ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 71

2009

ISSN 2078-3744

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 71

Львівський національний університет імені Івана Франка
2009

V I S N Y K	В І С Н И К
OF THE LVIV	ЛЬВІВСЬКОГО
UNIVERSITY	УНІВЕРСИТЕТУ
Series **Mechanics and Mathematics**	**Серія** **механіко-математична**
Issue 71	**Випуск 71**
Scientific journal	Збірник наукових праць
Published 1-2 issues per year	Виходить 1-2 рази на рік
Published since 1965	Видається з 1965 року
Ivan Franko National University of Lviv	Львівський національний університет імені Івана Франка

2009

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. 2009.
Випуск 71. 237 с.

Visnyk of the Lviv University. Series Mechanics and Mathematics. 2009.
Issue 71. 237 p.

У Віснику публікуються праці з теорії крайових задач для диференціальних рівнянь, алгебри, топології, теорії функцій комплексного змінного, функціонального аналізу, теорії ймовірності та статистики, проблем математичного моделювання фізико-механічних процесів і механіки.

Visnyk contains articles on theory of boundary value problems for differential equations, algebra, topology, complex analysis, functional analysis, probability theory and statistics, problems of mathematical modelling of physical and mechanical processes and mechanics.

Адреса редакційної колегії:
Львівський національний університет
імені Івана Франка,
механіко-математичний факультет,
вул. Університетська, 1,
79602, Львів, Україна
тел. (0322) 74-11-07
ел. пошта: lnu.visn.mm@gmail.com
http://blues.franko.lviv.ua/publish/visnyk.asp

Editorial office address:
Ivan Franko National University
of Lviv,
Mechanical and Mathematical department,
Universytets'ka Str. 1,
UA-79602, Lviv, Ukraine
tel. +(38) (0322) 74-11-07
e-mail: lnu.visn.mm@gmail.com
http://blues.franko.lviv.ua/publish/visnyk_en.asp

Відповідальний за випуск *М. Зарічний*
Редактор *Н. Плиса*

Друкується за ухвалою Вченої Ради
Львівського національного університету імені Івана Франка

Свідоцтво про державну реєстрацію серія КВ № 14606-3577Р від 29 жовтня 2008 р.

ЗМІСТ

CONTENT

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2009. *Ser. Mech. Math. 2009.*
Вип. 71. С. 5–12 *Is. 71. P. 5–12*

УДК 512.552.12

ЕЛЕМЕНТИ СТАБІЛЬНОГО ТА МАЙЖЕ СТАБІЛЬНОГО РАНГУ 1

Софія БІЛЯВСЬКА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: e-mail: zosia_ meliss@yahoo.co.uk

Запропоновано нове узагальнення кілець стабільного рангу 1, а саме введено поняття елемента стабільного рангу 1 та елемента майже стабільного рангу 1. Показано мультиплікативну замкненість множин елементів стабільного рангу 1, що дало змогу ввести ідеали максимально нестабільного рангу 1. Також введено поняття елемента майже стабільного рангу 1 і кільця майже стабільного рангу 1. Показано, що над кільцем майже стабільного рангу 1 довільний унімодулярний рядок є доповняльним. Також доведено, що довільне адекватне кільце є кільцем квазістабільного рангу 1. А довільний ненульовий елемент – елемент майже стабільного рангу 1. Крім того, показано односторонню елементарну редукцію квадратних матриць над комутативним кільцем Безу, в якому довільний елемент має майже стабільний ранг 1.

Ключові слова: ідеал стабільного рангу 1, ідеал максимально нестабільного рангу 1, елемент майже стабільного рангу 1, ідеал майже стабільного рангу 1, адекватне кільце, кільце квазістабільного рангу 1.

Кільце Безу стабільного рангу 1 є кільцем елементарних дільників [1]. Цей факт спонукав багатьох авторів до вивчення кілець Безу, які є узагальненням кільця стабільного рангу 1 [2]. Ми пропонуємо нове узагальнення кільця стабільного рангу 1, а саме: вводиться поняття елемента стабільного рангу 1, а також елемента майже стабільного рангу 1. Показано мультиплікативну замкненість множин елементів стабільного рангу 1, що дає змогу ввести ідеали максимально нестабільного рангу 1. Далі вводимо поняття елемента майже стабільного рангу 1 і кільця майже стабільного рангу 1. Показано, що над кільцем майже стабільного рангу 1, довільний унімодулярний рядок доповнюється до оборотної матриці. Також показано, що довільне адекватне кільце є кільцем квазістабільного рангу 1, а довільний ненульовий елемент є елементом майже стабільного рангу 1. Крім того, показана одностороння елементарна редукція неособливих матриць над комутативним кільцем Безу, в якому довільний елемент має майже стабільний ранг 1.

Під кільцем R розуміємо комутативне кільце з $1 \neq 0$. Позначимо через $U(R)$ групу одиниць кільця R, а через $J(R)$ – радикал Джекобсона.

Нагадаємо, що рядок $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ називається унімодулярним, якщо виконується умова $a_1R + a_2R + \ldots + a_nR = R$.

Стабільним рангом кільця R назвемо найменше натуральне число n таке, що виконується така властивість: для довільного унімодулярного рядка $(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1})$ з елементів кільця R існують елементи $b_1, b_2, \ldots, b_n \in R$ такі, що рядок $(a_1 + a_{n+1}b_1, a_2 + a_{n+1}b_2, \ldots, a_n + a_{n+1}b_n)$ є унімодулярним [3]. Позначатимемо $ст.р.(R) = n$.

Скажемо, що елемент $a \in R$ називається елементом стабільного рангу 1, якщо для кожного елемента $b \in R$ такого, що $aR + bR = R$, існує $t \in R$ таке, що $a + bt$ – оборотний елемент R.

Твердження 1. *Нехай R – комутативне кільце. Тоді довільний ідемпотент e є елементом стабільного рангу 1.*

Доведення. Нехай $e = e^2$, $eR + bR = R$, для деякого $b \in R$, тоді існують $u, v \in R$, що $eu + bv = 1$. Домноживши цю рівність на $(1 - e)$ одержуємо

$$eu(1 - e) + bv(1 - e) = 1 - e,$$
$$eu - e^2u + bv - bve + e = e + b(v - ve) = 1,$$

тобто e – елемент стабільного рангу 1. □

Нагадаємо, що комутативне кільце з 1, в якому кожний скінченно породжений ідеал є головним, називається кільцем Безу.

Твердження 2. *Нехай R – комутативне кільце Безу. Тоді множина елементів стабільного рангу 1 є мультиплікативно замкненою.*

Доведення. Нехай a, c – елементи стабільного рангу 1. Для довільного $b \in R$ такого, що $acR + bR = R$ існує t, що $ac + bt \in U(R)$. Оскільки $acR + bR = R$, то $aR + bR = R$ і $cR + bR = R$. Позаяк a, c – елементи стабільного рангу 1, то $a + bx = u_1$, $c + by = u_2$, де $x, y \in R$, $u_1, u_2 \in U(R)$. Тоді

$$u_1u_2 = (a + bx)(c + by) = ac + aby + bcx + b^2xy = u_1u_2 = ac + b(ay + cx + bxy).$$

Оскільки $u_1u_2 \in U(R)$, то ac також є елементом стабільного рангу 1. □

Означення 1. *Назвемо ідеал I кільця R ідеалом стабільного рангу 1, якщо I містить хоча б один елемент стабільного рангу 1. В протилежному випадку ідеал I назвемо ідеалом нестабільного рангу 1.*

Позначимо через H множину всіх ідеалів нестабільного рангу 1 і нехай $H \neq \varnothing$. Нехай $\{I_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ – довільний ланцюг ідеалів множини H. Розглянемо ідеал $I = \bigcup\limits_{\alpha \in \Omega} I_\alpha$.

Якщо $I \notin H$, то в I існує елемент a стабільного рангу 1. Згідно з означенням існує $\beta \in \Omega$ таке, що $a \in I_\beta$. Тобто I_β – ідеал стабільного рангу 1, а це неможливо, бо $I_\beta \in H$.

Отже, множина H – індукована. За лемою Цорна в H існує хоча б один максимальний ідеал. Такі ідеали називають ідеалами максимально нестабільного рангу 1, тобто маємо означення.

Означення 2. *Ідеал N називається ідеалом максимально нестабільного рангу 1, якщо для довільного ідеалу I такого, що $N \subset I$ і $I \neq N$, існує елемент a стабільного рангу 1 такий, що $a \in I$.*

Твердження 3. *Довільний ідеал нестабільного рангу 1 міститься хоча б в одному максимально нестабільному ідеалі.*

Доведення. За вище доведеним бачимо, що множина ідеалів нестабільного рангу 1, яка містить цей ідеал індукована. Лема Цорна завершує доведення.

□

Теорема 1. *Довільний ідеал максимально нестабільного рангу 1 кільця R є простим ідеалом.*

Доведення. Нехай P – довільний ідеал максимально нестабільного рангу 1. Припустимо, що існують такі елементи $c, b \in R$, що $b, c \notin P$, але $cb \in P$. Розглянемо ідеал $P + cR$. Оскільки $c \notin P$ і ідеал P – максимально нестабільного рангу 1, то з включення $P \subset P + cR$ випливає існування елемента стабільного рангу 1, $a \in R$ такого, що $a \in P + cR$. Розглянемо ідеал $I = \{x \mid ax \in P\}$. Очевидно, що $P \subset I$, причому $I \neq P$, оскільки $b \in I$, але $b \notin P$. Отже, існує такий елемент d стабільного рангу 1 кільця R, що $d \in I$. Враховуючи означення ідеалу I, бачимо, що $ad \in P$. Тобто ідеал P містить добуток двох елементів стабільного рангу 1. Згідно з твердженням 2 добуток двох елементів стабільного рангу 1 є елементом стабільного рангу 1. Отже, ми довели, що ідеал P містить елемент стабільного рангу 1, а це суперечить припущенню, що ідеал максимально стабільного рангу 1 не містить елементів стабільного рангу 1. □

Означення 3. *Комутативне кільце R з $1 \neq 0$ є кільцем майже стабільного рангу 1, якщо для довільного ідеалу I такого, що $I \not\subseteq J(R)$, ст.р.$(R/I) = 1$.*

Теорема 2. *Нехай R є кільцем майже стабільного рангу 1, тоді довільний унімодулярний рядок над R доповнюється до оборотної матриці.*

Доведення. Нехай R – кільце майже стабільного рангу 1 і $a_1R + \ldots + a_nR = R$.

Теорема очевидна у випадку, коли $n = 1$.

Якщо $n = 2$, тоді існують такі u, v, що $a_1u + a_2v = 1$, і матриця $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -v & u \end{pmatrix}$ – оборотна.

Нехай $n \geqslant 3$ і припустимо, що наш результат правильний для всіх $k < n$.

`Випадок 1.` Якщо $a_1 \in J(R)$, то з рівності $a_1R + a_2R + \ldots + a_nR = R$ випливає $a_2R + \ldots + a_nR = R$. Згідно з припущенням індукції існує оборотна матриця V вигляду

$$V = \begin{pmatrix} a_2 & \ldots & a_n \\ & V' & \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що матриця

$$\begin{pmatrix} a_1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & V & \vdots \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

є шуканою оборотною матрицею.Тобто рядок $(a_1, a_2, \dots a_n)$ доповнюється до оборотної матриці. Аналогічно розглядаємо випадок, коли $a_i \in J(R)$, $i = 1, 2, \dots, n-2$.

Випадок 2. Нехай $a_1, \dots a_{n-2} \notin J(R)$. Розглянемо ідеал $a_1R + \dots + a_{n-2}R = I$. Згідно з означенням кільця R кільце $\overline{R} = R/I$ є кільцем стабільного рангу 1. Якщо $I + a_{n-1}R + a_nR = R$, то $\overline{a_{n-1}}\overline{R} + \overline{a_n}\overline{R} = \overline{R}$. Оскільки $ст.р.(\overline{R}) = 1$, то існує таке $y \in R$, що $\overline{a_{n-1} + a_n y}\overline{R} = \overline{R}$. Покажемо, що тоді $I + a_{n-1}R + a_nR = R$. Якщо це не так, то існує максимальний ідеал M кільця R, такий що $I + a_{n-1}R + a_nR \subset M$. Оскільки $ст.р.(R/I) = ст.р.R/J(R)$, де

$$J(I) = \bigcap_{M \in mspec I} M,$$

то $\overline{a_{n-1} + a_n y} \in M/J(I)$ – протиріччя. Отже,

$$a_1R + \dots + a_{n-2}R + a_{n-1}R + a_nR = a_1R + \dots + a_{n-2}R + (a_{n-1} + a_n y)R =$$
$$= I_{n-2} + (a_{n-1} + a_n y)R = R.$$

Згідно з припущенням індукції рядок $(a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1} + a_n y)$ доповнюється до $(n-1) \times (n-1)$ оборотної матриці V'.

Нехай

$$U = I_{n-2} \bigoplus \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} & & & a_n \\ & V' & & 0 \\ & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Тоді VU є $n \times n$ оборотною матрицею з першим рядком $(a_1, \dots,$
$\dots a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$. □

Означення 4. *Ідеал I кільця R має майже стабільний ранг 1, якщо $ст.р.(R/I) = 1$.*

Означення 5. *Елемент a назвемо елементом майже стабільного рангу 1, якщо $ст.р.(R/aR) = 1$.*

Твердження 4. *Нехай a – елемент майже стабільного рангу 1 комутативного кільця R. Якщо $aR + bR + cR = R$, то існує елемент $y \in R$ такий, що $aR + (b + cy)R = R$.*

Доведення. Нехай $\overline{R} = R/aR$. Для елемента $x \in R$, нехай $\overline{x} = x + aR$. Оскільки $\overline{b}\overline{R} + \overline{c}\overline{R} = \overline{R}$, то існує $y \in R$ такий, що $\overline{b + cy}\overline{R} = \overline{R}$. Покажемо, що

$$aR + (b + cy)R = R.$$

Справді, якщо це не так, то існує максимальний ідеал M кільця R, для якого $aR + (b + cy)R \in M$. Це не можливо, оскільки $M/J(aR)$ – максимальний ідеал $\overline{R}$, де $J(aR)$-радикал Джекобсона кільця R/aR, який містить $\overline{b + cy}$. Зауважимо, що $ст.р.(R/aR) = ст.р.(R/J(aR))$. Отже, $aR+(b+cy)R = R$. Твердження доведено. □

Твердження 5. *Нехай a-елемент комутативного кільця R такий, що для довільних $b, c \in R$, для яких $aR + bR + cR = R$, існує елемент $y \in R$ такий, що $aR + (b + cy)R = R$. Тоді a є елементом майже стабільного рангу 1.*

Доведення. Нехай $\overline{R} = R/aR$ і $\overline{bR} + \overline{c}\overline{R} = \overline{R}$. Очевидно, що $aR + bR + cR = R$. Враховуючи обмеження накладені на елемент a, існує елемент y такий, що

$$aR + (b + cy)R = R.$$

Звідси $(\overline{b + cy})\overline{R} = \overline{R}$, тобто $ст.р.(R/aR) = 1$, що й треба було показати. Твердження доведено. □

Теорема 3. *Нехай R-кільце, в якому довільний ненульовий і незворотний елемент є елементом майже стабільного рангу 1. Якщо $J(R) \neq 0$, то R є кільцем стабільного рангу 1.*

Доведення. Нехай $b, c \in R$ такі, що $bR + cR = R$ і нехай $a \in J(R)$, $a \neq 0$. Тоді $aR + bR + cR = R$. Згідно з попереднім твердженням існує таке $t \in R$, що

$$aR + (b + ct)R = R.$$

Оскільки $a \in J(R)$, тоді $(b+ct)R = R$. Тобто R – кільце стабільного рангу 1. Теорему доведено. □

Той факт, що елемент a є дільником елемента b позначатимемо $a|b$.

Означення 6. [4] *Комутативне кільце R називається адекватним кільцем, якщо R-кільце Безу і для довільних $a, b \in R$, $a \neq 0$ існують r, s, такі, що виконуються такі умови:*

1) $a = rs$;
2) $rR + bR = R, (r, b) = 1$;
3) для будь-якого необоротного дільника s' елемента s, тобто $s'|s$ виконується $s'R + bR \neq R$.

Теорема 4. *В адекватному кільці довільний ненульовий елемент є елементом майже стабільного рангу 1.*

Доведення. Нехай R-адекватне кільце і $a \in R\backslash\{0\}$. Тоді елемент a можна записати у вигляді $a = rs$, де $rR+bR = R$ і для довільного незворотного дільника s' елемента s, маємо $s'R+bR \neq R$. Нехай $aR+(b+cr)R = \delta R$, де δ-незворотний елемент R, тоді $\delta|rs$. Якщо $(\delta, r) = h$, де h – незворотний елемент R, тоді $h|b + cr$ і $h|r$. Звідси $h|b$, що не можливо, оскільки $rR + bR = R$ і $h|b$, $h|r$, причому h-незворотний елемент R. Тоді $\delta|s$, а згідно з означенням елемента s, $sR + cR = \alpha R$, де α-незворотний елемент R. Оскільки $\delta|b + cr$ і $\alpha|\delta$, то $\alpha|b$. Тобто $\alpha|a$, $\alpha|b$, $\alpha|c$, що не можливо, оскільки $aR + bR + cR = R$.

Отже, $aR+(b+cr)R = R$. Згідно з твердженням 5 елемент a є елементом майже стабільного рангу 1. □

Означення 7. *Назвемо комутативне кільце R кільцем квазістабільного рангу 1, якщо довільний незворотний елемент, який не належить радикалу Джекобсона є елементом майже стабільного рангу 1.*

Теорема 5. *Довільне адекватне кільце R є кільцем квазістабільного рангу 1.*

Доведення. Нехай $a \notin U(R)$, $a \notin J(R)$. Позначимо через $\overline{R} = R/aR$. Нехай

$$\overline{b}\overline{R} + \overline{c}\overline{R} = \overline{R},$$

де $\overline{b} = b + aR$, $\overline{c} = c + aR$. Звідси $aR + bR + cR = R$. Оскільки R-адекватне кільце і $a \neq 0$, то існує елемент $r \in R$ такий, що $aR + (b + cr)R = R$, а це означає не що інше, як $(\overline{b + cr})\overline{R} = \overline{R}$, тоді $ст.р.(R/aR) = 1$, що й потрібно було довести. □

Нагадаємо, що кільце R називається кільцем елементарних дільників, якщо довільна квадратна матриця A над R порядку n володіє канонічною діагональною редукцією, тобто існують такі оборотні матриці $P \in GE_n(R)$ і $Q \in GL_n(R)$ відповідних розмірів над R, що матриця $PAQ = diag(\varepsilon_1, \dots \varepsilon_n)$ і $\varepsilon_i | \varepsilon_{i+1}$, для довільного i [4].

Якщо над кільцем R довільна 1×2 і 2×1 матриця володіє канонічною діагональною редукцією, то таке кільце називають кільцем Ерміта [4].

Теорема 6. *Комутативне кільце Безу є кільцем Ерміта, тоді і лише тоді, коли $ст.р.(R) = 2$ [5].*

Під $GL_n(R)$ розумітимемо групу оборотних матриць кільця R, а через $GE_n(R)$ позначимо підгрупу групи $GL_n(R)$ породжену елементарними матрицями.

Теорема 7. *Нехай R-комутативне кільце Безу, в якому кожний елемент має майже стабільний ранг 1. Тоді для кожної неособливої $n \times n$ матриці A над R, існують такі необоротні матриці $P \in GE_n(R)$, $Q \in GL_n(R)$, що*

$$PAQ = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon_n \end{pmatrix},$$

де $\varepsilon_i | \varepsilon_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$.

Доведення. Нехай R-комутативне кільце Безу, в якому довільний елемент має майже стабільний ранг 1. Згідно з твердженням 4 стабільний ранг R дорівнює 2, тобто R є комутативним кільцем Безу стабільного рангу 2. Згідно з теоремою 6 R є кільцем Ерміта. На підставі твердження 4 і [4] R є кільцем елементарних дільників. Отже, для доведення теореми достатньо розглянути випадок матриці 2-го порядку [6]. Можна вважати, що найбільший спільний дільник елементів матриці A дорівнює 1 [6]. Оскільки стабільний ранг R дорівнює 2, то згідно з теоремою 6 R є кільцем Ерміта. Тому існує матриця $Q_1 \in GL_n(R)$ така, що $AQ_1 = \begin{pmatrix} c & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$, де $aR + bR + cR = R$.

