})(\Lambda+H)T_0 \leqslant \frac{\gamma}{4}. \tag{24}$$
Тоді виконуються нерівності
$$|\Delta_j \tilde{\chi}^{x_j}_i| \leqslant \frac{4}{\gamma}e^{\lambda_0(1+n\tilde{L})T_0}|\Delta x_j|, \qquad |\Delta_j \tilde{\chi}^{t_j}_i| \leqslant \frac{4}{\gamma}\Lambda e^{\lambda_0(1+n\tilde{L})T_0}|\Delta t_j|.$$

Доведення. Нехай для визначеності $k=1,\ \ x_1<x_2$. Тоді $\tilde{\chi}^{x_1}_i > \tilde{\chi}^{x_2}_i$. Розглянемо різницю $\widetilde{\varphi}^{x_2}_i(\tau) - S^a_1(\tau)$. За теоремою Лагранжа справджується оцінка
$$|\widetilde{\varphi}^{x_2}_i(\tilde{\chi}^{x_1}_i) - S^a_1(\tilde{\chi}^{x_1}_i)| = |\lambda_i(\widetilde{\varphi}^{x_2}_i(\tau_0),\tau_0,\tilde{u}(\widetilde{\varphi}^{x_2}_i(\tau_0),\tau_0)) -$$
$$-h_1(\tau_0,a(\tau_0),u(a(\tau_0),\tau_0))||\Delta_j \tilde{\chi}^{x_j}_i| \geqslant \Big[-|\lambda_i(\widetilde{\varphi}^{x_2}_i(\tau_0),\tau_0,\tilde{u}(\widetilde{\varphi}^{x_2}_i(\tau_0),\tau_0)) -$$

$$-\lambda_i(S_1^a(\tau_0),\tau_0,\tilde u(S_1^a(\tau_0),\tau_0))|+|\lambda_i(S_1^a(\tau_0),\tau_0,\tilde u(S_1^a(\tau_0),\tau_0))-$$
$$-h_1(\tau_0,a(\tau_0),u(a(\tau_0),\tau_0))|\Big]|\Delta_j\tilde\chi_i^{x_j}|\geqslant\Big[\frac{\gamma}{2}-\lambda_0(1+n\tilde L)|\widetilde\varphi_i^{x_2}(\tau_0)-(S^1a)(\tau_0)|\Big]|\Delta_j\tilde\chi_i^{x_j}|\geqslant$$
$$\geqslant\Big[\frac{\gamma}{2}-\lambda_0(1+n\tilde L)(\Lambda+H)T_0\Big]|\Delta_j\tilde\chi_i^{x_j}|\geqslant\frac{\gamma}{4}|\Delta_j\tilde\chi_i^{x_j}|.$$

Тому
$$|\Delta_j\tilde\chi_i^{x_j}|\leqslant\frac{4}{\gamma}|\widetilde\varphi_i^{x_2}(\tilde\chi_i^{x_1})-S_1^a(\tilde\chi_i^{x_1})|\leqslant\frac{4}{\gamma}|\Delta_j\widetilde\varphi_i^{x_j}(\tilde\chi_i^{x_1})|.$$

Згідно з лемою 1 отримаємо оцінку
$$|\Delta_j\tilde\chi_i^{x_j}|\leqslant\frac{4}{\gamma}e^{\lambda_0(1+n\tilde L)T_0}|\Delta x_j|.$$

Аналогічно отримуємо другу оцінку з твердження леми. □

Дослідимо умову **H3**.

Нехай ${\tilde\chi_i}^{x_j}=0,\ j=1,2$. Тоді
$$|\Delta_jS_i^u(x_j,t)|\leqslant|\Delta_jg_i(\widetilde\varphi_i^{x_j}(0))|+\int\limits_0^t\Big|\Delta_jf_i\Big(\widetilde\varphi_i^{x_j}(\tau),\tau,\tilde u(\widetilde\varphi_i^{x_j}(\tau),\tau)\Big)\Big|d\tau\leqslant$$
$$\leqslant(g_0+T_0f_0(1+n\tilde L))e|\Delta x_j|\leqslant(g_0e+1)|\Delta x_j|.$$

Тепер вважатимемо ${\tilde\chi_i}^{x_j}>0,\ j=1,2$ і $x_1<x_2$, $\widetilde\varphi_i^{x_j}({\tilde\chi_i}^{x_j})=S_1^a({\tilde\chi_i}^{x_j}),\ j=1,2$, тоді ${\tilde\chi_i}^{x_1}>{\tilde\chi_i}^{x_2}$. Знайдемо допоміжну оцінку при $k=1,2,\ \ i\notin I_k$
$$|\Delta_jS_i^u(S_k^a(t_j),t_j)|\leqslant|\Delta_jg_i(\widetilde\varphi_i^{S_k^a(t_j),t_j}(0))|+$$
$$+\int\limits_0^{t_1}\Big|\Delta_jf_i\Big(\widetilde\varphi_i^{S_k^a(t_j),t_j}(\tau),\tau,\tilde u(\widetilde\varphi_i^{S_k^a(t_j),t_j}(\tau),\tau)\Big)\Big|d\tau+$$
$$+\int\limits_{t_1}^{t_2}\Big|f_i\Big(\widetilde\varphi_i^{S_k^a(t_2),t_2}(\tau),\tau,\tilde u(\widetilde\varphi_i^{S_k^a(t_2),t_2}(\tau),\tau)\Big)\Big|d\tau\leqslant\Big((g_0+f_0T_0(1+n\tilde L))(H+\Lambda)e+F\Big)|\Delta t_j|.$$

Припустимо, що T_0 достатньо мале, щоб виконувалась нерівність
$$T_0f_0(1+n\tilde L)\max\{1,H+\Lambda\}e\leqslant1. \tag{25}$$

Тоді
$$|\Delta_jS_i^u(S_k^a(t_j),t_j)|\leqslant k_1|\Delta t_j|, \tag{26}$$
де $k_1=g_0(H+\Lambda)e+F+1$. Розглянемо
$$|\Delta_jS_i^u(x_j,t)|\leqslant|\Delta_j\mu_k^i({\tilde\chi_i}^{x_j},S^a({\tilde\chi_i}^{x_j}),\{S_s^u(S_{k'}^a({\tilde\chi_i}^{x_j}),{\tilde\chi_i}^{x_j})\})|+$$
$$+\int\limits_{{\tilde\chi_i}^{x_2}}^{{\tilde\chi_i}^{x_1}}\Big|f_i\Big(\widetilde\varphi_i^{x_2}(\tau),\tau,\tilde u(\widetilde\varphi_i^{x_2}(\tau),\tau)\Big)\Big|d\tau+\int\limits_{{\tilde\chi_i}^{x_1}}^{t}\Big|\Delta_jf_i\Big(\widetilde\varphi_i^{x_j}(\tau),\tau,\tilde u(\widetilde\varphi_i^{x_j}(\tau),\tau)\Big)\Big|d\tau\leqslant$$
$$\leqslant(\mu_0(1+2H+2nk_1)\frac{4}{\gamma}e+T_0f_0(1+n\tilde L)e+F\frac{4}{\gamma}e)|\Delta x_j|.$$

Отже, в будь-якому випадку правильна нерівність
$$|\Delta_jS_i^u(x_j,t)|\leqslant k_2|\Delta x_j|,$$

де $k_2 = \max\{g_0 e, \mu_0(1+2H+2nk_1)\frac{4}{\gamma}e + F\frac{4}{\gamma}e\} + 1$. Оскільки $|\Delta_j S_i^u(x,t_j)| \leqslant$ $\leqslant (F+\Lambda k_2)|\Delta t_j|$, то $S_i^u \in Lip(G_{T_0}^{S^a}, L)$, якщо

$$F + \max\{1,\Lambda\}k_2 \leqslant L. \tag{27}$$

Введемо позначення $[\varphi_i]_x(\tau) \overset{def}{=} \dfrac{\partial}{\partial x}\varphi_i(\tau;x,t,u) = (\varphi_i)'_x(\tau) + \sum\limits_j (\varphi_i)'_{u_j}(u_j)'_x$ та аналогічні для $[\varphi_i]_t(\tau)$. Перейдемо до перевірки умови **H4**. Зауважимо, що

$$(S_i^u)'_x(x,t) = \frac{\partial\tilde{\vartheta}_i}{\partial x}(x,t,\tilde{u},u,a) + (Y_i\tilde{u})(x,t,a) + (Z_i\tilde{u})(x,t),$$

де

$$\frac{\partial\tilde{\vartheta}_i}{\partial x}(x,t,\tilde{u},u,a) = \begin{cases} g_i'(\widetilde{\varphi}_i(0))[\widetilde{\varphi}_i]_x(0), \qquad \text{якщо } \tilde{\chi}_i = 0\ ; \\ \Big[(\mu_k^i)'_t(\tilde{\chi}_i, S^a(\tilde{\chi}_i), \{S_s^u(S_{k'}^a(\tilde{\chi}_i),\tilde{\chi}_i)\}) + \\ + \sum\limits_{m=1}^{2}(\mu_k^i)'_{a_m}(\tilde{\chi}_i, S^a(\tilde{\chi}_i), \{S_s^u(S_{k'}^a(\tilde{\chi}_i),\tilde{\chi}_i)\}) \times \\ \times h_m(\tilde{\chi}_i, a(\tilde{\chi}_i), u(a(\tilde{\chi}_i),\tilde{\chi}_i)) + \\ + \sum\limits_{\substack{s\notin I_{k'}\\ k'=1,2}}(\mu_k^i)'_{w_s^{k'}}(\tilde{\chi}_i, S^a(\tilde{\chi}_i), \{S_s^u(S_{k'}^a(\tilde{\chi}_i),\tilde{\chi}_i)\}) \times \\ \times[(S_s^u)'_x(S_{k'}^a(\tilde{\chi}_i),\tilde{\chi}_i)h_{k'}(\tilde{\chi}_i, a(\tilde{\chi}_i), u(a_{k'}(\tilde{\chi}_i),\tilde{\chi}_i)) + \\ + (S_s^u)'_t(S_{k'}^a(\tilde{\chi}_i),\tilde{\chi}_i)]\Big](\tilde{\chi}_i)'_x, \qquad \text{якщо } \tilde{\chi}_i > 0, \\ \quad \widetilde{\varphi}_i(\tilde{\chi}_i) = S_k^a(\tilde{\chi}_i), \quad i \in I_k, \quad k = 1,2, \end{cases}$$

$$(Y_i\tilde{u})(x,t,a) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \tilde{\chi}_i = 0\ ; \\ -f_i(S_k^a(\tilde{\chi}_i), \tilde{\chi}_i, \tilde{u}(S_k^a(\tilde{\chi}_i),\tilde{\chi}_i))(\tilde{\chi}_i)'_x, & \text{якщо } \tilde{\chi}_i > 0, \\ \widetilde{\varphi}_i(\tilde{\chi}_i) = S_k^a(\tilde{\chi}_i), \quad i \in I_k, \quad k = 1,2, \end{cases}$$

$$(Z_i\tilde{u})(x,t) = \int\limits_{\tilde{\chi}_i}^{t}\Big((f_i)'_x(\widetilde{\varphi}_i(\tau),\tau,\tilde{u}(\widetilde{\varphi}_i(\tau),\tau)) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n}(f_i)'_{\tilde{u}_j}(\widetilde{\varphi}_i(\tau),\tau,\tilde{u}(\widetilde{\varphi}_i(\tau),\tau))(\tilde{u}_j)'_x(\widetilde{\varphi}_i(\tau),\tau)\Big)[\widetilde{\varphi}_i]_x(\tau)d\tau.$$

Крім того, якщо $\tilde{\chi}_i = 0$, то

$$(S_i^u)'_t(x,t) = g_i'(\widetilde{\varphi}_i(0))[\widetilde{\varphi}_i]_t(0) + f_i(x,t,\tilde{u}(x,t)) + \int\limits_0^t\Big((f_i)'_x(\widetilde{\varphi}_i(\tau),\tau,\tilde{u}(\widetilde{\varphi}_i(\tau),\tau)) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n}(f_i)'_{u_j}(\widetilde{\varphi}_i(\tau),\tau,\tilde{u}(\widetilde{\varphi}_i(\tau),\tau))(\tilde{u}_j)'_x(\widetilde{\varphi}_i(\tau),\tau)\Big)[\widetilde{\varphi}_i]_t(\tau)d\tau.$$

Зазначимо, що правильні рівності

$$[\widetilde{\varphi}_i]_x(\tau) = \exp\Big(-\int\limits_\tau^t\Big((\lambda_i)'_x(\widetilde{\varphi}_i(\theta),\theta,\tilde{u}(\widetilde{\varphi}_i(\theta),\theta)) +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}(\lambda_i)'_{u_j}(\widetilde{\varphi}_i(\theta),\theta,\tilde{u}(\widetilde{\varphi}_i(\theta),\theta))(\tilde{u}_j)'_x(\widetilde{\varphi}_i(\theta),\theta)\Big)d\theta\Big),$$

$$(\tilde{\chi}_i)'_x=[\widetilde{\varphi}_i]_x(\tilde{\chi}_i)\Big(h_k(\tilde{\chi}_i,a(\tilde{\chi}_i),u(a(\tilde{\chi}_i),\tilde{\chi}_i))-\lambda_i(S^a_k(\tilde{\chi}_i),\tilde{\chi}_i,\tilde{u}(S^a_k(\tilde{\chi}_i),\tilde{\chi}_i))\Big)^{-1},$$

$$[\widetilde{\varphi}_i]_t(\tau)=-\lambda_i(x,t,\tilde{u}(x,t))\exp\Big(-\int\limits_{\tau}^{t}\Big((\lambda_i)'_x(\widetilde{\varphi}_i(\theta),\theta,\tilde{u}(\widetilde{\varphi}_i(\theta),\theta))+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}(\lambda_i)'_{u_j}(\widetilde{\varphi}_i(\theta),\theta,\tilde{u}(\widetilde{\varphi}_i(\theta),\theta))(\tilde{u}_j)'_x(\widetilde{\varphi}_i(\theta),\theta)\Big)d\theta\Big).$$

Нехай $\tilde{\chi}_i=0$ і виконуються нерівності

$$\Lambda(1+nU_1)T_0\leqslant 1, \tag{28}$$

$$T_0F(1+nU_1)\max\{1,\Lambda\}e\leqslant 1. \tag{29}$$

Тоді справджуються оцінки

$$|(S^u_i)'_x(x,t)|\leqslant G_1e+T_0F(1+nU_1)e\leqslant G_1e+1,$$

$$|(S^u_i)'_t(x,t)|\leqslant G_1\Lambda e+F+T_0F(1+nU_1)\Lambda e\leqslant G_1\Lambda e+F+1.$$

При $\tilde{\chi}_i>0$

$$|(S^u_i)'_x(x,t)|\leqslant\Big(M+2MH+2nM((G_1e+1)H+(G_1\Lambda e+F+1))\Big)e\frac{2}{\gamma}+Fe\frac{2}{\gamma}+1.$$

Отже, ми можемо забезпечити виконання нерівності

$$|(S^u_i)'_x(x,t)|\leqslant U_1,\quad (x,t)\in G^{S^a}_{T_0},$$

якщо

$$\max\Big\{[M+2MH+F+2nM((G_1e+1)H+(G_1\Lambda e+F+1))]e\frac{2}{\gamma},G_1e\Big\}+1\leqslant U_1. \tag{30}$$

Розглянемо умову **H5**, тобто переконаємося, що $(S^u_i)'_x\in Lip(G^{S^a}_{T_0},L_1)$, $i=\overline{1,n}$.

Лема 3. *Нехай* $(x_j,t_j)\in G^a_{T_0}$, $j=1,2$, $(u,a)\in Q$. *Тоді справджуються оцінки*

$$|\Delta_j[\varphi_i]^{x_j}_x(\tau)\Big|\leqslant k_3|\Delta x_j|,\qquad |\Delta_j[\varphi_i]^{t_j}_x(\tau)\Big|\leqslant(\Lambda k_3+e\Lambda(1+nU_1))|\Delta t_j|,$$

де $k_3=e^{\Lambda(1+nU_1)T_0}T_0(\lambda_0(1+nL)(1+nU_1)+n\Lambda L_1)e^{\lambda_0(1+nL)T_0}$.

Доведення. Застосувавши нерівність $|e^a-e^b|\leqslant e^c|a-b|$, де $c\in(a,b)$ та провівши відповідні оцінки, отримаємо твердження леми 3. □

Зауваження 2. Аналогічна оцінка справджується для функцій $[\widetilde{\varphi}_i]_x$ в області $G^{S^a}_{T_0}$.

Згідно з попередніми припущеннями та врахувавши

$$T_0\Big(\lambda_0(1+n\tilde{L})(1+nU_1)+n\Lambda L_1\Big)e^2\leqslant 1, \tag{31}$$

отримуємо оцінку $k_3\leqslant 1$.

Лема 4. *Нехай* $(x,t)\in G^a_{T_0},\ \tau_j\in[\chi_i,t],\ j=1,2,\ (u,a)\in Q$. *Тоді*

$$|\Delta_j[\varphi_i]_x(\tau_j)|\leqslant e^{\Lambda(1+nU_1)T_0}\Lambda(1+nU_1)|\Delta\tau_j|.$$

Доведення цієї леми з незначними змінами повторює доведення леми 3.

Зауваження 3. Аналогічна оцінка справджується для функцій $[\widetilde{\varphi}_i]_x$ в області $G^{S^a}_{T_0}$.

Із припущень доведення отримаємо, що

$$|\Delta_j[\tilde{\varphi}_i]_x(\tau_j)|\leqslant\Lambda(1+nU_1)e|\Delta\tau_j|.$$

Лема 5. *Нехай* $\{(x_1,t_1),(x_2,t_2)\}\subset G^{S^a}_{T_0},\ k=1,2,\ (u,a)\in Q$ *і для фіксованого* $k\in\{1,2\}$: $\widetilde{\varphi}_i^{x_j,t_j}(\tilde{\chi}_i^{x_j,t_j})=S^a_k(\tilde{\chi}_i^{x_j,t_j}),\ j=1,2,$ *а також виконуються умови (17), (24). Тоді*

$$|\Delta_j(\tilde{\chi}_i^{x_j})'_x|\leqslant\Big(\frac{2}{\gamma}(k_3+e^{\Lambda(1+nU_1)T_0}\Lambda(1+nU_1)\frac{4}{\gamma}e^{\lambda_0(1+n\tilde{L})T_0})+$$
$$+e^{\Lambda(1+nU_1)T_0}\frac{4}{\gamma^2}(h_0(1+2n\tilde{L})(2(\mathcal{H}+1)+1)+\lambda_0(1+n\tilde{L})(\mathcal{H}+2))\frac{4}{\gamma}e^{\lambda_0(1+n\tilde{L})T_0}\Big)|\Delta x_j|,$$
$$|\Delta_j(\tilde{\chi}_i^{t_j})'_x|\leqslant\Big(\Lambda\Big(\frac{2}{\gamma}(k_3+e^{\Lambda(1+nU_1)T_0}\Lambda(1+nU_1)\frac{4}{\gamma}e^{\lambda_0(1+n\tilde{L})T_0})+$$
$$+e^{\Lambda(1+nU_1)T_0}\frac{4}{\gamma^2}(h_0(1+2n\tilde{L})(2(\mathcal{H}+1)+1)+\lambda_0(1+n\tilde{L})(\mathcal{H}+2))\frac{4}{\gamma}e^{\lambda_0(1+n\tilde{L})T_0}\Big)+$$
$$+\frac{2}{\gamma}\Lambda e(1+nU_1)\Big)|\Delta t_j|.$$

Доведення леми 5 безпосередньо випливає з означень відповідних функцій і попередніх оцінок.

Позначимо $k_4=\dfrac{2}{\gamma}(1+e^2\Lambda(1+nU_1)\dfrac{4}{\gamma})+e^2\dfrac{16}{\gamma^3}(h_0(1+2n\tilde{L})(2(\mathcal{H}+1)+1)+$ $+\lambda_0(1+n\tilde{L})(\mathcal{H}+2))$. Тоді, врахувавши зроблені припущення, маємо

$$|\Delta_j(\tilde{\chi}_i^{x_j})'_x|\leqslant k_4|\Delta x_j|,\quad |\Delta_j(\tilde{\chi}_i^{t_j})'_x|\leqslant(\Lambda k_4+\frac{2}{\gamma}\Lambda e(1+nU_1))|\Delta t_j|.$$

Нехай $\tilde{\chi}_i^{x_j}=0,\ j=1,2$. Розглянемо

$$|\Delta_j(S^u_i)'_x(x_j,t)|\leqslant|\Delta_j g'_i(\widetilde{\varphi}_i^{x_j}(0))||[\widetilde{\varphi}_i^{x_1}]_x(0)|+|\Delta_j[\widetilde{\varphi}_i^{x_j}]_x(0)||g'_i(\widetilde{\varphi}_i^{x_2}(0))|+$$
$$+\int\limits_0^t\Big[(|\Delta_j(f_i)'_x(\widetilde{\varphi}_i^{x_j}(\tau),\tau,\tilde{u}(\widetilde{\varphi}_i^{x_j}(\tau),\tau))|+$$
$$+\sum_{m=1}^n[|\Delta_j(f_i)'_{\tilde{u}_m}(\widetilde{\varphi}_i^{x_j}(\tau,\tau,\tilde{u}(\widetilde{\varphi}_i^{x_j}(\tau),\tau))|(\tilde{u}_m)'_x(\widetilde{\varphi}_i^{x_1}(\tau),\tau)+$$
$$+(f_i)'_{\tilde{u}_m}(\widetilde{\varphi}_i^{x_2}(\tau),\tau,\tilde{u}(\widetilde{\varphi}_i^{x_2}(\tau),\tau))|\Delta_j(\tilde{u}_m)'_x(\widetilde{\varphi}_i^{x_j}(\tau),\tau)|])[\widetilde{\varphi}_i^{x_1}]_x(\tau)+$$
$$+\Big((f_i)'_x(\widetilde{\varphi}_i^{x_2}(\tau),\tau,\tilde{u}(\widetilde{\varphi}_i^{x_2}(\tau),\tau))+$$
$$+\sum_{m=1}^n(f_i)'_{\tilde{u}_m}(\widetilde{\varphi}_i^{x_2}(\tau),\tau,\tilde{u}(\widetilde{\varphi}_i^{x_2}(\tau),\tau))(\tilde{u}_m)'_x(\widetilde{\varphi}_i^{x_2}(\tau),\tau)\Big)|\Delta_j[\widetilde{\varphi}_i^{x_j}]_x(\tau)|\Big]d\tau\leqslant$$

$$\leqslant \Big(G_1 + g_0e^2 + T_0(f_0(1+\tilde{L})(1+nU_1) + nFL_1)e^2 + T_0F(1+nU_1)\Big)|\Delta x_j|.$$

Якщо

$$T_0\Big[(f_0(1+n\tilde{L})(1+nU_1) + nFL_1)e^2 + F(1+nU_1)\Big] \leqslant 1, \tag{32}$$

то

$$|\Delta_j(S_i^u)'_x(x_j,t)| \leqslant (G_1 + g_0e^2 + 1)|\Delta x_j|.$$

Для випадку $\tilde{\chi}_i^{x_j} > 0$, $j = 1,2$ також проведемо оцінки, сформульовані у вигляді таких двох лем.

Лема 6. *Нехай* $t_j \in [0,T_0], j = 1,2, (u,a) \in Q$. *Тоді*

$$|\Delta_j[\varphi_i^{a_k(t_j),t_j}]_x(\tau)| \leqslant \Big(T_0e^{\Lambda(1+nU_1)T_0}e^{\lambda_0(1+nL)T_0}(\mathcal{H}+1+\Lambda)(\lambda_0(1+nL)(1+nU_1)+$$
$$+n\Lambda L_1) + e^{\Lambda(1+nU_1)T_0}\Lambda(1+nU_1)\Big)|\Delta t_j|.$$

Зауваження 4. Аналогічна оцінка справджується для $[\widetilde{\varphi}_i^{S_k^a,t_j}]_x$, $i = \overline{1,n}$, $j = 1,2$.

Якщо

$$T_0e^2(\mathcal{H}+1+\Lambda)(\lambda_0(1+nU_1)(1+n\tilde{L}) + n\Lambda L_1) \leqslant 1, \tag{33}$$

то

$$|\Delta_j[\widetilde{\varphi}_i^{S_k^a(t_j),t_j}]_x(\tau)| \leqslant k_5|\Delta t_j|,$$

де $k_5 = 1 + e\Lambda(1+nU_1)$.

Лема 7. *Нехай* $t_j \in [0,T_0]$, $j = 1,2$, $(u,a) \in Q$, *а також виконуються умови леми 2. Тоді правильна оцінка*

$$|\Delta_j[\varphi_i^{a_k(t_j),t_j}]_t(\tau)| \leqslant \Big(\lambda_0(1+nL)(\mathcal{H}+2)e^{\Lambda(1+nU_1)T_0} + \Lambda(T_0e^{\Lambda(1+nU_1)T_0}\times$$
$$\times e^{\lambda_0(1+nL)T_0}(\mathcal{H}+1+\Lambda)(\lambda_0(1+nL)(1+nU_1) + n\Lambda L_1) + e^{\Lambda(1+nU_1)T_0}\Lambda(1+nU_1))\Big)|\Delta t_j|.$$

Доведення цих лем одразу випливають з означень функцій $\varphi_i(\tau)$, $i = \overline{1,n}$.

Зауваження 5. Аналогічна оцінка виконуються для $[\widetilde{\varphi}_i^{S_k^a(t_j),t_j}]_t$, $i = \overline{1,n}$, $j = 1,2$.

Позначимо $k_6 = \lambda_0(1+n\tilde{L})(\mathcal{H}+2)e + \Lambda k_5$. Тоді

$$|\Delta_j[\widetilde{\varphi}_i^{S_k^a(t_j),t_j}]_t(\tau)| \leqslant k_6|\Delta t_j|.$$

З цих оцінок маємо

$$|\Delta_j(S_i^u)'_x(S_k^a(t_j),t_j)| \leqslant \Big[g_0(H+\Lambda)e^2 + G_1k_5 + F(1+nU_1)e + T_0(f_0(1+n\tilde{L})\times$$
$$\times(1+nU_1) + nFL_1)e^2(H+\Lambda) + T_0F(1+nU_1)k_5\Big]|\Delta t_j|.$$

Якщо ж

$$T_0\Big((f_0(1+n\tilde{L})(1+nU_1) + nFL_1)e^2(H+\Lambda) + F(1+nU_1)k_5\Big) \leqslant 1, \tag{34}$$

то

$$|\Delta_j(S_i^u)'_x(S_k^a(t_j),t_j)| \leqslant [g_0(H+\Lambda)e^2 + G_1k_5 + F(1+nU_1)e + 1]|\Delta t_j| = k_7|\Delta t_j|.$$

Перейдемо до оцінки такої різниці

$$|\Delta_j (S_i^u)'_t(S_k^a(t_j),t_j)| \leqslant \Big[g_0(H+\Lambda)e^2\Lambda + G_1k_6 + f_0(1+n\tilde{L})(H+1) + \Lambda eF(1+nU_1)+$$
$$+T_0(f_0(1+n\tilde{L})(H+\Lambda)e(1+nU_1) + nFL_1(H+\Lambda)e)e\Lambda + T_0F(1+nU_1)k_6\Big]|\Delta t_j|.$$

Зазначимо, якщо виконується нерівність

$$T_0\Big((f_0(1+n\tilde{L})(1+nU_1) + nFL_1)(H+\Lambda)e^2\Lambda + F(1+nU_1)k_6\Big) \leqslant 1, \qquad (35)$$

то

$$|\Delta_j (S_i^u)'_t(S_k^a(t_j),t_j)| \leqslant [g_0(H+\Lambda)e^2\Lambda + G_1k_6 + f_0(1+n\tilde{L})(H+1)+$$
$$+\Lambda eF(1+nU_1)+1]|\Delta t_j| = k_8|\Delta t_j|.$$

Легко бачити, що правильна нерівність

$$|(S_i^u)'_x(S_k^a(t),t)h_k(t,a(t),u(a(t),t)) + (S_i^u)'_t(S_k^a(t),t)| \leqslant$$
$$\leqslant (G_1e+1)H + G_1\Lambda e + F + 1 = k_9.$$

Повернемося до перевірки умови **H5** при $\tilde{\chi}_i > 0$, тобто

$$|\Delta_j (S_i^u)'_x(x_j,t)| \leqslant \Big[|\Delta_j (\mu_k^i)'_t(\tilde{\chi}_i^{x_j}, S^a(\tilde{\chi}_i^{x_j}), \{S_s^u(S_{k'}^a(\tilde{\chi}_i^{x_j}), \tilde{\chi}_i^{x_j})\})|+$$
$$+\sum_{m=1}^{2}\Big[|\Delta_j (\mu_k^i)'_{a_m}(\tilde{\chi}_i^{x_j}, S^a(\tilde{\chi}_i^{x_j}), \{S_s^u(S_{k'}^a(\tilde{\chi}_i^{x_j}), \tilde{\chi}_i^{x_j})\})|\times$$
$$\times h_m(\tilde{\chi}_i^{x_1}, a(\tilde{\chi}_i^{x_1}), u(a(\tilde{\chi}_i^{x_1}), \tilde{\chi}_i^{x_1})) + |(\mu_k^i)'_{a_m}(\tilde{\chi}_i^{x_2}, S^a(\tilde{\chi}_i^{x_2}), \{S_s^u(S_{k'}^a(\tilde{\chi}_i^{x_2}), \tilde{\chi}_i^{x_2})\})|\times$$
$$\times|\Delta_j h_m(\tilde{\chi}_i^{x_j}, a(\tilde{\chi}_i^{x_j}), u(a(\tilde{\chi}_i^{x_j}), \tilde{\chi}_i^{x_j}))|\Big]+$$
$$+\sum_{\substack{s\notin I_{k'}\\ k'=1,2}}\Big(|\Delta_j (\mu_k^i)'_{w_s^{k'}}(\tilde{\chi}_i^{x_j}, S^a(\tilde{\chi}_i^{x_j}), \{S_s^u(S_{k'}^a(\tilde{\chi}_i^{x_j}), \tilde{\chi}_i^{x_j})\})|\times$$
$$\times[(S_s^u)'_x(S_{k'}^a(\tilde{\chi}_i^{x_1}), \tilde{\chi}_i^{x_1})h_{k'}(\tilde{\chi}_i^{x_1}, a(\tilde{\chi}_i^{x_1}), u(a(\tilde{\chi}_i^{x_1}), \tilde{\chi}_i^{x_1}))+$$
$$+(S_s^u)'_t(S_{k'}^a(\tilde{\chi}_i^{x_1}), \tilde{\chi}_i^{x_1})] + (\mu_k^i)'_{w_s^{k'}}(\tilde{\chi}_i^{x_2}, S^a(\tilde{\chi}_i^{x_2}), \{S_s^u(S_{k'}^a(\tilde{\chi}_i^{x_2}), \tilde{\chi}_i^{x_2})\})\times$$
$$\times[|\Delta_j (S_s^u)'_x(S_{k'}^a(\tilde{\chi}_i^{x_j}), \tilde{\chi}_i^{x_j})|h_{k'}(\tilde{\chi}_i^{x_1}, a(\tilde{\chi}_i^{x_1}), u(a(\tilde{\chi}_i^{x_1}), \tilde{\chi}_i^{x_1}))+$$
$$+|\Delta_j h_{k'}(\tilde{\chi}_i^{x_j}, a(\tilde{\chi}_i^{x_j}), u(a(\tilde{\chi}_i^{x_j}), \tilde{\chi}_i^{x_j}))(S_s^u)'_x(S_{k'}^a)(\tilde{\chi}_i^{x_2}), \tilde{\chi}_i^{x_2})+$$
$$+|\Delta_j (S_s^u)'_t(S_{k'}^a)(\tilde{\chi}_i^{x_j}), \tilde{\chi}_i^{x_j})|]\Big)\Big](\tilde{\chi}_i^{x_1})'_x+$$
$$+\Big((\mu_k^i)'_t(\tilde{\chi}_i^{x_2}, S^a(\tilde{\chi}_i^{x_2}), \{S_s^u(S_{k'}^a(\tilde{\chi}_i^{x_2}), \tilde{\chi}_i^{x_2})\})+$$
$$+\sum_{m=1}^{2}(\mu_k^i)'_{a_m}(\tilde{\chi}_i^{x_2}, S^a(\tilde{\chi}_i^{x_2}), \{S_s^u(S_{k'}^a(\tilde{\chi}_i^{x_2}), \tilde{\chi}_i^{x_2})\})\times$$
$$\times h_m(\tilde{\chi}_i^{x_2}, a(\tilde{\chi}_i^{x_2}), u(a(\tilde{\chi}_i^{x_2}), \tilde{\chi}_i^{x_2}))+$$
$$+\sum_{\substack{s\notin I_{k'}\\ k'=1,2}}(\mu_k^i)'_{w_s^{k'}}(\tilde{\chi}_i^{x_2}, S^a(\tilde{\chi}_i^{x_2}), \{S_s^u(S_{k'}^a(\tilde{\chi}_i^{x_2}), \tilde{\chi}_i^{x_2})\})\times$$
$$\times[(S_s^u)'_x(S_{k'}^a(\tilde{\chi}_i^{x_2}), \tilde{\chi}_i^{x_2})h_{k'}(\tilde{\chi}_i^{x_2}, a(\tilde{\chi}_i^{x_2}), u(a(\tilde{\chi}_i^{x_2}), \tilde{\chi}_i^{x_2}))+$$
$$+(S_s^u)'_t(S_{k'}^a(\tilde{\chi}_i^{x_2}), \tilde{\chi}_i^{x_2})]\Big)|\Delta_j (\tilde{\chi}_i^{x_j})'_x|+$$

$$+|\Delta_j f_i(S_k^a(\tilde{\chi}_i^{x_j}),\tilde{\chi}_i^{x_j},\tilde{u}(S_k^a(\tilde{\chi}_i^{x_j}),\tilde{\chi}_i^{x_j}))|(\tilde{\chi}_i^{x_1})'_x+$$
$$+|f_i(S_k^a(\tilde{\chi}_i^{x_2}),\tilde{\chi}_i^{x_2},\tilde{u}(S_k^a(\tilde{\chi}_i^{x_2}),\tilde{\chi}_i^{x_2}))||\Delta_j(\tilde{\chi}_i^{x_j})'_x|+$$
$$+\int\limits_{\tilde{\chi}_i^{x_1}}^{\tilde{\chi}_i^{x_2}}\Big((f_i)'_x(\widetilde{\varphi}_i^{x_1}(\tau),\tau,\tilde{u}(\widetilde{\varphi}_i^{x_1}(\tau),\tau))+\sum_{m=1}^n(f_i)'_{\tilde{u}_m}(\widetilde{\varphi}_i^{x_1}(\tau),\tau,\tilde{u}(\widetilde{\varphi}_i^{x_1}(\tau),\tau))\times$$
$$\times(\tilde{u}_m)'_x(\widetilde{\varphi}_i^{x_1}(\tau),\tau)\Big)[\widetilde{\varphi}_i^{x_1}]_x(\tau)d\tau+\int\limits_{\tilde{\chi_i}^{x_2}}^{t}\Big[\Big(|\Delta_j(f_i)'_x(\widetilde{\varphi}_i^{x_j}(\tau),\tau,\tilde{u}(\widetilde{\varphi}_i^{x_j}(\tau),\tau))|+$$
$$+\sum_{m=1}^n\Big(|\Delta_j(f_i)'_{\tilde{u}_m}(\widetilde{\varphi}_i^{x_j}(\tau),\tau,\tilde{u}(\widetilde{\varphi}_i^{x_j}(\tau),\tau))|(\tilde{u}_m)'_x(\widetilde{\varphi}_i^{x_1}(\tau),\tau)+$$
$$+(f_i)'_{\tilde{u}_m}(\widetilde{\varphi}_i^{x_2}(\tau),\tau,\tilde{u}(\widetilde{\varphi}_i^{x_2}(\tau),\tau))|\Delta_j(\tilde{u}_m)'_x(\widetilde{\varphi}_i^{x_j}(\tau),\tau)|\Big)\Big)[\widetilde{\varphi}_i^{x_1}]_x(\tau)+$$
$$+\Big((f_i)'_x(\widetilde{\varphi}_i^{x_2}(\tau),\tau,\tilde{u}(\widetilde{\varphi}_i^{x_2}(\tau),\tau))+\sum_{m=1}^n(f_i)'_{\tilde{u}_m}(\widetilde{\varphi}_i^{x_2}(\tau),\tau,\tilde{u}(\widetilde{\varphi}_i^{x_2}(\tau),\tau))\times$$
$$\times(\tilde{u}_m)'_x(\widetilde{\varphi}_i^{x_2}(\tau),\tau)\Big)|\Delta_j[\widetilde{\varphi}_i^{x_j}]_x(\tau)|\Big]d\tau\leqslant$$
$$\leqslant\Big[\Big(\mu_0(1+2H+2nk_1)(1+2H+2nk_9)+$$
$$+2Mh_0(1+2(\mathcal{H}+1)+2n\tilde{L}(\mathcal{H}+2))+2Mn(k_7H+(G_1e+1)h_0(1+2(\mathcal{H}+1)+$$
$$+2n\tilde{L}(\mathcal{H}+2))+k_8)\Big)\frac{8}{\gamma^2}e^2+M(1+2H+2nk_9)k_4+$$
$$+f_0(1+H)(1+n\tilde{L})\frac{8}{\gamma^2}e^2+Fk_4+F(1+nU_1)\frac{4}{\gamma}e^2+1\Big]|\Delta x_j|=k_{10}|\Delta x_j|.$$

Провівши аналогічні міркування та використавши вже знайдені оцінки, маємо

$$|\Delta_j(S_i^u)'_x(x,t_j)|\leqslant\Lambda k_{10}+e\Lambda(1+nU_1)\Big(\frac{2}{\gamma}(M(1+2H+2nk_9)+F)+$$
$$+1+eF(1+nU_1)\Big)|\Delta t_j|=k_{11}|\Delta t_j|.$$

Отже, $(S_i^u)'_x\in Lip(G_{T_0}^{S^a},L_1)$, $i=\overline{1,n}$, якщо

$$\max\{k_{10},k_{11},G_1+g_0e^2+1\}\leqslant L_1. \tag{36}$$

Тепер дослідимо стискуючі властивості оператора S в просторі Q.

Нехай $(u^j,a^j)\in Q,\ j=1,2$. Розглянемо

$$|\Delta_jS_k^{a^j}(t)|\leqslant\int\limits_0^t|\Delta_jh_k(\tau,a^j(\tau),u^j(a^j(\tau),\tau))|d\tau\leqslant2T_0h_0\rho(1+n(1+L)).$$

Перейдемо до оцінки різниць $|\Delta_j\tilde{u}_i^j(x,t)|$ і $|\Delta_j(\tilde{u}_i^j)'_x(x,t)|$, якщо $(x,t)\in G_{T_0}^{S^{a^1}}\cap\cap G_{T_0}^{S^{a^2}}$. Розглянемо найзагальніший випадок поведінки невідомих меж областей, тобто $(x,t)\in G_{T_0}^{S^{a^1}}\cap G_{T_0}^{S^{a^2}}:\ S_1^{a^2}(t)\leqslant x\leqslant S_2^{a^1}(t),\ 0\leqslant t\leqslant T_0$. Для визначеності будемо вважати, що $S_1^{a^2}(t) \leqslant a_1^2(t) \leqslant a_1^1(t)$. Тоді утворену область можна розбити на три підобласті і провести оцінку на кожній з них:

I) $S_1^{a^2}(t) \leqslant x \leqslant a_1^2(t)$,

$$|\Delta_j \tilde{u}_i^j(x,t)| \leqslant$$

$$\leqslant |(u_i^1)_x(a_1^1(t),t)(x-a_1^1(t)) + u_i^1(a_1^1(t),t) - (u_i^2)_x(a_1^2(t),t)(x-a_1^2(t)) - u_i^2(a_1^2(t),t)| \leqslant$$

$$\leqslant U_1|a_1^1(t)-a_1^2(t)| + L|a_1^1(t)-a_1^2(t)| + \rho \leqslant (2(\mathcal{H}+1)(L_1+1)+U_1+L+1)\rho = c\rho;$$

$$|\Delta_j(\tilde{u}_i^j)'_x(x,t)| \leqslant |(u_i^1)_x(a_1^1(t),t) - (u_i^2)_x(a_1^2(t),t)| \leqslant \rho + L_1\rho \leqslant (L_1+1)\rho;$$

II) $a_1^2(t) \leqslant x \leqslant a_1^1(t)$,

$$|\Delta_j \tilde{u}_i^j(x,t)| \leqslant |(u_i^1)_x(a_1^1(t),t)(x-a_1^1(t)) + u_i^1(a_1^1(t),t) - u_i^2(x,t)| \leqslant$$

$$\leqslant U_1|a_1^1(t)-a_1^2(t)| + L|a_1^1(t)-a_1^2(t)| + \rho \leqslant (L+U_1+1)\rho;$$

$$|\Delta_j(\tilde{u}_i^j)'_x(x,t)| \leqslant |(u_i^1)_x(a_1^1(t),t) - (u_i^2)_x(x,t)| \leqslant \rho + L_1\rho \leqslant (L_1+1)\rho;$$

III) $a_1^1(t) \leqslant x$,

$$|\Delta_j \tilde{u}_i^j(x,t)| \leqslant |u_i^1(x,t) - u_i^2(x,t)| \leqslant \rho;$$

$$|\Delta_j(\tilde{u}_i^j)'_x(x,t)| \leqslant |(u_i^1)_x(x,t) - (u_i^2)_x(x,t)| \leqslant \rho.$$

Тепер одержимо для випадку $S_1^{a^2}(t) \leqslant a_2^1(t) \leqslant a_1^1(t)$ загальну оцінку

$$|\Delta_j \tilde{u}_i^j(x,t)| \leqslant c\rho, \qquad |\Delta_j(\tilde{u}_i^j)'_x(x,t)| \leqslant (L_1+1)\rho.$$

Всі інші випадки будуть лише частковими підвипадками розглянутого.

Правильні такі леми.

Лема 8. *Нехай* $(x,t) \in G_{T_0}^{S^{a^1}} \cap G_{T_0}^{S^{a^2}}$, $(u^j, a^j) \in Q$, $j = 1,2$. *Тоді функція* $\varphi_i(\tau)$ *задовольняє нерівність*

$$|\Delta_j \varphi_i^{\tilde{u}^j}(\tau)| \leqslant \lambda_0 n e^{\lambda_0 T_0(1+n\tilde{L})} T_0 c\rho.$$

Доведення аналогічне до доведення леми 1.

З попередніх припущень одержуємо

$$|\Delta_j \varphi_i^{\tilde{u}^j}(\tau)| \leqslant \lambda_0 e n T_0 c\rho.$$

Лема 9. *Нехай* $(x,t) \in G_{T_0}^{S^{a^1}} \cap G_{T_0}^{S^{a^2}}$, $(u^j, a^j) \in Q$, $j = 1,2$ *і для фіксованого* $k \in \{1,2\}$ $\varphi_i^{\tilde{u}^j}(\chi_i^{\tilde{u}^j, S^{a^j}}) = S_k^{a^j}(\chi_i^{\tilde{u}^j, S^{a^j}})$, $j = 1,2$, *а параметри* U *та* T_0 *задовольняють умови (9), (24). Тоді справджується нерівність*

$$|\Delta_j \chi_i^{\tilde{u}^j, S^{a^j}}| \leqslant \frac{4}{\gamma} e^{\lambda_0(1+n\tilde{L})T_0} \lambda_0 n T_0 c\rho + \frac{8}{\gamma} T_0 h_0 \rho(1+n(L+1)).$$

Доведення. Нехай $k=1$ і $\chi_i^{\tilde{u}^1, S^{a^1}} > \chi_i^{\tilde{u}^2, S^{a^2}}$. Розглянемо різницю $\varphi_i^{\tilde{u}^2}(\tau) - S_1^{a^2}(\tau)$. За теоремою Лагранжа справджується оцінка

$$|\varphi_i^{\tilde{u}^2}(\chi_i^{\tilde{u}^1, S^{a^1}}) - S_1^{a^2}(\chi_i^{\tilde{u}^1, S^{a^1}})| = |\lambda_i(\varphi_i^{\tilde{u}^2}(\tau_0), \tau_0, \tilde{u}^2(\varphi_i^{\tilde{u}^2}(\tau_0), \tau_0)) -$$

$$- h_1(\tau_0, a^2(\tau_0), u^2(a^2(\tau_0), \tau_0))||\Delta_j \chi_i^{\tilde{u}^j, S^{a^j}}| \geqslant \frac{\gamma}{4}|\Delta_j \chi_i^{\tilde{u}^j, S^{a^j}}|.$$

Враховуючи лему 8, одержуємо

$$|\Delta_j \chi_i^{\tilde{u}^j, S^{a^j}}| \leqslant \frac{4}{\gamma}|\Delta_j \varphi_i^{\tilde{u}^j}(\chi_i^{\tilde{u}^1, S^{a^1}})| + \frac{4}{\gamma}|\Delta_j S_1^{a^j}(\chi_i^{\tilde{u}^1, S^{a^1}})| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{\gamma} e^{\lambda_0(1+n\tilde{L})T_0} \lambda_0 n T_0 c\rho + \frac{8}{\gamma} T_0 h_0 \rho (1 + n(L+1)).$$

□

При виконанні припущень теореми 1 оцінка з цієї леми дещо спроститься

$$|\Delta_j \chi_i^{\tilde{u}^j, S^{a^j}}| \leqslant \frac{4}{\gamma} e n \lambda_0 T_0 c\rho + \frac{8}{\gamma} T_0 h_0 \rho (1 + n(L+1)).$$

Лема 10. *Нехай* $(x,t) \in G_{T_0}^{S^{a^1}} \cap G_{T_0}^{S^{a^2}}$, $(u^j, a^j) \in Q$, $j = 1, 2$. *Тоді*

$$|\Delta_j [\varphi_i^{\tilde{u}^j}]_x(\tau)| \leqslant k_{12} T_0 \rho,$$

де $k_{12} = \lambda_0(n(1+n\tilde{L})T_0\lambda_0 e^{\lambda_0(1+n\tilde{L})T_0} + 1)(1+nU_1)e^{\Lambda(1+nU_1)T_0}c +$
$+ n\Lambda(L_1\lambda_0 T_0\ e^{\lambda_0(1+n\tilde{L})T_0} + 1)e^{\Lambda(1+nU_1)T_0}(L_1+1)$.

Доведення очевидне.

Враховуючи попередні умови, а також припущення

$$L_1 \lambda_0 T_0 e \leqslant 1, \tag{37}$$

одержуємо

$$|\Delta_j [\varphi_i^{\tilde{u}^j}]_x(\tau)| \leqslant k_{13} T_0 \rho,$$

де $k_{13} = \lambda_0(e+1)(1+nU_1) + enc + 2\Lambda n(L_1+1)$.

Введемо іншу метрику

$$\rho_0((u^1,a^1),(u^2,a^2)) = \max\Big\{ \max_{\substack{k=1,2\\ t\in[0,T]}} |a_k^1(t) - a_k^2(t)|, \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ (x,t)\in G_T^{a^1}\cap G_T^{a^2}}} |u_i^1(x,t) - u_i^2(x,t)| \Big\}$$

і позначимо $\rho_0 = \rho_0((u^1,a^1),(u^2,a^2))$.

Зауважимо, що провівши аналогічні міркування, як і попередньо, отримуємо

$$\rho_0((\tilde{u}^1,a^1),(\tilde{u}^2,a^2)) \leqslant c\rho_0.$$

Наступні очевидні оцінки сформулюємо у вигляді двох допоміжних лем.

Лема 11. *Нехай* $(x,t) \in G_{T_0}^{S^{a^1}} \cap G_{T_0}^{S^{a^2}}$, $(u^j, a^j) \in Q$, $j = 1, 2$. *Тоді*

$$|\Delta_j [\varphi_i^{\tilde{u}^j}]_t(\tau)| \leqslant \Lambda k_{12} T_0 \rho + \lambda_0 n e^{\Lambda(1+nU_1)T_0} c\rho_0.$$

Лема 12. *Нехай* $(x,t) \in G_{T_0}^{S^{a^1}} \cap G_{T_0}^{S^{a^2}}$, $(u^j, a^j) \in Q$, $j = 1, 2$. *Тоді*

$$|\Delta_j (\chi_i^{\tilde{u}^j, S^{a^j}})'_x| \leqslant \Big[\frac{2}{\gamma} k_{12} + \frac{4}{\gamma^2} e^{\Lambda(1+nU_1)T_0} \lambda_0 c\Big(\Lambda(1+nU_1) n e^{\lambda_0(1+n\tilde{L})T_0} +$$

$$+ 2(1+n\tilde{L}) h_0 (1 + n(L+1))\Big) + \frac{16}{\gamma^3} e^{\Lambda(1+nU_1)T_0} e^{\lambda_0(1+n\tilde{L})T_0} \lambda_0 n (1+n\tilde{L}) c \times$$

$$\times (h_0(\mathcal{H}+1) + \lambda_0(H+1))\Big] T_0 \rho + \Big[\frac{4}{\gamma^2} n e^{\Lambda(1+nU_1)T_0} (h_0(1+n(L+1)) + \lambda_0 n)\Big] c\rho_0.$$

Згідно з попередніми припущеннями

$$|\Delta_j[\varphi_i^{\tilde{u}^j}]_t(\tau)| \leqslant \Lambda k_{13} T_0 \rho + \lambda_0 enc\rho_0, \qquad |\Delta_j(\chi_i^{\tilde{u}^j, S^{a^j}})'_x| \leqslant k_{14} T_0 \rho + k_{15}\rho_0,$$

де $k_{14} = \dfrac{2}{\gamma}k_{13} + \dfrac{4}{\gamma^2}e\lambda_0 n\Big(\Lambda e(1+nU_1)+(1+n\tilde{L})h_0(1+n(L+1))\Big)c + \dfrac{16}{\gamma^3}e^2 n\lambda_0(1+n\tilde{L})c \times$ $\times\Big(h_0(\mathcal{H}+2)+\lambda_0(H+1)\Big)$, $k_{15} = \dfrac{4}{\gamma^2}en\Big(h_0(1+n(L+1))+2\lambda_0 n\Big)c$. Перейдемо до оцінки різниці $|\Delta_j S_i^{u^j}(x,t)|$. Нехай $(x,t) \in G_{T_0}^{S^{a^1}} \cap G_{T_0}^{S^{a^2}}$, $(u^j, a^j) \in Q$, $j = 1,2$. Розглянемо різні випадки поведінки характеристик, припустивши виконання нерівності

$$2(H+\Lambda)T_0 \leqslant a_2^0 - a_1^0. \tag{38}$$

Нехай $\chi_i^{\tilde{u}^j, S^{a^j}} = 0$, $j = 1,2$. Тоді

$$|\Delta_j S_i^{u^j}(x,t)| \leqslant |\Delta_j g_i(\varphi_i^{\tilde{u}^j}(0))| + \int\limits_0^t |\Delta_j f_i(\varphi_i^{\tilde{u}^j}(\tau), \tau, \tilde{u}^j(\varphi_i^{\tilde{u}^j}(\tau),\tau))| d\tau \leqslant$$

$$\leqslant g_0\lambda_0 n T_0 ec\rho + T_0 f_0(1+n\tilde{L})\lambda_0 n T_0 ec\rho + T_0 f_0 nc\rho \leqslant k_{16} T_0 \rho,$$

де $k_{16} = [g_0\lambda_0 ne + f_0 n(e+1)]c$.

Якщо ж $\chi_i^{\tilde{u}^j, S^{a^j}} > 0$, $\varphi_i^{\tilde{u}^j}(\chi_i^{\tilde{u}^j, S^{a^j}}) = S_1^{a^j}(\chi_i^{\tilde{u}^j, S^{a^j}})$, $j = 1,2$ і для визначеності $\chi_i^{\tilde{u}^1, S^{a^1}} < \chi_i^{\tilde{u}^2, S^{a^2}}$, то обидві характеристики перетинають ліву бічну межу відповідної області. Маємо оцінку

$$|\Delta_j S_i^{u^j}(x,t)| \leqslant \Big|\Delta_j \mu_i^k\Big(\chi_i^{\tilde{u}^j, S^{a^j}}, S^{a^j}(\chi_i^{\tilde{u}^j, S^{a^j}})\{S_s^{u^j}(S_{k'}^{a^j}(\chi_i^{\tilde{u}^j, S^{a^j}}), \chi_i^{\tilde{u}^j, S^{a^j}})\}\Big)\Big| +$$

$$+ \int\limits_{\chi_i^{\tilde{u}^2, S^{a^2}}}^t |\Delta_j f_i(\varphi_i^{\tilde{u}^j}(\tau), \tau, \tilde{u}^j(\varphi_i^{\tilde{u}^j}(\tau),\tau))| d\tau + \int\limits_{\chi_i^{\tilde{u}^1, S^{a^1}}}^{\chi_i^{\tilde{u}^2, S^{a^2}}} |f_i(\varphi_i^{\tilde{u}^1}(\tau), \tau, \tilde{u}^1(\varphi_i^{\tilde{u}^1}(\tau),\tau))| d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \Big((\mu_0(1+2H+2nk_1(H+1)) + F)\frac{4}{\gamma}\Big(\lambda_0 ne + 2h_0(1+n(\tilde{L}+1))\Big)c +$$

$$+2\mu_0(1+nk_1)2h_0(1+n(L+1))c + n\mu_0 k_{16} + f_0 n(e+1)c\Big)T_0\rho.$$

Нехай $\chi_i^{\tilde{u}^1, S^{a^1}} > 0$, $\chi_i^{\tilde{u}^2, S^{a^2}} = 0$, $\varphi_i^{\tilde{u}^1}(\chi_i^{\tilde{u}^1, S^{a^1}}) = S_1^{a^1}(\chi_i^{\tilde{u}^1, S^{a^1}})$. Цей випадок зводиться до двох попередніх. Для обґрунтування цього визначимо такі функції

$$a_1^3(t) = \max\{a_1^1(t), a_1^2(t)\}, \quad a_2^2(t) = \min\{a_2^1(t), a_2^2(t)\},$$

$$u^\alpha(x,t) = \alpha u^1(x,t) + (1-\alpha)u^2(x,t), \qquad \alpha \in [0,1].$$

Легко бачити таке: якщо $(u^1, a^1) \in Q$, $(u^2, a^2) \in Q$, то $(u^\alpha(x,t), a^3(t)) \in Q$ для всіх α. Розглянемо характеристику $x = \varphi(\tau; x, t, \alpha u^1 + (1-\alpha)u^2) = \varphi^\alpha(\tau)$. Зауважимо, що $\varphi^\alpha(\tau)$ неперервна за параметром α. Тоді існує таке α_0, $\varphi^{\alpha_0}(0) = a_1^0$. Позначимо $u^3 = u^{\alpha_0}$. Розглянемо різницю

$$|\Delta_j S_i^{u^j}(x,t)| \leqslant |S_i^{u^1}(x,t) - S_i^{u^3}(x,t)| + |S_i^{u^3}(x,t) - S_i^{u^2}(x,t)| \leqslant$$

$$\leqslant \Big((\mu_0(1+2H+2nk_1(H+1))+F)\frac{4}{\gamma}(\lambda_0 ne+2h_0(1+n(L+1)))c+2\mu_0(1+nk_1)\times$$
$$\times 2h_0c(1+n(L+1))+n\mu_0k_{16}+f_0n(e+1)c\Big)T_0\cdot \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\(x,t)\in G_T^{a^1}\cap G_T^{a^3}}}|u_i^1-u_i^3|+k_{16}T_0\times$$
$$\times \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\(x,t)\in G_T^{a^2}\cap G_T^{a^3}}}|u_i^3-u_i^2|\leqslant \Big((\mu_0(1+2H+2nk_1(H+1))+F)\frac{4}{\gamma}(\lambda_0 ne+$$
$$+2h_0(1+n(L+1)))c+2\mu_0(1+nk_1)2h_0(1+n(L+1))c+$$
$$+(1+n\mu_0)k_{16}+f_0n(e+1)c\Big)T_0\cdot \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\(x,t)\in G_T^{a^1}\cap G_T^{a^2}}}|u_i^1-u_i^2|\leqslant$$
$$\leqslant \Big((\mu_0(1+2H+2nk_1(H+1))+F)\frac{4}{\gamma}(\lambda_0 ne+2h_0(1+n(L+1)))c+$$
$$+2\mu_0(1+nk_1)2h_0(1+n(L+1))c+(1+n\mu_0)k_{16}+f_0n(e+1)c\Big)T_0\rho=k_{17}T_0\rho.$$

Отже, в будь-якому з цих випадків правильна оцінка

$$|\Delta_j S_i^{u^j}(x,t)|\leqslant k_{17}T_0\rho.$$

Тому

$$\rho_0((S^{u^1},S^{a^1}),(S^{u^2},S^{a^2}))\leqslant \max\{2h_0(1+n(L+1)),k_{17}\}T_0\rho=K_1T_0\rho.$$

Тепер оцінимо $|\Delta_j(S_i^{u^j})'_x|$ при наведених випадках поведінки характеристик. Нехай маємо $\chi_i^{\tilde{u}^j,S^{a^j}}=0,\ j=1,2.$ Тоді

$$|\Delta_j(S_i^{u^j})'_x(x,t)|\leqslant |\Delta_j g_i'(\varphi_i^{\tilde{u}^j}(0))|[\varphi_i^{\tilde{u}^1}]_x(0)+g_i'(\varphi_i^{\tilde{u}^2}(0))|\Delta_j[\varphi_i^{\tilde{u}^j}]_x(0)|+$$
$$+\int_0^t\Big(|\Delta_j(f_i)'_x(\varphi_i^{\tilde{u}^j}(\tau),\tau,\tilde{u}^j(\varphi_i^{\tilde{u}^j}(\tau),\tau))|+$$
$$+\sum_{m=1}^n|\Delta_j(f_i)'_{\tilde{u}_m}(\varphi_i^{\tilde{u}^j}(\tau),\tau,\tilde{u}^j(\varphi_i^{\tilde{u}^j}(\tau),\tau))|(\tilde{u}_m^1)'_x(\varphi_i^{\tilde{u}^1}(\tau),\tau)+$$
$$+\sum_{m=1}^n(f_i)'_{\tilde{u}_m}(\varphi_i^{\tilde{u}^2}(\tau),\tau,\tilde{u}^2(\varphi_i^{\tilde{u}^2}(\tau),\tau))|\Delta_j(\tilde{u}_m^j)'_x(\varphi_i^{\tilde{u}^j}(\tau),\tau)|\Big)[\varphi_i^{\tilde{u}^1}]_x(\tau)d\tau+$$
$$+\int_0^t\Big((f_i)'_x(\varphi_i^{\tilde{u}^2}(\tau),\tau,\tilde{u}^2(\varphi_i^{\tilde{u}^2}(\tau),\tau))|+$$
$$+\sum_{m=1}^n(f_i)'_{\tilde{u}_m}(\varphi_i^{\tilde{u}^2}(\tau),\tau,\tilde{u}^2(\varphi_i^{\tilde{u}^2}(\tau),\tau))(\tilde{u}_m^2)'_x(\varphi_i^{\tilde{u}^2}(\tau),\tau)\Big)|\Delta_j[\varphi_i^{\tilde{u}^j}]_x(\tau)|d\tau\leqslant$$
$$\leqslant g_0\lambda_0ne^2T_0c\rho+G_1k_{13}T_0\rho+T_0ec\Big((1+nU_1)f_0(1+n\tilde{L})\lambda_0enT_0\rho+$$
$$+(1+nU_1)f_0n\rho+nFL_1\lambda_0neT_0\rho+nF\rho\Big)+T_0F(1+nU_1)k_{13}T_0\rho\leqslant$$
$$\leqslant [g_0ne^2\lambda_0c+(G_1+1)k_{13}+f_0en(1+nU_1)(e+1)c+2nFec]T_0\rho=k_{18}T_0\rho.$$

Випишемо ще одну оцінку для цього випадку, яка знадобиться нам надалі

$$|\Delta_j (S_i^{u^j})'_t(x,t)| \leqslant |\Delta_j g'_i(\varphi_i^{\tilde{u}^j}(0))|[\varphi_i^{\tilde{u}^1}]_t(0) + g'_i(\varphi_i^{\tilde{u}^2}(0))|\Delta_j[\varphi_i^{\tilde{u}^j}]_t(0)|+$$
$$+|\Delta_j f_i(x,t,\tilde{u}^j(x,t))| + \int\limits_0^t \Big(|\Delta_j (f_i)'_x(\varphi_i^{\tilde{u}^j}(\tau),\tau,\tilde{u}^j(\varphi_i^{\tilde{u}^j}(\tau),\tau))|+$$
$$+\sum_{m=1}^n |\Delta_j (f_i)'_{\tilde{u}_m}(\varphi_i^{\tilde{u}^j}(\tau),\tau,\tilde{u}^j(\varphi_i^{\tilde{u}^j}(\tau),\tau))|(\tilde{u}_m^1)'_x(\varphi_i^{\tilde{u}^1}(\tau),\tau)+$$
$$+\sum_{m=1}^n (f_i)'_{\tilde{u}_m}(\varphi_i^{\tilde{u}^2}(\tau),\tau,\tilde{u}^2(\varphi_i^{\tilde{u}^2}(\tau),\tau))|\Delta_j (\tilde{u}_m^j)'_x(\varphi_i^{\tilde{u}^j}(\tau),\tau)|\Big)[\varphi_i^{\tilde{u}^1}]_t(\tau)d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t \Big((f_i)'_x(\varphi_i^{\tilde{u}^2}(\tau),\tau,\tilde{u}^2(\varphi_i^{\tilde{u}^2}(\tau),\tau))|+$$
$$+\sum_{m=1}^n (f_i)'_{\tilde{u}_m}(\varphi_i^{\tilde{u}^2}(\tau),\tau,\tilde{u}^2(\varphi_i^{\tilde{u}^2}(\tau),\tau))(\tilde{u}_m^2)'_x(\varphi_i^{\tilde{u}^2}(\tau),\tau)\Big)|\Delta_j[\varphi_i^{\tilde{u}^j}]_t(\tau)|d\tau \leqslant$$
$$\leqslant g_0\lambda_0 ne^2 T_0\rho\Lambda ec + G_1 k_{13}\Lambda T_0\rho + \Big(G_1\lambda_0 en\rho_0 + f_0 n\rho_0+$$
$$+T_0\Lambda e\Big((1+nU_1)f_0(1+n\tilde{L})\lambda_0 neT_0\rho + (1+nU_1)f_0 n\rho + nFL_1\lambda_0 neT_0\rho+$$
$$+nF\rho\Big)\Big)c + T_0F(1+nU_1)k_{13}\Lambda T_0\rho + T_0F(1+nU_1)\lambda_0 enc\rho_0 \leqslant$$
$$\leqslant [g_0 ne^2\lambda_0\Lambda + (G_1+\Lambda)k_{13} + f_0\Lambda ne(1+nU_1)(e+1) + 2n\Lambda Fe]T_0\rho+$$
$$+[f_0 n + \lambda_0 en(G_1+1)]\rho_0 \leqslant k_{19}T_0\rho + k_{20}\rho_0,$$

де $k_{19} = g_0\lambda_0 ne^2\Lambda c + (G_1+\Lambda)k_{13} + [ef_0 n(1+nU_1)(e+1) + 2nF]e\Lambda c$,
$k_{20} = ((G_1+1)\lambda_0 ne + f_0 n)c$.

Оцінимо попередньо

$$|\Delta_j[\varphi_i^{S_k^{a^j}}]_t(\tau)| \leqslant |\Delta_j\lambda_i(S_k^{a^j}(t),t,\tilde{u}(S_k^{a^j}(t),t))|e+$$
$$+\Lambda e\Big(|\Delta_j(\lambda_i)'_x(\varphi_i^{S_k^{a^j}}(\theta),\theta,\tilde{u}(\varphi_i^{S_k^{a^j}}(\theta),\theta))| + nU_1|\Delta_j(\lambda_i)'_{\tilde{u}_m}(\varphi_i^{S_k^{a^j}}(\theta),\theta,\tilde{u}(\varphi_i^{S_k^{a^j}}(\theta),\theta))|+$$
$$+n\Lambda|\Delta_j(\tilde{u}_m)(\varphi_i^{S_k^{a^j}}(\theta),\theta)|\Big) \leqslant \lambda_0 e(1+n\tilde{L})2T_0h_0\rho(1+n(1+L))+$$
$$+\Lambda e(1+nU_1)\lambda_0(1+n\tilde{L})e2T_0h_0\rho(1+n(1+L)) + ne\Lambda^2 L_1 e2T_0h_0\rho(1+n(1+L)) =$$
$$= 2eh_0(1+n(L+1))[\lambda_0(1+n\tilde{L})(1+\Lambda e(1+nU_1)) + neL_1\Lambda^2]T_0\rho = k_{21}T_0\rho.$$

Тепер можемо розглянути

$$|\Delta_j(S_i^u)'_t(S_k^{a^j}(t),t)| \leqslant |\Delta_j g'_i(\varphi_i^{S_k^{a^j}}(0))|[\varphi_i^{S_k^{a^1}}]_t(0) + g'_i(\varphi_i^{S_k^{a^2}}(0))|\Delta_j[\varphi_i^{S_k^{a^j}}]_t(0)|+$$
$$+|\Delta_j f_i(S_k^{a^j}(t),t,\tilde{u}(S_k^{a^j}(t),t))| + \int\limits_0^t \Big(|\Delta_j(f_i)'_x(\varphi_i^{S_k^{a^j}}(\tau),\tau,\tilde{u}(\varphi_i^{S_k^{a^j}}(\tau),\tau))|+$$
$$+\sum_{m=1}^n |\Delta_j(f_i)'_{\tilde{u}_m}(\varphi_i^{S_k^{a^j}}(\tau),\tau,\tilde{u}(\varphi_i^{S_k^{a^j}}(\tau),\tau))|(\tilde{u}_m)'_x(\varphi_i^{S_k^{a^1}}(\tau),\tau)+$$

$$+\sum_{m=1}^{n}(f_i)'_{\tilde{u}_m}(\varphi_i^{S_k^{a^2}}(\tau),\tau,\tilde{u}(\varphi_i^{S_k^{a^2}}(\tau),\tau))|\Delta_j(\tilde{u}_m)'_x(\varphi_i^{S_k^{a^j}}(\tau),\tau)|\Big)[\varphi_i^{S_k^{a^1}}]_t(\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\Big((f_i)'_x(\varphi_i^{S_k^{a^2}}(\tau),\tau,\tilde{u}(\varphi_i^{S_k^{a^2}}(\tau),\tau))|+$$

$$+\sum_{m=1}^{n}(f_i)'_{\tilde{u}_m}(\varphi_i^{S_k^{a^2}}(\tau),\tau,\tilde{u}(\varphi_i^{S_k^{a^2}}(\tau),\tau))(\tilde{u}_m)'_x(\varphi_i^{S_k^{a^2}}(\tau),\tau)\Big)|\Delta_j[\varphi_i^{S_k^{a^j}}]_t(\tau)|d\tau.$$

Припустимо, що виконується нерівність

$$\Lambda F e^2 n L_1 T_0 \leqslant 1. \tag{39}$$

Тоді

$$|\Delta_j(S_i^u)'_t(S_k^{a^j})(t),t)|\leqslant[(G_1+1)k_{19}+(g_0\Lambda e^2+f_0(1+n\tilde{L})(e+1)+1)2h_0(1+n(L+1))]\times$$
$$\times(L+U_1+1)T_0\rho=k_{22}T_0\rho.$$

Для випадку $\chi_i^{\tilde{u}^j,S^{a^j}}>0$, $j=1,2$, для визначеності $\varphi_i^{\tilde{u}^j}(\chi_i^{\tilde{u}^j,S^{a^j}})=S_1^{a^j}(\chi_i^{\tilde{u}^j,S^{a^j}})$, $j=1,2$, маємо

$$|\Delta_j(S_i^{u^j})'_x(x,t)|\leqslant\frac{2}{\gamma}e\Big|\Delta_j(\mu_i^k)'_t\Big(\chi_i^{\tilde{u}^j,S^{a^j}},S^{a^j}(\chi_i^{\tilde{u}^j,S^{a^j}})\{S_s^{u^j}(S_{k'}^{a^j}(\chi_i^{\tilde{u}^j,S^{a^j}}),\chi_i^{\tilde{u}^j,S^{a^j}})\}\Big)\Big|+$$
$$+\frac{4}{\gamma}eH\Big|\Delta_j(\mu_i^k)'_{a_m}\Big(\chi_i^{\tilde{u}^j,S^{a^j}},S^{a^j}(\chi_i^{\tilde{u}^j,S^{a^j}})\{S_s^{u^j}(S_{k'}^{a^j}(\chi_i^{\tilde{u}^j,S^{a^j}}),\chi_i^{\tilde{u}^j,S^{a^j}})\}\Big)\Big|+$$
$$+\frac{4}{\gamma}eM|\Delta_j h_m(\chi_i^{\tilde{u}^j,S^{a^j}},a^j(\chi_i^{\tilde{u}^j,S^{a^j}}),u^j(a^j(\chi_i^{\tilde{u}^j,S^{a^j}}),\chi_i^{\tilde{u}^j,S^{a^j}}))|+$$
$$+\frac{4}{\gamma}enk_9\Big|\Delta_j(\mu_i^k)'_{w_s^{k'}}\Big(\chi_i^{\tilde{u}^j,S^{a^j}},S^{a^j}(\chi_i^{\tilde{u}^j,S^{a^j}})\{S_s^{u^j}(S_{k'}^{a^j}(\chi_i^{\tilde{u}^j,S^{a^j}}),\chi_i^{\tilde{u}^j,S^{a^j}})\}\Big)\Big|+$$
$$+\frac{4}{\gamma}enMH|\Delta_j(S_s^{u^j})'_x(S_{k'}^{a^j}(\chi_i^{\tilde{u}^j,S^{a^j}}),\chi_i^{\tilde{u}^j,S^{a^j}})|+$$
$$+\frac{4}{\gamma}enMU_1|\Delta_j h_{k'}(\chi_i^{\tilde{u}^j,S^{a^j}},a^j(\chi_i^{\tilde{u}^j,S^{a^j}}),u^j(a^j(\chi_i^{\tilde{u}^j,S^{a^j}}),\chi_i^{\tilde{u}^j,S^{a^j}}))|+$$
$$+\frac{4}{\gamma}enM|\Delta_j(S_s^{u^j})'_t(S_{k'}^{a^j}(\chi_i^{\tilde{u}^j,S^{a^j}}),\chi_i^{\tilde{u}^j,S^{a^j}})|+M(1+2H+2nk_1)|\Delta_j(\chi_i^{\tilde{u}^j,S^{a^j}})'_x|\leqslant$$
$$\leqslant\Big[\frac{2}{\gamma}e\mu_0\Big((1+2H+2nk_1)\frac{4}{\gamma}en\lambda_0+2(1+n\tilde{L})h_0(1+n(L+1))+k_{17}\Big)(1+2H+$$
$$+2nk_9)+\frac{4}{\gamma}eM\Big(2h_0(1+nU_1)(\mathcal{H}+1)(1+n\tilde{L})\frac{4}{\gamma}en\lambda_0+\frac{4}{\gamma}en^2\lambda_0L_1(H+1)^2+$$
$$+nHL_1h_0(1+n(L+1))+nH[g_0e^2\lambda_0n+(G_1+1)k_{13}+f_0en(1+nU_1)(e+1)+2nFe]+n(k_{19}+$$
$$+k_{22})\Big)\Big]T_0\rho+\frac{2}{\gamma}e(H(1+nU_1)h_0(1+n\tilde{L})+nMk_{20})\rho_0=k_{22}T_0\rho+k_{24}\rho_0.$$

Розглянемо останній можливий випадок поведінки характеристик, а саме $\chi_i^{\tilde{u}^1,S^{a^1}}>0$, $\chi_i^{\tilde{u}^2,S^{a^2}}=0$. Аналогічно як для різниці $\Delta_j S_i^{u^j}(x,t)$ він зводиться до двох попередніх випадків, а саме

$$|\Delta_j(S_i^{u^j})'_x(x,t)|\leqslant|(S_i^{u^1})'_x(x,t)-(S_i^{u^3})'_x(x,t)|+|(S_i^{u^3})'_x(x,t)-(S_i^{u^2})'_x(x,t)|\leqslant$$

$$\leqslant k_{23}T_0 \cdot \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\(x,t)\in G_T^{a^1}\cap G_T^{a^3}}} |(u^1)'_x-(u^3)'_x| + k_{24}\cdot \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\(x,t)\in G_T^{a^1}\cap G_T^{a^3}}} |u^1-u^3| + k_{16}T_0\times$$
$$\times \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\(x,t)\in G_T^{a^2}\cap G_T^{a^3}}} |(u^2)'_x-(u^3)'_x| \leqslant \max\{k_{18},k_{23}\}T_0\rho + k_{24}\rho_0.$$

Отож, у будь-якому з розглянутих випадків правильна оцінка

$$|\Delta_j(S_i^{u^j})'_x(x,t)| \leqslant \max\{k_{18},k_{23}\}T_0\rho + k_{24}\rho_0 = K_2T_0\rho + k_{24}\rho_0.$$

Отже,

$$\rho((S^{u^1},S^{a^1}),(S^{u^2},S^{a^2})) \leqslant \max\{K_1,K_2\}T_0\rho + k_{24}\rho_0.$$

Легко бачити, що оператор S не є стискуючим. Розглянемо його квадрат

$$\rho((S^2u^1,S^2a^1),(S^2u^2,S^2a^2)) \leqslant \max\{K_1,K_2\}T_0\rho((S^{u^1},S^{a^1}),(S^{u^2},S^{a^2}))+$$
$$+k_{24}\rho_0((S^{u^1},S^{a^1}),(S^{u^2},S^{a^2})) \leqslant \max\{K_1,K_2\}T_0(\max\{K_1,K_2\}T_0\rho + k_{24}\rho)+$$
$$+k_{24}K_1T_0\rho = K_3T_0\rho.$$

Звідси, якщо T_0 задовольняє нерівність

$$K_3T_0 \leqslant 1, \tag{40}$$

то відображення $S^2 : Q \to Q$ буде стискуючим.

Зазначимо, що сукупність усіх накладених умов є сумісною. Справді, зафіксуємо достатньо малі U, T_0, щоб виконувалась (9). Виберемо тепер достатньо великий параметр L, щоб виконувалась нерівність (27), а потім зафіксуємо U_1 згідно з (30). Далі за допомогою (36) визначаємо L_1 та зменшуємо T_0, щоб задовольнити нерівності (14), (16), (17), (19)-(25), (28), (29), (31)-(35), (37)-(40).

Зауваження 6. Нехай $\hat{U} \leqslant U$, $\hat{U}_1 \geqslant U$, $\hat{L} \geqslant L$, тоді існує $\tilde{L}_1 \geqslant L_1$, таке що для довільного $\hat{L}_1 \geqslant \tilde{L}_1$ існує $\tilde{T}_0 \leqslant T_0$, при якому для будь-якого $\hat{T}_0 \leqslant \tilde{T}_0$ оператор S в просторі $Q(\hat{T}_0,\hat{U},\hat{U}_1,\hat{L},\hat{L}_1)$ задовольняє умови теореми Банаха.

Нехай усі зазначені обмеження виконуються. Тоді за теоремою Банаха про стискуючі відображення існує єдина нерухома точка оператора S в просторі Q, яка і буде класичним розв'язком задачі (1)-(5).

Покажемо, що розв'язок єдиний. Міркуємо від супротивного. Припустимо, що існують два набори функцій $(u^0,a^0)\in Q$, $(u^1,a^1)\in \left(C_L^1(\overline{G_{T_0}^a})\right)^n \times \left(\mathbb{C}^1[0,T_0]\right)^2$, що є розв'язками задачі (1)-(5).

Позначимо

$$\Upsilon_1 = \{t\in[0,T_0] : a^0(t)\neq a^1(t)\}, \quad T_1 = \inf\Upsilon_1,$$
$$\Upsilon_2 = \{t\in[0,T_1] : u^0(x,t)\neq u^1(x,t) \ \text{ для деякого } \ (x,t)\in \overline{G_{T_0}^{a^0}},\}, \quad T_2 = \inf\Upsilon_2.$$

Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що $T_2 = 0$. Розглянемо задачу (1), (2), (5) з такими початковими умовами:

$$a(0) = a^0(0),$$
$$u(x,0) = g^0(x), \quad a_1^0(0) \leqslant x \leqslant a_2^0(0), \quad g^0(x) = u^0(x,0) = u^1(x,0).$$

Зазначимо, що вибравши параметри $\hat{U}_1, \hat{L}, \hat{L}_1$ – достатньо великими, а параметри $\hat{U}, \hat{T}_0$ – достатньо малими, ми забезпечимо належність розв'язків (u^0, a^0) та (u^1, a^1) простору $Q(\hat{T}_0, \hat{U}, \hat{U}_1, \hat{L}, \hat{L}_1)$ на $[0, \hat{T}_0]$. Згідно з зауваженням 6 оператор S в цьому просторі задовольняє умови теореми Банаха, причому має дві різні нерухомі точки.

Отримана суперечність доводить, що $T_2 = T_0$, тому $a^0 = a^1$ на $[0, T_0]$, $u^0 = u^1$ на $\overline{G^{a^0}_{T_0}}$. Теорему 1 доведено.

Зауваження 7. Запропонована схема доведення теореми дає змогу, з незначними змінами, отримати розв'язок задачі, якщо (2) замінити, як запропоновано в [7]-[8], співвідношенням

$$\frac{d^m a_k}{dt^m} = h_k(t, a(t), a'(t), ..., a^{(m-1)}(t), u(a, t)), \quad k = 1, 2.$$

□

1. *Gupta S.C.* The Classical Stefan Problem: Basic consepts, modeling and analisis / *Gupta S.C.* – Amsterdam, Elsevier., 2003.
2. *Lee Da-tsin.* Some existence theorems for quasilinear hyperbolic systems of partial differential equations in two independent variables / *Lee Da-tsin, Wen-tsu Y.* // Scientia Sinica. – 1964. – Vol. 13, №5. – P. 551-562.
3. *Самарин Ю.П.* Об одной нелинейной задаче для волнового уравнения в однородном пространстве / *Самарин Ю.П.* // Прикл. матем. и мех. – 1964. – Т. 28, №3. – С. 542-543.
4. *Hill C.D.* A hyperbolic free boundary problem / *Hill C.D.* // J. Math. Anal. and Appl. – 1970. – Vol. 31, №1. – P. 117-129.
5. *Мышкис А.Д.* Непрерывные решения квазилинейных гиперболических систем с двумя независимыми переменными / *Мышкис А.Д., Филимонов А.М.* // Диф.уравнения. – 1981. – Т. 17, №3. – С. 488-500.
6. *Мышкис А.Д.* О глобальной непрерывной разрешимости смешанной задачи для одномерных гиперболических систем квазилинейных уравнений / *Мышкис А.Д., Филимонов А.М.* // Диф. уравнения. – 2008. – Т. 44, №3. – С. 394-407.
7. *Казаков К.Ю.* Об определении неизвестной линии разрыва решения смешанной задачи для квазилинейных гиперболических систем / *Казаков К.Ю., Морозов С.Ф.* // Укр. мат.журн. – 1985. – Т. 37, №4. – С. 443-450.
8. *Bassanini P.* Generalized solutions to free boundary problems for hyperbolic systems of functional partial differential equations / *Bassanini P., Turo J.* // Ann. math. pura ed appl. – 1990. – Vol. CLVI, №4. – P. 211-230.
9. *Андрусяк Р.В.* Локальная и глобальная разрешимости квазилинейной гиперболической задачи Стефана на прямой / *Андрусяк Р.В., Кирилич В.М., Мышкис А.Д.* // Диф. уравнения. – 2006. – Т. 42, №4. – С. 489-503.
10. *Андрусяк Р.В.* Задача для квазілінійної системи гіперболічного типу у криволінійному секторі з вільними межами / *Андрусяк Р.В., Кирилич В.М.* // Наук. Вісник Чернівецького ун-ту. Математика. – 2008. – Вип. 421. – С. 5-12.
11. *Li Ta-tsien.* Global classical solutions for quasilinear hyperbolic systems / *Li Ta-tsien.* – New York, 1994.

SMOOTH SOLVABILITY OF QUASILINEAR HYPERBOLIC PROBLEM WITH FREE BOUNDARIES

Ruslan ANDRYAK, Natalya BURDEINA, Volodymyr KYRYLYCH

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: kyrylych@franko.lviv.ua

A Mixed problem with unknown boundaries for one-dimensional hyperbolic systems of the first order quasi-linear equations with nonlinear conditions of the behavior of the domain boundaries and nonlocal boundary conditions is considered. Applying the method of characteristic and the Banach fixed point theorem sufficient conditions for the local classical solvability of the problem for small values of time variable are established.

Key words: hyperbolic problem with free boundaries, quasi-linear equations, classical solution, method of characteristic, Banach theorem.

ГЛАДКАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Руслан АНДРУСЯК, Наталья БУРДЕЙНА, Владимир КИРИЛИЧ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: kyrylych@franko.lviv.ua

Рассмотрено смешанную задачу с неизвестными границами для одномерной гиперболической системы квазилинейных уравнений первого порядка с нелинейными условиями на поведение границ области и нелокальными граничными условиями. С помощью метода характеристик и теоремы Банаха о неподвижной точке установлено достаточные условия классической разрешимости задачи для малых значений переменной по времени.

Ключевые слова: гиперболическая задача со свободными границами, квазилинейные уравнения, классическое решение, метод характеристик, теорема Банаха.

Стаття надійшла до редколегії 10.06.2009

Прийнята до друку 12.06.2009

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ — *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2009. — *Ser. Mech. Math. 2009.*
Вип. 70. С. 38–44 — *Is. 70. P. 38–44*

УДК 519.8, 336.761.6

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ ОПТИМІЗАЦІЇ РОЗШИРЕНОГО ФОНДОВОГО ПОРТФЕЛЯ

Микола БУГРІЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: ol_buhrii@i.ua

У рамках нечітко-множинної теорії запропоновано метод розв'язування задачі оптимізації розширеного фондового портфеля акцій, хеджованих put-опціонами європейського стилю.

Ключові слова: розширений фондовий портфель, опціони, хеджування.

1. Вступ. Звичайною інвестиційною практикою в розвинутих країнах є розміщення коштів на фондовому ринку, оскільки сьогодні це більш вигідно, ніж інвестування, наприклад, у нерухомість. Така тенденція притаманна і фондовому ринку України, який, певною мірою, вже сформувався і перебуває в стадії інтенсивного розвитку й удосконалення.

Відомо, що вкладання коштів в цінні папери достатньо ризикована фінансова операція. Однак, формуючи портфель цінних паперів, можна практично звести до нуля його несистематичний ризик: якщо деякі типи компонент портфеля матимуть низьку дохідність, то інші типи можуть певною мірою компенсувати втрати інвестора. Чим більш диверсифікований фондовий портфель ризикових цінних паперів, тим менший його рівень несистематичного ризику. Оптимальну диверсифікацію портфеля можна провести, зокрема класичними методами Марковіца [1] або Шарпа [2].

Значно складнішою є задача зменшення систематичного ризику фондового портфеля, який породжується невизначеністю зовнішнього середовища. Цього ризику практично неможливо уникнути, однак зменшити його рівень можна шляхом хеджування (або форсування) компонент портфеля ризикових цінних паперів похідними цінними паперами (деривативами), зокрема опціонами. Такі фондові портфелі умовно називають розширеними. Стосовно таких портфелів можна формулювати задачу про оптимальний вибір не тільки часткового співвідношення його компонент, а й глибини хеджування (або форсування) кожної ризикової компоненти опціонами.

Якщо дохідності компонент портфеля вважати випадковими величинами з відомими ймовірнісними розподілами, то щільність розподілу дохідності портфеля можна знайти, наприклад, відомим чисельним методом Монте-Карло. Однак цей метод передбачає громіздку обчислювальну процедуру – десятки тисяч операцій на одну точку межі ефективності портфеля. Для об'ємних розширених фондових портфелів чисельне розв'язування задачі оптимізації займає невиправдано багато оперативного часу.

Одним з можливих варіантів виходу з цієї ситуації є модельна зміна способу врахування невизначеності під час формулювання задачі оптимізації: перехід від випадкових величин до нечітких величин у рамках нечітко-множинної теорії [3]. Зокрема, в [4] в рамках цієї теорії запропонований чисельний метод розв'язування задачі про оптимізацію фондового портфеля акцій, хеджованого put-опціонами. В основу цього методу покладено ітераційний вибір часткового співвідношення компонент розширеного фондового портфеля з наступним уточненням глибини хеджування кожної ризикової компоненти опціонами.

В рамках нечітко-множинної теорії ми пропонуємо один з можливих варіантів зведення задачі про оптимізацію фондового портфеля акцій, хеджованих put-опціонами європейського стилю, до еквівалентної задачі математичного програмування. Це дає змогу (в загальному випадку на підставі методу дефазифікації [5]) ефективно використовувати стандартні прикладні пакети для розв'язування таких задач оптимізації.

2. Формулювання нечіткої задачі оптимізації та схема її розв'язування. Нехай інвестор хоче сформувати фондовий портфель з n типів акцій і не планує змінювати цей портфель протягом деякого періоду T. Позначимо через x_i $(i = \overline{1,n})$ – відносну частку акції i-го типу в портфелі, а через r_i $(i = \overline{1,n})$ – фінальну дохідність акції i-го типу в момент часу T.

На підставі експертних даних відомо, що ринкова ціна компонент портфеля в межах періоду T може знизитися, тому інвестор хеджує кожну акцію put-опціонами європейського стилю з терміном дії T на глибину $\delta_i \in [0,1]$ $(i = \overline{1,n})$: якщо $\delta_i = 0$, хеджування немає (опціону на акцію i-го типу немає), якщо $\delta_i = 1$, то акція i-го типу хеджована повністю (хеджована кожна грошова одиниця вартості акції).

Отже, в зазначених умовах інвестор формує розширений фондовий портфель, який складається з n типів акцій і n наборів put-опціонів. Позначимо через x_i $(i = \overline{n+1,2n})$ – відносну частку збірки "акція $(i-n)$-го типу – put-опціон з i-го набору, який повністю хеджує цю акцію, а через r_i $(i = \overline{n+1,2n})$ – фінальну дохідність цієї збірки в момент часу T. Всього розширений портфель містить $2n$ компонент з відносними частками x_i $(i = \overline{1,2n})$, причому

$$\sum_{i=1}^{2n} x_i = 1, \tag{1}$$

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1. \tag{2}$$

Нехай у момент формування розширеного фондового портфеля стосовно основних параметрів, які характеризують кожну його складову, наявна така інформація.

1. Ринкова ціна акції i-го типу становить $S_{i,0}$ $(i = \overline{1,n})$.
2. На підставі експертних даних знайдено, що на момент часу T ринкова ціна акції i-го типу буде в інтервалі $[S_{i,min}, S_{i,max}]$ $(i = \overline{1,n})$, тобто буде нечітким числом прямокутного вигляду [3].
3. Ринкова ціна put-опціону з i-го набору становить $C_{i,p}$ $(i = \overline{n+1,2n})$.
4. Страйк-ціна акції i-го типу (ціна виконання відповідного put-опціону) становить $X_{i,p}$ $(i = \overline{n+1,2n})$, причому $S_{i-n,min} < X_{i,p} < S_{i-n,max}$ $(i = \overline{n+1,2n})$.

На підставі цих даних можна обчислити нечітку дохідність розширеного фондового портфеля в момент часу T.

Справді, якщо хеджування акції i-го типу немає $(\delta_i = 0)$, то дохідність цієї акції в момент часу T характеризується нечітким числом r_i^a прямокутного вигляду

$$r_i^a = [r_{i,min}^a, r_{i,max}^a] = \left[\frac{S_{i,min} - S_{i,0}}{T \cdot S_{i,0}}, \frac{S_{i,max} - S_{i,0}}{T \cdot S_{i,0}}\right] \quad (i = \overline{1,n}). \tag{3}$$

Оскільки абсолютний прибуток $I_{i,p}, (i = \overline{n+1,2n})$ put-опціону європейського стилю з i-го набору в момент часу T за умови 100% хеджування відповідної акції $(\delta_i = 1)$ обчислюється за формулою [6]

$$I_{i,p} = \max\{0, X_{i,p} - S_{i-n}\} - C_{i,p} = \begin{cases} X_{i,p} - S_{i-n} - C_{i,p}, & X_{i,p} > S_{i-n}, \\ -C_{i,p}, & X_{i,p} \leqslant S_{i-n}, \end{cases}$$

де S_{i-n} $(i = \overline{n+1,2n})$ – ринкова ціна відповідної акції в момент часу T, то дохідність збірки "акція $i-$ го типу – put-опціон з i-го набору" в момент часу T характеризується нечітким числом r_i^o прямокутного вигляду

$$r_i^o = [r_{i,min}^o, r_{i,max}^o] =$$
$$= \left[\frac{X_{i,p} - S_{i-n,0} - C_{i,p}}{T \cdot (C_{i,p} + S_{i-n,0})}, \frac{S_{i-n,max} - S_{i-n,0} - C_{i,p}}{T \cdot (C_{i,p} + S_{i-n,0})}\right] \quad (i = \overline{n+1,2n}). \tag{4}$$

Тепер на підставі (3), (4) знайдемо, що дохідність розширеного фондового портфеля в момент часу T характеризується нечітким числом r прямокутного вигляду

$$r = [r_{\min}, r_{max}] = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot r_{i,min}^a + \sum_{i=n+1}^{2n} x_i \cdot r_{i,min}^o, \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot r_{i,max}^a + \sum_{i=n+1}^{2n} x_i \cdot r_{i,max}^o\right].$$

У розгорнутому вигляді цю формулу запишемо так:

$$r = [r_{\min}, r_{max}] = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{S_{i,min} - S_{i,0}}{T \cdot S_{i,0}} + \sum_{i=n+1}^{2n} x_i \frac{X_{i,p} - S_{i-n,0} - C_{i,p}}{T \cdot (C_{i,p} + S_{i-n,0})},\right.$$
$$\left.\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{S_{i,max} - S_{i,0}}{T \cdot S_{i,0}} + \sum_{i=n+1}^{2n} x_i \frac{S_{i-n,max} - S_{i-n,0} - C_{i,p}}{T \cdot (C_{i,p} + S_{i-n,0})}\right]. \tag{5}$$

Формуючи розширений фондовий портфель, інвестор найперше обов'язково фіксує нормативний параметр – нижню межу дохідності портфеля. У випадку, який розглядається, нижню межу дохідності портфеля задамо у вигляді нечіткого прямокутного числа

$$r^P = [r_{min}^P, r_{max}^P]. \tag{6}$$

Оскільки ступінь ризику інвестицій у портфель залежатиме від того, наскільки дохідність портфеля буде нижчою від нормативної, очевидно, що рівень ризику інвестицій у портфель з дохідністю (5) буде визначатися взаємним розміщенням інтервалів (5), (6). У цьому разі ризик того, що дохідність розширеного фондового портфеля, який розглядається, буде нижчою (вищою) від нормативної, можна обчислити за такою формулою [7]:

$$R = \begin{cases} 0, & r^P_{max} \leqslant r_{min}, \\ \dfrac{(r^P_{max} - r_{min})^2}{2(r^P_{max} - r^P_{min})(r_{max} - r_{min})}, & r^P_{min} < r_{min} < r^P_{max} \leqslant r_{max}, \\ \dfrac{r^P_{min} + r^P_{max} - 2r_{min}}{2(r_{max} - r_{min})}, & r_{min} \leqslant r^P_{min} < r^P_{max} \leqslant r_{max}, \\ \dfrac{2r^P_{max} - r_{min} - r_{max}}{2(r^P_{max} - r^P_{min})}, & r^P_{min} \leqslant r_{min} < r_{max} \leqslant r^P_{max}, \\ 1 - \dfrac{(r_{max} - r^P_{min})^2}{2(r^P_{max} - r^P_{min})(r_{max} - r_{min})}, & r_{min} \leqslant r^P_{min} \leqslant r_{max} \leqslant r^P_{max}, \\ 1, & r_{max} \leqslant r^P_{min}. \end{cases} \tag{7}$$

За цільову функцію в задачі оптимізації розширеного фондового портфеля акцій, хеджованих put-опціонами європейського стилю, природно вибрати нижню межу його дохідності. Оптимізувати портфель у такому формулюванні означає максимізувати мінімум його дохідності в момент часу T при заданому (фіксованому) значенні ризику $R = R_0$. У цьому разі формалізований запис задачі оптимізації розширеного фондового портфеля акцій і put-опціонів європейського стилю виглядатиме так:

$$r_{min}(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{S_{i,min} - S_{i,0}}{T \cdot S_{i,0}} + \sum_{i=n+1}^{2n} x_i \frac{X_{i,p} - S_{i-n,0} - C_{i,p}}{T \cdot (C_{i,p} + S_{i-n,0})} \to \max, \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{2n} x_i = 1, \tag{9}$$

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1, \tag{10}$$

$$R(x_1, ..., x_{2n}, r^P_{min}, r^P_{max}) = R_0. \tag{11}$$

Для побудови розв'язку задачі (8)-(11) в загальному випадку треба врахувати те, що умова (11) має нестандартний ("гіллястий") вигляд: за відомої структури розширеного фондового портфеля притаманний йому рівень ризику обчислюється на підставі однієї з гілок формули (7) залежно від взаємного розміщення інтервалів дохідності (5), (6). Якщо ж структуру розширеного фондового портфеля шукати шляхом розв'язування задачі оптимізації, то кожну з гілок формули (7) треба прийняти за обмеження на шуканий розв'язок. Тоді задача (8)-(11) розбивається на шість задач математичного програмування, для кожної з яких умову (11) треба конкретизувати на підставі співвідношення (7).

Для теоретично безризикового портфеля ($R_0 = 0$) умову, яка еквівалентна (11), запишемо у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{S_{i,min} - S_{i,0}}{T \cdot S_{i,0}} + \sum_{i=n+1}^{2n} x_i \frac{X_{i,p} - S_{i-n,0} - C_{i,p}}{T \cdot (C_{i,p} + S_{i-n,0})} \geqslant r^P_{max}. \tag{12}$$

Аналогічно, для портфеля з ризиком $R_0 = 1$ замість умови (11) треба розглянути умову

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{S_{i,max} - S_{i,0}}{T \cdot S_{i,0}} + \sum_{i=n+1}^{2n} x_i \frac{S_{i-n,max} - S_{i-n,0} - C_{i,p}}{T \cdot (C_{i,p} + S_{i-n,0})} \leqslant r^P_{min}. \tag{13}$$

Для визначення складових оптимального за дохідністю розширеного фондового портфеля у випадку, коли ризик портфеля $R_0 \in (0, 1)$, умову (11) в задачі оптимізації потрібно конкретизувати так.

Якщо

$$r^P_{min} < r_{min} < r^P_{max} \leqslant r_{max},$$

то (11) треба замінити такими умовами:

$$\begin{gathered} (r^P_{max} - r_{min})^2 = 2R_0(r^P_{max} - r^P_{min})(r_{max} - r_{min}), \\ r_{min} > r^P_{min}, \quad r_{min} < r^P_{max}, \quad r_{max} \geqslant r^P_{max}. \end{gathered} \tag{14}$$

Коли

$$r_{min} \leqslant r^P_{min} < r^P_{max} \leqslant r_{max},$$

то замість умови (11) потрібно розглянути такі умови:

$$\begin{gathered} r^P_{min} + r^P_{max} - 2r_{min} = 2R_0(r_{max} - r_{min}), \\ r_{min} \leqslant r^P_{min}, \quad r^P_{min} < r^P_{max}, \quad r_{max} \geqslant r^P_{max}. \end{gathered} \tag{15}$$

У випадку

$$r^P_{min} \leqslant r_{min} < r_{max} \leqslant r^P_{max}$$

умова (11) еквівалентна умовам

$$\begin{gathered} 2r^P_{max} - r_{min} - r_{max} = 2R_0(r^P_{max} - r^P_{min}), \\ r_{min} \geqslant r^P_{min}, \quad r_{min} < r_{max}, \quad r_{max} \leqslant r^P_{max}. \end{gathered} \tag{16}$$

Якщо

$$r_{min} \leqslant r^P_{min} \leqslant r_{max} \leqslant r^P_{max},$$

то умову (11) треба замінити системою умов

$$\begin{gathered} (r_{max} - r^P_{min})^2 = 2(1 - R_0)(r^P_{max} - r^P_{min})(r_{max} - r_{min}), \\ r_{min} \leqslant r^P_{min}, \quad r_{max} \leqslant r^P_{max}, \quad r_{max} \geqslant r^P_{min}. \end{gathered} \tag{17}$$

Зауважимо, що співвідношення (12)-(17) явно записуються через невідомі часткові частки x_i $(i = \overline{1, 2n})$ відповідних компонент розширеного фондового портфеля, оскільки через ці параметри явно виражаються функції r_{min}, r_{max} з (5).

Отже, за заданих значень параметрів $S_{i,0}$, $S_{i,min}$, $S_{i,max}$ $(i = \overline{1, n})$, $C_{i,p}$, $X_{i,p}$ $(i = \overline{n+1, 2n})$, r^P_{min}, r^P_{max}, T, R_0, складові x_i $(i = \overline{1, 2n})$ розширеного фондового портфеля акцій, хеджованих put-опціонами європейського стилю, повинні бути розв'язком однієї з задач (8), (9), (10), (12) - (8), (9), (10), (17) залежно від взаємного розміщення інтервалів (5), (6). Для побудови межі ефективності цього портфеля в системі координат "ризик недопустимо низької дохідності портфеля – мінімум очікуваної дохідності портфеля" треба розв'язати відповідну задачу оптимізації, змінюючи параметр R_0 в межах $R_{0,min} \leqslant R_0 \leqslant R_{0,max}$, де $R_{0,min}$ – ризик збірки "акція з найменшою дохідністю – put-опціон, який 100% хеджує цю акцію", а $R_{0,max}$ – ризик компоненти портфеля з найбільшою дохідністю.

3. Висновки. Заміна стандартного способу моделювання дохідності активів (як випадкових величин) нечіткими значеннями дохідностей цих активів дала змогу сформулювати й описати схему розв'язування задачі оптимізації розширеного фондового портфеля акцій, хеджованих put-опціонами європейського стилю. Побудова розв'язку задачі оптимізації зводиться до розв'язування деякої задачі математичного програмування. Це дає підстави не тільки достатньо легко побудувати межу ефективності портфеля в системі координат "ризик недопустимо низької дохідності портфеля – мінімум очікуваної дохідності портфеля", але й ефективно проводити дослідження ролі опціонів у розширеному фондовому портфелі.

---

1. *Markovitz H.M.* Portfolio Selection / *Markovitz H.M.* // Journal of Finance. – 1952. (March) – Vol. 7. – P. 77-91.
2. *Sharpe W.F.* Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk. / *Sharpe W.F.* // Journal of Finance. – 1964 (September). – Vol. 19. – P. 425-442.
3. *Заде Л.А.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближённых решений / *Заде Л.А.* – М: Мир, 1976.
4. *Недосекин А.О.* Оптимизация фондового портфеля, содержащего put-опционы / *Недосекин А.О.* // Банки и Риски. – 2005. – №1. (http://www.hedging.ru/stored/ad/9.pdf)
5. *Сявавко М.* Математичне моделювання за умов невизначеності. / *Сявавко М., Рибицька О.* – Львів: НВФ "Українські технології", 2000.
6. *Іващук Н.Л.* Ринок деривативів: економіко-математичне моделювання процесів ціноутворення. / *Іващук Н.Л.* – Львів: Вид-тво Нац. ун-ту "Львівська політехніка", 2008.
7. *Недосекин А.О.* Оценка риска инвестиций для произвольно-размытых факторов инвестиционного проекта. / *Недосекин А.О., Кокош А.М.* http://sedok.narod.ru/sc_group_2003.html

ABOUT SOME OPTIMIZATION'S PROBLEM OF THE EXTENDED PORTFOLIO

Mykola BUGRIY

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: ol_buhrii@i.ua

Using fuzzy-plural theory we find the method of solving of optimization's problems for the extended portfolio of the stocks. This stocks are hedging by the put-options of European style.

Key words: extended portfolio, option, hedging.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ РАСШИРЕННОГО ФОНДОВОГО ПОРТФЕЛЯ

Николай БУГРИЙ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: ol_buhrii@i.ua

Используя нечётко-множественную теорию, в работе предлагается метод решения задачи оптимизации расширенного фондового портфеля акций, которые хеджируются put-опціонами европейского стиля.

Ключевые слова: расширенный фондовый портфель, опционы, хеджирование.

Стаття надійшла до редколегії 17.12.2008

Прийнята до друку 12.06.2009

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2009. *Ser. Mech. Math. 2009.*
Вип. 70. С. 45–51 *Is. 70. P. 45–51*

УДК 517.53

ПРО ПРАВИЛЬНЕ ЗРОСТАННЯ СУПЕРПОЗИЦІЇ РЯДУ ДІРІХЛЕ І ЗРОСТАЮЧОЇ ФУНКЦІЇ

Мирослава ДОЛИНЮК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: ira0201@rambler.ru

Для додатного збіжного для всіх $x \geq 0$ ряду $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} F_n e^{\tau(x)\beta_n}$, $F_n \geqslant 0$, $(n \geqslant 0)$, де $\tau(x)$ – зростаюча диференційовна функція, $\{\beta_n : n \geq 0\} \subset \mathbb{R}_+$, отримано умови правильного зростання порядку $\rho > 0$ функції $\ln F(x)$.

Ключові слова: ряд Діріхле, максимальний член, правильне зростання.

1. Вступ. *Повільно змінною функцією* називатимемо ([1]) кожну додатну вимірну на $[0; +\infty)$ функцію ℓ, для якої $\ell(2x) = (1 + o(1))\ell(x)$ $(x \to +\infty)$. Клас таких функцій позначатимемо через L. Через L^+ позначимо клас неспадних до $+\infty$ функцій $\ell \in L$. Нехай також L_ρ – *клас правильно зростаючих функцій порядку* $\rho \in (0; +\infty)$, тобто додатних неспадних функцій ℓ таких, що $\ell(x) = x^\rho \alpha(x)$, $\alpha \in L$. Питання про умови належності різних характеристик зростання цілих функцій до класів L та L_ρ природно виникають у зв'язку з дослідженнями з теорії розподілу значень. У статтях [2-4] автори шукали умови належності логарифмів максимуму модуля і характеристики Неванлінни цілої функції, центрального індексу і максимального члена її степеневого ряду до зазначених класів. У [5] знайдено умови належності функцій $\ln F(x)$ і $\ln \mu(x, F)$ до класів L^+ і L_ρ, $\rho \geq 1$, для функцій F, зображуваних збіжними для всіх $x \geqslant 0$ рядами вигляду

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n}, \quad F_n \geqslant 0 \quad (n \geqslant 0), \tag{1}$$

де $\lambda = \{\lambda_n : n \geqslant 0\} \subset \mathbb{R}_+$, $\beta = \{\beta_n : n \geqslant 0\} \subset \mathbb{R}_+$, $\tau(x)$ – неспадна неперервно диференційовна на $[0, +\infty)$ функція така, що $\tau(0) = 0$ і $\tau(x) \to +\infty$ $(x \to +\infty)$. Клас функцій вигляду (1) позначаємо через $S\ (\lambda, \beta, \tau)$.

Варто зазначити, що функції вигляду (1) є природним узагальненням степеневих рядів і рядів Діріхле.

Мета нашої праці – довести подібні твердження про належність до класу L_ρ у випадку $\rho\in(0;1)$.

Для $F\in S(\lambda,\beta,\tau)$ і $x\geqslant 0$ позначимо $\mu(x,F)=\max\{F_n e^{x\lambda_n+\tau(x)\beta_n}:\, n\geqslant 0\}$, а через $\nu(x)=\nu(x,F)=\sup\{n:\ F_n e^{x\lambda_n+\tau(x)\beta_n}=\mu(x,F)\}$ – центральний індекс ряду. Не складно переконатись в такому: якщо $\sharp\{n:\, F_n>0\}=+\infty$ і $\ln F\in L_\rho$, $0<\rho<1$, або $\ln\mu(\cdot,F)\in L_\rho$, то $\lambda_n\equiv 0$ $(n\geqslant 0)$. Справді, якщо $\ln\mu\in L_\rho$, $0<\rho<1$, то існує функція $\alpha\in L$ така, що $\ln\mu(x,F)=x^\rho\alpha(x)$. Але, тоді $\ln F_n+x\lambda_n+\tau(x)\beta_n\leqslant$ $\leqslant\ln\mu(x,F)=x^\rho\alpha(x)$ для всіх $x>0$ і $n\geqslant 0$. Звідси, $\frac{1}{x}\ln F_n+\lambda_n+\frac{\tau(x)}{x}\beta_n\leqslant\frac{\alpha(x)}{x^{1-\rho}}$, $x>0$, $n>1$. Зауважимо тепер таке: якщо $\alpha\in L$, то для кожного $c>0$

$$\lim_{x\to+\infty}\alpha(x)x^{-c}=0. \tag{2}$$

Звідси $\lambda_n=0$ $(n\geq 0)$, а також $(\forall\ n):\ \beta_n\leq\varliminf\limits_{x\to+\infty}x^\rho\alpha(x)/\tau(x)$, тобто,

$$\gamma:=\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{\tau(x)}{x^\rho\alpha(x)}\leq 1/\beta^*,\qquad \beta^*:=\sup\{\beta_n:\ n\geq 0\}. \tag{3}$$

Зокрема, якщо $\beta^*=+\infty$, то $\gamma=0$. Подібно і у випадку $\ln F\in L_\rho$, позаяк $\mu(x,F)\leq F(x)$ $(x\geq 0)$.

Тому у випадку, коли $\ln\mu(x,F)\leq x^\rho\alpha(x)$ $(x\geq 0)$ і $\rho\in(0;1)$, ряд (1) переписуємо у вигляді суперпозиції ряду Діріхле і функції $\tau(x)$

$$F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}F_n e^{\tau(x)\beta_n}, \tag{4}$$

де $\beta=(\beta_n)$ – послідовність попарно різних невід'ємних чисел, а $\tau(x)$ необхідно задовольняє умову (3). Як і в [6] вважатимемо, що виконується умова

$$(\forall\ n\geq 0):\ \beta_n<\beta^*:=\sup\{\beta_m:\ m\geq 0\}. \tag{5}$$

З доведення леми 2 у статті [6] випливає, що за останньої умови для кожної функції f вигляду (4) центральний індекс $\nu(x,F)\nearrow+\infty$ $(x\to+\infty)$.

Нехай тепер $\varkappa_n\nearrow+\infty$ $(1\leq n\to+\infty)$ – послідовність точок стрибка центрального індексу $\nu(x,F)$ занумерована так, що

$$\mu(x,F)=F_n\exp\{\tau(x)\beta_n\} \tag{6}$$

для всіх $x\in[\varkappa_n;\varkappa_{n+1}]$ у випадку $\varkappa_n<\varkappa_{n+1}$, а також $\varkappa_{n+1}=\ldots=\varkappa_{n+p}$, якщо $\nu(\varkappa_{n+1}-0)=n$ і $\nu(\varkappa_{n+1})=n+p$, $p>1$. Добре відомо, що тоді при $n\geq 1$

$$\tau(\varkappa_n)=\frac{\ln(F_{n-1}/F_n)}{\beta_n-\beta_{n-1}}\ \nearrow+\infty\quad(n\to+\infty). \tag{7}$$

У цьому випадку $(\ln\mu(x,F))'=\tau'(x)\beta_{\nu(x,F)}$ для всіх $x\in(\varkappa_n;\varkappa_{n+1})$ і всіх $n\geqslant 0$.
І, отже, для всіх $x>x_0$ правильна рівність ([7])

$$\ln\mu(x,F)=\ln\mu(x_0,F)+\int_{x_0}^{x}\beta_{\nu(t)}d\tau(t). \tag{8}$$

Зауваження 1. Зауважимо, що у випадку, коли $\beta^*:=\sup\{\beta_n:\ n\geq 0\}<+\infty$, $\ln\mu(x,F)=(1+o(1))\ln F(x)=(1+o(1))\beta^*\tau(x)$ $(x\to+\infty)$ і, отже, $\ln\mu(\cdot,F)\in L_\rho\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\ln F(\cdot)\in L_\rho\Leftrightarrow\tau\in L_\rho$. Тому надалі вважатимемо, що $\beta^*=+\infty$.

2. Допоміжні твердження.

Лема 1. *Нехай $\rho > 0$, $\tau(x)$ – неперервно диференційовна функція така, що $x^2\tau'(x) \nearrow$ $(x \to +\infty)$, а також послідовність $\beta = (\beta_n)$ така, що виконується умова (5) з $\beta^* = +\infty$. Тоді такі твердження рівносильні:*

1) $\ln\mu(\cdot, F) \in L_\rho$;

2) $\psi(x)/\ln\mu(x,F) \to \rho$ $(x \to +\infty)$, де $\psi(x) = x\tau'(x)\beta_{\nu(x)}$;

3) $\psi \in L_\rho$.

Доведення. Повторюємо міркування з доведення відповідного твердження з [5].

3) $\Rightarrow$ 2). Оскільки для довільної додатної повільно змінної функції ψ_0 виконується

$$\int_0^r x^{\rho-1}\psi_0(x)dx \sim \frac{r^\rho}{\rho}\psi_0(r) \quad (r \to +\infty),$$

а з умови 3 випливає, що $\psi(x) = x^\rho\psi_0(x)$, де ψ_0 - повільно змінна функція, то

$$\frac{\psi(r)}{\ln\mu(r,F)} = \frac{\psi(r)}{\ln\mu(x_0,F) + \int_{x_0}^r \psi(t)/tdt} \sim \frac{r^\rho\psi_0(r)}{\int_0^r x^{\rho-1}\psi_0(x)dx} \sim \rho \quad (r \to +\infty).$$

2) $\Rightarrow$ 1). З рівності (8) за допомогою 2 отримуємо, що

$$\ln\mu(x,F) \sim \int_{x_0}^x \frac{\psi(t)}{t}dt \sim \rho\int_{x_0}^x \frac{\ln\mu(t,F)}{t}dt := \rho x^\rho\psi_1(x) \quad (x \to +\infty). \tag{9}$$

Оскільки функція ψ_1 неперервно-диференційовна при $x > x_0$, то достатньо перевірити, чи $x\psi_1'(x)/\psi_1(x) \to 0$ $(x \to +\infty)$. Використовуючи співвідношення (9), при $x \to +\infty$ отримуємо

$$\frac{x\psi_1'(x)}{\psi_1(x)} = \frac{x(x^{-\rho}\int_{x_0}^x \frac{1}{t}\ln\mu(t,F)dt)'}{\psi_1(x)} = \frac{x^{-\rho}\ln\mu(x,F) - x\rho x^{-\rho-1}\int_{x_0}^x \frac{1}{t}\ln\mu(x,F)dt}{\psi_1(x)} =$$

$$= \frac{\ln\mu(x,F)}{x^\rho\psi_1(x)} - \frac{\rho\int_{x_0}^x \frac{1}{t}\ln\mu(t,F)dt}{x^\rho\psi_1(x)} = \frac{\ln\mu(x,F)}{\int_{x_0}^x \frac{1}{t}\ln\mu(t,F)dt} - \rho = \rho + o(1) - \rho = o(1).$$

1) і 2) $\Rightarrow$ 3).

Оскільки з умови 2 випливає, що для вимірної функції

$$\alpha_2(x) = \psi(x)/\ln\mu(x,F) \to \rho \quad (x \to +\infty),$$

а за умовою 1, $\ln\mu(x,F) = x^\rho\alpha(x)$, $\alpha \in L$, то $\psi(x) = x^\rho\alpha_1(x)$, $\alpha_1 = \alpha\cdot\alpha_2 \in L$, тобто, $\psi \in L_\rho$.

Отже, для завершення доведення леми 1 достатньо перевірити, чи з 1 випливає 2. Справді, нехай $c > 1$, $x > 0$. Оскільки

$$\ln\mu(cx,F) \geqslant \ln F_{\nu(cx)} + \tau(cx)\beta_{\nu(cx)} \geqslant \ln F_{\nu(x)} + \tau(cx)\beta_{\nu(x)},$$

то з одного боку,

$$\ln\mu(cx,F) - \ln\mu(x,F) \geqslant (\tau(cx) - \tau(x))\beta_{\nu(x)}, \tag{10}$$

а з іншого –

$$\ln\mu(x,F) - \ln\mu(x/c,F) \leqslant (\tau(x) - \tau(x/c))\beta_{\nu(x)}. \tag{11}$$

У випадку, коли виконується умова $x^2\tau'(x) \nearrow$, отримуємо, що

$$\tau(cx)-\tau(x)=\int_x^{cx}t^2\tau'(t)t^{-2}dt\geqslant x^2\tau'(x)\int_x^{cx}t^{-2}dt=\frac{c-1}{c}\cdot x\tau'(x),$$

$$\tau(x)-\tau(x/c)=\int_{x/c}^{x}t^2\tau'(t)t^{-2}dt\leqslant x^2\tau'(x)\int_{x/c}^{x}t^{-2}dt=(c-1)x\tau'(x),$$

тому за допомогою нерівностей (10), (11) отримуємо $\ln\mu(cx,F)-\ln\mu(x,F)\geqslant\frac{c-1}{c}\cdot\psi(x)$, а також $\ln\mu(x,F)-\ln\mu(x/c,F)\leqslant(c-1)\psi(x)$. Звідси,

$$\frac{1}{c-1}\Big(1-\frac{\ln\mu(x/c,F)}{\ln\mu(x,F)}\Big)\leqslant\frac{\psi(x)}{\ln\mu(x,F)}\leqslant\frac{c}{c-1}\Big(\frac{\ln\mu(cx,F)}{\ln\mu(x,F)}-1\Big).$$

Перехід до границі, позаяк $\ln\mu(bx,F)/\ln\mu(x,F)\to b^\rho$ $(x\to+\infty)$, $b>0$, дає

$$\frac{1}{c-1}(1-\frac{1}{c^\rho})\leqslant\varliminf_{x\to+\infty}\frac{\psi(x)}{\ln\mu(x,F)}\leqslant\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{\psi(x)}{\ln\mu(x,F)}\leqslant\frac{c}{c-1}(c^\rho-1).$$

Перехід в останніх нерівностях до границі при $c\to1+0$ завершує доведення леми.

□

Лема 2 ([5], лема 3). *Нехай функція $\tau(x)\nearrow+\infty$ $(n\to+\infty)$. Припустимо, що (F_n) впорядкована за незростанням, тобто $F_n\searrow0$ $(n\to+\infty)$. Якщо $F\in S(0,\beta,\tau)$ і виконується умова*

$$\theta=\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{\beta_n\ln n}{-\ln F_n}<+\infty,\tag{12}$$

то при $x\to+\infty$ виконується співвідношення

$$\ln F(x)=(1+o(1))\ln\mu(x,F).\tag{13}$$

3. Основний результат.

Теорема 1. *Нехай $\rho>0$, виконуються умови леми 1 і $F\in S(0,\beta,\tau)$. Якщо виконується умова (12), то умова $\ln F\in L_\rho$ і твердження 1-3 леми 1 еквівалентні.*

Теорема 2 містить необхідні і достатні умови (в термінах обмежень на коефіцієнти та показники ряду) для того, щоб $\ln\mu(\cdot,F)\in L_\rho,\ \rho>0$.

Теорема 2. *Нехай $\rho>0$, $\tau(x)$ – додатна зростаюча неперервно диференційовна функція така, що $x^2\tau'(x)\nearrow$ і $\dfrac{x\tau'(x)}{\tau(x)}\searrow$ $(x>0)$, а для послідовності $\beta=(\beta_n)$ виконується умова (5) з $\beta^*=+\infty$. Якщо $F\in S(0,\beta,\tau)$, то для того, щоб $\ln\mu(\cdot,F)\in L_\rho$ необхідно і достатньо, щоб існувала така зростаюча до $+\infty$ послідовність $(\varkappa_{n_k})$, що $\mu(x,F)=F_{n_k}\exp\{\tau(x)\beta_{n_k}\}$ для всіх $x\in[\varkappa_{n_k};\varkappa_{n_{k+1}}]$ і для всіх $k\geqslant1$, а також при $k\to+\infty$ виконувалися умови:*

$$\frac{\tau'(\varkappa_{n_{k+1}})}{\tau(\varkappa_{n_{k+1}})}\cdot\varkappa_{n_{k+1}}\sim\frac{\tau'(\varkappa_{n_k})}{\tau(\varkappa_{n_k})}\cdot\varkappa_{n_k},\tag{14}$$

$$\frac{\varkappa_{n_k}\tau'(\varkappa_{n_k})\beta_{n_k}}{\ln F_{n_k}+\tau(\varkappa_{n_k})\beta_{n_k}}\to\rho,\tag{15}$$

$$\frac{\varkappa_{n_{k+1}}\tau'(\varkappa_{n_{k+1}})\beta_{n_k}}{\ln F_{n_k}+\tau(\varkappa_{n_{k+1}})\beta_{n_k}}\to\rho.\tag{16}$$

Доведення теореми 2. Не зменшуючи загальності міркувань, вважатимемо, що $\mu(0,F)=1$. Тоді, як не складно перевірити $\dfrac{\ln\mu(x,F)}{\tau(x)}\nearrow$ $(x\in[0;+\infty))$.

З огляду на доведені вище твердження, достатньо довести, що умова 2 з леми 1

$$\psi(x)/\ln\mu(x,F)\to\rho\quad(x\to+\infty),$$

де $\psi(x)=x\tau'(x)\beta_{\nu(x)}$, виконується тоді і лише тоді, коли виконуються умови (14)-(16). Центральний індекс $\nu(x,F)\nearrow+\infty$ $(x\to+\infty)$, тому існує послідовність $\varkappa_{n_k}\uparrow+\infty$ така, що $\nu(x,F)=n_k$ для всіх $x\in[\varkappa_{n_k};\varkappa_{n_{k+1}})$, а отже, $\mu(x,F)=F_{n_k}\exp\{\tau(x)\beta_{n_k}\}$ для всіх $[\varkappa_{n_k};\varkappa_{n_{k+1}}]$. Якщо тепер в п. 2 леми 1 вибрати спочатку $x=\varkappa_{n_k}$, а потім спрямувати $x\to(\varkappa_{n_{k+1}}-0)$, то отримуємо відповідно (15) і (16), позаяк

$$\ln F_{n_k}+\tau(\varkappa_{n_{k+1}})\beta_{n_k}=\ln F_{n_{k+1}}+\tau(\varkappa_{n_{k+1}})\beta_{n_{k+1}}=\ln\mu(\varkappa_{n_{k+1}},F).\tag{17}$$

Оскільки з (15) і (16) випливає, що

$$\frac{\varkappa_{n_k}\tau'(\varkappa_{n_k})}{\ln\mu(\varkappa_{n_k},F)}\sim\frac{\varkappa_{n_{k+1}}\tau'(\varkappa_{n_{k+1}})}{\ln\mu(\varkappa_{n_{k+1}},F)}\quad(k\to+\infty),$$

то зі зростання $\ln\mu(x,F)/\tau(x)$ отримуємо

$$1\leqslant\frac{\ln\mu(\varkappa_{n_{k+1}},F)}{\tau(\varkappa_{n_{k+1}})}\frac{\tau(\varkappa_{n_k})}{\ln\mu(\varkappa_{n_k},F)}=$$

$$=(1+o(1))\frac{\tau'(\varkappa_{n_{k+1}})\varkappa_{n_{k+1}}}{\tau(\varkappa_{n_{k+1}})}\frac{\tau(\varkappa_{n_k})}{\tau'(\varkappa_{n_k})\varkappa_{n_k}}\leq(1+o(1))\quad(k\to+\infty).$$

Отже, (14) – теж виконується.

Для доведення достатності умов (14) – (16) зауважимо, що за умови $\dfrac{x\tau'(x)}{\tau(x)}\searrow$ з умови (14) випливає, що для всіх $x\in[\varkappa_{n_k};\varkappa_{n_{k+1}})$ при $k\to+\infty$

$$\frac{x\tau'(x)}{\tau(x)}\sim\frac{\tau'(\varkappa_{n_k})}{\tau(\varkappa_{n_k})}\cdot\varkappa_{n_k}.$$

Тому, для всіх $x\in[\varkappa_{n_k};\varkappa_{n_{k+1}})$, скориставшись монотонністю $\ln\mu(x,f)/\tau(x)$ і умовою (15), при $k\to+\infty$ отримуємо

$$\frac{\psi(x)}{\ln\mu(x,F)}=\frac{x\tau'(x)\beta_{n_k}}{\ln\mu(x,F)}=(1+o(1))\frac{\varkappa_{n_k}\tau'(\varkappa_{n_k})\beta_{n_k}}{\tau(\varkappa_{n_k})}\frac{\tau(x)}{\ln\mu(x,F)}\leqslant\rho+o(1),$$

з іншого боку, скориставшись монотонністю $\ln\mu(x,f)/\tau(x)$ і умовою (16), маємо

$$\frac{\psi(x)}{\ln\mu(x,F)}=\frac{x\tau'(x)\beta_{n_k}}{\ln\mu(x,F)}=(1+o(1))\frac{\varkappa_{n_{k+1}}\tau'(\varkappa_{n_{k+1}})\beta_{n_k}}{\tau(\varkappa_{n_{k+1}})}\frac{\tau(x)}{\ln\mu(x,F)}\geqslant\rho+o(1).$$

У цьому разі ми знову скористались рівностями (17). Теорему 2 доведено.

Зауваження 2. Нехай $\rho>0$ і функція F зображається збіжним для всіх $x\geqslant e$ рядом вигляду

$$F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}F_nx^{\beta_n},\quad F_n\geqslant0\quad(n\geqslant0),$$

де послідовність $\beta = (\beta_n)$ задовольняє умову (5) з $\beta^* = +\infty$. Якщо виконується умова (12), то наступні твердження рівносильні: 1) $\ln\mu(\cdot, F) \in L_\rho$; 2) $\beta_{\nu(x)}/\ln\mu(x, F) \to \rho(x \to +\infty)$; 3) $\beta_{\nu(x)} \in L_\rho$; 4) $\ln F \in L_\rho$; 5) існує така зростаюча до $+\infty$ послідовність $(\varkappa_{n_{k+1}})$, що $\mu(x, F) = F_{n_k} x^{\beta_{n_k}}$ для всіх $x \in [\varkappa_{n_k}; \varkappa_{n_k+1}]$ і для всіх $k \geqslant 1$, а також при $k \to +\infty$ виконуються умови

$$\varkappa_{n_{k+1}} \sim \varkappa_{n_k}, \qquad \frac{\beta_{n_k}}{\ln F_{n_k} + \ln \varkappa_{n_k} \beta_{n_k}} \to \rho, \qquad \frac{\beta_{n_k}}{\ln F_{n_k} + \ln \varkappa_{n_{k+1}} \beta_{n_k}} \to \rho.$$

Для доведення наслідку 1 достатньо скористатись теоремами 1 і 2 (з функцією $\tau(x) = \ln x$ $(x \geq e)$) та зауважити, що у цьому випадку умова (14) рівносильна до умови $\varkappa_{n_{k+1}} \sim \varkappa_{n_k}$.

1. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. / *Сенета Е.* – М.: Наука, 1982.
2. *Заболоцкий Н.В.* О медленном возрастании основных характеристик целых функций / *Заболоцкий Н.В., Шеремета М.Н.* // Мат. заметки. – 1999. – Т. 65, №2. – С. 206-214.
3. *Скасків О.Б.* Про повільне зростання лічильної функції додатної послідовності / *Скасків О.Б., Тракало О.М.* // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 57. – С. 36-40.
4. *Філевич П.В.* Про правильну зміну основних характеристик цілої функції / *Філевич П.В., Шеремета М.М.* // Укр. мат. журн. – 2003. – Т. 55, №6. – С. 840-849.
5. *Долинюк М.М.* Про правильне зростання деяких додатних функціональних рядів / *Долинюк М.М., Скасків О.Б.* // Наук. Вісник Чернівецького ун-ту. – 2006. – Вип. 314-315. Математика. – С. 50-58.
6. *Скаскив О.Б.* О минимуме модуля суммы ряда Дирихле с ограниченной последовательностью показателей / *Скаскив О.Б.* // Матем. заметки. – 1994. – Т. 56, №4. – С. 117-128.
7. *Скасків О.Б.* Асимптотичні властивості регулярно збіжних функціональних рядів / *Скасків О.Б., Трусевич О.М.* // Препринт №17-1. – Львів: Ін-т ІППММ НАН України, 1999. – 18 с.

ON THE REGULAR GROWTH COMPOSITION OF A POSITIVE DIRICHLET SERIES AND INCREASING FUNCTIONS

Myroslava DOLYNYUK

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: ira0201@rambler.ru

For a positive series $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} F_n e^{\tau(x)\beta_n}$, $F_n \geqslant 0$ $(n \geqslant 0)$, convergent for $x \geq 0$, where $\tau(x)$ is an increasing differentiable function, $\{\beta_n : n \geq 0\} \subset \mathbb{R}_+$, we give conditions of slow growth of order $\rho > 0$ of the function $\ln F(x)$.

Key words: Dirichlet series, maximal term, regular growth

О РЕГУЛЯРНОМ ВОЗРАСТАНИИ КОМПОЗИЦИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЯДА ДИРИХЛЕ И ВОЗРАСТАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

Мырослава ДОЛЫНЮК

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: ira0201@rambler.ru

Для положительного сходящегося для всех $x \geq 0$ ряда $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n e^{\tau(x)\beta_n}$, $F_n \geqslant 0$ $(n \geqslant 0)$, где $\tau(x)$ – неубывающая дифференцируемая функция, $\{\beta_n : n \geq 0\} \subset \mathbb{R}_+$, получены условия правильного возрастания порядка $\rho > 0$ функции $\ln F(x)$.

Ключевые слова: ряды Дирихле, максимальный член, правильный рост.

Стаття надійшла до редколегії 17.12.2008

Прийнята до друку 12.06.2009

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2009. *Ser. Mech. Math. 2009.*
Вип. 70. С. 52–67 *Is. 70. P. 52–67*

УДК 517.95

СИСТЕМИ ЕЛІПТИЧНИХ ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ З АНІЗОТРОПНОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ

Олена ДОМАНСЬКА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: olena.domanska@gmail.com

Доведено однозначну розв'язність систем еліптичних варіаційних нерівностей, які містять степеневі нелінійності та їхні показники нелінійності стосовно різних похідних різні і змінні. У цьому разі не накладаються умови на поведінку розв'язку та зростання вихідних даних на нескінченності.

Ключові слова: нелінійний оператор, варіаційна нерівність, узагальнений простір Лебега-Соболєва, необмежена область.

1. Вступ. Модельним прикладом задач, які ми розглядаємо, є такий: знайти вектор-функцію $u=(u_1,\dots,u_N)$ з простору $W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ (означення цього простору подано пізніше), $u\geqslant 0$, яка задовольняє інтегральну нерівність

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{j=1}^{N}\Big\{\sum_{i=1}^{n}a_{ij}|u_{j,x_i}|^{p_{ij}(x)-2}u_{j,x_i}\,(w_j\,(v_j-u_j))_{x_i}+a_{0j}|u|^{p_{0j}(x)-2}u_j\,w_j\,(v_j-u_j)-$$

$$-f_j\,w_j\,(v_j-u_j)\Big\}\,d\,x\geqslant 0, \qquad (1)$$

для довільних $v=(v_1,\dots,v_N)\in W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $v\geqslant 0$, та $w=(w_1,\dots,w_N)\in\in\big(C^1(\overline{\Omega})\big)^N$, $w\geqslant 0$, $\operatorname{supp} w_j$ $(j=\overline{1,N})$ – обмежена множина, у припущенні, що Ω – необмежена область в $\mathbb{R}^n$, $a_{ij}>0$ – деякі сталі, $p_{ij}(x)>1$, $x\in\Omega$ $(i=\overline{0,n},\quad j=\overline{1,N})$, f_j $(j=\overline{1,N})$ – задані на Ω функції.

Варіаційні еліптичні нерівності в необмежених областях розглядали у працях [2]-[7]. В [2, 3] доведено існування та єдиність розв'язків варіаційних нерівностей з нелінійним еліптичним оператором вищого порядку в зіркоподібних областях, у цьому разі накладаються умови на поведінку розв'язку та зростання вихідних даних на нескінченності. У [4] доведено існування та єдиність розв'язку деякої варіаційної нерівності з квазілінійним еліптичним оператором четвертого порядку, що містить сталі степеневі нелінійності в молодших членах, і вихідні дані можуть необмежено зростати на нескінченності, а розв'язок єдиний без вимог на його поведінку на нескінченності. У [5] такий результат отримано для систем квазілійних варіаційних нерівностей другого порядку, що узагальнюють (1) при $p_{0j}(x) = p(x) > 2$, $p_{ij}(x) = 2$ $(i = \overline{1,n}, j = \overline{1,N})$, а у праці [6] для деякого класу квазілінійних варіаційних нерівностей вищого порядку. У [7] доведено коректність нелінійних еліптичних нерівностей без умов на нескінченності, модельним прикладом яких є (1) при $N = 1$, $p_{01}(x) \geqslant 2$, $1 < p_{i1}(x) \leqslant 2$ $(i = \overline{1,n})$. Мета нашої праці – провести узагальнення результатів праці [7] на випадок системи варіаційних нерівностей.

2. Основні позначення. Через $\mathbb{R}^k$, де $k \in \mathbb{N}$, позначатимемо лінійний простір, складений із елементів вигляду $x = (x_1, \ldots, x_k)$, де $x_i \in \mathbb{R}$ $(i = \overline{1,k})$, з нормою $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_k^2}$. Якщо $v(z)$, $z \in \widetilde{D} \subset \mathbb{R}^k$, – яка-небудь функція, то під $v|_D$ розумітиметься її звуження на множину $D \subset \widetilde{D}$.

Нехай $n \geqslant 2$ – натуральне число, Ω – необмежена область у просторі $\mathbb{R}^n$ з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$. Не зменшуючи загальності, припустимо, що $0 \in \Omega$. Для довільного $R > 0$ позначимо через Ω_R зв'язну компоненту множини $\Omega \cap \{x : |x| < R\}$ таку, що $0 \in \Omega_R$.

Нехай r – функція з простору $L_\infty(\Omega)$ така, що $r(x) \geqslant 1$ для майже всіх $x \in \Omega$. Для будь-якого $R > 0$ на лінійному просторі $C(\overline{\Omega_R})$ (неперервних на $\overline{\Omega_R}$ функцій) введемо норму $\|v\|_{L_{r(\cdot)}(\Omega_R)} \overset{\text{def}}{=} \inf\{\lambda > 0 : \rho_{r,R}(v/\lambda) \leqslant 1\}$, де $\rho_{r,R}(v) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{\Omega_R} |v(x)|^{r(x)}\, dx$, і поповнення цього простору за введеною нормою, яке називається *узагальненим простором Лебега*, позначимо через $L_{r(\cdot)}(\Omega_R)$ (див., наприклад, [8]). Очевидно, що $L_{r(\cdot)}(\Omega_R)$ є лінійним підпростором простору $L_1(\Omega_R)$. Під $L_{r(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ розумітимемо замикання простору $C(\overline{\Omega})$ за топологією, породженою системою півнорм: $\|\cdot\|_{L_{r(\cdot)}(\Omega_R)}$, $R > 0$.

Якщо X – банахів (топологічний) простір, то через $(X)^N$ позначатимемо декартів степінь X, наділений відповідною нормою (топологією), і елементи якого записують у вигляді вектор-стовпчиків. Для довільних елементів $u, v \in (X)^N$ позначатимемо через uv добуток Адамара, тобто $uv \overset{\text{def}}{=} \mathrm{colon}(u_1v_1, \ldots, u_Nv_N)$.

Під $\mathbb{P}$ розумітимемо множину матричних функцій $p = (p_0, p_1, \ldots, p_n)$, $p_k = \mathrm{colon}(p_{k1}, \ldots, p_{kN})$ $(k = \overline{0,n})$ таких, що $p_{kj} \in L_\infty(\overline{\Omega})$ і $p_{kj}(x) > 1$ $(k = \overline{0,n}, j = \overline{1,N})$ для майже всіх $x \in \Omega$. Якщо $p \in \mathbb{P}$, то через $p^* = (p_0^*, p_1^*, \ldots, p_N^*)$, $p_k^* = \mathrm{colon}(p_{k1}^*, \ldots, p_{kN}^*)$ $(k = \overline{0,n})$ позначатимемо матричну функцію таку, що $\frac{1}{p_{kj}(x)} + \frac{1}{p_{kj}^*(x)} = 1$ $(k = \overline{0,n},\ j = \overline{1,N})$ для майже всіх $x \in \Omega$ (очевидно, що $p^* \in \mathbb{P}$). Для кожного $R > 0$ під $W^1_{p(\cdot)}(\Omega_R)$ розумітимемо банахів простір, отриманий поповненням простору $\big(C^1(\overline{\Omega_R})\big)^N$ за нормою

$$\|v\|_{W^1_{p(\cdot)}(\Omega_R)} \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{n} \|\partial_i v_j\|_{L_{p_{ij}(\cdot)}(\Omega_R)},$$

де $\partial_i \overset{\text{def}}{=} \partial/\partial x_i$ $(i = \overline{1,n})$, $\partial_0 v = v$. Очевидно, що $W^1_{p(\cdot)}(\Omega_R)$ є підпростором простору $\big\{v(x),\ x \in \Omega_R :\ \partial_i v_j \in L_{p_{ij}(\cdot)}(\Omega_R)\ (i = \overline{0,n}, j = \overline{1,N})\big\}$.

На просторі $\left(C^1(\overline{\Omega})\right)^N$ введемо топологію лінійного локально опуклого простору за допомогою системи півнорм: $\|\cdot\|_{W^1_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_R)}$, $R>0$. Замикання простору $\left(C^1(\overline{\Omega})\right)^N$ за введеною топологією позначимо через $W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$. Очевидно, що послідовність $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ є збіжною до v у цьому просторі, якщо $\|v_k-v\|_{W^1_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_R)}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0$ для кожного $R>0$. Зауважимо, що $v\big|_{\Omega_R}\in W^1_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_R)$ для будь-якого $R>0$, якщо $v\in W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$.

Нехай $C^1_{\mathrm{c}}(\overline{\Omega})$ – підпростір простору $C^1(\overline{\Omega})$, який складається з функцій, носії яких є обмеженими множинами. Приймемо $C^{1,+}(\overline{\Omega})\overset{\mathrm{def}}{=}\{v\in C^1(\overline{\Omega}) : v\geqslant 0 \text{ на } \Omega\}$, $C^{1,+}_{\mathrm{c}}(\overline{\Omega})\overset{\mathrm{def}}{=}\{v\in C^1_{\mathrm{c}}(\overline{\Omega}) : v\geqslant 0 \text{ на } \Omega\}$.

3. Формулювання задачі та основних результатів. Нехай $p\in\mathbb{P}$. Під $\mathbb{A}_p$ розумітимемо множину наборів функцій $\{A_{ij}\ : i=\overline{0,n},\ j=\overline{1,N}\}\equiv\{A_{ij}\}$ таких, що для кожних $i\in\{1,\dots,n\}$, $j\in\{1,\dots,N\}$ функція A_{ij} визначена на $\Omega\times\mathbb{R}$, а для кожного $j\in\{1,\dots,N\}$ функція A_{0j} визначена на $\Omega\times\mathbb{R}^N$ і виконуються умови:

1) для майже всіх $x\in\Omega$ функції $A_{ij}(x,\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $A_{0j}(x,\cdot):\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ $(i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,N})$ є неперервними, а для будь-яких $\xi\in\mathbb{R}$, $\eta\in\mathbb{R}^N$ функції $A_{ij}(\cdot,\xi):\Omega\to\mathbb{R}$, $A_{0j}(\cdot,\eta):\Omega\to\mathbb{R}$ $(i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,N})$ – вимірні (умови Каратеодорі);

1′) $A_{ij}(x,0)=0$ $(i=\overline{0,n}, j=\overline{1,N})$ для майже всіх $x\in\Omega$;

2) для майже всіх $x\in\Omega$ виконуються нерівності

$$|A_{0j}(x,\eta)|\leqslant\sum_{k=1}^{N}h_{j\,k}(x)|\eta_k|^{p_{0k}(x)/p^*_{0j}(x)}+h_j(x)\quad\forall\eta\in\mathbb{R}^N,\quad j=\overline{1,N},$$

$$\sum_{j=1}^{N}(A_{0j}(x,\eta^1)-A_{0j}(x,\eta^2))\,(\eta^1_j-\eta^2_j)\geqslant K_0\sum_{j=1}^{N}|\eta^1_j-\eta^2_j|^{p_{0j}(x)}\quad\forall\eta^1,\eta^2\in\mathbb{R}^N,$$

де K_0 – деяка додатна стала, $h_{jk}\in L_{\infty,\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $h_j\in L_{p^*_{0j}(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ $(j=\overline{1,N}, k=\overline{1,N})$;

3) для кожних $i\in\{1,\dots,n\}$, $j\in\{1,\dots,N\}$ та майже всіх $x\in\Omega$ існує похідна $\partial A_{ij}(x,\,\xi)/\partial\xi$, $\xi\neq 0$, і виконуються нерівності

$$K_{ij}|\xi|^{p_{ij}(x)-2}\leqslant\frac{\partial A_{ij}(x,\xi)}{\partial\xi}\leqslant\widetilde{K}_{ij}(1+|x|)^{\sigma_{ij}}|\xi|^{p_{ij}(x)-2},\qquad\xi\neq 0,$$

де $K_{ij}>0$, $\widetilde{K}_{ij}>0$, $\sigma_{ij}\geqslant 0$ – деякі сталі.

Для кожного $p\in\mathbb{P}$ через $\mathbb{F}_p$ позначатимемо множину, елементами якої є матричні функції $(F_{ij})=(F_0,F_1,\dots,F_n)$, $F_k=\mathrm{colon}(F_{k1},\dots,F_{kN})$ $(k=\overline{0,n})$ такі, що $F_{ij}\in L_{p^*_{ij}(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ $(i=\overline{0,n}, j=\overline{1,N})$. На $\mathbb{F}_p$ вводиться топологія декартового добутку локально опуклих просторів $L_{p^*_{ij}(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ $(i=\overline{0,n},\ j=\overline{1,N})$.

Під $\mathbb{O}_p$, де $p\in\mathbb{P}$, розумітимемо множину опуклих замкнених підмножин простору $W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, які містять 0.

Тепер сформулюємо задачу, яку ми далі будемо досліджувати. Нехай $\widetilde{\mathbb{P}}\subset\mathbb{P}$ і для $p\in\widetilde{\mathbb{P}}$ $\widetilde{\mathbb{A}}_p\subset\mathbb{A}_p$, $\widetilde{\mathbb{F}}_p\subset\mathbb{F}_p$, $\widetilde{\mathbb{O}}_p\subset\mathbb{O}_p$. Задача $\mathbf{SI}\big(\widetilde{\mathbb{A}}_p,\ \widetilde{\mathbb{F}}_p,\ \widetilde{\mathbb{O}}_p\ :\ p\in\widetilde{\mathbb{P}}\big)$ (a **s**ystem of variational **i**nequalities) така: для кожного $p\in\widetilde{\mathbb{P}}$ і $\{A_{ij}\}\in\widetilde{\mathbb{A}}_p$, $(F_{ij})\in\widetilde{\mathbb{F}}_p$, $K\in\widetilde{\mathbb{O}}_p$ знайти множину $\mathbf{SSI}\big(\{A_{ij}\},(F_{ij}),K\big)$ (a **s**et of **s**olutions of **s**ystem of variational

inequalities) функцій $u \in K$ таких, що виконується нерівність

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{N} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} A_{ij}(x, \partial_i u_j)\, \partial_i(w_j(v_j - u_j)) + A_{0j}(x, u)\, w_j(v_j - u_j) \Big\}\, d\, x \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{N} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} F_{ij}(x)\, \partial_i(w_j(v_j - u_j)) + F_{0j}(x)\, w_j(v_j - u_j) \Big\}\, d\, x \qquad (2)$$

для будь-яких $w_j \in C_{\mathrm{c}}^{1,+}(\overline{\Omega})$ $(j = \overline{1, N})$ і $v \in K$.

Зауваження 1. Умова $\mathbf{1'}$ не є принциповою (див. [7, с. 4]).

Скажемо, що задача $\mathbf{SI}\big(\widetilde{\mathbb{A}}_p,\, \widetilde{\mathbb{F}}_p,\, \widetilde{\mathbb{O}}_p : p \in \widetilde{\mathbb{P}}\big)$ є *розв'язною* (*однозначною*, *однозначно розв'язною*), якщо для кожного $p \in \widetilde{\mathbb{P}}$ і будь-яких $\{A_{ij}\} \in \widetilde{\mathbb{A}}_p$, $(F_{ij}) \in \widetilde{\mathbb{F}}_p$ та $K \in \widetilde{\mathbb{O}}_p$ множина $\mathbf{SSI}\big(\{A_{ij}\}, (F_{ij}), K\big)$ є *непорожньою* (*містить не більше одного елемента*, є *одноелементною*).

Ми шукатимемо множини $\widetilde{\mathbb{P}}$ і $\widetilde{\mathbb{A}}_p$, $\widetilde{\mathbb{F}}_p$, $\widetilde{\mathbb{O}}_p$ $(p \in \widetilde{\mathbb{P}})$ такі, щоб відповідна задача $\mathbf{SI}\big(\widetilde{\mathbb{A}}_p,\, \widetilde{\mathbb{F}}_p,\, \widetilde{\mathbb{O}}_p : p \in \widetilde{\mathbb{P}}\big)$ була або однозначною, або однозначно розв'язною за відсутності якихось умов на зростання елементів множин $\widetilde{\mathbb{F}}_p$, $\widetilde{\mathbb{O}}_p$ $(p \in \widetilde{\mathbb{P}})$ на нескінченності.

Тут пропонуємо такий вибір шуканих множин. Нехай $\mathbb{P}^*$ – множина, яка складається з елементів $p \in \mathbb{P}$ таких, що

$$p_{0j}^{-} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \operatorname*{ess\,inf}_{x \in \Omega} p_{\,0j}(x) \geqslant 2, \qquad p_{0j}^{+} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} p_{\,0j}(x) < +\infty, \qquad j = \overline{1, N},$$

$$p_{ij}^{-} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \operatorname*{ess\,inf}_{x \in \Omega} p_{ij}(x) > 1, \qquad p_{ij}^{+} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} p_{ij}(x) \leqslant 2, \qquad i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, N},$$

$$q_{ij}^{-} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \operatorname*{ess\,inf}_{x \in \Omega} q_{ij}(x) > n, \qquad q_{ij}^{+} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} q_{ij}(x) < +\infty, \qquad i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, N},$$

де $q_{ij}(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{p_{0j}(x) p_{ij}(x)}{p_{0j}(x) - p_{ij}(x)}$, $x \in \Omega$ $(i = \overline{1, n},\, j = \overline{1, N})$.

Для кожного $p \in \mathbb{P}^*$ введемо множину $\mathbb{A}_p^*$ наборів функцій $\{A_{ij}\} \in \mathbb{A}_p$, які задовольняють додаткову умову;

4) сталі $\sigma_{1j}, \ldots, \sigma_{nj}$ $(j = \overline{1, N})$ в умові **3** такі, що

$$n - q_{ij}^{-} + \sigma_{ij} \frac{q_{ij}^{+}}{p_{ij}^{-}} < 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, N}.$$

Теорема 1. *Задача* $\mathbf{SI}\big(\mathbb{A}_p^*,\, \mathbb{F}_p,\, \mathbb{O}_p : p \in \mathbb{P}^*\big)$ *є однозначною і, якщо* $\mathbf{SSI}(\{A_{ij}\}, (F_{ij}), K) \neq \varnothing$ *для деяких* $p \in \mathbb{P}^*$ *і* $\{A_{ij}\} \in \mathbb{A}_p^*$, $(F_{ij}) \in \mathbb{F}_p$, $K \in \mathbb{O}_p$, *то для* $u \in \mathbf{SSI}(\{A_{ij}\}, (F_{ij}), K)$ *і будь-яких* R_0, R, $0 < R_0 < R$, $R \geqslant 1$, *виконується нерівність*

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{n} |\partial_i u_j(x)|^{p_{ij}(x)} d\, x \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{R}{R-R_0}\right)^s \Big[C_1 R^{n-\gamma} + C_2 \int\limits_{\Omega_R} \sum_{j=1}^N \sum_{i=0}^n |F_{ij}(x)|^{p^*_{ij}(x)}\, d\,x\Big], \qquad (3)$$

де $\gamma = \min\big\{q_{ij}^- - \sigma_{ij}\frac{q_{ij}^+}{p_{ij}^-} : 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant N\big\}$; $s > \max\big\{q_{ij}^+ : 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant N\big\}$; C_1, C_2 *– деякі додатні сталі, які залежать тільки від* n, s, p_{ij}^-, p_{ij}^+ $(i = \overline{0,n}$, $j = \overline{1,N})$, q_{ij}^-, q_{ij}^+ $(i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,N})$.

Нехай $W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{c}}(\Omega)$ – лінійний підпростір лінійного простору $W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, який складається з функцій, носії яких є обмеженими множинами. На просторі $W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{c}}(\Omega)$ збіжність послідовностей визначається так: послідовність $\{f^k\}_{k=1}^\infty$ збіжна до f в $W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{c}}(\Omega)$, якщо існує значення $R > 0$ таке, що носії членів послідовності лежать в $\overline{\Omega_R}$ і $\|f - f^k\|_{W^1_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_R)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Спряжений до $W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{c}}(\Omega)$ простір позначатимемо через $(W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{c}}(\Omega))'$, а дію елемента $f \in (W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{c}}(\Omega))'$ на елемент $v \in W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{c}}(\Omega)$ через $\langle f, v\rangle_*$. Очевидно, що простір $W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ можна ототожнити з простором $(W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{c}}(\Omega))'$.

Для $p \in \mathbb{P}^*$ через $\mathbb{O}_p^*$ позначимо підмножину множини $\mathbb{O}_p$ таку, що складається з елементів K, які є опуклими замкненими конусами з вершиною в нулі (тобто 1) $v + w \in K$ $\forall v, w \in K$; 2) $\lambda v \in K$ $\forall \lambda \geqslant 0$, $v \in K$), і для будь-якого елемента K існує оператор $\beta : W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \longrightarrow (W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{c}}(\Omega))'$, який задовольняє умову

$$K = \{v \in W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) : \beta(v) = 0\},$$

$$\langle \beta(u^1) - \beta(u^2), w(u^1 - u^2)\rangle_* \geqslant 0 \quad \forall\, u^1, u^2 \in W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}),\ w \in \big(C_{\mathrm{c}}^{1,+}(\overline{\Omega})\big)^N. \qquad (4)$$

Зауваження 2. Нехай $G \subseteq \Omega$ – підобласть або кусково-гладка $(n-1)$-вимірна поверхня, а K – підмножина множини $W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{G})$, яка складається з невід'ємних на G функцій. Очевидно, що K – опуклий замкнений конус з вершиною в нулі. Для множини K визначимо оператор β, який задовольняє зазначені вище умови, за правилом

$$\langle \beta u, v\rangle_* = \int\limits_G \sum_{j=1}^N u_j^{(-)}\, v_j\, d\,\mu \quad \forall\, u \in W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), \quad v \in W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{c}}(\Omega),$$

де $d\,\mu$ – елемент "об'єму", якщо G – підобласть, і $d\,\mu$ – елемент "площі", якщо G – поверхня; $u^{(-)}(x) = u(x)$ при $u(x) < 0$ і $u^{(-)}(x) = 0$ при $u(x) \geqslant 0$ для майже всіх $x \in G$.

Теорема 2. *Задача* $\mathbf{SI}\big(\mathbb{A}_p^*,\ \mathbb{F}_p,\ \mathbb{O}_p^* : p \in \mathbb{P}^*\big)$ *– однозначно розв'язна.*

4. Допоміжні твердження.

Лема 1. *Нехай* $\{A_{ij}\} \in \mathbb{A}_p$, *де* $p \in \mathbb{P}^*$. *Для кожних* $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, N\}$, *майже всіх* $x \in \Omega$ *та довільних* ξ_1, ξ_2 *з* $\mathbb{R}$ *виконуються нерівності*

$$(A_{ij}(x,\xi_1) - A_{ij}(x,\xi_2))(\xi_1 - \xi_2) \geqslant K_{ij}^-\big(|\xi_1|^{p_{ij}(x)-2}\xi_1 - |\xi_2|^{p_{ij}(x)-2}\xi_2\big)\big(\xi_1 - \xi_2\big), \qquad (5)$$

$$(A_{ij}(x,\xi_1) - A_{ij}(x,\xi_2))(\xi_1 - \xi_2) \leqslant K_{ij}^+(1 + |x|)^{\sigma_{ij}}|\xi_1 - \xi_2|^{p_{ij}(x)}, \qquad (6)$$

де K_{ij}^-, K_{ij}^+ $(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,N})$ *– деякі додатні сталі.*

Доведення. Див. [7, с. 6]. □

Зауваження 3. Для довільних $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$, $\nu > 1$ з нерівності Юнга [9] ($a\,b \leqslant \frac{a^{\nu}}{\nu} + \frac{b^{\nu^*}}{\nu^*}$, $\nu^* = \frac{\nu}{\nu-1}$) випливає нерівність

$$a\,b \leqslant \varepsilon a^{\nu} + \varepsilon^{1-\nu^*}\, b^{\nu^*}. \tag{7}$$

Зауваження 4. З нерівності Юнга [9] ($a\,b\,c \leqslant \frac{a^{\nu_1}}{\nu_1} + \frac{b^{\nu_2}}{\nu_2} + \frac{c^{\nu_3}}{\nu_3}$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, $\nu_1 > 1$, $\nu_2 > 1$, $\nu_3 > 1$, $\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} + \frac{1}{\nu_3} = 1$) легко отримати нерівність

$$a\,b\,c \leqslant \varepsilon a^{\nu_1} + \varepsilon b^{\nu_2} + \varepsilon^{1-\nu_3}\, c^{\nu_3}, \quad \varepsilon > 0. \tag{8}$$

Лема 2. *Нехай $R_* \geqslant 1$, $\{A_{ij}\} \in \mathbb{A}_p^*$, $(F_{ij}) \in \mathbb{F}_p$, $K \in \mathbb{O}_p$ для якого-небудь $p \in \mathbb{P}^*$ і для кожного $l \in \{1,2\}$ функція $u^l \in K$ така, що*

$$\int\limits_{\Omega_{R_*}} \sum_{j=1}^{N} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} A_{ij}(x, \partial_i u_j^l)\, \partial_i(w_j(v_j - u_j^l)) + A_{0j}(x, u^l)\, w_j(v_j - u_j^l) \Big\}\, d\,x \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\Omega_{R_*}} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{n} F_{ij}\, \partial_i(w_j(v_j - u_j^l))\, d\,x \tag{9}$$

для довільних $v \in K$, $w_j \in C_{\mathrm{c}}^{1,+}(\overline{\Omega})$, $\operatorname{supp}\ w_j \subset \overline{\Omega_{R_*}}$ $(j = \overline{1,N})$.

Тоді для будь-яких чисел $R_0 > 0$, $R \geqslant 1$, $R_0 < R \leqslant R_*$ правильна нерівність

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}} \sum_{j=1}^{N} |u_j^1 - u_j^2|^{p_{0j}(x)}\, d\,x \leqslant C_3 \left(\frac{R}{R - R_0} \right)^{s} R^{\,n-\gamma}, \tag{10}$$

де s і γ – такі ж, як в умові теореми 1, а C_3 – додатна стала, яка від u^l $(l = \overline{1,2})$, F_{ij} $(i = \overline{0,n}, j = \overline{1,N})$ не залежить.

Доведення. Довільно виберемо і зафіксуємо числа R_0, R за умови, що $0 < R_0 < R \leqslant$ $\leqslant R_*$, $R \geqslant 1$. Додавши інтегральні нерівності, отримані з (9) при $l = 1$ і $l = 2$, та прийнявши $v = \frac{1}{2}(u^1 + u^2)$, матимемо

$$\int\limits_{\Omega_{R_*}} \sum_{j=1}^{N} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} (A_{ij}(x, \partial_i u_j^1) - A_{ij}(x, \partial_i u_j^2))\, \partial_i(w_j(u_j^1 - u_j^2)) +$$

$$+ (A_{0j}(x, u^1) - A_{0j}(x, u^2))\, w_j(u_j^1 - u_j^2) \Big\}\, d\,x \leqslant 0, \tag{11}$$

де $w_j \in C_{\mathrm{c}}^{1,+}(\overline{\Omega})$, $\operatorname{supp} w_j \subset \overline{\Omega_{R_*}}$ $(j = \overline{1,N})$.

Приймемо в (11) $w_j = \zeta^s$ $(j = \overline{1,N})$, де

$$\zeta(x) = \begin{cases} \frac{1}{R}(R^2 - |x|^2), & |x| < R, \\ 0, & |x| \geqslant R, \end{cases} \tag{12}$$

$s > 1$ – достатньо велике число (значення s уточнимо пізніше). У результаті одержимо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_R} \sum_{j=1}^{N} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} (A_{ij}(x, \partial_i u_j^1) - A_{ij}(x, \partial_i u_j^2)) \partial_i (u_j^1 - u_j^2) + (A_{0j}(x, u^1) - A_{0j}(x, u^2)) \times$$

$$\times (u_j^1 - u_j^2) \Big\} \zeta^s \, dx \leqslant -s \int\limits_{\Omega_R} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} \big(A_{ij}(x, \partial_i u_j^1) - A_{ij}(x, \partial_i u_j^2)\big) \, (u_j^1 - u_2^j) \, \zeta^{s-1} \, \partial_i \zeta \, dx. \quad (13)$$

Оцінимо члени нерівності (13). На підставі умови **2** одержуємо

$$\int\limits_{\Omega_R} \sum_{j=1}^{N} (A_{0j}(x, u^1) - A_{0j}(x, u^2)) \, (u_j^1 - u_j^2) \, \zeta^s \, dx \geqslant$$

$$\geqslant K_0 \int\limits_{\Omega_R} \sum_{j=1}^{N} |u_j^1(x) - u_j^2(x)|^{p_{0j}(x)} \, \zeta^s \, dx. \quad (14)$$

Міркуючи так, як у [7, с. 8], для $s > \max\big\{q_{ij}^+ : 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant N\big\}$ одержимо

$$-s \int\limits_{\Omega_R} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} (A_{ij}(x, \partial_i u_j^1) - A_{ij}(x, \partial_i u_j^2)) \, (u_j^1 - u_j^2) \, \zeta^{s-1} \, \partial_i \zeta \, dx \leqslant$$

$$\leqslant \eta_1 \int\limits_{\Omega_R} \sum_{j=1}^{N} \left\{ \sum_{i=1}^{n} (A_{ij}(x, \partial_i u_j^1) - A_{ij}(x, \partial_i u_j^2))(\partial_i u_j^1 - \partial_i u_j^2) + |u_j^1(x) - u_j^2(x)|^{p_{0j}(x)} \right\} \zeta^s \, dx +$$

$$+ C_4(\eta_1) \int\limits_{\Omega_R} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} R^{s - q_{ij}(x) + \sigma_{ij} \frac{q_{ij}(x)}{p_{ij}(x)}} dx, \quad (15)$$

де η_1 – довільне число з інтервалу $(0;1)$, $C_4(\eta_1) > 0$ – деяка стала.

З (13)–(15), вибираючи достатньо малим значення η_1, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_R} \sum_{j=1}^{N} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} (A_{ij}(x, \partial_i u_j^1) - A_{ij}(x, \partial_i u_j^2))(\partial_i u_j^1(x) - \partial_i u_j^2(x)) + |u_j^1(x) - u_j^2(x)|^{p_{0j}(x)} \Big\} \zeta^s \, dx \leqslant$$

$$\leqslant C_5 \int\limits_{\Omega_R} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} R^{s - q_{ij}(x) + \sigma_{ij} \frac{q_{ij}(x)}{p_{ij}(x)}} \, dx, \quad (16)$$

де C_5 – деяка додатна стала.

Зауважимо, що $s - q_{ij}(x) + \sigma_{ij} \frac{q_{ij}(x)}{p_{ij}(x)} \leqslant s - q_{ij}^- + \sigma_{ij} \frac{q_{ij}^+}{p_{ij}^-}$ для майже всіх $x \in \Omega$ і будь-яких $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, N\}$. Легко переконатися, що $0 \leqslant \zeta(x) \leqslant R$, коли

$x \in \mathbb{R}^n$, та $\zeta(x) \geqslant R - R_0$ при $|x| \leqslant R_0$, де $R_0 \in (0, R)$ – яке-небудь число. Врахувавши сказане і, зокрема, те, що $R \geqslant 1$, з (16) на підставі нерівності (5) отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}} \sum_{j=1}^{N} |u_j^1 - u_j^2|^{p_{0j}(x)} d\,x \leqslant C_6 \left(\frac{R}{R - R_0} \right)^s \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} R^{n - q_{ij}^- + \sigma_{ij} \frac{q_{ij}^+}{p_{ij}^-}}, \tag{17}$$

де C_6 – додатна стала, яка залежить тільки від n, s, p_{ij}^-, p_{ij}^+ $(i = \overline{0, n},\ j = \overline{1, N})$, q_{ij}^-, q_{ij}^+ $(i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, N})$. З (17), врахувавши, що $n - q_{ij}^- + \sigma_{ij} \frac{q_{ij}^+}{p_{ij}^-} \leqslant n - \gamma$ $(i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, N})$, де $\gamma = \min\bigl\{ q_{ij}^- - \sigma_{ij} \frac{q_{ij}^+}{p_{ij}^-} : 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant N \bigr\}$, отримаємо нерівність (10). □

Лема 3. *Нехай $p \in \mathbb{P}^*$ і $\{A_{ij}\} \in \mathbb{A}_p^*$, $(F_{ij}) \in \mathbb{F}_p$, $K \in \mathbb{O}_p$, $u \in K$ такі, що виконується нерівність (2) для довільних $v \in K$, $w_j \in C_{\rm c}^{1,+}(\overline{\Omega})$, $\operatorname{supp} w_j \subset \overline{\Omega_{R_*}}$ $(j = \overline{1, N})$, де $R_* > 1$ – деяке число. Тоді для будь-яких чисел $R_0 > 0$, $R \geqslant 1$, $R_0 < R \leqslant R_*$, правильна нерівність (3).*

Доведення. Нехай $R \geqslant 1$ – яке-небудь число з проміжку $[1; R_*]$. Приймемо в (2) $w_j = \zeta^s$ $(j = \overline{1, N})$, де ζ визначена в (12), $v = 0$. Після простих перетворень отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_R} \sum_{j=1}^{N} \Bigl\{ \sum_{i=1}^{n} A_{ij}(x, \partial_i u_j)\, \partial_i u_j + A_{0j}(x, u)\, u_j \Bigr\} \zeta^s\, d\,x \leqslant \int\limits_{\Omega_R} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{n} F_{ij}\, \partial_i u_j\, \zeta^s\, d\,x +$$

$$+ s \int\limits_{\Omega_R} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} F_{ij}\, u_j\, \zeta^{s-1} \partial_i \zeta\, d\,x - s \int\limits_{\Omega_R} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} A_{ij}(x, \partial_i u_j)\, u_j\, \zeta^{s-1} \partial_i \zeta\, d\,x. \tag{18}$$

Оцінимо доданки нерівності (18). Згідно з нерівностями (5) та умовою **2** одержимо

$$\int\limits_{\Omega_R} \sum_{j=1}^{N} \Bigl\{ \sum_{i=1}^{n} A_{ij}(x, \partial_i u_j)\, \partial_i u_j + A_{0j}(x, u)\, u_j \Bigr\} \zeta^s\, d\,x \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\Omega_R} \sum_{j=1}^{N} \Bigl\{ \sum_{i=1}^{n} K_{ij}^- |\partial_i u_j(x)|^{p_{ij}(x)} + K_0 |u_j(x)|^{p_{0j}(x)} \Bigr\} \zeta^s\, d\,x. \tag{19}$$

Використавши нерівність (7), отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_R} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{n} F_{ij}\, \partial_i u_j\, \zeta^s\, d\,x \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega_R} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{n} \Bigl\{ \varepsilon_1 |\partial_i u_j(x)|^{p_{ij}(x)} + C_7(\varepsilon_1) |F_{ij}(x)|^{p_{ij}^*(x)} \Bigr\} \zeta^s\, d\,x, \tag{20}$$

де $\varepsilon_1 \in (0; 1)$ – довільне число; $C_7(\varepsilon_1)$ – деяка додатна стала, залежна від ε_1.