Оскільки матриця A-неособлива, то $a \neq 0$, $c \neq 0$. Згідно з твердженням 5 існує елемент $x \in R$ такий, що $aR + (b + cx)R = R$.

$$P_1AQ_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} AQ_1 = \begin{pmatrix} c & 0 \\ b+cx & a \end{pmatrix},$$

де $P_1 \in GE_2(R), Q_1 \in GL_2(R)$. Оскільки $aR + (b + cx)R = R$, то існує така оборотна матриця $Q_2 \in GL_n(R)$, що

$$P_1AQ_1Q_2 = \begin{pmatrix} \alpha & -ac \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що матриця $P_1AQ_1Q_2$ зводиться елементарними перетвореннями до вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ac \end{pmatrix},$$

тобто до канонічного діагонального вигляду. Теорему доведено. □

1. *Rush D.E.* Bezout domains with stable range 1 / *Rush D.E.* // J. Pure and Appl. Algebra. – 2001. – Vol. 158. – P. 309-324.
2. *Mc Govern, W.* Bezout rings with almost stable range 1 are elementary divisor rings / *Mc Govern, W.* // J. Pure and Appl. Algebra. – 2007. – Vol. 212. – P. 340-348.
3. *Vaserstein L.N.* The stable rank of rings and dimensionality of topological spaces / *Vaserstein L.N.* // Functional Anal. Appl. – 1971. – Vol. 5. – P. 102-110.
4. *Kaplansky I.* Elementary divisors and modules / *Kaplansky I.* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – Vol. 66. – P. 464-491.
5. *Zabavsky B.V.* Reduction of matrices over Bezout rings of stable rank not higher than 2 / *Zabavsky B.V.* // Ukrain. Math. J. – 2003. – Vol. 55, №4. – P. 665-670.
6. *Zabavsky B.V.* Diagonalizability theorem for matrices over rings with finite stable range / *Zabavsky B.V.* // Alg. Discr. Math. – 2005. – №1. – P. 134-148.

ELEMENTS OF STABLE AND ALMOST STABLE RANK 1

Sofia BILAVSKA

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: zosia_meliss@yahoo.co.uk

In this paper, an attempt to generalize stable rank rings is proposed, and the notions of element stable rank 1 and element almost stable rank 1 is introduced. Besides multiplicativity closed set of stable rank 1 elements shown, which enables introduction of maximal unstable rank 1 ideals to be involved. The notion of the element of almost stable rank 1 and almost stable rank 1 ring is described. Moreover, any unimodular row over the almost stable rank 1 ring is complemented. Also, any adequate ring is a quazistable rank 1 ring is proved. The fact, that any nonzero element is an element of almost stable rank 1. Furthermore, oneside elemental reduction of square matrices over the commutative Bezout's ring in which every element has almost stable rank 1 is shown.

Key words: unimodular row, stable rank n, Bezout ring, adequate ring, Hermite ring, elementary divisors ring.

ЭЛЕМЕНТЫ СТАБИЛЬНОГО И ПОЧТИ СТАБИЛЬНОГО РАНГА 1

София БЕЛЯВСКАЯ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: zosia_meliss@yahoo.co.uk

Предлагается новое обобщение колец стабильного ранга 1, а именно, дано понятие элемента стабильного ранга 1 и элемента почти стабильного ранга 1. Показывается мультипликативная замкнутость множеств элементов стабильного ранга 1, что даёт возможность ввести идеалы максимально нестабильного ранга 1. Кроме того, дано понятие элемента почти стабильного ранга 1 и кольца почти стабильного ранга 1. Также показано, что над кольцом почти стабильного ранга 1 произвольная унимодулярная строка является дополнительной. Доказано, что произвольное адекватное кольцо есть кольцом квазистабильного ранга 1. А произвольный ненулевой элемент есть элементом почти стабильного ранга 1. Кроме того, показана односторонняя элементарная редукция квадратных матриц над коммутативным кольцом Безу, в котором произвольный элемент имеет почти стабильный ранг 1.

Ключевые слова: идеал стабильного ранга 1, идеал максимально нестабильного ранга 1, элемент почти стабильного ранга 1, идеал почти стабильного ранга 1, адекватное кольцо, кольцо квазистабильного ранга 1.

Стаття надійшла до редколегії 20.02.2009

Прийнята до друку 16.12.2009

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2009. *Ser. Mech. Math. 2009.*
Вип. 71. С. 13–26 *Is. 71. P. 13–26*

УДК 517.95

ДЕЯКІ ФОРМУЛИ ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ В ПРОСТОРАХ ФУНКЦІЙ ЗІ ЗМІННИМ СТЕПЕНЕМ НЕЛІНІЙНОСТІ

Тарас БОКАЛО, Олег БУГРІЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: tbokalo@gmail.com, ol_buhrii@i.ua

Доведено формули інтегрування частинами спеціального вигляду для функцій з узагальнених просторів Соболєва. Також отримано формулу узагальненої похідної від композиції деяких функцій у сенсі розподілів.

Ключові слова: узагальнені простори Лебега та Соболєва, інтегрування частинами, узагальнена похідна від композиції функцій.

1. Вступ. При доведенні, зокрема, теореми єдиності розв'язку мішаних задач для нелінійних параболічних рівнянь треба використовувати формули інтегрування частинами спеціального вигляду (див. [1, с. 326]). Ці формули виконуються, зокрема, для функцій з деяких просторів Соболєва $W^{1,p}$, $p > 1$. Останнім часом параболічні рівняння почали вивчати в узагальнених просторах Соболєва $W^{1,p(x)}$, де $p = p(x)$ – деяка функція. Тому виникла потреба отримання формули інтегрування частинами для функцій з таких просторів.

Мета нашої праці – отримати формули інтегрування частинами спеціального вигляду для функцій з узагальнених просторів Соболєва. Цьому присвячена четверта частина статті. При отриманні таких формул виникає потреба обчислити похідну композиції функцій спеціального вигляду, що належать $W^{1,p(x)}$. Вирішенню цієї проблеми присвячено третю частину статті.

У випадку $p(x) \equiv \text{const}$ схожі формули інтегрування частинами отримано в [1, 2], похідні композиції функцій знайдено в [3, 4].

2. Деякі допоміжні факти з аналізу. Нехай $\Omega \in \mathbb{R}^n$ – обмежена область з кусково гладкою межею, $T > 0$, $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1, t_2)$, де $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T$. Норму банахового простору B позначимо $||\cdot; B||$, спряжений до B простір – B^*, а скалярний добуток між B^* та B – $\langle\cdot,\cdot\rangle_B$. Для спрощення замість, наприклад, $u(\cdot, t)$ писатимемо просто $u(t)$.

Узагальнені простори Лебега були введені в [5]. Їхні властивості досліджували, зокрема, в [5]-[8]. Нагадаємо деякі з них. Спершу визначимо простір

$$L^\infty_+(\Omega) = \{v \in L^\infty(\Omega) : \operatorname{ess}\inf_{x\in\Omega} v(x) > 1\}.$$

Далі для кожної функції $r \in L^\infty_+(\Omega)$ через r_0 та r^0 позначатимемо такі числа, що $r_0 \equiv \operatorname{ess}\inf_{x\in\Omega} r(x)$ та $r^0 \equiv \operatorname{ess}\sup_{x\in\Omega} r(x)$, а через r' – таку функцію, що $\frac{1}{r(x)} + \frac{1}{r'(x)} = 1$ майже для всіх $x \in \Omega$.

Визначимо функціонал $\rho_q(\cdot,\Omega)$ рівністю $\rho_q(v,\Omega) = \int_\Omega |v(x)|^{q(x)}\,dx$, де v – деяка функція. Узагальненим простором Лебега $L^{q(x)}(\Omega)$ називатимемо множину таких вимірних функцій $v : \Omega \to \mathbb{R}^1$, для яких $\rho_q(v,\Omega) < +\infty$. Відомо, що функціонал ρ_q слабко напівнеперервний знизу на $L^{q(x)}(\Omega)$ (див. [5, с. 208]). Крім того, $L^{q(x)}(\Omega)$ є рефлексивним банаховим простором з нормою

$$||v; L^{q(x)}(\Omega)|| = \inf\{\lambda > 0 : \rho_q(v/\lambda, \Omega) \le 1\}.$$

Зазначимо таке: якщо $r(x) \ge q(x)$, то $L^{r(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$. Спряженим до $L^{q(x)}(\Omega)$ є простір $L^{q'(x)}(\Omega)$.

Зауваження 1. Нехай

$$S_q(s) = \begin{cases} s^{q_0}, & s \in [0,1], \\ s^{q^0}, & s > 1, \end{cases} \qquad S_{1/q}(s) = \begin{cases} s^{1/q^0}, & s \in [0,1], \\ s^{1/q_0}, & s > 1, \end{cases}$$

і $q \in L^\infty_+(\Omega)$. В лемі 1 [7, с. 168] показано, що для довільної функції $v : \Omega \to \mathbb{R}$ матимемо виконання нерівностей:

1) $||v; L^{q(x)}(\Omega)|| \le S_{1/q}(\rho_q(v,\Omega))$ при $\rho_q(v,\Omega) < +\infty$;

2) $\rho_q(v,\Omega) \le S_q(||v; L^{q(x)}(\Omega)||)$ при $||v; L^{q(x)}(\Omega)|| < +\infty$.

Узагальненим простором Соболєва $W^{1,q(x)}(\Omega)$ називатимемо множину функцій $v \in L^{q(x)}(\Omega)$, узагальнені похідні яких існують і $u_{x_1}, \ldots, u_{x_n} \in L^{q(x)}(\Omega)$. Аналогічно до введених визначимо простори функцій $L^\infty_+(Q_{0,T})$, $L^{q(x,t)}(Q_{0,T})$, $W^{1,q(x,t)}(Q_{0,T})$ та функціонал $\rho_q(\cdot, Q_{0,T})$.

Нагадаємо, що (див. [6, с. 594]) узагальнена нерівність Гельдера для двох функцій $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ та $v \in L^{p'(x)}(\Omega)$, де $p \in L^\infty_+(\Omega)$, має вигляд

$$\int\limits_\Omega u(x)v(x)dx \leqslant K_1 ||u; L^{p(x)}(\Omega)||\, ||v; L^{p'(x)}(\Omega)||,$$

де $K_1 = 1 + 1/p_0 - 1/p^0 > 0$ – стала, яка не залежить від u та v.

Нам буде потрібний такий результат.

Лема 1. *(Узагальнена нерівність Гельдера для трьох функцій). Нехай* $p, q \in L^\infty_+(\Omega)$ *такі функції, що* $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = const < 1$ *для* $x \in \Omega$, *число* $k > 1$ *задано рівністю*

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} + \frac{1}{k} = 1, \quad x \in \Omega. \tag{1}$$

Якщо $u \in L^{p(x)}(\Omega)$, $v \in L^{q(x)}(\Omega)$, $w \in L^k(\Omega)$, *то* $uvw \in L^1(\Omega)$ *і*

$$\int\limits_\Omega u(x)v(x)w(x)\;dx \leqslant K_2 S_{1/p}\Big(\int\limits_\Omega |u(x)|^{p(x)}\;dx\Big) S_{1/q}\Big(\int\limits_\Omega |v(x)|^{q(x)}\;dx\Big)\Big(\int\limits_\Omega |w(x)|^k\;dx\Big)^{1/k},$$

де $K_2 > 0$ *– стала, яка не залежить від* u, v, w.

Доведення. Нехай $k' \stackrel{\text{def}}{=} \frac{k}{k-1}$ – спряжене до k число. Тоді

$$\int\limits_\Omega u(x)v(x)w(x)\;dx \leqslant \Big(\int\limits_\Omega |u(x)v(x)|^{k'}\;dx\Big)^{\frac{1}{k'}} \cdot \Big(\int\limits_\Omega |w(x)|^k\;dx\Big)^{\frac{1}{k'}}. \tag{2}$$

Зрозуміло, що з (1) $k = \frac{p(x)q(x)}{p(x)q(x)-p(x)-q(x)}$, а тому $k' = \frac{p(x)q(x)}{p(x)+q(x)}$. Тоді

$$\frac{p(x)}{k'} = \frac{p(x)(p(x)+q(x))}{p(x)q(x)} = \frac{p(x)}{q(x)} + 1 > 1. \tag{3}$$

Маючи (3) та зауваження 1, можна продовжити праву частину нерівності (2). Одержимо

$$\Big(\int\limits_\Omega |u(x)v(x)|^{k'}\;dx\Big)^{\frac{1}{k'}} \cdot \Big(\int\limits_\Omega |w(x)|^k\;dx\Big)^{\frac{1}{k'}} \leqslant$$

$$\leqslant \Big(K_1 \cdot ||\,|u|^{k'}; L^{p(x)/k'}(\Omega)|| \cdot ||\,|v|^{k'}; L^{(p(x)/k')'}(\Omega)||\Big)^{\frac{1}{k'}} \cdot \Big(\int\limits_\Omega |w(x)|^k\;dx\Big)^{\frac{1}{k'}} \leqslant$$

$$\leqslant \Big(C_1 \cdot S_{1/(p/k')}(\rho_p(u;\Omega)) \cdot S_{1/(p/k')'}(\rho_q(v;\Omega))\Big)^{\frac{1}{k'}} \cdot \Big(\int\limits_\Omega |w(x)|^k\;dx\Big)^{\frac{1}{k'}} = C_1^{\frac{1}{k'}} \cdot D_1 \cdot D_2 \cdot D_3,$$

де

$$D_1 = \Big(S_{1/(p/k')}(\rho_p(u;\Omega))\Big)^{\frac{1}{k'}},\;\; D_2 = \Big(S_{1/(p/k')'}(\rho_q(v;\Omega))\Big)^{\frac{1}{k'}},\;\; D_3 = \Big(\int\limits_\Omega |w(x)|^k\;dx\Big)^{\frac{1}{k'}}.$$

Оскільки $\frac{p_0}{k'} \leqslant \frac{p(x)}{k'} \leqslant \frac{p^0}{k'}$, то

$$D_1 = \begin{cases} \Big(\int\limits_\Omega |u(x)|^{p(x)}\;dx\Big)^{\frac{1}{p^0}}, & \rho_p(u;\Omega) \leqslant 1, \\ \Big(\int\limits_\Omega |u(x)|^{p(x)}\;dx\Big)^{\frac{1}{p_0}}, & \rho_p(u;\Omega) > 1, \end{cases} = S_{1/p}(\rho_p(u;\Omega)).$$

Оскільки $\frac{1}{p} \leqslant 1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{q} = \frac{1}{k'} - \frac{1}{q} = \frac{q-k'}{k'q}$, то $\frac{p}{k'} = \frac{q}{q-k'}$, $(\frac{p}{k'})' = \frac{\frac{q}{q-k'}}{\frac{q}{q-k'}-1} = \frac{q}{k'}$. Тоді $\frac{q_0}{k'} \leqslant (\frac{p(x)}{k'})' \leqslant \frac{q^0}{k'}$, тому

$$D_2 = \begin{cases} \Big(\int\limits_\Omega |v(x)|^{q(x)}\;dx\Big)^{\frac{1}{q^0}}, & \rho_q(u;\Omega) \leqslant 1, \\ \Big(\int\limits_\Omega |v(x)|^{q(x)}\;dx\Big)^{\frac{1}{q_0}}, & \rho_q(u;\Omega) > 1, \end{cases} = S_{1/q}(\rho_q(v;\Omega)).$$

Лему доведено. $\square$

Нехай $r \in L^{\infty}_{+}(\Omega)$, $u, v \in L^{r(x)}(\Omega)$, $\mu \in L^{\infty}(\Omega)$,

$$I(\lambda) = \int\limits_{\Omega} \frac{\mu(x)}{r(x)} |u(x) + \lambda v(x)|^{r(x)} dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Лема 2. *Функція $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є диференційовною в звичайному розумінні функцією і*

$$I'(\lambda) = \int\limits_{\Omega} \mu(x) |u(x) + \lambda v(x)|^{r(x)-2} (u(x) + \lambda v(x)) v(x)\, dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Доведення. Нехай I – функція з (4), I' – функція з (5), $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Тоді для кожного $x \in \Omega$ з теореми Лагранжа про скінченні прирости випливає існування числа $\theta(x) \in [0, 1]$ такого, що

$$D = \frac{I(\lambda + \varepsilon) - I(\lambda)}{\varepsilon} - I'(\lambda) = \int\limits_{\Omega} \Big[\frac{\mu}{r\varepsilon} \Big(|u + (\lambda + \varepsilon) v|^{r(x)} - |u + \lambda v|^{r(x)} \Big) -$$

$$- \mu |u + \lambda v|^{r(x)-2} (u + \lambda v) v \Big] dx = \int\limits_{\Omega} \Big[\mu |\eta|^{r(x)-2} \eta v - \mu |u + \lambda v|^{r(x)-2} (u + \lambda v) v \Big] dx,$$

де $\eta = \theta(u + (\lambda + \varepsilon) v) + (1 - \theta)(u + \lambda v) = u + \lambda v + \theta \varepsilon v$.

Далі використаємо оцінку

$$\big| |\xi_1|^{r(x)-2} \xi_1 - |\xi_2|^{r(x)-2} \xi_2 \big| \leqslant C_2 (|\xi_1| + |\xi_2|)^{r(x)-1-\alpha(x)} |\xi_1 - \xi_2|^{\alpha(x)},$$

де $C_2 > 0$ – стала, $0 \leqslant \alpha(x) \leqslant \min\{1, r(x) - 1\}$, яка випливає з теореми 2.1 [9, с. 2]. Нехай α – таке число, що $0 < \alpha < \min\{1, r_0 - 1\}$. Тоді

$$|D| \leqslant \int\limits_{\Omega} |\mu| C_2 (|u + \lambda v + \theta \varepsilon v| + |u + \lambda v|)^{r(x)-1-\alpha} |\theta \varepsilon v|^{\alpha} |v|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \int\limits_{\Omega} (|u| + |v|)^{r(x)-1-\alpha} |\varepsilon|^{\alpha} |v|^{\alpha+1}\, dx,$$

де стала C_3 залежить від α, але не залежить від u, v, ε. Враховуючи те, що $r(x) - 1 > \alpha$, $r(x) > \alpha + 1$, $\frac{r(x)}{\alpha+1} > 1$, використаємо узагальнену нерівність Гельдера для двох функцій

$$|D| \leqslant C_3 |\varepsilon|^{\alpha} \| (|u| + |v|)^{r(x)-1-\alpha}; L^{(\frac{r(x)}{\alpha+1})'}(\Omega) \| \cdot \| |v|^{\alpha+1}; L^{\frac{r(x)}{\alpha+1}}(\Omega) \|.$$

Наявні тут норми скінченні, бо $u, v \in L^{r(x)}(\Omega)$,

$$(\alpha + 1) \frac{r(x)}{\alpha + 1} = r(x),$$

$$(r(x) - 1 - \alpha) \Big(\frac{r(x)}{\alpha + 1} \Big)' = (r(x) - 1 - \alpha) \frac{\frac{r(x)}{\alpha+1}}{\frac{r(x)}{\alpha+1} - 1} = r(x).$$

Отже, $|D| \leqslant C_4 |\varepsilon|^{\alpha}$, де C_4 – стала, яка залежить від λ, α, u, v, але не залежить від ε. Тому $D \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$ та I' є похідною I. □

Використаємо цю лему для доведення важливих для нас фактів. Нехай Y – дійсний банахів простір, Y^* – спряжений до Y простір, $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$ – скалярний добуток між Y^* та Y, $J : Y \to \mathbb{R}$ – деякий функціонал. Нагадаємо кілька понять.

Означення 1. *Оператор $B : Y \to Y^*$ називається диференціалом Гато від функціонала J, якщо для будь-яких u, $v \in Y$: $\langle Bu, v\rangle_Y = \frac{d}{d\lambda} J(u + \lambda v)|_{\lambda=0}$.*

Означення 2. *Функція $J^* : \ Y^* \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ називається спряженою опуклою функцією до J, якщо*

$$J^*(v) = \sup_{w\in Y}\{\langle v, w\rangle_Y - J(w)\} \quad v \in Y^*. \tag{6}$$

Нагадаємо таке (див. [10, с. 264]): якщо $f : X \to \mathbb{R}$ – опукла функція, де X – топологічний векторний простір, то точка x є точкою мінімуму f тоді, і лише тоді, коли $0 \in \partial f(x)$, де $\partial f(x)$ – субдиференціал функції f в точці x. Крім того (див. [10, с. 268]), якщо f – власна опукла функція, то субдиференціал $\partial f(x)$ складається лише з однієї точки тоді, і лише тоді, коли оператор $B^+f : X \to X^*$ є похідною за Гато від f в точці x, де $\langle (B^+f)(x), v\rangle_X = \lim\limits_{\lambda\to+0} \frac{f(x+\lambda v)-f(x)}{\lambda}$. Наслідком цих міркувань є таке зауваження.

Зауваження 2. Якщо $J : Y \to \mathbb{R}$ – випуклий вгору функціонал з диференціалом Гато $B : Y \to Y^*$, то максимум J на Y досягається в точці $w \in Y$ такій, що $Bw = 0$.

Для прикладу розглянемо такий простір Y та функціонал J: $Y = L^{r(x)}(\Omega)$,

$$J(u) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_\Omega \mu(x)\frac{1}{r(x)}|u(x)|^{r(x)}\, dx, \quad u \in L^{r(x)}(\Omega), \tag{7}$$

де $r \in L^\infty_+(\Omega)$, $\mu \in L^\infty(\Omega)$. Тоді $Y^* = L^{r'(x)}(\Omega)$, диференціал за Гато – це оператор $B : \ Y \to Y^*$, який має вигляд (тут застосуємо лему 2)

$$\langle Bu, v\rangle_Y = \Big(\frac{d}{d\lambda}\int\limits_\Omega \mu(x)\frac{1}{r(x)}\cdot|u(x) + \lambda v(x)|^{r(x)}\, dx\Big)\Big|_{\lambda=0} =$$

$$= \int\limits_\Omega \Big(\mu(x)|u(x) + \lambda v(x)|^{r(x)-2}(u(x) + \lambda v(x)) \cdot v(x)\Big)\Big|_{\lambda=0}\, dx =$$

$$= \int\limits_\Omega \mu(x)|u(x)|^{r(x)-2}u(x) \cdot v(x)\, dx = \langle \mu(x)|u|^{r(x)-2}u, v\rangle_Y, \quad u, v \in Y,$$

тобто

$$Bu = \mu|u|^{r(x)-2}u, \quad u \in Y. \tag{8}$$

Знайдемо спряжений до (7) функціонал. Для цього нам потрібне зауваження 2. Отож, згідно з означенням 2 (див. зображення (6))

$$J^*(v) = \sup_{w\in L^{r(x)}(\Omega)}\Big\{\int\limits_\Omega vw\, dx - \int\limits_\Omega \mu(x)\frac{1}{r(x)}|w|^{r(x)}\, dx\Big\} =$$

$$= \sup_{w\in L^{r(x)}(\Omega)}\Big\{\int\limits_\Omega \Big(vw - \mu(x)\frac{1}{r(x)}|w|^{r(x)}\Big)\, dx\Big\}, \quad v \in L^{r'(x)}(\Omega). \tag{9}$$

Нехай $v \in L^{r'(x)}(\Omega)$ – фіксоване. Введемо позначення

$$F(w) = \int\limits_\Omega \Big(vw - \mu(x)\frac{1}{r(x)}|w|^{r(x)}\Big)\, dx, \quad w \in L^{r(x)}(\Omega). \tag{10}$$

Тоді згідно з (9) матимемо

$$J^*(v) = \sup_{w \in L^{r(x)}(\Omega)} F(w). \tag{11}$$

Зрозуміло, що F – випуклий вгору функціонал. Тому для того аби відшукати супремум функціонала $F(w)$ (згідно з зауваженням 2), знайдемо його похідну Гато $B_1 w$ в точці w та прирівняємо її до нуля. Отже, використовуючи означення 1, одержимо таке рівняння на знаходження w:

$$\langle B_1 w, z\rangle_Y = \frac{d}{ds} F(w+sz)\Big|_{s=0} = 0 \quad \forall z \in Y. \tag{12}$$

Аналогічно як (8) отримаємо, що

$$B_1 w = v - \mu\, w|w|^{r(x)-2}.$$

Тому (12) набуде вигляду

$$v = \mu\, w|w|^{r(x)-2} \quad \text{майже скрізь в} \quad \Omega. \tag{13}$$

З (13) одержимо, що $w = \frac{v}{\mu}\Big(\frac{|v|}{\mu}\Big)^{\frac{2-r(x)}{r(x)-1}}$ – точка максимуму F. Тому

$$J^*(v) = F\Big(\frac{v}{\mu}\Big(\frac{|v|}{\mu}\Big)^{\frac{2-r(x)}{r(x)-1}}\Big) = \int\limits_{\Omega}\Big(v(x)\frac{v(x)}{\mu(x)}\Big(\frac{|v(x)|}{\mu(x)}\Big)^{\frac{2-r(x)}{r(x)-1}} - \frac{\mu(x)}{r(x)}\Big|\frac{v(x)}{\mu(x)}\Big|^{\frac{r(x)}{r(x)-1}}\Big)dx.$$

Після нескладних перетворень одержимо

$$J^*(v) = \int\limits_{Q_{0,T}} \mu(x)^{1-r'(x)}\frac{1}{r'(x)}|v(x)|^{r'(x)}\, dxdt, \quad v \in L^{r'(x)}(\Omega). \tag{14}$$

3. Узагальнена похідна від композиції функцій. Нехай виконуються умови попереднього підрозділу.

Лема 3. *Нехай $q \in L^\infty_+(Q_{0,T})$, $\theta \in C^1(\mathbb{R})$, $|\theta'(t)| \leqslant M$ для всіх $t \in \mathbb{R}$. Якщо $u \in W^{1,q(x,t)}(Q_{0,T})$, то $\theta(u) \in W^{1,q(x,t)}(Q_{0,T})$ і, крім того,*

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\theta(u) = \theta'(u)\,\frac{\partial u}{\partial t} \quad \textit{майже всюди в } Q_{0,T}. \tag{15}$$

Аналогічна формула виконується і для похідних за змінними $x_1, \ldots, x_n$.

Доведення. Оскільки $u \in W^{1,q(x,t)}(Q_{0,T})$, то існує така послідовність функцій $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset C^1(\overline{Q_{0,T}})$, що $u_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u$ в $W^{1,q(x,t)}(Q_{0,T})$ і $u_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u$ майже всюди в $Q_{0,T}$. Очевидно, що $\theta(u_m) \in C^1(\overline{Q_{0,T}})$ і маємо $|\theta(u_m) - \theta(u)| \leqslant M|u_m - u|$, тому $\theta(u_m)$ збіжна до $\theta(u)$ в просторі $L^{q(x,t)}(Q_{0,T})$. Крім того,

$$\theta'(u_m)\frac{\partial u_m}{\partial t} - \theta'(u)\frac{\partial u}{\partial t} = \theta'(u_m)\Big(\frac{\partial u_m}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\Big) + \Big(\theta'(u_m) - \theta'(u)\Big)\frac{\partial u}{\partial t} \overset{\text{def}}{=} A_m + B_m.$$

Зрозуміло, що $B_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ майже всюди в $Q_{0,T}$. Також $|B_m|^{q(x,t)} \leqslant (2M|u_t|)^{q(x,t)} \in$ $\in L^1(Q_{0,T})$. Тому за теоремою Лебега $B_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ в $L^{q(x,t)}(Q_{0,T})$. Крім того,

$$|A_m|^{q(x,t)} \leqslant M^{q(x,t)}\Big|\frac{\partial u_m}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\Big|^{q(x,t)} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{в просторі} \quad L^1(Q_{0,T}).$$

Тоді $A_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ в просторі $L^{q(x,t)}(Q_{0,T})$. Тому $\theta'(u_m)\frac{\partial u_m}{\partial t} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \theta'(u)\frac{\partial u}{\partial t}$ сильно в $L^{q(x,t)}(Q_{0,T})$, зокрема, $\theta'(u)\frac{\partial u}{\partial t} \in L^{q(x,t)}(Q_{0,T})$.

Доведемо тепер (15). Нехай $\varphi \in D(Q_{0,T})$. Тоді

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \theta'(u)u_t\varphi\, dxdt = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{Q_{0,T}} \theta'(u_m)\frac{\partial u_m}{\partial t}\varphi\, dxdt =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \int\limits_{Q_{0,T}} \frac{\partial}{\partial t}\Big(\theta(u_m)\Big)\varphi\, dxdt = -\lim_{m\to\infty} \int\limits_{Q_{0,T}} \theta(u_m)\varphi_t\, dxdt = -\int\limits_{Q_{0,T}} \theta(u)\varphi_t\, dxdt.$$

Отже, в сенсі розподілів (а з леми дю Буа-Реймонда і в сенсі рівності майже скрізь) матимемо (15). □

Зауваження 3. Якщо $q(x,t) \equiv \mathrm{const}$, θ задовольняє умову Ліпшиця на $\mathbb{R}$, похідна θ існує всюди за винятком, можливо, скінченної множини точок $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ та є обмеженою і $u \in W^{1,q}(Q_{0,T})$, то $\theta(u) \in W^{1,q}(Q_{0,T})$ і виконується формула (15) (в сенсі розподілів на $Q_{0,T}$; див. [3, с. 50]).

Введемо допоміжне позначення. Нехай скрізь далі $r \in L^\infty_+(\Omega)$ та

$$(\mathcal{R}u)(x) = \frac{1}{r(x)-1}|u(x)|^{r(x)-2}u(x), \quad x \in \Omega. \tag{16}$$

Зауваження 4. Правило (16) задає нелінійний оператор $\mathcal{R} : L^{r(x)}(\Omega) \to L^{r'(x)}(\Omega)$. Зрозуміло, що $\mathcal{R}$ є обмеженим.

Зауваження 5. Нехай $k \in L^\infty(\Omega)$. Тоді існують такі сталі M_1, M_2, $M_3 > 0$, що для всіх $a, b \in \mathbb{R}$ та майже для всіх $x \in \Omega$ виконуються оцінки:

$$||a|^{k(x)} - |b|^{k(x)}| \leqslant M_1|a-b|(|a|^{k(x)-1} + |b|^{k(x)-1}), \quad \text{де } k(x) \geqslant 1, \tag{17}$$

(див. [9, с. 3] для $k \equiv \mathrm{const}$),

$$|a \pm b|^{k(x)} \leqslant M_2(|a|^{k(x)} + |b|^{k(x)}), \quad \text{де } k(x) \geqslant 0, \tag{18}$$

(див. [11, с. 67] для $k \equiv \mathrm{const}$),

$$|\, |a|^{k(x)-2}a - |b|^{k(x)-2}b| \leqslant C_5 \cdot (|a| + |b|)^{k(x)-2}|a-b|, \quad \text{де} \quad k(x) \geqslant 2, \tag{19}$$

(див. [9, с. 3] для $k \equiv \mathrm{const}$).

Лема 4. *Нехай $r \in L^\infty_+(\Omega)$ та $r_0 \geqslant 3$, оператор $\mathcal{R}$ визначено в (16),*

$$U_1 \overset{def}{=} \{u \in L^{2(r(x)-2)}(Q_{0,T}) \ | \ u_t \in L^2(Q_{0,T})\},$$

$||u||_{U_1} = ||u; L^{2(r(x)-2)}(Q_{0,T})|| + ||u_t; L^2(Q_{0,T})||$. *Тоді для всіх $u \in U_1$ виконується (взята в сенсі розподілів на $Q_{0,T}$) формула*

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\mathcal{R}u\Big) = |u|^{r(x)-2}\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{20}$$

Крім того, $\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{R}u) : U_1 \to L^1(Q_{0,T})$.

Доведення. Оскільки $\overline{C^1(\overline{Q}_{0,T})} = U_1$, то візьмемо таку послідовність $\{u^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ з $C^1(\overline{Q}_{0,T})$, що $u^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u$ сильно в U_1. Тоді $\{u^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ обмежена в U_1, тобто $\exists C_6 > 0$: $||u^m||_{U_1} \leqslant C_6\ \forall\, m \in \mathbb{N}$, звідки

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[|u^m|^{2(r(x)-2)} + |u_t^m|^2\Big]\, dxdt \leqslant C_7 \quad \forall\, m \in \mathbb{N}. \tag{21}$$

Оскільки для всіх $x \in \Omega$ функція $\tau \mapsto |\tau|^{r(x)-2}\tau$ диференційовна при $r_0 \geqslant 3$, то

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\mathcal{R}u^m\Big) = |u^m|^{r(x)-2}\frac{\partial u^m}{\partial t} \tag{22}$$

в класичному розумінні похідної. Покажемо, що

$$|u^m|^{r(x)-2}u_t^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} |u|^{r(x)-2}u_t \quad \text{сильно в } L^1(Q_{0,T}). \tag{23}$$

Як і в лемі 3 матимемо

$$|u^m|^{r(x)-2}u_t^m - |u|^{r(x)-2}u_t = |u^m|^{r(x)-2}(u_t^m - u_t) + (|u^m|^{r(x)-2} - |u|^{r(x)-2})u_t = A_m + B_m.$$

Зазначимо таке: оскільки $|u^m|^{r(x)-2}$, $|u|^{r(x)-2}$, u_t^m, $u_t \in L^2(Q_{0,T})$, то всі доданки з останньої рівності належать простору $L^1(Q_{0,T})$. Використавши нерівність Гельдера та (21), одержимо

$$\int\limits_{Q_{0,T}} |A_m|\, dxdt \leqslant \Big(\int\limits_{Q_{0,T}} |u^m|^{2(r(x)-2)}\, dxdt\Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\int\limits_{Q_{0,T}} |u_t^m - u_t|^2\, dxdt\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{C_7}||u_t^m - u_t; L^2(Q_{0,T})|| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Оскільки $u^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u$ сильно в $L^{2(r(x)-2)}(Q_{0,T})$, то і сильно в $L^{2(r_0-2)}(Q_{0,T})$, тому можна вважати, що $u^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u$ майже скрізь в $Q_{0,T}$. Отож, $B_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ майже скрізь в $Q_{0,T}$.

Використавши (17) (в нас $r(x) - 2 \geqslant 1$, бо $r(x) \geqslant 3$), одержимо

$$|B_m| = ||u^m|^{r(x)-2} - |u|^{r(x)-2}| \cdot |u_t| \leqslant M_1|u^m - u| \cdot (|u^m|^{r(x)-3} + |u|^{r(x)-3})|u_t|.$$

Знайдемо $\beta(x)$ з умови $\frac{1}{2(r(x)-2)} + \frac{1}{\beta(x)} + \frac{1}{2} = 1$. Матимемо, що $\beta(x) = \frac{2(r(x)-2)}{r(x)-3} = 2 + \frac{2}{r(x)-3}$. Тоді $2(r(x)-2)$, $\beta(x)$, $2 > 1$ і тому з потрійної нерівності Гельдера (див. лему 1), оцінок (18), (21) та зауваження 1 отримаємо

$$\int\limits_{Q_{0,T}} |B_m|\, dxdt \leqslant K_2 M_1 \cdot S_{1/(2(r-2))}\Big(\int\limits_{Q_{0,T}} |u^m - u|^{2(r(x)-2)}\, dxdt\Big) \times$$
$$\times S_{1/\beta}\Big(\int\limits_{Q_{0,T}} (|u^m|^{r(x)-3} + |u|^{r(x)-3})^{\beta}\, dxdt\Big)\Big(\int\limits_{Q_{0,T}} |u_t|^2\, dxdt\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$
$$\leqslant C_8\, S_{1/(2r-4)}(S_{2r-4}(||u^m - u; L^{2(r(x)-2)}(Q_{0,T})||)) \times$$
$$\times S_{1/\beta}\Big(\int\limits_{Q_{0,T}} (|u^m|^{2(r(x)-2)} + |u|^{2(r(x)-2)})\, dxdt\Big) \cdot ||u_t; L^2(Q_{0,T})|| \leqslant$$
$$\leqslant C_9\, S_{1/(2r-4)}(S_{2r-4}(||u^m - u; L^{2(r(x)-2)}(Q_{0,T})||)) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Тому (23) виконується. Щоб завершити доведення цієї леми, треба визначити збіжність

$$\mathcal{R}u^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{R}u \quad \text{в} \quad L^1(Q_{0,T}). \tag{24}$$

Використовуючи (19), матимемо

$$\int\limits_{Q_{0,T}} |\mathcal{R}u^m - \mathcal{R}u|\, dxdt = \int\limits_{Q_{0,T}} \frac{1}{r(x)-1} \cdot |\, |u^m|^{r(x)-2}u^m - |u|^{r(x)-2}u| dxdt \leqslant$$
$$\leqslant C_{10} \int\limits_{Q_{0,T}} |u^m - u| \cdot (|u^m| + |u|)^{r(x)-2}\, dxdt \leqslant$$
$$\leqslant C_{11} \int\limits_{Q_{0,T}} |u^m - u| \cdot (|u^m|^{r(x)-2} + |u|^{r(x)-2})\, dxdt = I_1^m + I_2^m,$$

де

$$I_1^m = C_{11} \cdot \int\limits_{Q_{0,T}} |u^m|^{r(x)-2}|u^m - u|\, dxdt, \qquad I_2^m = C_{11} \cdot \int\limits_{Q_{0,T}} |u|^{r(x)-2}|u^m - u|\, dxdt.$$

Далі оцінимо I_1^m та I_2^m, використовуючи нерівність Гельдера.

$$I_1^m = C_{11} \cdot \int\limits_{Q_{0,T}} |u^m|^{r(x)-2}|u^m - u|\, dxdt \leqslant C_{11} \cdot \Big(\int\limits_{Q_{0,T}} |u^m|^{2(r(x)-2)}\, dxdt \Big)^{\frac{1}{2}} \times$$
$$\times \Big(\int\limits_{Q_{0,T}} |u^m - u|^2\, dxdt \Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant C_{12} \cdot ||u^m - u; L^2(Q_{0,T})||. \tag{25}$$

Оскільки $r(x) \geqslant 3$, то $2(r(x)-2) \geqslant 2$. Тому

$$\exists C_{13} > 0: \quad ||u^m - u; L^2(Q_{0,T})|| \leqslant C_{13}\, ||u^m - u; L^{2(r(x)-2)}(Q_{0,T})||. \tag{26}$$

Застосуємо (26) до (25), одержимо

$$0 \leqslant I_1^m \leqslant C_{14} \cdot ||u^m - u; L^{2(r(x)-2)}(Q_{0,T})|| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Отже, $I_1^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Аналогічно одержимо, що $I_2^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Тому виконується (24).

Нехай $\varphi \in D(Q_{0,T})$. Тоді з (22), (23) та (24)

$$\int\limits_{Q_{0,T}} |u|^{r(x)-2}u_t\varphi\, dxdt = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{Q_{0,T}} |u^m|^{r(x)-2}u_t^m\varphi\, dxdt =$$
$$= \lim_{m\to\infty} \int\limits_{Q_{0,T}} \frac{\partial}{\partial t}\Big(\mathcal{R}u^m\Big)\varphi\, dxdt = -\lim_{m\to\infty} \int\limits_{Q_{0,T}} \mathcal{R}u^m\, \varphi_t\, dxdt = -\int\limits_{Q_{0,T}} \mathcal{R}u\, \varphi_t\, dxdt.$$

Отож, в сенсі розподілів (а з леми дю Буа-Реймонда і в сенсі рівності майже скрізь) матимемо (20). □

Зауваження 6. ([4, с. 66]) Якщо $r(x) \equiv \mathrm{const}$, $r \in [2,3)$,

$$U_2 = \{u \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \;\mid\; u_t \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega))\},$$

$||u||_{U_2} = ||u; L^\infty(0,T; L^2(\Omega))|| + ||u_t; L^\infty(0,T; L^2(\Omega))||$, то формула (20) з леми 4 також виконується.

4. Інтегрування частинами композиції функцій. Для зручності наступний відомий факт ми наведемо з доведенням.

Лема 5. *(лема* [1, с. 376-377]*). Якщо Y – дійсний банахів простір, $J : Y \to \mathbb{R}$ – опуклий диференційовний за Гато функціонал з диференціалом Гато $B : Y \to Y^*$, функція $J^* : Y^* \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ визначена в (6), то*

$$J^*(Bu) = \langle Bu, u\rangle_Y - J(u) \quad \forall\, u \in Y, \tag{27}$$

$$J^*(Bu_2) - J^*(Bu_1) \geqslant \langle Bu_2 - Bu_1, u_1\rangle_Y \quad \forall\, u_1, u_2 \in Y, \tag{28}$$

$$J^*(Bu_2) - J^*(Bu_1) \leqslant \langle Bu_2 - Bu_1, u_2\rangle_Y \quad \forall\, u_1, u_2 \in Y. \tag{29}$$

Доведення. **1.** Доведемо (27). З означення B випливає, що

$$J(w) - J(u) \geqslant \langle Bu, w - u\rangle_Y \quad \forall\, u, w \in Y, \tag{30}$$

тому $\langle Bu, w\rangle_Y - J(w) \leqslant \langle Bu, u\rangle_Y - J(u)$. Тоді з (6)

$$J^*(Bu) = \sup_{w\in Y}\{\langle Bu, w\rangle_Y - J(w)\}.$$

Об'єднуючи це з попередньою нерівністю, одержуємо, що супремум досягається в точці $w = u$.