На підставі нерівності (8) маємо

$$s\int\limits_{\Omega_R}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}F_{ij}\,u_j\,\zeta^{s-1}\partial_i\zeta\,d\,x\leqslant\varepsilon_2\int\limits_{\Omega_R}\sum_{j=1}^{N}|u_j(x)|^{p_{0j}(x)}\,\zeta^s\,d\,x+$$

$$+\varepsilon_2\int\limits_{\Omega_R}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}|F_{ij}(x)|^{p^*_{ij}(x)}\,\zeta^s\,d\,x+C_8(\varepsilon_2)\int\limits_{\Omega_R}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}\zeta^{s-q_{ij}(x)}\,d\,x,\qquad(21)$$

де $\varepsilon_2\in(0;1)$ – довільне число, а $C_8(\varepsilon_2)$ – деяка додатна стала. Прийнявши в (15) $u^1=u$, $u^2=0$, одержимо

$$-s\int\limits_{\Omega_R}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}A_{ij}(x,\partial_iu_j)\,u_j\,\zeta^{s-1}\partial_i\zeta\,d\,x\leqslant\varepsilon_3\int\limits_{\Omega_R}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}A_{ij}(x,\partial_iu_j)\,\partial_iu_j\,\zeta^s\,d\,x+$$

$$+\varepsilon_3\int\limits_{\Omega_R}\sum_{j=1}^{N}|u_j(x)|^{p_{0j}(x)}\,\zeta^s\,d\,x+C_9(\varepsilon_3)\int\limits_{\Omega_R}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}R^{s-q_{ij}(x)+\sigma_{ij}\frac{q_{ij}(x)}{p_{ij}(x)}}d\,x,\qquad(22)$$

де $\varepsilon_3\in(0;1)$ – довільне число; $C_9(\varepsilon_3)$ – деяка додатна стала.

На підставі (19)-(22) з (18) при достатньо малих значеннях $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_R}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{n}|\partial_iu_j(x)|^{p_{ij}(x)}\,\zeta^s(x)\,d\,x\leqslant C_{10}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}R^{n+s-q^-_{ij}+\sigma_{ij}\frac{q^+_{ij}}{p^-_{ij}}}+$$

$$+C_{11}\int\limits_{\Omega_R}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{n}|F_{ij}(x)|^{p^*_{ij}(x)}\,\zeta^s(x)d\,x,\qquad(23)$$

де $s>\max\{q^+_{ij}:1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant N\}$ – довільна стала; C_{10}, C_{11} – додатні сталі, які залежать тільки від n, s, p^-_{ij}, p^+_{ij} $(i=\overline{0,n},j=\overline{1,N})$, q^-_{ij}, q^+_{ij}, $(i=\overline{1,n},j=\overline{1,N})$.

Діючи далі так само, як у доведенні леми 2 (див. (17)), отримаємо оцінку (3). $\square$

Нехай $p\in\mathbb{P}^*$ і $\{A_{ij}\}\in\mathbb{A}^*_p$, $(F_{ij})\in\mathbb{F}_p$, $K\in\mathbb{O}^*_p$, k – деяке натуральне число. Приймемо $\mathbb{U}_{p,k}\stackrel{\rm def}{=}\{v|_{\Omega_k}:v\in W^1_{p(\,\cdot\,),\mathrm{c}}(\Omega),\ \operatorname{supp}v\subset\overline{\Omega_k}\}$ – лінійний простір, наділений нормою простору $W^1_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_k)$ (очевидно, що $\mathbb{U}_{p,k}\subset W^1_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_k)$). Простір $\mathbb{U}_{p,k}$ є банаховим. Канонічну форму на $(\mathbb{U}_{p,k})'\times\mathbb{U}_{p,k}$ позначимо через $\langle\cdot,\,\cdot\rangle_k$. Під K_k розумітимемо множину $\{v|_{\Omega_k}:v\in K,\ \operatorname{supp}v\subset\Omega_k\}$, яка, на підставі нашого припущення, є опуклою замкненою підмножиною $\mathbb{U}_{p,k}$.

Визначимо оператор $L^k:\mathbb{U}_{p,k}\to\ (\mathbb{U}_{p,k})'$ за правилом

$$\langle L^kv,\widetilde{v}\rangle_k\stackrel{\rm def}{=}\int\limits_{\Omega_k}\sum_{j=1}^{N}\Big\{\sum_{i=1}^{n}A_{ij}(x,\partial_iv_j)\,\partial_i\widetilde{v}_j+A_{0j}(x,v)\,\widetilde{v}_j\Big\}\,d\,x\quad\forall v,\widetilde{v}\in\mathbb{U}_{p,k}.$$

Легко переконатися, що оператор $L^k:\mathbb{U}_{p,k}\to\ (\mathbb{U}_{p,k})'$ – строго монотонний, обмежений, коерцитивний і семінеперервний. Доведення цього факту проводять подібно до випадку сталого показника нелінійності, використовуючи зв'язок між нормою простору $L_{r(\,\cdot\,)}(\Omega_k)$ і функціоналом $\rho_{r,k}(v)$.

Тепер визначимо функціонал $\Phi^k \in (\mathbb{U}_{p,k})'$ за правилом

$$\langle \Phi^k, \widetilde{v}\rangle_k \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\Omega_k} \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{n} F_{ij}(x)\,\partial_i \widetilde{v}_j(x)\,dx \qquad \forall \widetilde{v} \in \mathbb{U}_{p,k}.$$

Лема 4. *Існує єдина функція $u^k \in K_k$ така, що*

$$\langle L^k u^k, w(v-u^k)\rangle_k \geqslant \langle \Phi^k, w(v-u^k)\rangle_k \tag{24}$$

для будь-яких $v \in K_k$, $w \in \left(C^{1,+}(\overline{\Omega})\right)^N$.

Доведення. Для довільного $\varepsilon \in (0,1)$ розглянемо задачу: знайти функцію $u^\varepsilon \in \mathbb{U}_{p,k}$, яка задовольняє рівняння

$$L^k u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\beta^k u^\varepsilon = \Phi^k, \tag{25}$$

де β^k – звуження оператора штрафу β, що визначає K, на простір $\mathbb{U}_{p,k}$.

У цьому доведенні, для спрощення записів, всюди опустимо індекс k, крім позначень $\mathbb{U}_{p,k}$, K_k і Ω_k. Використовуючи властивості оператора L, легко переконатися, що оператор $L+\frac{1}{\varepsilon}\beta$ – монотонний, обмежений, семінеперервний і коерцитивний. Враховуючи це, а також те, що простір $\mathbb{U}_{p,k}$ – рефлексивний і сепарабельний, на підставі теореми 2.1 монографії [10, Гл.2, §2] отримаємо існування розв'язку рівняння (25). Його єдиність випливає з сильної монотонності оператора L.

Міркуючи так, як при доведенні теореми 5.2 [10, с.385], одержимо, що множина $\{u^\varepsilon : \varepsilon \in (0;1)\}$ – обмежена в $\mathbb{U}_{p,k}$, множина $\{Lu^\varepsilon : \varepsilon \in (0;1)\}$ – обмежена в $(\mathbb{U}_{p,k})'$, $\|\beta u^\varepsilon\| \leqslant C_{12}\varepsilon$, де C_{12} – деяка додатна стала. Звідси випливає існування функцій $u \in \mathbb{U}_{p,k}$, $\chi \in (\mathbb{U}_{p,k})'$ та послідовності $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$ таких, що $\varepsilon_m \to 0$ при $m \to \infty$ і

$$u^{\varepsilon_m} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u \;\text{ слабко в } \mathbb{U}_{p,k}, \tag{26}$$

$$Lu^{\varepsilon_m} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \chi \;\text{ слабко в }\; (\mathbb{U}_{p,k})', \tag{27}$$

$$\beta u^{\varepsilon_m} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \;\text{ сильно в } (\mathbb{U}_{p,k})', \quad \beta u = 0. \tag{28}$$

З рівняння (25) для довільних $v \in K_k$, $w \in (C^{1,+}(\overline{\Omega}))^N$ маємо

$$\langle Lu^{\varepsilon_m} - \Phi, w(v-u^{\varepsilon_m})\rangle = \frac{1}{\varepsilon_m}\langle \beta v - \beta u^{\varepsilon_m}, w(v-u^{\varepsilon_m})\rangle \geqslant 0, \tag{29}$$

звідки випливає нерівність

$$\langle Lu^{\varepsilon_m}, w(v-u^{\varepsilon_m})\rangle \geqslant \langle \Phi, w(v-u^{\varepsilon_m})\rangle \quad \forall v \in K_k,\; w \in \left(C^{1,+}(\overline{\Omega})\right)^N,\; m \in \mathbb{N}. \tag{30}$$

Прийнявши в (30) $v=u$, $w_j = 1$ $(j=\overline{1,N})$, одержимо

$$\langle Lu^{\varepsilon_m}, u-u^{\varepsilon_m}\rangle \geqslant \langle \Phi, u-u^{\varepsilon_m}\rangle.$$

Звідси, на підставі (26), отримуємо

$$\varliminf_{m\to\infty}\langle Lu^{\varepsilon_m}, u-u^{\varepsilon_m}\rangle \geqslant 0. \tag{31}$$

З монотонності оператора L випливає $\langle Lu - Lu^{\varepsilon_m}, u-u^{\varepsilon_m}\rangle \geqslant 0$, тобто

$$\langle Lu^{\varepsilon_m}, u-u^{\varepsilon_m}\rangle \leqslant \langle Lu, u-u^{\varepsilon_m}\rangle,$$

звідки
$$\varlimsup_{m\to\infty}\langle Lu^{\varepsilon_m}, u-u^{\varepsilon_m}\rangle \leqslant 0. \tag{32}$$
З (31) і (32) отримаємо
$$\lim_{m\to\infty}\langle Lu^{\varepsilon_m}, u-u^{\varepsilon_m}\rangle = 0. \tag{33}$$
Врахувавши умову **2** та нерівності (5), отримаємо
$$\langle Lu^{\varepsilon_m}-Lu, u^{\varepsilon_m}-u\rangle \geqslant K_0\int\limits_{\Omega_k}\sum_{j=1}^{N}|u_j^{\varepsilon_m}-u_j|^{p_{0j}(x)}\,dx \quad \forall m\in\mathbb{N}. \tag{34}$$
На підставі (26) та (33) з (34) одержимо
$$u_j^{\varepsilon_m}\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}u_j \ \ \text{сильно в } L_{p_{0j}(\,\cdot\,)}(\Omega_k), \qquad j=\overline{1,N}. \tag{35}$$
Покажемо, що
$$\chi = Lu. \tag{36}$$
Для цього використаємо ідею, викладену на сторінці 191 монографії [10]. Нехай $\widetilde{v}$ – довільний елемент з простору $\mathbb{U}_{p,k}$. Приймемо $w^\theta \stackrel{\text{def}}{=} u+\theta(\widetilde{v}-u)$, $\theta\in(0,1)$. На підставі монотонності оператора L отримаємо $\langle Lu^{\varepsilon_m}-Lw^\theta, u^{\varepsilon_m}-w^\theta\rangle\geqslant 0$, тобто
$$\theta\langle Lu^{\varepsilon_m}, u-\widetilde{v}\rangle \geqslant \langle Lu^{\varepsilon_m}, u-u^{\varepsilon_m}\rangle + \langle Lw^\theta, u^{\varepsilon_m}-u\rangle + \theta\langle Lw^\theta, u-\widetilde{v}\rangle.$$
Спрямуємо в цій нерівності m до ∞, врахувавши (26), (33). У результаті отримаємо
$$\langle\chi, u-\widetilde{v}\rangle \geqslant \langle Lw^\theta, u-\widetilde{v}\rangle.$$
Спрямувавши тут θ до 0, і враховуючи, що оператор L – семінеперервний, одержимо
$$\langle\chi-Lu, u-\widetilde{v}\rangle \geqslant 0 \tag{37}$$
для довільних $\widetilde{v}\in\mathbb{U}_{p,k}$. Узявши в (37) $\widetilde{v}=u-\lambda\psi$, де $\lambda>0$, $\psi\in\mathbb{U}_{p,k}$, отримаємо $\langle\chi-Lu,\psi\rangle\geqslant 0$ $\forall\psi\in\mathbb{U}_{p,k}$, звідки легко випливає (36).

Використовуючи означення оператора L, умову **2** та нерівності (5) (див. [7, с. 13]), отримаємо
$$\langle Lu^{\varepsilon_m}, w(u-u^{\varepsilon_m})\rangle \leqslant \int\limits_{\Omega_k}\sum_{j=1}^{N}\Big\{\sum_{i=1}^{n}A_{ij}(x,\partial_i u_j^{\varepsilon_m})\,(u_j-u_j^{\varepsilon_m})\,\partial_i w_j +$$
$$+\sum_{i=1}^{n}A_{ij}(x,\partial_i u_j)\,\partial_i(u_j-u_j^{\varepsilon_m})\,w_j + A_{0j}(x,u)\,w_j(u_j-u_j^{\varepsilon_m})\Big\}\,dx. \tag{38}$$
Перейшовши в (38) до границі при $m\to\infty$, отримаємо
$$\varlimsup_{m\to\infty}\langle Lu^{\varepsilon_m}, w(u-u^{\varepsilon_m})\rangle \leqslant 0. \tag{39}$$
На підставі нерівності (30) одержимо
$$\langle\Phi, w(v-u^{\varepsilon_m})\rangle \leqslant \langle Lu^{\varepsilon_m}, w(v-u^{\varepsilon_m})\rangle = \langle Lu^{\varepsilon_m}, w(v-u)\rangle + \langle Lu^{\varepsilon_m}, w(u-u^{\varepsilon_m})\rangle, \tag{40}$$
для довільних $v\in K_k$, $w\in\big(C^{1,+}(\overline{\Omega})\big)^N$.

Спрямуємо в (40) m до ∞, враховуючи (27), (36), (39). У результаті отримаємо (24) для довільних $v\in K_k$, $w\in\big(C^{1,+}(\overline{\Omega})\big)^N$. $\square$

5. Доведення основних результатів. *Доведення теореми 1.* Припустимо супротивне. Нехай для деяких $p \in \mathbb{P}^*$ і $\{A_{ij}\} \in \mathbb{A}_p^*$, $(F_{ij}) \in \mathbb{F}_p$, $K \in \mathbb{O}_p$ множина $\mathbf{SSI}(\{A_{ij}\}, (F_{ij}), K)$ складається з понад одного елемента. Виберемо які-небудь два елементи з $\mathbf{SSI}(\{A_{ij}\}, (F_{ij}), K)$ і позначимо їх через u^1 та u^2. Згідно з лемою 2 і нашим припущенням маємо для довільних R_0, R таких, що $0 < R_0 < R$, $R \geqslant 1$, нерівність

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}} \sum_{j=1}^{N} |u_j^1(x) - u_j^2(x)|^{p_{0j}(x)}\, dx \leqslant C_3 \left(\frac{R}{R-R_0}\right)^s R^{n-\gamma}, \tag{41}$$

де s і γ – такі самі, як у формулюванні теореми 1, а C_3 – додатна стала, яка від u^l $(l = \overline{1,2})$ не залежить.

Отож, довільно зафіксувавши вибране R_0, перейдемо в (41) до границі при $R \to +\infty$. У результаті отримаємо, що $u^1(x) = u^2(x)$ для майже всіх $x \in \Omega_{R_0}$. Оскільки R_0 – довільне число, то маємо $u^1(x) = u^2(x)$ для майже всіх $x \in \Omega$, тобто множина $\mathbf{SSI}(\{A_{ij}\}, (F_{ij}), K)$ не може містити більше одного елемента.

Нехай $\mathbf{SSI}(\{A_{ij}\}, (F_{ij}), K) \neq 0$ для деяких $p \in \mathbb{P}^*$ і $\{A_{ij}\} \in \mathbb{A}_p^*$, $(F_{ij}) \in \mathbb{F}_p$, $K \in \mathbb{O}_p$. Тоді на підставі леми 3 маємо (3). $\square$

Доведення теореми 2. Нехай $p \in \mathbb{P}^*$ і $\{A_{ij}\} \in \mathbb{A}_p^*$, $(F_{ij}) \in \mathbb{F}_p$, $K \in \mathbb{O}_p^*$. Згідно з лемою 4 для кожного натурального числа k, врахувавши означення оператора L^k та функціонала Φ^k, одержуємо існування функції $u^k \in K_k$ такої, що

$$\int\limits_{\Omega_k} \sum_{j=1}^{N} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} A_{ij}(x, \partial_i u_j^k)\, \partial_i(w_j(v_j - u_j^k)) + A_{0j}(x, u^k)\, w_j(v_j - u_j^k) \Big\}\, dx \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\Omega_k} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{n} F_{ij}(x)\, \partial_i(w_j(v_j - u_j^k))\, dx, \tag{42}$$

для будь-яких $v \in K$, $w \in \left(C_{\mathrm{c}}^{1,+}(\overline{\Omega})\right)^N$, $\operatorname{supp} w_j \subset \overline{\Omega_k}$ $(j = \overline{1,N})$.

Довизначимо для кожного $k \in \mathbb{N}$ функцію u^k нулем на $\Omega \backslash \overline{\Omega_k}$, залишивши за цим продовженням позначення u^k. Очевидно, що $u^k \in K$. Нехай k і m – довільні натуральні числа, причому $1 < k < m$; R_0, R – будь-які дійсні числа такі, що $0 < R_0 < R \leqslant k - 1$, $R \geqslant 1$. Тоді на підставі леми 2 з (42), узявши $R_* = k - 1$, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}} \sum_{j=1}^{N} |u_j^k(x) - u_j^m(x)|^{p_{0j}(x)}\, dx \leqslant C_3 \left(\frac{R}{R-R_0}\right)^s R^{n-\gamma}, \tag{43}$$

де $C_3 > 0$, $s > 0$ – сталі, які від k, m, R_0 та R не залежать, причому значення γ таке, що $n - \gamma < 0$ (його можна таким вибрати на підставі умов теореми 2).

Нехай $\varepsilon > 0$ – яке-небудь число. Зафіксуємо довільне значення $R_0 > 0$ і виберемо $R > \max\{1; R_0\}$ настільки великим, щоби права частина нерівності (43) була меншою за ε. Тоді для будь-яких $k \geqslant R + 1$ і $m > k$ ліва частина нерівності (43) менша за ε. Це означає, що послідовність $\left\{ u_j^k \big|_{\Omega_{R_0}} \right\}_{k=1}^{\infty}$ є фундаментальною в $L_{p_{0j}(\cdot)}(\Omega_{R_0})$

$(j=\overline{1,N})$. Оскільки $R_0>0$ – довільне число, то звідси випливає існування функцій $u_j \in L_{p_{0j}(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ $(j=\overline{1,N})$ таких, що

$$u_j^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u_j \quad \text{сильно в} \quad L_{p_{0j}(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), \quad j=\overline{1,N}. \tag{44}$$

Покажемо, що послідовності $\{u^k\}_{k=1}^\infty$, $\{A_{0j}(\cdot,u^k(\,\cdot\,))\}_{k=1}^\infty$, $\{A_{ij}(\cdot,\partial_i u_j^k(\,\cdot\,))\}_{k=1}^\infty$ – обмежені відповідно в $W^1_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $L_{p^*_{0j}(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $L_{p^*_{ij}(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ $(i=\overline{1,n}, j=\overline{1,N})$. Справді, нехай R_0, R – будь-які дійсні числа такі, що $0<R_0<R$, $R\geqslant 1$. На підставі леми **3** для довільного натурального числа $k>R+1$ отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}} \sum_{j=1}^N \sum_{i=0}^n |\partial_i u_j^k(x)|^{p_{ij}(x)}\,dx \leqslant C_{13}(R_0), \tag{45}$$

де $C_{13}(R_0)>0$ – стала, яка від k не залежить, але може залежати від R_0.

Згідно з умовою **2** і нерівностями (6), використавши оцінку (45), одержимо

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}} \sum_{j=1}^N |A_{ij}\big(x,\partial_i u_j^k(x)\big)|^{p^*_{ij}(x)}\,dx \leqslant C_{14}(R_0), \quad i=\overline{0,n}, \tag{46}$$

де $C_{14}(R_0)>0$ – стала, яка від k не залежить, але може залежати від R_0.

З (44)–(46) і умови **1** отримаємо існування підпослідовності $\{u^{k_m}\}_{m=1}^\infty$ послідовності $\{u^k\}_{k=1}^\infty$ та функцій $v\in W^1_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $\chi_{ij}\in L_{p^*_{ij}(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ $(i=\overline{0,n}, j=\overline{1,N})$ таких, що

$$u^{k_m} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} v \quad \text{слабко в} \quad W^1_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), \tag{47}$$

$$u^{k_m} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{майже всюди на} \quad \Omega, \tag{48}$$

$$A_{0j}\big(\cdot,u^{k_m}(\,\cdot\,)\big) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \chi_{0j}(\,\cdot\,) \ \text{ слабко в } \ L_{p^*_{0j}(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), \quad j=\overline{1,N}, \tag{49}$$

$$A_{0j}\big(x,u^{k_m}(x)\big) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} A_{0j}\big(x,u(x)\big) \quad \text{для майже всіх} \quad x\in\Omega, \quad j=\overline{1,N}, \tag{50}$$

$$A_{ij}\big(\cdot,\partial_i u_j^{k_m}(\,\cdot\,)\big) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \chi_{ij}(\,\cdot\,) \quad \text{слабко в} \quad L_{p^*_{ij}(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), \quad i=\overline{1,n}, j=\overline{1,N}.$$

З (47)–(50) і леми 1.3 праці [10, с. 25] одержимо, що

$$v=u, \qquad \chi_{0j}(\,\cdot\,)=A_{0j}\big(\cdot,u(\,\cdot\,)\big), \quad j=\overline{1,N}.$$

На підставі методу монотонності (див. [7, с. 16]) отримаємо

$$\chi_{ij}(\,\cdot\,)=A_{ij}\big(\cdot,\partial_i u_j(\,\cdot\,)\big), \quad i=\overline{1,n}, \quad j=\overline{1,N}.$$

Нехай $v\in K$, $w\in\Big(C_c^{1,+}(\overline{\Omega})\Big)^N$. Виберемо значення $l\in\mathbb{N}$ таке, що $\operatorname{supp} w_j\subset\Omega_{k_l}$ $(j=\overline{1,N})$. Для всіх $m>l$ виконується нерівність (див. (42))

$$\int\limits_{\Omega_{k_m}} \sum_{j=1}^N \Big\{\sum_{i=1}^n A_{ij}(x,\partial_i u_j^{k_m})\,\partial_i(w_j(v_j-u_j^{k_m})) + A_{0j}(x,u^{k_m})\,w_j(v_j-u_j^{k_m})\Big\}\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\Omega_{k_m}} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{n} F_{ij}\, \partial_i (w_j (v_j - u_j^{k_m}))\, d\, x = I_1. \tag{51}$$

Перетворимо ліву частину нерівності (51) так:

$$\int\limits_{\Omega_{k_m}} \sum_{j=1}^{N} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} A_{ij}(x, \partial_i u_j^{k_m})\, \partial_i (w_j (v_j - u_j^{k_m})) + A_{0j}(x, u^{k_m})\, w_j (v_j - u_j^{k_m}) \Big\} d\, x \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega_{k_l}} \sum_{j=1}^{N} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} (A_{ij}(x, \partial_i u_j^{k_m}) - A_{ij}(x, \partial_i v_j))\, (v_j - u_j^{k_m})\, \partial_i w_j +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} A_{ij}(x, \partial_i v_j)\, \partial_i (w_j (v_j - u_j^{k_m})) + A_{0j}(x, v)\, w_j (v_j - u_j^{k_m}) \Big\} d\, x = I_2. \tag{52}$$

Стосовно правої частини нерівності (51) маємо

$$I_1 = \int\limits_{\Omega_{k_l}} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{n} F_{ij}(x)\, \partial_i (w_j (v_j - u_j^{k_m})) d\, x \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} \int\limits_{\Omega_{k_l}} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{n} F_{ij}(x)\, \partial_i (w_j (v_j - u_j)) d\, x. \tag{53}$$

Легко переконатися, що

$$I_2 \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} \int\limits_{\Omega_{k_l}} \sum_{j=1}^{N} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} (A_{ij}(x, \partial_i u_j) - A_{ij}(x, \partial_i v_j))\, (v_j - u_j)\, \partial_i w_j +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} A_{ij}(x, \partial_i v_j)\, \partial_i (w_j (v_j - u_j)) + A_{0j}(x, v)\, w_j (v_j - u_j) \Big\} d\, x. \tag{54}$$

Оцінимо ліву частину нерівності (51), використавши (52), і перейдемо в отриманій нерівності до границі при $m \to \infty$, врахувавши (53) і (54). Потім приймемо $v \overset{\text{def}}{=} u + \theta(\widetilde{v} - u)$, $0 < \theta < 1$, $\widetilde{v} \in K$. У результаті одержимо

$$\int\limits_{\Omega_{k_l}} \sum_{j=1}^{N} \{ \sum_{i=1}^{n} \Big(A_{ij}(x, \partial_i u_j) - A_{ij}(x, \partial_i (u_j + \theta(\widetilde{v}_j - u_j))) \Big)\, (\widetilde{v}_j - u_j)\, \partial_i w_j +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} A_{ij}(x, \partial_i (u_j + \theta(\widetilde{v}_j - u_j)))\, \partial_i (w_j (\widetilde{v}_j - u_j)) + A_{0j}(x, u + \theta(\widetilde{v} - u)))\, w_j (\widetilde{v}_j - u_j) \} d\, x \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\Omega_{k_l}} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{n} F_{ij}(x)\, \partial_i (w_j (\widetilde{v}_j - u_j)) d\, x. \tag{55}$$

Перейшовши в (55) до границі при $\theta \to 0$, отримаємо (2) для заданої функції $\widetilde{v}$. На підставі довільності функцій $\widetilde{v}$ і w робимо висновок, що $u \in \mathbf{SSI}(\{A_{ij}\}, (F_{ij}), K)$. Отже, ми довели однозначну розв'язність задачі $\mathbf{SI}\big(\mathbb{A}_p^*, \mathbb{F}_p, \mathbb{O}_p^* : p \in \mathbb{P}^*\big)$. $\square$

1. *Markovitz H.M.* Portfolio Selection / *Markovitz H.M.* // Journal of Finance. – 1952 (March). – Vol. 7. – P. 77-91.
2. *Simon L.* On strongly nonlinear elliptic variational inequalities. / *Simon L.* // Acta Math. Hungar. – 1988. – Vol. 52, №1-2. – P. 147-164.
3. *Simon L.* On uniqueness, regularity and stability of solutions of strongly nonlinear elliptic variational inequalities / *Simon L.* // Acta Math. Hungar. – 1990. – Vol. 55, №3-4. – P. 379-392.
4. *Медвідь І.М.* Еліптична варіаційна нерівність в необмежених областях / *Медвідь І.М.* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – Т. 49, №2. – С. 108-116.
5. *Бокало М.М.* Варіаційні нелінійні еліптичні нерівності зі змінними показниками нелінійності / *Бокало М.М., Кушнір О.В.* // Наук. Вісник Чернівецького ун-ту. – Вип. 288. Математика. – Чернівці: Рута, 2006. – С. 28-38.
6. *Бокало М.М.* Варіаційні нелінійні еліптичні нерівності вищих порядків зі змінними показниками нелінійності / *Бокало М.М., Кушнір О.В.* // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2006. – С. 20-35.
7. *Доманська О.В.* Варіаційні еліптичні нерівності в узагальнених анізотропних просторах Лебега-Соболєва / *Доманська О.В.* // Нелинейные граничные задачи. – 2008. – Вип. 18. – С. 1-19.
8. *Kováčik O.* On spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{1,p(x)}$ / *Kováčik O., Rákosníc J.* // Czechoslovak Math. J. – 1991. – Vol. 41, №4. – P. 592-618.
9. *Ладыженская О.А.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. / *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* – М.: Наука, 1964.
10. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / *Лионс Ж.-Л.* – М.: Мир, 1972.

SYSTEMS OF ELLIPTIC VARIATIONAL INEQUALITIES WITH ANISOTROPIC NONLINEARITY

Olena DOMANSKA

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: olena.domanska@gmail.com

It has been proved the weakly well-posedness of the system of elliptic variational inequalities having polynomial nonlinearities and nonlinearity indices with respect to different derivatives are different and variable. We do not put any conditions on the behaviour of solution and growth of the initial data at infinity.

Key words: nonlinear operator, variational inequality, general Lebesgue-Sobolev space, unbounded domain.

СИСТЕМЫ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ С АНИЗОТРОПНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Елена ДОМАНСКАЯ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: olena.domanska@gmail.com

Доказана однозначная разрешимость систем эллиптических вариационных неравенств, которые содержат степенные нелинейности и их показатели нелинейности относительно разных производных разные и переменные. При этом не налагаются условия на поведение решения и возростание исходных данных на бесконечности.

Ключевые слова: нелинейный оператор, вариационное неравенство, обобщенное пространство Лебега-Соболева, неограниченная область.

Стаття надійшла до редколегії 09.09.2008

Прийнята до друку 12.06.2009

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2009. *Ser. Mech. Math. 2009.*
Вип. 70. С. 68–78 *Is. 70. P. 68–78*

УДК 519.212

ЕРГОДИЧНІ РОЗПОДІЛИ ДЛЯ ДЕЯКИХ МОДИФІКАЦІЙ СИСТЕМИ ОБСЛУГОВУВАННЯ M/M/1/m

Юрій ЖЕРНОВИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: zyurvas@meta.ua

Для системи обслуговування M/M/1/m, в якій відбувається блокування вхідного потоку від моменту початку другого обслуговування поспіль до моменту звільнення системи, розглянуто випадки: 1) перерви в роботі неможливі (задача I); 2) після n обслуговувань поспіль оголошується перерва в роботі системи (задача II). Для задачі I та для задачі II у випадках $m \in [n, 2n]$; $m = n - 1$; $n = 1$ одержано ергодичні розподіли ймовірностей станів системи та довжини черги, а для $m \geqslant n$ побудовано алгоритм для визначення ергодичного розподілу. У випадку відсутності обмежень на довжину черги (система обслуговування M/M/1/∞) з'ясовано умови існування ергодичного процесу для задачі I та для задачі II при $n = 1$. Запропоновано алгоритм знаходження ергодичного розподілу для узагальнення задачі I, коли блокування вхідного потоку триває від моменту початку $(n+1)$-го обслуговування поспіль.

Ключові слова: система обслуговування M/M/1/m, блокування вхідного потоку, перерви в роботі, ергодичний розподіл імовірностей.

1. Вступ. В [1, 2] вивчали системи обслуговування типу M/G/1/m з обмеженою чергою та блокуванням вхідного потоку. Якщо довжина черги досягає числа m, то надходження замовлень у систему блокується і відновлюється лише тоді, коли довжина черги зменшиться до деякого порогового рівня $l \in [0, m-1]$. У статті [3] розглянуто систему M/G/1/m, особливістю якої є те, що після n обслуговувань поспіль оголошується вимушена перерва в роботі системи. Необхідність такої перерви може бути зумовлена технологічними або іншими причинами. Наприклад, технічний пристрій, який послідовно виконує однорідні операції, час початку і тривалість кожної з яких залежить від випадкових чинників, під час проектування може бути розрахований на обмежену кількість операцій, які виконуються без перерви між операціями.

Нижче запропоновано інші модифікації системи обслуговування M/M/1/m, пов'язані з блокуванням вхідного потоку й оголошенням перерви в роботі системи після n обслуговувань поспіль. Блокування вхідного потоку замовлень триває від моменту початку другого обслуговування поспіль аж до звільнення системи від замовлень. Ми розглянемо два варіанти формулювання задачі для системи M/M/1/m з таким блокуванням вхідного потоку: 1) перерви в роботі неможливі; 2) після n обслуговувань поспіль оголошується перерва в роботі системи, під час якої також відбувається блокування вхідного потоку. Вивчимо узагальнення першої задачі, яке полягає в тому, що блокування вхідного потоку триває від моменту початку $(n+1)$-го обслуговування поспіль.

2. Система з блокуванням вхідного потоку. Розглянемо одноканальну систему обслуговування, для якої довжина черги не може перевищувати числа m. Замовлення в систему надходять по одному, а проміжки часу між моментами надходження замовлень і тривалості обслуговування одного замовлення – незалежні випадкові величини, розподілені за показниковими законами з параметрами λ і μ, відповідно.

Замовлення надходять до системи, коли вона вільна, а також під час першого обслуговування після стану простою системи, якщо довжина черги не перевищує числа m.

Введемо подвійну нумерацію станів системи: s_{kl} – стан k рівня l. Тут k $(k = \overline{0, m+1})$ – кількість замовлень, що перебувають у системі; значення l $(l = \overline{1, m+1})$ відповідають тим станам системи, коли обслуговується l-те за порядком замовлення після періоду простою системи; s_{01} – стан, коли система вільна. Стан s_{01} умовно віднесений до групи станів першого рівня, завдяки чому стаціонарні ймовірності, що відповідають станам s_{kl} $\left(k = \overline{0,\ m}\right)$, ми зможемо записати одною формулою (див. співвідношення (4)).

Нехай $p_{kl}(t)$ – імовірність того, що система в момент часу t перебуває у стані s_{kl}. Очевидно (див., наприклад, [4, с. 69], [5, с. 61]), що існують границі

$$p_{kl} = \lim_{t\to\infty} p_{kl}(t) \qquad \left(k = \overline{0,\ m+1};\quad l = \overline{1,\ m+1}\ \right).$$

Користуючись графом станів системи, запишемо рівняння для визначення стаціонарних імовірностей p_{kl}

$$\begin{gathered}
\mu \sum_{k=1}^{m+1} p_{1k} - \lambda p_{01} = 0; \qquad \lambda p_{k-1,1} - (\lambda+\mu) p_{k1} = 0 \quad \left(k = \overline{1,\ m}\right); \\
\lambda p_{m1} - \mu p_{m+1,1} = 0; \\
\mu\left(p_{k+1,\,l} - p_{k,\,l+1}\right) = 0 \qquad \left(l = \overline{1,\ m};\quad k = \overline{1,\ m-l+1}\ \right).
\end{gathered} \tag{1}$$

Вигляд рівнянь (1) дає змогу виразити всі ймовірності, що відповідають станам рівнів $l \geqslant 2$, через імовірності станів першого рівня p_{k1}

$$p_{kl} = p_{k+l-1,1} \quad \left(l = \overline{2,\ m+1};\quad k = \overline{1,\ m-l+2}\ \right). \tag{2}$$

Система для ймовірностей p_{k1} разом з нормувальною умовою матиме вигляд

$$\begin{gathered} p_{01} = \beta \sum_{k=1}^{m+1} p_{k1}; \quad p_{k-1,1} = (1+\beta) p_{k1} \quad \left(k = \overline{1,\ m}\right); \\ p_{m1} = \beta p_{m+1,1}; \quad p_{01} + \sum_{k=1}^{m+1} k p_{k1} = 1, \end{gathered} \tag{3}$$

де $\beta = \mu/\lambda$. За допомогою рівнянь (3) маємо змогу виразити всі ймовірності p_{k1} через $p_{m+1,1}$

$$p_{k1} = \beta(1+\beta)^{m-k} p_{m+1,1} \quad \left(k = \overline{0,\ m}\ \right). \tag{4}$$

Імовірність $p_{m+1,1}$ знайдемо після підстановки правих частин співвідношень (4) у нормувальну умову

$$p_{m+1,1} = \frac{\beta}{(\beta^2+\beta+1)(1+\beta)^m - 1}. \tag{5}$$

Рівності (2), (4), (5) цілковито визначають ергодичний розподіл імовірностей станів s_{kl}.

Використовуючи цей розподіл, можна знайти ергодичний розподіл довжини черги у системі. Позначимо через π_k стаціонарну ймовірність того, що довжина черги дорівнює k ($k = \overline{0, m}$). Тоді

$$\begin{gathered} \pi_0 = \sum_{k=0}^{m+1} p_{k1} = (1+\beta)^{m+1} p_{m+1,1} = \frac{\beta(1+\beta)^{m+1}}{(\beta^2+\beta+1)(1+\beta)^m - 1}; \\ \pi_k = \sum_{s=k+1}^{m+1} p_{s1} = (1+\beta)^{m-k} p_{m+1,1} = \frac{\beta(1+\beta)^{m-k}}{(\beta^2+\beta+1)(1+\beta)^m - 1} \quad \left(k = \overline{1,\ m}\right). \end{gathered} \tag{6}$$

Середню довжину черги визначаємо як математичне сподівання дискретної випадкової величини

$$\overline{r} = \sum_{k=1}^{m} k\pi_k = \frac{(1+\beta)^{m+1} - (m+1)\beta - 1}{\beta\big((\beta^2+\beta+1)(1+\beta)^m - 1\big)}. \tag{7}$$

Стаціонарне значення ймовірності обслуговування замовлення, що надійшло на вхід системи, обчислимо як суму ймовірностей тих станів, коли вхідний потік не заблокований

$$P_{\text{обс}} = \sum_{k=0}^{m} p_{k1} = \frac{\beta\big((1+\beta)^{m+1} - 1\big)}{(\beta^2+\beta+1)(1+\beta)^m - 1}. \tag{8}$$

Перейшовши до границі при $m \to \infty$ у співвідношеннях (4)–(8), одержимо ергодичні розподіли $\{p_{kl}\}$ і $\{\pi_k\}$ та відповідні формули для середньої довжини черги і ймовірності обслуговування для системи M/M/1/∞ з блокуванням вхідного потоку

$$p_{k1} = \frac{\beta^2}{(1+\beta)^k(\beta^2+\beta+1)} \quad (k=0,1,2,\ldots)\,;$$
$$p_{kl} = p_{k+l-1,1} \quad (k=1,2,\ldots;\ l=2,3,\ldots)\,;$$
$$\pi_0 = \frac{\beta(1+\beta)}{\beta^2+\beta+1}\,;\quad \pi_k = \frac{\beta}{(\beta^2+\beta+1)(1+\beta)^k} \quad (k=1,2,\ldots)\,;$$
$$\overline{r} = \frac{1+\beta}{\beta(\beta^2+\beta+1)}\,;\quad P_{\text{обс}} = \frac{\beta(1+\beta)}{\beta^2+\beta+1}.$$

Зауважимо, що ергодичний процес для системи M/M/1/∞ з блокуванням вхідного потоку існує для будь-яких значень β на відміну від звичайної системи M/M/1/∞, для якої він існує лише при $\beta > 1$.

3. Система з блокуванням вхідного потоку та вимушеними перервами в роботі після n обслуговувань поспіль. У формулювання попередньої задачі внесемо лише одну зміну: після n обслуговувань поспіль у роботі системи оголошується перерва, яка триває протягом випадкового часу, розподіленого за показниковим законом з параметром γ.

Замовлення, які на момент оголошення перерви перебувають у черзі, залишаються в системі і чекають на відновлення обслуговування. Новоприбулі замовлення під час перерви отримують відмову навіть за наявності вільних місць у черзі. Блокування вхідного потоку замовлень відбувається за таких самих умов як у попередній задачі, тому задача має сенс лише при $m \geqslant n-1$. Інакше, кількість замовлень, обслужених поспіль завжди менша за n.

Збережемо введену вище нумерацію станів системи, додатково позначивши через $s_{k,n+1}$ $\left(k=\overline{0,\ m-n+1}\right)$ стани системи під час вимушеної перерви. Отже, стан $s_{k,n+1}$ означає, що під час перерви у системі є k замовлень, які очікують на відновлення обслуговування.

Спочатку припустимо, що $m \geqslant n$, $n \geqslant 2$, і запишемо систему рівнянь для стаціонарних імовірностей p_{kl}

$$
\begin{gathered}
\mu\sum_{k=1}^{n-1} p_{1k} + \gamma p_{0,n+1} - \lambda p_{01} = 0;\\
\lambda p_{k-1,1} + \gamma p_{k,n+1} - (\lambda+\mu)p_{k1} = 0 \qquad \left(k=\overline{1,\ m-n+1}\right);\\
\lambda p_{k-1,1} - (\lambda+\mu)p_{k1} = 0 \quad \left(k=\overline{m-n+2,\ m}\right);\quad \lambda p_{m1} - \mu p_{m+1,1} = 0;\\
\mu\left(p_{k+1,l} - p_{k,l+1}\right) = 0 \qquad \left(l=\overline{1,\ n-1};\quad k=\overline{1,\ m-l+1}\ \right);\\
\mu p_{k+1,n} - \gamma p_{k,n+1} = 0 \qquad \left(k=\overline{0,\ m-n+1}\ \right).
\end{gathered}
\tag{9}
$$

Рівняння (9) дають змогу виразити ймовірності станів вищих рівнів ($l \geqslant 2$) через імовірності станів першого рівня p_{k1}

$$
\begin{gathered}
p_{kl} = p_{k+l-1,1} \quad \left(l=\overline{2,\ n};\quad k=\overline{1,\ m-l+2}\ \right);\\
p_{k,n+1} = \delta p_{k+n,1} \quad \left(k=\overline{0,\ m-n+1}\ \right),
\end{gathered}
\tag{10}
$$

де $\delta = \mu/\gamma$. Система рівнянь для ймовірностей p_{k1} набуває вигляду

$$p_{01} = \beta \sum_{k=1}^{n} p_{k1}; \quad p_{k1} = p_{k-1,1} + \beta(p_{k+n,1} - p_{k1}) \quad \left(k = \overline{1,\ m-n+1}\right); \tag{11}$$

$$p_{k-1,1} = (1+\beta)p_{k1} \quad \left(k = \overline{m-n+2,\ m}\right); \quad p_{m1} = \beta p_{m+1,1}; \tag{12}$$

$$p_{01} + \sum_{k=1}^{n-1} k p_{k1} + (n+\delta) \sum_{k=n}^{m+1} p_{k1} = 1, \tag{13}$$

де, як і вище, $\beta = \mu/\lambda$, а (13) – нормувальна умова.

За допомогою рівнянь (12) маємо змогу виразити ймовірності p_{k1} $\left(k = \overline{m-n+1,\ m}\right)$ через $p_{m+1,1}$

$$p_{k1} = \beta(1+\beta)^{m-k} p_{m+1,1} \quad \left(k = \overline{m-n+1,\ m}\right). \tag{14}$$

Зі співвідношень (11) послідовно отримуємо

$$p_{k1} = \beta \sum_{s=1}^{n} p_{k+s,1} \qquad \left(k = \overline{0,\ m-n}\right). \tag{15}$$

Використовуючи рівності (14), за допомогою співвідношень (15), починаючи від $p_{m-n,1}$ і далі рухаючись за спаданням індексу k, можна послідовно виразити ймовірності p_{k1} $\left(k = \overline{0,\ m-n}\right)$ через $p_{m+1,1}$. Для обчислення $p_{m+1,1}$ слугує нормувальна умова (13). Отже, для будь-яких значень m і n, якщо лише $m \geqslant n$, маємо алгоритм для визначення ергодичного розподілу $\{p_{kl}\}$ $\left(k = \overline{0,\ m+1};\ \ l = \overline{1,\ n+1}\right)$.

Нижче детальніше розглянемо такі випадки співвідношень між m і n, коли вдається знайти ергодичний розподіл у явному вигляді.

3.1. Випадок $n \leqslant m \leqslant 2n$. З (15) і (14) одержуємо

$$p_{m-n,1} = \beta \sum_{k=m-n+1}^{m} p_{k1} = \beta^2 (1+\beta)^m p_{m+1,1} \sum_{k=m-n+1}^{m} \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^k =$$
$$= \beta\big((1+\beta)^n - 1\big) p_{m+1,1};$$
$$p_{m-n-1,1} = \beta \sum_{k=m-n}^{m-1} p_{k1} = \beta p_{m-n,1} + \beta \sum_{k=m-n+1}^{m-1} p_{k1} =$$
$$= \Big(\beta^2\big((1+\beta)^n - 1\big) + \beta(1+\beta)\big((1+\beta)^{n-1} - 1\big)\Big) p_{m+1,1};$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p_{m-n-k,1} = \Bigg(\beta^2 (1+\beta)^{k-1} \sum_{s=0}^{k-1} \big((1+\beta)^{n-s} - 1\big) +$$
$$+ \beta(1+\beta)^k \big((1+\beta)^{n-k} - 1\big)\Bigg) p_{m+1,1} \quad \left(k = \overline{1,\ m-n}\right).$$

Після обчислення скінченних сум і заміни індексів остаточно отримаємо

$$p_{k1} = \beta(1+\beta)^{m-n-k-1} \times$$
$$\times \big((1+\beta)^{n+1} - (m-n-k+1)\beta - 1\big) p_{m+1,1} \quad \left(k = \overline{0,\ m-n}\right). \tag{16}$$

Формули (16) правильні лише для $n \leqslant m \leqslant 2n$. Якщо $m > 2n$, то $m - n > n$ і під час обчислення p_{k1} для $k < m - 2n$ за формулами (15) не використовуються ймовірності p_{k1} $\big(k = \overline{m-n+1,\ m}\big)$, для визначення яких слугують співвідношення (14). Тому в цьому випадку конструкція p_{k1} для $k < m - 2n$ інша, ніж для $k = \overline{m-2n,\ m-n}$. Отже, якщо $m > 2n$, то формулами (16) можна користуватися лише для $k = \overline{m-2n,\ m-n}$.

Підставивши праві частини рівностей (14) і (16) у нормувальну умову (13), яку для зручності обчислень потрібно записати у вигляді

$$p_{01} + \sum_{k=1}^{m-n} kp_{k1} + \sum_{k=m-n+1}^{n-1} kp_{k1} + (n+\delta)\sum_{k=n}^{m+1} p_{k1} = 1,$$

знайдемо ймовірність $p_{m+1,1}$

$$\begin{gathered} p_{m+1,1} = \frac{\beta}{A_{mn}(\beta,\delta)}, \\ A_{mn}(\beta,\delta) = (\beta^2+\beta+1)\big((1+\beta)^m - (m-n)\beta(1+\beta)^{m-n-1}\big) + \\ +\beta(\delta-1)(1+\beta)^{m-n+1} - 1. \end{gathered} \tag{17}$$

Отже, співвідношення (10), (14), (16) і (17) цілковито визначають ергодичний розподіл імовірностей станів s_{kl} для системи з блокуванням вхідного потоку і перервами в роботі після n обслуговувань поспіль для випадку, коли $n \leqslant m \leqslant 2n$.

Знайдемо ергодичний розподіл довжини черги в системі і середню довжину черги

$$\pi_0 = \sum_{k=0}^{n} p_{k1} + \delta p_{n1} = \frac{1+\beta}{\beta} p_{01} + \delta p_{n1} =$$
$$= (1+\beta)^{m-n}\big((1+\beta)^{n+1} - (m-n+1-\delta)\beta - 1\big)p_{m+1,1};$$
$$\pi_k = \sum_{s=k+1}^{k+n} p_{s1} + \delta p_{k+n,1} = \frac{1}{\beta} p_{k1} + \delta p_{k+n,1} = (1+\beta)^{m-n-k-1} \times$$
$$\times\big((1+\beta)^{n+1} - (m-n-k+1)\beta + \delta\beta(1+\beta) - 1\big)p_{m+1,1} \quad \big(k = \overline{1,\ m-n}\,\big);$$
$$\pi_{m-n+1} = \sum_{k=m-n+2}^{m+1} p_{k1} + \delta p_{m+1,1} =$$
$$= \frac{1}{\beta} p_{m-n+1,1} + \delta p_{m+1,1} = \big((1+\beta)^{n-1} + \delta\big)p_{m+1,1};$$
$$\pi_k = \sum_{s=k+1}^{m+1} p_{s1} = (1+\beta)^{m-k} p_{m+1,1} \quad \big(k = \overline{m-n+2,\ m}\,\big);$$
$$\overline{r} = \sum_{k=1}^{m} k\pi_k = \Big((1+\beta)^{m+1} - \big((m-n)\beta - 1\big)(1+\beta)^{m-n} +$$
$$+\delta\beta\big((1+\beta)^{m-n+1} - 1\big) - (m+1)\beta - 2\Big)\frac{p_{m+1,1}}{\beta^2}.$$

Стаціонарне значення ймовірності обслуговування визначаємо як суму ймовірностей станів s_{k1} $(k = \overline{0, m})$

$$P_{\text{обс}} = \sum_{k=0}^{m} p_{k1} = \frac{\beta}{A_{mn}(\beta, \delta)} \big((1+\beta)^{m+1} - (m-n+1)\beta(1+\beta)^{m-n} - 1 \big).$$

3.2. Випадок $m = n-1$. На відміну від випадку $m \geqslant n$ тут існує лише один стан рівня $n+1$, це – стан $s_{0,n+1}$, тому система рівнянь (9) спрощується до вигляду

$$\mu \sum_{k=1}^{n-1} p_{1k} + \gamma p_{0,n+1} - \lambda p_{01} = 0;$$
$$\lambda p_{k-1,1} - (\lambda+\mu) p_{k1} = 0 \quad \big(k = \overline{1,\ n-1}\big); \quad \lambda p_{n-1,1} - \mu p_{n1} = 0;$$
$$\mu\,(p_{k+1,\,l} - p_{k,\,l+1}) = 0 \quad \big(l = \overline{1,\ n-1};\ \ k = \overline{1,\ n-l}\ \big); \quad \mu p_{1n} - \gamma p_{0,n+1} = 0.$$

Як і раніше, виражаємо ймовірності станів вищих рівнів $(l \geqslant 2)$ через p_{k1}

$$p_{kl} = p_{k+l-1,1} \quad \big(l = \overline{2,\ n};\ \ k = \overline{1,\ n-l+1}\ \big); \quad p_{0,n+1} = \delta p_{n,1} \tag{18}$$

і записуємо систему рівнянь для ймовірностей p_{k1} разом з нормувальною умовою

$$\begin{gathered} p_{01} = \beta \sum_{k=1}^{n} p_{k1}; \quad p_{k-1,1} = (1+\beta) p_{k1} \quad \big(k = \overline{1,\ n-1}\ \big); \\ p_{n-1,1} = \beta p_{n1}; \quad p_{01} + \sum_{k=1}^{n-1} k p_{k1} + (n+\delta) p_{n1} = 1. \end{gathered} \tag{19}$$

Розв'язавши систему (19), отримуємо

$$\begin{gathered} p_{k1} = \beta(1+\beta)^{n-k-1} p_{n1} \quad \big(k = \overline{0,\ n-1}\ \big); \\ p_{n1} = \frac{\beta}{(\beta^2+\beta+1)(1+\beta)^{n-1} + \delta\beta - 1}. \end{gathered} \tag{20}$$

Користуючись співвідношеннями (18), (20), знаходимо ергодичний розподіл довжини черги і стаціонарні значення середньої довжини черги та ймовірності обслуговування

$$\begin{gathered} \pi_0 = \sum_{k=0}^{n} p_{k1} + \delta p_{n1} = \frac{\beta\big((1+\beta)^n + \delta\big)}{(\beta^2+\beta+1)(1+\beta)^{n-1} + \delta\beta - 1}; \\ \pi_k = \sum_{s=k+1}^{n} p_{s1} = \frac{\beta(1+\beta)^{n-k-1}}{(\beta^2+\beta+1)(1+\beta)^{n-1} + \delta\beta - 1} \quad \big(k = \overline{1,\ n-1}\big); \end{gathered} \tag{21}$$

$$\begin{gathered} \overline{r} = \sum_{k=1}^{n-1} k\pi_k = \frac{(1+\beta)^n - n\beta - 1}{\beta\big((\beta^2+\beta+1)(1+\beta)^{n-1} + \delta\beta - 1\big)}; \\ P_{\text{обс}} = \sum_{k=0}^{n-1} p_{k1} = \frac{\beta\big((1+\beta)^n - 1\big)}{(\beta^2+\beta+1)(1+\beta)^{n-1} + \delta\beta - 1}. \end{gathered} \tag{22}$$

У випадку $m = n-1$ граф станів системи обслуговування, яку ми розглядаємо, відрізняється від графа станів системи з блокуванням вхідного потоку, вивченої у п. 2, лише наявністю додаткового стану $s_{0,n+1}$, який відповідає перерві після n обслуговувань поспіль. Тому, прийнявши $n = m + 1$, $\delta = 0$ у формулах (20) – (22), отримуємо співвідношення (4) – (8).

3.3. Випадок $n = 1$. У такій системі перерва настає після кожного обслуговування. Цей випадок заслуговує окремого розгляду, тому що має свою специфіку, яка дає змогу отримати формули для ергодичного розподілу ймовірностей станів для всіх m $(1 \leqslant m \leqslant \infty)$.

Запишемо систему рівнянь для визначення стаціонарних імовірностей p_{kl}:

$$\gamma p_{02} - \lambda p_{01} = 0; \quad \lambda p_{k-1,1} + \gamma p_{k2} - (\lambda + \mu) p_{k1} = 0 \quad \big(k = \overline{1,\ m}\big)\,;$$
$$\lambda p_{m1} - \mu p_{m+1,1} = 0; \quad \mu p_{k+1,1} - \gamma p_{k2} = 0 \quad \big(k = \overline{0,\ m}\big)\,.$$

Виразивши ймовірності станів другого рівня за формулами

$$p_{k2} = \delta p_{k+1,1} \quad \big(k = \overline{0,\ m}\big)\,,$$

отримуємо співвідношення

$$p_{k1} = \beta p_{k+1,1} \quad \big(k = \overline{0,\ m}\big)\,,$$

звідки маємо

$$p_{k1} = \beta^{m-k+1} p_{m+1,1} \quad \big(k = \overline{0,\ m}\big)\,. \tag{23}$$

Використовуючи нормувальну мову

$$p_{01} + (1+\delta) \sum_{k=1}^{m+1} p_{k1} = 1$$

і відокремлюючи випадки $\beta \neq 1$ та $\beta = 1$, знаходимо

$$\begin{aligned} p_{m+1,1} &= \frac{\beta - 1}{\beta^{m+2} + \delta(\beta^{m+1} - 1) - 1}, \quad \beta \neq 1; \\ p_{k1} &= \frac{1}{1 + (m+1)(1+\delta)} \quad \big(k = \overline{0,\ m+1}\big)\,, \quad \beta = 1. \end{aligned} \tag{24}$$

Тепер маємо змогу обчислити ергодичний розподіл довжини черги і стаціонарні значення середньої довжини черги та ймовірності обслуговування

$$\begin{aligned} \pi_0 &= p_{01} + (1+\delta) p_{11} = \frac{\beta^m(\beta - 1)(1 + \beta + \delta)}{\beta^{m+2} + \delta(\beta^{m+1} - 1) - 1}, \quad \beta \neq 1; \\ \pi_k &= (1+\delta) p_{k+1,1} = \frac{\beta^{m-k}(1+\delta)(\beta - 1)}{\beta^{m+2} + \delta(\beta^{m+1} - 1) - 1} \quad \big(k = \overline{1,\ m}\big)\,, \quad \beta \neq 1; \\ \pi_0 &= \frac{2+\delta}{1 + (m+1)(1+\delta)}, \quad \pi_k = \frac{1+\delta}{1 + (m+1)(1+\delta)} \quad \big(k = \overline{1,\ m}\big)\,, \quad \beta = 1; \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{gathered}
\overline{r} = \sum_{k=1}^{m} k\pi_k = \frac{(1+\delta)\big(\beta^{m+1} - (m+1)\beta + m\big)}{(\beta-1)\big(\beta^{m+2} + \delta(\beta^{m+1}-1) - 1\big)}, \quad \beta \neq 1; \\
\overline{r} = \frac{m(m+1)(1+\delta)}{2\big(1+(m+1)(1+\delta)\big)}, \quad \beta = 1; \\
P_{\text{обс}} = \sum_{k=0}^{m} p_{k1} = \frac{\beta(\beta^{m+1}-1)}{\beta^{m+2} + \delta(\beta^{m+1}-1) - 1}, \quad \beta \neq 1; \\
P_{\text{обс}} = \frac{m+1}{1+(m+1)(1+\delta)}, \quad \beta = 1.
\end{gathered} \tag{26}$$

Перейшовши до границі при $m \to \infty$ у співвідношеннях (23)-(26), переконуємось, що ергодичний розподіл у випадку відсутності обмежень на довжину черги ($m = \infty$) існує лише за умови, що $\beta > 1$. Тоді маємо

$$\begin{gathered}
p_{k1} = \frac{\beta - 1}{\beta^k(\beta+\delta)}, \quad p_{k2} = \delta p_{k+1,1} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots); \\
\pi_0 = \frac{(\beta-1)(1+\beta+\delta)}{\beta(\beta+\delta)}; \qquad \pi_k = \frac{(\beta-1)(1+\delta)}{\beta^{k+1}(\beta+\delta)} \quad (k = 1, 2, \ldots); \\
\overline{r} = \frac{1+\delta}{(\beta-1)(\beta+\delta)}; \qquad P_{\text{обс}} = \frac{\beta}{\beta+\delta}.
\end{gathered}$$

У п. 2 ми бачили, що ергодичний процес для системи M/M/1/∞ з блокуванням вхідного потоку існує для будь-яких значень β. Цю систему можемо отримати внаслідок граничного переходу при $n \to \infty$ і $m \to \infty$ у системі з блокуванням вхідного потоку і перервами в роботі після n обслуговувань поспіль. Тому є підстави прогнозувати, що для системи M/M/1/∞ з блокуванням вхідного потоку і перервами в роботі після n обслуговувань поспіль за достатньо великих значень n можливе існування ергодичного процесу навіть при $\beta \leqslant 1$. Якщо $\beta > 1$, то він безумовно існує для всіх $n \geqslant 1$.

4. Блокування вхідного потоку після n обслуговувань поспіль. Узагальнимо формулювання задачі, вивченої у п. 2, припустивши, що блокування вхідного потоку триває від моменту початку $(n+1)$-го обслуговування поспіль до звільнення системи.

Запишемо рівняння для визначення стаціонарних імовірностей p_{kl}

$$\begin{gathered}
\mu \sum_{k=1}^{m+n} p_{1k} - \lambda p_{01} = 0; \qquad \lambda p_{k-1,1} - (\lambda+\mu) p_{k1} = 0 \quad \big(k = \overline{1,\ m}\big); \\
\lambda p_{m1} - \mu p_{m+1,1} = 0;
\end{gathered} \tag{27}$$

$$\begin{gathered}
\mu p_{2l} - (\lambda+\mu) p_{1,\,l+1} = 0 \quad \big(l = \overline{1,\ n-1}\big); \\
\lambda p_{k-1,l} + \mu p_{k+1,l-1} - (\lambda+\mu) p_{kl} = 0 \quad \big(k = \overline{2,\ m};\ \ l = \overline{2,\ n}\ \big); \\
\lambda p_{ml} - \mu p_{m+1,\,l} = 0 \quad \big(l = \overline{2,\ n}\big);
\end{gathered} \tag{28}$$

$$\mu\,(p_{k+1,\,l} - p_{k,\,l+1}) = 0 \qquad \big(l = \overline{n,\ m+n-1};\ \ k = \overline{1,\ m+n-l}\ \big). \tag{29}$$

Рівняння (29) дають змогу виразити всі ймовірності, що відповідають станам рівнів $l \geqslant n+1$, через імовірності станів n-го рівня p_{kn}

$$p_{kl} = p_{k+l-n,\,n} \quad \left(l = \overline{n+1,\ m+n};\quad k = \overline{1,\ m+n-l+1}\ \right),$$

тому нормувальна умова для системи рівнянь (27) – (29) набуває вигляду

$$p_{01} + \sum_{k=1}^{m+1} \left(p_{k1} + k p_{kn} \right) + \sum_{l=2}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{m+1} p_{kl} \right) = 1. \tag{30}$$

За допомогою рівнянь (27) виражаємо всі ймовірності p_{k1} через $p_{m+1,1}$

$$p_{k1} = \beta(1+\beta)^{m-k} p_{m+1,1} \quad \left(k = \overline{0,\ m}\ \right),$$

а рівняння (28) перепишемо у вигляді

$$\begin{gathered} p_{1,\,l+1} = \frac{\beta}{1+\beta}\, p_{2l} \qquad \left(l = \overline{1,\ n-1}\ \right); \\ p_{kl} = \frac{1}{1+\beta}\, p_{k-1,\,l} + \frac{\beta}{1+\beta}\, p_{k+1,\,l-1} \qquad \left(k = \overline{2,\ m};\quad l = \overline{2,\ n}\ \right); \\ p_{m+1,\,l} = \frac{1}{\beta}\, p_{ml} \qquad \left(l = \overline{2,\ n}\ \right). \end{gathered} \tag{31}$$

Рекурентні співвідношення (31) дають змогу послідовно виразити всі ймовірності p_{kl} рівнів $l = \overline{2,\ n}$ через $p_{m+1,1}$. Для визначення ергодичного розподілу $\{p_{kl}\}$ залишається лише використати нормувальну умову (30) і знайти $p_{m+1,1}$.

---

1. *Takagi H.* Analysis of finite-capacity M/G/1 queue with a resume level // Performance Evaluation. – 1985. – Vol. 5, №3. – P. 197-203.
2. *Братійчук А.М.* Граничні теореми для системи типу M^θ/G/1/b з відновлюючим рівнем вхідного потоку // Укр. матем. журн. – 2007. – Т. 59, №7. – С. 884-889.
3. *Єлейко Я.* Стаціонарний розподіл імовірностей станів для одноканальної системи масового обслуговування з вимушеними перервами в роботі // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформатика. – 2008. – Вип. 14. – С. 82-92.
4. *Жерновий Ю.В.* Марковські моделі масового обслуговування: Тексти лекцій. – Львів, 2004.
5. *Овчаров Л.А.* Прикладные задачи теории массового обслуживания. – М., 1983.

ERGODIC DISTRIBUTIONS FOR CERTAIN MODIFICATIONS OF THE M/M/1/m QUEUEING SYSTEM

Yuriy ZHERNOVYI

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: zyurvas@meta.ua

For the M/M/1/m queueing system with blocking of an input flow from the moment of the beginning of the second service in a row to the moment of free system such cases are examined: 1) breaks in work are impossible (problem I); 2) after n services in a row a break in work of system occurs (problem II). For the problem I and for the problem II as $m \in [n, 2n]$; $m = n-1$; $n = 1$ ergodic distributions of probabilities of states of system and of length of queue are obtained, and for $m \geqslant n$ an algorithm for finding of ergodic distribution is constructed. In the case of the M/M/1/∞ system conditions of existence of ergodic process for the problem I and for the problem II as $n = 1$ are defined. An algorithm for finding of ergodic distribution for generalized problem I, when blocking of an input flow continues from the start of $(n+1)$-th service in a row is offered.

Key words: M/M/1/m queueing system, blocking of an input flow, breaks in work, ergodic distribution of probabilities.

ЭРГОДИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ МОДИФИКАЦИЙ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ M/M/1/m

Юрий ЖЕРНОВЫЙ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: zyurvas@meta.ua

Для системы обслуживания M/M/1/m, в которой осуществляется блокирование входного потока от момента начала второго обслуживания подряд до момента освобождения системы, рассмотрены случаи: 1) перерывы в работе невозможны (задача I); 2) после n обслуживаний подряд объявляется перерыв в работе системы (задача II). Для задачи I и для задачи II в случаях $m \in [n, 2n]$; $m = n-1$; $n = 1$ получены эргодические распределения вероятностей состояний системы и длины очереди, а для $m \geqslant n$ построен алгоритм для определения эргодического распределения. В случае отсутствия ограничений на длину очереди (система обслуживания M/m/1/∞) определены условия существования эргодического процесса для задачи I и для задачи II при $n = 1$. Предложен алгоритм нахождения эргодического распределения для обобщения задачи I, когда блокирование входного потока длится от момента начала $(n+1)$-го обслуживания подряд.

Ключевые слова: система обслуживания M/M/1/m, блокирование входного потока, перерывы в работе, эргодическое распределение вероятностей.

Стаття надійшла до редколегії 10.03.2009

Прийнята до друку 12.06.2009

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2009. *Ser. Mech. Math. 2009.*
Вип. 70. С. 79–90 *Is. 70. P. 79–90*

УДК 517.911

ЯКІСНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ОДНІЄЇ СИНГУЛЯРНОЇ ЗАДАЧІ КОШІ

Олександр ЗЕРНОВ[1], Юлія КУЗІНА[2]

[1] *Південноукраїнський державний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського,*
65020, Одеса, вул. Старопортофранківська, 26
e-mail: zernov@ukr.net
[2] *Одеський інститут фінансів УДУФМТ,*
65070, Одеса, вул. 25-ї Чапаєвської дивізії, 6
e-mail: yuliak@te.net.ua

Розглянуто сингулярну задачу Коші для одної системи звичайних диференціальних рівнянь з виродженням. Запропоновано дві схеми вивчення питань про розв'язність цієї задачі та кількості її розв'язків. Крім того, досліджено асимптотичну поведінку розв'язків при $t \to +0$.

Ключові слова: сингулярна задача Коші, диференціальні рівняння з виродженням.

Сингулярну задачу Коші для диференціального рівняння $x' = f(t,x)$ досліджувало багато авторів, передусім відзначимо праці [1], [5], [6], [11], [12], [15], [16], де достатньо вивчено питання існування розв'язків та їхньої кількості. У багатьох працях вивчали задачу Коші для диференціальних рівнянь вигляду $f(t,x,x') = 0$, $x' = f(t,x,x')$. Зокрема, в [2], [6], [17], [18], [19] розглядали питання розв'язності та кількості розв'язків, а в [3], [12], [20], [21] – ознаки збіжності до розв'язку послідовностей наближень. Водночас погано досліджено асимптотичну поведінку розв'язків задачі Коші для диференціальних рівнянь, які не розв'язані стосовно похідних невідомих функцій. Мета нашої праці – вирішити ці проблеми для одного класу систем звичайних диференціальних рівнянь, які не розв'язані стосовно похідних. Ми запропонували дві схеми міркувань, які допомагають вивчати питання про розв'язність, кількість розв'язків, асимптотичну поведінку цих розв'язків та їхніх перших похідних, коли $t \to +0$. В дослідженнях застосовані методи якісної теорії диференціальних рівнянь [4], [5], [13], а також [7], [8]. Стаття є продовженням попередніх робіт авторів, де було розглянуто існування розв'язків та асимптотичну поведінку сингулярних задач Коші для скалярних диференціальних рівнянь, які не розв'язані стосовно похідної невідомої функції.

Розглядатимемо задачу Коші

$$\alpha(t)x' = f(t, x, x'), \tag{1}$$

$$x(0) = 0, \tag{2}$$

де $t \in (0, \tau)$ – дійсна змінна; $x : (0, \tau) \to \mathbb{R}^n$ – невідома дійсна функція змінної t. Передбачимо, що виконано такі *умови A*:

1) $\alpha(t) = \mathrm{diag}(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$ – діагональна $n \times n$-матриця, де $\alpha_i : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ – неперервні функції, $\lim\limits_{t\to+0} \alpha_i(t) = 0,\ i \in \{1, \dots, n\}$;

2) $0 < \beta(t) \leqslant \alpha_i(t),\ t \in (0, \tau),\ i \in \{1, \dots, n\}$, де $\beta : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ – неперервно диференційовна функція,

$$\lim_{t\to+0} \beta(t) = 0, \qquad \lim_{t\to+0} t\frac{\beta'(t)}{\beta(t)} = \beta_0, \qquad 0 \leqslant \beta_0 < +\infty;$$

3) $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ – неперервна функція,

$$\mathcal{D} = \left\{(t, x, y) : t \in (0, \tau),\ \|x\| < r_1\gamma(t),\ \|y\| < r_2\frac{\gamma(t)}{t}\right\},$$

де r_1, r_2 – додатні сталі; $\gamma : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ – неперервно диференційовна функція, $\gamma'(t) > 0,\ t \in (0, \tau)$,

$$\lim_{t\to+0} \gamma(t) = 0, \quad \lim_{t\to+0} \frac{\beta(t)\gamma(t)}{t} = 0, \quad \lim_{t\to+0} t\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} = \gamma_0, \quad 0 < \gamma_0 < +\infty;$$

4) $\|f(t, 0, 0)\| \leqslant \delta(t),\ t \in (0, \tau)$, де $\delta : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ – неперервна функція,

$$\lim_{t\to+0} \delta(t) = 0, \quad \lim_{t\to+0} \frac{t\delta(t)}{\beta(t)\gamma(t)} = c_0, \quad 0 \leqslant c_0 < +\infty.$$

Означення 1. *Для кожного $\rho \in (0, \tau)$ неперервно диференційовна функція $x : (0, \rho] \to \mathbb{R}^n$ називається ρ-розв'язком задачі (1), (2), якщо:*

1) $\Big(t, x(t), x'(t)\Big) \in \mathcal{D},\ t \in (0, \rho]$;

2) x тотожно задовольняє (1) при $t \in (0, \rho]$;

3) $\lim\limits_{t\to+0} x(t) = 0$.

Позначимо через $\mathcal{U}(\rho, M, Q)$ множину всіх неперервно диференційовних функцій $u : (0, \rho] \to \mathbb{R}^n$ таких, що

$$\|u(t)\| \leqslant M\gamma(t), \quad \|u'(t)\| \leqslant QM\frac{\gamma(t)}{t}, \quad t \in (0, \rho];$$

тут ρ, M, Q – сталі, $\rho \in (0, \tau)$, $M > 0$, $Q > 0$.

Ми досліджуємо питання про існування у задачі (1), (2) ρ-розв'язків, які належать множині $\mathcal{U}(\rho, M, Q)$ та про єдність ρ-розв'язку цього типу.

Назвемо *умовами B* сукупність таких умов:

1) для довільного $\mu \in (0, \tau)$ та для довільних $t_s \in [\mu, \tau),\ s \in \{1, 2\}$:

$$|\alpha_i(t_1)-\alpha_i(t_2)| \leqslant L_1(\mu)|t_1-t_2|, \quad i\in\{1,\dots,n\},$$
$$|\beta(t_1)-\beta(t_2)| \leqslant L_2(\mu)|t_1-t_2|,$$
$$|\beta'(t_1)-\beta'(t_2)| \leqslant L_3(\mu)|t_1-t_2|,$$
де $L_j:(0,\tau)\to(0,+\infty)$ – неперервні незростаючі функції, $j\in\{1,2,3\}$;

2) $\|f(t_1,x,y)-f(t_2,x,y)\| \leqslant l_t(\mu)|t_1-t_2|, \quad (t_j,x,y)\in\mathcal{D}, \quad 0<\mu\leqslant t_1,t_2<\tau,$
$$\|f(t,x_1,y)-f(t,x_2,y)\| \leqslant l_x(t)\frac{\beta(t)}{t}\|x_1-x_2\|, \quad (t,x_j,y)\in\mathcal{D},$$
$$\|f(t,x,y_1)-f(t,x,y_2)\| \leqslant l_y\beta(t)\|y_1-y_2\|, \quad (t,x,y_j)\in\mathcal{D},\ j\in\{1,2\},$$
де $l_x,\ l_y$ – додатні сталі, $l_t:(0,\tau)\to(0,+\infty)$ – неперервна незростаюча функція;

3) $l_y<\dfrac{1}{\sqrt{n}}, \quad \dfrac{\gamma_0}{\sqrt{n}}(1-l_y)-l_x-2\beta_0 l_y>\dfrac{2c_0}{r_1}, \quad \left(\dfrac{\gamma_0}{\sqrt{n}}-l_x\right)\dfrac{1}{l_y}<\dfrac{r_2}{r_1}.$

Теорема 1. *Нехай виконані умови A, B. Тоді існують ρ,M,Q такі, що задача (1), (2) має хоча б один ρ-розв'язок, який належить множині $\mathcal{U}(\rho,M,Q)$.*

Назвемо умовами C сукупність таких умов:

1) $\|f(t,x_1,y)-f(t,x_2,y)\| \leqslant l_x\dfrac{\beta(t)\omega(t)}{t}\|x_1-x_2\|, \quad (t,x_j,y)\in\mathcal{D},$
$$\|f(t,x,y_1)-f(t,x,y_2)\| \leqslant l_y\beta(t)\omega(t)\|y_1-y_2\|, \quad (t,x,y_j)\in\mathcal{D},\ j\in\{1,2\},$$
де $l_x,\ l_y$ – додатні сталі, $\omega:(0,\tau)\to(0,+\infty)$ – неперервно диференційовна функція,
$$\lim_{t\to+0}\omega(t)=0, \quad \lim_{t\to+0}\frac{\beta(t)\gamma(t)}{\omega(t)}=0, \quad \lim_{t\to+0}t\frac{\omega'(t)}{\omega(t)}=\omega_0, \quad 0<\omega_0<+\infty,$$
$$\lim_{t\to+0}t\frac{\Big(\omega(t)/\beta(t)\Big)'}{\omega(t)/\beta(t)}=\Omega_0, \quad 0<\Omega_0<+\infty, \quad \lim_{t\to+0}\frac{\omega(t)}{t}=\nu_0, \quad 0\leqslant\nu_0<+\infty;$$

2) якщо $\nu_0\neq0,\ \beta_0\neq0$, то
$$l_x+\beta_0 l_y<\frac{\Omega_0}{n\nu_0(\Omega_0+\beta_0)};$$
якщо $\nu_0\neq0,\ \beta_0=0$, то $n\nu_0 l_x<1$;

3) $\dfrac{c_0\sqrt{n}}{\gamma_0}<r_1, \quad (2\beta_0+\gamma_0)r_1<r_2.$

Теорема 2. *Нехай виконано умови A, C. Тоді існують ρ,M,Q такі, що задача (1), (2) має єдиний ρ-розв'язок, який належить множині $\mathcal{U}(\rho,M,Q)$.*

Доведення теореми 1. Спочатку оберемо сталі ρ,M,Q,q. Нехай $Q>q+\beta_0$, де
$$q=\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma_0}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{l_y}\right)-\frac{l_x}{l_y}\right), \qquad \frac{2c_0}{\dfrac{\gamma_0}{\sqrt{n}}-l_x-l_y\left(2\beta_0+\dfrac{\gamma_0}{\sqrt{n}}\right)}<M<r_1.$$

Зазначимо, що $\rho \in (0,\tau)$ і ρ достатньо мале. Позначимо через $\mathcal{B}$ простір всіх неперервно диференційовних функцій $x : [0,\rho] \to \mathbb{R}^n$ з нормою

$$\|x\|_{\mathcal{B}} = \max_{t\in[0,\rho]}\Big(\|x(t)\| + \|x'(t)\|\Big). \tag{3}$$

Нехай $\mathcal{U}$ – підмножина $\mathcal{B}$, кожний елемент $u : [0,\rho] \to \mathbb{R}^n$ якої задовольняє умови

$$\|u(t)\| \leqslant M\beta(t)\gamma(t), \qquad \|u'(t)\| \leqslant qM\frac{\beta(t)\gamma(t)}{t}, \qquad t \in (0,\rho], \tag{4}$$

причому $u(0) = 0,\ u'(0) = 0$ та, крім того, виконана умова

$$\forall\mu \in (0,\rho] \quad \forall t_j \in [\mu,\rho], \quad j \in \{1,2\} : \|u'(t_1) - u'(t_2)\| \leqslant K(\mu)|t_1 - t_2|,$$

де

$$K(\mu) = \Big(1-\sqrt{n}l_y\Big)^{-1}\left(\left(\frac{1}{\beta^2(\mu)} + \frac{1}{\mu}\right)L_2(\mu)+\frac{L_3(\mu)}{\beta^2(\mu)}+\frac{\sqrt{n}L_1(\mu)}{\beta(\mu)}+\sqrt{n}l_t(\mu)+\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\beta(\mu)}\right).$$

Множина $\mathcal{U}$ замкнена, обмежена, опукла та (за теоремою Арцела) компактна. Нехай

$$x = \frac{y}{\beta(t)}, \tag{5}$$

де $y : (0,\tau) \to \mathbb{R}^n$ – нова невідома функція; $y = \mathrm{col}(y_1,\ldots,y_n)$. Тоді задача (1), (2) набуває вигляду

$$\alpha(t)y' = \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}\alpha(t)y + \beta(t)f\left(t, \frac{y}{\beta(t)}, \frac{y'}{\beta(t)} - \frac{y\beta'(t)}{\beta^2(t)}\right), \qquad y(0) = 0, \tag{6}$$

або, в координатній формі,

$$\alpha_i(t){y_i}' = \alpha_i(t)\frac{\beta'(t)}{\beta(t)}y_i + \beta(t)f_i\left(t, \frac{y}{\beta(t)}, \frac{y'}{\beta(t)} - \frac{y\beta'(t)}{\beta^2(t)}\right), \quad y_i(0) = 0, \quad i \in \{1,\ldots,n\}. \tag{7}$$

Далі розглядатимемо задачу Коші

$$\alpha_i(t){y_i}' = \alpha_i(t)\frac{\beta'(t)}{\beta(t)}y_i + \beta(t)f_i\left(t, \frac{u(t)}{\beta(t)}, \frac{u'(t)}{\beta(t)} - \frac{u(t)\beta'(t)}{\beta^2(t)}\right), \quad y_i(0) = 0, \quad i \in \{1,\ldots,n\}, \tag{8}$$

де $u \in \mathcal{U}$ – довільна фіксована функція. Виберемо $i \in \{1,\ldots,n\}$ та розглянемо i-те рівняння системи (8), яке записано у вигляді

$${y_i}' = \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}y_i + \frac{\beta(t)}{\alpha_i(t)}f_i\left(t, \frac{u(t)}{\beta(t)}, \frac{u'(t)}{\beta(t)} - \frac{u(t)\beta'(t)}{\beta^2(t)}\right), \tag{9}$$

з початковою умовою

$$y_i(0) = 0. \tag{10}$$

Нехай

$$\mathcal{D}_{0i} = \{(t,y_i) : \quad t \in (0,\rho], \quad y_i \in \mathbb{R}\}.$$

В $\mathcal{D}_{0i}$ для диференціального рівняння (9) виконано умови теореми існування та єдиності розв'язку й неперервної залежності розв'язків від початкових даних. Зазначимо

$$\Phi_{1i} = \left\{(t, y_i): \quad t \in (0, \rho], \quad |y_i| = \frac{M}{\sqrt{n}}\beta(t)\gamma(t)\right\},$$
$$\mathcal{D}_{1i} = \left\{(t, y_i): \quad t \in (0, \rho], \quad |y_i| < \frac{M}{\sqrt{n}}\beta(t)\gamma(t)\right\},$$
$$\mathrm{H}_i = \left\{(t, y_i): \quad t = \rho, \quad |y_i| < \frac{M}{\sqrt{n}}\beta(\rho)\gamma(\rho)\right\}.$$

Нехай функція $A_{1i}: \mathcal{D}_{0i} \to [0, +\infty)$ визначається рівністю

$$A_{1i}(t, y_i) = {y_i}^2\Big(\beta(t)\gamma(t)\Big)^{-2}$$

і нехай $a_{1i}: \mathcal{D}_{0i} \to \mathbb{R}$ – похідна функції A_{1i} на підставі рівняння (9). Оскільки

$$a_{1i}(t, y_i) = 2\Big(\beta(t)\gamma(t)\Big)^{-2}\gamma'(t)\Big(\gamma(t)\Big)^{-1}\left(\frac{\beta(t)}{\alpha_i(t)}y_i\frac{tf_i\left(t, \dfrac{u(t)}{\beta(t)}, \dfrac{u'(t)}{\beta(t)} - \dfrac{u(t)\beta'(t)}{\beta^2(t)}\right)}{t\gamma'(t)/\gamma(t)} - y_i^2\right),$$

то неважко переконатись в тому, що $a_{1i}(t, y_i) < 0$ при $(t, y_i) \in \Phi_{1i}$. Звідси випливає (див. [7, с. 758]), що існує хоча б одна інтегральна крива рівняння (9), яка визначена при $t \in (0, \rho]$ та лежить у $\mathcal{D}_{1i}$ при $t \in (0, \rho]$. Зазначимо цю інтегральну криву через $J_{iu}: (0, y_{iu}(t))$. Легко бачити, що

$$|y_{iu}(t)| \leqslant \frac{M}{\sqrt{n}}\beta(t)\gamma(t), \quad |{y'}_{iu}(t)| \leqslant \frac{qM}{\sqrt{n}}\frac{\beta(t)\gamma(t)}{t}, \quad t \in (0, \rho]. \tag{11}$$

Доведемо, що в множині інтегральних кривих рівняння (9), які перетинають H_i, інтегральна крива $J_{iu}: (0, y_{iu}(t))$ є єдиною кривою, яка розташована в $\mathcal{D}_{1i}$ при всіх $t \in (0, \rho]$. З цією метою розглянемо однопараметричні сім'ї множин

$$\Phi_{2i}(\mu) = \{(t, y_i): \quad t \in (0, \rho], \quad |y_i - y_{iu}(t)| = \mu\beta(t)\gamma(t)(-\ln t)\},$$
$$\mathcal{D}_{2i}(\mu) = \{(t, y_i): \quad t \in (0, \rho], \quad |y_i - y_{iu}(t)| < \mu\beta(t)\gamma(t)(-\ln t)\},$$

де μ – параметр; $\mu \in (0, 1]$. Нехай функція $A_{2i}: \mathcal{D}_{0i} \to [0, +\infty)$ визначається рівністю

$$A_{2i}(t, y_i) = \Big(y_i - y_{iu}(t)\Big)^2\Big(\beta(t)\gamma(t)(-\ln t)\Big)^{-2}$$

та нехай $a_{2i}: \mathcal{D}_{0i} \to \mathbb{R}$ – будь- яка функція A_{2i} на підставі рівняння (9). Легко бачити, що $a_{2i}(t, y_i) < 0$, якщо $(t, y_i) \in \mathcal{D}_{0i}$ і якщо $y_i \neq y_{iu}(t)$. Крім того, якщо (t, y_i) – довільна точка множини $\overline{\mathcal{D}}_{1i}\backslash\{(0, 0)\}$, то для довільного фіксованого $\mu \in (0, 1]$

$$|y_i - y_{iu}(t)| \leqslant |y_i| + |y_{iu}(t)| \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}}M\beta(t)\gamma(t) < \mu\beta(t)\gamma(t)(-\ln t),$$

якщо $t \in (0, t(\mu)]$, де стала $t(\mu) \in (0, \rho)$ визначається умовою $(-\ln t)^{-1} < \dfrac{\sqrt{n}\mu}{2M}$ при $t \in (0, t(\mu)]$. Звідси (див. [7, с. 758-759]) випливає правильність твердження, яке доводиться.

Нехай функція $y_u : (0,\rho] \to \mathbb{R}^n$ визначається рівністю

$$y_u(t) = \mathrm{col}\Big(y_{1u}(t), \ldots, y_{nu}(t)\Big), \quad t \in (0,\rho]. \tag{12}$$

Неважно переконатись в тому, що

$$\|y_u(t)\| \leqslant M\beta(t)\gamma(t), \quad \|{y'}_u(t)\| \leqslant qM\frac{\beta(t)\gamma(t)}{t}, \quad t \in (0,\rho] \tag{13}$$

та що $\forall \mu \in (0,\rho]$ $\forall t_j \in [\mu,\rho]$, $j \in \{1,2\}$: $\|y'_u(t_1) - y'_u(t_2)\| \leqslant K(\mu)|t_1 - t_2|$. Якщо прийняти $y_u(0) = 0$, $y'_u(0) = 0$, то $y_u \in \mathcal{U}$. Визначимо оператор $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ рівністю $\mathrm{T}u = y_u$.

Доведемо, що $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ – неперервний оператор. Нехай $u_* \in \mathcal{U}$, $u_{**} \in \mathcal{U}$ – довільні фіксовані функції. Зазначимо $\mathrm{T}u_* = y_*$, $\mathrm{T}u_{**} = y_{**}$; нехай $y_* = \mathrm{col}\Big(y_{1*}, \ldots, y_{n*}\Big)$ і $y_{**} = \mathrm{col}\Big(y_{1**}, \ldots, y_{n**}\Big)$. Якщо $u_* = u_{**}$, то й $y_* = y_{**}$. Нехай далі $\|u_* - u_{**}\|_{\mathcal{B}} = h$, $h > 0$. Виберемо $i \in \{1, \ldots, n\}$ та будемо досліджувати асимптотичну поведінку інтегральних кривих диференціального рівняння

$$y_i{}' = \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}y_i + \frac{\beta(t)}{\alpha_i(t)}f_i\left(t, \frac{u_*(t)}{\beta(t)}, \frac{{u'}_*(t)}{\beta(t)} - \frac{u_*(t)\beta'(t)}{\beta^2(t)}\right), \tag{14}$$

Нехай

$$\Phi_{3i} = \left\{(t, y_i) : \quad t \in (0,\rho], \quad |y_i - y_{i**}(t)| = \eta h^\nu \Big(\beta(t)\gamma(t)\Big)^{1-\nu}\right\},$$

$$\mathcal{D}_{3i} = \left\{(t, y_i) : \quad t \in (0,\rho], \quad |y_i - y_{i**}(t)| < \eta h^\nu \Big(\beta(t)\gamma(t)\Big)^{1-\nu}\right\},$$

де ν, η – сталі, які визначаються такими умовами:

$$0 < \nu < \frac{\gamma_0}{\beta_0 + \gamma_0}, \qquad \eta > \frac{2(l_x + l_y\beta_0 + 1)(2M)^{1-\nu}}{\gamma_0 - \nu(\beta_0 + \gamma_0)}.$$

Нехай функція $A_{3i} : \mathcal{D}_{0i} \to [0, +\infty)$ визначена рівністю

$$A_{3i}(t, y_i) = \Big(y_i - y_{i**}(t)\Big)^2 \Big(\beta(t)\gamma(t)\Big)^{-2(1-\nu)}$$

та нехай $a_{3i} : \mathcal{D}_{0i} \to \mathbb{R}$ – похідна функції A_{3i} на підставі рівняння (14). Оскільки

$$a_{3i}(t, y_i) =$$

$$= 2\Big(\beta(t)\gamma(t)\Big)^{-2(1-\nu)} t^{-1}\left(\left(t\frac{\beta'(t)}{\beta(t)} - (1-\nu)\left(t\frac{\beta'(t)}{\beta(t)} + t\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\right)\right)\Big(y_i - y_{i**}(t)\Big)^2 + \right.$$

$$+\Big(y_i - y_{i**}(t)\Big)\frac{\beta(t)}{\alpha_i(t)}t\left(f_i\left(t, \frac{u_*(t)}{\beta(t)}, \frac{{u'}_*(t)}{\beta(t)} - \frac{u_*(t)\beta'(t)}{\beta^2(t)}\right) - \right.$$

$$\left.\left. - f_i\left(t, \frac{u_{**}(t)}{\beta(t)}, \frac{{u'}_{**}(t)}{\beta(t)} - \frac{u_{**}(t)\beta'(t)}{\beta^2(t)}\right)\right)\right),$$

то, враховуючи нерівності,

$$\|u_*(t) - u_{**}(t)\| \leqslant \|u_* - u_{**}\|_{\mathcal{B}}^\nu \Big(\|u_*(t)\| + \|u_{**}(t)\|\Big)^{1-\nu} \leqslant h^\nu\Big(2M\beta(t)\gamma(t)\Big)^{1-\nu}, \quad t \in (0,\rho],$$

$$\|u'_*(t) - u'_{**}(t)\| \leqslant \|u_* - u_{**}\|_{\mathcal{B}}^{\nu}\Big(\|u'_*(t)\| + \|u'_{**}(t)\|\Big)^{1-\nu} \leqslant h^{\nu}\left(2qM\frac{\beta(t)\gamma(t)}{t}\right)^{1-\nu},$$

$t \in (0, \rho]$, неважко переконатись в тому, що $a_{3i}(t, y_i) < 0$ при $(t, y_i) \in \Phi_{3i}$. Звідси випливає (див. [7, с. 758]), що довільна інтегральна крива $J : (t, y_i(t))$ рівняння (14), яка перетинає Φ_{3i}, в околі точки (t_*, y_{i*}) перетину з Φ_{3i} розташована так: $(t, y_i(t)) \in \in \mathcal{D}_{3i}$ при $t \in (t_*, t_* + \delta)$ та $(t, y_i(t)) \overline{\in} \overline{\mathcal{D}}_{3i}$ при $t \in (t_* - \delta, t_*)$ (тут $\delta > 0$ – достатньо мале, $t_* + \delta < \rho$). Крім того,

$$|y_{i*}(t) - y_{i**}(t)| \leqslant |y_{i*}(t)| + |y_{i**}(t)| \leqslant \frac{2M}{\sqrt{n}}\beta(t)\gamma(t) < \eta h^{\nu}\Big(\beta(t)\gamma(t)\Big)^{1-\nu}$$

при $t \in (0, t(h)]$, де сталу $t(h) \in (0, \rho)$ визначають з умови

$$\Big(\beta(t)\gamma(t)\Big)^{\nu} < \frac{\sqrt{n}\eta}{2M}h^{\nu} \quad \text{при} \quad t \in (0, t(h)].$$

Тому інтегральна крива $J_* : (t, y_{i*}(t))$ рівняння (14) лежить у $\mathcal{D}_{3i}$ при $t \in (0, t(h)]$. Якщо t зростає від $t = t(h)$ до $t = \rho$, то, на підставі сказаного, ця інтегральна крива не може перетинати Φ_{3i}, тому вона залишається в $\mathcal{D}_{3i}$ при всіх $t \in (0, \rho]$. Отож,

$$|y_{i*}(t) - y_{i**}(t)| \leqslant \eta h^{\nu}(\beta(t)\gamma(t)\Big)^{1-\nu}, \quad t \in (0, \rho], \tag{15}$$

тому

$$|y'_{i*}(t) - y'_{i**}(t)| \leqslant \frac{\xi(t)}{t}h^{\nu}, \quad t \in (0, \rho], \tag{16}$$

де $\xi : (0, \rho] \to (0, +\infty)$ – неперервна функція; $\lim\limits_{t\to+0}\xi(t) = 0$. Позаяк нерівності (15), (16) виконуються для всіх $i \in \{1, \ldots, n\}$, то, оскільки ρ достатньо мале,

$$\|y_*(t) - y_{**}(t)\| + \|y'_*(t) - y'_{**}(t)\| \leqslant \frac{h^{\nu}}{t}, \quad t \in (0, \rho]. \tag{17}$$

Перейдемо безпосередньо до доведення неперервності оператора $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$. Нехай $\varepsilon > 0$ задано. Існує таке $t_\varepsilon \in (0, \rho)$, що

$$2M\beta(t)\gamma(t) + 2qM\frac{\beta(t)\gamma(t)}{t} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad t \in (0, t_\varepsilon].$$

Якщо $t \in (0, t_\varepsilon]$, то

$$\|y_*(t) - y_{**}(t)\| + \|y'_*(t) - y'_{**}(t)\| \leqslant \|y_*(t)\| + \|y_{**}(t)\| + \|y'_*(t)\| + \|y'_{**}(t)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{18}$$

Нехай далі $t \in [t_\varepsilon, \rho]$. Тоді з (17) маємо

$$\|y_*(t) - y_{**}(t)\| + \|y'_*(t) - y'_{**}(t)\| \leqslant \frac{h^{\nu}}{t_\varepsilon}, \quad t \in [t_\varepsilon, \rho]. \tag{19}$$

Нехай

$$\delta(\varepsilon) = \left(\frac{\varepsilon t_\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{\nu}}.$$

Очевидно, $\delta(\varepsilon)$ залежить тільки від ε і $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\delta(\varepsilon) = 0$. Якщо $h < \delta(\varepsilon)$, то, на підставі (18), (19),

$$\|y_*(t) - y_{**}(t)\| + \|y'_*(t) - y'_{**}(t)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

при всіх $t \in (0,\rho]$, тому
$$\|y_* - y_{**}\|_{\mathcal{B}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$
Отже, для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta(\varepsilon) > 0$, якщо $\|u_* - u_{**}\|_{\mathcal{B}} = h < \delta(\varepsilon)$, то
$$\|\mathrm{T}u_* - \mathrm{T}u_{**}\|_{\mathcal{B}} = \|y_* - y_{**}\|_{\mathcal{B}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$
Наведені міркування не залежать від вибору функцій $u_* \in \mathcal{U}$, $u_{**} \in \mathcal{U}$. Неперервність оператора $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ доведена. На підставі теореми Шаудера про нерухому точку існує хоча б одна функція $y_0 \in \mathcal{U}$ така, що $\mathrm{T}y_0 = y_0$. У цьому разі
$$\|y_0(t)\| \leqslant M\beta(t)\gamma(t), \quad \|y'_0(t)\| \leqslant qM\frac{\beta(t)\gamma(t)}{t}, \quad t \in (0,\rho]. \tag{20}$$
Враховуючи (5), задача Коші (1), (2) має ρ-розв'язок $x_0 : (0,\rho] \to \mathbb{R}^n$ такий, що
$$x_0(t) = \frac{y_0(t)}{\beta(t)}, \quad t \in (0,\rho],$$
тому
$$\|x_0(t)\| \leqslant M\gamma(t), \quad \|x'_0(t)\| \leqslant QM\frac{\gamma(t)}{t}, \quad t \in (0,\rho], \tag{21}$$
де $Q > q + \beta_0$. Теорема 1 доведена.
Доведення теореми 2. Насамперед оберемо сталі ρ, M, Q, q. Нехай
$$\frac{c_0\sqrt{n}}{\gamma_0} < M < r_1, \quad Q > q + \beta_0,$$
де
$$q > \beta_0 + \gamma_0, \quad (q+\beta_0)M < r_2.$$
Зауважимо, що $\rho \in (0,\tau)$ і ρ достатньо мале. Зазначимо через $\mathcal{B}$ простір всіх неперервно диференційовних функцій $x : [0,\rho] \to \mathbb{R}^n$ з нормою (3). Нехай $\mathcal{U}$ – підмножина $\mathcal{B}$, кожний елемент $u : [0,\rho] \to \mathbb{R}^n$ якої задовольняє умови (4), причому $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$. Множина $\mathcal{U}$ замкнена та обмежена. За допомогою заміни (5) одержимо задачу Коші (6), де $y : (0,\tau) \to \mathbb{R}^n$ – нова невідома функція. Далі розглядатимемо задачу Коші (8), де $u \in \mathcal{U}$ – довільна фіксована функція. Оберемо $i \in \{1,\dots,n\}$ та будемо розглядати i-те рівняння системи (8), яке записане у формі (9), з початковою умовою (10). Розлядатимемо ті ж множини $\mathcal{D}_{0i}$, Φ_{1i}, $\mathcal{D}_{1i}$, H_i, $\Phi_{2i}(\mu)$, $\mathcal{D}_{2i}(\mu)$ (де μ – параметр, $\mu \in (0,1]$), що й під час доведення теореми 1. За допомогою міркувань, аналогічних до міркуваннь відповідної частини доведення теореми 1, доведемо, що у рівняння (9) є одна і тільки одна інтегральна крива $J_{iu} : (t, y_{iu}(t))$, яка визначена при $t \in (0,\rho]$ та лежить в $\mathcal{D}_{1i}$ при всіх $t \in (0,\rho]$. У цьому разі виконано оцінки (11). Якщо подати функцію $y_u : (0,\rho] \to \mathbb{R}^n$ рівністю (12), то неважко переконатись в тому, що виконані нерівності (13). Нехай $y_u(0) = 0$, $y'_u(0) = 0$. Тоді $y_u \in \mathcal{U}$. Подамо оператор $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ рівністю $Tu = y_u$.

Доведемо, що $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ – оператор стиску. Нехай $u_* \in \mathcal{U}$, $u_{**} \in \mathcal{U}$ – довільні фіксовані функції. Зазначимо $\mathrm{T}u_* = y_*$, $\mathrm{T}u_{**} = y_{**}$; нехай $y_* = \mathrm{col}\Big(y_{1*},\dots,y_{n*}\Big)$ і $y_{**} = \mathrm{col}\Big(y_{1**},\dots,y_{n**}\Big)$. Якщо $u_* = u_{**}$, то й $y_* = y_{**}$. Нехай далі $\|u_* - u_{**}\|_{\mathcal{B}} = h$,

$h > 0$. Виберемо $i \in \{1, \ldots, n\}$ та будемо досліджувати асимптотичну поведінку інтегральних кривих диференціального рівняння (14). Зазначимо

$$\Phi_{3i} = \{(t, y_i) : t \in (0, \rho],\ |y_i - y_{i**}(t)| = \eta\omega(t)h\},$$

$$\mathcal{D}_{3i} = \{(t, y_i) : t \in (0, \rho],\ |y_i - y_{i**}(t)| < \eta\omega(t)h\},$$

де η – стала, яку визначають так: якщо $\beta_0 = 0$, то $\eta > \dfrac{l_x}{\Omega_0}$; якщо $\nu_0 = 0$, $\beta_0 \neq 0$, то $\eta > \dfrac{l_x + \beta_0 l_y}{\Omega_0}$; якщо $\nu_0 \neq 0$, $\beta_0 \neq 0$, то

$$\frac{l_x + \beta_0 l_y}{\Omega_0} < \eta < \frac{1 - n\nu_0(l_x + \beta_0 l_y)}{n\nu_0\beta_0}.$$

Нехай функція $A_{3i} : \mathcal{D}_{0i} \to [0, +\infty)$ визначається рівністю

$$A_{3i}(t, y_i) = \Big(y_i - y_{i**}(t)\Big)^2 \Big(\omega(t)\Big)^{-2}$$

та нехай $a_{3i} : \mathcal{D}_{0i} \to \mathbb{R}$ – похідна функції A_{3i} на підставі рівняння (14). Позаяк

$$a_{3i}(t, y_i) = 2\Big(\omega(t)\Big)^{-3}\omega'(t)\left(\Big(y_i - y_{i**}(t)\Big)^2 \left(\frac{\beta'(t)\omega(t)}{\beta(t)\omega'(t)} - 1\right) + \right.$$

$$+\frac{\beta(t)}{\alpha_i(t)}\frac{\omega(t)}{\omega'(t)}\left(f_i\left(t, \frac{u_*(t)}{\beta(t)}, \frac{u'_*(t)}{\beta(t)} - \frac{u_*(t)\beta'(t)}{\beta^2(t)}\right) - \right.$$

$$\left.\left. -f_i\left(t, \frac{u_{**}(t)}{\beta(t)}, \frac{u'_{**}(t)}{\beta(t)} - \frac{u_{**}(t)\beta'(t)}{\beta^2(t)}\right)\right)\Big(y_i - y_{i**}(t)\Big)\right),$$

причому

$$\frac{\beta'(t)\omega(t)}{\beta(t)\omega'(t)} - 1 = -\frac{1}{t\dfrac{\omega'(t)}{\omega(t)}} \cdot t\frac{\Big(\omega(t)/\beta(t)\Big)'}{\omega(t)/\beta(t)} = -\frac{\Omega_0}{\omega_0} + \xi_1(t),$$

де $\xi_1 : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ – неперервна функція; $\lim\limits_{t \to +0} \xi_1(t) = 0$, то неважко переконатися в тому, що $a_{3i}(t, y_i) < 0$ при $(t, y_i) \in \Phi_{3i}$. Звідси випливає (див. [7, с. 758]), що довільна інтегральна крива $J : (t, y_i(t))$ рівняння (14), яка перетинає Φ_{3i}, поблизу точки (t_*, y_{i*}) перетину з Φ_{3i} розташована так: $(t, y_i(t)) \in \mathcal{D}_{3i}$ при $t \in (t_*, t_* + \delta)$ та $(t, y_i(t)) \overline{\in} \overline{\mathcal{D}}_{3i}$ при $t \in (t_* - \delta, t_*)$ (тут $\delta > 0$ – достатньо мале, $t_* + \delta < \rho$). Крім того,

$$|y_{i*}(t) - y_{i**}(t)| \leqslant |y_{i*}(t)| + |y_{i**}(t)| \leqslant \frac{2M}{\sqrt{n}}\beta(t)\gamma(t) < \eta\omega(t)h,$$

якщо $t \in (0, t(h)]$, де стала $t(h) \in (0, \rho)$ визначається з умови

$$\frac{\beta(t)\gamma(t)}{\omega(t)} < \frac{\eta h\sqrt{n}}{2M} \quad \text{при} \quad t \in (0, t(h)].$$

Тому інтегральна крива $J_* : (t, y_{i*}(t))$ рівняння (14) лежить в $\mathcal{D}_{3i}$ при $t \in (0, t(h)]$. Якщо t зростає від $t = t(h)$ до $t = \rho$, то, на підставі сказаного вище, ця інтегральна крива не зможе мати спільних точок з Φ_{3i}; тому вона розташована в $\mathcal{D}_{3i}$ при всіх $t \in (0, \rho]$. Це означає, що

$$|y_{i*}(t) - y_{i**}(t)| \leqslant \eta\omega(t)h, \quad t \in (0, \rho]; \tag{22}$$

тому

$$|y'_{i*}(t) - y'_{i**}(t)| \leqslant \Big(\nu_0(\beta_0\eta + l_x + \beta_0 l_y) + \xi_2(t)\Big)h, \quad t \in (0, \rho], \tag{23}$$

де $\xi_2 : (0, \rho] \to (0, +\infty)$ – неперервна функція, $\lim\limits_{t\to+0} \xi_2(t) = 0$. Нерівності (22), (23) виконуються для всіх $i \in \{1, \ldots, n\}$. Оскільки ρ достатньо мале, то з цих нерівностей випливає, що

$$\|y_*(t) - y_{**}(t)\| + \|y'_*(t) - y'_{**}(t)\| \leqslant \theta h, \quad t \in (0, \rho],$$

де

$$\theta = \frac{1}{2}\Big(1 + n\nu_0(\beta_0\eta + l_x + \beta_0 l_y)\Big);$$

очевидно, $0 < \theta < 1$. Тому

$$\|y_* - y_{**}\|_{\mathcal{B}} \leqslant \theta h,$$

або, остаточно,

$$\|\mathrm{T}u_* - \mathrm{T}u_{**}\|_{\mathcal{B}} \leqslant \theta\|u_* - u_{**}\|_{\mathcal{B}}, \quad \text{де} \quad 0 < \theta < 1.$$

Наведені міркування не залежать від вибору функцій $u_* \in \mathcal{U}$, $u_{**} \in \mathcal{U}$. Отже, $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ – оператор стиску. За принципом Банаха стиснутих відображень існує єдина функція $y_0 \in \mathcal{U}$ така, що $\mathrm{T}y_0 = y_0$. Очевидно, виконані нерівності (20). Враховуючи (5), задача Коші (1), (2) має ρ-розв'язок $x_0 : (0, \rho] \to \mathbb{R}^n$ з властивостями (21), та лише єдиний. Теорема 2 доведена.

---

1. *Андреев А.Ф.* Усиление теоремы единственности O-кривой в N_2 / *Андреев А.Ф.* // Доклады АН СССР. – 1962. – Т. 146, №1. – С. 9-10.
2. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений / *Арнольд В.И.* – М., 1978.
3. *Витюк А.Н.* Обобщенная задача Коши для системы дифференциальных уравнений, не решенной относительно производных / *Витюк А.Н.* // Дифференциальные уравнения. – 1971. – Т. 7, №9. – С. 1575-1580.
4. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. / *Демидович Б.П.* – М., 1967.
5. *Еругин Н.П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений / *Еругин Н.П.* – Минск, 1972.
6. *Еругин Н.П.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. / *Еругин Н.П., Штокало И.З., Бондаренко П.С. и др.* – К., 1974.
7. *Зернов А.Е.* О разрешимости и асимптотических свойствах решений одной сингулярной задачи Коши / *Зернов А.Е.* // Дифференциальные уравнения. – 1992. – Т. 28, №5. – С. 756-760.
8. *Зернов А.Е.* Качественный анализ неявной сингулярной задачи Коши / *Зернов А.Е.* // Укр. мат. журнал. – 2001. – Т. 54, №3. – С. 302-310.
9. *Зернов А.Е.* Геометричний аналіз задачі Коші для неявного диференціального рівняння / *Зернов А.Е., Кузина Ю.В.* // Мат. Студії. – 2008. – Т. 29, №1. – С.63-70.

10. *Зернов А.Е.* Геометрический анализ некоторой сингулярной задачи Коши / *Зернов А.Е., Кузина Ю.В.* // Нелін. коливання. – 2004. – Т. 7, №1. – С. 67-80.
11. *Кигурадзе И.Т.* О задаче Коши для сингулярных систем обыкновенных дифференциальных уравнений / *Кигурадзе И.Т.* // Дифференциальные уравнения. – 1965. – Т. 1, №10. – С. 1271-1291.
12. *Кигурадзе И.Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений / *Кигурадзе И.Т.* – Тбилиси, 1975.
13. *Немыцкий В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений / *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* – М.; Л., 1949.
14. *Рудаков В.П.* О существовании и единственности решения систем дифференциальных уравнений первого порядка, частично разрешенных относительно производных / *Рудаков В.П.* // Известия высш. учебн. заведений. Математика. – 1971. – №9. – С. 79-84.
15. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / *Хартман Ф.* – М., 1970.
16. *Чечик В.А.* Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностью / *Чечик В.А.* // Труды Московск. матем. об-ва. – 1959. – №8. – С. 155-198.
17. *Anichini G.* Boundary value problems for implicit ODE's in a singular case / *Anichini G., Conti G.* // Differential Equations and Dynamical Systems. – 1999. – Vol. 7, №4. – P. 437-459.
18. *Conti R.* Sulla risoluzione dell'equazione $F(t, x, \frac{dx}{dt}) = 0$ / *Conti R.* // Ann. mat. pura ed appl. – 1959. – №48. – P. 97-102.
19. *Frigon M.* Boundary value problems for systems of implicit differential equations / *Frigon M., Kaczynski T.* // J. Math. Anal. and Appl. – 1993. – Vol. 179, №2. – P. 317-326.
20. *Kowalski Z.* The polygonal method of solving the differential equation $y' = h(t, y, y, y')$ / *Kowalski Z.* // Ann. polon. math. – 1963. – Vol. 13, №2. – P. 173-204.
21. *Kowalski Z.* A difference method of solving the differential equation $y' = h(t, y, y, y')$ / *Kowalski Z.* // Ann. polon. math. – 1965-1965 – Vol. 16, №2. – P. 121-148.

QUALITATIVE INVESTIGATION OF SOME SINGULAR CAUCHY PROBLEM

Oleksandr ZERNOV[1], Yuliya KUZINA[2]

[1] *K. D. Ushynsky Southukrainian State Pedagogical University, 65020, Odesa, Staroportofrankivs'ka Str., 26*
e-mail: zernov@ukr.net
[2] *Odesa Institute of Finance USUFIS, 65070, Odesa, 25 Chapayivs'koi dyviziyi Str., 6*
e-mail: yuliak@te.net.ua

The singular Cauchy problem for some system of degenerate ordinary differential equations are considered. The theorems about solvability of these problems and about quantity of the solutions to our problems are proved. The asymptotic behaviour of the solution are find if $t \to +0$. In this paper there are two schemes of investigation of these problems.

Key words: singular Cauchy problem, degenerate ordinary differential equations.

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ СИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ

Александр ЗЕРНОВ[1], Юлия КУЗИНА[2]

[1] *Южноукраинский государственный педагогический университет имени К. Д. Ушинского,*
65020, Одесса, ул. Старопортофранковская, 26
e-mail: zernov@ukr.net
[2] *Одесский институт финансов УГУФМТ,*
65070, Одесса, ул. 25-й Чапаевской дивизии, 6
e-mail: yuliak@te.net.ua

Исследуется сингулярная задача Коши для одной системы обычных дифференциальных уравнений с вырождением. Предлагается две схемы изучения вопроса разрешимости этой задачи и количества её решений. Кроме того, рассматривается ассимптотическое поведение решений при $t \to +0$.

Ключевые слова: сингулярная задача Коши, дифференциальные уравнения с вырождением.

Стаття надійшла до редколегії 26.05.2009

Прийнята до друку 12.06.2009

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2009. *Ser. Mech. Math. 2009.*
Вип. 70. С. 91–102 *Is. 70. P. 91–102*

УДК 517.95

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ ДВОВИМІРНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ЗІ СЛАБКИМ ВИРОДЖЕННЯМ

Микола ІВАНЧОВ[1], Віталій ВЛАСОВ[2]

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: [1]ivanchov@franko.lviv.ua, [2]siphiuel@gmail.com

Знайдено умови існування та єдиності розв'язку оберненої задачі визначення невідомого коефіцієнта при старшій похідній для двовимірного рівняння теплопровідності $u_t = t^\beta a(t)\Delta u + f(x,t)$ зі слабким виродженням. Існування розв'язку доводиться за допомогою теореми Шаудера про нерухому точку. Єдиність розв'язку доводять шляхом зведення задачі до інтегрального рівняння Вольтерра ($\beta < 1$).

Ключові слова: двовимірне рівняння теплопровідності, слабке виродження, функція Гріна, теорема Шаудера про нерухому точку.

1. Вступ. Розглянуто обернену задачу визначення старшого коефіцієнта у двовимірному рівнянні теплопровідності зі слабким виродженням. Обернені задачі з виродженням досліджував, зокрема, М.М. Гаджієв у [1], де вивчив задачу визначення вільного члена в еліптичному рівнянні зі слабким виродженням. Т. Елдесбаєв у [2] розглядав обернену задачу для рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y^\alpha \frac{\partial u}{\partial y}\right) + c(x)u, \quad 0 < \alpha < 2,$$

з невідомим коефіцієнтом $c(x)$. Н. Салдіна вивчала обернені задачі зі слабким і сильним виродженням [3-5], зокрема, задачі для параболічних рівнянь вигляду

$$u_t = a(t)\psi_0(t)u_{xx} + b(x,t)\psi_1(t)u_x + c(x,t)\psi_2(t)u + f(x,t)$$

із невідомим коефіцієнтом $a(t)$ і загальним степеневим виродженням, де $\psi_i(t)$ – деякі додатні монотонно зростаючі функції [5]. У праці [6] досліджується обернена задача визначення старшого коефіцієнта у багатовимірному рівнянні зі слабким степеневим виродженням, існування і єдиність розв'язку доводять за допомогою теорії півгруп.

При розгляді цієї задачі використано методи, застосовані Н. Салдіною у [3] для одновимірних рівнянь із виродженням. Доведено існування і єдиність розв'язку оберненої задачі з крайовими умовами першого роду. Існування розв'язку доводять шляхом зведення заданої задачі до операторного рівняння з наступним застосуванням теореми Шаудера про нерухому точку. Єдиність розв'язку доводять за допомогою властивостей інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду.

2. Основна частина. В області $Q_T \equiv \{(x,y,t)\colon 0<x<h, 0<y<l, 0<t<T\}$ розглянемо обернену задачу знаходження пари функцій (a,u) із класу $C[0,T]\times \times(C(\overline{Q_T})\cap C^{2,1}(Q_T)\cap C^{1,0,0}([0,h)\times(0,l)\times[0,T]))$, де $a(t)>0$, $t\in[0,T]$, для яких виконуватимуться рівності:

$$u_t = t^\beta a(t)\Delta u + f(x,y,t), \quad (x,y,t)\in Q_T, \tag{1}$$

$$u(x,y,0)=\varphi(x,y), \quad (x,y)\in[0,h]\times[0,l], \tag{2}$$

$$u(0,y,t)=\mu_1(y,t), \quad u(h,y,t)=\mu_2(y,t), \quad y\in[0,l], \quad t\in[0,T], \tag{3}$$

$$u(x,0,t)=\nu_1(x,t), \quad u(x,l,t)=\nu_2(x,t), \quad x\in[0,h], \quad t\in[0,T], \tag{4}$$

$$a(t)u_x(0,y_0,t)=\varkappa(t), \quad t\in[0,T], \tag{5}$$

де $0<\beta<1$, $0<y_0<l$.

Теорема 1. ***(Існування)***. *Нехай виконуються такі умови:*

(A1) $\varphi\in C^2(\overline{D})$, *де* $D=\{(x,y): 0<x<h, 0<y<l\}$; $\mu_i\in C^{2,1}([0,l]\times(0,T])\cap \cap C^{1,1}([0,l]\times[0,T])$, *існує скінченна границя* $\lim\limits_{t\to+0} t^\beta\mu_{i_{yy}}$, $i=1,2$; $\nu_i\in C^{1,0}([0,h]\times[0,T]), i=1,2$; $\varkappa\in C[0,T]$; $f\in C^{1,0,0}(\overline{Q_T})$;

(A2) $\varphi_x(x,y)>0$, $(x,y)\in\overline{D}$; $\mu_{1_t}(y,t)-f(0,y,t)\leqslant 0, \mu_{2_t}(y,t)-f(h,y,t)\geqslant 0$, $(y,t)\in[0,l]\times[0,T]$, $\mu_{1_{yy}}(y,t)\geqslant 0$, $\mu_{2_{yy}}(y,t)\leqslant 0$, $(y,t)\in[0,l]\times(0,T]$, $i=1,2$; $\nu_{1_x}(x,t)\geqslant 0$, $\nu_{2_x}(x,t)\geqslant 0$, $(x,t)\in[0,h]\times[0,T]$; $f_x(x,y,t)\geqslant 0$, $(x,y,t)\in\overline{Q_T}$; $\varkappa(t)>0$, $t\in[0,T]$;

(A3) $\mu_1(y,0)=\varphi(0,y)$, $\mu_2(y,0)=\varphi(h,y)$, $\nu_1(x,0)=\varphi(x,0)$, $\nu_2(x,0)=\varphi(x,l)$, $\mu_1(0,t)=\nu_1(0,t)$, $\mu_1(l,t)=\nu_2(0,t)$, $\mu_2(0,t)=\nu_1(h,t)$, $\mu_2(l,t)=\nu_2(h,t)$.

Тоді задача (1)-(5) *має розв'язок.*

Доведення. Тимчасово припускатимемо, що функція $a(t)$ – відома. Розв'язок прямої задачі (1)-(4) набуває вигляду [7]:

$$u(x,y,t)=\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta+\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{11\xi}(x,y,t,0,\eta,\tau)\times$$

$$\times\tau^\beta a(\tau)\mu_1(\eta,\tau)d\eta d\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{11\xi}(x,y,t,h,\eta,\tau)\tau^\beta a(\tau)\mu_2(\eta,\tau)d\eta d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^h G_{11\eta}(x,y,t,\xi,0,\tau)\tau^\beta a(\tau)\nu_1(\xi,\tau)d\xi d\tau-\int_0^t\int_0^h G_{11\eta}(x,y,t,\xi,l,\tau)\times$$

$$\times\tau^\beta a(\tau)\nu_2(\xi,\tau)d\xi d\tau+\int_0^t\int_0^l\int_0^h G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau, \qquad (6)$$

де $G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$ - функція Гріна задачі (2)-(4) для рівняння (1), що визначається рівністю:

$$G_{ij}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)=\frac{1}{4\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}\Bigg(\Big(\exp\big(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\big)+$$
$$+(-1)^i\exp\big(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\big)\Big)\Big(\exp\big(-\frac{(y-\eta+2ml)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\big)+$$
$$+(-1)^j\exp\big(-\frac{(y+\eta+2ml)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\big)\Big)\Bigg),\quad \theta(t)=\int_0^t\tau^\beta a(\tau)d\tau,\quad i,j=1,2.$$

Використовуючи властивості функцій Гріна та інтегруючи частинами, продиференціюємо (6) по x:

$$u_x(x,y,t)=\int_0^l\int_0^h G_{21}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi_\xi(\xi,\eta)d\xi d\eta+$$
$$+\int_0^t\int_0^l G_{21}(x,y,t,h,\eta,\tau)(\mu_{2_\tau}(\eta,\tau)-\tau^\beta a(\tau)\mu_{2_{\eta\eta}}(\eta,\tau)-f(h,\eta,\tau))d\eta d\tau-$$
$$-\int_0^t\int_0^l G_{21}(x,y,t,0,\eta,\tau)(\mu_{1_\tau}(\eta,\tau)-\tau^\beta a(\tau)\mu_{1_{\eta\eta}}(\eta,\tau)-f(0,\eta,\tau))d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^h G_{21_\eta}(x,y,t,\xi,0,\tau)\tau^\beta a(\tau)\nu_{1_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau-\int_0^t\int_0^h G_{21_\eta}(x,y,t,\xi,l,\tau)\times$$
$$\times\tau^\beta a(\tau)\nu_{2_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau+\int_0^t\int_0^l\int_0^h G_{21}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f_\xi(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau. \qquad (7)$$

Підставивши (7) в умову перевизначення (5), отримаємо рівняння для невідомої функції $a(t)$:

$$a(t) = \varkappa(t)\Bigg[\int_0^l\int_0^h G_{21}(0,y_0,t,\xi,\eta,0)\varphi_\xi(\xi,\eta)d\xi d\eta + \int_0^t\int_0^l G_{21}(0,y_0,t,h,\eta,\tau)\times$$

$$\times(\mu_{2_\tau}(\eta,\tau)-\tau^\beta a(\tau)\mu_{2_{\eta\eta}}(\eta,\tau)-f(h,\eta,\tau))d\eta d\tau - \int_0^t\int_0^l G_{21}(0,y_0,t,0,\eta,\tau)\times$$

$$\times(\mu_{1_\tau}(\eta,\tau)-\tau^\beta a(\tau)\mu_{1_{\eta\eta}}(\eta,\tau)-f(0,\eta,\tau))d\eta d\tau + \int_0^t\int_0^h G_{21_\eta}(0,y_0,t,\xi,0,\tau)\times$$

$$\times\tau^\beta a(\tau)\nu_{1_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau - \int_0^t\int_0^h G_{21_\eta}(0,y_0,t,\xi,l,\tau)\tau^\beta a(\tau)\nu_{2_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^l\int_0^h G_{21}(0,y_0,t,\xi,\eta,\tau)f_\xi(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau\Bigg]^{-1}, \quad t\in[0,T]. \tag{8}$$

Отож, ми звели обернену задачу (1)-(5) до задачі знаходження розв'язку рівняння (8). Знайдемо оцінки розв'язків (8).

Оцінимо $a(t)$ зверху. Позначимо інтеграли у (8) через $I_i, i=\overline{1,6}$. Знайдемо оцінки цих інтегралів знизу.

Розглянемо I_1. Функцію Гріна $G_{ij}(x,y,t,\xi,\eta,\tau),\ i,j=1,2$, можна подати у вигляді добутку $G_i^x(x,t,\xi,\tau)G_j^y(y,t,\eta,\tau)$, де G_i^x і G_j^y - функції Гріна i-ї і j-ї крайових задач відповідно для рівнянь

$$u_t = t^\beta a(t)u_{xx}, \quad (x,t)\in(0,h)\times(0,T), \quad \text{і} \quad v_t = t^\beta a(t)v_{yy}, \quad (y,t)\in(0,l)\times(0,T).$$

Запишемо I_1 так:

$$I_1 = \int_0^l\int_0^h G_2^x(0,t,\xi,0)G_1^y(y_0,t,\eta,0)\varphi_\xi(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

Використовуючи вигляд похідної функції Гріна $G_2^x(x,t,\xi,\tau)$, легко бачити, що

$$\int_0^h G_2^x(x,t,\xi,\tau)d\xi = 1. \tag{9}$$

Звідси отримаємо

$$I_1 \geqslant \min_{\substack{x\in[0,h]\\ y\in[0,l]}}\varphi_x(x,y)\int_0^l G_1^y(y_0,t,\eta,0)d\eta.$$

Оцінимо I_4 та I_5:

$$I_4 = \int_0^t \int_0^h G_2^x(0,t,\xi,\tau) G_{1_\eta}^y(y_0,t,0,\tau)\tau^\beta a(\tau)\nu_{1_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau \geqslant$$

$$\geqslant \min_{\substack{x\in[0,h]\\ t\in[0,T]}} \nu_{1_x}(x,t) \int_0^t G_{1_\eta}^y(y_0,t,0,\tau)\tau^\beta a(\tau)d\tau,$$

$$I_5 \geqslant \min_{\substack{x\in[0,h]\\ t\in[0,T]}} \nu_{2_x}(x,t) \left(-\int_0^t G_{1_\eta}^y(y_0,t,l,\tau)\tau^\beta a(\tau)d\tau \right).$$

Із умов **(A2)** випливає невід'ємність доданків I_2, I_3, I_6. Тоді

$$\sum_{i=1}^6 I_i \geqslant I_1 + I_4 + I_5 \geqslant \min\Big\{ \min_{\substack{x\in[0,h]\\ y\in[0,l]}} \varphi_x(x,y), \min_{\substack{x\in[0,h]\\ t\in[0,T]}} \nu_{1_x}(x,t), \min_{\substack{x\in[0,h]\\ t\in[0,T]}} \nu_{2_x}(x,t) \Big\}\times$$

$$\times\Big(\int_0^l G_1^y(y_0,t,\eta,0)d\eta + \int_0^t G_{1\eta}^y(y_0,t,0,\tau)\tau^\beta a(\tau)d\tau - \int_0^t G_{1\eta}^y(y_0,t,l,\tau)\tau^\beta a(\tau)d\tau \Big).$$

Вираз у дужках є розв'язком такої задачі:

$$\begin{aligned} &u_t = t^\beta a(t)u_{yy}, \quad (y,t)\in(0,l)\times(0,T),\\ &u(y,0) = 1, \quad y\in[0,l],\\ &u(0,t) = u(l,t) = 1, \quad t\in[0,T]. \end{aligned} \tag{10}$$

Розв'язок цієї задачі дорівнює 1. Тоді

$$\sum_{i=1}^6 I_i \geqslant \min\Big\{ \min_{\substack{x\in[0,h]\\ y\in[0,l]}} \varphi_x(x,y), \min_{\substack{x\in[0,h]\\ t\in[0,T]}} \nu_{1_x}(x,t), \min_{\substack{x\in[0,h]\\ t\in[0,T]}} \nu_{2_x}(x,t) \Big\} \equiv C_1.$$

Отже,

$$a(t) \leqslant \frac{\max\limits_{[0,T]} \varkappa(t)}{C_1} \equiv A_1, \quad t\in[0,T]. \tag{11}$$

Оцінимо $a(t)$ знизу. Для цього знайдемо оцінки кожного з інтегралів I_i зверху. Розглянемо I_1. Використовуючи (9), матимемо

$$I_1 \leqslant \max_{\substack{x\in[0,h]\\ y\in[0,l]}} \varphi_x(x,y) \int_0^l G_1^y(y_0,t,\eta,0)d\eta.$$

Для інтегралів I_4 та I_5 отримаємо:

$$I_4 \leqslant \max_{\substack{x\in[0,h]\\ t\in[0,T]}} \nu_{1_x}(x,t) \int\limits_0^t G^y_{1_\eta}(y_0,t,0,\tau)\tau^\beta a(\tau)d\tau,$$

$$I_5 \leqslant \max_{\substack{x\in[0,h]\\ t\in[0,T]}} \nu_{2_x}(x,t) \left(-\int\limits_0^t G^y_{1_\eta}(y_0,t,l,\tau)\tau^\beta a(\tau)d\tau \right).$$

Тоді для суми $I_1 + I_4 + I_5$ справеджується така нерівність:

$$I_1 + I_4 + I_5 \leqslant$$

$$\leqslant \max \left\{ \max_{\substack{x\in[0,h]\\ y\in[0,l]}} \varphi_x(x,y), \max_{\substack{x\in[0,h]\\ t\in[0,T]}} \nu_{1_x}(x,t), \max_{\substack{x\in[0,h]\\ t\in[0,T]}} \nu_{2_x}(x,t) \right\} \left(\int\limits_0^l G^y_1(y_0,t,\eta,0)d\eta + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^t G^y_{1_\eta}(y_0,t,0,\tau)\tau^\beta a(\tau)d\tau - \int\limits_0^t G^y_{1_\eta}(y_0,t,l,\tau)\tau^\beta a(\tau)d\tau \right) \leqslant C_2.$$

Оцінимо I_2

$$I_2 \leqslant \int\limits_0^t \int\limits_0^l G_{22}(0,y_0,t,h,\eta,\tau)(\mu_{2_\tau}(\eta,\tau) - \tau^\beta a(\tau)\mu_{2_{\eta\eta}}(\eta,\tau) - f(h,\eta,\tau))d\eta d\tau =$$

$$= \int\limits_0^t \int\limits_0^l G^x_2(0,t,h,\tau)G^y_2(y_0,t,\eta,\tau)(\mu_{2_\tau}(\eta,\tau) - \tau^\beta a(\tau)\mu_{2_{\eta\eta}}(\eta,\tau) - f(h,\eta,\tau))d\eta d\tau.$$

Функція $G^x_2(0,t,h,\tau)$ обмежена зверху виразом $\frac{4}{h}$ [9, с.12]. Тоді, використовуючи умови **(A2)** і рівність (9), отримаємо

$$\int\limits_0^l G^y_2(y_0,t,\eta,\tau)(\mu_{2_\tau}(\eta,\tau) - \tau^\beta a(\tau)\mu_{2_{\eta\eta}}(\eta,\tau) - f(h,\eta,\tau))d\eta \leqslant C_3.$$

Тому

$$I_2 \leqslant \frac{4C_3 t}{h}.$$

Знайдемо оцінку для I_3. Відомо [9], що виконується оцінка

$$G^x_2(0,t,0,\tau) \leqslant \frac{1}{h} + \frac{1}{\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}}.$$

Із умов **(A2)**, рівності (9) та з того, що

$$\int\limits_0^l G^y_2(y_0,t,\eta,\tau)(\mu_{1_\tau}(\eta,\tau) - \tau^\beta a(\tau)\mu_{1_{\eta\eta}}(\eta,\tau) - f(0,\eta,\tau))d\eta \leqslant C_4,$$

випливатиме оцінка

$$I_3 \leqslant \int\limits_0^t \Big(C_5 + \frac{C_6}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\Big) d\tau.$$

Доданок I_6 оцінюємо так само, як I_1

$$I_6 \leqslant \int\limits_0^t \max_{[0,h]\times[0,l]} f_x(x,y,\tau) d\tau \leqslant C_7.$$

Застосуємо отримані оцінки до (8)

$$a(t) \geqslant \frac{\varkappa(t)}{C_8 + C_9 \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}}\ . \tag{12}$$

Розглянемо інтеграл у знаменнику (12)

$$\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} = \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\int\limits_\tau^t \sigma^\beta a(\sigma) d\sigma}} \leqslant \sqrt{\frac{\beta+1}{a_{min}}} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}},$$

де $a_{min} = \min\limits_{[0,T]} a(t)$. Оцінимо останній інтеграл

$$\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}} = t^{\frac{1-\beta}{2}} \int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^{\beta+1}}} \leqslant C_{10}.$$

Тоді з (12) матимемо

$$a(t) \geqslant \frac{C_{11}}{C_8 + \frac{C_{12}}{\sqrt{a_{min}}}}.$$

Остання нерівність виконується для будь-яких $t \in [0,T]$, тому

$$a_{min} \geqslant \frac{C_{11}}{C_8 + \frac{C_{12}}{\sqrt{a_{min}}}},$$

або

$$C_8 a_{min} + C_{12}\sqrt{a_{min}} - C_{11} \geqslant 0.$$

Знайдемо звідси оцінку для a_{min}

$$a_{min} \geqslant \left(\frac{C_{11}}{\sqrt{C_{12}^2 + 4C_8C_{11}} + C_{12}}\right)^2 \equiv A_0.$$

Отже, маємо

$$a(t) \geqslant A_0, \quad t \in [0,T]. \tag{13}$$

Рівняння (8) запишемо у вигляді операторного рівняння

$$a(t) = Pa(t), \tag{14}$$

де оператор P переводить множину $N = \{a \in C[0,T] : A_0 \leqslant a(t) \leqslant A_1\}$ в себе. Доведення того, що оператор P є цілком неперервним, проводять аналогічно до одновимірного випадку, враховуючи той факт, що функцію Гріна для двовимірного рівняння можна подати у вигляді добутку відповідних функцій Гріна для одновимірного рівняння. Звідси матимемо, що оператор P має нерухому точку, тому існує розв'язок задачі (1)-(5). □

Доведемо єдиність розв'язку задачі (1)-(5).

Теорема 2. ***(Єдиність)***. *Нехай виконуються умови:*

(A5) $\varphi \in C^{2,2}([0,h]\times[0,l])$; $\mu_i \in C^{2,1}([0,l]\times(0,T])\cap C^{1,1}([0,l]\times[0,T])$, *існує скінченна границя* $\lim\limits_{t\to+0} t^\beta \mu_{i_{yy}}(y,t)$, $i=1,2$; $\nu_i \in C^{2,1}([0,h]\times(0,T])\cap C^{1,1}([0,h]\times[0,T])$, *існує скінченна границя* $\lim\limits_{t\to+0} t^\beta \nu_{i_{xx}}(x,t) i=1,2$; $f \in C^{1,0}(\overline{Q_T})$;

(A6) $\varkappa(t) \neq 0$, $t \in [0,T]$.

Тоді задача (1)-(5) не може мати двох різних розв'язків.

Доведення. Припустимо, що існує два розв'язки задачі, а саме $(a_1(t),\ u_1(x,y,t))$ та $(a_2(t), u_2(x,y,t))$. Позначимо $A(t) = a_1(t) - a_2(t), U(x,y,t) = u_1(x,y,t) - u_2(x,y,t)$. Тоді для (A,U) матимемо таку задачу:

$$U_t = t^\beta a_1(t)\Delta U + t^\beta A(t)\Delta u_2, \quad (x,y,t) \in Q_T, \tag{15}$$

$$U|_{t=0} = U|_{x=0} = U|_{x=h} = U|_{y=0} = U|_{y=l} = 0, \tag{16}$$

$$a_1(t)U_x(0,y_0,t) = -A(t)u_{2_x}(0,y_0,t), \quad t \in [0,T]. \tag{17}$$

Подамо розв'язок прямої задачі (15),(16) у вигляді

$$U(x,y,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^h \int\limits_0^l G_{11}^*(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\tau^\beta A(\tau)\Delta u_2(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau,$$

де G_{11}^* - функція Гріна задачі (15),(16). Підставивши його в умову перевизначення, отримаємо рівняння для $A(t)$

$$A(t)u_{2_x}(0,y_0,t) = -a_1(t)\int\limits_0^t \int\limits_0^h \int\limits_0^l G_{11_x}^*(0,y_0,t,\xi,\eta,\tau)\tau^\beta A(\tau)\Delta u_2(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau. \tag{18}$$

Отримали інтегральне рівняння Вольтерра другого роду. Оцінимо ядро цього інтегрального рівняння. Проведемо оцінку $\Delta u = u_{2_{xx}} + u_{2_{yy}}$. Розглянемо вираз для $u_{2_{xx}}$:

$$u_{2_{xx}}(x,y,t)=\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{11}^*(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi_{\xi\xi}(\xi,\eta)d\xi d\eta-\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{11_\xi}^*(x,y,t,h,\eta,\tau)\times$$

$$\times(\mu_{2_\tau}(\eta,\tau)-\tau^\beta a_2(\tau)\mu_{2_{\eta\eta}}(\eta,\tau)-f(h,\eta,\tau))d\eta d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{11_\xi}^*(x,y,t,0,\eta,\tau)\times$$

$$\times(\mu_{1_\tau}(\eta,\tau)-\tau^\beta a_2(\tau)\mu_{1_{\eta\eta}}(\eta,\tau)-f(0,\eta,\tau))d\eta d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{11_\eta}^*(x,y,t,\xi,0,\tau)\times$$

$$\times\tau^\beta a_2(\tau)\nu_{1_{\xi\xi}}(\xi,\tau)d\xi d\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{11_\eta}^*(x,y,t,\xi,l,\tau)\tau^\beta a_2(\tau)\nu_{2_{\xi\xi}}(\xi,\tau)d\xi d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{11_\xi}^*(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f_\xi(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau. \tag{19}$$

Позначимо інтеграли у (19) через $J_i, i=\overline{1,6}$, знайдемо їхні оцінки.
Спочатку оцінимо J_1

$$\big|J_1\big|\leqslant\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{22}^*(x,y,t,\xi,\eta,0)|\varphi_{\xi\xi}(\xi,\eta)|d\xi d\eta\leqslant\max_{\substack{x\in[0,h]\\ y\in[0,l]}}|\varphi_{xx}(x,y)|.$$

Оскільки (див. [3])

$$\int\limits_0^t G_{1_\xi}^{x*}(x,t,0,\tau)d\tau\leqslant\frac{C_{13}}{t^\beta}, \tag{20}$$

то для доданка J_3 матимемо

$$\big|J_3\big|\leqslant C_{14}\int\limits_0^t G_{1_\xi}^{x*}(x,t,0,\tau)d\tau\leqslant\frac{C_{15}}{t^\beta}.$$

Так само оцінюється інтеграл J_2. Аналогічно, застосовуючи (9) і (20) до інтегралів J_4, J_5, отримаємо

$$\big|J_4\big|\leqslant C_{16}\int\limits_0^t G_{1_\eta}^{y*}(x,t,0,\tau)\tau^\beta d\tau\leqslant C_{17},\ \big|J_5\big|\leqslant C_{18}\int\limits_0^t|G_{1_\eta}^{y*}(x,t,l,\tau)|\tau^\beta d\tau\leqslant C_{19}.$$

Розглянемо J_6:

$$\big|J_6\big| \leqslant \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \max_{Q_T} |f_x(x,t)| \int\limits_0^t \int\limits_0^h \frac{1}{\big(\theta_2(t)-\theta_2(\tau)\big)^{3/2}} \times$$
$$\times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Bigg(|x-\xi+2nh| \exp\Big(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))} \Big) +$$
$$+ |x+\xi+2nh| \exp\Big(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))} \Big) \Bigg) d\xi d\tau \equiv J_{6,1} + J_{6,2}.$$

В інтегралі $J_{6,1}$ зробимо заміну змінних

$$z = \frac{x-\xi+2nh}{2\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}} :$$

$$J_{6,1} \leqslant C_{20} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int\limits_0^t \frac{1}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}} \int\limits_{\frac{x-\xi+(2n-1)h}{2\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}}}^{\frac{x-\xi+2nh}{2\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}}} |z| \exp(-z^2) dz \leqslant$$

$$\leqslant C_{20} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |z| \exp(-z^2) dz \leqslant C_{21} \int\limits_0^t \frac{1}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}} d\tau \leqslant C_{22} t^{\frac{1-\beta}{2}}.$$

Інтеграл $J_{6,2}$ можна оцінити так само. Тоді

$$|u_{2_{xx}}(x,y,t)| \leqslant C_{23} + C_{24} t^{\frac{1-\beta}{2}} + C_{25} t^{-\beta}. \tag{21}$$

Доданок $u_{2_{yy}}$ із виразу для Δu_2 можна оцінити аналогічно. Звідси маємо

$$|t^{\beta} \Delta u| \leqslant C_{26}. \tag{22}$$

Згідно з цією оцінкою ядро інтегрального рівняння (18) є обмеженим, тому це рівняння має тільки тривіальний розв'язок. Звідси випливає, що задача (15)-(17) має тривіальний розв'язок. Теорему доведено. □

3. Висновки. Для доведення існування та єдиності розв'язку необхідно накладати додаткові умови на функції, які визначають поведінку розв'язку на краях області. Поведінка розв'язку двовимірного рівняння теплопровідності зі слабким виродженням по часовій змінній не відрізняється від поведінки розв'язку аналогічного до одновимірного рівняння.

1. *Гаджиев М.М.* Обратная задача для вырождающегося эллиптического уравнения / *Гаджиев М.М.* // Применение методов функционального анализа в методах математической физики. – Новосибирск. – 1987. – С. 66-71.
2. *Елдесбаев Т.* Об одной обратной задаче для вырождающегося гиперболического уравнения второго порядка / *Елдесбаев Т.* // Известия АН КазССР. Серия физико-математическая. – 1987. – №3. – С. 27-29.
3. *Салдіна Н.* Обернена задача для параболічного рівняння з виродженням / *Салдіна Н.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 245-257.

4. *M. Ivanchov* An inverse problem for strongly degenerate heat equation / *M. Ivanchov, N. Saldina* // J. Inv. Ill-Posed Problems. – 2006. – Vol. 14, №5. – P. 465-480.
5. *Салдіна Н.* Сильно вироджена обернена параболічна задача з загальною поведінкою коефіцієнтів / *Салдіна Н.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2006. – Вип. 66. – С. 186-202.
6. *M. Ivanchov* Solving a scalar degenerate multidimensional identification problem in Banach space / *M. Ivanchov, A. Lorenzi, N. Saldina.* // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. – 2008. – Vol. 16, №4. – P. 397-415.
7. *Сагайдак Р.* Про одну обернену задачу для двовимірного рівняння параболічного типу в прямокутнику / *Сагайдак Р.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2003. – Вип. 62. – С. 117-128.
8. *Іванчов М.І.* Обернена задача визначення старшого коефіцієнта у двовимірному параболічному рівнянні / *Іванчов М.І., Сагайдак Р.В.* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – Т. 47, №1. – С. 7-16.
9. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. / *Ivanchov M.* – VNTL Publishers., 2003.

AN INVERSE PROBLEM FOR A WEAKLY DEGENERATE TWO-DIMENSIONAL HEAT EQUATION

Mykola IVANCHOV[1], **Vitaliy VLASOV**[2]

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: [1]*ivanchov@franko.lviv.ua,* [2]*siphiuel@gmail.com*

Conditions for existence and uniqueness of the solution of the problem of the identification of the unknown coefficient at the major derivative in a heat equation $u_t = t^\beta a(t)\Delta u + f(x,t)$ with a weak degeneration ($\beta < 1$) are established. Existence is proven via the application of Schauder fixed-point theorem. Uniqueness is established by reducing the problem to a Volterra integral equation.

Key words: heat equation, weak degeneration, two-dimensional, Green function, Schauder fixed-point theorem.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СЛАБО ВЫРОЖДЕННОГО ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Николай ИВАНЧОВ[1], **Виталий ВЛАСОВ**[2]

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: [1]*ivanchov@franko.lviv.ua,* [2]*siphiuel@gmail.com*

Найдены условия существования и единственности решения обратной задачи определения зависящего от времени старшего коэффициента в двумерном уравнении теплопроводности $u_t = t^\beta a(t)\Delta u + f(x,t)$ со слабым вырождением ($\beta < 1$). Существование решения доказывается с помощью теоремы Шаудера о неподвижной точке. Единственность устанавливается путем преобразования задачи к интегральному уравнению Вольтерра.

Ключевые слова: двумерное уравнение теплопроводности, слабое вырождение, функция Грина, теорема Шаудера о неподвижной точке.

Стаття надійшла до редколегії 26.05.2009

Прийнята до друку 12.06.2009

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2009.
Вип. 70. С. 103–121

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech. Math. 2009.
Is. 70. P. 103–121

УДК 517.95

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ ТИПУ КОЛИВАННЯ ПЛАСТИНКИ

Сергій ЛАВРЕНЮК, **Галина ТОРГАН**

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: torgan_g@yahoo.com

Розглянуто мішану задачу для рівняння

$$u_{tt}+\sum_{i,j,s,l=1}^{n}(a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j})_{x_sx_l}-\sum_{i=1}^{n}(a_i(x)|u_{x_i}|^{q-2}u_{x_i})_{x_i}+b_0(x)u_t-$$

$$-a_0(x)|u|^{p-2}u=0$$

в обмеженій області. Одержано достатні умови існування локального розв'язку та неіснування глобального розв'язку.

Ключові слова: рівняння типу коливання пластинки, мішана задача.

1. Вступ. У праці [1] доведено існування локального розв'язку та досліджено асимптотичну поведінку розв'язку задачі для нелінійного рівняння пластинки типу Кірхгофа, яке має вигляд

$$u_{tt}+\triangle^2u+a(x)u_t+f(u)=0.$$

У лінійному випадку це рівняння добре вивчене. Однак у випадку наявності нелінійних доданків мішані задачі для цього рівняння досліджені недостатньо. У працях [2-12] досліджено умови існування та єдиності глобального розв'язку задачі Коші та мішаних задач для рівняння зазначеного вигляду, досліджено експоненціальне спадання розв'язку нелінійної системи рівнянь балки типу Кірхгофа з пам'яттю і слабким затуханням при t прямуючому до нескінченності, деякі властивості розв'язків рівняння коливань балки.

У праці [13] доведено існування двох нетривіальних розв'язків мішаної задачі для рівняння

$$u_{tt}+u_{xxxx}+b[u]^+=c,$$

яке моделює коливання корабля.

В останні десятиліття значний інтерес становили дослідження задач для еволюційних рівнянь, розв'язки яких стають необмеженими у скінченний момент часу. У цьому напрямі сьогодні можна знайти сотні статей. Зазначимо лише деякі праці, присвячені дослідженню "вибуховості" розв'язків нелінійних параболічних рівнянь з першою похідною за часом. Це [14-20], у яких, зокрема, можна знайти достатньо повний огляд літератури зі згаданого питання.

У цій праці розглянуто мішану задачу для нелінійного рівняння типу коливання пластинки в обмеженій області. Знайдено деякі достатні умови існування узагальненого розв'язку на часовому інтервалі, довжина якого залежить від початкових збурень, міри області та коефіцієнтів рівняння. Також доведено, що за певних умов глобальний розв'язок задачі не існує.

Нехай Ω – обмежена область в просторі $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\Omega \in C^1$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, де $T < \infty$, $\Omega_\tau = Q_T \cap \{t = \tau\}$, $\tau \in [0,T]$, $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$. В області Q_T розглянемо задачу для рівняння з дійснозначними коефіцієнтами

$$u_{tt} + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} (a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j})_{x_s x_l} - \sum_{i=1}^{n} (a_i(x)|u_{x_i}|^{q-2} u_{x_i})_{x_i} + b_0(x) u_t - a_0(x)|u|^{p-2} u = 0 \quad (1)$$

з початковими умовами

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t\big|_{t=0} = u_1(x) \quad (2)$$

і крайовими умовами

$$u\big|_{S_T} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{S_T} = 0, \quad (3)$$

де ν – зовнішня нормаль до поверхні S_T.

У цій праці використовують такі простори: $L^r((0,T);B)$ ([21, с. 154, 157]), $C((0,T);B)$ ([21, с. 148]), де $r \in [1,+\infty)$, а B – деякий банахів простір; $H^k(\Omega)$, $H_0^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ ([21, с. 44]); $W_0^{1,r}(\Omega)$, $r \in (1,+\infty)$ ([21, с. 44]).

Нехай $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$, $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i \in \{1,...,n\}$. Говоритимемо, що коефіцієнти рівняння (1) задовольняють умови (A) і (B), якщо:

(A): $D^\alpha a_{ij}^{sl} \in L^\infty(\Omega)$, $|\alpha| \leqslant 2$, a_i, a_{ix_i}, $a_0 \in L^\infty(\Omega)$, $i,j,s,l \in \{1,...,n\}$,

$$a_{ij}^{sl}(x) = a_{sl}^{ij}(x) \text{ майже для всіх } x \in \Omega \text{ і всіх } i,j,s,l \in \{1,...,n\},$$

$$\sum_{i,j,s,l=i}^{n} a_{ij}^{sl}(x) \xi_{ij} \xi_{sl} \geqslant A_0 \sum_{i,j=1}^{n} |\xi_{ij}|^2, \; A_0 = const > 0,$$

для майже всіх $x \in \Omega$ і всіх $\xi_{ij} \in \mathbb{R}$ таких, що $\xi_{ij} = \xi_{ji}$,

$$\gamma_0 \leqslant a_i(x) \leqslant \gamma_1, \quad i \in \{1,...,n\},$$

$$\gamma_2 \leqslant a_0(x) \leqslant \gamma_3$$

для майже всіх $x \in \Omega$, $\gamma_0 > 0$, $\gamma_2 > 0$;

(B): $b_0 \in L^\infty(\Omega)$, $0 < \varrho_0 \leqslant b_0(x) \leqslant \varrho_1$ для майже всіх $x \in \Omega$;

Крім того, нехай параметри p і q задовольняють умову **(P)** :

$$q \in [3,+\infty), \; p \in (q,+\infty) \text{ при } n \in \{1,2\},$$

$$q \in \left[3, \frac{2n}{n-2}\right), \; p \in (q, +\infty) \;\text{ при }\; n \in \{3, 4\},$$

$$q \in [3, 5), \; p \in \left(q, \frac{7q-10}{q}\right] \;\text{ при }\; n = 5.$$

Означення 1. *Функцію* $u \in C([0,T_1]; H_0^2(\Omega)) \cap L^\infty((0,T_1); W_0^{1,q}(\Omega) \cap L^p(\Omega))$ *таку, що* $u_t \in C([0,T_1]; L^2(\Omega)) \cap L^\infty((0,T_1); H_0^2(\Omega))$, $u_{tt} \in L^\infty((0,T_1); L^2(\Omega))$, $|u_{x_i}|^{q-2} u_{tx_i}^2 \in$ $\in L^\infty((0,T_1); L^1(\Omega))$, $i \in \{1, ..., n\}$ *і* u *задовольняє початкові умови (2) та рівність*

$$\int\limits_{\Omega_t} \Bigg[u_{tt} v + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} v_{x_s x_l} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) |u_{x_i}|^{q-2} u_{x_i} v_{x_i} +$$

$$+ b_0(x) u_t v - a_0(x) |u|^{p-2} u v \Bigg] dx = 0 \tag{4}$$

для майже всіх $t \in (0, T_1)$, *всіх* $T_1 \in [0, T)$ *і всіх* $v \in H_0^2(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega)) \cap L^p(\Omega)$, *називаємо узагальненим розв'язком задачі (1)–(3). Якщо* $T = +\infty$, *то розв'язок будемо називати глобальним.*

Зауваження 1. Легко переконатися, що при $n \leqslant 6$ і $p \leqslant \dfrac{2n-4}{n-4}$ для $n > 4$

$$\int\limits_{\Omega} \left[|u_0|^{2(p-1)} + \sum_{i=1}^{n} |u_{0x_i}|^{2(q-1)} + \sum_{i=1}^{n} |u_{0x_i}|^{2(q-1)} |u_{0x_i x_i}|^2 + \sum_{i=1}^{n} |u_{0x_i}|^{q-2} |u_{1x_i}|^2 \right] dx < \infty,$$

якщо $u_0 \in H^4(\Omega)$, $u_1 \in H^2(\Omega)$. Для цього достатньо використати теорему вкладення Соболєва ([21, с. 47]).

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* (*A*), (*B*), (*P*), $u_0 \in H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$, $u_1 \in H_0^2(\Omega)$. *Тоді знайдеться таке число* $T > 0$, *що узагальнений розв'язок задачі (1)-(3) існує.*

Доведення. Для доведення існування розв'язку використаємо метод Фаедо-Гальоркіна. Оскільки простір $H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$ – сепарабельний банахів, то в ньому існує така зліченна множина $\{\omega^k\}$, що будь-яка скінченна кількість елементів цієї множини лінійно незалежна і замикання її лінійної оболонки в $H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$ збігається з цим простором. Можемо прийняти, що $\{\omega^k\}$ ортонормована в $L^2(\Omega)$. Розглянемо функції $u^N(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{N} c_k^N(t) \omega^k(x)$, $N = 1, 2...$, де $c_1^N, c_2^N, ... c_N^N$ – розв'язки відповідних задач Коші

$$\int\limits_{\Omega} \Bigg[u_{tt}^N \omega^k + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j}^N \omega_{x_s x_l}^k + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) |u_{x_i}^N|^{q-2} u_{x_i}^N \omega_{x_i}^k +$$

$$+ b_0(x) u_t^N \omega^k - a_0(x) |u^N|^{p-2} u^N \omega^k \Bigg] dx = 0, \quad t \in [0, T], \tag{5}$$

$$c_k^N(0) = u_{0,k}^N, \quad c_{kt}^N(0) = u_{1,k}^N, \quad k = 1, ..., N, \tag{6}$$

де

$$u_0^N(x)=\sum_{k=1}^{N}u_{0,k}^N\omega^k(x),\quad \|u_0^N-u_0\|_{H_0^2(\Omega)\cap H^4(\Omega)}\to 0,$$

$$u_1^N(x)=\sum_{k=1}^{N}u_{1,k}^N\omega^k(x),\quad \|u_1^N-u_1\|_{H_0^2(\Omega)}\to 0 \ \text{ при } \ N\to\infty. \tag{7}$$

На підставі теореми Каратеодорі [22, с. 54] існує розв'язок задачі (5), (6), який має абсолютно неперервну похідну на проміжку $[0,t_N)$. З оцінок, одержаних нижче, випливає, що $t_N=T$, де додатне число T залежить від початкових даних задачі і коефіцієнтів рівняння.

Домножимо (5) на c_{kt}^N, підсумуємо за k від 1 до N і проінтегруємо за t від 0 до τ, де $\tau\in(0,T)$. Одержимо рівність

$$\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[u_{tt}^Nu_t^N+\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}^Nu_{tx_sx_l}^N+\sum_{i=1}^{n}a_i(x)|u_{x_i}^N|^{q-2}u_{x_i}^Nu_{tx_i}^N+$$

$$+b_0(x)|u_t^N|^2-a_0(x)|u^N|^{p-2}u^Nu_t^N\Bigg]dxdt=0. \tag{8}$$

Очевидно,

$$J_1:=\int\limits_{Q_\tau}u_{tt}^Nu_t^Ndxdt=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}|u_t^N|^2dx-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}|u_1^N|^2dx.$$

Згідно з умовою (A)

$$J_2:=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}^Nu_{tx_sx_l}^Ndxdt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}^Nu_{x_sx_l}^Ndx-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{0x_ix_j}^Nu_{0x_sx_l}^Ndx\geqslant$$

$$\geqslant\frac{A_0}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}|u_{x_ix_j}^N|^2dx-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{0x_ix_j}^Nu_{0x_sx_l}^Ndx;$$

$$J_3:=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}a_i(x)|u_{x_i}^N|^{q-2}u_{x_i}^Nu_{tx_i}^Ndxdt=\frac{1}{q}\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{n}a_i(x)|u_{x_i}^N|^qdx-$$

$$-\frac{1}{q}\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^{n}a_i(x)|u_{0x_i}^N|^qdx\geqslant\frac{\gamma_0}{q}\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}^N|^qdx-\frac{1}{q}\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^{n}a_i(x)|u_{0x_i}^N|^qdxdt;$$

$$J_4:=\int\limits_{Q_\tau}a_0(x)|u^N|^{p-2}u^Nu_t^Ndxdt\leqslant\frac{\gamma_3}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left[\delta|u_t^N|^2+\frac{1}{\delta}|u^N|^{2(p-1)}\right]dxdt,\quad \delta>0.$$

На підставі теореми вкладення [21, с. 47] для майже всіх $t \in (0,\tau)$

$$\int\limits_{\Omega_t} |u^N|^{2(p-1)} dx \leqslant C_0 \Big(\int\limits_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^{n} |u^N_{x_i x_j}|^2 dx \Big)^{p-1},$$

причому $p \leqslant \dfrac{2n-4}{n-4}$ при $n > 4$, C_0 – деяка додатна константа. Отже,

$$J_4 \leqslant \frac{\gamma_3 \delta}{2} \int\limits_{Q_\tau} |u^N_t|^2 dxdt + \frac{\gamma_3 C_0}{2\delta} \int\limits_0^\tau \Big(\int\limits_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^{n} |u^N_{x_i x_j}|^2 dx \Big)^{p-1} dt.$$

За умовою (B) маємо

$$J_5 := \int\limits_{Q_\tau} b_0(x) |u^N_t|^2 dxdt \geqslant \rho_0 \int\limits_{Q_\tau} |u^N_t|^2 dxdt.$$

Враховуючи одержані оцінки інтегралів $J_1 - J_5$, з (8) отримаємо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \Big[\frac{1}{2} |u^N_t|^2 + \frac{A_0}{2} \sum_{i,j=1}^{n} |u^N_{x_i x_j}|^2 + \frac{\gamma_0}{q} \sum_{i=1}^{n} |u^N_{x_i}|^q \Big] dx + \Big(\rho_0 - \frac{\gamma_3 \delta}{2} \Big) \int\limits_{Q_\tau} |u^N_t|^2 dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\gamma_3 C_0}{2\delta} \int\limits_0^\tau \Big(\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i,j=1}^{n} |u^N_{x_i x_j}|^2 dx \Big)^{p-1} dt + F^N, \qquad (9)$$

де

$$F^N = \int\limits_{\Omega_0} \Big[\frac{1}{2} |u^N_1|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a^{sl}_{ij}(x) u^N_{0x_i x_j} u^N_{0x_s x_l} + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{n} a_i(x) |u^N_{0x_i}|^q \Big] dx.$$

Нехай $\delta = \dfrac{2\rho_0}{\gamma_3}$. Згідно з умовами на u_0 і u_1 існує таке N_0, що $F^N \leqslant 2F_0$ при $N \geqslant N_0$, де

$$F_0 = \int\limits_{\Omega_0} \Big[\frac{1}{2} |u_1|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a^{sl}_{ij}(x) u_{0x_i x_j} u_{0x_s x_l} + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{n} a_i(x) |u_{0x_i}|^q \Big] dx.$$

Тоді з (9) випливає нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i,j=1}^{n} |u^N_{x_i x_j}|^2 dx \leqslant \mu_1 \int\limits_0^\tau \Big(\int\limits_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^{n} |u^N_{x_i x_j}|^2 dx \Big)^{p-1} dt + \mu_2, \qquad (10)$$

де $\mu_1 = \dfrac{\gamma_3^2 C_0}{2A_0}$, $\mu_2 = \dfrac{4F_0}{A_0}$.

Застосовуючи до (10) лему Біхарі [23, с. 110], одержимо оцінку

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i,j=1}^{n} |u^N_{x_i x_j}|^2 dx \leqslant \frac{\mu_2}{[1 - (p-2)\mu_2^{p-2} \mu_1 \tau]^{1/(p-2)}}.$$

Нехай τ таке, що $1-(p-2)\mu_2^{p-2}\mu_1\tau>0$. Тоді з (9) матимемо

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[|u_t^N|^2+\sum_{i,j=1}^n|u^N_{x_ix_j}|^2+\sum_{i=1}^n|u^N_{x_i}|^q\Big]dx\leqslant\mu_3, \tag{11}$$

при $\tau\in[0,T_0],\ T_0<\dfrac{1}{(p-2)\mu_2^{p-2}\mu_1}$.

Отже,

$$||u_t^N||_{L^\infty((0,T_0);L^2(\Omega))}\leqslant\mu_3,\ ||u^N||_{L^\infty((0,T_0);H_0^2(\Omega)\cap W_0^{1,q}(\Omega))}\leqslant\mu_3. \tag{12}$$

Продиференціюємо за t рівність (5) (це можливо на підставі умов теореми). Будемо мати

$$\int\limits_{\Omega}\Big[u^N_{ttt}\omega^k+\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u^N_{tx_ix_j}\omega^k_{x_sx_l}+(q-1)\sum_{i=1}^n a_i(x)|u^N_{x_i}|^{q-2}u^N_{tx_i}\omega^k_{x_i}+$$
$$+b_0(x)u^N_{tt}\omega^k-(p-1)a_0(x)|u^N|^{p-2}u^N_t\omega^k\Big]dx=0.$$

Домножимо останню рівність на c^N_{ktt}, підсумуємо за k від 1 до N і проінтегруємо за t від 0 до τ, де $\tau\in(0,T_0]$. Матимемо рівність

$$\int\limits_{Q_\tau}\Big[u^N_{ttt}u^N_{tt}+\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u^N_{tx_ix_j}u^N_{ttx_sx_l}+(q-1)\sum_{i=1}^n a_i(x)|u^N_{x_i}|^{q-2}u^N_{tx_i}u^N_{ttx_i}+$$
$$+b_0(x)|u^N_{tt}|^2-(p-1)a_0(x)|u^N|^{p-2}u^N_tu^N_{tt}\Big]dxdt=0. \tag{13}$$

Подібно як для $J_1,\ J_2$ маємо

$$J_6:=\int\limits_{Q_\tau}\Big[u^N_{ttt}u^N_{tt}+\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u^N_{tx_ix_j}u^N_{ttx_sx_l}\Big]dxdt\geqslant$$
$$\geqslant\frac12\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[|u^N_{tt}|^2+A_0\sum_{i,j=1}^n|u^N_{tx_ix_j}|^2\Big]dx-\frac12\int\limits_{\Omega_0}\Big[|u^N_{tt}|^2+\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u^N_{1x_ix_j}u^N_{1x_sx_l}\Big]dx.$$

Згідно з умовою (A)

$$J_7:=\frac{q-1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n a_i(x)|u^N_{x_i}|^{q-2}[(u^N_{tx_i})^2]_tdxdt=\frac{q-1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n a_i(x)|u^N_{x_i}|^{q-2}|u^N_{tx_i}|^2dx-$$
$$-\frac{(q-1)(q-2)}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n a_i(x)|u^N_{x_i}|^{q-3}(u^N_{tx_i})^3\mathrm{sign}(u^N_{tx_i})dxdt-$$
$$-\frac{q-1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^n a_i(x)|u^N_{0x_i}|^{q-2}|u^N_{1x_j}|^2dx\geqslant\frac{(q-1)\gamma_0}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n|u^N_{x_i}|^{q-2}|u^N_{tx_i}|^2dx-$$

$$-\frac{(q-1)(q-2)\gamma_1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_i}|^{q-3}(u^N_{tx_i})^3dxdt-\frac{q-1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^{n}a_i(x)|u^N_{0x_i}|^{q-2}|u^N_{1x_j}|^2dx.$$

Нехай $q>3$, тоді

$$J_7^2:=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_i}|^{q-3}|u^N_{tx_i}|^3dxdt\leqslant\frac{(q-3)\delta_1^{\frac{q}{q-3}}}{q}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_i}|^qdxdt+\frac{3}{q\delta_1^{\frac{q}{3}}}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{tx_i}|^qdxdt,$$

де $\delta_1>0$. За теоремою вкладення [21, с. 47]

$$\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{tx_i}|^qdxdt\leqslant C_1\int\limits_0^\tau\Bigg(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}|u^N_{tx_ix_j}|^2dx\Bigg)^{q/2}dt,$$

якщо $q\leqslant\dfrac{2n}{n-2}$ і $n>2$ ($q>2$ при $n\in\{1,2\}$).

При $q=3$ маємо

$$J_7:=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}a_i(x)|u^N_{x_i}|[(u^N_{tx_i})^2]_tdxdt=\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{n}a_i(x)|u^N_{x_i}||u^N_{tx_i}|^2dx-$$

$$-\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}a_i(x)(u^N_{tx_i})^3\mathrm{sign}(u^N_{tx_i})dxdt-\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^{n}a_i(x)|u^N_{0x_i}||u^N_{1x_j}|^2dx\geqslant-\frac{\gamma_1}{3}\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_i}|^qdx-$$

$$-\frac{2\gamma_1}{3}\int\limits_{\Omega_\tau}|u^N_{tx_i}|^qdx-\gamma_1\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{tx_i}|^qdxdt-\frac{\gamma_1}{3}\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_i}|^qdx-\frac{2\gamma_1}{3}\int\limits_{\Omega_0}|u^N_{tx_i}|^qdx.$$

Далі

$$J_8:=(p-1)\int\limits_{Q_\tau}a_0(x)|u^N|^{p-2}u^N_tu^N_{tt}dxdt\leqslant(p-1)\gamma_3\int\limits_{Q_\tau}|u^N|^{p-2}u^N_tu^N_{tt}dxdt\leqslant$$

$$\leqslant(p-1)\gamma_3\Bigg[\frac{\delta_2^2}{2}\int\limits_{Q_\tau}|u^N_{tt}|^2dxdt+\frac{q-2}{2q\delta_2^{\frac{2q}{q-2}}}\int\limits_{Q_\tau}|u^N|^{\frac{(p-2)2q}{q-2}}dxdt+\frac{1}{q\delta_2^q}\int\limits_{Q_\tau}|u^N_t|^qdxdt\Bigg],\quad\delta_2>0.$$

На підставі теореми вкладення [21, с. 47] і (12)

$$J_8^2:=\int\limits_{Q_\tau}|u^N|^{\frac{(p-2)2q}{q-2}}dxdt\leqslant C_2\int\limits_0^\tau\Bigg(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}|u^N_{x_ix_j}|^2dx\Bigg)^{\frac{(p-2)q}{q-2}}dt\leqslant\mu_4,$$

при $\tau\in[0,T_0]$ і $p\leqslant\dfrac{3nq-2n-8q}{nq-4q}$, якщо $n>4$, а також

$$J_8^3:=\int\limits_{Q_\tau}|u^N_t|^qdxdt\leqslant C_3\int\limits_0^\tau\Bigg(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}|u^N_{tx_ix_j}|^2dx\Bigg)^{\frac{q}{2}}dt$$

при $q\leqslant\dfrac{2n}{n-4}$ і $n>4$ (при $n\leqslant4$ маємо $q\geqslant3$).