2. Доведемо (28) та (29). Взявши в (30) $u = u_2$, $w = u_1$, одержимо

$$J(u_1) - J(u_2) \geqslant \langle Bu_2, u_1 - u_2\rangle_Y = \langle Bu_2, u_1\rangle_Y - \langle Bu_2, u_2\rangle_Y \quad \forall\, u_1, u_2 \in Y.$$

Отож, $J(u_1) - \langle Bu_1, u_1\rangle_Y - J(u_2) + \langle Bu_2, u_2\rangle_Y \geqslant \langle Bu_2, u_1\rangle_Y - \langle Bu_1, u_1\rangle_Y$, тому з (27)

$$-J^*(Bu_1) + J^*(Bu_2) \geqslant \langle Bu_2 - Bu_1, u_1\rangle_Y \quad \forall\, u_1, u_2 \in Y.$$

Тобто (28) доведено. Тепер поміняємо в (28) u_1 і u_2 місцями

$$J^*(Bu_1) - J^*(Bu_2) \geqslant \langle Bu_1 - Bu_2, u_2\rangle_Y,$$

домножимо на (-1)

$$-J^*(Bu_1) + J^*(Bu_2) \leqslant \langle Bu_2 - Bu_1, u_2\rangle_Y$$

і одержимо (29). □

Розглянемо наш частковий випадок, коли $Y = L^{r(x)}(\Omega)$, де $r \in L^\infty_+(\Omega)$, J задано в (7), B пораховано в (8), а J^* – в (14). Нехай $\mu(x) = \frac{1}{r(x)-1}$, $x \in \Omega$, тоді

$$J^*(Bv) = J^*(\mathcal{R}u) = \int_\Omega \Big(\frac{1}{r(x)-1}\Big)^{1-r'(x)} \frac{1}{r'(x)}\Big|\frac{1}{r(x)-1}|u|^{r(x)-2}u\Big|^{r'(x)}\, dx =$$
$$= \int_\Omega \frac{1}{(r(x)-1)r'(x)}|u|^{(r(x)-1)r'(x)}\, dx = \int_\Omega \frac{1}{r(x)}|u|^{r(x)}\, dx$$

і тому нерівність (28) набуде вигляду

$$\int_\Omega \frac{1}{r(x)}|u_2|^{r(x)}\, dx - \int_\Omega \frac{1}{r(x)}|u_1|^{r(x)}\, dx \geqslant$$
$$\geqslant \int_\Omega \frac{1}{r(x)-1}(|u_2|^{r(x)-2}u_2 - |u_1|^{r(x)-2}u_1)u_1\, dx \tag{31}$$

для всіх $u_1, u_2 \in L^{r(x)}(\Omega)$. Аналогічно нерівність (29) набуде вигляду

$$\int\limits_\Omega \frac{1}{r(x)}|u_2|^{r(x)}\,dx - \int\limits_\Omega \frac{1}{r(x)}|u_1|^{r(x)}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_\Omega \frac{1}{r(x)-1}(|u_2|^{r(x)-2}u_2 - |u_1|^{r(x)-2}u_1)u_2\,dx \tag{32}$$

для всіх $u_1, u_2 \in L^{r(x)}(\Omega)$.

Теорема 1. *Якщо* $r(x) \in L^\infty_+(\Omega)$, $u \in L^{r(x)}(Q_{0,T})$, $(|u|^{r(x)-2}u)_t \in L^{r'(x)}(Q_{0,T})$, *то для всіх* $\tau, s \in [0,T]$

$$\int\limits_s^\tau dt \int\limits_\Omega u\,\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{R}(u))\,dx = \int\limits_\Omega \frac{1}{r(x)}|u(\tau)|^r\,dx - \int\limits_\Omega \frac{1}{r(x)}|u(s)|^r\,dx. \tag{33}$$

Доведення. Припустимо, що виконуються умови теореми. Оскільки $u \in L^{r(x)}(Q_{0,T})$, то $|u|^{r(x)-2}u \in L^{r'(x)}(Q_{0,T})$. Крім того, $(|u|^{r(x)-2}u)_t \in L^{r'(x)}(Q_{0,T})$. З теореми 1 [12, с. 311] випливає, що $L^{r'(x)}(Q_{0,T}) \subset L^{\frac{r_0}{r_0-1}}(0,T;L^{r'(x)}(\Omega))$. Тоді з леми [13, с. 20] $|u|^{r(x)-2}u \in C([0,T];L^{r'(x)}(\Omega))$. Тому існує $C_{15} > 0$ така, що для всіх $t \in [0,T]$

$$\int\limits_\Omega |u(t)|^{r(x)}\,dx = \int\limits_\Omega ||u(t)|^{r(x)-2}u(t)|^{r'(x)}\,dx \leqslant C_{15}. \tag{34}$$

Зафіксуємо наші $\tau, s \in [0,T]$.

I. Оскільки $|u|^{r(x)-2}u \in C([0,T];L^{r'(x)}(\Omega))$, то функція $\widetilde{u}$ така, що

$$|\widetilde{u}(t)|^{r(x)-2}\widetilde{u}(t) = \begin{cases} |u(\tau)|^{r(x)-2}u(\tau), & t \in [\tau, T+1], \\ |u(t)|^{r(x)-2}u(t), & t \in [s,\tau], \\ |u(s)|^{r(x)-2}u(s), & t \in [-1,s], \end{cases}$$

є така, що $|\widetilde{u}|^{r(x)-2}\widetilde{u} \in C([-1,T+1];L^{r'(x)}(\Omega))$. Крім того, $\widetilde{u} \in L^{r(x)}(Q_{-1,T+1})$, $(|\widetilde{u}|^{r(x)-2}\widetilde{u})_t \in L^{r'(x)}(-1,T+1;L^{r'(x)}(\Omega))$ (бо похідна – це нуль, або така ж похідна від u).

II. Приймемо в (32) $u_2(x) = \widetilde{u}(x,t)$, $u_1(x) = \widetilde{u}(x,t-h)$, $(x,t) \in Q_{s,\tau}$. Матимемо

$$\int\limits_\Omega \frac{1}{r(x)}|\widetilde{u}(t)|^{r(x)}\,dx - \int\limits_\Omega \frac{1}{r(x)}|\widetilde{u}(t-h)|^{r(x)}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_\Omega \frac{1}{r(x)-1}\Big(|\widetilde{u}(t)|^{r(x)-2}\widetilde{u}(t) - |\widetilde{u}(t-h)|^{r(x)-2}\widetilde{u}(t-h)\Big)\widetilde{u}(t)\,dx,$$

де $t \in (s,\tau)$, $h \in (0,1)$. Зінтегруємо останню нерівність за $t \in (s_1,\tau_1) \subset \Big(s-\frac{1}{2}, \tau+\frac{1}{2}\Big)$

$$\int\limits_{s_1}^{\tau_1} dt \int\limits_\Omega \frac{1}{r(x)}|\widetilde{u}(t)|^r\,dx - \int\limits_{s_1}^{\tau_1} dt \int\limits_\Omega \frac{1}{r(x)}|\widetilde{u}(t-h)|^{r(x)}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{Q_{s_1,\tau_1}} \frac{1}{r(x)-1}\Big(|\widetilde{u}(t)|^{r(x)-2}\widetilde{u}(t) - |\widetilde{u}(t-h)|^{r(x)-2}\widetilde{u}(t-h)\Big)\widetilde{u}(t)\,dxdt. \tag{35}$$

Оскільки

$$\int_{s_1}^{\tau_1} z(t-h)dt = \int_{s_1-h}^{\tau_1-h} z(y)dy = \int_{s_1-h}^{s_1} z(y)dy + \int_{s_1}^{\tau_1} z(y)dy - \int_{\tau_1-h}^{\tau_1} z(y)dy,$$

то з (35) одержимо (один інтеграл скоротиться)

$$\int_{\tau_1-h}^{\tau_1} dt \int_\Omega \frac{1}{r(x)}|\widetilde{u}(t)|^{r(x)}\, dx - \int_{s_1-h}^{s_1} dt \int_\Omega \frac{1}{r(x)}|\widetilde{u}(t)|^{r(x)}\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_{Q_{s_1,\tau_1}} \frac{1}{r(x)-1}\Big(|\widetilde{u}(t)|^{r(x)-2}\widetilde{u}(t) - |\widetilde{u}(t-h)|^{r(x)-2}\widetilde{u}(t-h)\Big)\widetilde{u}(t)\, dxdt.$$

Поділимо цю рівність на $h > 0$ і спрямуємо $h \to +0$. Використовуючи теорему Лебега про властивості інтегралів та означення похідної, матимемо

$$\int_\Omega \frac{1}{r(x)}|\widetilde{u}(\tau_1)|^{r(x)}\, dx - \int_\Omega \frac{1}{r(x)}|\widetilde{u}(s_1)|^{r(x)}\, dx \leqslant \int_{Q_{s_1,\tau_1}} \frac{\partial}{\partial t}\Big(\mathcal{R}(\widetilde{u})(t)\Big)\widetilde{u}(t)\, dxdt, \tag{36}$$

для майже всіх $s_1, \tau_1 \in \Big(s - \frac{1}{2}, \tau + \frac{1}{2}\Big)$.

III. Оскільки $\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{R}(\widetilde{u}(t))) = 0$ для $t \notin [s,\tau]$,

$$|\widetilde{u}(s_1)|^{r(x)-2}\widetilde{u}(s_1) \equiv |\widetilde{u}(s)|^{r(x)-2}\widetilde{u}(s) \quad \text{для} \quad s_1 \in [-1, s],$$

$$|\widetilde{u}(\tau_1)|^{r(x)-2}\widetilde{u}(\tau_1) \equiv |\widetilde{u}(\tau)|^{r(x)-2}\widetilde{u}(\tau) \quad \text{для} \quad \tau_1 \in [\tau, T+1],$$

то з формули (36) одержимо, що

$$\int_\Omega \frac{1}{r(x)}|\widetilde{u}(\tau)|^{r(x)}\, dx - \int_\Omega \frac{1}{r(x)}|\widetilde{u}(s)|^{r(x)}\, dx \leqslant \int_{Q_{s,\tau}} \frac{\partial}{\partial t}\Big(\mathcal{R}(\widetilde{u}(t))\Big)\widetilde{u}(t)\, dxdt \tag{37}$$

для наших s, τ.

IV. Виконавши пункти **II** для **III**, але з використанням (31) для $u_1(x,t) = u(x,t)$, $u_2(x,t) = u(x,t+h)$, одержимо

$$\int_\Omega \frac{1}{r(x)}|\widetilde{u}(\tau)|^{r(x)}\, dx - \int_\Omega \frac{1}{r(x)}|\widetilde{u}(s)|^{r(x)}\, dx \geqslant \int_{Q_{s,\tau}} \frac{\partial}{\partial t}\Big(\mathcal{R}(\widetilde{u})(t)\Big)\widetilde{u}(t)\, dxdt.$$

Об'єднавши це з (37) та врахувавши, що $\widetilde{u}(t) = u(t)$ при $t \in [s,\tau]$, отримаємо формулу (33). Теорему доведено. □

Наслідок 1. *Враховуючи лему 4 та попередню теорему, можна стверджувати таке: якщо $u \in L^{2(r(x)-2)}(Q_{0,T})$ при $r(x) \geqslant 3$, $u_t \in L^2(Q_{0,T})$, то*

$$\int_{Q_{s,\tau}} \frac{\partial}{\partial t}\Big(\mathcal{R}u\Big) u\, dxdt = \int_{Q_{s,\tau}} |u|^{r(x)-2}u\, u_t\, dxdt =$$
$$= \int_\Omega \frac{1}{r(x)}|u(\tau)|^{r(x)}\, dx - \int_\Omega \frac{1}{r(x)}|u(s)|^{r(x)}\, dx$$

для всіх $\tau, s \in [0,T]$, $s < \tau$.

Нагадаємо ще дві схожі формули, але у випадку $r(x) \equiv \mathrm{const}$.

Зауваження 7. ([1, с. 326]). Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – довільна відкрита множина, $r \equiv \mathrm{const}$, $T > 0$, $W \overset{\mathrm{def}}{=} W_0^{k,p}(\Omega) \cap L^r(\Omega)$, $1 < r \leqslant p$, $k \geqslant 1$. Припустимо $u \in L^p(0,T;W)$ та $|u|^{r-2}u$, $\frac{\partial}{\partial t}\Big(|u|^{r-2}u\Big) \in L^{p'}(0,T;W')$. Тоді $\forall\, s,\tau \in [0,T]$, $s < \tau$

$$\int\limits_{Q_{s,\tau}} \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{r-1}|u|^{r-2}u\Big)u\; dxdt = \frac{1}{r}\int\limits_{\Omega} |u(\tau)|^r\; dx - \frac{1}{r}\int\limits_{\Omega} |u(s)|^r\; dx.$$

Зауваження 8. ([2, с. 315]). Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область з гладкою межею, $V \overset{\mathrm{def}}{=} \{v \in W^{1,r}(\Omega)\ :\ v|_{\partial\Omega} = 0\}$. Якщо $u \in L^r(0,T;V)$, $|u|^{r-2}u \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ та $(|u|^{r-2}u)_t \in L^{r'}(0,T;V')$, то $|u|^r \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ і для майже всіх $t \in (s,\tau)$, $s,\tau \in [0,T]$, $s < \tau$ виконується формула

$$\int\limits_{Q_{s,\tau}} \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{r-1}|u|^{r-2}u\Big)u\; dxdt = \frac{1}{r}\int\limits_{\Omega} |u(\tau)|^r\; dx - \frac{1}{r}\int\limits_{\Omega} |u(s)|^r\; dx.$$

---

1. *Bernis F.* Qualitative Properties for Some Nonlinear Higher Order Degenerate Parabolic Equations / *Bernis F.* // Houston J. of Math. – 1988. – Vol. 14, №3. – P. 319-352.
2. *Alt H.W.* Quasilinear Elliptic-Parabolic Equations / *Alt H.W., Luckhaus S.* // Math Z. – 1983. – Vol. 183. – P. 311-341.
3. *Киндерлерер Д.* Введения в вариационные неравенства и их приложения / *Киндерлерер Д., Стампаккья Г.* – М: Мир, 1983.
4. *Lions J.-L.* Some Non-linear Evolution Equations / *Lions J.-L., Strauss W.A.* // Bulletin de la S.M.F. – 1965. – T. 93. – P. 43-96.
5. *Orlicz W.* Uber Konjugierte Exponentenfolgen / *Orlicz W.* // Studia Mathematica (Lwow). – 1931. – Vol. 3. – P. 200-211.
6. *Kovacik O.* On Spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$ / *Kovacik O., Rakosnik J.* // Czechslovak Math. J. – 41 (116). – 2005. – P. 592-618
7. *Бугрій О.М.* Скінченність часу стабілізації розв'язку нелінійної параболічної варіаційної нерівності зі змінним степенем нелінійності / *Бугрій О.М.* // Математичні студії. – 2005. – Т. 24, №2. – С. 167-172.
8. *Buhrii O.M.* Uniqueness of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity / *Buhrii O.M., Mashiyev R.A.* // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Appl. – 2009. – Vol. 70, № 6. – P. 2335-2331.
9. *Byström J.* Sharp Constants for Some Inequalities Connected to The p-Laplace Operator / *Byström J.* // Jour. of Ineq. in Pure and Appl. Math. – 2005. – Vol. 6, Issue 2. – Article 56.
10. *Aliprantis C.D.* Infinite Dimensional Analysis / *Aliprantis C.D., Border K.C.* – Hitchhicker's Guide. Springer, 2006.
11. *Ладиженська О.А.* Краевые задачи математической физики / *Ладиженська О.А.* – М.: Наука, 1973.
12. *Бугрій О.М.* Параболічні варіаційні нерівності в узагальнених просторах Лебега / *Бугрій О.М.* // Наук. записки Вінницького держ. пед. ун-ту ім. М. Коцюбинського. – Сер. фіз.-мат. – 2002. – Вип. 1. – С. 310-321.
13. *Лионс Ж.Л.* Некоторые методы решения нелинейних краевых задач / *Лионс Ж.Л.* – М.: Мир, 1972.

SOME INTEGRATING BY PARTS FORMULAS IN VARIABLE INDICES OF NON LINEARITY FUNCTION SPACES

Taras BOKALO, Oleh BUHRII

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: tbokalo@gmail.com, ol_buhrii@i.ua

In the paper, we considered the special type integrating by parts formulas in generalized Sobolev spaces. In addition, there is the weak derivative composition of functions formulas in sense of distributions.

Key words: generalized Lebesgue and Sobolev spaces, integrating by parts, weak derivative composition of function formula.

НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ С ПЕРЕМЕННЫМ СТЕПЕНЕМ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Тарас БОКАЛО, Олег БУГРИЙ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: tbokalo@gmail.com, ol_buhrii@i.ua

Доказаны формулы интегрирования по частям специального вида для функций с обобщённых пространств Соболева. Также доказана формула обобщённой производной от композиции функций в смысле распределений.

Ключевые слова: обобщённые пространства Лебега и Соболева, интегрирование по частям, обобщённая производная от композиции функций.

Стаття надійшла до редколегії 24.11.2009

Прийнята до друку 16.12.2009

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2009.
Вип. 71. С. 27–42

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech. Math. 2009.
Is. 71. P. 27–42

УДК 517.574

УЗАГАЛЬНЕНА ТЕОРЕМА ВЕЙЄРШТРАССА ДЛЯ δ-СУБГАРМОНІЙНИХ В $\mathbb{C}$ ФУНКЦІЙ

Оксана БРОДЯК[1], **Ярослав ВАСИЛЬКІВ**[2]

[1] *Національний університет "Львівська політехніка", 79013, Львів, вул. Степана Бандери, 12*
[2] *Львівський національний університет імені Івана Франка, 79000, Львів, вул. Університетська, 1*
e-mail: yavvasylkiv@gmail.com

Запропоновано універсальний спосіб побудови канонічних інтегралів Вейєрштрасса з найкращими оцінками зверху на зростання їхньої неванліннової характеристики. Такі оцінки природно виникають в точних оцінках зверху модулів коефіцієнтів Фур'є $c_k(r;\mu,\alpha)$, $r>0$, $k\in\mathbb{Z}$, пари (μ,α), де μ – довільний борелевий заряд (тобто дійснозначна міра) в $\mathbb{C}$ такий, що $\mathbb{D}:=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}\cap\operatorname{supp}\mu=\emptyset$, а α – деяка послідовність комплексних чисел (а саме послідовність коефіцієнтів розвинення в степеневий ряд в $\mathbb{D}$ канонічного інтеграла Вейєрштрасса, побудованого за зарядом μ).

Ключові слова: δ-субгармонійна функція, канонічний інтеграл Вейєрштрасса, найкращі мажоранти зростання, метод рядів Фур'є, коефіцієнти Фур'є.

1. Вступ. Основна теорема алгебри дає підстави записати довільний поліном $P(z)$ степеня (порядку) n у вигляді

$$P(z)=C\,z^m\prod_{j=m+1}^{n}\left(1-\frac{z}{a_j}\right),$$

де a_j – нулі $P(z)$, відмінні від $z=0$. Цю теорему поширено на цілі функції. Оскільки цілі функції в загальному випадку мають нескінченну кількість нулів, то скінченний добуток замінюється на нескінченний, до якого треба приєднати певні множники, щоб забезпечити його збіжність. Без втрати загальності вважатимемо, що $a_j\neq 0$ (бо замість цілої функції f можна розглянути функцію $f(z)z^{-m}$, де m – порядок нуля f в точці $z=0$).

Отже, нехай $\mathcal{Z} = \{a_j\}_{j=1}^{+\infty}$ – послідовність комплексних чисел така, що $0 < |a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \ldots$ і $\lim\limits_{j\to+\infty} |a_j| = +\infty$. Класична теорема Вейєрштрасса [1] стверджує, що існує ціла функція $\Pi(z)$, нулями якої є числа a_j (з врахуванням їхньої кратності) і така функція має вигляд

$$\Pi(z) = \prod_{j=1}^{+\infty} E\left(\frac{z}{a_j}, p_j\right), \tag{1}$$

де $E(s,0) = 1-s,\ E(s,p) = (1-s)\exp\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} s^k\right)$, – первісні множники Вейєрштрасса роду $p \in \mathbb{Z}_+$, а $\{p_j\}_{j=1}^{+\infty}$ – деяка послідовність невід'ємних чисел, яка забезпечує збіжність нескінченного добутку.

Добре відомо (див. [2]), що вибір $p_j = j$, або $p_j = [\log j]$, або $p_j = [\alpha \log j / \log |a_j|]$, де $\alpha > 1$, гарантує збіжність нескінченного добутку (1). Тут і надалі вираз $[x]$ означатиме цілу частину числа x.

У 1897 р. Е. Борель [3] з'ясував, що за умови $\sigma < +\infty$, де $\sigma := \limsup\limits_{r\to+\infty} \frac{\log n(r;\mathcal{Z})}{\log r}$, $n(r;\mathcal{Z}) = \max\{j : |a_j| \leqslant r\}$ – лічильна функція точок послідовності $\mathcal{Z}$, рід p канонічного добутку (1) можна вибрати таким, що дорівнює $p = p_j := [\sigma],\ \forall j \in \mathbb{N}$.