За умовою (B)

$$J_9 := \int\limits_{Q_\tau} b_0(x)|u_{tt}^N|^2 dxdt \geqslant \rho_0 \int\limits_{Q_\tau} |u_{tt}^N|^2 dxdt.$$

Враховуючи одержані оцінки інтегралів $J_6 - J_9$, з (13), отримаємо нерівність (при q>3)

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\left[|u_{tt}^N|^2 + A_0\sum_{i,j=1}^n |u_{tx_ix_j}^N|^2\right]dx + \frac{(q-1)\gamma_0}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^{q-2}|u_{tx_i}^N|^2 dx +$$
$$+\left(\rho_0 - (p-1)\gamma_3\frac{\delta_2^2}{2}\right)\int\limits_{Q_\tau}|u_{tt}^N|^2 dxdt \leqslant \left(\frac{3C_1(q-1)(q-2)\gamma_1}{2q\delta_1^{\frac{q}{3}}} + \frac{(p-1)\gamma_3 C_3}{q\delta_2^q}\right)\times$$
$$\times\int\limits_0^\tau\left(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i,j=1}^n |u_{tx_ix_j}^N|^2 dx\right)^{\frac{q}{2}} dt + \frac{C_2(q-2)(p-1)\gamma_3}{2q\delta_2^{\frac{2q}{q-2}}}\int\limits_0^\tau\left(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i,j=1}^n |u_{x_ix_j}^N|^2 dx\right)^{\frac{(p-2)q}{q-2}} dt +$$
$$+\frac{(q-1)(q-2)(q-3)\gamma_1\delta_1^{\frac{q}{q-3}}}{2q}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^q dxdt +$$
$$+\int\limits_{\Omega_0}\left[\frac{1}{2}|u_{tt}^N|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j,s,l=1}^n u_{1x_ix_j}^N u_{1x_sx_l}^N\right]dx + \frac{q-1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^n |u_{0x_i}^N|^{q-2}|u_{1x_i}^N|^2 dx, \qquad (14)$$

$\tau \in [0, T_0]$. Виберемо $\delta_2 = \left[\dfrac{2\rho_0}{\gamma_3(p-1)}\right]^{1/2}$, тоді підінтегральний вираз лівої частини останньої нерівності буде додатним.

Оцінимо $\int\limits_{\Omega_0}|u_{tt}^N|^2 dz$. Домножимо (5) на $c_{ktt}^N(0)$ і підсумуємо за k від 1 до N. Отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_0}\Bigg[|u_{tt}^N(0)|^2 + \sum_{i,j,s,l=1}^n (a_{ij}^{sl}(x)u_{0x_ix_j}^N)_{x_sx_l}u_{tt}^N - \sum_{i=1}^n (a_i(x)|u_{0x_i}^N|^{q-2}u_{0x_i}^N)_{x_i}u_{tt}^N -$$
$$-a_0(x)|u_0^N|^{p-2}u_0^N u_{tt}^N + b_0(x)u_1^N u_{tt}^N\Bigg]dx = 0. \qquad (15)$$

Згідно з умовою (A)

$$J_{10} := \int\limits_{\Omega_0}\sum_{i,j,s,l=1}^n (a_{ij}^{sl}(x)u_{0x_ix_j}^N)_{x_sx_l}u_{tt}^N dx \geqslant$$
$$\geqslant -\frac{1}{2\delta_3}\int\limits_{\Omega_0}\left[\sum_{i,j,s,l=1}^n (a_{ij}^{sl}(x)u_{0x_ix_j}^N)_{x_sx_l}\right]^2 dx - \frac{\delta_3}{2}\int\limits_{\Omega_0}|u_{tt}^N|^2 dx,$$

де $\delta_3 > 0$;

$$J_{11} := -\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^n (a_i(x)|u_{0x_i}^N|^{q-2}u_{0x_i}^N)_{x_i}u_{tt}^N dx \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{1}{2\delta_3}\int\limits_{\Omega_0}\Big[\sum_{i=1}^{n}(a_i(x)|u^N_{0x_i}|^{q-2}u^N_{0x_i})_{x_i}\Big]^2dx-\frac{\delta_3}{2}\int\limits_{\Omega_0}|u^N_{tt}|^N dx;$$

$$J_{12}:=-\int\limits_{\Omega_0}a_0(x)|u^N_0|^{p-2}u^N_0u^N_{tt}dx\geqslant -\frac{1}{2\delta_3}\int\limits_{\Omega_0}\big[a_0(x)|u^N_0|^{p-2}u^N_0\big]^2dx-\frac{\delta_3}{2}\int\limits_{\Omega_0}|u^N_{tt}|^N dx.$$

З умови (B) будемо мати

$$J_{13}:=\int\limits_{\Omega_0}b_0(x)u^N_1u^N_{tt}dx\geqslant -\frac{1}{2\delta_3}\int\limits_{\Omega_0}\big[b_0(x)u^N_1\big]^2dx-\frac{\delta_3}{2}\int\limits_{\Omega_0}|u^N_{tt}|^2dx.$$

Враховуючи одержані оцінки інтегралів $J_{10}-J_{13}$, з (15) отримаємо

$$(1-2\delta_3)\int\limits_{\Omega_0}|u^N_{tt}|^2dx\leqslant\frac{1}{2\delta_3}\int\limits_{\Omega_0}\Bigg(\Bigg[\sum_{i,j,s,l=1}^{n}(a^{sl}_{ij}(x)u^N_{0x_ix_j})_{x_sx_l}\Bigg]^2+\Big[b_0(x)u^N_1\Big]^2+$$

$$+\Bigg[\sum_{i=1}^{n}(a_i(x)|u^N_{0x_i}|^{q-2}u^N_{0x_i})_{x_i}\Bigg]^2+\Big[a_0(x)|u^N_0|^{p-2}u^N_0\Big]^2\Bigg)dx,$$

де $0<\delta_3<\dfrac{1}{2}$.

Враховуючи умови на $u_0,\ u_1$ і коефіцієнти рівняння (1), одержимо

$$\int\limits_{\Omega_0}|u^N_{tt}|^2dx\leqslant\mu_5, \tag{16}$$

де μ_5 – деяка константа, яка не залежить від N.

Отож, з (14) одержимо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}|u^N_{tx_ix_j}|^2dx\leqslant\mu_6+\mu_7\int\limits_0^{\tau}\Bigg(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}|u^N_{tx_ix_j}|^2dx\Bigg)^{q/2}dt,\quad \tau\in[0,T_0], \tag{17}$$

де $\mu_6,\ \mu_7$ - деякі константи, які не залежать від N. До нерівності (17) знову застосуємо лему Біхарі [23, с. 110]

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}|u^N_{tx_ix_j}|^2dx\leqslant\frac{\mu_6}{\Big[1-\big(\frac{q}{2}-1\big)\mu_6^{q/2-1}\mu_7\tau\Big]^{\frac{1}{q-2}}}, \tag{18}$$

де $\tau\in[0,T_1],\ T_1\leqslant T_0$ і $T_1<\dfrac{2}{(q-2)\mu_6^{q/2-1}\mu_7}$. Виберемо δ_1, мінімізуючи добуток $\mu_7\mu_6^{(q-2)/2}$. Тоді на проміжку $[0,T_1],\ T_1<T$ з (14), (16) і (18) одержимо оцінку

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\Bigg[|u^N_{tt}|^2+\sum_{i,j=1}^{n}|u^N_{tx_ix_j}|^2+\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_i}|^{q-2}|u^N_{tx_i}|^2\Bigg]dx\leqslant\mu_8.$$

Зазначимо, що $T = \min\left\{\dfrac{1}{(p-2)\mu_2^{p-2}\mu_1}, \dfrac{2}{(q-2)\mu_7\mu_6^{(q-2)/2}}\right\}$. Отже,

$$||u_t^N||_{L^\infty((0,T_1);H_0^2(\Omega))} \leqslant \mu_8,\ ||u_{tt}^N||_{L^\infty((0,T_1);L^2(\Omega))} \leqslant \mu_8,$$

$$||\,|u_{x_i}^N|^{q-2}|u_{tx_i}^N|^2||_{L^\infty((0,T_1);L^1(\Omega))} \leqslant \mu_8, \tag{19}$$

де стала μ_8 не залежить від N. Аналогічні оцінки одержимо і для $q = 3$. На підставі (12), (19) існує підпослідовність $\{u^{N_k}\} \subset \{u^N\}$ така, що

$$u^{N_k} \to u \quad *\text{- слабко в} \quad L^\infty((0,T_1); H_0^2(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega)),$$

$$u_t^{N_k} \to u_t \quad *\text{- слабко в} \quad L^\infty((0,T_1); H_0^2(\Omega)),$$

$$u_{tt}^{N_k} \to u_{tt} \quad *\text{- слабко в} \quad L^\infty((0,T_1); L^2(\Omega)) \ \text{ при } \ N_k \to \infty. \tag{20}$$

Крім того,

$$\int\limits_{Q_{T_1}} \left|\sum_{i=1}^n a_i(x)|u_{x_i}^N|^{q-2}u_{x_i}^N\right|^{q'} dxdt \leqslant \mu_9,$$

$$\int\limits_{Q_{T_1}} \left|a_0(x)|u^N|^{p-2}u^N\right|^{p'} dxdt \leqslant \mu_{10}.$$

Тому

$$\sum_{i=1}^n a_i(x)|u_{x_i}^{N_k}|^{q-2}u_{x_i}^{N_k} \to \chi_1 \ \text{ слабко в } \ L^{q'}(Q_{T_1}),$$

$$a_0(x)|u^{N_k}|^{p-2}u^{N_k} \to \chi_0 \ \text{ слабко в } \ L^{p'}(Q_{T_1}).$$

Зазначимо, що послідовність $\{u^N\}$ обмежена в $L^q((0,T_1); H_0^2(\Omega))$, а послідовність $\{u_t^N\}$ обмежена в $L^q((0,T_1); L^2(\Omega))$. Оскільки $H_0^2(\Omega) \subset W_0^{1,q}(\Omega)$ компактно при $q \in \left[3, \dfrac{2n}{n-2}\right)$, $n \in \{3,4,5\}$ і при $q \in [3, +\infty)$, $n \in \{1,2\}$, то на підставі теореми 5.1 [24, с. 70] можемо вважати, що

$$u^{N_k} \to u \ \text{ сильно в } \ L^q((0,T_1); W_0^{1,q}(\Omega))$$

і майже всюди в Q_{T_1}. Тому

$$\chi_1 = \sum_{i=1}^n a_i(x)|u_{x_i}|^{q-2}u_{x_i}.$$

Аналогічно, враховуючи те, що за умовою теореми (при вибраних параметрах p і n) $H_0^2(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ компактно, одержимо рівність

$$\chi_0 = a_0(x)|u|^{p-2}u$$

майже всюди в Q_{T_1}. Крім того, для функції u виконується нерівність

$$\int\limits_{\Omega_t} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^{q-2}|u_{tx_i}|^2 dx \leqslant \mu_{11}$$

майже для всіх $t \in [0, T_1]$. Отож,

$$\int\limits_{\Omega_t} \Big[u_{tt} v + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} v_{x_s x_l} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) |u_{x_i}|^{q-2} u_{x_i} v_{x_i} + \\ + b_0(x) u_t v - a_0(x) |u|^{p-2} u v \Big] dx = 0 \tag{21}$$

майже для всіх $t \in (0, T_1)$, всіх $T_1 \in (0, T)$ і всіх $v \in H_0^2(\Omega)$.

Залишилося показати, що виконуються початкові умови. Підставимо в (21) $v = v(x,t)$, $v \in C^2([0,T_1]; H_0^2(\Omega))$, $v(x,T_1) = 0$, $v_t(x,T_1) = 0$. Очевидно, що

$$\int\limits_{Q_{T_1}} u_{tt} v dx dt = \int\limits_{\Omega_t} u_t v dx \Big|_0^{T_1} - \int\limits_{Q_{T_1}} u_t v_t dx dt = -\int\limits_{\Omega_0} u_t(x,0) v(x,0) dx - \int\limits_{\Omega_t} u v_t dx \Big|_0^{T_1} + \\ + \int\limits_{Q_{T_1}} u v_{tt} dx dt = -\int\limits_{\Omega_0} u_t v dx + \int\limits_{\Omega_0} u v_t dx + \int\limits_{Q_{T_1}} u v_{tt} dx dt.$$

Будемо мати

$$\int\limits_{Q_{T_1}} \Big[u v_{tt} + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} v_{x_s x_l} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) |u_{x_i}|^{q-2} u_{x_i} v_{x_i} + b_0(x) u_t v - \\ - a_0(x) |u|^{p-2} u v \Big] dx dt = \int\limits_{\Omega_0} u_t v dx - \int\limits_{\Omega_0} u v_t dx. \tag{22}$$

Домножимо (5) на $d_k^{N_0} \in C^2([0,T_1])$, $d_k^{N_0}(T_1) = 0$, $d_{kt}^{N_0}(T_1) = 0$. Отриману рівність підсумуємо за k від 1 до N і проінтегруємо за t від 0 до τ, де $\tau \in (0, T_1]$. Позначимо $v^{N_0}(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{N_0} d_k^{N_0}(t) \omega^k(x)$. Одержимо

$$\int\limits_{Q_\tau} \Big[u^{Nk} v_{tt}^{N_0} + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j}^{N_k} v_{x_s x_l}^{N_0} + b_0(x) u_t^{N_k} v^{N_0} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) |u_{x_i}|^{q-2} u_{x_i} v_{x_i} - \\ - a_0(x) |u^{N_k}|^{p-2} u^{N_k} v^{N_0} \Big] dx dt = \int\limits_{\Omega_0} u_1^{N_k} v^{N_0} dx - \int\limits_{\Omega_0} u_0^{N_k} v_t^{N_0} dx.$$

В останній рівності перейдемо до границі при $N_k \to \infty$, $N_k > N_0$. Сукупність всіх v^{N_0} позначимо через $\mathbb{M}_N$. Оскільки $\bigcup \mathbb{M}_N$ щільне в $H_0^2(Q_{T_1}) \cap$ $\cap L^p((0,T_1); W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^q(Q_{T_1})$, то можемо перейти до границі і при $N_0 \to \infty$. Одержимо рівність

$$\int\limits_{Q_\tau} \Big[u v_{tt} + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} v_{x_s x_l} + b_0(x) u_t v + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) |u_{x_i}|^{q-2} u_{x_i} v_{x_i} - \\ - a_0(x) |u|^{p-2} u v \Big] dx dt = \int\limits_{\Omega_0} u_1 v dx - \int\limits_{\Omega_0} u_0 v_t dx, \tag{23}$$

яка виконується для довільного $v \in C^2([0,T_1]; H_0^2(\Omega))$. Віднявши від (22) рівність (23), матимемо

$$\int\limits_{\Omega_0} (u_t - u_1) v(x,0)dx - \int\limits_{\Omega_0} (u - u_0) v_t(x,0)dx = 0. \tag{24}$$

Нехай

$$v(x,t) = w(x)(T_1 - t)^2 t, \qquad w \in H_0^2(\Omega).$$

Тоді

$$v_t(x,t) = -2w(x)(T_1-t)t + w(x)(T_1-t)^2, \quad v(x,0)=0, \quad v_t(x,0) = w(x)T_1^2.$$

Оскільки w – довільне, то з (24) одержимо, що

$$u_t(x,0) = u_1(x).$$

Аналогічно, взявши $v(x,t) = w(x)(1-t^2)$, з (24) отримуємо, що

$$u(x,0) = u_0(x).$$

$\square$

Зауваження 2. Функція

$$g(t) := \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} a_i(x)|u_{x_i}|^q dx \in C([0,T_1])$$

при виконанні теореми 1. Справді,

$$\int\limits_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i(x)|u_{x_i}|^q \right)_t dx = q \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} a_i(x)|u_{x_i}|^{q-1} u_{tx_i} \operatorname{sign}(u_{x_i}) dx.$$

Але

$$\int\limits_{\Omega} \left| \sum_{i=1}^{n} a_i(x)|u_{x_i}|^{q-1} u_{tx_i} \operatorname{sign}(u_{x_i}) \right| dx \leqslant \frac{\gamma_1}{2} \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left[|u_{x_i}|^q + |u_{x_i}|^{q-2} |u_{tx_i}|^2 \right] dx \leqslant \mu_{12}$$

майже для всіх $t \in (0,T_1)$. Отже, $g \in C([0,T_1])$. Крім того, $u_t \in C([0,T_1]; L^2(\Omega))$, $u \in C([0,T_1]; H_0^2(\Omega))$, $\int\limits_{\Omega} a_0(x)|u|^{p-2} u dx \in C([0,T_1])$.

Введемо позначення

$$E(t) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_t} \left[|u_t|^2 + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} u_{x_s x_l} \right] dx +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_t} \left[\frac{1}{q} \sum_{i=1}^{n} a_i(x)|u_{x_i}|^q - \frac{1}{p} a_0(x)|u|^p \right] dx. \tag{25}$$

Теорема 2. *Нехай виконується умова (A) і, крім того,* $b_0 \in L^\infty(\Omega)$, $0 \leqslant b_0(x) \leqslant \rho_1$ *майже для всіх* $x \in \Omega$, $p > q > 2$, *причому* $p \leqslant \dfrac{2n}{n-4}$, *якщо* $n > 4$, $E(0) = -\lambda < 0$. *Тоді не існує глобального узагальненого розв'язку задачі (1)-(3).*

Доведення. Припустимо, що існує глобальний узагальнений розв'язок u задачі (1)-(3). Спочатку покажемо, що $E(t) < 0$ для всіх $t > 0$. Продиференціюємо рівність (25) за t. Зазначимо, що на підставі означення узагальненого розв'язку та зауваження 2, похідна E' існує майже для всіх $t \in (0, T)$. Отже,

$$E'(t) = \int\limits_{\Omega_t} \Big[u_t u_{tt} + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} u_{t x_s x_l} \Big] dx +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_t} \Big[\sum_{i=1}^{n} a_i(x) |u_{x_i}|^{q-2} u_{x_i} u_{t x_i} - a_0(x)|u|^{p-2} u u_t \Big] dx. \tag{26}$$

Приймемо в (4) $v = u_t$

$$\int\limits_{\Omega_t} \Big[u_{tt} u_t + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} u_{t x_s x_l} + b_0(x)|u_t|^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} a_i(x) |u_{x_i}|^{q-2} u_{x_i} u_{t x_i} - a_0(x)|u|^{p-2} u u_t \Big] dx = 0. \tag{27}$$

Віднявши рівності (26) і (27), одержимо

$$E'(t) = -\int\limits_{\Omega_t} b_0(x) u_t^2 dx \leqslant 0$$

майже для всіх $t > 0$. Оскільки $E(0) < 0$, то $E(t) < 0$ для всіх $t > 0$.

Введемо

$$H(t) = -E(t), \quad L(t) = [H(t)]^{1-\alpha} + \varepsilon \int\limits_{\Omega_t} u u_t dx, \quad \varepsilon > 0, \quad \alpha \in (0,1).$$

Тоді

$$L'(t) = (1-\alpha) H^{-\alpha}(t) H'(t) + \varepsilon \int\limits_{\Omega_t} \Big[u_t^2 + u u_{tt} \Big] dx.$$

Але правильна рівність (4) з $v = u$

$$\int\limits_{\Omega_t} \Big[u_{tt} u + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} u_{x_s x_l} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) |u_{x_i}|^q + b_0(x) u u_t - a_0(x)|u|^p \Big] dx = 0,$$

тому

$$L'(t) = (1-\alpha) H^{-\alpha}(t) \int\limits_{\Omega_t} b_0(x) u_t^2 dx + \varepsilon \int\limits_{\Omega} \Big[u_t^2 - \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} u_{x_s x_l} -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} a_i(x) |u_{x_i}|^q + a_0(x)|u|^p - b_0(x) u u_t \Big] dx.$$

Очевидно

$$-\int\limits_{\Omega_t} b_0(x) u u_t dx \geqslant -\frac{\delta_4}{2} \int\limits_{\Omega_t} b_0(x) u_t^2 dx - \frac{1}{2\delta_4} \int\limits_{\Omega_t} b_0(x) u^2 dx =$$

$$= -\frac{1}{4\delta_5}H^{-\alpha}(t)\int\limits_{\Omega_t} b_0(x)u_t^2dx - \delta_5 H^{\alpha}(t)\int\limits_{\Omega_t} b_0(x)u^2dx$$

при $\delta_5 > 0,\ \delta_4 = \dfrac{H^{-\alpha}(t)}{2\delta_5}$. Розглянемо інтеграл

$$J_{14} := \delta_5 H^{\alpha}(t)\int\limits_{\Omega_t} b_0(x)u^2dx.$$

Оскільки

$$H(t) \leqslant \frac{1}{p}\int\limits_{\Omega_t} a_0(x)|u|^pdx,$$

тому

$$J_{14} \leqslant \rho_1\delta_5\left(\frac{\gamma_3}{p}\right)^{\alpha}\left(\int\limits_{\Omega_t}|u|^pdx\right)^{\alpha}\int\limits_{\Omega_t}u^2dx \leqslant \rho_1\delta_5\left(\frac{\gamma_3}{p}\right)^{\alpha}(\mathrm{mes}\,\Omega)^{\frac{p-2}{p}}\left(\int\limits_{\Omega_t}|u|^pdx\right)^{\frac{\chi}{p}},$$

де $\chi = 2 + \dfrac{\alpha}{p}$. Виберемо α з умови $\chi \leqslant p$. Якщо $\int\limits_{\Omega_t}|u|^pdx \geqslant 1$, то

$$\left(\int\limits_{\Omega_t}|u|^pdx\right)^{\frac{\chi}{p}} \leqslant \int\limits_{\Omega_t}|u|^pdx.$$

Нехай $\int\limits_{\Omega_t}|u|^pdx < 1$. Тоді, враховуючи умову на p,

$$\left(\int\limits_{\Omega_t}|u|^pdx\right)^{\frac{\chi}{p}} \leqslant \left(\int\limits_{\Omega_t}|u|^pdx\right)^{\frac{2}{p}} \leqslant \mu_{13}\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i,j=1}^{n}u_{x_ix_j}^2dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\mu_{13}}{A_0}\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l}dx,$$

де μ_{13} – стала з теореми вкладення Соболєва [21. С. 47].

Отже,

$$\left(\int\limits_{\Omega_t}|u|^pdx\right)^{\frac{\chi}{p}} \leqslant \int\limits_{\Omega_t}|u|^pdx + \frac{\mu_{13}}{A_0}\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l}dx \qquad (28)$$

і

$$-J_{14} \geqslant \delta_5\mu_{14}\int\limits_{\Omega_t}|u|^pdx - \delta_5\mu_{15}\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l}dx,$$

причому $\mu_{14} = \rho_1 \left(\frac{\gamma_3}{p}\right)^{\alpha} (\mathrm{mes}\,\Omega)^{(p-2)/p}$, $\mu_{15} = \frac{\mu_{14}\mu_{13}}{A_0}$. Отож,

$$L'(t) \geqslant \left(1 - \alpha - \frac{\varepsilon}{4\delta_5}\right) H^{-\alpha}(t) \int\limits_{\Omega_t} b_0(x) u_t^2 dx - \delta_5 \varepsilon \mu_{15} \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} u_{x_s x_l} dx -$$

$$- \delta_5 \varepsilon \mu_{14} \int\limits_{\Omega_t} |u|^p dx - \varepsilon \int\limits_{\Omega_t} \left[\sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} u_{x_s x_l} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) |u_{x_i}|^q - a_0(x)|u|^p - u_t^2 \right] dx. \tag{29}$$

Нехай $\varepsilon \leqslant 4(1-\alpha)\delta_5$. Додамо до правої частини (29) $\delta_6 \varepsilon H(t) - \delta_6 \varepsilon H(t)$, де $\delta_6 > 0$. Тоді

$$L'(t) \geqslant \delta_6 \varepsilon H(t) + \frac{\delta_6 \varepsilon}{2} \int\limits_{\Omega_t} \left[u_t^2 + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} u_{x_s x_l} \right] dx + \delta_6 \varepsilon \int\limits_{\Omega_t} \left[\frac{1}{q} \sum_{i=1}^{n} a_i(x) |u_{x_i}|^q - \right.$$

$$\left. - \frac{a_0(x)}{p} |u|^p \right] dx - \frac{\varepsilon \delta_5 \mu_{14}}{\gamma_2} \int\limits_{\Omega_t} a_0(x)|u|^p dx - \varepsilon \int\limits_{\Omega_t} \left[(\delta_5 \mu_{15} + 1) \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} u_{x_s x_l} - a_0(x)|u|^p + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) |u_{x_i}|^q - u_t^2 \right] dx = \delta_6 \varepsilon H(t) + \varepsilon \left(\frac{\delta_6}{2} + 1 \right) \int\limits_{\Omega_t} u_t^2 dx + \varepsilon \left(\frac{\delta_6}{q} - 1 \right) \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^q dx +$$

$$+ \varepsilon \left(1 - \frac{\delta_6}{p} - \frac{\delta_5 \mu_{14}}{\gamma_2} \right) \int\limits_{\Omega_t} a_0(x)|u|^p dx + \varepsilon \left(\frac{\delta_6}{2} - \delta_5 \mu_{15} - 1 \right) \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} u_{x_s x_l} dx.$$

Нехай $q < \delta_6 < p$. Тоді існують такі $\delta_5 > 0$ і $\delta_7 \in (0,1)$, що виконуються нерівності

$$\frac{\delta_6}{q} - 1 \geqslant \delta_7, \qquad 1 - \frac{\delta_6}{p} - \frac{\delta_5 \mu_{13}}{\gamma_2} \geqslant \delta_7, \qquad \frac{\delta_6}{2} - \delta_5 \mu_{15} - 1 \geqslant \delta_7.$$

Отже,

$$L'(t) \geqslant \varepsilon \delta_7 \left[H(t) + \int\limits_{\Omega_t} a_0(x)|u|^p dx + \int\limits_{\Omega_t} u_t^2 dx + \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} u_{x_s x_l} dx \right]. \tag{30}$$

Розглянемо $[L(t)]^{\frac{1}{1-\alpha}}$. Маємо

$$[L(t)]^{\frac{1}{1-\alpha}} \leqslant \mu_{16} \left(H(t) + \varepsilon^{\frac{1}{1-\alpha}} \left| \int\limits_{\Omega} u u_t dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \right), \quad \mu_{16} = 2^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Очевидно

$$\left| \int\limits_{\Omega} u u_t dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leqslant \left(\int\limits_{\Omega} u^2 dx \right)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \left(\int\limits_{\Omega} u_t^2 dx \right)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{r_0} \left(\int\limits_{\Omega_t} u_t^2 dx \right)^{\frac{r_0}{2(1-\alpha)}} + \frac{1}{r_1} \left(\int\limits_{\Omega_t} u^2 dx \right)^{\frac{r_1}{2(1-\alpha)}},$$

де $r_0 = 2(1-\alpha) > 1,\ r_1 = \dfrac{2(1-\alpha)}{1-2\alpha}$ при $\alpha < \dfrac{1}{2}$.
Тоді
$$\left|\int\limits_{\Omega_t} u u_t dx\right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leqslant \frac{1}{r_0}\int\limits_{\Omega_t} |u_t|^2 dx + \frac{1}{r_1}\Big(\int\limits_{\Omega_t} |u|^2 dx\Big)^{\frac{1}{1-2\alpha}},$$
$$\left|\int\limits_{\Omega} u^2 dx\right|^{\frac{1}{1-2\alpha}} \leqslant (\mathrm{mes}\,\Omega)^{\frac{p-2}{p(1-2\alpha)}}\Big(\int\limits_{\Omega_t} |u|^p dx\Big)^{\frac{2}{p(1-2\alpha)}}.$$
Аналогічно до (28) одержуємо оцінку
$$\Big(\int\limits_{\Omega_t} u^2 dx\Big)^{\frac{2}{p(1-2\alpha)}} \leqslant \mu_{17}\int\limits_{\Omega_t} |u|^p dx + \mu_{18}\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i,j=1}^{n} u^2_{x_i x_j} dx$$
при $\dfrac{2}{1-2\alpha} \leqslant p$, де $\mu_{17},\ \mu_{18}$ – залежать від n і Ω. Отож,
$$[L(t)]^{\frac{1}{1-\alpha}} \leqslant \mu_{16}\Bigg[H(t) + \frac{1}{r_0}\int\limits_{\Omega_t} u_t^2 dx + \frac{(\mathrm{mes}\,\Omega)^{\frac{p-2}{p(1-2\alpha)}}\mu_{17}}{r_1\gamma_2}\int\limits_{\Omega_t} a_0(x)|u|^p dx +$$
$$+\frac{(\mathrm{mes}\,\Omega)^{\frac{p-2}{p(1-2\alpha)}}\mu_{18}}{r_1 A_0}\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i,j,s,l=1}^{n} a^{sl}_{ij}(x) u_{x_i x_j} u_{x_s x_l} dx\Bigg],$$
оскільки можемо прийняти, що $\varepsilon < 1$. Нехай
$$\mu_{19} = \max\left\{1;\quad \frac{1}{r_0};\quad \frac{(\mathrm{mes}\,\Omega)^{\frac{p-2}{p(1-2\alpha)}}\mu_{17}}{r_1\gamma_2};\quad \frac{(\mathrm{mes}\,\Omega)^{\frac{p-2}{p(1-2\alpha)}}\mu_{18}}{r_1 A_0}\right\}.$$
Тоді
$$[L(t)]^{\frac{1}{1-\alpha}} \leqslant \mu_{16}\mu_{19}\Bigg[H(t) + \int\limits_{\Omega_t} u_t^2 dx + \int\limits_{\Omega_t} a_0(x)|u|^p dx +$$
$$+\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i,j,s,l=1}^{n} a^{sl}_{ij}(x) u_{x_i x_j} u_{x_s x_l} dx\Bigg]. \tag{31}$$

Врахувавши нерівності (30) і (31), одержимо
$$L'(t) \geqslant \mu_{20}[L(t)]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{32}$$
де $\mu_{20} = \dfrac{\varepsilon\delta_7}{\mu_{16}\mu_{19}}$. Крім того, $L(0) = [H(0)]^{1-\alpha} + \varepsilon\int\limits_{\Omega_0} u_0 u_1 dx$. Оскільки $H(0) = \lambda > 0$, то зменшивши у разі потреби ε можемо вважати, що $L(0) \geqslant \left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^{1-\alpha} > 0$.

Нехай $\sigma = \dfrac{1}{1-\alpha}$ $(\sigma > 1)$. Тоді нерівність (32) можемо записати у вигляді
$$\frac{dL}{L^\sigma} \geqslant \mu_{20}. \tag{33}$$

Проінтегруємо обидві частини нерівності (33) від 0 до t. Будемо мати

$$L^{\sigma-1}(t) \geqslant \frac{1}{L^{1-\sigma}(0) - \mu_{20}t(\sigma-1)}. \tag{34}$$

Оскільки

$$H(t) \leqslant \frac{1}{p}\int\limits_{\Omega_t} a_0(x)|u|^p dx,$$

то врахувавши нерівності (31) і (34), одержимо таке: існує скінченне $T > 0$, для якого

$$\lim_{t\to T-0}\int\limits_{\Omega_t}\left[u_t^2 + |u|^p + \sum_{i,j=1}^{n} u_{x_i x_j}^2\right]dx = +\infty.$$

Одержане протиріччя завершує доведення теореми. $\square$

---

1. *Jaime E. Muñoz Rivera.* Smoothing Effect and Propagations of Singularities for Viscoelastic Plates / *Jaime E. Muñoz Rivera, Luci Harue Fatori.* // Journal of mathematical analysis and applications. – 1997. – Vol. 206. – P. 397-427.
2. *Похожаев С.И.* О краевых задачах для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений / *Похожаев С.И.* // Математический сборник. – 1975. – Т. 96, №1. – С. 152-166.
3. *Максудов Ф.Г.* Об одной задаче для нелинейного гиперболического уравнения высокого порядка с диссипациями на границе области / *Максудов Ф.Г., Алиев Ф.А.* // Докл. АН СССР. – 1991. – Т. 321, №4. – С. 673-676.
4. *Максудов Ф.Г.* Об одном квазилинейном гиперболическом уравнении / *Максудов Ф.Г., Алиев Ф.А.* // Докл. АН СССР. – 1988. – Т. 300, №6. – С. 1312-1315.
5. *Максудов Ф.Г.* Исследование многомерной смешанной задачи для одного класса нелинейных гиперболических уравнений / *Максудов Ф.Г., Худавердиев Ф.К.* // Докл. АН СССР. – 1990. – Т. 310, №3. – С. 539-542.
6. *Yoshida Norio.* On the zeros of solutions of beam equations / *Yoshida Norio.* // Ann. mat. pura ed appl. – 1988. – Vol. 151. – P. 389-398.
7. *Narazaki Takashi.* Global classical solutions of semilinear evolution equation / *Narazaki Takashi.* // Saitama Math. J. – 1986. – Vol. 4. – P. 11-34.
8. *Tsutsumi Masayoshi.* On the global solution of a certain nonlinear partial differential equations / *Tsutsumi Masayoshi, Lino Riichi.* // Proc. Japan. Acad. – 1969. – Vol. 45, №6. – P. 466-469.
9. *Ramos Oswaldo Ch.* Regularity property for the nonlinear beam operator / *Ramos Oswaldo Ch.* // Ann. Acad. bras. ciena. – 1989. – Vol. 61, №1 – P. 15-25.
10. *Nakao Mitsuhiro.* Global existence of classical solutions to the initial-boundary value problem of the semilinear wave equations with a degenerate dissipative term / *Nakao Mitsuhiro.* // Nonlinear Anal. Theory, Meth. and Appl. – 1990. – Vol. 15, №2 – P. 115-140.
11. *Pecher Hartmut.* Existenzsatze fur regular Losungen semilinearer Wellengleichungen / *Pecher Hartmut.* // Nachr. Akad. Wiss. Gottingen. 2. Math.-Phys. KL. – 1979. – Vol. 7. – P. 129-151.
12. *Santos M.L.* Global solutions and exponential decay for a nonlinear coupled system of beam equations of Kirchhoff type with memory in a domain with moving boundary / *Santos M.L., Soares U.R.* // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. – 2007. – Vol. 9. – P. 1-24.

13. *Micheletti A.M.* Multiple Nontrivial Solutions for a Floating Beam Equation via Critical Point Theory / *Micheletti A.M., Saccon C.* // Jurnal of Differential Equations. – 2001. – Vol. 170. – P. 157-179.
14. *Shishkov A.E.* Boundary blow-up for energy solutions of general multidimensional parabolic equations / *Shishkov A.E.* // Nonlinear Boundary Value Problems. – 1998. – Vol. 8. – P. 229-237.
15. *Шишков А.Е.* Граничные режимы с обострением для общих квазилинейных параболических уравнений в многомерных областях / *Шишков А.Е., Щелков А.Г.* // Матем. сборник. – 1999. – Т. 190, №3. – С. 129-160.
16. *Шишков А.Е.* Локализованные граничные режимы с обострением для общих квазилинейных параболических уравнений произвольного порядка / *Шишков А.Е.* // Труды Матем. института им. В.А. Стеклова. – 2002. – Т. 236. – С. 354-370.
17. *Shishkov A.E.* Saint-Venant principle in blow-up for higher order quasilinear parabolic equations / *Shishkov A.E., Galaktionov V.A.* // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. – 2003. – Vol. 133 (A). – P. 1075-1119.
18. *Galaktionov V.A.* Boundary blow-up localization for higher-order quasilinear parabolic equations: Hamilton-Jacobi asymptotics / *Galaktionov V.A., Shishkov A.E.* // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. – 2003. – Vol. 133 (A). – P. 1075-1119.
19. *Shishkov A.E.* Structure of boundary blow-up for higher order quasilinear parabolic PDE / *Shishkov A.E., Galaktionov V.A.* // Proc. Roy. Soc. London. A – 2004. – Vol. 460. – P. 3299-3325.
20. *Shishkov A.E.* Self-similar boundary blow-up for higher-order quasilinear parabolic equations / *Shishkov A.E., Galaktionov V.A.* // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. – 2005. – Vol. 135 (A). – P. 1195-1227.
21. *Гаевский Х.* Нелинейные операторные дифференциальные уравнения / *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* – М., 1978.
22. *Коддингтон Э.А.* Теория обыкновенных краевых задач / *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* – М., 1958.
23. *Демидович Б.П.* Леции по математической теории устойчивости / *Демидович Б.П.* – М., 1967.
24. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / *Лионс Ж.-Л.* – М., 1972.

AN INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE PLATE TYPE EQUATION

$\boxed{\text{Serhij LAVRENYUK}}$, **Halyna TORHAN**

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: torgan_g@yahoo.com

In the article there is considered the initial boundary value problem for the equation

$$u_{tt} + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} (a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j})_{x_sx_l} - \sum_{i=1}^{n}(a_i(x)|u_{x_i}|^{q-2}u_{x_i})_{x_i} + b_0(x)u_t-$$

$$-a_0(x)|u|^{p-2}u = 0$$

in a bounded domain. There obtained sufficient conditions the existence of a local solution and the nonexistence of a global solution.

Key words: plate type equation, mixed problem.

СМЕШАНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНКИ

Сергей ЛАВРЕНЮК, **Галина ТОРГАН**

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: torgan_g@yahoo.com

Рассмотрена смешаная задача для уравнения

$$u_{tt} + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} (a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j})_{x_sx_l} - \sum_{i=1}^{n}(a_i(x)|u_{x_i}|^{q-2}u_{x_i})_{x_i} + b_0(x)u_t-$$

$$-a_0(x)|u|^{p-2}u = 0$$

в ограниченной области. Получены достаточные условия существования локального решения и несуществование глобального решения.

Ключевые слова: уравнение типа колебания пластинки, смешаная задача.

Стаття надійшла до редколегії 27.03.2009

Прийнята до друку 12.06.2009

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2009.
Вип. 70. С. 122–127

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech. Math. 2009.
Is. 70. P. 122–127

УДК 517.53

БЛИЗЬКІСТЬ ДО ОПУКЛОСТІ ЦІЛОГО РОЗВ'ЯЗКУ ОДНОГО ЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З ПОЛІНОМІАЛЬНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Ярослав МАГОЛА, Мирослав ШЕРЕМЕТА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: m_m_sheremeta@list.ru

Досліджено близькість до опуклості цілого розв'язку лінійного диференціального рівняння

$$z^n w^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} (a_{n-j}^{(j)} z^{j+1} + a_{n-j+1}^{(j)} z^j) w^{(j)} = 0.$$

Ключові слова: ціла функція, диференціальні рівняння, близькість до опуклості.

1. Вступ. Однолиста аналітична в $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функція

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \qquad (1)$$

називається опуклою, якщо $f(\mathbb{D})$ – опукла область. Добре відомо [1, с. 203], що умова $\mathrm{Re}\{1 + zf''(z)/f'(z)\} > 0 (z \in \mathbb{D})$ є необхідною і достатньою для опуклості функції f в $\mathbb{D}$. Функція f називається [1, с. 583] близькою до опуклої в $\mathbb{D}$, якщо існує така опукла в $\mathbb{D}$ функція Φ, що $\mathrm{Re}\{f'(z)/\Phi'(z)\} > 0 (z \in \mathbb{D})$. Кожна близька до опуклої в $\mathbb{D}$ функція є однолистою в $\mathbb{D}$ і $f_1 \neq 0$ [1, с. 583]. Близька до опуклої в $\mathbb{D}$ функція f характеризується тим, що $f(\mathbb{D})$ – лінійно досяжна зовні область [1, с. 584], тобто $\mathbb{C} \backslash \overline{f(\mathbb{D})}$ можна заповнити проведеними з $\partial f(\mathbb{D})$ променями, які належать до $\mathbb{C} \backslash \overline{f(\mathbb{D})}$. Оскільки $f_1 \neq 0$, то звідси випливає, що функція (1) близька до опуклої в $\mathbb{D}$ тоді і лише тоді, коли близькою до опуклої в $\mathbb{D}$ є функція $f_1(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} (f_n/f_1) z^n$.

С. Шах [2], вивчаючи властивості цілих розв'язків диференціального рівняння

$$z^2 w'' + (a_1^{(1)} z^2 + a_2^{(1)} z) w' + (a_2^{(0)} z + a_3^{(0)}) w = 0, \qquad (2)$$

довів таку теорему.

Теорема A. *Нехай* $a_2^{(1)} > 0$ *і* $-1 \leqslant a_1^{(1)} < 0$. *Якщо або* $a_3^{(0)} = 0$ *і* $-a_2^{(1)} \leqslant a_2^{(0)} < 0$, *або* $a_2^{(1)} + a_3^{(0)} = 0$ *і* $-a_2^{(1)} \leqslant 2a_2^{(0)} < 0$, *то диференціальне рівняння* (2) *має цілий розв'язок* (1) *такий, що всі похідні* $f^{(j)}$ $(j \in \mathbb{Z}_+)$ *є близькими до опуклих в* $\mathbb{D}$ *функціями і* $\ln M_f(r) = (1+o(1))|a_1^{(1)}|r$ *при* $r \to +\infty$, *де* $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$.

Безпосереднім узагальненням рівняння (2) є лінійне диференціальне рівняння

$$z^n w^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} (a_{n-j}^{(j)} z^{j+1} + a_{n-j+1}^{(j)} z^j) w^{(j)} = 0. \tag{3}$$

Мета нашої праці – дослідити властивості цілого розв'язку рівняння (3), тобто отримати аналог теореми A для $n \geqslant 3$.

2. Рекурентна формула для коефіцієнтів і зростання розв'язку. Припустимо, що функція (1) є розв'язком рівняння (3), і приймемо $a_1^{(n)} = 1$. Підставляючи (1) в (3) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях z (для скорочення обсягу статті деталі опустимо), отримаємо таке твердження.

Лема 1. *Функція* (1) *є розв'язком рівняння* (3) *тоді і лише тоді, коли*

$$a_{n+1}^{(0)} f_0 = 0, \tag{4}$$

$$(a_{n+1}^{(0)} + a_n^{(1)}) f_1 + a_n^{(0)} f_0 = 0 \tag{5}$$

і для $s \geqslant 2$

$$\sum_{k=0}^{\min\{s,n\}} a_{n+1-k}^{(k)} \frac{s!}{(s-k)!} f_s + \sum_{k=0}^{\min\{s,n\}-1} a_{n-k}^{(k)} \frac{(s-1)!}{(s-k-1)!} f_{s-1} = 0. \tag{6}$$

Для $s \geqslant n$ з (6) одержуємо

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(s-k)!} s f_s + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_{n-k}^{(k)}}{(s-k-1)!} f_{s-1} = 0. \tag{7}$$

Оскільки $a_1^{(n)} = 1$, то

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(s-k)!} = \frac{a_1^{(n)}}{(s-n)!} + \frac{a_2^{(n-1)}}{(s-n+1)!} + \dots + \frac{a_{n-1}^{(0)}}{s!} = \frac{1+o(1)}{(s-n)!}, \quad s \to \infty.$$

З іншого боку, якщо $a_1^{(n-1)} \neq 0$, то подібно

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_{n-k}^{(k)}}{(s-k-1)!} = \frac{(1+o(1)) a_1^{(n-1)}}{(s-n)!}, \quad s \to \infty.$$

Тому з (7) випливає асимптотична рівність $f_s = -\dfrac{(1+o(1))}{s} a_1^{(n-1)} f_{s-1} (s \to \infty)$, звідки звичайними методами неважко показати, що правильне таке твердження.

Лема 2. *Якщо* $a_1^{(n-1)} \neq 0$, *то для цілого розв'язку* (1) *диференціального рівняння* (3) $\ln M_f(r) = (1+o(1))|a_1^{(n-1)}|r$ *при* $r \to +\infty$.

3. Близькість до опуклості. Як і в [2], використовуватимемо такий критерій Александера [3, с. 9].

Лема 3. *Якщо*

$$f(z) = z + \sum_{s=2}^{\infty} f_s z^s \tag{8}$$

і

$$1 \geqslant 2f_2 \geqslant 3f_3 \geqslant \cdots \geqslant (s-1)f_{s-1} \geqslant sf_s \geqslant \cdots \geqslant 0, \tag{9}$$

то f є близькою до опуклої в $\mathbb{D}$.

З огляду на лему 3, будемо спочатку шукати розв'язок диференціального рівняння (3) у вигляді (8). Тоді $f_0 = 0, f_1 = 1$, з (5) випливає рівність $a_{n+1}^{(0)} + a_n^{(1)} = 0$, а з (6) для $s \geqslant 2$ маємо

$$sf_s = -\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\min\{s,n\}-1} \frac{a_{n-k}^{(k)}}{(s-k-1)!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{\min\{s,n\}} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(s-k)!}} f_{s-1} = -\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\min\{s,n\}-1} \frac{a_{n-k}^{(k)}}{(s-k-1)!}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{\min\{s,n\}} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(s-k)!} + \frac{a_{n+1}^{(0)}}{s!}} f_{s-1} =$$

$$= -\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\min\{s,n\}-1} \frac{a_{n-k}^{(k)}}{(s-k-1)!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{\min\{s,n\}-1} \frac{a_{n-k}^{(k+1)}}{(s-k-1)!} + \frac{a_{n+1}^{(0)}}{s!}} f_{s-1}. \tag{10}$$

Використовуючи (10), неважко довести таке твердження.

Лема 4. *Нехай $a_{n+1}^{(0)} + a_n^{(1)} = 0$, $a_{n-k}^{(k)} \leqslant 0$, та $a_{n-k}^{(k+1)} \geqslant 0$ для всіх $0 \leqslant k \leqslant n-1$ і $\sum_{k=1}^{n-1} |a_{n-k}^{(k)}|^2 > 0$. Тоді, якщо $|a_{n-k}^{(k)}| \leqslant a_{n-k}^{(k+1)}$ для всіх $0 \leqslant k \leqslant n-1$, то існує цілий розв'язок (8) диференціального рівняння (3) такий, що всі похідні $f^{(j)}$ ($j \in \mathbb{Z}_+$) є близькими до опуклих в $\mathbb{D}$ функціями.*

Доведення. З рівності (10) для $s \geqslant 2$ маємо

$$sf_s = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\min\{s,n\}-1} \frac{|a_{n-k}^{(k)}|}{(s-k-1)!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{\min\{s,n\}-1} \frac{a_{n-k}^{(k+1)}}{(s-k-1)!} + \frac{a_{n+1}^{(0)}}{s!}} f_{s-1} \leqslant \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\min\{s,n\}-1} \frac{a_{n-k}^{(k+1)}}{(s-k-1)!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{\min\{s,n\}-1} \frac{a_{n-k}^{(k+1)}}{(s-k-1)!}} f_{s-1} \leqslant (s-1)f_{s-1},$$

тобто виконується умова (9) і за лемою 3 функція (8) є близькою до опуклої в $\mathbb{D}$.

Нехай тепер $p \in \mathbb{N}$ – фіксоване число. Оскільки

$$f^{(p)}(z) = \sum_{s=0}^{\infty} f_s^{(p)} z^s, \qquad f_s^{(p)} = \frac{(s+p)!}{s!} f_{s+p},$$

то похідна $f^{(p)}$ є близькою до опуклої в $\mathbb{D}$ тоді і лише тоді, коли функція

$$F_p(z) = \frac{f^{(p)}(z) - f_0^{(p)}}{f_1^{(p)}} = z + \sum_{s=2}^{\infty} f_{s,p} z^s$$

є близькою до опуклої в $\mathbb{D}$, де $f_{0,p} = 0$, $f_{1,p} = 1$ і для $s \geqslant 2$, з огляду на (8),

$$f_{s,p} = \frac{f_s^{(p)}}{f_1^{(p)}} = \frac{(s+p)!}{s!(1+p)!} \frac{f_{s+p}}{f_{1+p}} =$$

$$= -\frac{(s+p)!}{s!(1+p)! f_{1+p}} \frac{\sum\limits_{k=0}^{\min\{s+p,n\}-1} \dfrac{a_{n-k}^{(k)}}{(s+p-k-1)!}}{(s+p) \sum\limits_{k=0}^{\min\{s+p,n\}-1} \dfrac{a_{n-k}^{(k+1)}}{(s+p-k-1)!} + \dfrac{a_{n+1}^{(0)}}{(s+p)!}} f_{s+p-1} =$$

$$= -\frac{(s+p)!}{s!(1+p)! f_{1+p}} \frac{\sum\limits_{k=0}^{\min\{s+p,n\}-1} \dfrac{a_{n-k}^{(k)}}{(s+p-k-1)!}}{(s+p) \sum\limits_{k=0}^{\min\{s+p,n\}-1} \dfrac{a_{n-k}^{(k+1)}}{(s+p-k-1)!} + \dfrac{a_{n+1}^{(0)}}{(s+p)!}} \times$$

$$\times \frac{(s-1)!(1+p)! f_{1+p}}{(s+p-1)!} f_{s-1,p} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sum\limits_{k=0}^{\min\{s+p,n\}-1} \dfrac{|a_{n-k}^{(k)}|}{(s+p-k-1)!}}{s \sum\limits_{k=0}^{\min\{s+p,n\}-1} \dfrac{a_{n-k}^{(k+1)}}{(s+p-k-1)!}} f_{s-1,p} \leqslant \frac{f_{s-1,p}}{s},$$

звідки за лемою 3 $f^{(p)}$ є близькою до опуклої в $\mathbb{D}$ функцією. Лему 4 доведено. $\square$

Умови леми 1 виконуються також, якщо $a_{n+1}^{(0)} = 0$ і $a_n^{(0)} \neq 0$. Тоді, якщо $f_1 = 1$, то $f_0 = a_n^{(1)}/a_n^{(0)}$, і отже, розв'язок диференціального рівняння (3) треба шукати у вигляді

$$f(z) = \frac{a_n^{(1)}}{a_n^{(0)}} + z + \sum_{s=2}^{\infty} f_s z^s, \tag{11}$$

де коефіцієнти f_s для $s \geqslant 2$ визначаються рекурентною формулою (6), тобто тією ж рекурентною формулою (10), але з $a_{n+1}^{(0)} = 0$. Тому, повторюючи доведення леми 4, отримуємо таку лему.

Лема 5. *Нехай $a_{n+1}^{(0)} = 0$, $a_n^{(0)} < 0$ і $a_{n-k}^{(k)} \leqslant 0$ та $a_{n-k}^{(k+1)} \geqslant 0$ для всіх $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Тоді, якщо $|a_{n-k}^{(k)}| \leqslant a_{n-k}^{(k+1)}$ для всіх $0 \leqslant k \leqslant n-1$, то існує цілий розв'язок* (11) *диференціального рівняння* (3) *такий, що всі похідні $f^{(j)} (j \in \mathbb{Z}_+)$ є близькими до опуклих в $\mathbb{D}$ функціями.*

Об'єднуючи леми 2, 4, і 5, у результаті отримаємо таку теорему.

Теорема 1. *Нехай* $a_{n-k}^{(k)} \leqslant 0$, $a_{n-k}^{(k+1)} \geqslant 0$ *і* $|a_{n-k}^{(k)}| \leqslant a_{n-k}^{(k+1)}$ *для всіх* $0 \leqslant k \leqslant n-1$. *Припустимо, що* $a_1^{(n-1)} < 0$ *і або* $a_{n+1}^{(0)} + a_n^{(1)} = 0$, *або* $a_{n+1}^{(0)} = 0$ *і* $a_n^{(0)} < 0$. *Тоді існує цілий розв'язок* (1) *диференціального рівняння* (3) *такий, що всі похідні* $f^{(j)}$ $(j \in \mathbb{Z}_+)$ *є близькими до опуклих в* $\mathbb{D}$ *функціями і* $\ln M_f(r) = (1+o(1))|a_1^{(n-1)}|r$ *при* $r \to +\infty$.

На завершення зауважимо, що для $n = 2$, враховуючи рівність $a_1^{(n)} = 1$, з теореми 1 отримуємо таке твердження.

Наслідок 1. *Нехай* $a_2^{(1)} > 0$, $-1 \leqslant a_1^{(1)} < 0$ *і* $-a_2^{(1)} \leqslant a_2^{(0)} < 0$. *Якщо або* $a_3^{(0)} = 0$, *або* $a_2^{(1)} + a_3^{(0)} = 0$, *то диференціальне рівняння* (2) *має цілий розв'язок* (1) *такий, що всі похідні* $f^{(j)}(j \in \mathbb{Z}_+)$ *є близькими до опуклих в* $\mathbb{D}$ *функціями і* $\ln M_f(r) = (1+o(1))|a_1^{(1)}|r$ *при* $r \to +\infty$.

Цей наслідок дещо загальніший від теореми А, бо з умови $-a_2^{(1)} \leqslant 2a_2^{(0)} < 0$ випливає умова $-a_2^{(1)} \leqslant a_2^{(0)} < 0$.

1. *Markovitz H.M.* Portfolio Selection / *Markovitz H.M.* // Journal of Finance. – Vol. 7. – 1952 (March) – P. 77-91.
2. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного / *Голузин Г.М.* – М., 1966.
3. *Shah S.M.* Univalence of a function f and its successive derivatives when f satisfies a differential equation, II / *Shah S.M.* // J. Math. anal. and appl. – 1989. – Vol. 142. – P. 422-430.
4. *Goodman A.W.* Ivalent functions / *Goodman A.W.* // Mariner Publishing. Co., – Vol. II. – 1983.

CLOSE-TO-CONVEXITY OF ENTIRE SOLUTION OF A LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION WITH POLYNOMIAL COEFFICIENTS

Yaroslav MAHOLA, Myroslav SHEREMETA

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: m_m_sheremeta@list.ru

Close-to-convexity of an entire solution of a linear differential equation

$$z^n w^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} (a_{n-j}^{(j)} z^{j+1} + a_{n-j+1}^{(j)} z^j) w^{(j)} = 0$$

is investigated.

Key words: entire function, differential equation, close-to-convexity.

БЛИЗОСТЬ К ВЫПУКЛОСТИ ЦЕЛОГО РЕШЕНИЯ ОДНОГО ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Ярослав МАГОЛА, Мирослав ШЕРЕМЕТА

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: m_m_sheremeta@list.ru

Исследована близость к выпуклости целого решения линейного дифференциального уравнения

$$z^n w^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} (a_{n-j}^{(j)} z^{j+1} + a_{n-j+1}^{(j)} z^j) w^{(j)} = 0.$$

Ключевые слова: целая функция, дифференциальные уравнения, близость к выпуклости.

Стаття надійшла до редколегії 20.03.2008

Прийнята до друку 12.06.2009

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2009. *Ser. Mech. Math. 2009.*
Вип. 70. С. 128–142 *Is. 70. P. 128–142*

УДК 517.5

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ТА ФРАКТАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ КЛАСУ САМОАФІННИХ ФУНКЦІЙ

Микола ПРАЦЬОВИТИЙ[1], **Олексій ПАНАСЕНКО**[2]

[1]*Інститут математики НАН України,*
01601, Київ, вул. Терещенківська, 3
e-mail: prats4@yandex.ru
[2]*Вінницький державний педагогічний університет ім. М. Коцюбинського,*
21100, Вінниця, вул. Острозького, 32
e-mail: panasenko_alex@bigmir.net

Розглянуто сім'ю неперервних функцій, яка містить класи ніде не диференційовних та сингулярних функцій, і задається як інваріантна множина системи ітерованих функцій. Досліджено диференціальні, а також деякі фрактальні властивості функцій цього класу.

Ключові слова: самоафінна функція, розмірність Хаусдорфа-Безіковича.

1. Вступ. Означимо дійсну функцію так. Нехай $s \geqslant 2$ і маємо два s-вимірні вектори Q та Q' (впорядковані набори s чисел)

$$Q = \{a_0, a_1, \ldots, a_{s-1}\}, \ a_i > 0 \ (i = \overline{0, s-1}), \ \sum_{i=0}^{s-1} a_i = 1; \tag{1}$$

$$Q' = \{b_0, b_1, \ldots, b_{s-1}\}, \text{ де } b_i \in \mathbb{R}, 0 < \sum_{i=0}^{m-1} b_i < 1, \ m = \overline{1, s}, \sum_{i=0}^{s-1} b_i = 1. \tag{2}$$

Нехай

$$T_0(x, y) = (a_0 x, b_0 y),$$
$$T_m(x, y) = \left(a_m x + \sum_{i=0}^{m-1} a_i ; b_m y + \sum_{i=0}^{m-1} b_i \right),$$

$m = 1, 2, \ldots, s-1$. Легко довести, що T_i – стискуючі відображення, тому сім'я $\{T_0, T_1, \ldots, T_{s-1}\}$ є системою ітерованих функцій. Відомо [1], що система ітерованих функцій визначає єдину множину F таку, що $F = \bigcup\limits_{i=0}^{s-1} T_i(F)$. Нижче ми покажемо, що множина F є графіком неперервної на $[0, 1]$ функції.

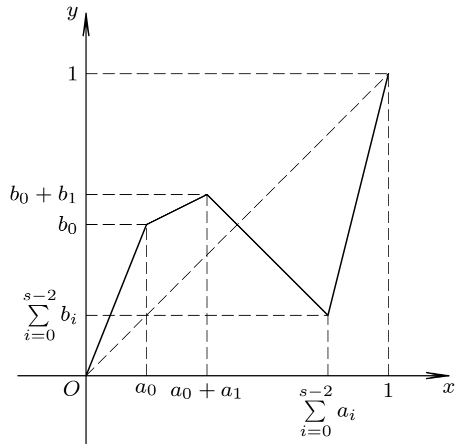


Рис. 1. Графік функції $F_1(x)$ при $s=4$, $Q=\left\{\frac{1}{5};\frac{1}{5};\frac{2}{5};\frac{1}{5}\right\}$, $Q'=\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{10};-\frac{2}{5};\frac{4}{5}\right\}$

Задамо геометричну інтерпретацію побудови цієї множини. Нехай графіком функції $F_0(x)$ є діагональ одиничного квадрата, а графіком $F_1(x)$ – ламана, що послідовно сполучає точки

$$(0,0),(a_0,b_0),(a_0+a_1,b_0+b_1),\ldots,\left(\sum_{i=0}^{p}a_i,\sum_{i=0}^{p}b_i\right),\ldots,\left(\sum_{i=0}^{s-1}a_i,\sum_{i=0}^{s-1}b_i\right)=(1,1),$$

тобто $F_1(x)=\bigcup\limits_{i=0}^{s-1}T_i(F_0(x))$. Ці точки однозначно визначаються векторами Q та Q', причому вони належать внутрішності квадрата $[0,1]\times[0,1]$ (на підставі обмежень на елементи наборів Q та Q'). Казатимемо, що над відрізком $F_0(x)$ виконано перетворення T. З кожним із s відрізків одержаної ламаної $F_1(x)$ зробимо аналогічно (піддамо їх перетворенню T). Продовжимо цей процес далі й означимо функціональну послідовність $(F_n(x))$ таку, що $F_n(x)=T(F_{n-1}(x))=\bigcup\limits_{i=0}^{s-1}T_i(F_{n-1}(x))$. Доведемо, що вона збігається рівномірно.

Нагадаємо [4], що Q-*зображенням* дійсного числа $x\in[0;1]$ називається його подання у вигляді

$$x=\beta_{\alpha_1}+\sum_{k=2}^{\infty}\left[\beta_{\alpha_k}\prod_{j=1}^{k-1}a_{\alpha_j}\right]\equiv\Delta^{Q}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots},$$

де a_i задовольняють (1), $\beta_m=\sum\limits_{i=0}^{m-1}a_i$, $\alpha_k\in N^0_{s-1}$. Деякі точки мають по два різних подання (з періодом 0 та $s-1$) і називаються Q-раціональними, решта – єдине, і називаються Q-ірраціональними.

Нехай $b_{\max} = \max\{|b_0|, |b_1|, \ldots, |b_{s-1}|\}$. Зазначимо, що для усіх $p \in \mathbb{N}$ і $x = \Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$:

$$F_{n+p}(x) \geqslant \min\left\{F_n\left(\Delta^Q_{\alpha_1\ldots\alpha_n 00\ldots}\right), F_n\left(\Delta^Q_{\alpha_1\ldots\alpha_n(s-1)(s-1)\ldots}\right)\right\} = M_1(n,x),$$

$$F_{n+p}(x) \leqslant \max\left\{F_n\left(\Delta^Q_{\alpha_1\ldots\alpha_n 00\ldots}\right), F_n\left(\Delta^Q_{\alpha_1\ldots\alpha_n(s-1)(s-1)\ldots}\right)\right\} = M_2(n,x).$$

Крім того, для кожного $x \in [0,1]$ та довільного $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне n, що $b^n_{\max} < \varepsilon$. Тоді

$$|F_{n+p}(x) - F_n(x)| \leqslant |M_2(n,x) - M_1(n,x)| \leqslant b^n_{\max} < \varepsilon \quad \text{для усіх } p \in \mathbb{N}.$$

Отож, оскільки n обирається незалежно від x, то функціональна послідовність $(F_n(x))$ збігається рівномірно, а врахувавши те, що кожний член послідовності є неперервною функцією на відрізку $[0,1]$, стверджуємо, що існує функція

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x), \tag{3}$$

яка є неперервною на відрізку $[0,1]$. Нехай $D = \{(x, f(x))\colon x \in [0;1]\}$. Тоді $D = \bigcup\limits_{i=0}^{s-1} T_i(D)$, тобто множини D та F збігаються.

2. Аналітичне подання досліджуваних функцій.

Лема 1. *Якщо* $\Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ *– Q-зображення числа* $x \in [0;1]$*, то значення функції* (3)*, що визначаються наборами чисел* (1) *та* (2)*, може бути обчислене за формулою*

$$f(x) = \gamma_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left[\gamma_{\alpha_k}\prod_{j=1}^{k-1} b_{\alpha_j}\right], \tag{4}$$

де $\gamma_m = \sum\limits_{i=0}^{m-1} b_i$*, що символічно позначатимемо* $f(x) \equiv \Delta^{Q'}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$.

Доведення. Оскільки двом різним Q-зображенням Q-раціонального числа x відповідає те саме значення функції:

$$\Delta^{Q'}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n-1(s-1)(s-1)\ldots} - \Delta^{Q'}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 00\ldots} = \gamma_{\alpha_n-1}\cdot\prod_{j=1}^{n-1} b_{\alpha_j} +$$

$$+\gamma_{s-1}\cdot\prod_{j=1}^{n-1} b_{\alpha_j}\cdot b_{\alpha_n-1}\left(1 + b_{s-1} + b^2_{s-1} + \ldots\right) - \gamma_{\alpha_n}\cdot\prod_{j=1}^{n-1} b_{\alpha_j} =$$

$$= \gamma_{\alpha_n-1}\cdot\prod_{j=1}^{n-1} b_{\alpha_j} + \gamma_{s-1}\cdot\prod_{j=1}^{n-1} b_{\alpha_j}\cdot b_{\alpha_n-1}\frac{1}{1-b_{s-1}} - \gamma_{\alpha_n}\cdot\prod_{j=1}^{n-1} b_{\alpha_j} =$$

$$= (\gamma_{\alpha_n-1} + b_{\alpha_n-1} - \gamma_{\alpha_n})\cdot\prod_{j=1}^{n-1} b_{\alpha_j} = 0,$$

то функція $f(x)$ означена коректно.

Доведемо, що означена формулою (4) функція є неперервною. Для цього достатньо показати, що для довільної точки x_0 відрізка $[0,1]$

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)-f(x_0)| = 0.$$

Доведемо це спочатку для Q-ірраціональної точки x_0. Яке б не було число $x \in (0,1)$ існує номер m такий, що $\alpha_i(x) = \alpha_i(x_0)$ для всіх $i = \overline{0, m-1}$, але $\alpha_m(x) \neq \alpha_m(x_0)$. Тоді умова $x \to x_0$ рівносильна умові $m \to \infty$ і на підставі (4)

$$|f(x)-f(x_0)| = \left|\sum_{k=m}^{\infty}\left[\gamma_{\alpha_k}\prod_{j=1}^{k-1} b_{\alpha_j}\right]\right| \leqslant \left|\sum_{k=m}^{\infty}\left[\prod_{j=1}^{k-1} b_{\alpha_j}\right]\right| \leqslant \sum_{k=m}^{\infty}\left[\prod_{j=1}^{k-1} |b_{\alpha_j}|\right] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=m}^{\infty}\left[\prod_{j=1}^{k-1} b_{\max}\right] = \frac{(b_{\max})^{m-1}}{1-b_{\max}} \to 0 (m\to\infty),$$

де $b_{\max} = \max\{|b_0|, |b_1|, \ldots, |b_{s-1}|\}$, що і доводить неперервність функції (4) в кожній Q-ірраціональній точці.

Доведення неперервності в Q-раціональній точці x_0 проводиться аналогічно, але в два етапи. Спочатку доводиться неперервність функції зліва від точки x_0 (тут ліпше використати Q-зображення з періодом $(s-1)$), а потім справа (в цьому випадку треба використати подання з періодом (0)).

Тепер нехай $f(x)$ – функція, визначена формулою (3). Тоді очевидно, що значення цієї функції в Q-раціональній точці $x_0 = \Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 00\ldots}$ дорівнює $F_n(x_0)$. Але

$$F_n(x_0) = \gamma_{\alpha_1} + \gamma_{\alpha_2}\cdot b_{\alpha_1} + \gamma_{\alpha_3}\cdot b_{\alpha_1}b_{\alpha_2} + \cdots + \gamma_{\alpha_n}\cdot b_{\alpha_1}b_{\alpha_2}\ldots b_{\alpha_{n-1}},$$

де $\gamma_0 = 0$, $\gamma_m = \sum\limits_{i=0}^{m-1} b_i$, $m = \overline{1, s-1}$. Отож, в Q-раціональних точках значення функцій, описаних формулами (3) і (4), збігаються. З того, що вони неперервні, випливає, що значення і в Q-ірраціональних точках повинні збігатися, тобто формули (3) і (4) визначають ту саму функцію. □

Зауважимо, що описаний клас функцій містить в собі функції, властивості яких досліджували раніше. Зокрема, в [2] досліджуються диференціальні властивості класу однопараметричних неперервних функцій, які в наших позначеннях відповідають наборам $Q = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$ та $Q' = \{a, 1-2a, a\}$, $a \in (0,1)$. Останньому класу належать сингулярна функція Кантора (при $a = \frac{1}{2}$), а також ніде не диференційовна функція Бурбакі [3, с. 28] (при $a = \frac{2}{3}$). Крім того, зазначимо таке: якщо $a_i = b_i$, для всіх $i = \overline{0, s-1}$, то $f(x) \equiv x$ на $[0,1]$. Надалі виключимо останній випадок із розгляду, тобто припускатимемо, що існує таке $j \in \{0, \ldots, s-1\}$, для якого $a_j \neq b_j$.

3. Диференціальні властивості досліджуваних функцій. З теореми Лебега про диференційовність монотонної функції випливає досить очевидна лема.

Лема 2. *Нехай $f(x)$ – досліджувана функція, що визначається векторами (1) і (2) і задається аналітично формулою (4). Якщо $b_i \geqslant 0$ для кожного $i = \overline{0, s-1}$, то функція $f(x)$ є неспадною, тому диференційовною майже скрізь.*

Теорема 1. *Для диференційовності функції $f(x)$, що задається формулою (4), в Q-раціональній точці $x_0 = \Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k(0)}$ необхідно і достатньо, щоб виконувались умови $b_0 < a_0, b_{s-1} < a_{s-1}$.*

Доведення. Необхідність. Нехай функція $f(x)$ диференційовна в Q-раціональній точці $x_0 = \Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k(0)}$. Покажемо, що в цьому випадку $b_0 < a_0$ і $b_{s-1} < a_{s-1}$.

Доведення проведемо в два етапи. Спочатку покажемо, що для диференційовності справа необхідною є умова $b_0 < a_0$. Розглянемо послідовність (x_m) таку, що $x_m = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n \underbrace{0\ldots0}_{m}(s-1)(s-1)\ldots}$. Очевидно, що $x_m \to x_0$ $(m \to \infty)$. Тоді

$$x_m - x_0 = \prod_{j=1}^{k+m} a_{\alpha_j}, \quad f(x_m) - f(x_0) = \prod_{j=1}^{k+m} b_{\alpha_j},$$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{f(x_m) - f(x_0)}{x_m - x_0} = \lim_{m\to\infty} \prod_{j=1}^{k+m} \frac{b_{\alpha_j}}{a_{\alpha_j}} = \prod_{j=1}^{k} \frac{b_{\alpha_j}}{a_{\alpha_j}} \cdot \lim_{m\to\infty} \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^m, \tag{5}$$

причому ця границя скінченна при $b_0 \leqslant a_0$.

Доведемо таке: коли виконується рівність $b_0 = a_0$, то функція недиференційовна в точці x_0. З цією метою розглянемо іншу послідовність (x_m), для якої $x_m = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n \underbrace{0\ldots0}_{m} p(0)\ldots}$, де $p \in \{1, \ldots, s-1\}$ таке, що $\gamma_p \neq \beta_p$. Таке p існує, оскільки в іншому випадку, як вже зазначалось, $f(x) \equiv x$. Очевидно, що $x_m \to x_0$ $(m \to \infty)$. Тоді

$$x_m = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n \underbrace{0\ldots0}_{m}(p-1)(s-1)(s-1)\ldots}$$

$$x_m - x_0 = \prod_{j=1}^{k+m} a_{\alpha_j} \cdot \beta_p, \quad f(x_m) - f(x_0) = \prod_{j=1}^{k+m} b_{\alpha_j} \cdot \gamma_p,$$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{f(x_m) - f(x_0)}{x_m - x_0} = \frac{\gamma_p}{\beta_p} \cdot \lim_{m\to\infty} \prod_{j=1}^{k+m} \frac{b_{\alpha_j}}{a_{\alpha_j}} = \frac{\gamma_p}{\beta_p} \cdot \prod_{j=1}^{k} \frac{b_{\alpha_j}}{a_{\alpha_j}},$$

що не збігається із (5).

Доведення того, що для диференційовності зліва необхідною є умова $b_{s-1} < a_{s-1}$, проводиться аналогічно, але треба використати подання числа x_0 з періодом $(s-1)$.

Достатність. Нехай вихідні вектори Q та Q' такі, що $b_0 < a_0$ і $b_{s-1} < a_{s-1}$. Використаємо умову $b_0 < a_0$ для доведення того, що функція $f(x)$ диференційовна справа в Q-раціональній точці $x_0 = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k(0)}$. Нехай (x_n) – довільна послідовність, яка збігається справа до точки x_0. Тоді, очевидно, існує такий номер n_0, що для всіх $n > n_0$: $x_n = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k \underbrace{0\ldots0}_{m_n} \alpha'_{k+m_n+1}\alpha'_{k+m_n+2}\ldots}$, $\alpha'_{k+m_n+1} \neq 0$ і умова $x_n \to x_0$

рівносильна умові $m_n \to \infty$. Складемо відношення, позначивши для спрощення запису m_n через m

$$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=\frac{\sum\limits_{i=k+m+1}^{\infty}\gamma_{\alpha'_i}\prod\limits_{j=1}^{i-1}b_{\alpha'_i}}{\sum\limits_{i=k+m+1}^{\infty}\beta_{\alpha'_i}\prod\limits_{j=1}^{i-1}a_{\alpha'_i}}=\prod_{i=1}^{k}\frac{b_{\alpha_j}}{a_{\alpha_j}}\left(\frac{b_0}{a_0}\right)^m\frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty}\gamma_{\alpha'_{k+m+i}}\prod\limits_{j=1}^{i-1}b_{\alpha'_{k+m+j}}}{\sum\limits_{i=1}^{\infty}\beta_{\alpha'_{k+m+i}}\prod\limits_{j=1}^{i-1}a_{\alpha'_{k+m+j}}}.$$

Проте сума $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\beta_{\alpha'_{k+m+i}}\prod\limits_{j=1}^{i-1}a_{\alpha'_{k+m+i}}$ є Q-зображенням числа $x=\Delta_{\alpha_{k+m+1}\alpha_{k+m+2}\dots}$, яке належить $[a_0;1]$. Аналогічно сума $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\beta_{\alpha'_{k+m+i}}\prod\limits_{j=1}^{i-1}a_{\alpha'_{k+m+i}}$ збігається до деякого числа $y\in[0;1]$. Тоді, очевидно, для довільного набору $\alpha_{k+m+1},\alpha_{k+m+2}\dots$ виконується оцінка $0\leqslant\frac{y}{x}\leqslant\frac{1}{a_0}$. Врахувавши, що $\left(\frac{b_0}{a_0}\right)^m\to0$ при $m\to\infty$, знаходимо

$$\lim_{m\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=0$$

для кожної послідовності (x_n). Отже, функція $f(x)$ диференційовна справа в Q-раціональній точці, причому значення похідної в цій точці дорівнює нулю.

Аналогічно можна показати, що з умови $b_{s-1}<a_{s-1}$ випливає диференційовність функції зліва в Q-раціональній точці x_0. Для цього варто використати Q-зображення точки x_0, яке має період $(s-1)$. □

Легко довести таке твердження.

Лема 3. *Нехай $g(x)$ – деяка функція дійсної змінної визначена на $[0,1]$. Нехай $x_0\in[0,1]$ і (x'_n) і (x''_n) – дві послідовності дійсних чисел такі, що $x'_n\leqslant x_0\leqslant x''_n$ для кожного n і $\lim\limits_{n\to\infty}x'_n=x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty}x''_n=x_0$. Якщо ця функція диференційовна в точці $x_0\in[0,1]$, то*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(x''_n)-g(x'_n)}{x''_n-x'_n}=g'(x_0).$$

Отож, якщо існують дві пари послідовностей (x'_n), (x''_n) і (y'_n), (y''_n), які задовольняють умови леми 3, але

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(x''_n)-g(x'_n)}{x''_n-x'_n}\neq\lim_{n\to\infty}\frac{g(y''_n)-g(y'_n)}{y''_n-y'_n},$$

то функція $g(x)$ недиференційовна в точці x_0.

Теорема 2. *Нехай $f(x)$ – досліджувана функція, що визначається наборами (1) і (2) і задається формулою (4). Якщо $|b_i|\geqslant a_i$ для кожного $i=\overline{0,s-1}$, причому хоча б для одного $p\in\{0,1,\dots,s-1\}$ $|b_p|>a_p$, то функція $f(x)$ є ніде не диференційовною.*

Доведення. Недиференційовність функції в Q-раціональній точці x_0 є наслідком теореми 1.

Нехай x_0 – деяке Q-ірраціональне число відрізка $[0;1]$: $x_0=\Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}$, тоді $f(x_0)=\Delta^{Q'}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}$. Нехай також

$$x'_n=\Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n00\dots0\dots}\quad\text{і}\quad x''_n=\Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n(s-1)(s-1)\dots(s-1)\dots}$$

– два Q-раціональних числа. Очевидно, що $x'_n \leqslant x_0 \leqslant x''_n$. Тоді $f(x''_n) - f(x'_n) = \prod\limits_{k=1}^{n} b_{\alpha_k}$, а $x''_n - x'_n = \prod\limits_{k=1}^{n} a_{\alpha_k}$. З цього виливає, що

$$\frac{f(x''_n) - f(x'_n)}{x''_n - x'_n} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} b_{\alpha_k}}{\prod\limits_{k=1}^{n} a_{\alpha_k}}.$$

Згідно з лемою 3, якщо функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0, то

$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x''_n) - f(x'_n)}{x''_n - x'_n} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{b_{\alpha_k}}{a_{\alpha_k}}. \tag{6}$$

Зауважимо, що модуль останньої границі не менший одиниці. Тому $f'(x_0) \neq 0$.

Розглянемо окремо два випадки:

1) $a_{s-1} \neq b_{s-1}$;
2) $a_{s-1} = b_{s-1}$.

Випадок 1. Нехай $a_{s-1} \neq b_{s-1}$. Яким би не було Q-ірраціональне число $x_0 = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ можна виділити таку нескінченну послідовність (j_n), що усі $\alpha_{j_n} < s-1$. Нехай $y'_n = \Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2,\ldots,\alpha_{j_n-1}00\ldots0\ldots}$ і $y''_n = \Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2,\ldots,\alpha_{j_n-1}(s-1)00\ldots0\ldots}$. Тоді $y'_n \leqslant x_0 \leqslant y''_n$ і

$$f(y''_n) - f(y'_n) = (1 - b_{s-1}) \cdot \prod_{k=1}^{j_n-1} b_{\alpha_k};$$

$$y''_n - y'_n = (1 - a_{s-1}) \cdot \prod_{k=1}^{j_n-1} a_{\alpha_k}.$$

Якщо похідна в точці x_0 існує, то

$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(y''_n) - f(y'_n)}{y''_n - y'_n} = \frac{1 - b_{s-1}}{1 - a_{s-1}} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{j_n-1} \frac{b_{\alpha_k}}{a_{\alpha_k}} = \frac{1 - b_{s-1}}{1 - a_{s-1}} \cdot f'(x_0),$$

звідки $1 - b_{s-1} = 1 - a_{s-1}$, тобто $b_{s-1} = a_{s-1}$, що суперечить припущенню.

Розглянемо тепер випадок, коли $a_{s-1} = b_{s-1}$. Згідно з умовою теореми існує таке p, що $\beta_p \neq \gamma_p$, тобто, що $\sum\limits_{i=0}^{p-1} a_i \neq \sum\limits_{i=0}^{p-1} b_i$. Яке б не було число $x_0 = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, можна виділити таку нескінченну послідовність (j_n), що усі $\alpha_{j_n} < s-1$.

Нехай $y'_n = \Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2,\ldots,\alpha_{j_n-1}00\ldots0\ldots}$ і $y''_n = \Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2,\ldots,\alpha_{j_n-1}(s-1)p00\ldots0\ldots}$. Тоді $y'_n \leqslant x_0 \leqslant y''_n$ і

$$f(y''_n) - f(y'_n) = (1 - b_{s-1}) \cdot \prod_{k=1}^{j_n-1} b_{\alpha_k} + \gamma_p b_{s-1} \cdot \prod_{k=1}^{j_n-1} b_{\alpha_k} = (1 - b_{s-1} + \gamma_p b_{s-1}) \cdot \prod_{k=1}^{j_n-1} b_{\alpha_k};$$

$$y''_n - y'_n = (1 - a_{s-1} + \beta_p a_{s-1}) \cdot \prod_{k=1}^{j_n-1} a_{\alpha_k}.$$

Тоді

$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(y''_n) - f(y'_n)}{y''_n - y'_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1 - b_{s-1} + \gamma_p b_{s-1})}{(1 - a_{s-1} + \beta_p a_{s-1})} \prod_{k=1}^{j_n - 1} \frac{b_{\alpha_k}}{a_{\alpha_k}} =$$
$$= \frac{(1 - b_{s-1} + \gamma_p b_{s-1})}{(1 - a_{s-1} + \beta_p a_{s-1})} \cdot f'(x_0),$$

звідки $\gamma_p = \beta_p$, що суперечить припущенню.

Отже, $f(x)$ ніде не диференційовна. □

Зауважимо, що умова $|b_i| \geqslant a_i$ теореми 2 використовується в доведенні лише для того, щоб показати, що значення похідної в Q-ірраціональній точці не дорівнює нулю. З (6) випливає необхідна умова диференційовності функції в Q-ірраціональній точці x_0.

Наслідок 1. *Нехай $f(x)$ – досліджувана функція (4), $x_0 = \Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$ – Q-ірраціональне число відрізка $[0,1]$. Якщо $f(x)$ диференційовна в точці x_0, то $\prod\limits_{i=1}^{\infty} \frac{b_{\alpha_i}}{a_{\alpha_i}} = 0$ і $f'(x_0) = 0$.*

Втім обернене твердження не завжди справджується. Деякі достатні умови диференційовності функції в Q-ірраціональній точці дає теорема.

Теорема 3. *Нехай $f(x)$ – досліджувана функція (4), $x_0 = \Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$ – Q-ірраціональне число відрізка $[0,1]$ таке, що $\prod\limits_{i=1}^{\infty} \frac{b_{\alpha_i}}{a_{\alpha_i}} = 0$.*

1. *Якщо існують такі фіксовані скінченні числа N_0 та N_{s-1} що, в Q-зображенні числа x_0 немає більше, ніж N_0 послідовних нулів і більше, ніж N_{s-1} послідовних цифр $s-1$, то функція диференційовна в точці x_0.*
2. *Якщо $b_0 < a_0$ і $b_{s-1} < a_{s-1}$, то функція диференційовна в точці x_0.*

Доведення. 1. Нехай для деякої Q-ірраціональної точки $x_0 = \Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$ справджується $\lim\limits_{k\to\infty} \prod\limits_{i=1}^{k} \frac{b_{\alpha_i}}{a_{\alpha_i}} = 0$. Дослідимо питання про диференційовність функції в цій точці.

Нехай (x_m) – довільна послідовність, яка збігається до числа x_0. Якщо

$$x_m = \Delta^Q_{\alpha'_1(x_m)\alpha'_2(x_m)\ldots\alpha'_k(x_m)\ldots},$$

то для кожного $m \in \mathbb{N}$ існує номер k_m такий, що $\alpha_i(x_0) = \alpha'_i(x_m)$ для $i = \overline{1, k_m}$, $\alpha_{k_m+1}(x_0) \neq \alpha'_{k_m+1}(x_m)$. Очевидно, що умова $x_m \to x_0$ рівносильна до умови $k_m \to \infty$. Розглянемо фіксоване число x_m і для спрощення запису позначимо $k_m = k$. Тоді $x_m = \Delta^Q_{\alpha_1\ldots\alpha_k\alpha'_{k+1}\alpha'_{k+2}\ldots}$, $\alpha_{k+1} \neq \alpha'_{k+1}$. Маємо

$$x_m - x_0 = \sum_{i=k+1}^{\infty} \left[\beta_{\alpha'_i} \cdot \prod_{j=1}^{i-1} a_{\alpha'_j}\right] - \sum_{i=k+1}^{\infty} \left[\beta_{\alpha_i} \cdot \prod_{j=1}^{i-1} a_{\alpha_j}\right] =$$
$$= \prod_{j=1}^{k} a_{\alpha_j} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left[\beta_{\alpha'_{k+i}} \prod_{j=1}^{i-1} a_{\alpha'_{k+j}}\right] - \sum_{i=1}^{\infty} \left[\beta_{\alpha_{k+i}} \prod_{j=1}^{i-1} a_{\alpha_{k+j}}\right]\right).$$

Сума $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left[\beta_{\alpha'_{k+i}}\prod\limits_{j=1}^{i-1}a_{\alpha'_{k+j}}\right]$ є Q-розкладом числа $x'_m = \Delta_{\alpha'_{k+1}\alpha'_{k+2}\ldots}$, тому збігається до числа $x'_m \in [0;1]$. Аналогічно,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\beta_{\alpha_{k+i}}\prod_{j=1}^{i-1}a_{\alpha_{k+j}}\right] = x'_0 \equiv \Delta_{\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\ldots}$$

і отже,

$$x_m - x_0 = \prod_{j=1}^{k}a_{\alpha_j}\cdot(x'_m - x'_0).$$

Крім того,

$$f(x_m) - f(x_0) = \prod_{j=1}^{k}b_{\alpha_j}\cdot\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left[\gamma_{\alpha'_{k+i}}\prod_{j=1}^{i-1}b_{\alpha'_{k+j}}\right] - \sum_{i=1}^{\infty}\left[\gamma_{\alpha_{k+i}}\prod_{j=1}^{i-1}b_{\alpha_{k+j}}\right]\right) =$$
$$= \prod_{j=1}^{k}b_{\alpha_j}\cdot(f(x'_m) - f(x'_0)).$$

Оскільки $\alpha_{k+1} \neq \alpha'_{k+1}$, то у випадку, коли в Q-розкладі числа x_0 кількість послідовних цифр 0 не перевищує фіксоване скінченне число N_0 та кількість послідовних цифр $s-1$ не перевищує фіксоване N_{s-1}, то $x'_m - x'_0$ не прямує до нуля при $m \to \infty$, тому в такому випадку:

$$\lim_{m\to\infty}\frac{f(x_m) - f(x_0)}{x_m - x_0} = 0, \tag{7}$$

що свідчить про існування похідної в точці x_0 і доводить першу частину теореми.

Нехай тепер послідовність (x_m) така, що $x'_m \to x'_0$ при $m \to \infty$. Це можливо лише в тому випадку, коли в Q-розкладі числа x_0 є якзавгодно великі фрагменти вигляду $0\ldots0$ та $(s-1)\ldots(s-1)$. Покажемо, що рівність $\prod\limits_{i=1}^{\infty}\frac{b_{\alpha_i}}{a_{\alpha_i}} = 0$ не є достатньою умовою диференційовності функції для деяких таких чисел x_0.

Нехай

$$x_0 = \Delta^Q_{\alpha_1\ldots\alpha_{k_1}\alpha_{k_1+1}\underbrace{0\ldots0}_{n_1}\alpha_{k_1+n_1+1}\ldots\alpha_{k_2}\alpha_{k_2+1}\underbrace{0\ldots0}_{n_2}\ldots}, \tag{8}$$

$\alpha_{k_j+1} \neq 0$, $\alpha_{k_j+n_j+1} \neq 0$ для всіх $j \in \mathbb{N}$, $n_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Нехай послідовність (x_m) така, що

$$x_m = \Delta^Q_{\alpha_1\ldots\alpha_{k_m}(\alpha_{k_m+1}-1)\underbrace{(s-1)\ldots(s-1)}_{n_m}(s-1-\alpha_{k_m+n_m+1})(s-1-\alpha_{k_m+n_m+2})\ldots}.$$

Зрештою, нехай

$$\bar{x}_m = \Delta^Q_{\alpha_1\ldots\alpha_{k_m}(\alpha_{k_m+1})00\ldots0\ldots}.$$

Очевидно, що $x_m \to x_0$ при $m \to \infty$; $\bar{x}_m = \frac{x_m + x_0}{2}$, тобто $x_0 - \bar{x}_m = \bar{x}_m - x_m$. Складемо відношення

$$\frac{f(x_0) - f(x_m)}{x_0 - x_m} = \frac{f(x_0) - f(\bar{x}_m) + f(\bar{x}_m) - f(x_m)}{2(x_0 - \bar{x}_m)} = \frac{f(x_0) - f(\bar{x}_m)}{2(x_0 - \bar{x}_m)} + \frac{f(\bar{x}_m) - f(x_m)}{2(\bar{x}_m - x_m)}.$$

Розглянемо окремо

$$\frac{f(x_0)-f(\bar{x}_m)}{x_0-\bar{x}_m}=\prod_{i=1}^{k_m+1}\frac{b_{\alpha_i}}{a_{\alpha_i}}\cdot\left(\frac{b_0}{a_0}\right)^{n_m}\frac{f(x^*)}{x^*}=\prod_{i=1}^{k_m+n_m+1}\frac{b_{\alpha_i}}{a_{\alpha_i}}\cdot\frac{f(x^*)}{x^*},$$

де $x^*=\Delta^Q_{\alpha_{k_m+n_m+1}\alpha_{k_m+n_m+2}\ldots}\in[a_0;1]$, $f(x^*)\in[0;1]$. Перейшовши до границі при $m\to\infty$ знаходимо

$$\lim_{m\to\infty}\frac{f(x_0)-f(\bar{x}_m)}{x_0-\bar{x}_m}=0. \tag{9}$$

Тепер розглянемо

$$\frac{f(\bar{x}_m)-f(x_m)}{\bar{x}_m-x_m}=\prod_{i=1}^{k_m}\frac{b_{\alpha_i}}{a_{\alpha_i}}\cdot\frac{b_{\alpha_{k_m+1}-1}}{a_{\alpha_{k_m+1}-1}}\cdot\left(\frac{b_{s-1}}{a_{s-1}}\right)^{n_m}\frac{1-f(x^*)}{1-x^*}, \tag{10}$$

де $x^*=\Delta^Q_{(s-1-\alpha_{k_m+n_m+1})(s-1-\alpha_{k_m+n_m+2})\ldots}$, $1-x_0\in[a_{s-1};1]$, $f(x^*)\in[0;1]$. Бачимо, що у випадку, коли $b_{s-1}>a_{s-1}$ можна підібрати послідовність (n_m) таку (а разом з нею і число x_0) , що $\frac{f(\bar{x}_m)-f(x_m)}{\bar{x}_m-x_m}\to\infty$ при $m\to\infty$.

Аналогічно, якщо число x_0 містить якзавгодно великі фрагменти вигляду $(s-1)\ldots(s-1)$ і $b_0>a_0$, то існують такі Q-ірраціональні числа, в яких функція недиференційовна.

2. Доведемо таке: якщо $b_0<a_0$ і $b_{s-1}<a_{s-1}$, то функція $f(x)$ диференційовна в точках, для яких $\prod\limits_{i=1}^{\infty}\frac{b_{\alpha_i}}{a_{\alpha_i}}=0$. Нехай x_0 має вигляд (8), а послідовність (x_m) така, що

$$x_m=\Delta^Q_{\alpha_1\ldots\alpha_{k_m}(\alpha_{k_m+1}-1)\underbrace{(s-1)\ldots(s-1)}_{n_m}(\alpha'_{k_m+n_m+1})(\alpha'_{k_m+n_m+2})\ldots}$$

(усі інші послідовності наближень, як показано вище, приводять до (7)). Нехай також

$$\bar{x}_m=\Delta^Q_{\alpha_1\ldots\alpha_{k_m}(\alpha_{k_m+1})00\ldots0\ldots}.$$

Оскільки $x_m\leqslant\bar{x}_m\leqslant x_0$, то очевидно, що

$$\frac{|f(x_0)-f(x_m)|}{x_0-x_m}\leqslant\max\left\{\frac{|f(x_0)-f(\bar{x}_m)|}{x_0-\bar{x}_m};\frac{|f(\bar{x}_m)-f(x_m)|}{\bar{x}_m-x_m}\right\},$$

проте згідно з (9) та аналогічно до (10) кожне з відношень $\frac{|f(x_0)-f(\bar{x}_m)|}{x_0-\bar{x}_m}$ та $\frac{|f(\bar{x}_m)-f(x_m)|}{\bar{x}_m-x_m}$ прямує до нуля при $m\to\infty$. Отже, в цьому випадку функція диференційовна в точці x_0. Випадок, коли Q-зображення числа x_0 містить якзавгодно великі фрагменти вигляду $(s-1)\ldots(s-1)$, розглядається аналогічно. □

Лема 4. *Міра Лебега множини всіх чисел, Q-зображення яких містить фрагменти, що складаються з якзавгодно великої кількості цифр j, дорівнює нулю.*

Доведення. Не порушуючи загальності, вважатимемо, що $j=0$. Нехай

$$E=\left\{x\colon x=\Delta^Q_{\alpha_1\ldots\alpha_{m_1}\underbrace{0\ldots0}_{k_1}\alpha_{m_1+k_1+1}\ldots\alpha_{m_2}\underbrace{0\ldots0}_{k_2}\ldots},k_n\to\infty\ (n\to\infty)\right\}.$$

Доведемо, що $\lambda(E)=0$.

Позначимо через F_k об'єднання всіх циліндричних множин (відрізків) рангу k, серед внутрішніх точок яких є точки з множини E; $F_0=[0;1]$. Очевидно, що $F_1\supset F_2\supset\dots\supset F_k\supset\dots$ і $E=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}F_k$. Оскільки усі множини F_k – компактні, то $\lambda(E)=\lim\limits_{k\to\infty}\lambda(F_k)$. Нехай $\bar F_k=F_{k-1}\setminus F_k$, тобто через $\bar F_k$ позначимо об'єднання всіх відкритих циліндрів рангу k, які не містять точок з множини E. Тоді

$$\lambda(E)=\lim_{k\to\infty}\lambda(F_k)=\lim_{k\to\infty}\frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})}\cdot\frac{\lambda(F_{k-1})}{\lambda(F_{k-2})}\cdots\frac{\lambda(F_1)}{\lambda(F_0)}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})}.$$

Оскільки $F_{k-1}=F_k\bigcup\bar F_k$, то $\lambda(F_k)=\lambda(F_{k-1})-\lambda(\bar F_k)$. Тоді

$$\lambda(E)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda(F_{k-1})-\lambda(\bar F_k)}{\lambda(F_{k-1})}=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda(\bar F_k)}{\lambda(F_{k-1})}\right).$$

Розглянемо множину F_{m_1}. Із її означення зрозуміло, що

$$F_{m_1}=\bigcup_{i_1=0}^{s-1}\cdots\bigcup_{i_{m_1}=0}^{s-1}\Delta_{i_1\dots i_{m_1}},$$

позаяк

$$\bar F_{m_1+1}=\bigcup_{i_1=0}^{s-1}\cdots\bigcup_{i_{m_1}=0}^{s-1}\bigcup_{j=1}^{s-1}\Delta_{i_1\dots i_{m_1}j}.$$

Тоді

$$\lambda(F_{m_1})=\sum_{\substack{i_l=\overline{0,s-1},\\ l=\overline{1,m_1}}}\left|\Delta_{i_1\dots i_{m_1}}\right|,$$

$$\lambda(\bar F_{m_1+1})=(a_1+\dots+a_{s-1})\sum_{\substack{i_l=\overline{0,s-1},\\ l=\overline{1,m_1}}}\left|\Delta_{i_1\dots i_{m_1}}\right|=(1-a_0)\lambda(F_{m_1}),$$

звідки знаходимо $\frac{\lambda(\bar F_{m_1+1})}{\lambda(F_{m_1})}=1-a_0$. Аналогічно можна довести, що $\frac{\lambda(\bar F_{m_k+1})}{\lambda(F_{m_k})}=1-a_0$, $k\in\mathbb{N}$. Оскільки $\bar F_{k+1}\subset F_k$, то $0\leqslant\frac{\lambda(\bar F_{k+1})}{\lambda(F_k)}<1$. Тоді

$$\lambda(E)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda(\bar F_k)}{\lambda(F_{k-1})}\right)\leqslant\lim_{k\to\infty}\prod_{i=1}^{m_k}\left(1-\frac{\lambda(\bar F_k)}{\lambda(F_{k-1})}\right)=(1-a_0)^k\to 0\ (k\to\infty),$$

що й означає, що $\lambda(E)=0$. □

Наслідок 2. *Множина всіх тих Q-ірраціональних $x=\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k\dots}$, в яких функція недиференційовна, проте $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\frac{b_{\alpha_k}}{a_{\alpha_k}}=0$, має нульову міру Лебега.*

Нагадаємо [4] таке: якщо $N_i(x,k)$ – кількість символів i в зображенні x до k-го місця включно, то границя (якщо вона існує)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_i(x,k)}{k}=\nu_i(x)$$

називається *частотою вживання символа* i в Q-зображенні x. Число x, для якого частота $\nu_i(x) = a_i$ для всіх $i \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$ називається *Q-нормальним.*

Теорема 4. *Нехай $f(x)$ – досліджувана функція* (4)*.*

1. *Якщо* $\left|\frac{b_0^{a_0} b_1^{a_1} \ldots b_{s-1}^{a_{s-1}}}{a_0^{a_0} a_1^{a_1} \ldots a_{s-1}^{a_{s-1}}}\right| > 1$, *то $f(x)$ майже скрізь недиференційовна (у випадку, коли виконуються умови теореми 2 – ніде не диференційовна).*
2. *Якщо* $\left|\frac{b_0^{a_0} b_1^{a_1} \ldots b_{s-1}^{a_{s-1}}}{a_0^{a_0} a_1^{a_1} \ldots a_{s-1}^{a_{s-1}}}\right| < 1$, *то $f(x)$ диференційовна майже скрізь (щодо міри Лебега).*

Доведення. Для доведення теореми скористаємось двома відомими фактами [4], що міра Лебега Q-ірраціональних чисел дорівнює 1 і міра Лебега Q-нормальних чисел також дорівнює 1, тобто, іншими словами, майже всі Q-ірраціональні числа є Q-нормальними. Згідно з (6), якщо функція диференційовна в точці x, то

$$f'(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{b_{\alpha_k}}{a_{\alpha_k}} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{b_{\alpha_k}}{a_{\alpha_k}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b_0^{\nu_0} b_1^{\nu_1} \ldots b_{s-1}^{\nu_{s-1}}}{a_0^{\nu_0} a_1^{\nu_1} \ldots a_{s-1}^{\nu_{s-1}}}\right)^n,$$

де ν_i – відносна частота появи цифри i в Q-зображенні аргумента до n-го місця включно. Якщо x – Q-нормальне число, то кожна $\lim\limits_{n\to\infty} \nu_i = a_i$, тому для майже всіх x:

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b_0^{a_0} b_1^{a_1} \ldots b_{s-1}^{a_{s-1}}}{a_0^{a_0} a_1^{a_1} \ldots a_{s-1}^{a_{s-1}}}\right)^n$$

Якщо правильна нерівність $\left|\frac{b_0^{a_0} b_1^{a_1} \ldots b_{s-1}^{a_{s-1}}}{a_0^{a_0} a_1^{a_1} \ldots a_{s-1}^{a_{s-1}}}\right| > 1$, то остання границя не є скінченною. Якщо ж $\left|\frac{b_0^{a_0} b_1^{a_1} \ldots b_{s-1}^{a_{s-1}}}{a_0^{a_0} a_1^{a_1} \ldots a_{s-1}^{a_{s-1}}}\right| < 1$, то за доведеним попереду (наслідок леми 4) лише в точках нульової міри Лебега функція не матиме похідної. □

Наслідок 3. *Нехай $f(x)$ – досліджувана функція* (4)*, що визначається наборами Q і Q'. Якщо хоча б один елемент з Q' дорівнює нулю, то $f(x)$ диференційовна майже скрізь.*

4. Фрактальні властивості досліджуваних функцій. Нагадаємо [1], що число

$$\alpha^K(E) = \lim_{\delta\to 0} \frac{\lg N_\delta(E)}{-\lg \delta},$$

де $N_\delta(E)$ – найменша кількість квадратів вигляду $[m_1\delta, (m_1+1)\delta] \times [m_2\delta, (m_2+1)\delta]$, ($m_1$, m_2 – цілі), необхідних для покриття множини $E \subset \mathbb{R}^2$, називається фрактальною клітинковою розмірністю множини E.

Введемо позначення: нехай

$$a = \min\{a_0, a_1, \ldots, a_{s-1}\}, \quad b = \sum_{i=1}^{s-1} |a_i b_i|.$$

Теорема 5. *Правильна така оцінка розмірності Хаусдорфа–Безиковича графіка функції $f(x)$: $\alpha_0(\Gamma_f) \leqslant 2 - \log_a b$.*

Доведення. Виконаємо відповідне покриття графіка функції. Нехай

$$R_f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) = \sup_{x_1, x_2 \in \Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}} \{f(x_1) - f(x_2)\}$$

– розмах функції $f(x)$ на циліндричному відрізку

$$\left[\Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k 00\ldots}; \Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k (s-1)(s-1)\ldots}\right].$$

Очевидно, що $R_f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) = |b_{\alpha_1} b_{\alpha_2} \ldots b_{\alpha_k}|$. Покриватимемо графік функції $f(x)$ квадратами зі стороною $\delta_k = a^k$. Нехай N_{δ_k} – найменша кількість квадратів необхідних для цього. Тоді

$$N_{\delta_k} \leqslant \sum_{\substack{\alpha_i = \overline{0,s-1},\\ i=\overline{1,k}}} \left(\frac{a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} \ldots a_{\alpha_k}}{a^k} + 1\right) \cdot \left(\frac{R_f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)}{a^k} + 1\right).$$

$$N_{\delta_k} \leqslant \frac{1}{a^{2k}} \cdot b^k + \frac{1}{a^k} \sum_{\substack{\alpha_i = \overline{0,s-1},\\ i=\overline{1,k}}} a_{\alpha_1} \ldots a_{\alpha_k} + \frac{1}{a^k} \sum_{\substack{\alpha_i = \overline{0,s-1},\\ i=\overline{1,k}}} |b_{\alpha_1} \ldots b_{\alpha_k}| + 1 =$$

$$= \frac{1}{a^{2k}} \left(b^k + a^k + a^{2k} + (|ab_0| + |ab_1| + \cdots + |ab_{s-1}|)^k\right) \leqslant \frac{1}{a^{2k}} \left(b^k + a^k + a^{2k} + b^k\right).$$

Тоді

$$\lg N_{\delta_k} \leqslant \lg \frac{1}{a^{2k}} \left(2b^k + a^k + a^{2k}\right).$$

Поділимо обидві частини на додатне $-\lg a^k$ і перейдемо до границі

$$\alpha_0(\Gamma_f) \leqslant \lim_{k\to\infty} \frac{\lg \frac{2b^k}{a^{2k}}}{-\lg a^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\lg 2 + k \lg b - 2k \lg a}{-k \lg a} = 2 - \log_a b.$$

□

Наслідок 4. *Число $2 - \log_a b$ є верхньою межею і для фрактальної клітинкової розмірності графіка функції $f(x)$.*

Теорема 6. *Нехай $f(x)$ – досліджувана функція (4), що визначається векторами $Q = \left\{\frac{1}{s}, \frac{1}{s}, \ldots, \frac{1}{s}\right\}$ і $Q' = \{b_1, b_2, \ldots, b_{s-1}\}$. Тоді фрактальна клітинкова розмірність графіка функції $f(x)$ дорівнює $1 + \log_s B$, де $B = \sum\limits_{i=1}^{s-1} |b_i|$.*

Доведення. Виконаємо покриття графіка функції $f(x)$ однаковими квадратами зі стороною $\delta_k = s^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$. Нехай N_{δ_k} – найменша кількість квадратів зі стороною δ_k, необхідних для цього. Згідно з наслідком 4 маємо

$$\alpha^K(\Gamma_f) \leqslant 2 - \log_a b = 2 - \log_{s^{-1}} \left(\frac{1}{s} \sum_{i=0}^{s-1} b_i\right) = 1 + \log_s B.$$

Доведемо, що $\alpha^K(\Gamma_f) \geqslant 1 + \log_s B$. Маємо

$$N_{\delta_k} \geqslant \sum_{\substack{\alpha_i = \overline{0,s-1},\\ i=\overline{1,k}}} \frac{R_f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)}{s^{-k}} = s^k \cdot \sum_{\substack{\alpha_i = \overline{0,s-1},\\ i=\overline{1,k}}} |b_{\alpha_1} \ldots b_{\alpha_k}| = s^k \cdot B^k.$$

Тоді

$$\alpha\left(\Gamma_f\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{\lg N_{\delta_k}}{-\lg s^{-k}} \geqslant \lim_{k\to\infty} \frac{\lg\left(s\cdot B\right)^k}{\lg s^k} = 1 + \log_s B.$$

□

1. *Falconer K.J.* Fractal geometry. Mathematical foundations and applications. Second edition. / *Falconer K.J.* – Chichester. Wiley, 2003.
2. *Okamoto H.* A remark on continuous, nowhere differentiable functions. / *Okamoto H.* // Proc. Japan Acad. – 2005. – Ser. A 81, № 3. – P. 47–50.
3. *Бурбаки Н.* Функции действительного переменного: Элементарная теория. / *Бурбаки Н.* – М., 1965.
4. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. / *Працьовитий М. В.* – К., 1998.

DIFFERENTIAL AND FRACTAL PROPERTIES OF THE CLASS OF SELF-AFFINE FUNCTIONS

Mykola PRATS'OVYTYI[1], Oleksii PANASENKO[2]

[1]*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine,*
01601, Kyiv, Tereshchenkivs'ka Str., 3
e-mail: prats4@yandex.ru
[2]*Winnytcya State Pedagogical University of M. Kotsyubyns'kyi,*
21100, Winnytcya, Ostroz'kogo Str., 32
e-mail: panasenko_ alex@bigmir.net

We consider the family of continuous functions that contains the classes of nowhere differentiable and singular functions, and is defined as the invariant set of some iterated function system. Differential and some fractal properties are investigated in the paper.

Key words: self-affine function, Hausdoff-Besicovich dimension.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И ФРАКТАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КЛАССА САМОАФИННЫХ ФУНКЦИЙ

Николай ПРАЦЬОВИТЫЙ[1], **Алексей ПАНАСЕНКО**[2]

[11]*Институт математики НАН Украины,*
01601, Киев, ул. Терещенковская, 3
e-mail: prats4@yandex.ru
[2]*Винницкий государственный педагогический университет им. М. Коцюбинского,*
21100, Винница, ул. Острозского, 32
e-mail: panasenko_alex@bigmir.net

Рассмотрено семью непрерывных функций, которая содержит классы нигде не дифференциируемых и сингулярных функций и определяется как инвариантное множество системы итерируемых функций. Исследовано дифференциальные и некоторые фрактальные свойства функций этого класса.

Ключевые слова: самоафинная функция, размерность Хаусдорфа-Безиковича.

Стаття надійшла до редколегії 10.07.2008

Прийнята до друку 12.06.2009

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2009. *Ser. Mech. Math. 2009.*
Вип. 70. С. 143–158 *Is. 70. P. 143–158*

УДК 330.3

ВЕКТОРНІ МОДЕЛІ РУХОМОГО СЕРЕДНЬОГО

Назарій САЛІШ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1

Досліджено та описано теоретичну побудову векторних процесів рухомого середнього. Визначено основні властивості та побудовано методи знаходження оцінок параметрів цих моделей. Розглянуто застосування на прикладі фінансових показників.

Ключові слова: векторні моделі рухомого середнього, метод максимальної правдоподібності, векторні авторегресійні процеси, автоковаріаційна генеруюча функція.

1. Вступ. У цій праці описано векторну MA модель із специфічного класу моделей часових рядів. Векторний процес рухомого середнього є ширшою моделлю за звичайні MA процеси, відмінності якої дають змогу робити прогнози точнішими та оптимальнішими. Головна задача – побудова VMA моделі, дослідження її властивостей, побудова автоковаріаційної генеруючої функції та оцінка параметрів моделі.

Одержані результати можна застосовувати в макроекономіці, що демонструє реалізований нижче приклад. Ці результати дають право стверджувати, що як і VAR моделі, VMA моделі дають не гірші прогнози, ніж моделі структурних рівнянь. Вагомою перевагою цих моделей є одночасне поєднання декількох часових рядів, які допомагають враховувати і досліджувати взаємозворотні зв'язки між показниками.

Наша праця охоплює математичну побудову та приклад, в якому проведено порівняльний аналіз двофакторної векторної моделі рухомого середнього зі звичайними MA моделями, який цікавий з економічного та математичного боку.

Зазначимо, що з основними поняттями VAR і MA можна ознайомитися у книгах [1-3]. Крім того, у працях [4,5] наведено деякі підходи до оцінювання параметрів цих моделей.

2. Загальні властивості векторних MA процесів.

2.1. Векторний процес рухомого середнього першого порядку. Розглянемо процес

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t + \Omega\varepsilon_{t-1}, \tag{1}$$

де μ – деякий сталий вектор; Ω – матриця розміру $n \times n$. Цей часовий ряд називається векторним процесом рухомого середнього і позначається $VMA(1)$.

Основні припущення моделі такі:

(i) досліджуваний процес є стаціонарним, тобто володіє двома властивостями:
 1) $E[Y_t] = const$, для всіх t;
 2) $E[(Y_t - \mu)(Y_{t-k} - \mu)'] = \Gamma_k$, для всіх t,

 де Γ_k – позначає матрицю автоковаріацій і залежить лише від k;

(ii) часовий ряд ε_t задовольняє умови:
 1) $E[\varepsilon_t] = 0$, для всіх t;
 2) $Var[\varepsilon_t] = \Sigma$, для всіх t;
 3) $E[\varepsilon_t \varepsilon'_s] = 0$ при $t \neq s$;

Такий процес ще називають "білий шум". Враховуючи зроблені припущення, наведемо деякі властивості VMA процесу (1).

1°. $E[Y_t] = \mu$, тобто математичне сподівання вектора Y_t – стала μ. Для цього достатньо обчислити математичне сподівання обох сторін (1)

$$E[Y_t] = E[\mu + \varepsilon_t + \Omega\varepsilon_{t-1}] = \mu + E[\varepsilon_t] + \Omega E[\varepsilon_{t-1}] = \mu.$$

2°. Використовуючи припущення (i) та (ii), розпишемо за означенням $Var[Y_t]$:

$$Var[Y_t] = E[(Y_t - \mu)(Y_t - \mu)'] = E[(\varepsilon_t + \Omega\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_t + \Omega\varepsilon_{t-1})'] = E[\varepsilon_t \varepsilon'_t] + \\ + E[\varepsilon_t(\Omega\varepsilon_{t-1})'] + E[\Omega\varepsilon_{t-1}\varepsilon'_t] + \Omega E[\varepsilon_{t-1}\varepsilon'_{t-1}]\Omega' = \Sigma + \Omega\Sigma\Omega'.$$

Отже, дисперсія Y_t має вигляд

$$Var[Y_t] = \Gamma_0 = \Sigma + \Omega\Sigma\Omega'. \tag{2}$$

3°. Знайдемо вигляд автоковаріаційних матриць для цього процесу. Маємо

$$\Gamma_k = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-k} - \mu)'] = E[(\varepsilon_t + \Omega\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-k} + \Omega\varepsilon_{t-(k+1)})'] = E[\varepsilon_t \varepsilon'_{t-k}] + \\ + E[\varepsilon_t \varepsilon'_{t-(k+1)}]\Omega' + \Omega E[\varepsilon_{t-1}\varepsilon'_{t-k}] + \Omega E[\varepsilon_{t-1}\varepsilon'_{t-(k+1)}]\Omega'.$$

Оскільки, $E[\varepsilon_t \varepsilon'_s] = 0$ при $t \neq s$, то при $k = 1$, будемо мати $E[\varepsilon_t \varepsilon'_{t-1}] = 0$, $E[\varepsilon_t \varepsilon'_{t-2}]\Omega' = 0$ та $\Omega E[\varepsilon_{t-1}\varepsilon'_{t-2}]\Omega' = 0$. Отже, одержимо

$$\Gamma_k = \begin{cases} \Omega\Sigma, & \text{при } k = 1, \\ 0, & \text{при } k > 1. \end{cases} \tag{3}$$

2.2. $VMA(q)$ процес. Векторний процес рухомого середнього порядку q має вигляд

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t + \Omega_1\varepsilon_{t-1} + ... + \Omega_q\varepsilon_{t-q}. \tag{4}$$

Припущення такі, як і у випадку $VMA(1)$. Процес стаціонарний та $\{\varepsilon_t\}$ – векторний білий шум. Знайдемо вигляд математичного сподівання та автоковаріаційних матриць. Очевидно, $E[Y_t] = E[\mu] + E[\varepsilon_t] + \sum\limits_{j=1}^{T} \Omega_j E[\varepsilon_{t-j}] = \mu$. Дисперсія (або Γ_0)

$$\Gamma_0 = E[(Y_t - \mu)(Y_t - \mu)'] = E[\varepsilon_t \varepsilon_t] + \Omega_1 E[\varepsilon_{t-1}\varepsilon'_{t-1}]\Omega'_1 + ... + \Omega_q E[\varepsilon_{t-q}\varepsilon'_{t-q}]\Omega'_q = \\ = \Sigma + \Omega_1\Sigma\Omega'_1 + \Omega_2\Sigma\Omega'_2 + ... + \Omega_q\Sigma\Omega'_q.$$

Загальний вигляд Γ_k при $k \neq 0$:

$$\Gamma_k = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-k} - \mu)'] = \begin{cases} \Omega_k \Sigma + \Omega_{k+1} \Sigma \Omega_1' + \ldots + \Omega_q \Sigma \Omega_{q-k}', & \text{при } k = 1, \ldots, q, \\ \Sigma \Omega_{-k}' + \Omega_1 \Sigma \Omega_{1-k}' + \ldots + \Omega_{q+k} \Sigma \Omega_q', & \text{при } k = -1, \ldots, -q, \\ 0, & \text{при } |k| > q. \end{cases}$$

Ще одну властивість сформулюємо як лему.

Лема 1. *Для моделі (1) виконується рівність*

$$\Gamma_k' = \Gamma_{-k}. \tag{5}$$

Доведення. Маємо $\Gamma_k' = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-k} - \mu)']' = E[(Y_{t-k} - \mu)(Y_{(t-k)+k} - \mu)'] = \Gamma_{-k}$. □

2.3. $VMA(\infty)$ процес. Векторний процес рухомого середнього нескінченного порядку можна подати у вигляді

$$Y_t = \mu + \sum_{k=0}^{\infty} \Omega_k \varepsilon_{t-k}, \tag{6}$$

де Y_t, ε_{t-k} вектори з n координатами; μ – деякий сталий вектор; Ω_i – матриці розміру $n \times n$ для $i = 1, \ldots$; $\Omega_0 = \mathrm{I_n}$ – одинична матриця розміру $n \times n$.

Означення 1. *Будемо називати ряд складений з матриць $\{\Psi_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ абсолютно збіжним, якщо при фіксованих i та j ряд з відповідних елементів матриць $\{\psi_{i,j}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ буде абсолютно збіжний.*

Подамо основні властивості у вигляді теореми.

Теорема 1. *Нехай маємо процес (6), який задовольняє припущення (i), (ii) та ряд матриць $\{\Omega_k\}_{k=0}^{\infty}$ абсолютно збіжний. Тоді:*

а) *автоковаріаційна матриця порядку s існує та задається виразом*

$$\Gamma_s = \sum_{k=0}^{\infty} \Omega_{k+s} \Sigma \Omega_k'; \tag{7}$$

б) *послідовність матриць $\{\Gamma_s\}_{s=0}^{\infty}$ задає абсолютно збіжний ряд.*

Доведення. а) Нехай $\omega_{ij}^{(k)}$ елемент матриці Ω_k. Тоді i-та координата вектора Y_t матиме вигляд

$$y_t^i = \mu_i + \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} \omega_{il}^{(k)} \varepsilon_{t-k}^l. \tag{8}$$

Введемо ще одне позначення

$$f(i,l,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_{il}^{(k)} \varepsilon_{t-k}^l.$$

Тоді (8) набуде вигляду $y_t^i = \mu_i + \sum\limits_{l=1}^{n} f(i,l,t)$. Знайдемо математичне сподівання добутку $f(i,l,t)$ та $f(j,m,t-s)$, де i,j,l,m набувають значення від 1 до n. Оскільки

$\{\Omega_k\}_{k=0}^{\infty}$ абсолютно збіжна, то

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}|\omega_{im}^{(r)}\omega_{il}^{(k)}| = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}|\omega_{im}^{(r)}|\cdot|\omega_{il}^{(k)}| =$$
$$= \left(\sum_{r=0}^{\infty}|\omega_{im}^{(r)}|\right)\times\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\omega_{il}^{(k)}|\right) < \infty.$$

Тоді згідно з теоремою Коші про добуток абсолютно збіжних рядів маємо право записати рівності

$$E[f(i,l,t)\cdot f(j,m,t-s)] = E[(\sum_{k=0}^{\infty}\omega_{il}^{(k)}\varepsilon_{t-k}^{l})(\sum_{r=0}^{\infty}\omega_{jm}^{(r)}\varepsilon_{t-s-r}^{m})] =$$
$$= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\omega_{jm}^{(r)}\omega_{il}^{(k)}E[\varepsilon_{t-k}^{l}\varepsilon_{t-s-r}^{m}].$$

За припущенням (ii) моделі $E[\varepsilon_{t-k}^{l}\varepsilon_{t-s-r}^{m}] \neq 0$ тільки при $k = s + r$. Отже, отримали

$$E[f(i,l,t)\cdot f(j,m,t-s)] = \sum_{r=0}^{\infty}\omega_{il}^{(r+s)}\omega_{jm}^{(r)}\sigma_{lm}, \tag{9}$$

де σ_{lm} відповідний елемент матриці Σ. Елемент $\gamma_{ij}^{(s)}$ матриці Γ_s шукаємо за формулою

$$\gamma_{ij}^{(s)} = E[(y_t^i - \mu_i)((y_{t-s}^j - \mu_j)].$$

Використовуючи формули (8) та (9), запишемо

$$E[(y_t^i - \mu_i)((y_{t-s}^j - \mu_j)] = \sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}E[f(i,l,t)\cdot f(j,m,t-s)] =$$
$$= \sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{r=0}^{\infty}\omega_{il}^{(r+s)}\omega_{jm}^{(r)}\sigma_{lm} = \tag{10}$$
$$= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\omega_{il}^{(r+s)}\omega_{jm}^{(r)}\sigma_{lm}.$$

Очевидно, $\sum\limits_{l=1}^{n}\sum\limits_{m=1}^{n}\omega_{il}^{(r+s)}\omega_{jm}^{(r)}\sigma_{lm}$ є елементом матриці $\Omega_{k+s}\Sigma\Omega_k'$, що утворюється перетином i-го рядка та j-го стовпця. З цього випливає, що вигляд автоковаріаційної матриці задається рівнянням (7).

б) Позначимо $g_s(i,j,l,m) = E[f(i,l,t)\cdot f(j,m,t-s)]$. Зауважимо, що ряд $\{g_s(\cdot)\}_{s=0}^{\infty}$ абсолютно збіжний

$$\sum_{s=0}^{\infty}|g_s(\cdot)| \leqslant \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}|\omega_{il}^{(r+s)}\omega_{jm}^{(r)}\sigma_{lm}| = |\sigma_{lm}|\sum_{r=0}^{\infty}|\omega_{jm}^{(r)}|\sum_{s=0}^{\infty}|\omega_{il}^{(r+s)}| < \infty.$$

Тоді існує таке M, що $\sum\limits_{s=0}^{\infty}|g_s(\cdot)| < M$. Звідси

$$\sum_{s=0}^{\infty}|\gamma_{ij}^{(s)}| \leqslant \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}|g_s(l,m,\cdot)| =$$
$$= \sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{s=0}^{\infty}|g_s(l,m,\cdot)| < n^2M < \infty.$$

Це доводить, що ряд матриць $\{\Gamma_s\}_{k=0}^{\infty}$ абсолютно збіжний. □

3. Автоковаріаційна генеруюча функція для VMA процесів. Для стаціонарного векторного процесу з абсолютно збіжними автоковаріаційними матрицями означення функції вводиться аналогічно до скалярного випадку.

Означення 2. *Автоковаріаційною генеруючою функцією для векторних процесів називається функція, яка задається*

$$G_Y(z) \equiv \sum_{j=-\infty}^{\infty}\Gamma_j z^j,$$

де $\Gamma_j = E[(Y_t-\mu)(Y_{t-j}-\mu)']$; z *– комплексний скаляр.*

Наприклад, автоковаріаційна генеруюча функція векторного білого шуму має вигляд

$$G_\varepsilon(z) = \Sigma.$$

Побудуємо цю функцію для $VMA(1)$ процесу. З формул (2), (3) та леми одержуємо вирази для Γ_0, Γ_1 та Γ_{-1}. Решта автоковаріаційних матриць дорівнюють нулю. Тоді

$$G_Y(z) = (\Sigma + \Omega\Sigma\Omega') + \Omega\Sigma z + \Sigma'\Omega' z^{-1} = (\mathrm{I}_n + \Omega z)\Sigma(\mathrm{I}_n + \Omega' z^{-1}).$$

Аналогічно будується автоковаріаційна генеруюча функція для $VMA(q)$ процесу

$$\begin{aligned} G_Y(z) = &(\mathrm{I}_n + \Omega_1 z + \Omega_2 z^2 + \ldots + \Omega_q z^q)\Sigma\times \\ &\times(\mathrm{I}_n + \Omega_1' z^{-1} + \Omega_2' z^{-2} + \ldots + \Omega_q' z^{-q}). \end{aligned} \tag{11}$$

Нехай VMA нескінченного порядку, задається виразом

$$Y_t = \mu + \sum_{k=0}^{\infty}\Omega_k\varepsilon_{t-k} = \mu + \Omega(L)\varepsilon_t,$$

де $\Omega(L) = \Omega_1 L + \ldots + \Omega_q L^q$; L – лаговий оператор. Ряд $\{\Omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ абсолютно збіжний, тоді за теоремою $\{\Gamma_s\}_{k=0}^{\infty}$ – абсолютно збіжний. Отже, існує автоковаріаційна генеруюча функція і вона буде задаватися виразом

$$G_Y(z) = [\Omega(z)]\Sigma[\Omega(z^{-1})]'. \tag{12}$$

4. Оцінки параметрів VMA процесу методом автоковаріацій.

4.1. Випадок $VMA(1)$ з двома змінними. Опишемо модель, параметри якої будемо досліджувати. Нехай

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t + \Omega\varepsilon_{t-1}, \tag{13}$$

де Y_t, μ, ε_t стовпці розміру два; Ω зображена у вигляді

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Модель (13) також можна подати так:

$$\begin{cases} y_t^1 = \mu_1 + e_t^1 + \omega_{11}e_{t-1}^1 + \omega_{12}e_{t-1}^2, \\ y_t^2 = \mu_2 + e_t^2 + \omega_{21}e_{t-1}^1 + \omega_{22}e_{t-1}^2. \end{cases} \tag{15}$$

Цей метод полягає в тому, що ми можемо знайти оцінку параметрів моделі через матриці автоковаріації Γ_k, де $k = 0, 1$ та вектор математичних сподівань μ. Нехай маємо T спостережень Y_t.

Позначимо

$$\Gamma_k = \begin{pmatrix} \gamma_{11}(k) & \gamma_{12}(k) \\ \gamma_{21}(k) & \gamma_{22}(k) \end{pmatrix}.$$

Тоді оцінка математичного сподівання матиме вигляд

$$\widehat{\mu} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{T} Y_t}{T},$$

або покоординатно $\widehat{\mu}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{T} y_t^1}{T}$, $\widehat{\mu}_2 = \frac{\sum_{t=1}^{T} y_t^2}{T}$. Аналогічно можемо оцінити елементи автоковаріаційних матриць

$$\widehat{\gamma}_{ij}(k) = \frac{\sum\limits_{t=1+k}^{T} (y_t^i - \widehat{\mu}_i)(y_{t-k}^j - \widehat{\mu}_j)}{T-k}, \tag{16}$$

де $i, j = 1, 2$.

На підставі оцінок $\widehat{\mu}$ та $\widehat{\Gamma}_k$ знайдемо оцінки Ω та Σ. З властивостей (2), (3) для векторних MA(1) процесів одержуємо, що $\Gamma_0 = \Sigma + \Omega\Sigma\Omega'$ та $\Gamma_1 = \Omega\Sigma$. Розглянемо випадок, який буде реалізований на прикладі в пункті 7.

Нехай

$$\Sigma = \begin{pmatrix} d_1 & k \\ k & d_2 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

тобто збурення обох процесів між собою корелюють і мають різні дисперсії. Рівність (14) задає вигляд матриця Ω.

Тоді згідно з (2) та (3)

$$\Gamma_0 = \Sigma + \Omega\Sigma\Omega' =$$

$$= \begin{pmatrix} d_1\omega_{11}^2 + d_2\omega_{12}^2 + 2k\omega_{11}\omega_{12} & d_1\omega_{11}\omega_{21} + d_2\omega_{12}\omega_{22} + k(\omega_{11}\omega_{22} + \omega_{12}\omega_{21}) \\ d_1\omega_{11}\omega_{21} + d_2\omega_{12}\omega_{22} + k(\omega_{11}\omega_{22} + \omega_{12}\omega_{21}) & d_2\omega_{22}^2 + d_1\omega_{21}^2 + 2\omega_{21}\omega_{22}k \end{pmatrix}; \tag{18}$$

$$\Gamma_1 = \Omega\Sigma = \begin{pmatrix} d_1\omega_{11} + k\omega_{12} & d_2\omega_{12} + k\omega_{11} \\ d_1\omega_{21} + k\omega_{22} & d_2\omega_{22} + k\omega_{21} \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Використовуючи (16), (18) та (19), можемо записати таку систему рівнянь, а розв'язок дасть нам шукані оцінки:

$$\begin{cases} \widehat{\gamma}_{11}(1) = \omega_{11}d_1 + \omega_{12}k, \\ \widehat{\gamma}_{12}(1) = \omega_{12}d_2 + \omega_{11}k, \\ \widehat{\gamma}_{21}(1) = \omega_{21}d_1 + \omega_{22}k, \\ \widehat{\gamma}_{22}(1) = \omega_{22}d_2 + \omega_{21}k, \\ \widehat{\gamma}_{11}(0) = d_1\omega_{11}^2 + d_2\omega_{12}^2 + 2\omega_{11}\omega_{12}k, \\ \widehat{\gamma}_{22}(0) = d_2\omega_{22}^2 + d_1\omega_{21}^2 + 2\omega_{21}\omega_{22}k, \\ \widehat{\gamma}_{12}(0) = \omega_{11}\omega_{21}d_1 + \omega_{12}\omega_{22}d_2 + k(\omega_{11}\omega_{22} + \omega_{12}\omega_{21}). \end{cases} \tag{20}$$

Ця система нелінійна і її розв'язок можна знайти лише наближеними методами.

4.2. Оцінки параметрів $VMA(q)$ процесу. Маємо процес (4)

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t + \Omega_1\varepsilon_{t-1} + ... + \Omega_q\varepsilon_{t-q}.$$

Зведемо пошук оцінок до системи матричних рівнянь. Оцінимо матриці автоковаріацій $\Gamma_k = (\gamma_{ij})$ як і в випадку $VMA(1)$

$$\widehat{\gamma}_{ij}(k) = \frac{\sum\limits_{t=1+k}^{T}(y_t^i - \widehat{\mu}_i)(y_{t-k}^j - \widehat{\mu}_j)}{T-k},$$

де i, j набувають значення від 1 до n. Тоді згідно з рівняннями, які були виведені в пункті 2.2, можна записати систему

$$\begin{cases} \Gamma_0 = \Sigma + \Omega_1\Sigma\Omega_1' + \Omega_2\Sigma\Omega_2' + ... + \Omega_q\Sigma\Omega_q', \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Gamma_k = \Omega_k\Sigma + \Omega_{k+1}\Sigma\Omega_1' + \dots\Omega_q\Sigma\Omega_{q-k}' \text{ при } k = 1, \dots, q. \end{cases} \tag{21}$$

5. Оцінки параметрів VMA процесу методом максимальної правдоподібності. Знайдемо оцінки параметрів моделі (1) за допомогою методу умовної правдоподібності та методу точної правдоподібності.

Додаткове припущення до початкової моделі: ε_t – невироджений нормальний вектор, тобто $\varepsilon_t \sim N[0, \Sigma]$, де Σ симетрична, додатно визначена матриця.

5.1. Метод умовної правдоподібності. Якщо значення ε_{t-1} з певністю відоме, то

$$Y_t|\varepsilon_{t-1} \sim N[\mu + \Omega\varepsilon_{t-1}, \Sigma]$$

і

$$f(Y_t|\varepsilon_{t-1}; \mu, \Sigma, \Omega) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}\exp[-\frac{1}{2}(Y_t - \mu - \Omega\varepsilon_{t-1})'\Sigma^{-1}(Y_t - \mu - \Omega\varepsilon_{t-1})].$$

Припустимо, що $\varepsilon_0 = 0$. Тоді $(Y_1|\varepsilon_0 = 0) \sim N[\mu, \Sigma]$. Маючи спостереження Y_1, знайдемо $\varepsilon_1 = Y_1 - \mu$. Тепер можемо записати щільність

$$f(Y_2|Y_1, \varepsilon_0 = 0; \mu, \Sigma, \Omega) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}\exp[-\frac{1}{2}(Y_2 - \mu - \Omega\varepsilon_1)'\Sigma^{-1}(Y_2 - \mu - \Omega\varepsilon_1)].$$

Продовжуючи цей процес, маємо, що $\varepsilon_t = Y_t - \mu - \Omega\varepsilon_{t-1}$ та

$$f(Y_t|Y_{t-1},\dots,Y_1,\varepsilon_0=0;\mu,\Sigma,\Omega)=f(Y_t|\varepsilon_{t-1};\mu,\Sigma,\Omega)=$$
$$=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}\exp[-\frac{1}{2}(Y_t-\mu-\Omega\varepsilon_{t-1})'\Sigma^{-1}(Y_t-\mu-\Omega\varepsilon_{t-1})].$$

Функція правдоподібності всієї вибірки матиме вигляд

$$L(Y_T,Y_{T-1},\dots,Y_1,\varepsilon_0=0,\mu,\Sigma,\Omega)=f(Y_1|\varepsilon_0=0;\mu,\Sigma,\Omega)\times$$
$$\times\prod_{t=2}^{T}f(Y_t|Y_{t-1},\dots,Y_1,\varepsilon_0=0;\mu,\Sigma,\Omega), \tag{22}$$

а її логарифм –

$$\mathfrak{L}(\mu,\Sigma,\Omega)=-\frac{Tn}{2}\ln 2\pi-\frac{T}{2}\ln|\Sigma|-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t'\Sigma^{-1}\varepsilon_t, \tag{23}$$

де ε_t можна визначити як

$$\varepsilon_t=(Y_t-\mu)-\Omega(Y_{t-1}-\mu)+\Omega^2(Y_{t-2}-\mu)+$$
$$+\dots+(-1)^{t-1}\Omega^{t-1}(Y_1-\mu)+(-1)^t\Omega^t\varepsilon_0.$$

Функція (23) як функція змінних μ,Σ,Ω є нелінійною і знайти точки максимуму цієї функції нелегко. Тому УОМП параметрів процесу $VMA(1)$ знаходять за допомогою чисельної оптимізації.

Зауваження 1. У випадку $VMA(q)$ процесу функція максимальної правдоподібності будується аналогічно. Накладемо умову

$$\varepsilon_0=\varepsilon_{-1}=\dots=\varepsilon_{-(q-1)}=0.$$

Маючи початкові значення, за допомогою ітерацій можемо знайти ε_t для $t=1,2,\dots,T$. Позначимо через e_0 вектор $(\varepsilon_0,\varepsilon_{-1},\dots,\varepsilon_{-(q-1)})'$. Тоді функція умовної правдоподібності матиме вигляд

$$L(Y_1,\dots,Y_T,\Sigma,\Omega_1,\dots,\Omega_q,\mu|e_0=0)=\prod_{t=1}^{T}\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}}exp\left[-\frac{1}{2}\varepsilon_t'\Sigma^{-1}\varepsilon_t\right].$$

5.2. Ітераційні наближення. Для отримання ліпших оцінок параметрів моделі продовжимо метод умовної правдоподібності, використовуючи ітераційні наближення. Для спрощення позначимо $\tilde{Y}_t=Y_t-\mu$. Застосувавши метод умовної правдоподібності, можемо отримати оцінки μ, Σ та $\Omega_0,\dots,\Omega_q$, які приймаємо за початкові значення для описаного дальше алоритму.

Ми маємо, що

$$\varepsilon_t=\tilde{Y}_t-\Omega_1\varepsilon_{t-1}-\dots-\Omega_q\varepsilon_{t-q}=\tilde{Y}_t+\Omega(L)\varepsilon_{t-1},$$

де $\Omega(L) = -(\Omega_1 \mathrm{L} + \ldots + \Omega_q \mathrm{L}^q)$, L – лаговий оператор. З цієї рівності, рекурсивно підставляючи значення $\tilde{Y}_t$, можна отримати таке:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \tilde{Y}_1 + \Omega(L)\varepsilon_0, \\
\varepsilon_2 &= \tilde{Y}_2 + \Omega(L)\varepsilon_1 = \tilde{Y}_2 + \Omega(L)\tilde{Y}_1 + \Omega^2(L)\varepsilon_0, \\
\vdots &= \vdots \\
\varepsilon_T &= \tilde{Y}_T + \Omega(L)\tilde{Y}_{T-1} + \ldots + \Omega^{T-1}(L)\tilde{Y}_1 + \Omega^T(L)\varepsilon_0.
\end{aligned} \tag{24}$$

Введемо для зручності ще одне позначення $\breve{Y}_t = \tilde{Y}_t + \Omega(L)\tilde{Y}_{t-1} + \ldots + \Omega^{t-1}(L)\tilde{Y}_1$ для всіх $t = 1, 2, \ldots, T$. Тоді (24) можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned}
\breve{Y}_1 &= -\Omega(L)\varepsilon_0 + \varepsilon_1, \\
\breve{Y}_2 &= -\Omega^2(L)\varepsilon_0 + \varepsilon_2, \\
\vdots &= \vdots \\
\breve{Y}_T &= -\Omega^T(L)\varepsilon_0 + \varepsilon_T.
\end{aligned}$$

Це є зображенням системи регресійних рівнянь з вектором параметрів ε_0, який можна оцінити за допомогою методу найменших квадратів. Маючи оцінку $\widehat{\varepsilon}_0$, ми можемо знайти всі збурення ε_t

$$\varepsilon_1 = Y_1 - \mu - \Omega(L)\widehat{\varepsilon}_0,\ \varepsilon_2 = Y_2 - \mu - \Omega(L)\tilde{Y}_1,\ \ldots$$

Маючи ці значення, ми знову повертаємося до функції (23) з новою умовою $\varepsilon_0 = \widehat{\varepsilon}_0$ і знаходимо нові значення параметрів моделі. Продовжуємо цей процес доти, доки не досягнемо потрібної точності.

5.3. Метод точної правдоподібності для $VMA(1)$. Оскільки сума нормально розподілених випадкових величин є нормально розподіленою, то з того, що $\varepsilon_t \sim N[0, \Sigma]$, випливає, що Y_t має нормальний розподіл

$$Y_t \sim N[\mu, \Gamma_0],$$

де $\Gamma_0 = \Sigma + \Omega\Sigma\Omega'$. Тоді щільність матиме вигляд

$$f(Y_t, \mu, \Sigma, \Omega) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}|\Gamma_0|^{-\frac{1}{2}} \exp[-\frac{1}{2}(Y_t - \mu)'\Gamma_0^{-1}(Y_t - \mu)].$$

Запишемо функцію правдоподібності

$$L(Y_t, \mu, \Sigma, \Omega) = \prod_{t=1}^{T} f(Y_t, \mu, \Sigma, \Omega) \tag{25}$$

і її логарифм -

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}(Y_t, \mu, \Sigma, \Omega) = -\frac{Tn}{2}\ln 2\pi - \frac{T}{2}\ln|\Sigma + \Omega\Sigma\Omega'| - \\
-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(Y_t - \mu)'(\Sigma + \Omega\Sigma\Omega')^{-1}(Y_t - \mu).
\end{aligned} \tag{26}$$

Зауваження 2. Функція максимальної правдоподібності для $VMA(q)$ матиме вигляд

$$L(Y_t, \mu, \Sigma, \Omega) = \prod_{t=1}^{T} f(Y_t, \mu, \Sigma, \Omega_0, \dots, \Omega_q), \tag{27}$$

а її логарифм

$$\mathfrak{L}(Y_t, \mu, \Sigma, \Omega) = -\frac{Tn}{2}\ln 2\pi - \frac{T}{2}\ln|\Gamma_0| - \\ -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(Y_t-\mu)'(\Gamma_0)^{-1}(Y_t-\mu),$$

де $\Gamma_0 = \Sigma + \Omega_1\Sigma\Omega_1' + \Omega_2\Sigma\Omega_2' + ... + \Omega_q\Sigma\Omega_q'$, згідно з властивостями виведеними в 2.2 .

6. Оцінки параметрів VMA процесу, отримані зведенням його до VAR. Головна ідея цього підходу полягає в тому, що ми, наклавши додаткові умови на VMA, можемо звести його до VAR моделі, для якої вже розроблено методи оцінки параметрів.

Нагадаємо, що ми маємо n-вимірний часовий ряд Y_t. Нехай він має нульове математичне сподівання і задовольняє основне припущення (i) та задається рівністю

$$Y_t = \Omega_0^*\epsilon_t + \Omega_1^*\epsilon_{t-1} + \ldots + \Omega_q^*\epsilon_{t-q}, \tag{28}$$

де ϵ_t – векторний білий шум, який задовольняє основне припущення (ii); корені рівняння

$$|\Omega_0^* m^q + \Omega_1^* m^{q-1} + \ldots + \Omega_q^*| = 0 \tag{29}$$

лежать поза одиничним кругом. Тоді можемо говорити про зворотність VMA процесу. Якщо процес (28) не є зворотним, то він зводиться до зворотного

$$Y_t = \Omega_0\varepsilon_t + \Omega_1\varepsilon_{t-1} + \ldots + \Omega_q\varepsilon_{t-q}.$$

Далі в результаті перетворень отримуємо $VAR(\infty)$ процес

$$Y_t = \sum_{j=1}^{\infty} B_j Y_{t-j} + B_0\varepsilon_t,$$

де матриці B_j задовольняють співвідношення

$$\begin{aligned} B_0 &= \Omega_0, \\ B_1 &= \Omega_1, \\ B_2 &= -B_1\Omega_1 + \Omega_2, \\ &\vdots \\ B_q &= -B_{q-1}\Omega_1 - B_{q-2}\Omega_2 - \ldots - B_1\Omega_{q-1} + \Omega_q; \\ B_j &= \sum_{i=1}^{q} -B_{j-1}\Omega_i \text{ при } j = q+1, \ldots . \end{aligned} \tag{30}$$

Цей метод не є ітераційним та вимагає лише розв'язку рекурсивної системи рівнянь (30) та оцінки параметрів VAR.

Детально цей підхід описано в [5].

7. Приклад побудови VMA процесу. Розглянемо випадок бі-варіантного векторного MA процесу. За перший процес взято логарифм повернення у відсотках від акцій компанії IBM, а за другий S&P 500 index. Вибірка спостережень з січня 1926 року до лютого 1999 року, щомісячна.

7.1. Перевірка на стаціонарність. Для подальшої роботи з даними треба зробити перевірку на стаціонарність рядів. Перший висновок можна зробити, аналізуючи графіки часових рядів. Якщо дані в часі коливаються навколо якоїсь константи або

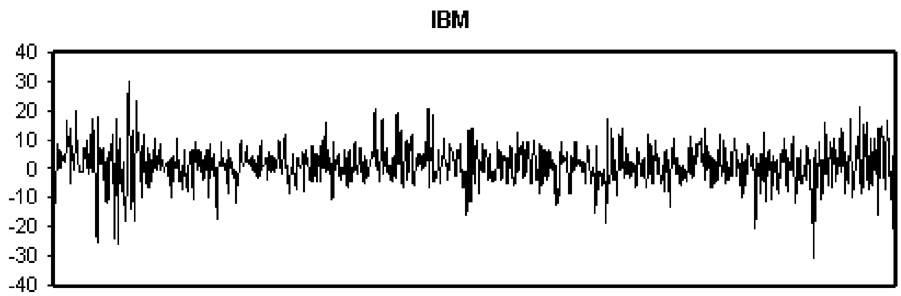


Рис.1

навколо тренду(тренд - стаціонарність), то вважають, що є підстави називати ряд стаціонарним. В іншому випадку його можна звести до стаціонарного оператором різниць. На рис. 1 та 2 зображено динаміку зміни цих процесів протягом заданого

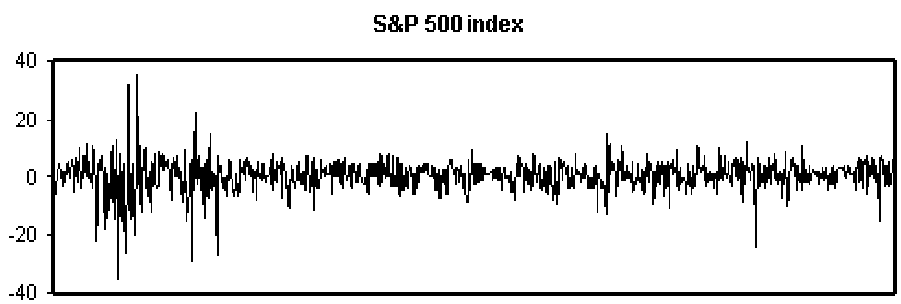


Рис.2

періоду. Графіки дають змогу зробити висновок, що задані ряди – стаціонарні. Для більшої впевненості потрібно перевірити цю гіпотезу статистичними критеріями.

Використаємо розширений тест Дікі-Фуллера (ADF-test). Цю перевірку можна виконати, використовуючи економетричний пакет EViews. Результати подано в табл. 1 та 2.

Таблиця 1 (для IBM)

ADF Test Statistic	-12.13601	1%	Critical Value	-2.5680
		5%	Critical Value	-1.9398
		10%	Critical Value	-1.6158

Таблиця 2 (для SP500)

ADF Test Statistic	-12.21558	1%	Critical Value	-2.5680
		5%	Critical Value	-1.9398
		10%	Critical Value	-1.6158

Як видно з отриманих даних, абсолютне значення розрахованої величини МакКіннона (ADF Test Statistic) більше за критичне значення навіть при рівні статистичної значущості 1% і в першому, і в другому випадках. Отже, стаціонарність рядів, які описуються логарифмом повернення у відсотках від акцій компанії IBM та S&P 500 індексом, підтверджено.

7.2. Знаходження порядку MA процесів. Для побудови моделей та їхнього порівняння треба зробити ще один крок. Перевірити чи наші дані справді описуються MA процесами та знайти їхній порядок. Потрібні висновки можна зробити, аналізуючи автокореляційну функцію (ACF) та часткову автокореляційну функцію (PACF). Результати отриманих емпірично ACF та PACF подано в табл. 3, 4, з яких видно, що дані не можна описати MA моделями.

Таблиця 3 (для IBM)

ACF	0.076	0.016	-0.019	-0.023	0.004	-0.008	0.015	0.074	0.042
PACF	0.076	0.011	-0.021	-0.020	0.008	-0.008	0.015	0.072	0.031

Таблиця 4 (для SP500)

ACF	0.076	-0.016	-0.110	0.024	0.084	-0.021	0.023	0.047	0.076
PACF	0.076	-0.022	-0.108	0.041	0.078	-0.046	0.037	0.061	0.057

Застосувавши оператор перших різниць, поведінка ACF та PACF для обох показників, яка зображена на рис. 3-6 показує, що ми маємо справу з процесами рухомого середнього. Поведінку корелограм (ACF) і часткових корелограм (PACF) для $MA(q)$ моделей можна подати так:

- для ACF. Скінчена, дорівнює нулю після лага q;
- для PACF. Нескінчено зменшується до нуля.

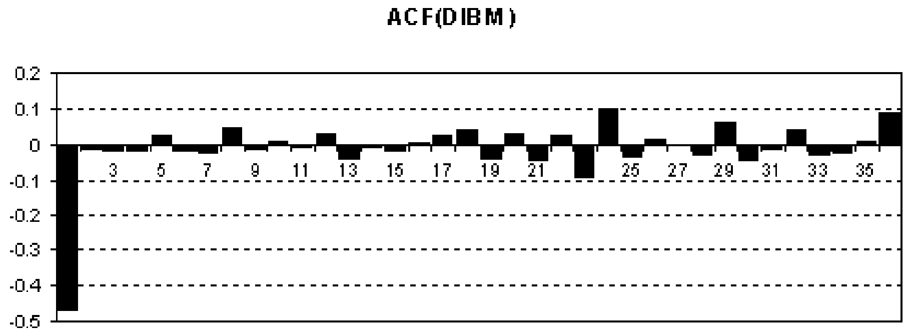


Рис.3

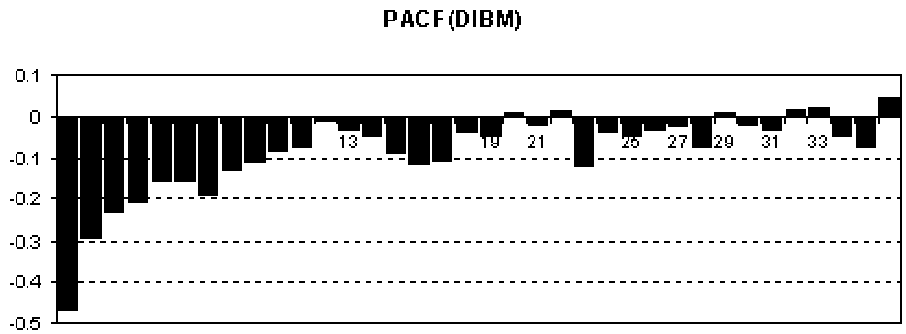


Рис.4

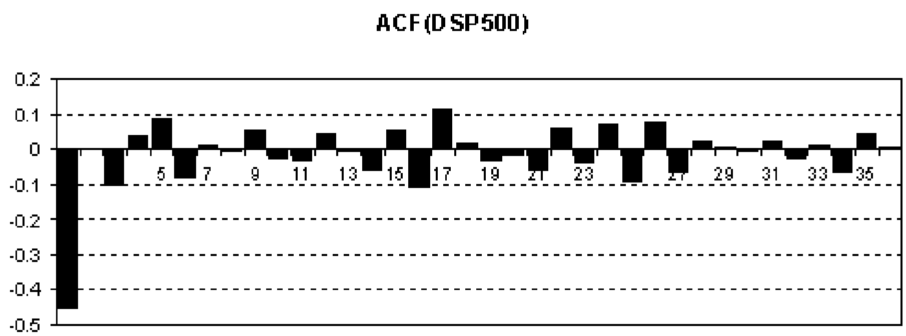


Рис.5

Отже, зробивши відповідний висновок з отриманих емпіричних автоковаріацій і часткових автковаріацій, очевидно, що в обох випадках дані описуються $MA(1)$ моделями.

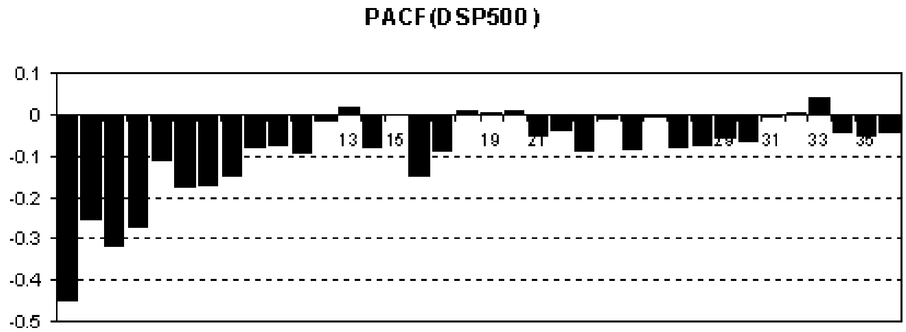


Рис.6

7.3. Оцінка параметрів для звичайних MA процесів і векторної моделі. Далі знайдемо параметри $MA(1)$ моделі для логарифма повернення у відсотках від акцій компанії IBM та S&P 500 індексу. Результати оцінок такі:

	μ	ω_1
IBM	-0.000491	-0.989949
SP500	0.001664	-0.989938

Побудуємо $VMA(1)$ модель. Для цього використаємо метод оцінки автоковаріацій описаний в пункті 4.1. Тоді оцінки Γ_0, Γ_1 та μ будуть мати такі значення:

$$\widehat{\mu}_0 = \begin{pmatrix} 1.24023 \\ 0.537164 \end{pmatrix}, \ \widehat{\Gamma}_0 = \begin{pmatrix} 45.2241 & 24.1152 \\ 24.1152 & 31.827 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{\Gamma}_1 = \begin{pmatrix} 3.42971 & 3.84248 \\ 1.68916 & 2.42199 \end{pmatrix}.$$

Далі пошук параметрів моделі Σ та Ω зводиться до розв'язування системи рівнянь (20). Оскільки система рівнянь є нелінійною, то в загальному випадку її можна розв'язати лише наближеними методами. Ця задача реалізована в програмі Mathematic 4.1. Ми отримуємо такий розв'язок:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0.0200141 & 0.106371 \\ -0.00501557 & 0.0803227 \end{pmatrix}, \ \Sigma = \begin{pmatrix} 44.7467 & 23.8237 \\ 23.8237 & 31.6409 \end{pmatrix}.$$

7.4. Порівняння побудованих моделей на підставі залишків. Для порівняння обчислимо декілька статистичних показників спочатку для залишків VMA моделі. Маємо

	IBM	SP500 index
Mean	-0.00179936	0.002387097
Standard Error	0.229491253	0.191266265
Median	-0.010142533	-0.408604873
Standard Deviation	6.834833633	5.696396176
Sample Variance	46.71495079	32.4489294
Kurtosis	2.249498508	8.471562532
Skewness	0.279382514	0.547279597
Minimum	-32.50619844	-34.72044103
Maximum	31.29694538	36.15641709

Такі ж показники обчислимо для залишків $MA(1)$ моделі IBM та SP500.

	IBM MA(1)	SP500 MA(1)
Mean	0.020883	-0.013790
Median	0.031607	0.319322
Standard Deviation	6.743814	5.658315
Kurtosis	4.950232	11.38395
Skewness	-0.236203	- 0.314975
Minimum	-30.40821	-35.57932
Maximum	29.03679	35.95278

8. Висновки. Отримані результати засвідчують, що на підставі аналізу статистичних показників залишків, моделі практично не відрізняються. Це дає змогу стверджувати, що векторні процеси рухомого середнього (ковзного середнього) дають результати не гірші, ніж звичайні MA процеси. Оскільки сучасні дослідження концентрують все більшу увагу на розробленні апарату одночасного моделювання декількох часових рядів за допомогою системи динамічних рівнянь, то ця праця дає змогу включати та досліджувати взаємозворотні зв'язки між показниками та їхніми лаговими значеннями. Отож, VMA моделі є розширенням концепції MA-моделювання окремого часового ряду.

1. *Hamilton James D.* Times series analysis / *Hamilton James D.* – Princeton: Published by Princeton University Press, 1994.
2. *Ruey S. Tsay.* Analysis of Financial Time Series / *Ruey S. Tsay.* – Chicago: John Wiley & Sons Inc, 2002.
3. *Walter Enders.* Applied Econometric Time Series / *Walter Enders.* – New York: John Wiley & Sons Inc, 2004.
4. *Galbraith J.W.* A simple, non-iterative estimator for moving average models / *Galbraith J.W., V. Zinde-Walsh.* // Biometrika. – 1994. – Vol. 81. – P. 43-155.
5. *John W. Galbraith.* Estimation of the Vector Moving Average model by Vector Autoregression / *John W. Galbraith, Aman Ullah, Victoria Zinde-Walsh.* // Econometric Reviews. – 2002. – Vol. 21, №2. – P. 205-219.

VECTOR MOVING AVERAGE MODELS

Nazarii SALISH

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1

Theoretical construction of vector moving average models have been researched and specified. Basic properties were determined and methods for searching estimations of parameters of these models were built. The practical implementation to financial activities was considered.

Key words: vector moving average models, maximum likelihood estimation, vector autoregressive processes, the autocovariance-generating function.

ВЕКТОРНЫЕ МОДЕЛИ ПОДВИЖНОГО СРЕДНЕГО

Назарий САЛИШ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1

Исследована и определена теоретическая постройка векторных процессов подвижного среднего. Получены основные свойства и построены методы отыскания оценок параметров этих моделей. Рассмотрено применение на примере финансовых показателей.

Ключевые слова: векторные модели подвижного среднего, метод максимальной правдоподобности, векторные авторегрессионные процессы, автоковариационная генерирующая функция.

Стаття надійшла до редколегії 26.10.2007

Прийнята до друку 12.06.2009

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2009. *Ser. Mech. Math. 2009.*
Вип. 70. С. 159–182 *Is. 70. P. 159–182*

УДК 517.95

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ В НЕОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ

Галина ТОРГАН

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: torgan_ g@yahoo.com

Одержано деякі достатні умови існування узагальненого розв'язку мішаної задачі для нелінійного параболічного рівняння четвертого порядку в необмеженій за просторовими змінними області.

Ключові слова: нелінійне параболічне рівняння, мішана задача.

Рівняння з другою похідною за часом і четвертими похідними за просторовими змінними вигляду
$$u_{tt} = div\ \sigma(\nabla u) + \triangle u_t - \delta^2 \triangle^2 u, \tag{1}$$
де $\sigma \geqslant 0$, $0 < \delta < 1$, моделюють процеси фазового переходу у в'язкопружних середовищах з капілярністю. У працях [1], [2] розглянуто частковий випадок рівняння (1), коли наявна одна просторова змінна. Зазначимо, що задачі для рівнянь типу (1) з різними нелінійностями досліджено у [3]-[9].

У цій праці одержано деякі достатні умови існування узагальненого розв'язку мішаної задачі для нелінійного параболічного рівняння четвертого порядку з другою похідною за часовою змінною в необмеженій за просторовими змінними області.

Нехай Ω – необмежена область в просторі $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\Omega \in C^1$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, де $T < \infty$, $\Omega_\tau = Q_T \cap \{t = \tau\}$, $\tau \in [0,T]$, $\Omega^R = \Omega \cap B^R$, де $B^R = \{x \in \mathbb{R}^n :\ |x| < R\}$, $Q_T^R = \Omega^R \times (0,T)$, $\Omega_\tau^R = Q_T^R \cap \{t = \tau\}$. Припустимо, що для довільного додатного R область Ω^R регулярна в сенсі Кальдерона [12, с. 44].

В області Q_T розглянемо задачу для рівняння з дійснозначними коефіцієнтами і вільним членом
$$A(u) \equiv u_{tt} + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} (a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j})_{x_s x_l} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,t) u_{tx_i})_{x_j} - \sum_{i=1}^{n} (a_i(x,t) |u_{tx_i}|^{p-2} u_{tx_i})_{x_i} +$$
$$+ a_0(x,t)|u_t|^{q-2} u_t + c_0(x,t) u = f(x,t) \tag{2}$$

з початковими умовами

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x) \tag{3}$$

і крайовими умовами

$$u\big|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial\widetilde{\nu}}\bigg|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \tag{4}$$

де $\widetilde{\nu}$ – зовнішня нормаль до поверхні $\partial\Omega\times(0,T)$, $p>1$, $q>1$.

Нехай $L^r_\nu(\Omega)$ – замикання множини функцій $C_0^\infty(\Omega)$ за нормою

$$||u||_{L^r_\nu(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega |u|^r e^{-\nu\sqrt{|x|^2+1}}dx\right)^{1/r}, \quad r\in[1,+\infty);$$

$H^2_{0,\nu}(\Omega)$ – замикання множини функцій $C_0^\infty(\Omega)$ за нормою

$$||u||_{H^2_{0,\nu}(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega \left[|u|^2 + \sum_{i,j=1}^n |u_{x_ix_j}|^2\right] e^{-\nu\sqrt{|x|^2+1}}dx\right)^{1/2};$$

$W^{1,p}_{0,\nu}(\Omega)$ – замикання множини $C_0^\infty(\Omega)$ за нормою

$$||u||_{W^{1,p}_{0,\nu}(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega \left[|u|^p + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^p\right] e^{-\nu\sqrt{|x|^2+1}}dx\right)^{1/p};$$

$W^{1,p}_0(\Omega)$ – замикання множини $C_0^\infty(\Omega)$ за нормою

$$||u||_{W^{1,p}_0(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^p dx\right)^{1/p};$$

$$W^{1,p}_{0,loc}(\overline{\Omega}) = \left\{u:\ u\in W^{1,p}_0(K)\ \text{ для довільної }\ K\subset\Omega\right\};$$

$$V_0(\Omega^R) = H^2_0(\Omega^R)\cap H^4(\Omega^R)\cap W^{1,2p-4}(\Omega^R)\cap W^{1,p}_0(\Omega^R)\cap L^{2q-2}(\Omega^R)$$

при $p>2$ і

$$V_0(\Omega^R) = H^2_0(\Omega^R)\cap H^4(\Omega^R)\cap W^{1,p}_0(\Omega^R)\cap L^{2q-2}(\Omega^R)$$

при $p\in(1,2)$. Припустимо виконання таких умов:

(A): $a_{ij},\ a_{ijt},\ a_{ijtt},\ a_i,\ a_{it},\ a_0,\ a_{0t}\in L^\infty(Q_T)$, $D^k a^{sl}_{ij}(\cdot)$, $D^1 a_{ij}(\cdot,0)$, $D^1 a_i(\cdot,0)\in$ $\in L^\infty(\Omega)$, $|k|\leqslant 2$, $i,j,s,l\in\{1,...,n\}$, де $D^k = \dfrac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}$, $|k| = \alpha_1+...+\alpha_n$, $\alpha_1,...,\alpha_n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$,

$$a_0(x,t)\geqslant A_0>0\ \text{ для майже всіх }\ (x,t)\in Q_T;$$

$$\sum_{i,j=i}^n a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geqslant A_1\sum_{i=1}^n|\xi_i|^2, \qquad A_1>0$$

для майже всіх $(x,t)\in Q_T$ і всіх $\xi_i\in\mathbb{R}$;

$$\sum_{i,j,s,l=i}^n a^{sl}_{ij}(x)\xi_{ij}\xi_{sl} \geqslant A_2\sum_{i,j=1}^n|\xi_{ij}|^2, \qquad A_2>0$$

для майже всіх $x \in \Omega$ і всіх $\xi_{ij} \in \mathbb{R}$ таких, що $\xi_{ij} = \xi_{ji}$,

$$a_{ij}^{sl}(x) = a_{sl}^{ij}(x), \quad a_{ij}(x,t) = a_{ji}(x,t) \quad \text{майже для всіх} \quad (x,t) \in Q_T,$$

$$0 < \nu_1 \leqslant a_i(x,t) \leqslant \nu_2 \quad \text{для майже всіх} \quad (x,t) \in Q_T \quad \text{і всіх} \quad i \in \{1,...,n\};$$

(C): $c_0,\ c_{0t} \in L^{\infty}(Q_T)$.

Означення 1. *Функцію $u \in L^2((0,T); H^2_{0,loc}(\overline{\Omega}))$ таку, що $u_t \in L^p((0,T); W^{1,p}_{0,loc}(\overline{\Omega}))\cap$ $\cap L^q((0,T); L^q_{loc}(\overline{\Omega})) \cap L^2((0,T); H^1_{0,loc}(\overline{\Omega}))$, називаємо узагальненим розв'язком задачі (2)-(4), якщо вона задовольняє (2) в Q_T в сенсі розподілів і задовольняє початкові умови (3).*

Розглянемо допоміжну задачу

$$A(u) = f^R(x,t), \quad (x,t) \in Q_T^R, \tag{5}$$

$$u(x,0) = u_0^R, \quad u_t(x,0) = u_1^R(x), \quad x \in \Omega^R, \tag{6}$$

$$u\big|_{\partial\Omega^R \times (0,T)} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \widetilde{\nu}}\bigg|_{\partial\Omega^R \times (0,T)} = 0, \tag{7}$$

де $R > 1$, $f^R(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & (x,t) \in Q_T^R, \\ 0, & (x,t) \in Q_T \setminus Q_T^R, \end{cases}$ $u_0^R(x) = u_0(x)\rho_R(x)$,
$u_1^R(x) = u_1(x)\rho_R(x)$, $\rho_R \in C_0^4(\mathbb{R}^n)$, $\rho_R(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant R-1, \\ 0, & |x| \geqslant R, \end{cases}$,
$0 \leqslant \rho_R(x) \leqslant 1$ при $x \in \mathbb{R}^n$.