Задачі оцінки зростання характеристик

$$\log M(r,\Pi) := \max_{|z|=r} \log |\Pi(z)|, \quad T(r,\Pi) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |\Pi(re^{i\theta})| d\theta,$$

де $\log^+ x = \log\max\{1, x\}$, канонічних добутків Вейєрштрасса (1) в термінах лічильних функцій $n(r;\mathcal{Z})$ чи $N(r;\mathcal{Z}) := \int_0^r n(t;\mathcal{Z}) t^{-1} dt$, або їхніх мажорант $\nu(r)$, є класичними. Їхньому розв'язанню присвячена значна кількість праць, включно з класичними роботами Е. Бореля, Д. Пойя, Г. Валірона, Д. Адамара, П. Бутру, Е. Майлета, А. Крафта, О. Блюменталя, А. Данжуа (див. короткий огляд в [2], а також монографії [4, 5]). Тут ми звернемо увагу лише на новіші праці [6]-[15], в яких, на наш погляд, отримано оптимальні результати. Аналіз цих робіт свідчить про те, що зазначені вище оцінки зовні певних виняткових множин, або й для всіх $r > 0$, здебільшого (за винятком [12, 13, 15], де застосовано метод рядів Фур'є) здобувають за подібними схемами, вибираючи належну послідовність $\{p_j\}_{j=1}^{+\infty}$ в (1) у випадку $\sigma = +\infty$. Проте питання найкращого вибору послідовності $\{p_j\}_{j=1}^{+\infty}$ до цього часу залишається відкритим. Якщо ж $\sigma < +\infty$, то ця задача повністю розв'язана в працях [3, 16, 17, 13, 15].

Добре відомо, що функція $\log |\Pi|$ належить до більш широкого класу – класу субгармонійних в $\mathbb{C}$ функцій, гармонійних в деякому околі точки $z = 0$ (див., наприклад, [18]). У класах субгармонійних на площині функцій аналогом канонічних добутків Вейєрштрасса $\Pi(z)$ з $1 \leqslant |a_j|$, $j \in \mathbb{N}$, є канонічні інтеграли Вейєрштрасса (див. [18, с. 159])

$$u(z) = \int_{|a|\geqslant 1} K_{p(|a|)-1}(z,a)\, d\mu(a), \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{1'}$$

де

$$K_p(z,a) = \log\left|1-\frac{z}{a}\right| + \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{a}\right)^k\right)$$

при $p \in \mathbb{N}$ і $K_0(z,a) = \log\left|1-\dfrac{z}{a}\right|$ – канонічні ядра Вейєрштрасса роду $p \in \mathbb{Z}_+$; $p(t)$ – довільна неспадна, додатна, цілочисельна функція, для якої інтеграл $\int_1^{+\infty}\left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)} d\,n(t;\mu)$ скінченний для довільного $r>0$; μ – довільна додатна борелева міра в $\mathbb{C}$, $\operatorname{supp}\mu \cap \mathbb{D} = \emptyset$; $n(t;\mu) = \mu(\{z\in\mathbb{C} : |z| \leqslant t\})$; $\operatorname{supp}\mu$ – носій міри μ.

Зрозуміло, що вищезгадані задачі також розглядали й для канонічних інтегралів Вейєрштрасса ($1'$) (див., наприклад, [18, 19]). З недавніх результатів зазначимо праці [20]-[22], де на основі методу рядів Фур'є доведено загальні аналоги класичної теореми Вейєрштрасса в так званих класах субгармонійних на площині функцій скінченного λ-типу чи скінченного (λ,ε)-типу, тобто класів субгармонійних в $\mathbb{C}$ функцій w, гармонійних у деякому околі початку координат таких, що відповідно виконуються нерівності

$$w(z) \leqslant A\lambda(B|z|) \quad \text{чи} \quad w(z) \leqslant a(\varepsilon(|z|))^{-\alpha}\lambda(|z|+\beta\varepsilon(|z|)|z|)$$

при деяких додатних сталих A, B, a, α, β. Тут $\lambda(r)$ – невід'ємна, зростаюча до $+\infty$, неперервна на $[0,+\infty)$ функція, $\lambda(0)=0$, а $\varepsilon(r)$ – незростаюча на $[0,+\infty)$ функція така, що $\varepsilon(0)=1$ і при деякому $\eta>1$ для всіх достатньо великих $r>0$ виконується нерівність $\varepsilon(r+\varepsilon(r)) \geqslant (\varepsilon(r))^\eta$. Зокрема, в [20] з'ясовано, що довільна невід'ємна борелева міра μ в $\mathbb{C}$, $0 \notin \operatorname{supp}\mu$, є мірою Ріса субгармонійної на площині функції w (тобто $\mu_w = \mu$, де $\mu_w = (2\pi)^{-1}\Delta\, w$, Δ – оператор Лапласа в $\mathbb{C}$, а рівність розуміють у сенсі узагальнених функцій [18]) скінченного λ-типу при

$$\lambda(r) = \int_1^{+\infty}\left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)} d\,n(t;\mu),$$

де $p(t)$ – деяка неспадна, невід'ємна функція така, що інтеграл скінченний для довільної міри μ. Такі функції $p(t)$ існують для довільної міри μ. Наприклад, $p(t) = n(t;\mu)$ або $p(t) = \log(n(t;\mu)+1)$. Зауважимо, що з огляду на теорему Вейєрштрасса про зображення (див. [18, с. 159]), згаданий вище результат дає, зокрема, оцінку зверху на зростання канонічного інтеграла Вейєрштрасса ($1'$). Крім того, в [21] показано, що довільна борелева міра $\mu \geqslant 0$ в $\mathbb{C}$, $0 \notin \operatorname{supp}\mu$, є мірою Ріса деякої субгармонійної функції скінченного (λ,ε)-типу при

$$\lambda(r) = \int_0^{r}\left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)-1} d\,n(t;\mu) + \int_r^{+\infty}\left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)} d\,n(t;\mu).$$

Тут $p(t)$ – неспадна, додатна, цілочисельна функція така, що другий інтеграл в останньому співвідношенні скінченний для довільного $r>0$.

Мета нашої праці – на підставі методики, розробленої в [15, 20, 21, 22], запропонувати універсальний спосіб побудови канонічних інтегралів Вейєрштрасса, які відповідають довільному борелевому заряду μ в $\mathbb{C}$, $\{z\in\mathbb{C} : |z|<1\} \cap \operatorname{supp}\mu = \emptyset$, з апріорі найкращими мажорантами на зростання їхньої неванліннової характеристики. Такі апріорні мажоранти знаходимо, оцінюючи зверху модулі коефіцієнтів Фур'є $\{c_k(r;\mu,\alpha),\ r>0,\ k\in\mathbb{Z}\}$ пари (μ,α) (див. означення 1 та зауваження 1). Крім того, як застосування запропонованого нами підходу подамо δ-субгармонійні версії двох результатів з праць [7, 9], в яких зовні певних виняткових множин зрайдено точні оцінки зверху на зростання функцій $w=\log|\Pi|$, де Π – канонічний добуток Вейєрштрасса (1).

2. Формулювання результатів. Нехай $\mu=\mu^+-\mu^-$ – дійснозначна борелева міра (тобто заряд) в $\mathbb{C}$, $|\mu|=\mu^+ + \mu^-$ – повна варіація μ. Тут μ^+ та μ^- – додатна та від'ємна варіації μ відповідно. Скрізь надалі припускатимемо, що $\mathbb{D}:=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\}\bigcap \operatorname{supp}\mu=\emptyset$, де $\operatorname{supp}\mu$ – носій заряду μ. Клас таких зарядів позначатимемо через $\mathcal{M}$.

Означення 1. *Нехай $\mu\in\mathcal{M}$, $\alpha:=\{\alpha_k,\ k\in\mathbb{N}\}$ – деяка послідовність комплексних чисел. Послідовність $\{c_k(r;\mu,\alpha),\ k\in\mathbb{Z}\}$, де*

$$c_0(r;\mu,\alpha)=\int\limits_{|a|\leqslant r}\log\frac{r}{|a|}d\,\mu(a):=N(r;\mu);$$

$$c_k(r;\mu,\alpha)=\frac{1}{2}\alpha_k\,r^k+\frac{1}{2k}\int\limits_{|a|\leqslant r}\left(\left(\frac{r}{a}\right)^k-\left(\frac{\overline{a}}{r}\right)^k\right)d\,\mu(a);$$

$$c_{-k}(r;\mu,\alpha)=\overline{c}_k(r;\mu,\alpha),\quad k\in\mathbb{N},\quad 0<r<+\infty;$$

називається ***послідовністю коефіцієнтів Фур'є пари*** (μ,α).

Нехай $n(r;|\mu|)=|\mu|(\overline{\mathbb{D}}_r)$ – повна маса заряду замкненого круга $\overline{\mathbb{D}}_r:=\{z\in\mathbb{C}: |z|\leqslant r,\ r>0\}$. Для довільної невід'ємної, неспадної, необмеженої функції $\nu(r)$, визначеної на $\mathbb{R}_+$ і $\nu(r)=0$ при $0\leqslant r<1$, через $\mathcal{M}(\nu)$ будемо позначати підклас $\mathcal{M}$ такий, що для довільного $\mu\in\mathcal{M}$ виконується нерівність $n(r;|\mu|)\leqslant\nu(r)$ для всіх $r>0$. Якщо ж, крім того, невід'ємна функція $\beta(r):=\nu(r)-n(r;|\mu|)$ не спадає, то такий підклас $\mathcal{M}(\nu)$ позначатимемо через $\mathcal{M}^*(\nu)$.

Довільній неспадній, невід'ємній, необмеженій функції $g(r)$, $g(r)=0$ при $0\leqslant r<1$, поставимо у відповідність функцію

$$\lambda(r;g,p_g):=\int\limits_0^r\left(\frac{r}{t}\right)^{p_g(t)-1}d\,g(t)+\int\limits_r^{+\infty}\left(\frac{r}{t}\right)^{p_g(t)}d\,g(t),\tag{2}$$

де $p_g(t)$ – неспадна, додатна, цілочисельна функція така, що другий інтеграл в (2) скінченний для довільного $r>0$. Такі функції $p_g(t)$ існують для довільних функцій зростання $g(t)$, наприклад, $p_g(t)=[g(t)]+1$, або $p_g(t)=[\log^+ g(t)]+2$, або $p_g(t)=[(1+\delta)\widehat{\rho}(t)]+1,\ \forall\,\delta>0$, де $\widehat{\rho}(t)=\sup\limits_{\tau\leqslant t}\log^+ g(\tau)/\log\tau$.

Нехай

$$\rho_g:=\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\log^+ g(r)}{\log r},\qquad 0\leq\rho_g\leqslant+\infty,$$

– порядок функції зростання $g(r)$. Якщо $0 \leqslant \rho_g < +\infty$, то у такому випадку приймемо $p_g(t) := [\rho_g] + 1$ і

$$\lambda(r; g, p_g) = r^{[\rho_g]} \int\limits_0^r \frac{d\,g(t)}{t^{[\rho_g]}} + r^{[\rho_g]+1} \int\limits_r^{+\infty} \frac{d\,g(t)}{t^{[\rho_g]+1}} =$$

$$= [\rho_g] r^{[\rho_g]} \int\limits_0^r \frac{g(t)}{t^{[\rho_g]+1}}\, d\,t + ([\rho_g]+1) r^{[\rho_g]+1} \int\limits_r^{+\infty} \frac{g(t)}{t^{[\rho_g]+2}}\, d\,t. \qquad (3)$$

Зауваження 1. Побудова коефіцієнтів Фур'є $c_k(r; \mu, \alpha)$ пари (μ, α), $\mu \in \mathcal{M}$, з

$$\alpha_k = -\frac{1}{k} \int\limits_{|a| \leqslant p^{-1}(k)} a^{-k} d\,\mu(a), \qquad k \in \mathbb{N},$$

$$p^{-1}(k) = \sup\{t : p(t) \leq k\}, \qquad \sup \varnothing = 0, \qquad k \in \mathbb{N},$$

рівносильна до побудови канонічного інтеграла Вейєрштрасса

$$w(z) = \int\limits_{|a| \geqslant 1} K_{p(|a|)-1}(z, a)\, d\,\mu(a), \qquad z \in \mathbb{C}, \qquad (4)$$

де $p(t) := p_n(t)$ – довільна неспадна, додатна, цілочисельна функція, для якої інтеграл $\int\limits_r^{+\infty} \left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)} d\,n(t; |\mu|)$ скінченний для довільного $r > 0$.

Справді, за теоремою Вейєрштрасса [18] функція $w(z)$, визначена співвідношенням (4), є δ-субгармонійною в $\mathbb{C}$. Далі, нехай $0 < |z| < 1 \leqslant |a|$. Тоді

$$K_{p(|a|)-1}(z, a) = \mathrm{Re}\Big(- \sum_{k \geqslant p(|a|)} \frac{1}{k} \Big(\frac{z}{a}\Big)^k \Big).$$

Отже,

$$\alpha_k = -\frac{1}{k} \int\limits_{|a| \leqslant p^{-1}(k)} a^{-k} d\,\mu(a), \qquad k \in \mathbb{N},$$

і, враховуючи результати [23] (див. також [24]), для такої w співвідношення $c_k(r, w) = c_k(r; \mu, \alpha)$ є правильними для всіх $k \in \mathbb{Z}$, $r > 0$, де

$$c_k(r, w) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{-ik\theta}\, w(re^{i\theta})\, d\,\theta, \qquad k \in \mathbb{Z}, \qquad 0 < r < +\infty.$$

Нехай (u, v) – канонічна декомпозиція δ-субгармонійної функції w [25, 23], тобто $w = u - v$ на множині $E \subset \mathbb{C}$, де u і v не дорівнюють водночас $-\infty$ і $\mu_u = \mu_w^+$, $\mu_v = \mu_w^-$. Тут $\mu_w = \dfrac{1}{2\pi} \Delta\, w$, де Δ – оператор Лапласа в $\mathbb{C}$, а рівність розуміють у сенсі узагальнених функцій (тобто розподілів Л. Шварца). Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $\mathbb{D}\bigcap \operatorname{supp}\mu_w = \emptyset$ і $w(0) = u(0) = v(0) = 0$. Нехай також

$$T(r,w) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \max\{u(re^{i\theta}),\, v(re^{i\theta})\}\,d\,\theta, \qquad 0 < r < +\infty;$$

$$m_q(r,w) = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left|w(re^{i\theta})\right|^q d\,\theta\right)^{1/q}, \quad 1 \leqslant q < +\infty, \quad 0 < r < +\infty.$$

Зауваження 2. Маємо

$$m_2(r,w) \geq m_1(r,w) = 2T(r,w) - N(r;|\mu|), \qquad \forall\, r > 0.$$

Отже,

$$T(r,w) \leqslant \frac{1}{2}\,N(r;|\mu|) + \frac{1}{2}\,m_2(r,w), \qquad \forall\, r > 0. \tag{5}$$

Теорема 1. i) *Для довільного $\mu \in \mathcal{M}$ існує канонічний інтеграл Вейєрштрасса w (див. співвідношення (4)) такий, що його неванліннова характеристика $T(r,w)$ для всіх $r \geqslant 1$ задовольняє нерівність*

$$T(r,w) \leqslant N(r;|\mu|) + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\,\lambda(r;n,p_n), \tag{6}$$

де функція $\lambda(r;n,p_n)$ задана співвідношенням (2) при $g(r) = n(r;|\mu|)$ у випадку $\rho_n = +\infty$ і співвідношенням (3) при $g(r) = n(r;|\mu|)$ у випадку $\rho_n < +\infty$ відповідно.

ii) *Для довільного $\mu \in \mathcal{M}^*(\nu)$ існує канонічний інтеграл Вейєрштрасса w (див. співвідношення (4)) такий, що його неванліннова характеристика $T(r,w)$ для всіх $r \geqslant 1$ задовольняє нерівність*

$$T(r,w) \leq N(r;|\mu|) + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\,\lambda(r;\nu,p_\nu), \tag{7}$$

де функція $\lambda(r;\nu,p_\nu)$ задана співвідношенням (2) при $g(r) = \nu(r)$ у випадку $\rho_\nu = +\infty$ і співвідношенням (3) при $g(r) = \nu(r)$ у випадку $\rho_\nu < +\infty$ відповідно.

За допомогою теореми 1 виведемо теореми 2 та 3, які є δ-субгармонійними версіями двох результатів з праць [7] та [9] відповідно.

Нехай $\mu \in \mathcal{M}$. Приймемо в (2)

$$g(t) = n(t;|\mu|), \qquad p_g(t) = [2\psi(\log n(t;|\mu|))\log n(t;|\mu|)] + 1,$$

де

$$\psi(t) = \sup_{s\leqslant t}\phi(s)\sqrt{\int_s^{+\infty} d\,\tau/(\phi(\tau)\,\tau\,\log\tau)}$$

така, що $\int^{+\infty} d\,t/(\psi(t)\,t\,\log\,t) < +\infty$ і $\lim\limits_{t\to+\infty}\psi(t)/\phi(t) = 0$ для довільної додатної, неспадної функції $\phi(t)$, для якої $\int^{+\infty} d\,t/(\phi(t)\,t\,\log\,t) < +\infty$ (див. [7]). Тоді правильна така теорема.

Теорема 2. *Нехай $\phi(t)$ – додатна, неспадна функція така, що*

$$\int^{+\infty} \frac{dt}{\phi(t)\, t\, \log t} < +\infty.$$

Тоді для довільного $\mu \in \mathcal{M}$ такого, що

$$\liminf_{r\to+\infty} \frac{\log^+ n(r;|\mu|)}{\log r} > 0 \tag{8}$$

існує канонічний інтеграл Вейєрштрасса w (див. співвідношення (4)) такий, що $\mu_w = \mu$ і

$$\log T(r,w) = o((\log n(r;|\mu|))^2 \phi(\log n(r;|\mu|))), \qquad r \to +\infty, \tag{9}$$

зовні множини $\mathcal{E} \subset [1,+\infty)$ такої, що $\int_{\mathcal{E}} d\log t < +\infty$.

Нехай $\mu \in \mathcal{M}$. Приймемо в (2) $g(t) = n(t;|\mu|)$, $p_g(t) = [n(t;|\mu|)] + 1$. Тоді правильна така теорема.

Теорема 3. *Для довільного $\mu \in \mathcal{M}$ існує канонічний інтеграл Вейєрштрасса w (див. співвідношення (4)) такий, що $\mu_w = \mu$ і*

$$T(r,w) \leqslant A\exp(B\, N(r;|\mu|)), \qquad r \notin E, \tag{10}$$

де A, $B > 0$, а $E \subset [1,+\infty)$ – деяка множина така, що $\int_E dt < +\infty$.

3. Допоміжні результати і доведення теорем 1–3. Для доведення теореми 1 будемо використовувати таку лему.

Лема 1. i) *Для довільного $\mu \in \mathcal{M}$ існує послідовність α комплексних чисел така, що для всіх $|k| \in \mathbb{N}$, $r > 0$ виконується*

$$|c_k(r;\mu,\alpha)| \le \frac{\lambda(r;n,p_n)}{|k|}. \tag{11}$$

ii) *Для довільного $\mu \in \mathcal{M}^*(\nu)$ існує послідовність $\widetilde{\alpha}$ комплексних чисел така, що для всіх $|k| \in \mathbb{N}$, $r > 0$ виконується*

$$|c_k(r;\mu,\widetilde{\alpha})| \le \frac{\lambda(r;\nu,p_\nu)}{|k|}. \tag{12}$$

Доведення. Нехай $\mu \in \mathcal{M}$ і нехай $p(t) := p_n(t)$ – довільна неспадна, додатна, цілочисельна функція, для якої інтеграл $\int_r^{+\infty} \left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)} d\,n(t;|\mu|)$ скінченний для довільного $r > 0$. Якщо $\rho_n < +\infty$, то інтеграл $\int_r^{+\infty} n(t;|\mu|)t^{-[\rho_n]-2}\,dt < +\infty$ для всіх $r > 0$.

Для $k \in \mathbb{N}$ приймемо

$$p^{-1}(k) = \sup\{t : p(t) \le k\}, \qquad \sup\varnothing = 0.$$

Зауважимо, що у випадку $\rho_n < +\infty$ маємо $p^{-1}(k) = +\infty$ для всіх $k \ge [\rho_n] + 1$.