Означення 2. *Функцію $u \in L^2((0,T); H_0^2(\Omega^R))$ таку, що $u_t \in L^p((0,T); W_0^{1,p}(\Omega^R))\cap$ $\cap L^q(Q_T^R)$, $u_{tt} \in L^2(Q_T^R)$ і u задовольняє початкові умови (3) та рівність*

$$\int\limits_{Q_\tau^R} \Big[u_{tt}v + \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} v_{x_s x_l} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) u_{tx_i} v_{x_j} +$$

$$+ \sum_{i=1}^n a_i(x,t) |u_{tx_i}|^{p-2} u_{tx_i} v_{x_i} + a_0(x,t)|u_t|^{q-2} u_t v + c_0(x,t)uv - f(x,t)v \Big] dxdt = 0 \tag{8}$$

для довільних $\tau \in (0,T]$ і $v \in L^2((0,T); H_0^2(\Omega^R)) \cap L^p((0,T); W_0^{1,p}(\Omega^R)) \cap L^q(Q_T^R)$, називаємо узагальненим розв'язком задачі (5)-(7).

Приймемо $q_0 = \min\{q', 2\}$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови **(A)**, **(C)**, $q > 1$, $p \in (1,2) \cup (2,+\infty)$, $f \in L^{q_0}(Q_T^R)$, $f_t \in L^2(Q_T^R)$, $u_0^R \in H_0^2(\Omega^R) \cap H^4(\Omega^R)$, $u_1^R \in H_0^1(\Omega^R) \cap H^2(\Omega^R)\cap$ $\cap L^{2q-2}(\Omega^R) \cap W^{1,2p-4}(\Omega^R)$ при $p > 2$ і $u_1 = 0$ при $p \in (1,2)$. Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (5)-(7).*

Доведення. Використаємо метод Фаедо-Гальоркіна. Оскільки простір $V_0(\Omega^R)$ – сепарабельний банахів, то в ньому існує така зліченна множина $\{\varphi^h\}$, що будь-яка скінченна кількість елементів цієї множини лінійно незалежна і замикання її лінійної оболонки в $V_0(\Omega^R)$ збігається з цим простором. Можемо прийняти, що $\{\varphi^h\}$

ортонормована в $L^2(\Omega^R)$. Розглянемо функції $u^N(x,t) = \sum\limits_{h=1}^{N} c_h^N(t)\varphi^h(x)$, $N \in \mathbb{N}$, де $c_1^N, c_2^N, ..., c_N^N$ – розв'язки відповідних задач Коші

$$\int\limits_{\Omega^R} \Bigg[u_{tt}^N \varphi^h + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j}^N \varphi_{x_s x_l}^h + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) u_{t x_i}^N \varphi_{x_j}^h + a_0(x,t)|u_t^N|^{q-2} u_t^N \varphi^h +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)|u_{tx_i}^N|^{p-2} u_{tx_i}^N \varphi_{x_i}^h + c_0(x,t) u^N \varphi^h - f^R(x,t)\varphi^h \Bigg] dx = 0, \quad t \in [0,T], \tag{9}$$

$$c_h^N(0) = u_{0,h}^{R,N}, \qquad c_{ht}^N(0) = u_{1,h}^{R,N}, \qquad h \in \{1,...,N\}, \tag{10}$$

де

$$u_0^{R,N}(x) = \sum_{h=1}^{N} u_{0,h}^{R,N} \varphi^h(x), \quad \|u_0^{R,N} - u_0^R\|_{H^4(\Omega^R)\cap H_0^2(\Omega^R)} \to 0,$$

$$u_1^{R,N}(x) = \sum_{h=1}^{N} u_{1,h}^{R,N} \varphi^h(x), \quad \|u_1^{R,N} - u_1^R\|_{H^2(\Omega^R)\cap H_0^1(\Omega^R)\cap W_0^{1,2p-2}(\Omega^R)\cap L^{2q-2}(\Omega^R)} \to 0$$

при $N \to \infty$. На підставі теореми Каратеодорі [10, с. 54] існує розв'язок задачі (9), (10), який має абсолютно неперервну похідну на проміжку $[0, t_N]$. З оцінок, одержаних нижче, випливає, що $t_N = T$.

Домножимо (9) на c_{ht}^N, підсумуємо за h від 1 до N і проінтегруємо за t від 0 до τ, де $\tau \in (0,T]$

$$\int\limits_{Q_\tau^R} \Bigg[u_{tt}^N u_t^N + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j}^N u_{t x_s x_l}^N + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) u_{tx_i}^N u_{tx_j}^N + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)|u_{tx_i}^N|^p +$$

$$+ a_0(x,t)|u_t^N|^q + c_0(x,t) u^N u_t^N - f(x,t) u_t^N \Bigg] dxdt = 0. \tag{11}$$

Врахувавши оцінку

$$J_1 := \int\limits_{Q_\tau^R} f^R(x,t) u_t^N dxdt \leqslant \frac{\delta_1 \chi_0}{2} \int\limits_{Q_\tau^R} |u_t^N|^2 dxdt + \frac{\delta_1(1-\chi_0)}{q} \int\limits_{Q_\tau^R} |u_t^N|^q dxdt +$$

$$+ \left(\frac{\chi_0}{2\delta_1} + \frac{1-\chi_0}{q' \delta_1^{\frac{q'}{q}}} \right) \int\limits_{Q_\tau^R} |f(x,t)|^{q_0} dxdt,$$

де $\delta_1 > 0$, $\chi_0 = 1$ при $q \in (1,2]$, $\chi_0 = 0$ при $q > 2$, і умови **(A)**, **(C)**, з (11) легко отримати нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau^R} \Bigg[|u_t^N|^2 + A_0 \sum_{i,j=1}^{n} |u_{x_i x_j}^N|^2 \Bigg] dx + \int\limits_{Q_\tau^R} \Bigg[2A_1 \sum_{i=1}^{n} |u_{tx_i}^N|^2 + \left(2A_0 - \frac{2\delta_1(1-\chi_0)}{q} \right) |u_t^N|^q +$$

$$+ 2\nu_1 \sum_{i=1}^{n} |u_{tx_i}^N|^p \Bigg] dxdt \leqslant \left(C_0 + 2T^2 + \delta_1 \chi_0 \right) \int\limits_{Q_\tau^R} |u_t^N|^2 dxdt + \left(\frac{\chi_0}{\delta_1} + \frac{2(1-\chi_0)}{q' \delta_1^{\frac{q'}{q}}} \right) \times$$

$$\times \int\limits_{Q_\tau^R} |f^R(x,t)|^{q_0}\,dxdt + \int\limits_{\Omega_0^R} \Big[|u_1^{R,N}|^2 + \frac{A_3+1}{2}\sum_{i,j=1}^n |u_{0x_ix_j}^{R,N}|^2 + 2T|u_0^{R,N}|^2\Big]dx,$$

де $\tau \in (0,T]$, $A_3 = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{\Omega} \sum\limits_{i,j,s,l=1}^n |a_{ij}^{sl}(x)|^2$, $C_0 = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{Q_T} |c_0(x,t)|^2$. Вибравши $\delta_1 = \frac{A_0 q}{2}$, можемо зробити підінтегральний вираз лівої частини отриманої нерівності додатним. Використовуючи лему Гронуолла-Белмана, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_\tau^R} \Big[|u_t^N|^2 + \sum_{i,j=1}^n |u_{x_ix_j}^N|^2\Big]dx + \int\limits_{Q_\tau^R} \Big[\sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^2 + \sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^p + |u_t^N|^q\Big]dxdt \leqslant K_1, \qquad (12)$$

де $\tau \in (0,T]$, K_1 – додатна константа, яка не залежить від N. Отже,

$$||u^N||_{L^\infty((0,T);H_0^2(\Omega^R))} \leqslant K_1,$$

$$||u_t^N||_{L^\infty((0,T);L^2(\Omega^R))\cap L^2((0,T);H_0^1(\Omega^R))\cap L^q(Q_T^R)\cap L^p((0,T);W_0^{1,p}(\Omega^R))} \leqslant K_1. \qquad (13)$$

Продиференціюємо за t рівність (9) (це можливо на підставі умов теореми). Отриману рівність домножимо на c_{htt}^N, підсумуємо за h від 1 до N і проінтегруємо за t від 0 до τ, де $\tau \in (0,T]$. Одержимо

$$\int\limits_{Q_\tau^R} \Big[u_{ttt}^N u_{tt}^N + \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x) u_{tx_ix_j}^N u_{ttx_sx_l}^N + \sum_{i,j=1}^n \big(a_{ijt}(x,t)u_{tx_i}^N + a_{ij}(x,t)u_{ttx_i}^N\big)u_{ttx_j}^N +$$

$$+\sum_{i=1}^n \big(a_{it}(x,t)|u_{tx_i}^N|^{p-2}u_{tx_i}^N u_{ttx_i}^N + (p-1)a_i(x,t)|u_{tx_i}^N|^{p-2}|u_{ttx_i}^N|^2\big) + a_{0t}(x,t)|u_t^N|^{q-2}u_{tt}^N +$$

$$+(q-1)a_0(x,t)|u_t^N|^{q-2}|u_{tt}^N|^2 + c_{0t}(x,t)u^N u_{tt}^N + c_0(x,t)u_t^N u_{tt}^N - f_t^R(x,t)u_{tt}^N\Big]dxdt = 0. \quad (14)$$

Оцінивши доданки останньої рівності (14) (на підставі умов **(A)**, **(C)**, отримаємо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau^R} \Big[|u_{tt}^N|^2 + A_2\sum_{i,j=1}^n |u_{tx_ix_j}^N|^2\Big]dx + \int\limits_{Q_\tau^R} \Big[\big(2\nu_1(p-1)-\delta_2\big)\sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^{p-2}|u_{ttx_i}|^2 +$$

$$+A_1\sum_{i=1}^n |u_{ttx_i}^N|^2 + \big(2(q-1)A_0 - \delta_3\big)|u_t^N|^{q-2}|u_t^N|^2\Big]dxdt \leqslant \frac{A_4+1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau^R}\sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^2 dx +$$

$$+\int\limits_{Q_\tau^R} \Big[\frac{A_5+1}{2}\sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^2 + \frac{A_6}{\delta_2}\sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^N|^p + \frac{A_7}{\delta_3}|u_t|^q + |u_{tt}^N|^2\big(C_1 + C_0 + 1\big) +$$

$$+\big(1+2T^2\big)|u_t^N|^2\Big]dxdt + \int\limits_{\Omega_0^R} \Big[|u_{tt}^N|^2 + \frac{A_3+1}{2}\sum_{i,j=1}^n |u_{1x_ix_j}^{R,N}|^2 + \frac{A_4+1}{2}\sum_{i=1}^n |u_{1x_i}^{R,N}|^2 +$$

$$+2T|u_0^N|^2\Big]dx + \int\limits_{Q_\tau^R} |f_t^R(x,t)|^2 dx, \quad \delta_2 > 0, \quad \delta_3 > 0, \qquad (15)$$

де $C_1 = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} |c_{0t}(x,t)|^2$, $A_4 = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} \sum\limits_{i,j=1}^{n} |a_{ijt}(x,t)|^2$, $A_5 = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} \sum\limits_{i,j=1}^{n} |a_{ijtt}(x,t)|^2$, $A_6 = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{it}(x,t)|^2$, $A_7 = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} |a_{0t}(x,t)|^2$. Виберемо $\delta_2 < 2\nu_1(p-1)$, $\delta_3 < 2A_0(q-1)$, тоді підінтегральний вираз лівої частини останньої нерівності буде додатним.

Оцінимо $\int_{\Omega_0} |u_{tt}^N|^2 dx$. Домножимо (9) на $c_{htt}^N(0)$ і підсумуємо за h від 1 до N. Отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_0^R} \Big[|u_{tt}^N(0)|^2 + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{0x_ix_j}^{R,N} u_{ttx_sx_l}^N + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,0) u_{1x_i}^{R,N} u_{ttx_j}^N + a_0(x,0)|u_1^{R,N}|^{q-2} u_1^N \times$$

$$\times u_{tt}^N + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,0)|u_{1x_i}^{R,N}|^{p-2} u_{1x_i}^{R,N} u_{ttx_i}^N + c_0(x,0) u_0^{R,N} u_{tt}^N - f^R(x,0) u_{tt}^N \Big] dx = 0.$$

Згідно з умовами теореми щодо u_0 і u_1 та **(A)**, **(C)**, з цієї рівності випливає оцінка

$$\int\limits_{\Omega_0^R} |u_{tt}^N|^2 dx \leqslant K_2,$$

де K_2 – деяка константа, яка не залежить від N. Отже, права частина нерівності (15) обмежена деякою додатною константою, яка не залежить від N. До нерівності (15) застосуємо лему Гронуолла-Белмана. Одержимо

$$\int\limits_{\Omega_\tau^R} \Big[|u_{tt}^N|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} |u_{tx_ix_j}^N|^2 + \sum_{i=1}^{n} |u_{tx_i}^N|^2 \Big] dx + \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^{n} |u_{ttx_i}^N|^2 dxdt \leqslant K_3, \tag{16}$$

де K_3 – деяка стала, яка не залежить від N, $\tau \in (0,T]$. Отож,

$$||u_{tt}^N||_{L^\infty((0,T);L^2(\Omega^R)) \cap L^2((0,T);H_0^1(\Omega^R))} \leqslant K_3,$$

$$||u_t^N||_{L^2((0,T);H_0^2(\Omega^R)) \cap L^p((0,T);W_0^{1,p}(\Omega^R)) \cap L^q(Q_T^R)} \leqslant K_3. \tag{17}$$

Введемо оператор

$$A : L^p((0,T);W_0^{1,p}(\Omega^R)) \cap L^q(Q_T^R) \to L^{p'}((0,T);W^{-1,p'}(\Omega^R)) + L^{q'}(Q_T^R)$$

за формулою

$$\langle A(u), v\rangle = \int\limits_{Q_T^R} \Big[\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)|u_{tx_i}|^{p-2} u_{tx_i} v_{tx_i} + a_0(x,t)|u_t|^{q-2} u_t v_t \Big] dxdt,$$

де $\langle \cdot,\cdot \rangle$ – скалярний добуток між елементами простору $L^{p'}((0,T);W^{-1,p'}(\Omega^R))+$ $+L^{q'}(Q_T^R)$ і $L^p((0,T);W_0^{1,p}(\Omega^R)) \cap L^q(Q_T^R)$. Враховуючи (17), легко показати, що

$$||A(u^N)||_{L^{p'}((0,T);W^{-1,p'}(\Omega^R)) + L^{q'}(Q_T^R)} \leqslant K_4, \tag{18}$$

де стала K_4 не залежить від N. Отже, на підставі (13), (17), (18) існує підпослідовність $\{u^{N_k}\} \subset \{u^N\}$ така, що $u^{N_k} \to u^R$ $*$ - слабко в $L^\infty((0,T);H_0^2(\Omega^R))$, $u_{tt}^{N_k} \to u_{tt}^R$ $*$ - слабко в $L^\infty((0,T);L^2(\Omega^R))$, $u_{tt}^{N_k} \to u_{tt}^R$ слабко в $L^2((0,T);H_0^1(\Omega^R))$,

$u_t^{N_k} \to u_t^R$ $*$ - слабко в $L^\infty((0,T);H_0^2(\Omega^R))$, $u_t^{N_k} \to u_t^R$ слабко в $L^p((0,T);W_0^{1,p}(\Omega^R)) \cap L^q(Q_T^R)$, $A(u^{N_k}) \to \chi^R$ слабко в $L^{p'}((0,T);W^{-1,p'}(\Omega^R)) + L^{q'}(Q_T^R))$ при $N_k \to \infty$.

Враховуючи ці збіжності, з (9) легко отримати рівність

$$\int\limits_{Q_T^R} \Big[u_{tt}^R \eta + \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j}^R \eta_{x_s x_l} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) u_{tx_i}^R \eta_{x_j} +$$

$$+ c_0(x,t) u^R \eta - f^R(x,t)\eta \Big] dxdt + \langle \chi^R, \eta \rangle = 0, \tag{19}$$

яка виконується для довільного $\eta \in L^2((0,T);H_0^2(\Omega^R)) \cap L^p((0,T);W_0^{1,p}(\Omega^R)) \cap$ $\cap L^q(Q_T^R)$. Доведемо, що $A(u^R) = \chi^R$. Розглянемо послідовність

$$y_k = \langle A(u^{N_k}) - A(v), u^{N_k} - v \rangle = \int\limits_{Q_T^R} \Big[\sum_{i=1}^n a_i(x,t) \big(u_{tx_i}^{N_k} - v_{tx_i} \big) \big(|u_{tx_i}^{N_k}|^{p-2} u_{tx_i}^{N_k} -$$

$$- |v_{tx_i}|^{p-2} v_{tx_i} \big) + a_0(x,t) \big(u_t^{N_k} - v_t \big) \big(|u_t^{N_k}|^{q-2} u_t^{N_k} - |v_t|^{q-2} v_t \big) \Big] dxdt, \ k \in \mathbb{N}.$$

З нерівності $\big(|\xi|^{r-2}\xi - |\eta|^{r-2}\eta\big)\big(\xi - \eta\big) \geqslant 0$, яка виконується для $r > 1$, випливає, що $y_k \geqslant 0$. Отже,

$$0 \leqslant y_k = \langle A(u^{N_k}), u^{N_k} \rangle - \langle A(v), u^{N_k} - v \rangle - \langle A(u^{N_k}), v \rangle =$$

$$= \int\limits_{Q_T^R} \Big[f^R(x,t) u_t^{N_k} - u_{tt}^{N_k} u_t^{N_k} - \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j}^{N_k} u_{tx_s x_l}^{N_k} -$$

$$- \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) u_{tx_i}^{N_k} u_{tx_j}^{N_k} - c_0(x,t) u^{N_k} u_t^{N_k} \Big] dxdt - \langle A(v), u^{N_k} - v \rangle - \langle A(u^{N_k}), v \rangle.$$

Перейдемо в останній нерівності до верхньої границі при $N_k \to \infty$. Використовуючи лему 5.3 [11], отримаємо

$$0 \leqslant \int\limits_{Q_T^R} \Big[f^R(x,t) u_t^R - \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j}^R u_{tx_s x_l}^R - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) u_{tx_i}^R u_{tx_j}^R -$$

$$- c_0(x,t) u^R u_t^R \Big] dxdt - \langle A(v), u^R - v \rangle - \langle \chi^R, v \rangle - \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_T^R} |u_t^R|^2 dx + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0^R} |u_1^R|^2 dx. \tag{20}$$

Оскільки $u_t^N \in L^2((0,T);H_0^1(\Omega^R))$, $u_{tt}^N \in L^2((0,T);H_0^1(\Omega^R))$, то на підставі леми 1.2 [12, с. 20] $u_t^R \in C((0,T);H_0^1(\Omega^R))$.

У формулі (19) приймемо $\eta = u_t^R$, матимемо рівність

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_T^R} |u_t^R|^2 dx + \int\limits_{Q_T^R} \Big[\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j}^R u_{tx_s x_l}^R + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) u_{tx_i}^R u_{tx_j}^R +$$

$$+c_0(x,t)u^R u^R_t - f^R(x,t)u^R_t\Big]dxdt + \langle \chi^R, u^R_t\rangle = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^R_0} |u^R_1|^2 dx. \qquad (21)$$

Додавши (20) і (21), отримаємо нерівність

$$\langle \chi^R - A(v), u^R - v\rangle \geqslant 0.$$

Приймемо $u^R - v = \lambda\omega$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, $\omega \in L^p((0,T);W^{1,p}_0(\Omega^R)) \cap L^q(Q^R_T)$, тоді одержимо

$$\langle \chi^R - A(u^R - \lambda\omega), \lambda\omega\rangle \geqslant 0.$$

Оскільки $\lambda > 0$, то можемо поділити отриману нерівність на λ. Спрямуємо λ до нуля і, враховуючи семінеперервність оператора A, матимемо

$$\langle \chi^R - A(u^R), \omega\rangle \geqslant 0.$$

Оскільки ω довільне, то можемо взяти ω і додатне, і від'ємне, тому

$$\chi^R = A(u^R). \qquad (22)$$

Підставимо (22) у (19), отримаємо рівність (8) з означення узагальненого розв'язку задачі (5)-(7).

Залишилося показати, що виконуються початкові умови. Підставимо в (19) $\eta = \eta(x,t)$, $\eta \in C^2([0,T];H^2_0(\Omega^R))$, $\eta(x,T) = 0$, $\eta_t(x,T) = 0$. Матимемо

$$\int\limits_{Q^R_T}\Big[u^R\eta_{tt} + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a^{sl}_{ij}(x)u^R_{x_ix_j}\eta_{x_sx_l} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)|u^R_{tx_i}|^{p-2}u^R_{tx_i}\eta_{x_i} + c_0(x,t)u^R\eta +$$

$$+a_0(x,t)|u^R_t|^{q-2}u^R_t\eta + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u^R_{tx_i}\eta_{x_j} - f^R(x,t)\eta\Big]dxdt =$$

$$= \int\limits_{\Omega^R_0} u^R_t\eta dx - \int\limits_{\Omega^R_0} u^R\eta_t dx. \qquad (23)$$

Для довільного $\eta \in C^2([0,T];H^2_0(\Omega^R))$ виконується рівність

$$\int\limits_{Q^R_\tau}\Big[u^R\eta_{tt} + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a^{sl}_{ij}(x)u^R_{x_ix_j}\eta_{x_sx_l} + c_0(x,t)u^R v + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)|u^R_{tx_i}|^{p-2}u^R_{tx_i}\eta_{x_i} +$$

$$+a_0(x,t)|u^R_t|^{q-2}u^R_t\eta + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u^R_{tx_i}\eta_{x_j} - f^R(x,t)\eta\Big]dxdt$$

$$= \int\limits_{\Omega^R_0} u^R_1\eta dx - \int\limits_{\Omega^R_0} u^R_0\eta_t dx. \qquad (24)$$

Віднявши від (23) рівність (24), одержимо

$$\int\limits_{\Omega^R_0}(u^R_t - u^R_1)\eta(x,0)dx - \int\limits_{\Omega^R_0}(u^R - u^R_0)\eta_t(x,0)dx = 0. \qquad (25)$$

Нехай $\eta(x,t) = w(x)(T-t)^2 t$, $w \in H_0^2(\Omega^R)$. Тоді

$$\eta_t(x,t) = -2w(x)(T-t)t + w(x)(T-t)^2, \quad \eta(x,0) = 0, \quad \eta_t(x,0) = w(x)T_1^2.$$

Оскільки w – довільне, то з (25) одержимо, що $u_t^R(x,0) = u_1^R(x)$. Аналогічно, взявши $\eta(x,t) = w(x)(1-t^2)$, з (25) отримуємо, що $u^R(x,0) = u_0^R(x)$. Цілком подібно доводимо теорему для $p \in (1,2)$. □

Зауваження 1. Нехай область Ω лежить в шарі $\gamma_0 < x_1 < \gamma_1$, $\Theta_0 = \gamma_1 - \gamma_0$, $u \in L^p((0,T); W_{0,\nu}^{1,p}(\Omega))$. Тоді згідно з нерівністю Фрідріхса

$$\int\limits_{\Omega_t} |u|^p \psi(x)dx \leqslant C(\Theta_0,p) \int\limits_{\Omega_t} \left| [(u\psi(x))^{\frac{1}{p}}]_{x_1} \right|^p dx \leqslant$$

$$\leqslant C(\Theta_0,p)2^{p-1} \left[\int\limits_{\Omega_t} |u_{x_1}|^p \psi(x)dx + \left(\frac{\nu}{p}\right)^p \int\limits_{\Omega_t} |u|^p \psi(x)dx \right],$$

де $\psi(x) = e^{-\nu\sqrt{|x|^2+1}}$. Звідси

$$\left(1 - \frac{C(\Theta_0,p)2^{p-1}\nu^p}{p^p}\right) \int\limits_{\Omega_t} |u|^p \psi(x)dx \leqslant C(\Theta_0,p)2^{p-1} \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^p \psi(x)dx.$$

Отже, якщо $\nu < \frac{p}{[C(\Theta_0,p)2^{p-1}]^{1/p}}$, то

$$\int\limits_{\Omega_t} |u|^p \psi(x)dx \leqslant \gamma_2 \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^p \psi(x)dx,$$

де $\gamma_2 = \dfrac{1 - C(\Theta_0,p)2^{p-1}\nu^p p^{-p}}{C(\Theta_0,p)2^{p-1}}$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* ***(A)***, ***(C)***, $p \in (2,+\infty)$, $q \in (p,+\infty)$, $n < \dfrac{pq}{q-p}$, *область* Ω *лежить в шарі* $\gamma_0 < x_1 < \gamma_1$, $\nu < \min\left\{\dfrac{p}{[C(\Theta_0,p)2^{p-1}]^{1/p}};\ \dfrac{\nu_1 pp'}{2\nu_2(1+\gamma_2)}\right\}$, $u_0 \in H_{0,\nu}^2(\Omega)$, $u_1 \in L_\nu^2(\Omega)$, $f \in L^2((0,T); L_\nu^2(\Omega))$. *Тоді існує узагальнений розв'язок* u *задачі (2)-(4), який задовольняє оцінку*

$$\int\limits_{Q_T} \left[|u|^2 + |u_t|^2 + |u_t|^q + |u_t|^p + \sum_{i=1}^n |u_{tx_i}|^p + \sum_{i=1}^n |u_{tx_i}|^2 + \sum_{i,j=1}^n |u_{x_i x_j}|^2 \right] \psi(x)dxdt \leqslant M_1,$$

де $\psi(x) = e^{-\nu\sqrt{|x|^2+1}}$ *і стала* M_1 *залежить від початкових даних, вільного члена та коефіцієнтів рівняння, а також числа* ν.

Доведення. Розглянемо в обмеженій області Q_T^k, де $k \in \mathbb{N}$, допоміжну задачу

$$A(u) = f^{k,k}, \quad (x,t) \in Q_T^k,$$
$$u|_{\partial\Omega^k \times (0,T)} = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial \widetilde{\nu}}\right|_{\partial\Omega^k \times (0,T)} = 0, \tag{26}$$
$$u(x,0) = u_0^{k,k}(x), \quad u_t(x,0) = u_1^{k,k}(x), \quad x \in \Omega^k,$$

де $f^{k,k}(x,t) = \begin{cases} f^k(x,t), & (x,t) \in Q_T^k, \\ 0, & (x,t) \in Q_T \setminus Q_T^k, \end{cases}$ а початкові умови мають такий вигляд:

$$u_0^{k,k}(x) = u_0^k(x)\psi^k(x), \quad u_1^{k,k}(x) = u_1^k(x)\psi^k(x)$$

з $\psi^k(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } |x| < k-1 \\ 0, & \text{при } |x| \geqslant k, \end{cases}$ і $0 \leqslant \psi^k(x) \leqslant 1$, $x \in \mathbb{R}^k$, $\psi^k \in C^4(\mathbb{R}^n)$.

Нехай послідовності $\{f^k\}$, $\{u_0^k\}$, $\{u_1^k\}$ такі, що

$$f^k \in C^1([0,T]; C(\Omega)), \quad u_0^k \in C_0^4(\Omega), \quad u_1^k \in C_0^2(\Omega), \quad f^k \to f \text{ в } L^2((0,T); L^2_\nu(\Omega)),$$

$$u_0^k \to u_0 \text{ в } H^2_{0,\nu}(\Omega), \quad u_1^k \to u_1 \text{ в } L^2_\nu(\Omega) \text{ при } k \to \infty. \tag{27}$$

На підставі теореми 1 існує узагальнений розв'язок u^k задачі (26), $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Згідно з (9) маємо рівність

$$\int\limits_{Q_\tau} \Bigg[u_{tt}^k u_t^k e^{-\mu t}\psi(x) + \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j}^k (u_t^k e^{-\mu t}\psi(x))_{x_s x_l} + c_0(x,t) u^k u_t^k e^{-\mu t}\psi(x) +$$

$$+ \sum_{i=1}^n a_i(x,t) |u_{tx_i}^k|^{p-2} u_{tx_i}^k (u_t^k e^{-\mu t}\psi(x))_{x_i} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) u_{x_i} (u_t^k e^{-\mu t}\psi(x))_{x_j} +$$

$$+ a_0(x,t)|u_t^k|^{q-2} u_t^k u_t^k e^{-\mu t}\psi(x) \Bigg] dxdt = \int\limits_{Q_\tau} f^{k,k} u_t^k e^{-\mu t}\psi(x) dxdt, \tag{28}$$

де $\tau \in (0,T]$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $\psi(x) = e^{-\nu\sqrt{|x|^2+1}}$, $\nu > 0$, $\mu > 0$.

Оцінимо доданки останньої рівності. Очевидно,

$$J_2 := \int\limits_{Q_\tau} u_{tt}^k u_t^k e^{-\mu t}\psi(x) dxdt = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} |u_t^k|^2 e^{-\mu\tau}\psi(x) dx +$$

$$+ \frac{\mu}{2} \int\limits_{Q_\tau} |u_t^k|^2 e^{-\mu t}\psi(x) dxdt - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} |u_1^{k,k}|^2 \psi(x) dx.$$

Оскільки $(\psi(x))_{x_i} = -\frac{\nu x_i}{\sqrt{|x|^2+1}}\psi(x)$,

$$(\psi(x))_{x_i x_j} = \frac{\nu^2 x_i x_j}{|x|^2+1}\psi(x) - \nu\left(\frac{\delta_{ij}}{\sqrt{|x|^2+1}} - \frac{x_i x_j}{(|x|^2+1)^{3/2}}\right)\psi(x),$$

де $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$ і $|(\psi(x))_{x_i}| \leqslant \nu\psi(x)$, $|(\psi(x))_{x_i x_j}| \leqslant (\nu^2 + 3\nu)\psi(x)$, то на підставі умов **(A)** і **(C)** маємо

$$J_3 := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j}^k u_{tx_s x_l}^k e^{-\mu t}\psi(x) dxdt \geqslant \frac{A_2}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i,j=1}^n |u_{x_i x_j}^k|^2 e^{-\mu\tau}\psi(x) dx -$$

$$- \frac{A_3+1}{4} \int\limits_{\Omega_0} \sum_{i,j=1}^n |u_{0x_i x_j}^{k,k}|^2 \psi(x) dx + \frac{\mu A_2}{2} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^n |u_{x_i x_j}^k|^2 e^{-\mu t}\psi(x) dxdt;$$

$$J_4 := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j}^k u_{tx_s}^k (\psi(x))_{x_l} e^{-\mu t} dxdt \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{\nu n^2 A_8}{2\delta_4} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{n} |u_{x_i x_j}^k|^2 e^{-\mu t} \psi(x) dxdt - \frac{\nu n^3 A_8 \delta_4}{2} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} |u_{tx_i}^k|^2 e^{-\mu t} \psi(x) dxdt,$$

де $\delta_4 > 0,\ A_8 = \max\limits_{i,j,s,l \in \{1,\ldots,n\}} \sup\limits_{\Omega} |a_{ij}^{sl}(x)|$;

$$J_5 := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j}^k u_t^k (\psi(x))_{x_s x_l} e^{-\mu t} dxdt \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{n^2(\nu^2+3\nu)A_8}{2} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{n} |u_{x_i x_j}^k|^2 e^{-\mu t} \psi(x) dxdt - \frac{n^4(\nu^2+3\nu)A_8}{2} \int\limits_{Q_\tau} |u_t^k|^2 e^{-\mu t} \psi(x) dxdt;$$

$$J_6 := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t) |u_{tx_i}^k|^{p-2} u_{tx_i}^k u_{tx_i}^k e^{-\mu t} \psi(x) dxdt \geqslant \nu_1 \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} |u_{tx_i}^k|^p e^{-\mu t} \psi(x) dxdt;$$

$$J_7 = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t) |u_{tx_i}^k|^{p-2} u_{tx_i}^k u_t (e^{-\mu t} \psi(x))_{x_i} dxdt \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{\nu\nu_2}{p'} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} |u_{tx_i}^k|^p e^{-\mu t} \psi(x) dxdt - \frac{\nu\nu_2 n}{p} \int\limits_{Q_\tau} |u_t^k|^p e^{-\mu t} \psi(x) dxdt.$$

Згідно з зауваженням 1

$$\int\limits_{Q_\tau} |u_t^k|^p \psi(x) e^{-\mu t} dxdt \leqslant \gamma_2 \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} |u_{tx_i}^k|^p \psi(x) e^{-\mu t} dxdt$$

при $0 < \nu < \dfrac{p}{\left[C(\Theta_0,p) 2^{p-1}\right]^{1/p}}$, тому

$$J_7 \geqslant -\left(\frac{\nu\nu_2}{p'} + \frac{\nu\nu_2 n \gamma_2}{p} \right) \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} |u_{tx_i}^k|^p e^{-\mu t} \psi(x) dxdt.$$

Далі

$$J_8 := \int\limits_{Q_\tau} a_0(x,t) |u_t^k|^q e^{-\mu t} \psi(x) dxdt \geqslant A_0 \int\limits_{Q_\tau} |u_t^k|^q e^{-\mu t} \psi(x) dxdt;$$

$$J_9 := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) u_{tx_i}^k u_{tx_j}^k e^{-\mu t} \psi(x) dxdt \geqslant A_1 \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} |u_{tx_i}^k|^2 e^{-\mu t} \psi(x) dxdt;$$

$$J_{10} := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) u_{tx_i}^k u_t^k (e^{-\mu t} \psi(x))_{x_i} dxdt \geqslant -\frac{n\nu A_9 \delta_5}{2} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} |u_{tx_i}^k|^2 e^{-\mu t} \psi(x) dxdt -$$

$$-\frac{n^2\nu A_9}{2\delta_5}\int\limits_{Q_\tau}|u_t^k|^2e^{-\mu t}\psi(x)dxdt,$$

де $\delta_5>0$, $A_9=\max\limits_{i,j\in\{1,\dots,n\}}\sup\limits_{Q_T}|a_{ij}(x)|$;

$$J_{11}:=\int\limits_{Q_\tau}f^{k,k}(x,t)u_t^ke^{-\mu t}\psi(x)dxdt\leqslant-\int\limits_{Q_\tau}\left[\frac{\delta_6}{q}|u_t^k|^q+\frac{1}{q'\delta_6^{q'/q}}|f^{k,k}(x,t)|^{q'}\right]e^{-\mu t}\psi(x)dxdt,$$

де $\delta_6>0$;

$$J_{12}:=\int\limits_{Q_\tau}c_0(x,t)u^ku_t^ke^{-\mu t}\psi(x)dxdt\leqslant\left(\frac{C_2}{2}+C_2T^2\right)\int\limits_{Q_\tau}|u_t^k|^2e^{-\mu t}\psi(x)dxdt+$$

$$+C_2T\int\limits_{\Omega_0}|u_0^k|^2\psi(x)dxdt,$$

де $C_2=\operatorname{ess\,sup}\limits_{Q_T}c_0(x,t)$.

Враховуючи оцінки інтегралів J_2-J_{12}, з рівності (28) одержимо нерівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\left[|u_t^k|^2+A_2\sum_{i,j=1}^{k}|u_{x_ix_j}^k|^2\right]e^{-\mu\tau}\psi(x)dx+\int\limits_{Q_\tau}\left[\left(\frac{\mu}{2}-\frac{n^4A_8(\nu^2+3\nu)}{2}-\frac{C_2}{2}-C_2T^2-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{n^2\nu A_9}{2\delta_5}\right)|u_t^k|^2+\left(\frac{\mu A_2}{2}-\frac{\nu n^2A_8}{\delta_4}-\frac{n^2(\nu^2+3\nu)A_8}{2}\right)\sum_{i,j=1}^{n}|u_{x_ix_j}^k|^2+\left(\nu_1-\frac{2\nu\nu_2}{p'}-\right.$$

$$\left.-\frac{2\nu\nu_2\gamma_2}{p}\right)\sum_{i=1}^{n}|u_{tx_i}^k|^p+\left(A_1-\frac{n\nu A_9\delta_5}{2}-\nu n^3A_8\delta_4\right)\sum_{i=1}^{n}|u_{tx_i}^k|^2+$$

$$\left.+\left(A_0-\frac{\delta_6}{q}\right)|u_t^k|^q\right]e^{-\mu t}\psi(x)dxdt\leqslant\frac{1}{q'\delta_6^{q'/q}}\int\limits_{Q_\tau}|f^{k,k}(x,t)|^{q'}e^{-\mu t}\psi(x)dxdt+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\left[|u_1^{k,k}|^2+\frac{A_3+1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}|u_{0x_ix_j}^{k,k}|^2+2C_2T|u_0^{k,k}|^2\right]\psi(x)dx. \qquad (29)$$

Виберемо $\delta_4,\ \delta_5,\ \delta_6$ такі, щоб $A_0-\frac{\delta_6}{p}>0$, $A_1-\frac{n\nu A_9\delta_5}{2}-\nu n^3A_8\delta_4>0$, і нехай

$$0<\nu<\min\left\{\frac{\nu_1pp'}{2\nu_2(1+\gamma_2)};\frac{p}{\left[C(\Theta_0,p)2^{p-1}\right]^{1/p}}\right\}.$$

Тоді з (29) одержимо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\left[|u_t^k|^2+\sum_{i,j=1}^{k}|u_{x_ix_j}^k|^2\right]\psi(x)dx+\int\limits_{Q_\tau}\left[|u_t^k|^2+|u^k|^2+\sum_{i,j=1}^{n}|u_{x_ix_j}^k|^2+\sum_{i=1}^{n}|u_{tx_i}^k|^p+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n}|u_{tx_i}^k|^2+|u_t^k|^q\right]\psi(x)dxdt\leqslant M_2, \qquad (30)$$

де стала M_2 не залежить від k.

Зазначимо, що на підставі (30) послідовність $\{u^k\}$ обмежена у просторі $L^2((0,T);H^2_{0,\nu}(\Omega))$, а послідовність $\{u^k_t\}$ – у просторі $L^p((0,T);W^{1,p}_{0,\nu}(\Omega))\cap L^q((0,T);L^q_\nu(\Omega))\cap L^2((0,T);H^1_{0,\nu}(\Omega))$. Отже, існує підпослідовність послідовності $\{u^k\}$ (нехай для зручності це буде та сама послідовність) така, що

$$u^k\to u\ \ *\text{- слабко в }\ L^\infty((0,T);H^2_{0,\nu}(\Omega)),$$

$$u^k_t\to u_t\ \text{ слабко в }\ L^p((0,T);W^{1,p}_{0,\nu}(\Omega))\cap L^q((0,T);L^q_\nu(\Omega))\cap L^2((0,T);H^1_{0,\nu}(\Omega))$$

$$u^k_t\to u_t\ \ *\text{- слабко в }\ L^\infty((0,T);L^2_\nu(\Omega))\ \text{ при }\ k\to\infty. \tag{31}$$

Нехай $R_0>1$ – довільне фіксоване число. Позначимо

$$H^2_{0,\Omega}(\Omega^{R_0})=\left\{u:\quad u\in H^2(\Omega^{R_0}),\quad u\big|_{\partial\Omega\cap B_{R_0}}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial\nu}\bigg|_{\partial\Omega\cap B_{R_0}}=0\right\},$$

$$L^q_\Omega(\Omega^{R_0})=\left\{u:\ u\in L^q(\Omega^{R_0})\right\},\quad W^{1,p}_{0,\Omega}(\Omega^{R_0})=\left\{u:\ u\in W^{1,p}(\Omega^{R_0}),\ u\big|_{\partial\Omega\cap B_{R_0}}=0\right\},$$

$\mathcal{R}_0$ – оператор звуження функції u, визначеної і вимірної в Ω, на область Ω^{R_0}. На підставі (30) послідовність $\{\mathcal{R}_0u^k\}$ обмежена в просторі $L^2((0,T);H^2_{0,\Omega}(\Omega^{R_0}))$, а послідовність $\{\mathcal{R}_0u^k_t\}$ – у просторі $L^p((0,T);W^{1,p}_{0,\Omega}(\Omega^{R_0}))\cap L^q((0,T);L^q_\Omega(\Omega^{R_0}))$. Зазначимо, що $\forall k\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$ в області $Q^{R_0}_T$ в сенсі розподілів правильна рівність

$$u^k_{tt}=-\sum_{i,j,s,l=1}^n(a^{sl}_{ij}(x)u^k_{x_ix_j})_{x_sx_l}+\sum_{i=1}^n(a_i(x,t)|u^k_{tx_i}|^{p-2}u^k_{tx_i})_{x_i}-a_0(x,t)|u^k_t|^{q-2}u^k_t-$$

$$-c_0(x,t)u^k+\sum_{i,j=1}^n(a_{ij}(x,t)u^k_{tx_i})_{x_j}+f^{k,k}(x,t). \tag{32}$$

Тоді, використовуючи (30), (32) і умову **(A)**, легко одержати оцінку

$$||\mathcal{R}_0u^k_{tt}||_{V^*(Q^{R_0}_T)}\leqslant K_5, \tag{33}$$

де K_5 не залежить від k, а

$$V^*(Q^{R_0}_T)=L^2\Big((0,T);(H^2_{0,\Omega}(\Omega^{R_0}))^*\Big)+L^{p'}\Big((0,T);(W^{1,p}_{0,\Omega}(\Omega^{R_0}))^*\Big)+L^{q'}\Big((0,T);L^{q'}_\Omega(\Omega^{R_0})\Big).$$

Отже, існує така підпослідовність послідовності $\{\mathcal{R}_0u^k\}$ (нехай це та сама послідовність), що

$$\mathcal{R}_0u^k\to u^{R_0}\ \text{ слабко в }\ L^2((0,T);H^2(\Omega^{R_0})),$$

$$\mathcal{R}_0u^k_t\to u^{R_0}_t\ \text{ слабко в }\ L^p((0,T);W^{1,p}_{0,\Omega}(\Omega^{R_0}))\cap L^q((0,T);L^q_\Omega(\Omega^{R_0})).$$

Крім того, оскільки

$$W^{1,p}_{0,\Omega}(\Omega^{R_0})\subset L^q(\Omega^{R_0})\subset(H^2_{0,\Omega}(\Omega^{R_0}))^*+(W^{1,p}_{0,\Omega}(\Omega^{R_0}))^*,$$

причому вкладення

$$W^{1,p}_{0,\Omega}(\Omega^{R_0})\subset L^q(\Omega^{R_0})$$

компактне при $n<\dfrac{pq}{q-p}$, то враховуючи (33) і теорему 5.1 [12, с. 70], можемо вважати, що

$$\mathcal{R}_0u^k_t\to u^{R_0}_t\ \text{ сильно в }\ L^q((0,T);L^q(\Omega^{R_0}))$$

і майже всюди в $Q_T^{R_0}$. Нехай R_0 послідовно набуває значення з множини натуральних чисел $\mathbb{N}$. Враховуючи діагональний процес, можемо побудувати таку підпослідовність (нехай це знову буде $\{u^k\}$), що

$$u^k \to \widehat{u} \ \text{ слабко в } \ L^2((0,T);H^2_{0,loc}(\overline{\Omega})),$$

$$u^k_t \to \widehat{u}_t \ \text{ слабко в } \ L^p((0,T);W^{1,p}_{0,loc}(\overline{\Omega})) \ \text{ при } \ k\to\infty. \tag{34}$$

Очевидно, $\widehat{u}=u$ в Q_T. Тоді

$$u^k_t \to u_t \ \text{ сильно в } \ L^q((0,T);L^q_\nu(\Omega)).$$

Легко довести, що

$$u^k_t \to u_t \ \text{ сильно в } \ L^2((0,T);L^2_\nu(\Omega)).$$

Зазначимо також, що на підставі (30)

$$\int\limits_{Q_T}\left||u^k_{tx_i}|^{p-2}u^k_{tx_i}e^{-\frac{\nu}{p'}\sqrt{|x|^2+1}}\right|^{p'}dxdt \leqslant \int\limits_{Q_T}|u^k_{tx_i}|^p\psi(x)dxdt \leqslant K_6,$$

$i\in\{1,...,n\}$, де стала K_6 не залежить від k. Тому можемо вважати, що

$$|u^k_{tx_i}|^{p-2}u^k_{tx_i} \to \chi_i \ \text{ слабко в } \ L^{p'}((0,T);L^{p'}_\nu(\Omega))$$

при $k\to\infty$, $i\in\{1,...,n\}$. Зазначимо, що $\forall w\in L^2((0,T);H^2_{0,\nu}(\Omega))$ таких, що $w_t\in L^p((0,T);W^{1,p}_{0,\nu}(\Omega))\cap L^q((0,T);L^q_\nu(\Omega))\cap L^2((0,T);H^1_{0,\nu}(\Omega))$ правильна рівність

$$\int\limits_{\Omega_T}u^k_t we^{-\mu T}\psi(x)dx+\int\limits_{Q_T}\Bigg[\mu u^k_t w\psi(x)-u^k_t w_t\psi(x)+\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a^{sl}_{ij}(x)u^k_{x_ix_j}(w\psi(x))_{x_sx_l}+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)u^k_{tx_i}(w\psi(x))_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}a_i(x,t)|u^k_{tx_i}|^{p-2}u^k_{tx_i}(w\psi(x))_{x_i}+c_0(x,t)u^k w\psi(x)+$$

$$+a_0(x,t)|u^k_t|^{q-2}u^k_t w\psi(x)-f^{k,k}(x,t)w\psi(x)\Bigg]e^{-\mu t}dxdt=\int\limits_{\Omega_0}u^k_t(x,0)w\psi(x)dx, \tag{35}$$

де $k\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$, $\mu\geqslant 0$, $\nu>0$, причому у цій рівності можна прийняти $w=u^k_t$. Якщо $\mu=0$, то враховуючи (31), (33), (34), перейдемо до границі в (35) при $k\to\infty$ $(w(x,T)=0,\ w(x,0)=0)$:

$$\int\limits_{Q_T}\Bigg[-u_tw_t\psi(x)+\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a^{sl}_{ij}(x)u_{x_ix_j}(w\psi(x))_{x_sx_l}+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)u_{tx_i}(w\psi(x))_{x_j}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}a_i(x,t)\chi_i(w\psi(x))_{x_i}+a_0(x,t)|u_t|^{q-2}u_tw\psi(x)+$$

$$+c_0(x,t)uw\psi(x)-f(x,t)w\psi(x)\Bigg]dxdt=0. \tag{36}$$

З (36), зокрема, випливає, що в області Q_T в сенсі розподілів правильна рівність

$$u_{tt} = -\sum_{i,j,s,l=1}^{n}(a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j})_{x_sx_l} + \sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x,t)u_{tx_i})_{x_j} +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(a_i(x,t)\chi_i)_{x_i} - a_0(x,t)|u_t|^{q-2}u_t - c(x,t)u - f(x,t). \qquad (37)$$

Отже, $u_{tt} \in L^2((0,T);(H^2_{0,\nu}(\Omega))^*) + L^{p'}((0,T);(W^{1,p}_{0,\nu}(\Omega))^*) + L^{q'}((0,T);(L^q_\nu(\Omega))^*)$. Але

$$u_t \in L^2((0,T);H^1_{0,\nu}(\Omega)) \cap L^p((0,T);W^{1,p}_{0,\nu}(\Omega)) \cap L^q((0,T);L^q_\nu(\Omega)),$$

тому

$$u_t \in C([0,T];(H^2_{0,\nu}(\Omega))^* + (W^{1,p}_{0,\nu}(\Omega))^* + (L^q_\nu(\Omega))^*).$$

Нехай $\tau_0,\ \beta \in (0,T),\ \tau_0 < \beta,\ \Theta_m$ – неперервна кусково-лінійна функція на $[0,T]$; $\Theta_m(t) = 1$ при $\tau_0 + \frac{2}{m} < t < \beta - \frac{2}{m}$; $\Theta_m(t) = 0$ при $t > \beta - \frac{1}{m}$, $t < \tau_0 + \frac{1}{m}$. Нехай ρ_l – регуляризуюча послідовність в $D(\mathbb{R}),\ \rho_l(t) = \rho_l(-t)$,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\rho_l(t)dt = 1, \qquad \operatorname{supp}\rho_l \subset \left[-\frac{1}{l},\frac{1}{l}\right], \qquad l > 2m.$$

Приймемо в формулі (36)

$$w = \left[(\Theta_m u_t e^{-\frac{\mu t}{2}}) * \rho_l * \rho_l\right]\Theta_m e^{-\mu t/2},$$

де $*$ позначає згортку за змінною t. Нехай $\varphi(t) = e^{-\mu t/2}$.

Тоді для майже всіх β і τ_0 одержимо

$$-\int\limits_{Q_T} u_t^2\Theta_m(t)\Theta_m'(t)e^{-\mu t}\psi(x)dxdt + \int\limits_{Q_T}\Bigg[-\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l}e^{-\mu t}\psi(x)\Theta_m(t)\Theta_m'(t) +$$

$$+\frac{\mu}{2}\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l}e^{-\mu t}\psi(x)\Theta_m^2(t) + \sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}\big(u_{tx_s}(\psi(x))_{x_l} +$$

$$+u_{tx_l}(\psi(x))_{x_s}\big)e^{-\mu t}\Theta_m^2(t) + \sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_t(\psi(x))_{x_sx_l}e^{-\mu t}\Theta_m^2(t) +$$

$$+\frac{\mu}{2}u_t^2\Theta_m^2(t)e^{-\mu t}\psi(x) + \sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)u_{tx_i}(u_t\psi(x))_{x_j}e^{-\mu t}\Theta_m^2(t) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}a_i(x,t)\chi_i(u_t\psi(x))_{x_i}e^{-\mu t}\Theta_m^2(t) + a_0(x,t)|u_t|^q\Theta_m^2(t)\psi(x)e^{-\mu t} +$$

$$+c_0(x,t)uu_t\Theta_m^2(t)\psi(x)e^{-\mu t} - f(x,t)u_t\psi(x)\Theta_m^2(t)e^{-\mu t}\Bigg]dxdt = 0. \qquad (38)$$

Оскільки

$$\Theta_m(t)=\begin{cases} m(t-\tau_0)-1, & t\in\left[\tau_0+\dfrac{1}{m},\tau_0+\dfrac{2}{m}\right]\\ -m(t-\beta)+1, & t\in\left[\beta-\dfrac{2}{m},\beta-\dfrac{1}{m}\right],\end{cases}$$

то за теоремою про середнє [13, с. 114],

$$m\int\limits_{\tau_0+\frac{1}{m}}^{\tau_0+\frac{2}{m}} g(t)\big(m(t-\tau_0)-1\big)dt=mg(\xi)\left[\frac{mt^2}{2}-\big(m\tau_0+1\big)t\right]\Bigg|_{\tau_0+\frac{1}{m}}^{\tau_0+\frac{2}{m}}=\frac{\mu_0}{2},$$

де $\mu_0\in[\beta_0,\beta_1]$, $\beta_0\leqslant g(x)\leqslant\beta_1$ на $[\tau_0+\frac{1}{m},\tau_0+\frac{2}{m}]$. Перейдемо в (38) до границі при $m\to\infty$:

$$\frac12\int\limits_{\Omega_\beta}\left[u_t^2+\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l}\right]\psi(x)e^{-\mu t}dx+\int\limits_{Q_{\tau_0,\beta}}\left[\frac{\mu}{2}\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l}\psi(x)+\right.$$

$$+\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}\big(u_{tx_s}(\psi(x))_{x_l}+u_{tx_l}(\psi(x))_{x_s}\big)+\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_t(\psi(x))_{x_sx_l}+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)u_{tx_i}(u_t\psi(x))_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}a_i(x,t)\chi_i(u_t\psi(x))_{x_i}+\frac{\mu}{2}|u_t|^2\psi(x)+a_0(x,t)|u_t|^q\psi(x)+$$

$$\left.+c_0(x,t)uu_t\psi(x)-f(x,t)u_t\psi(x)\right]e^{-\mu t}dxdt=$$

$$=\frac12\int\limits_{\Omega_{\tau_0}}\left[|u_t|^2+\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_s,x_l}\right]\psi(x)e^{-\mu t}dx. \tag{39}$$

Множина $\{u_t(\cdot,t)\}$ обмежена в $L^2_\nu(\Omega)$ і $u_t\in C([0,T];(H^2_{0,\nu}(\Omega))^*+(W^{1,p}_{0,\nu}(\Omega))^*+$ $+(L^q_\nu(\Omega))^*)$. Отже, існує послідовність точок $t_k\subset[0,T], t_k\to 0$ таких, що $u_t(\cdot,t_k)\to z_1$ слабко в $L^2_\nu(\Omega)$. З іншого боку, $u_t(\cdot,t_k)\to u_t(\cdot,0)\to u_1$ слабко в $(H^2_{0,\nu}(\Omega))^*+$ $+(W^{1,p}_{0,\nu}(\Omega))^*+(L^q_\nu(\Omega))^*$. Тому $z_1=u_1$ і $u_t(\cdot,t_k)\to u_1$ слабко в $L^2_\nu(\Omega)$.

Множина $\{u(\cdot,t)\}$ обмежена в $L^2_\nu(\Omega)$, $u\in L^\infty([0,T];H^2_{0,\nu}(\Omega))$. Отож, існує послідовність точок $\{t_k\}\subset(0,T]$, $t_k\to 0$ таких, що $u(\cdot,t_k)\to z_0$ слабко в $H^2_{0,\nu}(\Omega)$, $u(\cdot,t_k)\to u(\cdot,0)=u_0$ в $L^2_\nu(\Omega)$. Тому $z_0=u_0$ і $u(\cdot,t_k)\to u_0$ слабко в $H^2_{0,\nu}(\Omega)$. З (39) отримуємо нерівність

$$\frac12\int\limits_{\Omega_\tau}\left[u_t^2+\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_sx_l}u_{x_ix_j}\right]\psi(x)e^{-\mu\tau}dx+\int\limits_{Q_\tau}\left[\frac{\mu}{2}\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_sx_l}u_{x_ix_j}\psi(x)+\right.$$

$$+\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}\big(u_{tx_s}(\psi(x))_{x_l}+u_{tx_l}(\psi(x))_{x_s}\big)+\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_t(\psi(x))_{x_sx_l}+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_{tx_i}(x,t)(u_t\psi(x))_{x_j}+\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\chi_i(u_t\psi(x))_{x_i}+a_0(x,t)|u_t|^q\psi(x)+$$

$$+\frac{\mu}{2}u_t^2\psi(x)+c_0(x,t)uu_t\psi(x)\Bigg]e^{-\mu t}dxdt\geqslant\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\Bigg[u_1^2+\sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{0x_ix_j}u_{0x_sx_l}\Bigg]\psi(x)dx+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau} f(x,t)u_t\psi(x)e^{-\mu t}dxdt \tag{40}$$

майже для всіх $\tau\in[0,T]$. Розглянемо послідовність $\{Y_k\}$, визначену рівностями

$$0\leqslant Y_k:=\int\limits_{Q_\beta}\Bigg[\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)(|u_{tx_i}^k|^{p-2}-|w_{x_i}|^{p-2}w_{x_i})(u_{tx_i}^k-w_{x_i})e^{-\mu t}\psi(x)+$$

$$+a_0(x,t)(|u_t^k|^{p-2}u_t^k-|w|^{p-2}w)(u_t^k-w)e^{-\mu t}\psi(x)\Bigg]dxdt=$$

$$=\int\limits_{Q_\beta}\Bigg[\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)|u_{tx_i}^k|^p+a_0(x,t)|u_t^k|^p\Bigg]e^{-\mu t}\psi(x)dxdt-$$

$$-\int\limits_{Q_\beta}\Bigg[\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)|u_{tx_i}^k|^{p-2}u_{tx_i}^k(w\psi)_{x_i}+a_0(x,t)|u_t^k|^{q-2}u_t^k w\psi\Bigg]e^{-\mu t}dxdt-$$

$$-\int\limits_{Q_\beta}\Bigg[\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)|w_{x_i}|^{p-2}w_{x_i}(u_t^k-w)_{x_i}\psi+a_0(x,t)|w|^{q-2}w(u_t^k-w)\psi\Bigg]e^{-\mu t}dxdt.$$

Приймемо

$$g_k:=\int\limits_{Q_\beta}\Bigg[f_k u_t^k e^{-\mu t}\psi(x)-\frac{\mu}{2}|u_t^k|^2e^{-\mu t}\psi(x)-\sum_{i,j,l,s=1}^{n}\frac{1}{2}\mu a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}^k u_{x_sx_l}^k e^{-\mu t}\psi(x)-$$

$$-\sum_{i,j,l,s=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}^k\big(u_{tx_s}^k(e^{-\mu t}\psi(x))_{x_l}+u_{tx_l}^k(e^{-\mu t}\psi(x))_{x_s}\big)-\sum_{i,j,l,s=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}^k u_t^k\times$$

$$\times(e^{-\mu t}\psi(x))_{x_sx_l}-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{tx_i}^k u_{tx_j}^k e^{-\mu t}\psi(x)-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{tx_i}^k u_t^k(e^{-\mu t}\psi(x))_{x_j}-$$

$$-\sum_{i=1}^{n} a_i(x)|u_{tx_i}^k|^{p-2}u_{tx_i}^k u_t^k\psi_{x_i}(x)e^{-\mu t}-c_0(x)u^k u_t^k e^{-\mu t}\psi(x)\Bigg]dxdt-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\beta}\Bigg[|u_t^k|^2+$$

$$+\sum_{i,j,l,s=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}^k u_{x_sx_l}^k\Bigg]e^{-\mu\beta}\psi(x)dx+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\Bigg[|u_1^k|^2+\sum_{i,j,l,s=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{0x_ix_j}^k u_{0x_sx_l}^k\Bigg]\psi(x)dx. \tag{41}$$

Зазначимо, що у просторі X функцій таких, що

$$\int\limits_{Q_\beta}\Big[u_t^2+u^2+\sum_{i,j=1}^n|u_{x_ix_j}|^2+\sum_{i,j=1}^n|u_{tx_ix_j}|^2\Big]dxdt<\infty$$

можна ввести еквівалентну норму за формулою (при достатньо великих μ)

$$||u||_X=\Big(\int\limits_{Q_\beta}\Big[\frac{1}{2}\mu\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l}e^{-\mu t}\psi(x)+\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}\big(u_{tx_s}(\psi(x))_{x_l}+$$

$$+u_{tx_l}(\psi(x))_{x_s}\big)e^{-\mu t}+\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_t(e^{-\mu t}\psi(x))_{x_lx_s}+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{tx_i}u_{tx_j}e^{-\mu t}\psi(x)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^n u_{tx_i}u_t(e^{-\mu t}\psi(x))_{x_j}-uu_te^{-\mu t}\psi(x)+c_0(x)uu_te^{-\mu t}\psi(x)+$$

$$+\frac{\mu}{2}u^2e^{-\mu t}\psi(x)+\frac{\mu}{2}u_t^2e^{-\mu t}\psi(x)\Big]dxdt\Big)^{1/2}.$$

Тому

$$\sup\lim_{k\to\infty}g_k\leqslant\int\limits_{Q_\beta}\Big[-\frac{\mu}{2}|u_t|^2e^{-\mu t}\psi(x)-\frac{\mu}{2}\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}(ue^{-\mu t}\psi(x))_{x_sx_l}+$$

$$+f(x,t)u_te^{-\mu t}\psi(x)-\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}\big(u_{tx_s}(e^{-\mu t}\psi(x))_{x_l}+u_{tx_l}(e^{-\mu t}\psi(x))_{x_s}\big)-$$

$$-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{tx_i}u_{tx_j}e^{-\mu t}\psi(x)-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{tx_i}u_t(e^{-\mu t}\psi(x))_{x_j}-$$

$$-\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_t(e^{-\mu t}\psi(x))_{x_sx_l}-\sum_{i=1}^n a_i(x)\chi_iu_t\psi_{x_i}(x)e^{-\mu t}-$$

$$-c_0(x)uu_te^{-\mu t}\psi(x)\Big]dxdt-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\beta}\Big[u_t^2+\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l}\Big]e^{-\mu\beta-\nu\sqrt{|x|^2+1}}dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\Big[u_1^2+\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{0x_ix_j}u_{0x_sx_l}\Big]\psi(x)dx.$$

Отож,

$$0\leqslant\sup\lim_{k\to\infty}Y_k\leqslant\int\limits_{Q_\beta}\Big[-\frac{\mu}{2}|u_t|^2e^{-\mu t}\psi(x)-\frac{\mu}{2}\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l}e^{-\mu t}\psi(x)+$$

$$+f(x,t)u_te^{-\mu t}\psi(x)-\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}\big(u_{tx_s}(e^{-\mu t}\psi(x))_{x_l}+u_{tx_l}(e^{-\mu t}\psi(x))_{x_s}\big)-$$

$$- \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} u_t (e^{-\mu t}\psi(x))_{x_s x_l} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{tx_i} u_{tx_j} e^{-\mu t}\psi(x) -$$

$$- \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{tx_i} u_t e^{-\mu t}(\psi(x))_{x_j} - \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\chi_i u_t w_{x_i} e^{-\mu t} -$$

$$-c_0(x) u u_t e^{-\mu t}\psi(x)\Bigg] dxdt - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\beta} \Bigg[u_t^2 + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} u_{x_s x_l}\Bigg] e^{-\mu\beta - \nu\sqrt{|x|^2+1}} dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} \Bigg[u_1^2 + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{0x_i x_j} u_{0x_s x_l}\Bigg]\psi(x) dx - \int\limits_{Q_\beta} \Bigg[\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)|w_{x_i}|^{p-2} w_{x_i} \times$$

$$\times\big((u_t - w)e^{-\mu t}\psi(x)\big)_{x_i} + a_0(x,t)|w|^{q-2} w (u_t - w) e^{-\mu t}\psi(x)\Bigg] dxdt +$$

$$+\int\limits_{Q_\beta} \Bigg[-\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\chi_i (w_{x_i}\psi(x)) e^{-\mu t} - a_0(x,t)|u_t|^{q-2} u_t w e^{-\mu t}\Bigg] dxdt. \tag{42}$$

Додавши (39) і (42), одержимо

$$\int\limits_{Q_\beta} \Bigg[\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\chi_i (u_t\psi(x))_{x_i} + a_0(x,t)|u_t|^p \psi(x) - \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\chi_i w_{x_i}\psi(x) -$$

$$-a_0(x,t)|u_t|^{q-2} u_t w\psi(x)\Bigg] e^{-\mu t} dxdt - \int\limits_{Q_\beta} \Bigg[\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)|w_{x_i}|^{p-2} w_{x_i} ((u_t - w)_{x_i}\psi(x)) +$$

$$+a_0(x,t)|w|^{p-2} w (u_t - w)\psi(x)\Bigg] e^{-\mu t} dxdt \geqslant 0.$$

Нехай $w = u_t - \lambda z,\ \lambda > 0$. Тоді отримана нерівність набуде вигляду

$$\int\limits_{Q_\beta} \Bigg[\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\chi_i (z_{x_i}\psi(x)) + a_0(x,t)|u_t|^{p-2} u_t z\psi(x) - \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)|u_{tx_i} - \lambda z_{x_i}|^{p-2} \times$$

$$\times (u_{tx_i} - \lambda z_{x_i}) z_{x_i}\psi(x) - a_0(x,t)|u_t - \lambda z|^{q-2}(u_t - \lambda z) z\psi(x)\Bigg] e^{-\mu t} dxdt \geqslant 0. \tag{43}$$

Перейдемо в (43) до границі при $\lambda \to +0$:

$$\int\limits_{Q_\beta} \Bigg[\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)(\chi_i - |u_{tx_i}|^{p-2} u_{tx_i})(z_{x_i}\psi(x))\Bigg] e^{-\mu t} dxdt \geqslant 0.$$

Звідки, зокрема,

$$\int\limits_{Q_\beta} \Bigg[\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)(\chi_i - |u_{tx_i}|^{p-2} u_{tx_i})(z_{x_i}\psi(x))\Bigg] e^{-\mu t} dxdt = 0$$

для всіх $z \in L^p((0,T); W^{1,p}_{0,\nu}(\Omega))$. Отже, $\chi_i = |u_{tx_i}|^{p-2} u_{tx_i}$ майже всюди в Q_T, $i \in \{1, ..., n\}$.

Залишилося показати виконання початкових умов. На підставі (31) можемо вважати, що $u^k(\cdot,0) \to u(\cdot,0)$ слабко в $L^2_\nu(\Omega)$. Але $u^k(\cdot,0) = u_0^{k,k} \to u_0$ в $H^2_{0,\nu}(\Omega)$. Тому $u(x,0) = u_0(x)$. Аналогічно, $u_t^k(\cdot,0) \to u_y(\cdot,0)$ слабко в $L^2_\nu(\Omega)$, а $u_t^k(\cdot,0) = u_1^{k,k} \to u_1$ в $L^2_\nu(\Omega)$. Отож, $u_t(x,0) = u_1(x)$. □

Нехай $p \in (1,2)$. Тоді для довільних дійсних чисел a і b правильна нерівність

$$(|a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b)(a-b) \leqslant 2^{p-1}|a-b|^p.$$

Звідки, зокрема, випливає оцінка

$$||a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b|^{p'} \leqslant 2(|a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b)(a-b). \tag{44}$$

Нехай, крім того, $q > 1$. Розглянемо простір функцій v таких, що $v \in L^2((0,T); H^2_{0,loc}(\overline{\Omega}))$, $v_t \in L^2((0,T); H^1_{0,loc}(\overline{\Omega})) \cap L^q((0,T); L^q_{loc}(\overline{\Omega}))$. З цього простору виділимо множину функцій, для яких

$$\int\limits_{Q_T} \left[v^2 + v_t^2 + |v_t|^p + |v_t|^q + \sum_{i=1}^n |v_{tx_i}|^p + \sum_{i=1}^n |v_{tx_i}|^2 + \sum_{i,j=1}^n |v_{x_ix_j}|^2\right](|x|^2+1)^{-\rho}dxdt < \infty,$$

де $\rho > 0$. Позначимо її через $\mathcal{M}_\rho$. Введемо множину $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{\rho>0} \mathcal{M}_\rho$. Зазначимо таке: якщо $v \in \mathcal{M}$, то існує таке $\rho > 0$, що $v \in \mathcal{M}_\rho$. Нехай $\nu > 0$ – довільне число. Тоді існує така стала $A(\nu,\rho)$, що для всіх $x \in \mathbb{R}^n$ виконується нерівність

$$e^{-\nu\sqrt{|x|^2+1}} \leqslant A(\nu,\rho)(|x|^2+1)^{-\rho}.$$

Отже, якщо $v \in \mathcal{M}$, то

$$\int\limits_{Q_T} \left[v^2 + v_t^2 + |v_t|^p + |v_t|^q + \sum_{i=1}^n |v_{tx_i}|^p + \sum_{i=1}^n |v_{tx_i}|^2 + \sum_{i,j=1}^n |v_{x_ix_j}|^2\right]e^{-\nu\sqrt{|x|^2+1}}dxdt < \infty,$$

яке б не було число $\nu > 0$.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови **(A)**, **(C)**, $p \in (\frac{2n}{n+2}, 2)$, $q > 1$, $u_0 \in H^2_{0,loc}(\overline{\Omega})$, $u_1 \in L^2_{loc}(\overline{\Omega})$, $f \in L^{q_0}((0,T); L^{q_0}_{loc}(\overline{\Omega}))$. Тоді задача (2)-(4) не може мати більше одного узагальненого розв'язку в класі функцій $\mathcal{M}$.*

Доведення. Припустимо, що існують два узагальнені розв'язки u^1 і u^2 задачі (2)-(4). Враховуючи означення узагальненого розв'язку, зазначимо, що виконується рівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau} u_t^k v\psi(x)dx + \int\limits_{Q_\tau} \Big[-u_t^k v_t\psi(x) + \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u^k_{x_ix_j}(v\psi(x))_{x_sx_l} +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)u^k_{tx_i}(v\psi(x))_{x_i} + c_0(x,t)u^k v\psi(x) + \sum_{i=1}^n a_i(x,t)|u^k_{tx_i}|^{p-2}u^k_{tx_i}(v\psi(x))_{x_i} +$$

$$+a_0(x,t)|u_t^k|^{q-2}u_t^k v\psi(x)\Big]dxdt = \int\limits_{\Omega_0} u_1 v\psi(x)dx + \int\limits_{Q_\tau} f(x,t)v\psi(x)dxdt, \quad k \in \{1,2\}, \tag{45}$$

для всіх $\tau \in (0,T]$ і довільних $v \in L^2((0,T); H^2_{0,\nu}(\Omega)) \cap L^p((0,T); W^{1,p}_{0,\nu}(\Omega)) \cap$ $\cap L^q((0,T); L^q_\nu(\Omega))$ таких, що $v_t \in L^2((0,T); L^2_\nu(\Omega))$, де $\nu > 0$. Позначимо $u^{1,2} =$

$= u^1 - u^2$. Очевидно, $u^{1,2}(x,0) = 0$ майже всюди в Ω. Віднімемо рівності (45) при $k = 1$ і $k = 2$ та приймемо

$$v = \left[\left(\Theta_m u_t^{1,2} e^{-\mu t/2}\right) * \rho_l * \rho_l\right] \Theta_m e^{-\mu t/2}.$$

Аналогічно як при доведенні теореми 2 легко довести рівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} \left[|u_t^{1,2}|^2 + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j}^{1,2} u_{x_s x_l}^{1,2}\right] \psi(x) e^{-\mu t} dx + \int\limits_{Q_\tau} \left[\frac{\mu}{2}|u_t^{1,2}|^2 \psi(x) + \right.$$

$$+\frac{\mu}{2}\sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j}^{1,2} u_{x_s x_l}^{1,2} \psi(x) + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j}^{1,2} \left(u_{tx_s}^{1,2}(\psi(x))_{x_l} + u_{tx_l}^{1,2}(\psi(x))_{x_s}\right) +$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) u_{tx_i}^{1,2} (u_t^{1,2}\psi(x))_{x_j} + c_0(x,t) u^{1,2} u_t^{1,2} \psi(x) +$$

$$\left. +\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)(|u_{tx_i}^1|^{p-2} u_{tx_i}^1 - |u_{tx_i}^2|^{p-2} u_{tx_i}^2)(u_t^{1,2}\psi(x))_{x_i}\right] e^{-\mu t} dx dt +$$

$$+\int\limits_{Q_\tau} a_0(x,t)(|u_t^1|^{q-2} u_t^1 - |u_t^2|^{q-2} u_t^2) u_t^{1,2} \psi(x) e^{-\mu t} dx dt = 0 \qquad (46)$$

правильну для майже всіх $\tau \in (0, T]$. Зазначимо, що згідно з умовою **(A)** перший і третій інтеграли у рівності (46) невід'ємні. Тому звідси одержимо нерівність вигляду

$$\int\limits_{Q_\tau} \left[\frac{\mu}{2}|u_t^{1,2}|^2 \psi(x) + \frac{\mu}{2}\sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j}^{1,2} u_{x_s x_l}^{1,2} \psi(x) + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j}^{1,2} \left(u_{tx_s}^{1,2}(\psi(x))_{x_l} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + u_{tx_l}^{1,2}(\psi(x))_{x_s}\right) + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) u_{tx_i}^{1,2} (u_t^{1,2}\psi(x))_{x_j} + c_0(x,t) u^{1,2} u_t^{1,2} \psi(x)\right] e^{-\mu t} dx dt +$$

$$+\int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)(|u_{tx_i}^1|^{p-2} u_{tx_i}^1 - |u_{tx_i}^2|^{p-2} u_{tx_i}^2)(u_t^{1,2}\psi(x))_{x_i} e^{-\mu t} dx dt \leqslant 0. \qquad (47)$$

Вибравши невиключну послідовність точок $\{\tau_h\} \subset (0, T]$ таку, що $\lim\limits_{h\to\infty} \tau_h = T$, одержуємо правильність (47) і для $\tau = T$. Надалі в (47) приймемо $\tau = T$. Позначимо перший інтеграл в (47) через P_1. Тоді на підставі умов **(A)**, **(C)** (цілком подібно як при доведенні теореми 2) матимемо оцінку

$$P_1 \geqslant \int\limits_{Q_T} \left[\left(\frac{\mu}{2} - \frac{A_8 n^4(\nu^2 + 3\nu)}{2} - \frac{n^2 \nu A_9}{2\delta_5} - \frac{C_2(1 + 2T^2)}{2}\right)|u_t^{1,2}|^2 + \left(\frac{\mu A_2}{2} - \frac{\nu n^2 A_8}{\delta_4} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{n^2(\nu^2 + 3\nu) A_8}{2}\right) \sum_{i,j=1}^{n} |u_{x_i x_j}^{1,2}|^2 + \left(A_1 - \nu n^3 A_8 \delta_4 - \frac{n\nu A_9 \delta_5}{2}\right) \sum_{i=1}^{n} |u_{tx_i}^{1,2}|^2\right] \psi(x) e^{-\mu t} dx dt.$$

Виберемо параметри μ, δ_4 і δ_5 так, що

$$P_1 \geqslant \int\limits_{Q_T} \left[\omega_1|u_t^{1,2}|^2 + \omega_0\sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^{1,2}|^2 + \omega_0 \sum_{i,j=1}^n |u_{x_ix_j}^{1,2}|^2\right]\psi(x)e^{-\mu t}dxdt,$$

де $\omega_0 > 0$, $\omega_1 \geqslant \frac{\nu_1 n}{2} + 1$. Позначимо другий інтеграл у (47) через P_2. Згідно з умовою **(A)** і нерівністю (44) маємо

$$P_2 \geqslant \nu_0 \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^n (|u_{tx_i}^1|^{p-2}u_{tx_i}^1 - |u_{tx_i}^2|^{p-2}u_{tx_i}^2)u_{tx_i}^{1,2}\psi(x)e^{-\mu t}dxdt-$$

$$-\frac{\nu_1 n}{2}\int\limits_{Q_T} |u_t^{1,2}|^2\psi(x)e^{-\mu t}dxdt - \frac{\nu_1\varepsilon_1}{p'}\int\limits_{Q_T}\sum_{i=1}^n (|u_{tx_i}^1|^{p-2}u_{tx_i}^1 - |u_{tx_i}^2|^{p-2}u_{tx_i}^2)^{p'}\psi(x)e^{-\mu t}dxdt-$$

$$-\frac{\nu_1 n(2-p)\nu^{\frac{2p}{2-p}}}{2p\varepsilon_1^{\frac{2(p-1)}{2-p}}}\int\limits_{Q_T}\psi(x)e^{-\mu t}dxdt \geqslant$$

$$\geqslant \left(\nu_0 - \frac{2\nu_1\varepsilon_1}{p'}\right)\int\limits_{Q_T}\sum_{i=1}^n (|u_{tx_i}^1|^{p-2}u_{tx_i}^1 - |u_{tx_i}^2|^{p-2}u_{tx_i}^2)u_{tx_i}^{1,2}\psi(x)e^{-\mu t}dxdt-$$

$$-\frac{\nu_1 n}{2}\int\limits_{Q_T}|u_t^{1,2}|^2\psi(x)e^{-\mu t}dxdt - \frac{\nu_1 n(2-p)(n-1)!\sigma_{n-1}}{2p\varepsilon_1^{\frac{2(p-1)}{2-p}}}\nu^{\frac{2p}{2-p}-n},$$

де σ_{n-1} – площа поверхні одиничної $(n-1)$-вимірної сфери. Виберемо $\varepsilon_1 = \dfrac{\nu_0 p'}{2\nu_1}$. Тоді, враховуючи оцінки інтегралів P_1 і P_2, з (47), одержимо нерівність

$$\int\limits_{Q_T}|u_t^{1,2}|^2\psi(x)dxdt \leqslant \omega_2\nu^{\frac{2p}{2-p}-n},$$

де стала ω_2 не залежить від ν. Оскільки за умовою теореми $\frac{2p}{2-p} - n > 0$ і ν може бути довільним як завгодно малим додатним числом, то з останньої нерівності випливає, що $u_t^{1,2} = 0$ майже всюди в Q_T. Але $u^{1,2}(x,0) = 0$, тому $u^{1,2}(x,t) = 0$ майже всюди в Q_T і теорему доведено. □

1. *Kallies W.D., Holmes P.J.* On a dynamical model for phase transformation in nonlinear elasticity, in: J.Chadam, M.Golubitsky, W.Langford, B.Wetton (eds.), Pattern formation: symmetry methods and applications, Fields Institute Communications 5, AMS, Providence, 1996.
2. *Kallies W.D.* Regularized models of phase transformation in one-dimensional nonlinear elasticity / *Kallies W.D.* // Ph.D. Thesis, Cornell University, 1994.
3. *Rybka P.* Convergence of solutions to the Equation of Quasi-Static Approximation of Viscoelasticity with Capillarity / *Rybka P, Hoffmann K.-H.* // Journal of mathematical analysis and applications. – 1988. – Vol. 226, №1. – P. 61-81.
4. *Abeyaratne R.* Kinetic relations and propagation of phase boundaries in solids / *Abeyaratne R., Knowles J.K.* // Arch. Rational Mech. Anal. – 1991. – Vol. 114. – C. 119-154.

5. *Abeyaratne R.* Implications of viscosity and strain gradient effects for the kinetics of propagating phase boundaries in solids / *Abeyaratne R., Knowles J.K.* // SIAM J. Appl. Math. – 1991. – Vol. 51. – C. 1205-1221.
6. *Slemrod M.* Admissibility criteria for propagating phase boundaries in a van der Waals fluid / *Slemrod M.* // Arch. Rational Mech. Anal. – 1983. – Vol. 81. – C. 37-85.
7. *Процах Н.П.* Мішана задача для нелінійного еволюційного рівняння з другою похідною за часом в узагальнених просторах Лебега / *Процах Н.П.* // Математичні студії. – 2001. – Т. 16, №. 2. – С. 157-168.
8. *Процах Н.* Існування та єдиність розв'язку мішаної задачі для одного параболічного нелінійного рівняння / *Процах Н.* // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2001. – Вип. 59. – С. 148-157.
9. *Слепцова И.П.* Принцип Фрагмена-Линделефа для неоднородных квазилинейных эволюционних уравнений высшего порядка / *Слепцова И.П., Шишков А.Е.* // Укр. мат. журн. – 2005. – Т. 57, №2. – С. 239-249.
10. *Коддингтон Э.А.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. / *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* – М., 1958.
11. *Гаевский Х.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* – М., 1978.
12. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / *Лионс Ж.-Л.* – М., 1972.
13. *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа / *Фихтенгольц Г. М.* // Т. 2. – М., 1968.

THE INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A NONLINEAR PARABOLIC EQUATION OF THE FOUR ORDER

Halyna TORHAN

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: torgan_g@yahoo.com

In this article there are obtained some sufficient conditions the existence of a generalized solution of the initial boundary value problem for a nonlinear parabolic equation of the four order in an unbounded domain with respect to spatial variables.

Key words: nonlinear parabolic equation, initial boundary value problem.

СМЕШАНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Галина ТОРГАН

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: torgan_g@yahoo.com

Получены некоторые достаточные условия существования обобщенного решения смешаной задачи для нелинейного параболического уравнения четвертого порядка в неограниченной за пространственными переменными области.

Ключевые слова: нелинейное параболическое уравнение, смешаная задача.

Стаття надійшла до редколегії 20.05.2008

Прийнята до друку 12.06.2009

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ — *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2009. — *Ser. Mech. Math. 2009.*
Вип. 70. С. 183–190 — *Is. 70. P. 183–190*

УДК 517.5

ВЛАСТИВОСТІ ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНОЇ ФУНКЦІЇ З НЕВІД'ЄМНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Мирослав ШЕРЕМЕТА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: m_m_sheremeta@list.ru

Досліджено близькість до опуклості, зростання і обмеженість l-індексу гіпергеометричної функції з додатними параметрами.

Ключові слова: гіпергеометрична функція, близькість до опуклості, обмеженість l-індексу.

1. Вступ. Аналітична однолиста в крузі $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функція f називається опуклою, якщо $f(\mathbb{D})$ – опукла область. Умова $\mathrm{Re}\{1 + zf''(z)/f'(z)\} > 0$ $(z \in \mathbb{D})$ є необхідною і достатньою [1, с.203] для опуклості f. Функція f називається [1, с. 583] близькою до опуклої в $\mathbb{D}$, якщо існує опукла в $\mathbb{D}$ функція Φ така, що $\mathrm{Re}\,(f'(z)/\Phi'(z)) > 0$ $(z \in \mathbb{D})$. Близька до опуклої функція f характеризується тим, що зовнішність G області $f(\mathbb{D})$ можна заповнити променями L, що виходять з ∂G і повністю лежать в G. Кожна близька до опуклої функція є однолистою в $\mathbb{D}$, тому $f'(0) \neq 0$.