Нехай

$$\alpha_k = -\frac{1}{k} \int\limits_{|a|\le p^{-1}(k)} a^{-k}\, d\,\mu(a), \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

У випадку $\rho_n < +\infty$

$$\alpha_k = -\frac{1}{k}\int\limits_{a\in\mathbb{C}} a^{-k}\,d\,\mu(a), \qquad \forall\, k \ge [\rho_n]+1. \tag{14}$$

Тоді для $k \in \mathbb{N}$ з огляду на співвідношення (13) отримаємо

$$\alpha_k + \frac{1}{k}\int\limits_{|a|\le r} a^{-k}\,d\,\mu(a) = \begin{cases} \dfrac{1}{k}\displaystyle\int\limits_{p^{-1}(k)<|a|\le r} a^{-k}\,d\,\mu(a), & r > p^{-1}(k); \\ -\dfrac{1}{k}\displaystyle\int\limits_{r<|a|\le p^{-1}(k)} a^{-k}\,d\,\mu(a), & r < p^{-1}(k); \end{cases}$$

а, у випадку $\rho_n < +\infty$, з огляду на співвідношення (14), для довільного $k \ge [\rho_n]+1$ виконується

$$\alpha_k + \frac{1}{k}\int\limits_{|a|\le r} a^{-k}\,d\,\mu(a) = -\frac{1}{k}\int\limits_{|a|>r} a^{-k}\,d\,\mu(a).$$

Отже, для $k \in \mathbb{N}$ правильна оцінка

$$\left|\alpha_k + \frac{1}{k}\int\limits_{|a|\le r} a^{-k}\,d\,\mu(a)\right| \le \begin{cases} \dfrac{1}{k}\displaystyle\int\limits_{p^{-1}(k)<|a|\le r} |a|^{-k}\,d\,|\mu|(a), \ r > p^{-1}(k); & (15.1) \\ \dfrac{1}{k}\displaystyle\int\limits_{r<|a|\le p^{-1}(k)} |a|^{-k}\,d\,|\mu|(a), \ r < p^{-1}(k); & (15.2) \end{cases}$$

і, у випадку $\rho_n < +\infty$, для довільного $k \ge [\rho_n]+1$

$$\left|\alpha_k + \frac{1}{k}\int\limits_{|a|\le r} a^{-k}\,d\,\mu(a)\right| \le \frac{1}{k}\int\limits_{|a|>r} |a|^{-k}\,d\,|\mu|(a). \tag{16}$$

У нерівності (15.1) $p^{-1}(k) < |a|$. Звідси, за означенням $p^{-1}(k)$, маємо $k < p(|a|)$ і, завдяки цілочисельності функції $p(t)$, одержимо $k \le p(|a|)-1$. Отже,

$$\int\limits_{p^{-1}(k)<|a|\leqslant r} \left(\frac{r}{|a|}\right)^k d|\mu|(a) \leqslant \int\limits_{p^{-1}(k)}^{r} \left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)-1} dn(t;|\mu|) \leqslant \int\limits_0^r \left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)-1} dn(t;|\mu|). \tag{17}$$

В нерівності (15.2) маємо $|a| \le p^{-1}(k)$. Тому $p(|a|) \le k$. Отож,

$$\int\limits_r^{p^{-1}(k)} \left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)} d\,n(t;|\mu|) \leqslant \int\limits_r^{+\infty} \left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)} d\,n(t;|\mu|). \tag{18}$$

У випадку ж $\rho_n < +\infty$ з огляду на (16) для всіх $k \ge [\rho_n]+1$ відповідно виконується

$$r^k\left|\alpha_k + \frac{1}{k}\int\limits_{|a|\le r} a^{-k} d\,\mu(a)\right| \le \frac{1}{k}\int\limits_r^{+\infty} \left(\frac{r}{t}\right)^{[\rho_n]+1} d\,n(t;|\mu|). \tag{19}$$

Отож, у випадку $\rho_n = +\infty$, враховуючи співвідношення (15), (17), (18) та нерівність $n(r;|\mu|) \le \int\limits_0^r \left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)-1} d\,n(t;|\mu|)$, для довільного $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$|c_k(r;\mu,\alpha)| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\alpha_k r^k + \frac{1}{k}\int\limits_{|a|\leqslant r}\left(\left(\frac{r}{a}\right)^k - \left(\frac{\overline{a}}{r}\right)^k\right) d\,\mu(a)\right| \leqslant \frac{r^k}{2}\left|\alpha_k + \frac{1}{k}\int\limits_{|a|\le r} a^{-k} d\,\mu(a)\right| +$$

$$+\frac{1}{2k}\int\limits_{|a|\le r}\left(\frac{|a|}{r}\right)^k d\,|\mu|(a) \leqslant \frac{1}{2k}\left(\int\limits_0^r \left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)-1} d\,n(t;|\mu|) + \int\limits_r^{+\infty}\left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)} d\,n(t;|\mu|)\right) +$$

$$+\frac{n(r;|\mu|)}{2k} \le \frac{\lambda(r;n,p_n)}{k},$$

де функція $\lambda(r;n,p_n)$ визначається співвідношенням (2) при $g(r) = n(r;|\mu|)$.

У випадку ж $\rho_n < +\infty$, з огляду на співвідношення (15)–(19), відповідно одержуємо

$$|c_k(r;\mu,\alpha)| \le \frac{1}{k}\lambda(r;n,p_n), \quad \forall\, k = 1,2,...,[\rho_n];$$

$$|c_k(r;\mu,\alpha)| \le \frac{1}{k}\left(n(r;|\mu|) + \int\limits_r^{+\infty}\left(\frac{r}{t}\right)^{[\rho_n]+1} d\,n(t;|\mu|)\right) \leqslant \frac{1}{k}\lambda(r;n,p_n), \quad \forall\, k \ge [\rho_n]+1;$$

де функція $\lambda(r;n,p_n)$ визначається співвідношенням (3) при $g(r) = n(r;|\mu|)$.

Враховуючи, що $|c_{-k}(r;\mu,\alpha)| = |c_k(r;\mu,\alpha)|$ для довільних $k \in \mathbb{N}$ і $r > 0$, отримуємо співвідношення (11) для всіх $|k| \in \mathbb{N}$ і $r > 0$.

Нехай тепер $\mu \in \mathcal{M}^*(\nu)$ і нехай $p(t) = p_\nu(t)$ – довільна неспадна, додатна, цілочисельна функція, для якої інтеграл $\int\limits_r^{+\infty}\left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)} d\,\nu(t)$ скінченний для довільного $r > 0$. Для $k \in \mathbb{N}$ приймемо

$$p^{-1}(k) = \sup\{t : p(t) \le k\}, \qquad \sup\varnothing = 0.$$

Якщо $\rho_\nu < +\infty$, так само як й у випадку $\mu \in \mathcal{M}$, отримаємо $p^{-1}(k) = +\infty$ для всіх $k \ge [\rho_\nu]+1$.

Нехай

$$\widetilde{\alpha}_k = -\frac{1}{k}\int\limits_{|a|\le p^{-1}(k)} a^{-k} d\,\mu(a).$$

Як і у випадку $\mu \in \mathcal{M}$ пересвідчуємося, що для $k \in \mathbb{N}$ правильні нерівності

$$r^k\left|\widetilde{\alpha}_k + \frac{1}{k}\int\limits_{|a|\le r} a^{-k} d\,\mu(a)\right| \le \begin{cases} \dfrac{1}{k}\int\limits_{p^{-1}(k)}^{r}\left(\dfrac{r}{t}\right)^k d\,n(t;|\mu|), & r > p^{-1}(k); \\ \dfrac{1}{k}\int\limits_{r}^{p^{-1}(k)}\left(\dfrac{r}{t}\right)^k d\,n(t;|\mu|), & r < p^{-1}(k); \end{cases}$$

а при $\rho_\nu < +\infty$, для довільного $k \geq [\rho_n] + 1$

$$r^k \left| \widetilde{\alpha}_k + \frac{1}{k} \int\limits_{|a|\leq r} a^{-k} d\,\mu(a) \right| \leq \frac{1}{k} \int\limits_r^{+\infty} \left(\frac{r}{t}\right)^k d\,n(t; |\mu|).$$

Зауважимо, що включення $\mu \in \mathcal{M}^*(\nu)$ імплікує для довільних $0 < t_1 < t_2 < +\infty$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, співвідношення

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\frac{r}{t}\right)^k d\,n(t; |\mu|) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\frac{r}{t}\right)^k d\,\nu(t) - \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\frac{r}{t}\right)^k d\,\left(\nu(t) - n(t; |\mu|)\right) \leqslant \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\frac{r}{t}\right)^k d\,\nu(t),$$

бо за умовою $d\,(\nu(t) - n(t; |\mu|)) \geq 0$. Враховуючи це твердження, так само, як і у випадку $\mu \in \mathcal{M}$, отримуємо співвідношення (12), якщо $\rho_\nu = +\infty$.

Якщо ж $\rho_\nu < +\infty$, то твердження пункту ii) цієї леми виконується для довільної $\mu \in \mathcal{M}(\nu)$. Лему доведено.

□

Доведення теореми 1. Передусім нагадаємо (див. зауваження 1), що для канонічного інтеграла Вейєрштрасса w, визначеного співвідношенням (4), одуржуємо $c_k(r, w) = c_k(r; \mu_w, \alpha)$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$, $r > 0$, де послідовність $\alpha = \{\alpha_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ означена співвідношеннями (13) і (14) (останні правильні для всіх $k \geq [\rho_n] + 1$ у випадку $\rho_n < +\infty$).

З огляду на означення коефіцієнтів Фур'є $c_k(r; \mu_w, \alpha)$ пари (μ_w, α), рівність Парсеваля, нерівність Мінковського та співвідношення (5) і (11) знаходимо, що для всіх $r \geq 1$

$$T(r, w) \leq \frac{1}{2} N(r; |\mu|) + \frac{1}{2} \left(N^2(r; \mu) + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k(r; \mu_w, \alpha)|^2 \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq N(r; |\mu|) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \lambda(r; n, p_n) \leqslant N(r; |\mu|) + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\, \lambda(r; n, p_n).$$

Твердження пункту ii) доводиться так само. Теорему 1 доведено.

Зауваження 3. У випадку $w = \log |f|$, f – ціла в $\mathbb{C}$ функція і $g(t) = n(t; \mathcal{Z})$, $\rho_n < +\infty$, або $g(t) = \nu(t)$, $\rho_\nu < +\infty$, функції зростання, задані сіввідношеннями (3), є так званими мінімальними мажорантами зростання (див. [13, 15, 26]).

Доведення теореми 2. Проведемо доведення цієї теореми за схемою, близькою ідейно до запропонованої для випадку цілих функцій в [7]. Нехай $\mu \in \mathcal{M}$ і нехай функція $\lambda(r; g, p_g)$ задана співвідношенням (2) з $g(t) = n(t; |\mu|)$ і $p_g(t) = [2\psi(\log n(t; |\mu|)) \log n(t; |\mu|)] + 1$, де функція $\psi(t)$ така, що $\int\limits_{t_0}^{+\infty} d\,t/(\psi(t)\, t\, \log t) < +\infty$, $t_0 > 1$ і

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\psi(t)}{\phi(t)} = 0. \tag{20}$$

Спочатку покажемо, що інтеграл $\int_r^{+\infty}(r/t)^{p(t)}d\,n(t;|\mu|)$ скінченний для довільного $r>0$. Приймемо $R = r\,\exp\left(1/\psi(\log n(r;|\mu|))\right)$. Тоді

$$\int\limits_r^{+\infty}\left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)}d\,n(t;|\mu|) = \int\limits_r^{R}\left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)}d\,n(t;|\mu|) + \int\limits_R^{+\infty}\left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)}d\,n(t;|\mu|). \tag{21}$$

Зауважимо, що

$$\int\limits_r^{R}\left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)}d\,n(t;|\mu|) \leqslant n(R;|\mu|) - n(r;|\mu|) \leqslant n(R;|\mu|). \tag{22}$$

Крім того, зауважимо, що

$$\log n(R;|\mu|) \leqslant (\log n(r;|\mu|))^2, \qquad r \notin \mathcal{E}. \tag{23}$$

Для цього достатньо застосувати теорему Бореля-Неванлінни з [27, с. 140] до функції $u(r) = \log n(e^r;|\mu|)$ з $\varphi(t) = 1/\psi(t)$ та вибрати $\varepsilon = 1$ (див. також [7]).

Далі

$$\int\limits_R^{+\infty}\left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)}d\,n(t;|\mu|) \leqslant \int\limits_R^{+\infty}\frac{d\,n(t;|\mu|)}{\exp\left(\frac{2\psi(\log n(t;|\mu|))\log n(t;|\mu|)}{\psi(\log n(r;|\mu|))}\right)} \leqslant \int\limits_r^{+\infty}\frac{d\,n(t;|\mu|)}{n^2(t;|\mu|)} \leqslant 1 \tag{24}$$

при $r>0$.

Враховуючи (21), (22) і (24), одержимо $\int_r^{+\infty}(r/t)^{p(t)}d\,n(t;|\mu|) < +\infty$ для всіх $r>0$. За теоремою 1 існує канонічний інтеграл Вейєрштрасса w (див. співвідношення (4)) такий, що $\mu_w = \mu$ і для всіх $r \geqslant 1$

$$\log T(r,w) = C(\log N(r;|\mu|) + \log\lambda(r;g,p_g)), \tag{25}$$

де C – деяка додатна стала.

Маємо

$$\log N(r;|\mu|) = \log\int\limits_1^{r}\frac{n(t;|\mu|)}{t}d\,t \leqslant \log n(r;|\mu|) + \log\log r.$$

Тоді з умови (8) негайно випливає, що

$$\log N(r;|\mu|) = o((\log n(r;|\mu|))^2), \qquad r \to +\infty. \tag{26}$$

Зрештою,

$$\int\limits_0^{r}\left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)-1}d\,n(t;|\mu|) = \int\limits_1^{r}\left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)-1}d\,n(t;|\mu|) \leqslant r^{p(r)-1}n(r;|\mu|).$$

Отже, враховуючи співвідношення (20) та умову (8), при $r \to +\infty$ одержуємо

$$\log\int\limits_0^{r}\left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)-1}d\,n(t;|\mu|) \leqslant \log n(r;|\mu|) + 2\psi(\log n(r;|\mu|))\log n(r;|\mu|)\log r \leqslant$$

$$\leqslant (2+o(1))\psi(\log n(r;|\mu|))\log n(r;|\mu|)\log r = o((\log n(r;|\mu|))^2\phi(\log n(r;|\mu|))). \tag{27}$$

Отож, зі співвідношень (21)–(27) випливає асимптотична рівність (9). Теорему 2 доведено.

Зауваження 4. *Частковий випадок теореми 2, коли* $w = \log|f|$, *де* f *– ціла в* $\mathbb{C}$ *функція, розглянуто в працях* [6, 7, 8]. *Зокрема, (див. теореми 1 і 2 та зауваження до теореми 2) в* [7] *з'ясовано, що асимптотичне співвідношення типу (9) зовні виняткової множини* $\mathcal{E}$ *скінченної логарифмічної міри є найкращим із можливих у випадку, коли* $w = \log|f|$, f *– ціла в* $\mathbb{C}$ *функція з заданою послідовністю нулів* $\mathcal{Z}$, *лічильна функція* $n(r;\mathcal{Z})$ *яких задовольняє умову (8).*

Доведення теореми 3. Для доведення цієї теореми використаємо методику, подібну до застосованої при доведенні твердження 4 з [9].

Приймемо $R = r + 1/N(r;|\mu|)$. Для $r\,N(r;|\mu|) > 1$ маємо

$$\log\left(1+\frac{1}{r\,N(r;|\mu|)}\right) \geqslant \frac{1}{2r\,N(r;|\mu|)},$$

звідки

$$N(R;|\mu|) \geqslant \int\limits_r^R \frac{n(t;|\mu|)}{t}d\,t \geqslant n(r;|\mu|)\log\left(1+\frac{1}{r\,N(r;|\mu|)}\right) \geqslant \frac{n(r;|\mu|)}{2r\,N(r;|\mu|)}.$$

Отже,

$$n(r;|\mu|) \leqslant 2\,r\,N(r;|\mu|)\,N(R;|\mu|),$$

$$n(R;|\mu|) \leqslant 2\,R\,N(R;|\mu|)\,N(R+1/N(r;|\mu|);|\mu|).$$

За теоремою Бореля-Неванлінни [5, с. 120]

$$n(r;|\mu|) \le A_1\,r\,N^2(r;|\mu|), \qquad r \notin E, \tag{28}$$

$$n(R;|\mu|) \le A_2\,r\,N^2(r;|\mu|), \qquad r \notin E, \tag{29}$$

де E – деяка множина скінченної міри, а A_1, A_2 – деякі додатні сталі.

Нехай функція $\lambda(r;g,p_g)$ задана співвідношенням (2) з $g(t) = n(t;|\mu|)$ і $p_g(t) = [n(t;|\mu|)] + 1$.

Враховуючи нерівність $N(r;|\mu|) \geqslant \int_t^r n(t;|\mu|)t^{-1}d\,t \geqslant n(t;|\mu|)\log(r/t)$ та співвідношення (28), при $r \notin E$ знаходимо

$$\int\limits_0^r \left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)-1} d\,n(t;|\mu|) = \int\limits_1^r \left(\frac{r}{t}\right)^{[n(t;|\mu|)]} d\,n(t;|\mu|) \le \int\limits_1^r \exp\left(n(t;|\mu|)\log\frac{r}{t}\right) d\,n(t;|\mu|) \leqslant$$

$$\leqslant n(r;|\mu|)\exp(N(r;|\mu|)) \leqslant 2A_1 r N^2(r;|\mu|)\exp(N(r;|\mu|)) \le \exp(B_1 N(r;|\mu|)), \tag{30}$$

де E – множина скінченної міри, а B_1 – деяка додатна стала.

Далі маємо

$$\int\limits_r^{+\infty} \left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)} d\,n(t;|\mu|) = \int\limits_r^R \left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)} d\,n(t;|\mu|) + \int\limits_R^{+\infty} \left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)} d\,n(t;|\mu|). \tag{31}$$

З огляду на співвідношення (29) правильні такі нерівності:

$$\int\limits_{r}^{R}\left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)} d\,n(t;|\mu|) \leqslant n(R;|\mu|) \leqslant A_2 r N^2(r;|\mu|) \leqslant \exp(B_2 N(r;|\mu|)), \quad r \notin E. \tag{32}$$

Також маємо

$$\int\limits_{R}^{+\infty}\left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)} d\,n(t;|\mu|) \leqslant \int\limits_{R}^{+\infty} \frac{d\,n(t;|\mu|)}{\exp\left(\log\left(1+\frac{1}{r\,N(r;|\mu|)}\right) n(t;|\mu|)\right)} \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{+\infty} \exp\left(-\log\left(1+\frac{1}{r\,N(r;|\mu|)}\right) x\right) d\,x = \frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{r\,N(r;|\mu|)}\right)} \leqslant$$

$$\leqslant 2\,r\,N(r;|\mu|) \leqslant \exp(B_3\,N(r;|\mu|)), \qquad B_3 > 0. \tag{33}$$

Для завершення доведення теореми 3 треба врахувати твердження пункту i) теореми 1, співвідношення (30)–(33) та очевидну нерівність

$$N(r;|\mu|) \leqslant \exp(N(r;|\mu|)).$$

Зауваження 5. *В* [9] *показано, що для канонічного добутку Вейєрштрасса (1) з нулями* $\mathcal{Z} = \{a_j\}$, $1 \leqslant |a_j|$, *і* $p_j = n(|a_j|;\mathcal{Z})$ *існують сталі* A, $B > 0$ *та множина* E *скінченної міри такі, що*

$$T(r,\Pi) \leqslant A\,\exp(B\,N(r;\mathcal{Z})), \qquad 0 < r \notin E. \tag{34}$$

Як зазначено в [2], *оцінка (34) зовні виняткової множини* E *скінченної міри для деяких сталих* A *і* B *є найкращою з можливих у такому розумінні: величину* $A\exp(B\,N(r;\mathcal{Z}))$ *не можна замінити на* $\exp(\Phi(N(r;\mathcal{Z})))$ *для жодної фіксованої функції* $\Phi(t)$ *такої, що* $\lim\limits_{t\to+\infty} \Phi(t)/t = 0$.

4. Висновки. На підставі методу рядів Фур'є для субгармонійних на площині функцій, розробленого в працях [21, 22, 23, 24], запропоновано універсальний спосіб побудови канонічних інтегралів Вейєрштрасса для δ-субгармонійних в $\mathbb{C}$ функцій з апріорі найкращими з можливих мажорантами на зростання неванліннових характеристик таких функцій. Такі апріорні мажоранти зростання природно виникають у точних оцінках зверху модулів коефіцієнтів Фур'є канонічних інтегралів Вейєрштрасса, побудованих за довільним борелевим в $\mathbb{C}$ зарядом $\mu \in \mathcal{M}$ (або $\mu \in \mathcal{M}^*(\nu) \subset \mathcal{M}(\nu) \subset \mathcal{M}$). Як застосування наведено δ-субгармонійні аналоги двох точних результатів з [7, 9], які стосуються випадку цілих в $\mathbb{C}$ функцій. Отримані результати надалі можна використовувати для розв'язання проблеми відшукання так званих мінімальних мажорант зростання (див. [6, 13, 15, 22]) для цілих і субгармонійних в $\mathbb{C}$ функцій та тісно пов'язаною із цією проблемою задачею (див. [6, 13, 22]) про канонічне зображення мероморфних функцій часткою цілих функцій (відповідно – канонічною декомпозицією δ-субгармонійних функцій різницею субгармонійних функцій). Згадані вище проблеми плануємо розглянути в наступних працях.

1. *Weierstraß K.* Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen / *Weierstraß K.* // Math.–phys. Abh. Königl. Preuss. Akad. Wiss., Berlin. – 1876. – P. 11-60.
2. *Bergweiler W.* Canonical products of infinite order / *Bergweiler W.* // J. reine angew. Math. – 1992. – Vol. 430. – P. 85-107.
3. *Borel É.* Sur les zéros des fonctions entiéres / *Borel É.* // Acta Math. – 1897. – Vol. 20. – P. 357-396.
4. *Хейман У.К.* Мероморфные функции / *Хейман У.К.* – М.: Мир, 1966.
5. *Гольдберг А.А.* Распределение значений мероморфных функций / *Гольдберг А.А., Островский И.В.* – М.: Наука, 1970.
6. *Гольдберг А.А.* О представлении мероморфной функции в виде частного целых функций / *Гольдберг А.А.* // Изв. Высш. Учебн. Завед., Математика. – 1972. – Т. 10. – С. 13-17.
7. *Bergweiler W.* A question of Gol'dberg concerning entire functions with prescribed zeros / *Bergweiler W.* // J. d'Analyse Math. – 1994. – Vol. 63. – P. 121-129.
8. *Хирівський І.В.* Мінімальне зростання цілих функцій із заданою послідовністю нулів / *Хирівський І.В.* // Математичні Студії. – 1994. – Т. 4. – С. 49-51.
9. *Frank G.* Über die Nullstellen meromorpher Funktionen und deren Ableitungen / *Frank G., Hennekemper W., Pollaczek G.* // Math. Ann. – 1977. – Vol. 225. – P. 145-154.
10. *Winkler J.* Über minimale Maximalbeträge kanonischer Weierstrassprodukte unendlicher Ordnung / *Winkler J.* // Result. Math. – 1981. – Vol. 4:1. – P. 102-116.
11. *Jank G.* Abschätzungen eines Weierstrassproduktes und Anwendungen auf meromorphe Funktionen endlicher iterierter Ordnung / *Jank G., Volkman L.* // Complex Variables. – 1983. – Vol. 1. – P. 181-194.
12. *Васильків Я.В.* Про мажоранти зростання цілих функцій / *Васильків Я.В., Лизун О.Я.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2001. – Вип. 59. – С. 51-56.
13. *Kondratyuk A.A.* Growth majorants and quotient representations of meromorphic functions / *Kondratyuk A.A., Vasyl'kiv Ya.V.* // Comp. Meth. and Func. Theory. – 2001. – Vol. 1:2. – P. 595-606.
14. *Sheremeta M.M.* A remark to the construction of canonical products of minimal growth / *Sheremeta M.M.* // Mat. Fis. Anal. Geom. – 2004. – Vol. 11, №2. – P. 243-248.
15. *Бродяк О.Я.* Зростання та розподіл нулів цілих функцій скінченного λ-типу / *Бродяк О.Я.* Дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.01, Львів, 2007. – 115 с.
16. *Valiron G.* Sur les fonctions entieéres d'ordre fini et d'ordre nul, et en particulier les fonctions à correspondence réguliére / *Valiron G.* // Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse (3). – 1914. – Vol. 5. – P. 117-257.
17. *Valiron G.* Sur la distribution des valeurs des fonctions méromorphes / *Valiron G.* // Acta Math. – 1926. – Vol. 47. – P. 117-142.
18. *Хейман У.* Субгармонические функции / *Хейман У., Кеннеди П.* – М.: Мир, 1980.
19. *Hayman W.K.* Subharmonic functions. Vol. 2 / *Hayman W.K.* // London Mathematical Society Monographs, 20. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London, 1989.
20. *Васильків Я.В.* Некоторые свойства δ-субгармонических функций конечного λ-типа / *Васильків Я.В.* // В сб. "Материалы 9 Конф. мол. ученых Ин-та прикл. пробл. мех. и мат. АН УССР, Львов, 10–14 мая 1982 г., ч. 2". – 1982. – С. 16–22. – Деп. в ВИНИТИ 10.01.1984, №324–84.
21. *Процик Ю.С.* Субгармонійні функції скінченного (λ, ε)-типу / *Процик Ю.С.* // Математичні студії. – 2005. – Т. 24. – №1. – С. 39–56.

22. *Васильків Я.В.* Розвиток методів гармонійного аналізу дослідження асимптотичних властивостей мероморфних та субгармонійних функцій / *Васильків Я.В.* // Дис. ... докт. фіз.-мат. наук: 01.01.01, Львів, 2008. – 317 с.
23. *Noverraz P.* Fonctions plurisoushamoniques et analytiques dans les espaces vectoriels topologiques complexes / *Noverraz P.* // Ann. Inst. Fourier. – 1969. – Vol. 19:2. – P. 419-493.
24. *Васильків Я.В.* Исследование асимптотических свойств целых и субгармонических функций методом рядов Фурье / *Васильків Я.В.* // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01, Львов, 1986. – 129 с.
25. *Arsove M.G.* Function representable as differences of subharmonic functions / *Arsove M.G.* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1953. – Vol. 75. – P. 327-365.
26. *Васильків Я.В.* Співвідношення між величиною роду і порядками Пойя цілих функцій з асиметричним розподілом нулів / *Васильків Я.В., Бродяк О.Я.* // Математичні Студії. – 2009. – Т. 31, №1. – С. 56-64.
27. *Nevanlinna R.* Remarques sur les fonctions monotones / *Nevanlinna R.* // Bull. Sci. Math. – 1931. – Vol. 55. – P. 140-144.

GENERALIZED WEIERSTRASS THEOREM FOR A δ-SUBHARMONIC ON $\mathbb{C}$ FUNCTIONS

Oksana BRODYAK[1], **Yaroslav VASYL'KIV**[2]

[1]*L'viv Polytechnic National University,*
79013, L'viv, St. Bandera Str., 12
[2]*Ivan Franko National University of L'viv,*
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: yavvasylkiv@gmail.com

The universal construction method of canonical Weierstrass integrals with the best possible growth upper estimates of their Nevanlinna characteristic is proposed. Such estimates appear naturally into the strictly upper estimates of the modulus of Fourier coefficients $c_k(r;\mu,\alpha),\ r>0,\ k\in\mathbb{Z}$ of pair (μ,α), where μ is charge (real-valued measure) in $\mathbb{C}$ such, that $\mathbb{D}:=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}\cap$ $\cap\,\mathrm{supp}\,\mu=\emptyset$, and α is some sequence of complex numbers namely α is a sequence of development into the power series coefficients of the canonical Weierstrass integral in $\mathbb{D}$. Canonical Weierstrass integral is constructed by charge μ.

Key words: a δ-subharmonic function, canonical Weierstrass integral, a best possible growth majorant, Fourier series method, Fourier coefficients.

ОБОБЩЁННАЯ ТЕОРЕМА ВЕЙЕРШТРАССА ДЛЯ δ-СУБГАРМОНИЧЕСКИХ В $\mathbb{C}$ ФУНКЦИЙ

Оксана БРОДЯК[1], Ярослав ВАСЫЛЬКИВ[2]

[1] *Национальный университет "Львовская политехника", 79013, Львов, ул. Степана Бандеры, 12*
[2] *Львовский национальный университет имени Ивана Франко, 79000, Львов, ул. Университетская, 1*
e-mail: yavvasylkiv@gmail.com

Предложен универсальный метод построения канонических интегралов Вейерштрасса с лучшими оценками сверху на рост их неванлинновой характеристики. Такие оценки появляются в точных оценках сверху модулей коэффициентов Фурье $c_k(r;\mu,\alpha)$, $r > 0$, $k \in \mathbb{Z}$, в паре (μ,α), где μ – произвольный борелевый заряд (вещественная мера) в $\mathbb{C}$ такой, что $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \cap \operatorname{supp}\mu = \emptyset$, а α – некоторая последовательность комплексных чисел (а именно, последовательность коэффициентов разложения в степенной ряд в $\mathbb{D}$ канонического интеграла Вейерштрасса, построенного по заряду μ).

Ключевые слова: δ-субгармонические функции, канонический интеграл Вейерштрасса, наилучшие мажоранты роста, метод рядов Фурье, коэффициенты Фурье.

Стаття надійшла до редколегії 19.11.2009

Прийнята до друку 16.12.2009

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2009. *Ser. Mech. Math. 2009.*
Вип. 71. С. 43–49 *Is. 71. P. 43–49*

УДК 519.8, 336.761.6

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ ОПТИМІЗАЦІЇ ФОНДОВОГО ПОРТФЕЛЯ ОПЦІОНІВ

Микола БУГРІЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: ol_buhrii@i.ua

У рамках нечітко-множинної теорії запропоновано метод розв'язування задачі оптимізації фондового портфеля опціонів європейського стилю на акції.

Ключові слова: фондовий портфель, опціони.

1. Вступ. Звичайною інвестиційною практикою в розвинутих країнах є розміщення коштів на фондовому ринку, оскільки сьогодні це більш вигідно, ніж інвестування, наприклад, у нерухомість. Така тенденція притаманна і фондовому ринку України, який, певною мірою, вже сформувався і перебуває в стадії інтенсивного розвитку й удосконалення.

Відомо, що вкладання коштів в цінні папери достатньо ризикова фінансова операція. Формуючи портфель цінних паперів, можна практично звести до нуля його несистематичний ризик: якщо деякі типи компонент портфеля матимуть низьку дохідність, то інші типи можуть певною мірою компенсувати втрати інвестора. Чим більш диверсифікований фондовий портфель ризикових цінних паперів, тим менший його рівень несистематичного ризику. Оптимальну диверсифікацію портфеля можна провести, зокрема класичними методами Марковіца [1] або Шарпа [2].

Значно складніша задача зменшення систематичного ризику фондового портфеля, який породжується невизначеністю зовнішнього середовища. Цього ризику практично неможливо уникнути, однак зменшити його рівень можна шляхом хеджування (або форсування) компонент портфеля ризикових цінних паперів похідними цінними паперами (деривативами), зокрема опціонами. Такі фондові портфелі умовно називають розширеними. Стосовно таких портфелів можна формулювати задачу про оптимальний вибір не тільки часткового співвідношення його компонент, а й глибини хеджування (або форсування) кожної ризикової компоненти опціонами.

Зазвичай під час формування розширених фондових портфелів опціони комбінують з підлеглим активом, на який вони виписані. Однак сьогодні учасники фондового ринку з метою отримання додаткових прибутків все частіше використовують стратегію формування фондового портфеля, який містить лише опціони, виписані на активи, практично відсутні в портфелі. Такі портфелі іноді називають фондовими портфелями опціонів на "віртуальні" активи.

Фондові портфелі опціонів досить ризикові. Однак за сприятливої кон'юктури фондового ринку такі портфелі можуть приносити їхнім власникам прибутки, які значно перевищують початкові затрати. Цей відомий факт спонукає до формування та оптимізації фондових портфелів опціонів не тільки фізичних, а й спеціальних інституційних інвесторів, яких називають хедж-фондами.

Якщо дохідності компонент портфеля опціонів вважати випадковими величинами з відомими ймовірнісними розподілами, то щільність розподілу дохідності портфеля можна знайти, наприклад, відомим чисельним методом Монте-Карло. Проте цей метод передбачає громіздку обчислювальну процедуру – десятки тисяч операцій на одну точку межі ефективності портфеля. Для об'ємних фондових портфелів чисельне розв'язування задачі оптимізації займає невиправдано багато оперативного часу.

Одним з можливих варіантів виходу з цієї ситуації є модельна зміна способу врахування невизначеності під час формулювання задачі оптимізації: перехід від випадкових величин до нечітких величин у рамках нечітко-множинної теорії [3]. Зокрема, в [4] в рамках цієї теорії запропоновано чисельний метод розв'язування задачі про оптимізацію фондового портфеля опціонів на "віртуальні" акції. В основу цього методу покладено ітераційний вибір часткового співвідношення у фондовому портфелі опціонів європейського стилю на акції з наступним уточненням глибини покриття кожної акції опціонами.

У рамках нечітко-множинної теорії пропонуємо один з можливих варіантів зведення задачі про оптимізацію фондового портфеля опціонів європейського стилю на акції до еквівалентної задачі математичного програмування. Це дає змогу (в загальному випадку на підставі методу дефазифікації [5]) не тільки ефективно використовувати стандартні прикладні пакети для розв'язування таких задач оптимізації, а й дає змогу значно зменшити затрати оперативного часу на цю процедуру.

2. Формулювання нечіткої задачі оптимізації та схема її розв'язування. Нехай на підставі експертних даних відомо, що ринкова ціна n типів акцій, наявних на фондовому ринку, протягом деякого періоду T зазнає різких коливань, однак експерти не можуть впевнено визначити напрям цих коливань. У цьому випадку учасники фондового ринку мають змогу отримати додатковий прибуток, сформувавши фондовий портфель лише з опціонів європейського стилю з різними цінами виконання терміном дії T на ці n типів акцій. Така опціонна стратегія має назву "стренгл" (strangle) [6].

Отже, в зазначених умовах інвестор формує фондовий портфель, який складається лише з n наборів call-опціонів і n наборів put-опціонів європейського стилю терміном дій T на n типів "віртуальних" акцій.

Позначимо через x_i $(i = \overline{1, n})$ – відносну частку в портфелі call-опціону з i-го набору, який повністю форсує акцію i-го типу (call-опціон “покриває” кожну грошову одиницю вартості акції), а через x_i $(i = \overline{n+1, 2n})$ – відносну частку в портфелі put-опціону з i-го набору, який повністю хеджує акцію i-го типу (put-опціон “покриває” кожну грошову одиницю вартості акції). Всього фондовий портфель опціонів міститиме $2n$ компонент з відносними частками x_i $(i = \overline{1, 2n})$, причому

$$\sum_{i=1}^{2n} x_i = 1, \tag{1}$$

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1. \tag{2}$$

Нехай у момент формування фондового портфеля опціонів стосовно основних фінансових параметрів, які його характеризують, наявна така інформація.

1. Ринкова ціна акції i-го типу становить $S_{i,0}$ $(i = \overline{1, n})$.
2. На підставі експертних даних показано, що на момент часу T ринкова ціна акції i-го типу лежатиме в інтервалі $[S_{i,min}, S_{i,max}]$ $(i = \overline{1, n})$, тобто буде нечітким числом прямокутного вигляду [3].
3. Ринкова ціна call-опціону з i-го набору, який форсує акцію i-го типу на 100%, становить $C_{i,c}$ $(i = \overline{1, n})$.
4. Ціна виконання call-опціону з i-го набору, який форсує акцію i-го типу на 100%, становить $X_{i,c}$ $(i = \overline{1, n})$, причому $S_{i,min} < X_{i,c} < S_{i,max}$ $(i = \overline{1, n})$.
5. Ринкова ціна put-опціону з i-го набору, який хеджує акцію i-го типу на 100%, становить $C_{i,p}$ $(i = \overline{n+1, 2n})$.
6. Ціна виконання put-опціону з i-го набору, який хеджує акцію i-го типу на 100%, становить $X_{i,p}$ $(i = \overline{n+1, 2n})$, причому $S_{i-n,min} < X_{i,p} < S_{i-n,max}$ $(i = \overline{n+1, 2n})$.

На підставі цих експертних даних можна обчислити нечітку дохідність (інтервал дохідності) фондового портфеля опціонів, який розглядають у момент часу T.

Позначимо через r_i^c $(i = \overline{1, n})$ – фінальну дохідність call-опціону з i-го набору в момент часу T, r_i^p $(i = \overline{n+1, 2n})$ – фінальну дохідність put-опціону з i-го набору в момент часу T, $I_{i,c}, (i = \overline{1, n})$ – абсолютний прибуток в момент часу T від фінансової операції купівлі call-опціону європейського стилю з i-го набору за умови 100% форсування відповідної акції i-го типу, $I_{i,p}, (i = \overline{n+1, 2n})$ – абсолютний прибуток в момент часу T від фінансової операції купівлі put-опціону європейського стилю з i-го набору в момент часу T за умови 100% хеджування відповідної акції i-го типу.

Оскільки значення параметрів $I_{i,c}, (i = \overline{1, n})$, $I_{i,p}, (i = \overline{n+1, 2n})$, відповідно можна обчислити за формулами [6]

$$I_{i,c} = \max\{0, S_i - X_{i,c}\} - C_{i,c} = \begin{cases} S_i - X_{i,c} - C_{i,c}, & S_i > X_{i,p}, \\ -C_{i,c}, & S_i \leqslant X_{i,c}, \end{cases}$$

$$I_{i,p} = \max\{0, X_{i,p} - S_{i-n}\} - C_{i,p} = \begin{cases} X_{i,p} - S_{i-n} - C_{i,p}, & X_{i,p} > S_{i-n}, \\ -C_{i,p}, & X_{i,p} \leqslant S_{i-n}, \end{cases}$$

де S_i $(i = \overline{1,n})$ – ринкова ціна акції i-го типу в момент часу T, то дохідність call-опціону з i-го набору і put-опціону з i-го набору в момент часу T відповідно характеризується такими нечіткими числами r_i^c, r_i^p прямокутного вигляду (інтервалами):

$$r_i^c = [r_{i,min}^c, r_{i,max}^c] = \left[-\frac{1}{T},\ \frac{S_{i,max} - X_{i,c} - C_{i,c}}{T \cdot C_{i,c}}\right] \quad (i = \overline{1,n}), \tag{3}$$

$$r_i^p = [r_{i,min}^p, r_{i,max}^p] = \left[\frac{X_{i,p} - S_{i-n,min} - C_{i,p}}{T \cdot C_{i,p}}, -\frac{1}{T}\right] \quad (i = \overline{n+1,2n}). \tag{4}$$

Тепер на підставі (3), (4) знайдемо, що дохідність фондового портфеля опціонів в момент часу T характеризується нечітким числом r прямокутного вигляду

$$r = [r_{\min}, r_{max}] = \left[-\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=n+1}^{2n} x_i \frac{X_{i,p} - S_{i-n,min} - C_{i,p}}{T \cdot C_{i,p}},\right.$$
$$\left.\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{S_{i,max} - X_{i,c} - C_{i,c}}{T \cdot C_{i,c}} - \frac{1}{T}\sum_{i=n+1}^{2n} x_i\right]. \tag{5}$$

Формуючи фондовий портфель опціонів, інвестор найперше обов'язково фіксує нормативний параметр – нижню межу дохідності портфеля. У випадку, який розглядається, нижню межу дохідності портфеля задамо у вигляді нечіткого прямокутного числа

$$r^P = [r_{min}^P, r_{max}^P]. \tag{6}$$

Оскільки ступінь ризику інвестицій у портфель опціонів залежатиме від того, наскільки дохідність портфеля буде нижчою від нормативної, очевидно, що рівень ризику інвестицій у портфель опціонів з дохідністю (5) буде визначатися взаємним розміщенням інтервалів (5), (6). У цьому зв'язку ризик того, що дохідність фондового портфеля опціонів, який розглядається, буде нижчою (вищою) від нормативної, можна обчислити за такою формулою [7]:

$$R = \begin{cases} 0, & r_{max}^P \leqslant r_{min}, \\ \dfrac{(r_{max}^P - r_{min})^2}{2(r_{max}^P - r_{min}^P)(r_{max} - r_{min})}, & r_{min}^P < r_{min} < r_{max}^P \leqslant r_{max}, \\ \dfrac{r_{min}^P + r_{max}^P - 2r_{min}}{2(r_{max} - r_{min})}, & r_{min} \leqslant r_{min}^P < r_{max}^P \leqslant r_{max}, \\ \dfrac{2r_{max}^P - r_{min} - r_{max}}{2(r_{max}^P - r_{min}^P)}, & r_{min}^P \leqslant r_{min} < r_{max} \leqslant r_{max}^P, \\ 1 - \dfrac{(r_{max} - r_{min}^P)^2}{2(r_{max}^P - r_{min}^P)(r_{max} - r_{min})}, & r_{min} \leqslant r_{min}^P \leqslant r_{max} \leqslant r_{max}^P, \\ 1, & r_{max} \leqslant r_{min}^P. \end{cases} \tag{7}$$

За цільову функцію в задачі оптимізації фондового портфеля опціонів європейського стилю природно вибрати верхню межу його дохідності (5). Оптимізувати портфель в такому формулюванні означає максимізувати максимум його дохідності в момент часу T при заданому (фіксованому) значенні ризику $R = R_0$. У цьому зв'язку формалізований запис задачі оптимізації фондового портфеля опціонів європейського стилю виглядатиме так:

$$r_{max}(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{S_{i,max} - X_{i,c} - C_{i,c}}{T \cdot C_{i,c}} - \frac{1}{T} \sum_{i=n+1}^{2n} x_i \to \max, \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{2n} x_i = 1, \tag{9}$$

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1, \tag{10}$$

$$R(x_1, ..., x_{2n}, r_{min}^P, r_{max}^P) = R_0. \tag{11}$$

Для побудови розв'язку задачі (8)-(11) в загальному випадку потрібно врахувати те, що умова (11) має нестандартний ("гіллястий") вигляд : за відомої структури розширеного фондового портфеля притаманний йому рівень ризику обчислюється на підставі однієї з гілок формули (7) залежно від взаємного розміщення інтервалів дохідності (5), (6). Якщо ж структуру розширеного фондового портфеля знаходити шляхом розв'язування задачі оптимізації, то кожну з гілок формули (7) треба прийняти за обмеження на шуканий розв'язок. Тоді задача (8)-(11) в загальному випадку розбивається на шість задач математичного програмування, для кожної з яких умову (11) треба конкретизувати на підставі співвідношення (7).