Для додатної неперервної на $[0, 1)$ функції l такої, що $l(r) > \beta/(1-r)$ для всіх $r \in [0, 1)$ і деякого $\beta > 0$, аналітична в $\mathbb{D}$ функція f називається функцією обмеженого l-індексу [1, с. 7], якщо існує $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in \mathbb{D}$

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!l^n(|z|)} \leqslant \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!l^k(|z|)} : \quad 0 \leqslant k \leqslant N\right\}. \tag{1}$$

Найменше з таких N називається l-індексом і позначається через $N(f, l)$. Якщо $G \subset \mathbb{D}$ та існує $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що нерівність (1) правильна для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in G$, то f називатимемо функцією обмеженого l-індексу на (або в) G, а l-індекс позначатимемо через $N(f, l; G)$.

Гіпергеометричною називається [3, с. 62-64] функція

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z)=1+\sum_{k=1}^{\infty}A_kz^k=1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{j=0}^{k-1}\frac{(j+\alpha)(j+\beta)}{(j+1)(j+\gamma)}\right)z^k, \tag{2}$$

де $\gamma\neq 0,\,-1\,-2,\dots$. Радіус збіжності ряду (2) дорівнює 1, функція $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ аналітична в $\mathbb{D}$ і є розв'язком [3, с. 62] гіпергеометричного рівняння (Гаусса)

$$z(z-1)w''+((\alpha+\beta+1)z-\gamma)w'+\alpha\beta w=0. \tag{3}$$

Зауважимо, що $F(1,\beta,\beta;z)=1/(1-z)$ є сумою геометричної прогресії.

Виродженою гіпергеометричною називається [3, с. 78] функція

$$F(\alpha,\gamma;z)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{j=0}^{k-1}\frac{j+\alpha}{j+\gamma}\right)\frac{z^k}{k!},\qquad \gamma\neq 0,\,-1\,-2,\dots$$

Функція $F(\alpha,\gamma;z)$ є цілою і задовольняє [3, с.78] диференціальне рівняння $zw''+$ $+(\gamma-z)w'-\alpha w=0$. З теореми 1 з [4] випливає таке: якщо $0<\alpha\leqslant\gamma$, то вироджена гіпергеометрична функція та всі її похідні є близькими до опуклих в $\mathbb{D}$ і $\ln M_{F(\alpha,\gamma;\cdot)}(r)\sim r$ при $r\to+\infty$, де $M_f(r)=\max\{|f(z)|:\,|z|=r\}$. За цієї ж умови в [5] показано, що l-індекс кожної похідної порядку $n\geqslant 0$ функції $F(\alpha,\gamma;z)$ не перевищує 1 з $l(r)\equiv\max\{\sqrt{e}/(2-\sqrt{e}),\,4(\gamma+n+1)\}$.

Мета нашої праці – отримати подібні результати для гіпергеометричної функції.

2. Близькість до опуклості. Спочатку зауважимо таке: якщо всі похідні аналітичної в $\mathbb{D}$ функції f є однолистими в $\mathbb{D}$, то f – ціла функція [6]. Тому всі похідні гіпергеометричної функції не можуть бути близькими до опуклих в $\mathbb{D}$. Проте правильне таке твердження.

Твердження 1. *Для будь-якого натурального N існують такі додатні параметри α, β, γ, що всі похідні порядку $n\leqslant N$ гіпергеометричної функції $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ є близькими до опуклих в $\mathbb{D}$.*

Доведення. Якщо через A_k позначимо тейлорові коефіцієнти функції $F(\alpha,\beta,\gamma;z)=$ $=F(z)$, то $A_{k+1}=\dfrac{(k+\alpha)(k+\beta)}{(k+1)(k+\gamma)}A_k$ $(k\geqslant 0)$ і $F^{(n)}(z)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+n)!}{k!}A_{k+n}z^k$ $(n\geqslant 0)$, а отже, $F^{(n)}$ є близькою до опуклої в $\mathbb{D}$ тоді і тільки тоді, коли такою є функція

$$F_n(z)=\frac{F^{(n)}(z)-n!A_n}{(n+1)!A_{n+1}}=z+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(k+n)!}{k!(n+1)!}\frac{A_{n+k}}{A_{n+1}}z^k=$$

$$=z+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\prod_{j=n+1}^{n+k-1}\frac{(j+\alpha)(j+\beta)}{j+\gamma}\right)\frac{z^k}{k!}=z+\sum_{k=2}^{\infty}A_k^{(n)}z^k\quad (n\geqslant 0).$$

Застосуємо тепер критерій Александера [7, с. 10], який стверджує таке: якщо $a(z)=z+\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}a_kz^k$ і

$$1\geqslant 2a_2\geqslant\ldots\geqslant ka_k\geqslant(k+1)a_{k+1}\geqslant\cdots>0,$$

то a близька до опуклої в $\mathbb{D}$.

Оскільки $kA_k^{(n)} \geqslant (k+1)A_{k+1}^{(n)}$ тоді і тільки тоді, коли $\dfrac{(n+k+\alpha)(n+k+\beta)}{k(n+k+\gamma)} \leq 1$, тобто $(\gamma-\alpha-\beta-n)k \geqslant (n+\alpha)(n+\beta)$, то остання нерівність правильна для всіх $k \geqslant 1$ за умови $\gamma \geqslant \alpha+\beta+n+(n+\alpha)(n+\beta)$. Якщо виберемо $\gamma = \alpha+\beta+N+$ $+(N+\alpha)(N+\beta)$, то за критерієм Александера всі функції F_n $(n \leq N)$ є близькими до опуклих в $\mathbb{D}$. Твердження 1 доведено. □

3. Зростання. У наступному твердженні параметри α, β, γ вважають додатними, але з його доведення видно, що воно правильне і для дійсних параметрів, а у випадку комплексних параметрів можна отримати відповідні оцінки.

Твердження 2. *Для гіпергеометричної функції $F(z) = F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ з додатними параметрами α, β, γ правильні асимптотичні рівності*

$$M_F(r) \asymp \begin{cases} 1, & \alpha+\beta-\gamma<0, \\ \ln\dfrac{1}{1-r}, & \alpha+\beta-\gamma=0, \\ \dfrac{1}{(1-r)^{\alpha+\beta-\gamma}}, & \alpha+\beta-\gamma>0, \end{cases}, \quad r\uparrow 1.$$

Доведення. Нехай $k_0 = \min\{k \in \mathbb{N} : k+a > 0\}$, де $a = \alpha+\beta-\gamma-1$. Тоді для $k \geqslant k_0+1$

$$\ln A_k = \sum_{j=0}^{k_0-1} \ln\frac{(j+\alpha)(j+\beta)}{(j+1)(j+\gamma)} + \sum_{j=k_0}^{k-1} \ln\left(\frac{j+a}{j} - \frac{((\gamma+1)a-\alpha\beta+\gamma)j+\gamma a}{j(j+1)(j+\gamma)}\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k_0-1} \ln\frac{(j+\alpha)(j+\beta)}{(j+1)(j+\gamma)} + \sum_{j=k_0}^{k-1} \ln\frac{j+a}{j} + \sum_{j=k_0}^{k-1} \ln\left(1 - \frac{((\gamma+1)a-\alpha\beta+\gamma)j+\gamma a}{(j+a)(j+1)(j+\gamma)}\right) =$$

$$= \sum_{j=k_0}^{k-1} \ln\frac{j+a}{j} + O(1) = \int_{k_0}^{k} \ln\left(1+\frac{a}{x}\right)dx + O(1) =$$

$$= \int_{k_0}^{k} \frac{a}{x+a}dx + O(1) = a\ln(k+a) + O(1) = (\alpha+\beta-\gamma-1)\ln k + O(1), \quad k \to +\infty.$$

Тому існують сталі $0 < h \leq H < +\infty$ такі, що

$$hk^{\alpha+\beta-\gamma-1} \leq A_k \leq Hk^{\alpha+\beta-\gamma-1}, \qquad k \geqslant 1. \tag{4}$$

Якщо $\alpha+\beta-\gamma<0$, то $M_F(r) = F(\alpha,\beta,\gamma;r) = O(1)$, $r\uparrow 1$, якщо $\alpha+\beta-\gamma=0$, то $M_F(r) \asymp \ln\dfrac{1}{1-r}$, $r\uparrow 1$.

Нарешті, нехай $\alpha+\beta-\gamma = p > 0$. Розглянемо степеневий ряд $F^*(r) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} k^{p-1}r^k$.

Неважко показати, що

$$F^*(r) = \int_1^{\infty} x^{p-1}e^{-x|\ln r|}dx + O(\exp\{\max\{(p-1)\ln x - x|\ln r| : x \geqslant 1\}\}, \quad r\uparrow 1.$$

Але
$$\int_1^{\infty} x^{p-1}e^{-x|\ln r|}dx = \left(\frac{1}{|\ln r|}\right)^p \int_{|\ln r|}^{\infty} t^{p-1}e^{-t}dt \sim \frac{\Gamma(p)}{(1-r)^p}, \quad r\uparrow 1,$$
і
$$\max\{(p-1)\ln x - x|\ln r| : x \geqslant 1\} = \begin{cases} -|\ln r|, & 0 < p \le 1, \\ (p-1)\ln \dfrac{p-1}{e|\ln r|}, & p > 1, \end{cases}$$
тобто $\exp\{\max\{(p-1)\ln x - x|\ln r| : x \geqslant 1\} = o\left(\dfrac{1}{(1-r)^p}\right)$ і $F^*(r) \sim \dfrac{\Gamma(p)}{(1-r)^p}$, $r\uparrow 1$. Отже, $M_F(r) \asymp \dfrac{1}{(1-r)^p}$, $r\uparrow 1$, і твердження 2 доведено. □

4. Обмеженість l-індексу. У дослідженні l-індексу гіпергеометричної функції в $\mathbb{D}_R$, $R<1$, будемо використовувати таку лему з [5].

Лема 1. *Нехай $f(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} f_k z^k$ аналітична в крузі $\mathbb{D}_R = \{z : |z| < R\}$ функція і $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k| R^k \le q(R) < 1$. Тоді $N(f, l; \mathbb{D}_{R/2}) \le 1$ з $l(r) \equiv 2R\dfrac{1+q(R)}{1-q(R)}$.*

Твердження 3. *Якщо $\max\{\alpha\beta, \alpha+\beta-1\} \le \gamma$, то $N(F, 2; \mathbb{D}_{1/6}) \le 1$, якщо $\max\{\gamma, \alpha+\beta-1\} \le \alpha\beta$, то $N(F, 2; \mathbb{D}_{\gamma/(6\alpha\beta)}) \le 1$.*

Доведення. У першому випадку $A_k \le 1$ $(k \geqslant 0)$ і $\sum_{k=1}^{\infty} A_k (1/3)^k \le 1/2$. Тому за лемою 1 з $R = 1/3$ і $q(R) = 1/2$ маємо $N(F, 2; \mathbb{D}_{1/6}) \le 1$. У другому випадку $\dfrac{(k+\alpha)(k+\beta)}{(k+1)(k+\gamma)} \le \dfrac{\alpha\beta}{\gamma}$ $(k \geqslant 0)$, а отже, $A_k \le \left(\dfrac{\alpha\beta}{\gamma}\right)^k$ $(k \geqslant 1)$ і $\sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(\dfrac{\gamma}{3\alpha\beta}\right)^k \le 1/2$. Тому за лемою 1 з $R = \gamma/(3\alpha\beta)$ і $q(R) = 1/2$ маємо $N(F, 2; \mathbb{D}_{\gamma/(6\alpha\beta)}) \le 1$. Твердження 3 доведено. □

Для оцінки l-індексу гіпергеометричної функції в $\mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_R$ з $R = 1/6$ чи $R = \gamma/(3\alpha\beta)$ використаємо той факт, що ця функція задовольняє диференціальне рівняння (3).

Твердження 4. *Якщо $\max\{\alpha\beta, \alpha+\beta-1\} \le \gamma$, то для похідної $F^{(n)}$ $(n \geqslant 0)$ гіпергеометричної функції $F(z) = F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ правильна оцінка $N(F^{(n)}, l; \mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_{1/6}) \le 1$, де $l(r) = 9(\gamma+n+1)/(1-r)$.*

Доведення. Оскільки функція F є розв'язком рівняння (3), то для $1/6 \le |z| < 1$ маємо
$$\frac{|F''(z)|}{2!}\left(\frac{1-|z|}{9(\gamma+1)}\right)^2 \le \frac{\alpha+\beta+1+\gamma/|z|}{2|1-z|}\left(\frac{1-|z|}{9(\gamma+1)}\right)\frac{|F'(z)|}{1!}\left(\frac{1-|z|}{9(\gamma+1)}\right) +$$
$$+\frac{\alpha\beta/|z|}{2|1-z|}\left(\frac{1-|z|}{9(\gamma+1)}\right)^2 |F(z)| \le \left(\frac{7\gamma+2}{18(\gamma+1)} + \frac{6\gamma}{162(\gamma+1)^2}\right)\times$$

$$\times \max\left\{\frac{|F'(z)|}{1!}\left(\frac{1-|z|}{9(\gamma+1)}\right), |F(z)|\right\} < \max\left\{\frac{|F'(z)|}{1!}\left(\frac{1-|z|}{9(\gamma+1)}\right), |F(z)|\right\}. \qquad (5)$$

Підставимо F в (3) і продиференціюємо $m \geqslant 1$ разів. Отримаємо тотожність

$$z(z-1)F^{(m+2)}(z) + ((\alpha+\beta+1+2m)z-(\gamma+m))F^{(m+1)}(z)+$$
$$+(m(m+\alpha+\beta)+\alpha\beta)F^{(m)}(z) \equiv 0, \qquad (6)$$

звідки, як вище,

$$\frac{|F^{(m+2)}(z)|}{(m+2)!}\left(\frac{1-|z|}{9(\gamma+1)}\right)^{m+2} \leq \left(\frac{7\gamma+8m+2}{9(m+2)(\gamma+1)} + \frac{6(m+1)\gamma+6m^2}{81(m+2)(m+1)(\gamma+1)^2}\right)\times$$
$$\times \max\left\{\frac{|F^{(m+1)}(z)|}{(m+1)!}\left(\frac{1-|z|}{9(\gamma+1)}\right)^{m+1}, \frac{|F^{(m)}(z)|}{m!}\left(\frac{1-|z|}{9(\gamma+1)}\right)^{m}\right\} \leq$$
$$\leq \max\left\{\frac{|F^{(m+1)}(z)|}{(m+1)!}\left(\frac{1-|z|}{9(\gamma+1)}\right)^{m+1}, \frac{|F^{(m)}(z)|}{m!}\left(\frac{1-|z|}{9(\gamma+1)}\right)^{m}\right\}. \qquad (7)$$

З (5) і (7) легко випливає, що для всіх $n \geqslant 2$, $1/6 \leq |z| < 1$

$$\frac{|F^{(n)}(z)|}{n!}\left(\frac{1-|z|}{9(\gamma+1)}\right)^{n} \leq \max\left\{\frac{|F'(z)|}{1!}\left(\frac{1-|z|}{9(\gamma+1)}\right), |F(z)|\right\},$$

тобто $N(F, l; \mathbb{D}\setminus\mathbb{D}_{1/6}) \leq 1$ з $l(r) = 9(\gamma+1)/(1-r)$.

Для $n \geqslant 1$ і $j \geqslant 0$ тотожність (6) перепишеться у вигляді

$$z(z-1)F^{(n+j+2)}(z) + ((\alpha+\beta+1+2n+2j)z-(\gamma+n+j))F^{(n+j+1)}(z)+$$
$$+((n+j)(n+j+\alpha+\beta)+\alpha\beta)F^{(n+j)}(z) \equiv 0. \qquad (8)$$

Звідси, як звичайно, отримуємо

$$\frac{|F^{(n+j+2)}(z)|}{(j+2)!}\left(\frac{1-|z|}{9(\gamma+n+1)}\right)^{j+2} \leq$$
$$\leq \left(\frac{7\gamma+8n+8j+2}{9(j+2)(\gamma+n+1)} + \frac{6(n+j+1)\gamma+6(n+j)^2}{81(j+2)(j+1)(\gamma+n+1)^2}\right)\times$$
$$\times \max\left\{\frac{|F^{(n+j+1)}(z)|}{(j+1)!}\left(\frac{1-|z|}{9(\gamma+n+1)}\right)^{j+1}, \frac{|F^{(n+j)}(z)|}{j!}\left(\frac{1-|z|}{9(\gamma+n+1)}\right)^{j}\right\} <$$
$$< \max\left\{\frac{|F^{(n+j+1)}(z)|}{(j+1)!}\left(\frac{1-|z|}{9(\gamma+n+1)}\right)^{j+1}, \frac{|F^{(n+j)}(z)|}{j!}\left(\frac{1-|z|}{9(\gamma+n+1)}\right)^{j}\right\}. \qquad (9)$$

Звідси випливає, що для кожного $n \geqslant 1$ і всіх $m \geqslant 2$

$$\frac{|F^{(n+m)}(z)|}{m!}\left(\frac{1-|z|}{9(\gamma+n+1)}\right)^{m} \leq \max\left\{\frac{|F^{(n+1)}(z)|}{1!}\left(\frac{1-|z|}{9(\gamma+n+1)}\right), |F^{(n)}(z)|\right\}$$

тобто $N(F^{(n)}, l; \mathbb{D}\setminus\mathbb{D}_{1/6}) \leq 1$ з $l(r) = 9(\gamma+n+1)/(1-r)$. Твердження 4 доведено. □

Твердження 5. *Якщо* $\max\{\gamma,\, \alpha+\beta-1\} \leq \alpha\beta$, *то для похідної* $F^{(n)}$ $(n \geqslant 0)$ *гіпергеометричної функції* $F(z) = F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ *правильна оцінка* $N(F^{(n)}, l; \mathbb{D}\setminus\mathbb{D}_{\gamma/(6\alpha\beta)}) \leq 1$, *де* $l(r) = \dfrac{9\alpha\beta(\alpha\beta+n+1)}{\gamma(1-r)}$.

Доведення. Для $\gamma/(6\alpha\beta) \le |z| < 1$ аналогом нерівності (5) є така нерівність

$$\frac{|F''(z)|}{2!}\left(\frac{\gamma(1-|z|)}{9\alpha\beta(\alpha\beta+1)}\right)^2 \le \left(\frac{7\alpha\beta+2}{18(\alpha\beta+1)\alpha\beta/\gamma}+\frac{6(\alpha\beta)^2}{162\gamma(\alpha\beta)^2(\alpha\beta+1)^2/\gamma^2}\right)\times$$
$$\times\max\left\{\frac{|F'(z)|}{1!}\left(\frac{\gamma(1-|z|)}{9\alpha\beta(\alpha\beta+1)}\right), |F(z)|\right\} \le$$
$$\le \left(\frac{7\alpha\beta+2}{18(\alpha\beta+1)}+\frac{\alpha\beta}{27(\alpha\beta+1)^2}\right)\max\left\{\frac{|F'(z)|}{1!}\left(\frac{\gamma(1-|z|)}{9\alpha\beta(\alpha\beta+1)}\right), |F(z)|\right\} <$$
$$< \max\left\{\frac{|F'(z)|}{1!}\left(\frac{\gamma(1-|z|)}{9\alpha\beta(\alpha\beta+1)}\right), |F(z)|\right\}. \qquad (5')$$

Використовуючи тотожності (6) і (8), подібно доводяться такі аналоги нерівностей (7) і (9) :

$$\frac{|F^{(m+2)}(z)|}{(m+2)!}\left(\frac{\gamma(1-|z|)}{9\alpha\beta(\alpha\beta+1)}\right)^{m+2} \le$$
$$\le \left(\frac{7\alpha\beta+8m+2}{9(m+2)(\alpha\beta+1)}+\frac{2(m+1)\gamma+2m^2}{27(m+2)(m+1)(\alpha\beta+1)^2}\right)\times$$
$$\times\max\left\{\frac{|F^{(m+1)}(z)|}{(m+1)!}\left(\frac{\gamma(1-|z|)}{9\alpha\beta(\alpha\beta+1)}\right)^{m+1}, \frac{|F^{(m)}(z)|}{m!}\left(\frac{\gamma(1-|z|)}{9\alpha\beta(\alpha\beta+1)}\right)^{m}\right\} \le$$
$$\le \max\left\{\frac{|F^{(m+1)}(z)|}{(m+1)!}\left(\frac{\gamma(1-|z|)}{9\alpha\beta(\alpha\beta+1)}\right)^{m+1}, \frac{|F^{(m)}(z)|}{m!}\left(\frac{\gamma(1-|z|)}{9\alpha\beta(\alpha\beta+1)}\right)^{m}\right\} \qquad (7')$$

і

$$\frac{|F^{(n+j+2)}(z)|}{(j+2)!}\left(\frac{\gamma(1-|z|)}{9\alpha\beta(\alpha\beta+1)}\right)^{j+2} \le$$
$$\le \left(\frac{7\alpha\beta+8n+8j+2}{9(j+2)(\alpha\beta+n+1)}+\frac{2(n+j+1)\alpha\beta+2(n+j)^2}{27(j+2)(j+1)(\alpha\beta+n+1)^2}\right)\times$$
$$\times\max\left\{\frac{|F^{(n+j+1)}(z)|}{(j+1)!}\left(\frac{\gamma(1-|z|)}{9\alpha\beta(\alpha\beta+n+1)}\right)^{j+1}, \frac{|F^{(n+j)}(z)|}{j!}\left(\frac{\gamma(1-|z|)}{9\alpha\beta(\alpha\beta+n+1)}\right)^{j}\right\} <$$
$$< \max\left\{\frac{|F^{(n+j+1)}(z)|}{(j+1)!}\left(\frac{\gamma(1-|z|)}{9\alpha\beta(\alpha\beta+n+1)}\right)^{j+1}, \frac{|F^{(n+j)}(z)|}{j!}\left(\frac{\gamma(1-|z|)}{9\alpha\beta(\alpha\beta+n+1)}\right)^{j}\right\}. \qquad (9')$$

З нерівностей (5’), (7’) і (9’), як у доведенні твердження 4, для всіх $n \geqslant 0$ отримуємо нерівність $N(F^{(n)}, l; \mathbb{D}\setminus\mathbb{D}_{\gamma/(6\alpha\beta)}) \le 1$ з $l(r) = \dfrac{9\alpha\beta(\alpha\beta+n+1)}{\gamma(1-r)}$. Твердження 5 доведено. □

5. Висновки. З доведень тверджень 3-5 видно, що подібні результати можна отримати і у випадку комплексних параметрів α, β, γ. Ми розглянули додатні α, β, γ для того, щоб за певних досить простих умов на параметри гіпергеометрична функція $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ володіла властивостями, наведеними у твердженнях 1-5.

Наприклад, правильна така теорема.

Теорема. *Якщо* $\gamma \geqslant \alpha+\beta+\alpha\beta$, *то гіпергеометрична функція* $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ *є обмеженою, близькою до опуклої в* $\mathbb{D}$ *і* l*-індекс* $N(F,l)\le 1$ *з* $l(r)=9(\gamma+1)/(1-r)$. *Якщо* $\gamma=\alpha+\beta\geqslant\alpha\beta$, *то* $M_F(r)\asymp \ln\dfrac{1}{1-r}\,(r\uparrow 1)$ *і* $N(F,l)\le 1$ *з* $l(r)=9(\gamma+1)/(1-r)$. *Якщо ж* $\gamma<\alpha+\beta\le\alpha\beta$, *то* $M_F(r)\asymp\dfrac{1}{(1-r)^{\alpha+\beta-\gamma}}\,(r\uparrow 1)$ *і* $N(F,l)\le 1$ *з* $l(r)=9\alpha\beta(\alpha\beta+1)/(\gamma(1-r))$.

Справді, з доведення твердження 1 видно, що за умови $\gamma\geqslant\alpha+\beta+\alpha\beta$ функція $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ є близькою до опуклої в $\mathbb{D}$. З цієї умови випливає, що $\alpha+\beta<\gamma$, і тому за твердженням 2 $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ є обмеженою. Нарешті, оскільки $\gamma\geqslant\alpha+\beta-1$ і $\gamma\geqslant\alpha\beta$, то за твердженнями 3-4 $N(F,2;\mathbb{D}_{1/6})\le 1$ і $N(F^{(n)},9(\gamma+n+1)/(1-r);\mathbb{D}\setminus\mathbb{D}_{1/6})\le 1$. Неважко показати [1, с. 23] таке: якщо $l_*(r)\le l^*(r)$ і $N(f,l_*;G)\le N$, то $N(f,l^*;G)\le N$, оскільки $9(\gamma+n+1)/(1-r)>2$, то першу частину теореми доведено. Подібно доводяться дві інші частини теореми.

1. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплесного переменного / *Голузин Г.М.* – М.: Наука, 1966.
2. *Sheremeta M.M.* Analytic functions of bounded index / *Sheremeta M.M.* – Lviv: VNTL Publishers, 1999.
3. *Кузнецов Д.С.* Специальные функции / *Кузнецов Д.С.* – М.: Высшая школа, 1965.
4. *Shah S.M.* Univalence of a function f and its successive derivatives when f satisfies a differential equation, II / *Shah S.M.* // J. Math. Anal. and Appl. – 1989. – Vol. 142. – P. 422-430.
5. *Шеремета З.М.* Обмеженість l-індексу аналітичних функцій, зображених степеневими рядами / *Шеремета З.М., Шеремета М.М.* // Вісник Львів. у-ту. Сер. мех.-мат. – 2006. – Вип. 66. – С. 208-213.
6. *Shah S.M.* Univalent functions with univalent derivatives / *Shah S.M., Trimble S.Y.* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1969. – Vol. 75. – P. 153-157.
7. *Goodman A.W.* Univalent functions / *Goodman A.W.* Mariner Publishing. Co. – 1983. – Vol. II.

PROPERTIES OF THE HYPERGEOMETRIC FUNCTION WITH POSITIVE PARAMETERS

Myroslav SHEREMETA

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: m_m_sheremeta@list.ru

Close-to-convexity, growth and l-index boundedness of the hypergeometric function with positive parameters are investigated.

Key words: hypergeometric function, close-to-convexity, l-index boundedness.

СВОЙСТВА ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Мирослав ШЕРЕМЕТА

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: m_m_sheremeta@list.ru

Исследованы близость к выпуклости, рост и ограниченность l-индекса гипергеометрической функции с положительными параметрами.

Ключевые слова: гипергеометрическая функция, близость к выпуклости, ограниченность l-индексу.

Стаття надійшла до редколегії 22.04.2008

Прийнята до друку 12.06.2009

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2009. *Ser. Mech. Math. 2009.*
Вип. 70. С. 191–207 *Is. 70. P. 191–207*

УДК 37.091

ВИДАТНИЙ УКРАЇНСЬКИЙ МАТЕМАТИК І ПЕДАГОГ МИРОН ЗАРИЦЬКИЙ (ДО 120-РІЧЧЯ ВІД НАРОДЖЕННЯ)

Михайло ЗАРІЧНИЙ[1], **Богдан ПТАШНИК**[2]

[1]*Львівський національний університет імені Івана Франка,*
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: topology@franko.lviv.ua
[2]*Інститут прикладних проблем механіки і математики*
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
79060, Львів, вул. Наукова, 3б
e-mail: ptashnyk@lms.lviv.ua

Описано життєвий і науковий шлях Мирона Зарицького – видатного українського математика, дійсного члена Наукового товариства ім. Шевченка, професора Львівського університету.

Ключові слова: Мирон Зарицький, видатні українські вчені, бульові алгебри, оператор замикання, оператор межі.

1. Вступ. 21 травня 2009 року минуло 120 років від народження видатного українського математика, педагога та просвітника, дійсного члена Наукового товариства ім. Шевченка, професора Львівського університету Мирона Зарицького, одного з фундаторів української математичної культури на західноукраїнських землях. З цієї нагоди в Актовій залі Львівського національного університету імені Івана Франка відбулася Урочиста Академія, яку організували механіко-математичний факультет ЛНУ імені Івана Франка, інститут прикладної математики та фундаментальних наук Національного університету "Львівська політехніка", ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, фізико-математична секція НТШ та секція математики і математичного моделювання Західного наукового центру НАН України і МОН України.

Учасників Урочистої Академії, серед яких були науковці академічних установ Львова, викладачі та студенти університетів, старше покоління, яке пам'ятає професора Зарицького, онук Мирона Зарицького – Богдан Сорока, відомий художник-графік, та його дружина Люба Сорока, привітав проректор ЛНУ імені Івана Франка Володимир Кирилич.

У заслуханих доповідях розкрили життєвий і творчий шлях професора Мирона Зарицького (Богдан Пташник, ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України), його наукову спадщину (Михайло Зарічний, ЛНУ імені Івана Франка) та методичні ідеї (Олена Осадча, Львівська академічна гімназія), місце та роль Мирона Зарицького у львівській математичній школі (Ярослав Притула, ЛНУ імені Івана Франка), розповіли про родинну трагедію Мирона Зарицького (Люба Сорока), єдина донька якого Катерина та зять Михайло Сорока більшу половину свого життя провели у тюрмах і таборах, ставши яскравим прикладом самопожертви в ім'я великої мети – незалежності України.

Спогадами про Мирона Зарицького поділилися його колишні студенти-хіміки Євген Гладишевський, Ганна Гаврилюк, Мирослава Ковбуз і фізик Лев Іванків. Директор середньої школи № 8 міста Львова (де раніше була II польська гімназія імені Кароля Шайнохи, в якій Мирон Зарицький викладав у 1934 – 1939 рр.) Михайло Ерстенюк ознайомив присутніх зі спогадами польського письменника Станіслава Лема про Мирона Зарицького, який був гімназійним учнем професора.

Якою ж була непересічна постать Мирона Зарицького – людини, вченого і педагога?

Оцінювати будь-яку особистість можна, охопивши всю багатогранність її діяльності та пізнавши, в яких конкретних умовах людина жила і творила.

Умови для Мирона Зарицького не були вельми сприятливими. Він ріс і жив у часи, коли його народ був (за словами Івана Франка) "замучений, розбитий, мов паралітик той на роздорожжу, людським презирством, ніби струпом вкритий ..."

Мирон Зарицький пережив дві світові війни, становлення і ліквідацію Західно-Української народної республіки, гніт панської Польщі після 1919 р., німецьку окупацію та "визволення" Західної України Радянською владою, постійні обшуки та переслідування, вболівав за долю свого внука Богдана, якого виховував разом із дружиною Володимирою з дев'ятимісячного віку, переживав за долю доньки Катерини та зятя Михайла Сороки, які через півроку після одруження були арештовані в березні 1940 р. органами НКВС і більше в житті не зустрілися.

Але любов до науки, до педагогічної праці, до людей, бажання принести користь рідному народові допомагали Мирону Зарицькому зберігати рівновагу духу, допомагали творити, не покладаючи рук, за будь-яких обставин.

2. Біографія. Мирон Зарицький народився 21 травня 1889 року в селі Могильниця Теребовлянського району Тернопільської області в родині сільського священика. Батько, Онуфрій Зарицький, родом із села Мозолівки Підгаєцького району Тернопільської області, теж був сином священика Івана Зарицького.

За родинними переказами Іван Зарицький був шляхтичем – лицарем гербу "Новина", який брав участь у польському повстанні 1863 р. проти Росії. Після поразки цього повстання він переїхав до Східної Галичини, що тоді була під австрійським пануванням, одружився з галичанкою Марією Чировською, висвятився на греко-католицького священика і отримав парохію в селі Мозолівка.

В сім'ї Івана та Марії Зарицьких було дев'ятеро дітей – чотири сини і п'ять доньок. Один із молодших синів Онуфрій пішов батьковим шляхом і став греко-католицьким священиком. Онуфрій Зарицький перед висвяченням 30 серпня 1888 р. одружився зі Софією Слоневською, донькою пароха села Криве, що біля Бережан, Антона Слоневського. Село Могильниця було першою парохією о. Онуфрія. Софія Слоневська була дуже енергійною і зарадною жінкою. Разом вони виховали трьох синів – Мирона, Романа, що став правником, та Родіона, який згодом став інженером на залізниці.

Мирон був первістком у сім'ї, народився кволою дитиною і змалку часто хворів, однак розумово розвивався дуже швидко. Виявляв велику зацікавленість до природи, дуже любив квіти. Не раз, бувало, зникав із дому, та знаходили його на полі, у лані пшениці, де він залюбки втішався червоними маками, синіми блаватами та білими ромашками. Згодом батьки його переїхали до Нового Села, тепер Підволочиського району Тернопільської області.

Початкову школу Мирон закінчив у селі Криве у свого діда Антона Слоневського, та ще до неї він самотужки навчився читати, писати і рахувати. Завдяки піклуванню батьків і бабусі Марії Слоневської поволі міцніли фізичні сили юнака.

У 1899 р. вступив до першого класу Цісарсько-Королівської гімназії в Бережанах із польською мовою викладання. З Нового Села, що під Збаражем, привіз його сюди батько Онуфрій Зарицький. Спочатку влаштував сина у викладача гімназії Миколи Бачинського, а згодом, після сімейної ради, вирішив переселити до своєї матері, яка мешкала там само.

Бабуся створила добрі умови юному гімназисту, крім того, навчання давалось йому дуже легко, і малий Мирон закінчив на "відмінно"перші два класи Бережанської гімназії. У Бережанах він уперше побачив великий став, який дуже його зацікавив; навчився плавати і пірнати, чим спричиняв багато турбот бабусі, бо не раз без її відома пропадав на довгий час, перебуваючи на ставі, де змагався з товаришами, хто швидше перепливе став. Бабуся не могла довго миритись із витівками онука і на третьому році навчання Мирона перевели до гімназії в Тернополі з українською мовою навчання, яка називалася тоді "Цісарсько-Королівська Гімназія Франца Йосифа I в Тернополі".

Прагнучи до знань, хлопець багато читав (але тільки те, що його цікавило), багато працював самотужки, зокрема над математикою, значно випереджуючи своїх товаришів. Тому на багатьох уроках у гімназії йому було нецікаво, чого не могли зрозуміти деякі вчителі, і з того часто траплялися непорозуміння. Після одного з таких конфліктів Мирона виключили з 5-го класу Тернопільської гімназії і він поїхав додому у Нове Село, де пробув цілий рік. Він самостійно і наполегливо вчився, а в 1905 р. без жодної допомоги підготував і склав екстерном з добрими оцінками іспити за 6-й клас Тернопільської гімназії та вступив до 7-го класу класичної гімназії в Перемишлі.

У Перемишльській гімназії Мирон Зарицький зацікавився грецькою філософією, багато часу присвячував вивченню грецьких і латинських класиків, але твори, включені в програму гімназії, він вивчав поверхово, і знову були певні конфлікти. Деякі викладачі гімназії вагалися, чи допускати М. Зарицького до випускних іспитів, а він зробив їм несподіванку і все склав на "відмінно".

Склавши іспит на зрілість, відправив батькам таку телеграму: "Матура з відзнакою, порожній гаманець у кишені". Батьки вислали грошей на дорогу та приїхали до Львова його зустрічати. Зустріли в своїх родичів та ще дали грошей, на які Мирон купив багато книг із математики, та цілий день просидів у парку, перечитуючи їх.

У 1907 р. Мирон Зарицький вступив до Віденського університету на філософський факультет. Це був один із найбільших університетів Європи. Тоді там навчалось понад 7500 студентів. На філософському факультеті штатних студентів було 1815, із них 135 з Галичини. На природничому відділенні М. Зарицький слухав лекції з таких дисциплін:

зимовий семестр 1907/08 навчального року

1. Вступ до філософії – 4 годин тижнево.
2. Основні проблеми метафізики і теорії пізнання – 4 годин тижнево.
3. Аналітична геометрія – 4 годин тижнево.
4. Національна економія – 5 годин тижнево.
5. Систематична ботаніка – 5 годин тижнево.
6. Загальна біологія 5 – годин тижнево.
7. Стенографія для початківців – 1 годин тижнево.
8. Англійська мова, 1-ий курс – 2 годин тижнево.

літній семестр 1907/08 навчального року

1. Основи психології – 5 годин тижнево.
2. Загальна біологія – 5 годин тижнево.
3. Спеціальна зоологія, молюски – 2 годин тижнево.
4. Зоотомічний курс – 2 годин тижнево.

Лекції читали відомі тоді учені, зокрема, такі професори: Ріхард Ветштайн (Richard Wetstein) (систематична ботаніка та загальна біологія), дійсний член Цісарської Академії наук у Відні, член правління Міжнародної асоціації ботаніків, директор ботанічного саду та інституту, автор популярного підручника зі систематичної ботаніки "Handbuch der Systematishen Botanik"; Карл Ґробен (Karl Grobben) (загальна біологія, спеціальна зоологія та зоотомічний курс), дійсний член Цісарської Академії наук у Відні, почесний член природничого об'єднання у Віденському університеті, директор інституту зоології, автор підручника зі зоології "Lehrbuch für Zoologie"; Фрідріх Йодль (Fridrich Jodl) (основи психології), дійсний член Цісарської Академії наук у Відні; Вільгельм Єрусалем (Wilhelm Jerusalem) (вступ до філософії), цісарсько-королівський урядовий радник, член Міжнародного інституту соціології в Парижі; Ойґен Філіповіч (Eugen Philippovich) (національна економія), член-кореспондент Цісарської Академії наук у Відні, цісарсько-королівський придворний радник, член Міжнародного інституту соціології в Парижі.

Як великий любитель музики М. Зарицький часто відвідував у Відні концерти та Оперу, витрачаючи на квитки багато грошей з того, що батьки висилали йому на прожиток. Це відбилося на його здоров'ї, тому після закінчення першого курсу батьки Мирона, побачивши його таким змарнілим, вже не відпустили його більше до Відня, і він змушений був перевестися до Львівського університету. Тут Мирон Зарицький студіював переважно математичні та фізичні дисципліни, а також продовжував займатись філософією, самотужки вивчав французьку мову.

У Львові М. Зарицький став членом студентського товариства "Академічна громада", дещо пізніше ввійшов до складу "Українського студентського союзу".

Тоді провідними математиками Львівського університету були Юзеф Пузина та Вацлав Серпінський.

Юзеф Пузина (1856–1919) походив із давнього українського ополяченого князівського роду. Народився в селі Новий Мартинів Станіславської області (нині Івано-Франківська), вчився у Львівському університеті, був учнем професора Жмурка. Математику в університеті викладав протягом 33 років, починаючи з 1884 р. Пузина вперше читав у Львові спеціальні математичні курси, з 1891 р. запровадив практичні заняття з математики, а в 1893 р. заснував математичний семінар, яким керував до 1918 р. Головним напрямом наукової діяльності Пузини була теорія аналітичних функцій. Варто ще згадати, що Ю. Пузина був одним із нечисленних професорів Львівського університету, в якого не було польського шовінізму стосовно студентів-українців. Він був людиною доступною для молоді, охоче займався зі здібними студентами та заохочував їх до наукової праці.

Вацлав Серпінський (1882 – 1969) прибув до Львова в 1908 р. Він народився у Варшаві, вчився у Варшавському університеті, був учнем геніального українського математика Георгія Вороного (1868 – 1908). Г.Вороний народився в селі Журавка Варвинського району Чернігівської області (за теперішнім адміністративним поділом), вчився у Бердянській та Прилуцькій гімназіях, закінчив Петербурзький університет, з 1894 р. до своїх останніх днів працював професором Варшавського університету; за своє коротке життя зробив помітний внесок в усіх трьох головних напрямах сучасної теорії чисел – аналітичної, алгебричної та геометричної, скрізь ров'язавши задачі принципового значення.

В. Серпінський першим у Львові викладав теорію множин, теорію функцій дійсної змінної та аналітичну теорію чисел, разом з Ю.Пузиною керував математичним семінаром, у якому брав участь ще студентом і М.Зарицький.

Курси, які читав у Львівському університеті Вацлав Серпінський (1908 – 1910 рр. – приват-доцент, з 1910 р. – надзвичайний професор) у роки навчання там Мирона Зарицького подано у табл.

Студенти розмножували лекції Серпінського літографічним способом, пізніше багато з цих лекцій були надруковані і мали вагомий вплив на молоду математичну зміну. Його лекції внесли в тематику та зміст університетського навчання теоретико-множинні основи та сучасну математичну строгість.

Під впливом професора Серпінського Мирон Зарицький захопився теорією множин і теорією функцій дійсної змінної. Ці студентські захоплення визначили подальший напрям наукової діяльності М.Зарицького.

Навчання у Віденському університеті також залишило помітний слід у душі й характері М.Зарицького. На студентських канікулах він часто бував у Карпатах, де збирав карпатські рослини і зробив гербарій. Любов до природи, до карпатських гір і лісів не покидала його впродовж усього життя.

У 1912 р. М.Зарицький успішно закінчив Львівський університет, а через рік склав учительські іспити й отримав звання вчителя середніх шкіл з математики і фізики.

Маючи нахил до наукової праці, М. Зарицький, як і багато інших вчених-українців, в умовах австро-угорської монархії та міжвоєнної Польщі не міг отримати роботу у вищій школі, тому почав свою працю на ниві пропагування математичних знань по різних середніх школах Галичини. Він учителював у приватних українських гімназіях Белза та Збаража, потім, із деякими перервами в роки Першої світової війни, у державних гімназіях Коломиї і Тернополя.

Курси, які читав у Львівському університеті Вацлав Серпінський

Навчальний рік	Семестр	Назва курсу	Кількість годин тижнево
1908/09	Зимовий	Теорія чисел	2
		Мат. аналіз	3
		Семінар (нижчий)	2
	Літній	Теорія чисел	2
		Мат. аналіз	3
		Семінар (нижчий)	2
1909/10	Зимовий	Аналітична теорія чисел	2
		Вступ до аналізу	3
		Семінар (нижчий)	2
	Літній	Вищий аналіз	4
		Теорія множин	1
		Семінар (нижчий)	2
1910/11	Зимовий	Вища алгебра	4
		Критичний аналіз фундаментальних математичних понять	1
		Семінар (нижчий)	2
	Літній	Застосування теорії множин до аналізу	3
		Вища алгебра	2
		Семінар (нижчий)	2
1911/12	Зимовий	Теорія нескінченних рядів	4
		Ірраціональності другого степеня	1
		Семінар (вищий)	2
	Літній	Теорія функцій дійсної змінної	4
		Поняття міри точкових множин	1
		Семінар (вищий)	2

Восени 1913 р. Мирон Зарицький одружився з Володимирою Зафійовською, донькою покійного священика Івана Зафійовського, а через рік у подружжя Зарицьких народилась донька Катерина.

Уже тоді М. Зарицький робив перші кроки в науковій роботі з математики. Були то праці невеликого масштабу, але в них уже містилися елементи оригінальної творчості. Через певний час М. Зарицький показав ці роботи відомому польському математикові, професору Львівського університету Г. Штейнгаузу, який схвалив їх і потурбувався про переїзд Мирона Зарицького до Львова.

У 1925 р. М. Зарицький переїхав з Тернополя до Львова, де працював спочатку в IX польській державній гімназії, з 1928 р. до 1934 р. – у Філії української державної гімназії, а з 1934 р. до 1939 р. – у II польській державній гімназії. У Львові він продовжував активно займатися науковою роботою, відвідував в університеті лекції з психології та філософії – професора К. Твардовського, з математики – професора Г. Штейнгауза та С. Рузєвіча, з астрономії – М. Ернста та ін. Титул професора гімназії М. Зарицькому присвоїли 3 лютого 1928 р.

24 березня 1927 р. М. Зарицького обрали дійсним членом Наукового товариства ім. Шевченка, і відтоді він став активним співробітником його математично-природописно-лікарської секції. В 25-му томі "Збірника" цієї секції була надрукована перша його праця "Метод запровадження повного впорядкування у теорії множин" [1]. За другу працю "Деякі основні поняття analysis situs з точки зору алгебри логіки" [2] Львівський університет 25 жовтня 1930 р. присудив М. Зарицькому вчений ступінь доктора філософії.

У цей час Мирон Зарицький зблизився з видатними польськими математиками Г. Штейнгаузом, С. Банахом, В. Стоженком, С. Мазуром, які працювали у Львові, був прийнятий до Львівського відділу Польського математичного товариства, його обрали також членом Німецького математичного товариства. Друкував свої праці у львівських, польських, німецьких і американських журналах, вів наукове листування з математиками багатьох країн.

Як делегат Наукового товариства ім. Шевченка М. Зарицький брав участь у роботі I польського математичного з'їзду, який відбувся у Львові 1927 р., де виступив із науковою доповіддю "Когеренції та адгеренції Кантора", та I математичного з'їзду колишнього Радянського Союзу, що відбувся в 1930 р. у Харкові.

На ювілейному святі математично-природописно-лікарської секції Наукового товариства ім. Шевченка, присвяченому 30-річчю роботи секції, 3 квітня 1927 р. Мирон Зарицький виголосив доповідь філософського змісту "Правда, краса і математика" [3], де, зокрема, говорив такі слова: "Кого не манить краса ні мистецтво, хто живе вбогим духовним життям, той нічого не дасть математиці. Поезія не ріжниться від математики вищим летом уяви, а математик ріжниться від поета лиш тим, що все і всюди розуміє... Але як у мистецтві, так і в математиці лише твори гарні переживають століття і виховують цілі покоління."

До 1939 р. Зарицький надрукував близько 20 наукових праць у львівських та іноземних виданнях і в цей період сформувався як серйозний математик з філософським спрямуванням.

Після приєднання Західної України до УРСР М. Зарицький із грудня 1939р. почав працювати у Львівському університеті. У 1939 – 1941 рр. був продеканом, а в 1945 – 1947 рр. – деканом фізико-математичного факультету, завідував кафедрою теорії ймовірностей, а з 1948 р. – кафедрою загальної математики. В цей період працював (за сумісництвом) старшим науковим співробітником Львівського філіалу АН УРСР. У 1941 р. виступав з доповідями на конференціях Академії наук УРСР та ГрузРСР у Києві та Тбілісі. 21 квітня 1945 р. М. Зарицькому було присвоєно звання професора, а 6 липня 1946 р. – вчений ступінь кандидата фізико-математичних наук.

Роботу у Львівському університеті Мирон Зарицький поєднував із читанням лекцій у Львівському політехнічному інституті (1944 – 1946) та в новоствореному Ужгородському університеті (1950 – 1955), надаючи значну допомогу в організації математичних кафедр цього університету.

В 1942 – 1944 рр. М. Зарицький читав лекції з вищої математики на професійних технічних курсах, організованих на базі Львівської політехніки.

Наукові інтереси М. Зарицького охоплюють головно теорію множин з алгеброю логіки та теорію функцій дійсної змінної.

Мирон Зарицький був великим знавцем історії математики, особливо античної, читав курси лекцій з історії математики у Львівському університеті, надрукував кілька праць з історії точних наук. Сюди належать "Хрестоматія грецької математики" (польською мовою) [4], у якій вміщені невеликі уривки з творів Евкліда, Архімеда, Аполонія Пергійського, Клавдія Птоломея та Діофанта в грецькому оригіналі та латинському перекладі, невеликий етюд "Зауваження до проблеми наближених обчислень у грецькій математиці" [5], нарис "Астрономія в старовину" (українською та польською мовами) [6,7].

Астрономія зацікавила М. Зарицького ще з молодих літ. Ще в дитинстві не було байдужим для нього вечірнє зоряне небо. Тоді на допомогу йому прийшов його дядько (священик), який мав велику астрономічну бібліотеку; він навчив Мирона перших азів астрономії, збудивши інтерес до глибокого вивчення цього предмета. Працюючи в гімназіях, М. Зарицький заохочував учнів до занять астрономією, дуже часто сам ходив вечорами до астрономічної обсерваторії Львівського університету спостерігати зоряне небо. Уже як відомий математик Мирон Зарицький задумав написати нарис про зародження астрономії у стародавніх народів Близького Сходу. Щоб ознайомитись із першоджерелами, йому довелося вивчити в потрібному обсязі староєврейську мову.

Цікаві також його нариси з методики викладання математики у зв'язку з історією та ін. [8–11].

Як філософ М. Зарицький цікавився теорією ймовірностей і математичною статистикою [12]. Його стаття "Сучинники кореляції в теорії математичної статистики" [13] присвячена спробі аналізу балансів кооперативів Тернопільської області.

Як людина з гострим почуттям громадського обов'язку М. Зарицький проводив активну пропаганду наукових знань у пресі [6, 14, 15].

Він підготував до друку монографію "Теорія множин", яка, на жаль, не була надрукована, а рукопис її загубився у стінах Львівського державного університету імені Івана Франка; переклав із французької мови на українську книгу С. Банаха "Курс функціонального аналізу (лінійні операції)" [16]. В українському перекладі ця книга вийшла з друку у видавництві "Радянська школа" в Києві 1948 р. (через три роки після смерті С. Банаха), хоч переклад книги (за угодою з видавництвом) мав бути завершений до 1 липня 1940 р. [17] Це була перша книга з функціонального аналізу, видана в колишньому Радянському Союзі. По ній вивчали функціональний аналіз багато математиків, які навіть не володіли українською мовою. Прізвище перекладача (очевидно, з політичних причин) у книзі не було зазначене.

У домашньому архіві Богдана і Люби Сорок збереглось багато неопублікованих рукописних матеріалів Мирона Зарицького. Серед них статті та реферати

"Замкнення і похідна – як два різні основні поняття теорії двох різних топологічних просторів", "Деякі зауваження до поняття неперервності в загальнотопологічному просторі", "Деякі помилки в математичній літературі", "Дев'ята і десята теореми другої книги евклідових "Елементів"", "Проблема математичної правди і краси математичної думки", "Про всесторонне значіння математики для розвитку людини, суспільности і держави", "Генеза наук зоряних констеляцій (сузір'їв)", "Математика як партійна наука", "Математика з точки зору діалектичного матеріалізму", незавершені книги "Аксіоматичний метод у математиці", "Математичний світогляд", а також обширні матеріали для підручника "Історія математики": а) єгипетська і вавилонська математика; б) хрестоматія вавилонських математиків; в) грецька математика (чотири розділи).

Зі сказаного видно, наскільки різноманітними та широкими були інтереси вченого.

Коло зацікавлень Мирона Зарицького не замикалось лише математикою. Він був обізнаний з природничими науками, світовою літературою, філософією, захоплювався поезією. Любив Шекспіра і Пушкіна. Окремі розділи поеми Пушкіна "Євгеній Онєгін" переклав українською мовою.

Володів вільно польською, німецькою і російською мовами. Крім того, писав математичні статті англійською та французькою мовами, читав літературу на грецькій, латинській і староєврейській мовах.

Однією з прикмет, що характеризували Мирона Зарицького, була цілковита безкорисливість стосовно науки. Головним для нього був сам процес студіювання, відкривання й формування нового, приємність заглибитись у предмет та збагнути його суть. Наука була для М. Зарицького хлібом насущним, потребою і насолодою, працею і відпочинком. На науку він дивився як на правду і красу, що підносить людину на вищий щабель її духовного розвитку. Наука у нього – це творчість, натхнення і радість, котрою він хотів поділитися з кожним, хто цього бажав.

Мирона Зарицького називали "поетом математики". Йому були властивими глибина думки, уміння перетворювати складне в просте. Педагог він був неперевершений. Студенти завжди з великою цікавістю слухали його лекції. Зокрема, він один із перших використовував у лекціях з математичного аналізу символіку логіки предикатів. Варто згадати слова С. Банаха, які він сказав про М. Зарицького: "Я не знаю більше нікого, хто б так логічно та лаконічно викладав математичний аналіз".

До гімназистів, студентів і всіх навколишніх М. Зарицький ставився доброзичливо і щиро. Йому був притаманний тонкий гумор. Колоритний портрет М. Зарицького як викладача гімназії змалював у автобіографічній повісті "Високий замок" [20] його учень – відомий польський письменник Станіслав Лем, а теплі спогади про М. Зарицького як професора університету залишили його студенти Владислав Лянце, Михайло Сеньків (див. [21]) та багато інших.

Відійшов із життя Мирон Зарицький 19 серпня 1961 р. Його поховано на Личаківському цвинтарі у Львові. Пам'ять про нього ще довго освітлюватиме дорогу молодим ентузіастам науки.

3. Наукова спадщина. Наукова спадщина М. Зарицьного обширна та багатогранна. Його наукові інтереси стосувалися здебільшого теорії множин, теоретико-множинної топології та теорії функцій дійсної змінної. Наукові результати М. Зарицького були на передньому краю світової науки. На них є посилання, зокрема, у відомих монографіях [18, 19]. Поданий далі огляд наукових результатів М.Зарицького ґрунтується, зокрема, на статті [33].

Одна з головних тем наукової творчості М. Зарицького – теорія бульових алгебр. Оператор замикання в бульових алгебрах розглянув вперше К. Куратовський [31]. Він сформулював задачу про те, скільки різних елементів можна одержати, застосовуючи до заданого елемента бульової алгебри операції замикання r і доповнення c. Відповідь дає відома теорема Куратовського про 14 множин.

У своїй першій науковій праці [1] Мирон Зарицький застосував оператор r до задання повного порядку на множині. При цьому Зарицький користувався дещо іншою аксіоматикою, ніж ту, яку запровадив Куратовський в [31]. Ця нова аксіоматика виходить за межі теорії бульових алгебр, оскільки апелює до поняття "елемент множини A".

У статті [2] розглянуто операцію межі f в теорії бульових алгебр. Ця операція пов'язана з операцією замикання r формулою $A^f = A^r \cap A^{cr}$. Зарицький наводить у цій статті аксіоматизацію операції f, а також інших операцій: i (внутрішності, $A^i = A^{crc}$), e (зовнішності, $A^e = A^{rc}$), b (берега, $A^b = A \cap A^{cr}$). Для зазначених операцій розв'язано задачу, аналогічну до згаданої вище задачі Куратовського: скільки різних елементів можна одержати почерговим застосуванням таких операцій і доповнення?

Важливе місце в науковій творчості Зарицького займає дослідження бульових алгебр з похідною. Операція похідної d задається такими аксіомами: (1) $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$; (2) $A^{dd} \subset A^d$; (3) $0^d = 0$; (4) $1^d = 1$.

У статті [27] для бульових алгебр з похідною розв'язується аналог задачі Куратовського. Відповідь дається графами, де стрілка означає включення:

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & A^{cdcd} \arrow[dr] & & & & & \\
A^{cdc} \arrow[r] & A^{cd^2c} \arrow[r] & \dots \arrow[r] & A^{cd^nc} \arrow[r] & A^{cdcdcdc} \arrow[ur] \arrow[dr] & & A^{dcdcd} \arrow[r] & A^{d^n} \arrow[r] & \dots \arrow[r] & A^{d^2} \arrow[r] & A^d \\
 & & & & & A^{dcdc} \arrow[ur] & & & & &
\end{tikzcd}$$

Схожі результати Зарицький одержав для інших унарних операцій в теорії бульових алгебр: когеренції, адгеренції і ядра множини в сенсі Кантора.

Зауважмо, що теорію бульових алгебр інтенсивно розвивали в 30-х роках минулого століття американські математики, див., наприклад, [45]-[47]. Результати Зарицького і Сандерса [46] частково перекриваються.

Багато результатів М. Зарицького має природну топологічну інтерпретацію; це засвідчив і сам Зарицький у [29].

У невеликій замітці [22] М. Зарицький знайшов умову, еквівалентну до умови зв'язності підмножини M топологічного простору в термінах властивостей операції f: не існує непорожніх множин A і B таких, що $AB + AB^f + A^f B = 0$ і $A + B = M$.

У праці [23] наведено кілька рівносильних умов у термінах операції d того, що підмножина A топологічного простору C ніде не щільна в C: $A^{dcd} = C$; $A^{dcdcd} = 0$; $A \subset A^{dcd}$; $A \subset A^{dcdcdc}$; $A^{dcdcd} \subset A^{dcd}$, $A^{d^n} \subset A^{dcd}$ для довільного натурального n.

Стаття [26] містить топологічну інтерпретацію операції m, $A^m = A^{dcd}$. Доведено, що множина A^m є похідною для множини всіх зовнішніх точок множини A. Зазначмо, що в термінах операції m можна також виразити поняття всюди щільної, ніде не щільної та межевої множини.

В [28] М. Зарицький писав про можливість "систематичної і послідовної побудови теорії точкових множин на основі поняття похідної множини" і виразив через операцію d ряд загальнотопологічних властивостей множини, зокрема, властивості бути досконалою множиною. Тут треба зауважити, що операцію d можна інтерпретувати як похідну підмножини в топологічному просторі лише у випадку, коли цей простір не має ізольованих точок; щоб дозволити таку інтерпретацію для довільного топологічного простору, необхідно використовувати операцію δ. Також в [28] за допомогою похідної наведено два означення неперервності відображення φ топологічного простору C в себе:

(1) $\varphi(A^d) \subset \varphi(A) + (\varphi(A))^d$;
(2) $\varphi(A^d) + (\varphi(A^d))^d \subset \varphi(A) + (\varphi(A))^d$

для кожного $A \subset C$. Обидва ці означення у випадку евклідового простору виявляються еквівалентними до звичайної неперервності, однак у загальному випадку приводять до різних понять; для їхньої еквівалентності потрібно накладати додаткові умови на операцію d.

Багато праць М. Зарицького дещо відходять від описаної вище тематики. В [24] побудовано гомеоморфізм двох підмножин дійсної прямої, одна з яких вимірна за Лебегом, а інша – ні. Конструкція такого гомеоморфізму ґрунтується на іншій праці Зарицького [25], в якій доведені деякі властивості послідовностей дійсних чисел.

Ще раз повернемося до відомої статті Мирона Зарицького [2], опублікованої в 1927 році, де, зокрема, наведено аксіоматику для поняття межі множини в топологічному просторі. Далі розглядатимемо саме цю аксіоматику та її роль у становленні основ топології.

Загальноприйнятими зараз є два підходи до запровадження топологічної структури — через систему відкритих множин і через оператор замикання. Ми згадували аксіоматизацію Куратовського оператора замикання (див. [31], де ця аксіоматика запроваджена):

(1) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
(2) $A \subset \overline{A}$;
(3) $\overline{\emptyset} = \emptyset$;
(4) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

(щоби наблизити викладення до сучасного стилю позначень, ми вживаємо позначення $\bar{A}$ замість A^r, як вище).

Означення топології через систему відкритих множин, яке, як відомо, еквівалентне до задання за допомогою оператора замикання, веде свою історію від Дедекінда. Воно має виразно геометричний характер і апелює до інтуїтивного поняття околу, узагальнюючи близькість, що задається числовою функцією (метрикою). Означення топології через оператор замикання ґрунтується на ідеях Кантора, воно алгебричне за своєю суттю. Поєднання геометричного та алгебричного аспектів забезпечує поширеність поняття топологічного простору в математиці, порівнянно з іншими топологічними структурами, та його фундаментальність.

Здебільшого означення топологічного простору в університетських підручниках подають саме в термінах топології, тобто системи відкритих множин (іноді зазначають, що автором такого означення є російський математик П.С. Александров).

У статті [2] Мирон Зарицький запропонував підхід до задання топології за допомогою поняття межі. Аксіоматика М. Зарицького для оператора межі ∂ виглядає так:

(1) $A \cap B \cap \partial(A \cap B) = A \cap B \cap (\partial A \cup \partial B)$;
(2) $\partial A = \partial(X \setminus A)$;
(3) $\partial\emptyset = \emptyset$;
(4) $\partial\partial A \subset \partial A$.

Маючи оператор межі ∂ на множині, безпосередньо також одержуємо топологію на ній: за означенням, підмножина відкрита тоді і тільки тоді, коли вона не містить жодної своєї точки межі.

Статтю [2] неодноразово цитували в літературі, насамперед, у відомій "Топології" К. Куратовського [18]. В університетських підручниках з топології (див., наприклад, [32], [34]) спосіб задання топології за допомогою оператора межі, якщо й згадується, то щонайбільше у вправах або зауваженнях. У [32] в історичних ремарках у зв'язку з поняттям межі згадується не оригінальна стаття Зарицького, а стаття [35], опублікована значно пізніше. Зауважимо, що в [35] наводиться модифікована аксіоматика оператора межі; у вступі автор написав "nous démontrons l'équivalence entre cette axiomatique et celle bien connue de M. Zarycki".

Стаття [36] (в якій не цитується [2]) містить дещо іншу аксіоматику оператора межі.

Варто зазначити, що статтями Мирона Зарицького цікавились не лише топологи. У статтях [37] та [38] (див. також [39], [40]) аксіоматику Зарицького застосовують до аналізу проблем онтології (хоча цей термін запозичений з філософії, у цьому випадку йдеться про інформатику, зокрема, про теорію штучного інтелекту; втім філософські аспекти розглядуваної аксіоматики поняття межі теж не залишаються поза увагою — про це свідчить, зокрема, той факт, що стаття [37] поміщена в філософське наукове видання [41]). Цей інтерес зумовлений насамперед фундаментальністю самого поняття межі, яке, попри інтуїтивну зрозумілість, вимагає строгого математичного обґрунтування.

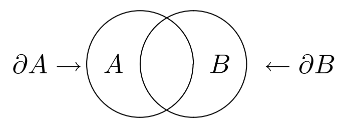
Одне несподіване згадування статті М. Зарицького можна знайти у вступній статті Ловера [42] до книги статей з теорії категорій та основ термомеханіки континуумів (sic!). Ловер відзначив властивість оператора межі ∂, щоріднить його з диференціюванням

$$\partial(A \cap B) = (\partial(A) \cap B) \cup (A \cap \partial(B));$$

аналогія з диференціюванням стає ще очевиднішою, якщо вжити архаїчну систему позначень, у якій об'єднання множин позначається знаком суми, а перетин – знаком добутку. Одержуємо "формулу Ляйбніца для межі"

$$\partial(A \cdot B) = \partial(A) \cdot B + A \cdot \partial(B). \tag{1}$$

Зауважимо, що діаграми Ейлера (див. Рис.) унаочнюють цей факт.



Для точності варто зазначити, що формулу (1) використано в статті [2] як аксіому для іншої операції, яку М. Зарицький називав "bord" (берег), $\tilde{\partial} A = \partial A \cap A$ (природно, в (1) маємо замінити ∂A на $\tilde{\partial} A$).

Зробимо невеликий відступ. Ловер – один з авторів поняття елементарного топоса. Інтерес до теорії топосів у Львівському університеті ініціював М.Я. Комарницький; семінар "Теорія топосів", яким він керував, успішно працював протягом тривалого часу. Один з авторів цих рядків теж був учасником цього семінару і свого часу опублікував невелику статтю [43], в якій розглянуто оператор внутрішності в топосі жмутків над топологічним простором. Природно виникає задача дослідження оператора межі в цьому топосі, отож є сподівання одержати в цьому напрямі узагальнення результатів Зарицького.

"Формула Ляйбніца" правильна також і для декартового множення

$$\partial(A \times B) = (\partial(A) \times B) \cup (A \times \partial(B)).$$

Зв'язок "формул Ляйбніца" для межі і диференціювання відбувається через теорему Стокса для многовидів

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega$$

для зовнішньої диференціальної форми ω на гладкому многовиді M з краєм (геометричною межею) ∂M. Одержуємо ще один аргумент для єдності математики, цілком в дусі відомої статті [44] філдсівського медаліста Майкла Атії.

Аналогія між переходом до межі і диференціюванням здобуває дидактичну вартісність і мала би ширше запроваджуватись в університетські підручники.

Отож, значення розглядуваної праці Зарицького [2], що, як бачимо, не зменшується з роками, полягає у знаходженні алгебричного опису поняття межі, геометричного за своєю суттю. На нашу думку, при викладанні поняття топологічного простору ім'я Мирона Зарицького повинно згадуватись поряд із іменами класиків топології Павла Александрова та Казимира Куратовського.

На завершення коротко опишемо розвиток тематики М. Зарицького у Львівському університеті і за його межами. А.А. Гольдберг [48] одержав результати, аналогічні до результатів Зарицького, для бульових алгебр з операцією δ; цю операцію одержують з операції d відкиданням аксіоми (4) (див. вище). Ю. Р. Гайда та О. Єременко [49] одночасно розглядали в булевих алгебрах операції r і f, а Л. Плахта [50] також і операцію j (A^j — ізольована частина множини A). Відомий математик Дж. Окстобі у своїй статті [53] розв'язував задачу, сформульовану Зарицьким в статті [30], і виправив деякі її неточності. Праці Зарицького цитують у сучасних публікаціях [51], [52].

У статті [33] сформульовано і дотепер відкриту задачу узагальнення результатів у цьому напрямі на випадок гейтінґових алгебр.

Автори висловлюють подяку Я.Г. Притулі за численні зауваження до першого варіанту статті.

---

1. *Zarycki M.* Une méthode d'introduction de la notion de bon orde dans la Théorie des Ensembles / *Zarycki M.* // Зб. мат.-природописно-лікарськ. секції Наук. Т-ва ім. Шевченка у Львові. – 1926. – Т. 25. – С. 1-5.
2. *Zarycki M.* Quelques notions fondamentales de l'Analysis Situs aux point du vue de l'Algèbre de la Logique / *Zarycki M.* // Fundamenta Mathematica. – 1927. – Vol. 9. – P. 3-15.
3. *Зарицький М.* Правда, краса і математика. / *Зарицький М.* Математика серед наук. – Львів, 1927. – С. 25–37.
4. *Zarycki M.* Chrestomatja matematyki greckiej. / *Zarycki M.* – Lwów: Filomata, 1934. – 84 s.
5. *Зарицький М.* Зауваження до проблеми наближених обчислень в грецькій математиці / *Зарицький М.* // Наук. зап. Львів. ун-ту. Серія фіз.-мат. – 1947. — Т. 5, Вип. 1. – С. 74–79.
6. *Зарицький М.* Астрономія в старині / *Зарицький М.* // Діло. – 1934. – 14, 15 квіт.
7. *Zarycki M.* Astronomia w starożytności / *Zarycki M.* // Kwartalnik klasyczny. – Lwow, 1934. – S. 287–294.
8. *Zarycki M.* Matematyka w klasycznem gimnazjum / *Zarycki M.* // Kwartalnik klasuczny. — Lwow, 1931. – S. 153–158.
9. *Zarycki M.* Urywki z życia szkolnego w związku z nauczaniem matematyki. Nieco historii / *Zarycki M.* // Matematyka i szkola. – 1937. — Zesz. 1. – S. 51–53.
10. *Zarycki M.* Urywki z życia szkolnego w związku z nauczaniem matematyki: (Ciąg dalszy). Bawmy się / *Zarycki M.* // Matematyka i szkola. — 1938. – Zesz. 2–3. – S. 121–122.
11. *Zarycki M.* Über eine mathematische Unterhaltung / *Zarycki M.* // Зб. мат.-природописно-лікарськ. секції Наук. Т-ва ім. Шевченка у Львові. – 1934. – Т. 30. — С. 129–134.
12. *Zarycki M.* Über die statistische Korrelationskonstante von M. Steffensen / *Zarycki M.* // Ukrainische Ševčenko-Gesellschaft der Wissenschaften in Lemberg. Sitzungsberichte der math.-naturwissenschaftlich-ärztlichen Sektion. – 1937. – Heft 24. – S. 5–6.
13. *Зарицький М.* Сучинники кореляції в теорії математичної статистики / *Зарицький М.* // Зб. мат.-природописно-лікарськ. секції Наук. Т-ва ім. Шевченка у Львові. – 1937. – Т. 36. – С. 41–50.
14. *Зарицький М.* Чиста і прикладна математика в ході століть / *Зарицький М.* // Діло. – 1933. – 11 трав.
15. *Зарицький М.* Потреби нашої економічної статистики / *Зарицький М.* // Діло. – 1937. – 23 трав.
16. *Банах С. С.* Курс функціонального аналізу (лінійні операції) / *Банах С. С.* – Київ: Державне учбово-педагогічне видавництво Радянська Школа, 1948. – 216 с.
17. *Плічко А. М.* До 60-річчя публікації українського перекладу книги С. Банаха / *Плічко А. М., Притула Я. Г.* // Мат. студії. – 2008. — Т. 30, № 1. – С. 107–112.

18. *Куратовский К.* Топология / *Куратовский К.* – М.: Мир, 1966. – Т. I. — 595 с.
19. *Semadeni Z.* Banach spaces of continuous functions / *Semadeni Z.* — Warszawa: PWN, 1971. – 136 p.
20. *Лем С.* Високий Замок / *Лем С.* — Львів: ЛА "Піраміда", 2002. – С. 79-81.
21. *Пташник Б. Й.* Поет математики. Аксіоми для нащадків: Українські імена у світовій науці / *Пташник Б. Й.* – Львів: Меморіал, 1992. — С. 126–142.
22. *Зарицький М.* Кілька заміток про спійність простору / *Зарицький М.* // Зб. матем.-природописно-лікарської секції Наук. Т-ва ім. Шевченка у Львові. – 1927. – Т. 26. – С. 19-20.
23. *Зарицький М.* Деякі еквівалентні означення нещільної множини / *Зарицький М.* // Доп. та повідомлення Львів. ун-ту. – 1947. – Вип. 1. – С. 148.
24. *Зарицький М.* Гомеоморфне невимірне відображення / *Зарицький М.* // Доп. та повідомлення Львів. ун-ту. – 1953. – Вип. 4, ч. 2. – С. 59-60.
25. *Зарицький М.* Деякі числові послідовності / *Зарицький М.* // Наук. зап. Львів. ун-ту. – 1957. – Т. 44, вип. 8. – С. 39-46.
26. *Зарицький М.* Про одну операцію в теорії точкових множин / *Зарицький М.* // Наук. зап. Львів. ун-ту. Сер. фіз.-матем. – 1949. – Т. 12, Вип. 3. – С. 35-43.
27. *Зарицький М.* Похідна і когеренція абстрактної множини / *Зарицький М.* // Збірник матем. природописно-лікарської секції НТШ. Львів. – 1928. – Т. 27. – С. 247-259.
28. *Зарицький М. О.* Деякі властивості поняття похідної множини в абстрактних просторах / *Зарицький М. О.* // Наук. зап. Львів. ун-ту. Сер. фіз.-матем. – 1947. – Т. 5, Вип. 1. – С. 22-23.
29. *Зарицький М.* Алгебра Буля з замкненням і алгебра буля з похідною / *Зарицький М.* // Доп. АН УРСР. – 1955. – № 1. – С. 3-6.
30. *Zarycki M.* Über der Kern einer Menge / *Zarycki M.* // Jahresberichte. Deutsch. Math.-Verein. – 1930. – Vol. 39. – P. 154-158.
31. *Kuratowski C.* Sur l'operation $\bar{A}$ de l'analysis situs / *Kuratowski C.* // Fund. Math. – 1922. – Vol. 3. – P. 182-199.
32. *Stephen Willard.* General Topology / *Stephen Willard.* – Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1970.
33. *Гольдберг А. А.* К истории украинской математической культуры в Галиции / *Гольдберг А. А., Заричный М. М., Пташник Б. И.* // Очерки истории естествознания и техники. – 1991. – Вып. 40. – С. 8-13.
34. *Vaidyanathaswamy R.* Set topology / *Vaidyanathaswamy R.* – New York: Chelsea Publishing Co., 1960.
35. *Albuquerque J.* La notion de "frontiere" en topologie / *Albuquerque J.* // Portug. Math. – 1941. – Vol. 2. – P. 280-289.
36. *Gabai Hyman.* The exterior operator and boundary operator / *Gabai Hyman.* // American Mathematical Monthly. – 1964. – Vol. 71, N 9. – P. 1029-1031.
37. *Achille C. Varzi.* Boundaries, Continuity, and Contact // Noûs. – 1997. – Vol. 31, Issue 1. – P. 26-58.
38. *Barry Smith.* Kognitionsforskningens topologiske grundlag // Semikolon erg. – 2003. – Vol. 3, N 7. – P. 91-105.
39. Formal Ontology in Information Systems. Volume 46. Frontiers in Artificial Intelligence and Applications: edited by: *N. Guarino*, 1998. – 347 p.
40. *Achille C. Varzi (with Roberto Casati).* Parts and Places: The Structures of Spatial Representation / *Achille C. Varzi (with Roberto Casati).* – Cambridge, Mass. & London: MIT, A Bradford Book, 1999.

41. The Philosopher's Annual. Volume 20: *Patrick Grim, Gary Mar, and Kenneth Baynes (eds.).* – Atascadero (CA): Ridgeview, 1999. – 258 p.
42. *Lawvere, F. William.* Introduction. Categories in continuum physics / *Lawvere, F. William.* // Lecture Notes in Math. – 1986. – Vol. 1174, Springer, Berlin, (Buffalo, N.Y., 1982). – P. 1-16.
43. *Заричный М. М.* Оператор внутренности в топосе пучков / *Заричный М. М.* – В кн.: Топологические структуры и их отображения. – Рига: Латв. гос. ун-тет., 1987. – С. 62–65.
44. *Atyah M.* The Unity of Mathematics / *Atyah M.* // Bull. Lond. Math. Soc. – 1978. – Vol. 10. – P. 69-76.
45. *Hoberman S.* A set of postulates for Boolean algebra / *Hoberman S., McKinsey J. C. C.* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1937. – Vol. 43. – P. 588-592.
46. *Sanders S. T., Jr.* Derived sets and their complements / *Sanders S. T., Jr.* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1936. – Vol. 42. – P. 577-584.
47. *Stopher E. C., Jr.* Cyclic relations in point set theory / *Stopher E. C., Jr.* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1937. – Vol. 43. – P. 686-694.
48. *Гольдберг А. А.* О булевых алгебрах с производной / *Гольдберг А. А.* // Укр. мат. журн. – 1974. – Т. 26, № 4. – С. 444-449.
49. *Гайда Ю. Р.* Об операторе границы в булевых алгебрах с замыканием / *Гайда Ю. Р., Еременко А. Э.* // Укр. мат. журн. – 1974. – Т. 26, № 6. – С. 806-809.
50. *Дубров Я. А.* Топологические аспекты теории систем. / *Дубров Я. А., Плахта Л. П.* – Киев, 1982. – 31 с. (Препринт / АН УССР. Ин-т кибернетики; 82-11).
51. *Gardner B. J.* The Kuratowski closure-complement theorem / *Gardner B. J., Jackson M.* // New Zealand J. Math. – 2008. – Vol. 38. – P. 9-44.
52. *Sherman D.* Variations on Kuratowski's 14-set theorem / *Sherman D.* // www.arxiv.org/pdf /math/0405401.
53. *Oxtoby J. C.* The kernel operation on subsets of a T_1-space / *Oxtoby J. C.* // Fund. math. – 1975. – Vol. 90, N 3. – P. 275-284.

OUTSTANDING UKRAINIAN MATHEMATICIAN AND TEACHER MYRON ZARYTS'KYI (TO THE 120-TH ANNIVERSARY)

Mykhailo ZARICHNYI[1], Bohdan PTASHNYK[2]

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytetska Str., 1
e-mail: topology@franko.lviv.ua
Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
National Academy of Sciences of Ukraine,
79060, L'viv, Naukova Str., 3b
e-mail: ptashnyk@lms.lviv.ua

The course of life of Myron Zaryts'kyi, outstanding ukrainian mathematician, the full member of T. Shevchenko Scientific Society and professor of the Lviv University is described in this paper.

Key words: Myron Zarytskyi, outstanding ukrainian scientists, boolean algebras, closure operator, boundary operator.

ВЫДАЮЩИЙСЯ УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИК И ПЕДАГОГ МЫРОН ЗАРИЦКЫЙ (К 120-ЛЕТИЮ ОТ РОЖДЕНИЯ)

Михаил ЗАРИЧНЫЙ[1], **Богдан ПТАШНИК**[2]

[1]*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,*
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: topology@franko.lviv.ua
[2]*Институт прикладных проблем механики и математики*
им. Я. С. Подстригача НАН Украины,
79060, Львов, ул. Наукова, 3б
e-mail: ptashnyk@lms.lviv.ua

Изложен жизненный и научный путь Мырона Зарицкого – выдающегося украинского математика, действительного члена Научного общества им. Т. Шевченко, профессора Львовского университета.

Ключевые слова: Мырон Зарицкый, выдающиеся украинские учёные, булевые алгебры, оператор замыкания, оператор границы.

Стаття надійшла до редколегії 20.05.2009

Прийнята до друку 12.06.2009

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

1. Стаття повинна містити результати нових досліджень автора з повним їхнім доведенням. Не доцільно робити великі огляди вже опублікованих результатів. Робити посилання на неопубліковані праці не можна.

2. Текст статті набирають на комп'ютері українською чи англійською мовами. До редакційної колегії потрібно подавати:

два примірники статті з підписом автора (співавторів) на останній сторінці;

назву статті, резюме (резюме повинно передавати зміст основних результатів статті, а не лише повторювати її назву), ключові слова, ім'я, прізвище автора, місце роботи, адресу українською, англійською та російською мовами, електронну адресу;

електронний варіант статті та резюме на дискеті 3,5" (редколегія повертає авторові дискету; тексти можна надіслати за адресою *lnu.visn.mm@gmail.com*);

довідка про автора (співавторів), у якій треба зазначити ім'я, по батькові та прізвище автора, місце роботи, посаду, домашню адресу, телефон та електронну адресу.

Оптимальний обсяг статті до 12 сторінок. Розмір шрифтів 10pt, висота сторінки – 190 mm, ширина – 135 mm.

3. Вимоги до набору.

Текст статті створювати у версії LaTeX з кодуванням кириличних шрифтів „Кирилиця (Windows)“ (кодова сторінка 1251).

На першій сторінці статті потрібно зазначити номер УДК.

Номери формул ставити з правого боку і нумерувати лише формули, на які є посилання.

У посиланнях на теорему з монографії зазначити сторінку, на якій вона описана.

Рисунки до статті подавати у графічному форматі BMP чи PCX. Назва рисунка чи його номер не входять у зображення їх треба створювати засобами LaTeX'у. Вибираючи розмір графічного зображення, належить врахувати, що воно буде надруковане на принтері з роздільною здатністю 600 dpi.

Літературу подавати загальним списком у порядку посилань на джерела в тексті статті.

Зразки бібліографічного опису книги, статті, препринту, дисертації, депонованого рукопису, тез доповідей конференцій (з'їздів та ін.):

1. *Грабович А.І.* Назва / *Грабович А.І.* – К.: Вища школа, 1985. – 196 с.
2. *Петренко О.Б.* Назва / *Петренко О.Б., Шинк М.М.* – Л.: Афіша, 2001. – 196 с.
3. *Кравчук О.М.* Назва / *Кравчук О.М.* // Укр. мат. журн. – 1985. – Т. 2, №2. – С. 4-20.
4. *Кравчук О.М.* Назва / *Кравчук О.М., Потічний М.М.* // Матем. Студії – 1995. – Т. 2, №2. – С. 4-20.

5. *Михайленко Г.Д.* Назва / *Михайленко Г.Д.* – Л.: ІППММ, 1993. – 9 с. – (Препринт / НАН України, Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача: 80.1).

6. *Михайленко Г.Д.* Назва / *Михайленко Г.Д., Степаняк С.І.* – Л.: ІППММ, 1993. – 9 с. – (Препринт / НАН України, Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача: 80.1).

7. *Колмаз Ю. А.* Назва: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук. / *Колмаз Ю.А.* – К., 2008. – 20 с.

8. *Сеник С.М.* Назва / *Сеник С.М.* – К., 1992. – 17 с. – Деп. в ДНТБ України, В2020-1995.

9. *Сеник С.М.* Назва / *Сеник С.М., Мандрик І.Т.* – К., 1992. – 17 с. – Деп. в ДНТБ України, В2020-1995.

10. *Муравський В.К.* Назва / *Муравський В.К.* // Наукова конф. "Нелінійні диференціальні рівняння": тези доп., 27 серпня - 2 вересня 1994 р., Київ. – К.: КНУ ім. Т. Г. Шевченка, 1994. – С. 540-551.

11. *Муравський В.К.* Назва / *Муравський В.К., Ліско С.В.* // Наукова конф. "Нелінійні диференціальні рівняння": тези доп., 27 серпня - 2 вересня 1994 р., Київ. – К.: КНУ ім. Т. Г. Шевченка, 1994. – С. 540-551.