Для теоретично безризикового портфеля опціонів ($R_0 = 0$) умову, яка еквівалентна (11), запишемо у вигляді

$$-\frac{1}{T} \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=n+1}^{2n} x_i \frac{X_{i,p} - S_{i-n,min} - C_{i,p}}{T \cdot C_{i,p}} \geqslant r_{max}^P. \tag{12}$$

Аналогічно, для портфеля опціонів з ризиком $R_0 = 1$ замість умови (11) потрібно розглянути умову

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{S_{i,max} - X_{i,c} - C_{i,c}}{T \cdot C_{i,c}} - \frac{1}{T} \sum_{i=n+1}^{2n} x_i \leqslant r_{min}^P. \tag{13}$$

Для визначення складових оптимального за дохідністю фондового портфеля опціонів у випадку, коли ризик портфеля $R_0 \in (0, 1)$, умову (11) в задачі оптимізації треба конкретизувати так.

Якщо $r_{min}^P < r_{min} < r_{max}^P \leqslant r_{max}$, то (11) потрібно замінити такими умовами:

$$(r_{max}^P - r_{min})^2 = 2R_0(r_{max}^P - r_{min}^P)(r_{max} - r_{min}),$$

$$r_{min} > r_{min}^P, \quad r_{min} < r_{max}^P, \quad r_{max} \geqslant r_{max}^P. \tag{14}$$

Коли $r_{min} \leqslant r_{min}^P < r_{max}^P \leqslant r_{max}$, то замість умови (11) необхідно розглянути такі умови:

$$r_{min}^P + r_{max}^P - 2r_{min} = 2R_0(r_{max} - r_{min}),$$

$$r_{min} \leqslant r_{min}^P, \quad r_{min}^P < r_{max}^P, \quad r_{max} \geqslant r_{max}^P. \tag{15}$$

У випадку

$$r_{min}^P \leqslant r_{min} < r_{max} \leqslant r_{max}^P$$

умова (11) еквівалентна умовам

$$2r^P_{max} - r_{min} - r_{max} = 2R_0(r^P_{max} - r^P_{min}),$$

$$r_{min} \geqslant r^P_{min}, \quad r_{min} < r_{max}, \quad r_{max} \leqslant r^P_{max}. \tag{16}$$

Якщо

$$r_{min} \leqslant r^P_{min} \leqslant r_{max} \leqslant r^P_{max},$$

то умову (11) треба замінити системою умов

$$(r_{max} - r^P_{min})^2 = 2(1 - R_0)(r^P_{max} - r^P_{min})(r_{max} - r_{min}),$$

$$r_{min} \leqslant r^P_{min}, \quad r_{max} \leqslant r^P_{max}, \quad r_{max} \geqslant r^P_{min}. \tag{17}$$

Зауважимо, що співвідношення (12)-(17) явно записують через невідомі частки x_i $(i = \overline{1,2n})$ відповідних компонент фондового портфеля опціонів, оскільки через ці параметри явно виражаються функції r_{min}, r_{max} з (5).

Отже, за заданих значень параметрів $S_{i,min}$, $S_{i,max}$, $C_{i,c}$, $X_{i,c}$, $(i = \overline{1,n})$, $C_{i,p}$, $X_{i,p}$ $(i = \overline{n+1,2n})$, r^P_{min}, r^P_{max}, T, R_0, складові x_i $(i = \overline{1,2n})$ фондового портфеля опціонів європейського стилю на акції повинні бути розв'язком однієї з задач (8), (9), (10), (12) - (8), (9), (10), (17) залежно від взаємного розміщення інтервалів (5), (6). Для побудови межі ефективності цього портфеля в системі координат "ризик недопустимо низької дохідності портфеля - максимум очікуваної дохідності портфеля", потрібно розв'язати відповідну задачу оптимізації, змінюючи параметр R_0 в межах $0 \leqslant R_0 \leqslant R_{0,max}$, де $R_{0,max}$ – ризик компоненти портфеля з найбільшою дохідністю.

3. Висновки. Заміна стандартного способу моделювання дохідності активів (як випадкових величин) нечіткими значеннями (інтервалами) дохідностей цих активів дала змогу сформулювати й описати схему розв'язування задачі оптимізації фондового портфеля опціонів європейського стилю на акції. Побудова розв'язку задачі оптимізації зводиться до розв'язування деякої задачі математичного програмування. Це допомагає не тільки побудувати межу ефективності портфеля в системі координат "ризик недопустимо низької дохідності портфеля - максимум очікуваної дохідності портфеля", але й значно зменшити затрати оперативного часу на розв'язування задачі оптимізації.

---

1. *Markovitz H.M.* Portfolio Selection / *Markovitz H.M.* // Journal of Finance. – 1952 (March). – Vol. 7. – P. 77-91.
2. *Sharpe W.F.* Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk / *Sharpe W.F.* // Journal of Finance. – 1964 (September). – Vol. 19. – P. 425-442.
3. *Заде Л.А.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенних решений / *Заде Л.А.* – М.: Мир, 1976.
4. *Недосекин А.О.* Оптимизация фондового портфеля, состоящего из одних опционов / *Недосекин А.О.* // Банки и Риски. – 2005. – №2. (http://www.sedok.narod.ru/s_files /2005/4.pdf)
5. *Сявавко М.* Математичне моделювання за умов невизначеності / *Сявавко М., Рибицька О.* – Львів: НВФ "Українські технології", 2000.
6. *Іващук Н.Л.* Ринок деривативів: економіко-математичне моделювання процесів ціноутворення / *Іващук Н.Л.* Львів: Вид-во Нац. ун-ту "Львівська політехніка", 2008.

7. *Недосекин А.О.* Оценка риска инвестиций для произвольно-размытых факторов инвестиционного проекта / *Недосекин А.О., Кокош А.М.* http://sedok.narod.ru/sc_group_2003.html

ABOUT SOME OPTIMIZATION'S PROBLEM OF THE EXTENDED PORTFOLIO

Mykola BUGRIY

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: ol_buhrii@i.ua

Using fuzzy-plural theory we find the method of solving of optimization's problems for the extended portfolio of the stocks. This stocks are hedging by the put-options of European style.

Key words: extended portfolio, option.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ФОНДОВОГО ПОРТФЕЛЯ ОПЦИОНОВ

Николай БУГРИЙ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: ol_buhrii@i.ua

В рамках теории нечетких множеств предлагается метод решения задачи оптимизации фондового портфеля опционов европейского стиля на акции.

Ключевые слова: фондовый портфель, опционы.

Стаття надійшла до редколегії 20.11.2009

Прийнята до друку 16.12.2009

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2009. *Ser. Mech. Math. 2009.*
Вип. 71. С. 50–61 *Is. 71. P. 50–61*

УДК 539.4

ВИКОРИСТАННЯ ПРЯМОГО МЕТОДУ ВИРІЗУВАННЯ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ ПОЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ ПІВПРОСТОРУ З ДОВІЛЬНО ОРІЄНТОВАНОЮ СТРІЧКОВОЮ НЕОДНОРІДНІСТЮ

Кирил ВАСІЛЬЄВ[1], **Георгій СУЛИМ**[2]

[1]*Інститут прикладних проблем механіки і математики*
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
79060, Львів, вул. Наукова, 3б
e-mail: kirill.all@gmail.com
[2]*Львівський національний університет імені Івана Франка,*
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail:sulym@franko.lviv.ua

Проаналізовано застосування прямого методу вирізування до задачі півпростору з орієнтованою під кутом стрічковою неоднорідністю. Показано, що орієнтація включення суттєво впливає на довжину моделюючих елементів. Наведено аналіз коефіцієнтів інтенсивності напружень неоднорідності для різних крайових умов і навантаження включення. Запропоновано також методи моделювання за допомогою прямого методу вирізування півпростору з навантаженням на нескінченності.

Ключові слова: метод вирізування, КІН, півпростір, стрічкове включення, антиплоска деформація.

1. Вступ. Одним із доволі поширених методів розв'язування двовимірних задач теорії пружності є метод інтегральних перетворень. Дослідник, що розв'язує задачу за допомогою цього методу переважно вирішує дві проблеми – вибір інтегрального перетворення, що найліпше підходить до досліджуваної області і форми неоднорідностей, а також проведення обернень аналітичними, чи аналітико-числовими методами. Наприклад, для смуги зі стрічковими неоднорідностями [1, 2] розв'язок можна побудувати за допомогою інтегрального перетворення Фур'є, для клина – за допомогою інтегрального перетворення Мелліна і т. ін. Використання "прямого методу вирізування" (ПМВ) [3] дає змогу дослідити задачі для скінченних і частково обмежених тіл різної форми з неоднорідностями без додаткових аналітичних викладок.

Цей метод полягає у моделюванні крайових умов обмеженого тіла за допомогою введення у розгляд тонкостінних об'єктів – тріщин (щілин) та абсолютно жорстких включень (АЖВ) великих, але скінченних лінійних розмірів. За допомогою таких неоднорідностей з простору ніби "вирізується" необхідне обмежене тіло. Крайові умови першого чи другого роду задають, навантажуючи береги моделюючої тріщини, чи переміщуючи береги моделюючого АЖВ відповідно. Як результат – обмежене тіло з включеннями при заданих на його межах крайових умовах моделюється задачею, зокрема для простору, з дещо збільшеною кількістю тонких неоднорідностей, для якого безпосередньо й розв'язується простіша за структурою система сингулярних інтегральних рівнянь (ССІР) збільшеного розміру.

Раніше [3] прямий метод вирізування був апробований на низці прикладів задач дослідження напружено-деформованого стану шаруватих структур із симетрично навантаженими стрічковими тріщинами, які паралельні до межі області. Зокрема, розглядалися задачі для півпростору, смуги та з'єднаної з півпростором смуги за антиплоскої деформації. Зрозуміло, що симетрія стосовно осі і простий спосіб навантаження тріщини відіграли важливу роль у ефективному моделюванні тіла за допомогою методу вирізування. Виявилося, що коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) тріщини, отриманий за допомогою ПМВ, вже за десятиразової, порівняно з основною неоднорідністю, довжини моделюючих елементів відрізняється від КІН тріщини, отриманого за безпосереднього розв'язування відповідних задач без використання методу вирізування менше, ніж на 0,01%. Результати застосування ПМВ до задач теорії тріщин виявилися дуже близькими до значень, отриманих у працях [4, 5], де для побудови інтегральних рівнянь задачі про півпростір із тунельними тріщинами було використано непрямий метод вирізування – моделювання межі тіла тріщиною безмежної довжини з наступним вилученням з системи рівнянь відповідної функції стрибка.

Цього разу метод вирізування апробуємо на антиплоскій задачі для півпростору з орієнтованими під кутом стрічковими неоднорідностями, оскільки ця задача є досить простою і добре відомою в літературі [1, 6].

2. Простір з тонкими включеннями довільного розташування й орієнтації. У працях [1, 3, 7] були подані формули для визначення напружено-деформованого стану простору, півпростору і двох ідеально з'єднаних півпросторів із довільною кількістю тонких стрічкових неоднорідностей стосовно функцій стрибків напружень і переміщень на осьових лініях неоднорідностей за антиплоскої деформації.

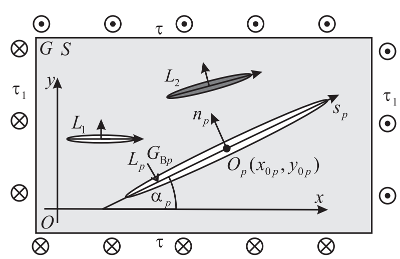


Рис. 1. Простір зі стрічковими неоднорідностями за дії однорідного навантаження

Нагадаємо методику побудови розв'язку для найпростішого випадку – простору з довільною кількістю включень, яка потрібна для моделювання однорідного тіла, зокрема з включеннями, обмеженого прямолінійними лініями. У просторі з модулем пружності G, переріз якого площиною $z=0$ дає площину S, розміщено $N+1$ стрічкове включення. Позначимо L_p' – осьові лінії перерізу включень площиною xOy, які належать осям L_p $\left(p=\overline{0,N}\right)$. Координати центру кожної з неоднорідностей – (x_{0p}, y_{0p}); кут орієнтації осі – α_p; ширина – $2h_p$; довжина – $2a_p$; модуль зсуву – $G_{\text{В}p}$ $\left(p=\overline{0,N}\right)$ (рис. 1). Вважаємо, що на нескінченності задане стале навантаження $\sigma_{xz}^{\infty}=\tau, \sigma_{yz}^{\infty}=\tau_1$.

Згідно з принципом суперпозиції, напружено-деформований стан (НДС) простору з $N+1$ включенням зводиться до суми: 1) однорідного розв'язку, породженого зовнішнім навантаженням простору без включень (позначатимемо його нулем серед верхніх індексів); 2) основного збуреного розв'язку, породженого включеннями у безмежному середовищі (позначатимемо його циркумфлексом ("ˆ") і нулем серед верхніх індексів). Однорідний розв'язок, породжений однорідним навантаженням, подамо у вигляді

$$\sigma_{yz}^{0}+i\sigma_{xz}^{0}=\tau+i\tau_1. \tag{1}$$

Збурений розв'язок подається через заздалегідь невідомі функції стрибків напружень і похідних переміщень f_{3p}, f_{6p} $\left(p=\overline{0,N}\right)$ на осьових лініях неоднорідностей у просторі [1, 3]. Тому НДС простору з $N+1$ включенням у декартовій системі координат характеризує вираз

$$\sigma_{yz}+i\sigma_{xz}=\sigma_{yz}^{0}+i\sigma_{xz}^{0}+\left(\hat{\sigma}_{yz}^{0}+i\hat{\sigma}_{xz}^{0}\right), \tag{2}$$

де

$$\hat{\sigma}_{yz}^{0}+i\hat{\sigma}_{xz}^{0}=\frac{i}{2\pi}\sum_{p=0}^{N}\int_{L_p'}\frac{f_{3p}\left(t\right)+iGf_{6p}\left(t\right)}{t\exp\left(i\alpha_p\right)-\left(z-z_{0p}\right)},\quad z_{0p}=x_{0p}+iy_{0p}. \tag{3}$$

Для визначення невідомих функцій стрибка f_{3p}, f_{6p} треба скористатися умовами взаємодії матриці з p-м включенням. Наприклад, у випадку симетричного навантаження берегів тріщини напруженнями $\tau_{\text{В}p}$ умови взаємодії матимуть простий вигляд $\left\{\sigma_{nz}^{p+}+\sigma_{nz}^{p-}=2\tau_{\text{В}p}, \sigma_{nz}^{p+}-\sigma_{nz}^{p-}=0\right\}$. Дещо складнішими, проте й універсальнішими є умови взаємодії для ненавантаженого включення з довільним модулем зсуву [1, 8] та узагальнені на випадок прикладеного до берегів p-го включення симетричного напруження $-\tau_{\text{В}p}$ умови взаємодії [3]

$$\left(\sigma_{sz}^{p+}+\sigma_{sz}^{p-}\right)+\frac{G}{G_{\text{В}p}h_p}\int_{-a_p}^{s_p}\left(\sigma_{nz}^{p+}-\sigma_{nz}^{p-}\right)d\xi=2\frac{G}{G_{\text{В}p}}\sigma_{sz}^{cp}\left(-a_p\right), \tag{4}$$

$$\left(\sigma_{nz}^{p+}+\sigma_{nz}^{p-}+2\tau_{\text{В}p}\right)-\frac{G_{\text{В}p}}{Gh_p}\int_{-a_p}^{s_p}\left(\sigma_{sz}^{p+}-\sigma_{sz}^{p-}\right)d\xi=w_p^{*}\frac{G_{\text{В}p}}{h_p}+\underline{G_{\text{В}p}\left(\frac{\sigma_{nz}^{0p+}}{G}+\frac{\sigma_{nz}^{0p-}}{G}\right)}.$$

Тут $s_pO_pn_p$ – локальна система координат відповідного включення з початком у центрі неоднорідності; $\sigma_{nz}^{p\pm}$, $\sigma_{sz}^{p\pm}$ – напруження на верхньому $(+)$ і нижньому $(-)$ берегах p-го включення; $\sigma_{nz}^{0p\pm}, \sigma_{sz}^{0p\pm}$– однорідні напруження у тілі без включень у місцях берегів p-го дефекту, записані у його локальній системі координат; $\sigma_{sz}^{cp}\left(-a_p\right)$, w_p^{*} –

апріорні торцьові сталі, що визначаються формулами [1, 3, 8]

$$\sigma_{sz}^{cp}(-a_p) = \sigma_{sz}^{0p}(-a_p)\,\tau_{zp}, \quad \tau_{zp} = \frac{G_{\text{B}p}}{\max(G_{\text{B}p}, G)};$$

$$w_p^* = 2h_p(s_p)\,\sigma_{nz}^{0p}(s_p)\,w_{p\_}^*, \quad w_{p\_}^* = \frac{\min(G_{\text{B}p}, G)}{G^2}.$$

Так звана основна модель взаємодії [8] враховує підкреслений у (4) доданок, плівкова модель його до відома не бере. Умови (4) у своїх граничних випадках дають умови взаємодії для навантаженої симетричними зусиллями $\tau_{\text{B}p}$ тріщини ($G_{\text{B}p} \to 0$) та для АЖВ ($G_{\text{B}p} \to \infty$). Для пружного включення з проміжними властивостями умови (4) є наближеними.

Для використання виразів напружень (2) в умовах взаємодії (4) треба знайти напруження на берегах кожної неоднорідності. Тому для кожного включення перейдемо від основної системи координат xOy до локальної $s_pO_pn_p$ включення на підставі формул

$$\begin{aligned} &\sigma_{nz}^p + i\sigma_{sz}^p = \left[\sigma_{yz} + i\sigma_{xz}\right]\exp(i\alpha_p), \\ &z = x + iy = \tilde{z}_p \exp(i\alpha_p) + z_{0p} = (s_p + in_p)\exp(i\alpha_p) + (x_{0p} + iy_{0p}). \end{aligned} \tag{5}$$

Згідно з формулою Сохоцького-Племелі [9] та урахуванням (2), (5), напружений стан на верхньому і нижньому берегах p-го включення матиме вигляд

$$\sigma_{nz}^{p\pm} + i\sigma_{sz}^{p\pm} = \left(\sigma_{nz}^{0p\pm} + i\sigma_{sz}^{0p\pm}\right) + \left(\hat{\sigma}_{nz}^{0\,p\pm} + i\hat{\sigma}_{sz}^{0\,p\pm}\right) + \sum_{k=0,k\neq p}^{N}\left(\hat{\sigma}_{nz}^{0\,pk} + i\hat{\sigma}_{sz}^{0\,pk}\right), \tag{6}$$

де

$$\hat{\sigma}_{nz}^{0\,p\pm} + i\hat{\sigma}_{sz}^{0\,p\pm} = \mp\frac{1}{2}\left[f_{3p}(t) + iGf_{6p}(t)\right] + \frac{i}{2\pi}\int_{L'_p}\frac{f_{3p}(t) + iGf_{6p}(t)}{t - s_p}dt \tag{7}$$

визначає напружено-деформований стан на верхньому (+) і нижньому (–) берегах p-го включення за відсутності інших неоднорідностей у просторі з модулем зсуву G;

$$\begin{gathered} \hat{\sigma}_{nz}^{0\,pk} + i\hat{\sigma}_{sz}^{0\,pk} = \frac{i}{2\pi}\int_{L'_k}(f_{3k}(t) + iGf_{6k}(t))/(t\exp[i(\alpha_k - \alpha_p)] - \\ -[s_p - (z_{0k} - z_{0p})\exp(-i\alpha_p)])dt \end{gathered} \tag{8}$$

відповідає за збурення НДС на поверхні p-го включення від впливу k-го включення у локальній системі координат p-го включення. Підставляючи (6) в умови взаємодії (4) з урахуванням (7), (8) для $N+1$ включення отримаємо $2N+2$ сингулярні інтегральні рівняння (СІР) вигляду

$$\begin{gathered} \frac{1}{\pi}\int_{-a_p}^{a_p}\frac{f_{3p}(t)}{t - s_p}dt - \frac{G}{G_{\text{B}p}h_p}\int_{-a_p}^{s_p}f_{3p}(t)dt + 2\hat{\sigma}_{sz}^{1p}(s_p) = 2\frac{G}{G_{\text{B}p}}\sigma_{sz}^{cp}(-a_p) - \\ -[\sigma_{sz}^{0p+}(s_p) + \sigma_{sz}^{0p-}(s_p)], \\ \frac{1}{\pi}\int_{-a_p}^{a_p}\frac{f_{6p}(t)}{t - s_p}dt - \frac{G_{\text{B}p}}{Gh_p}\int_{-a_p}^{s_p}f_{6p}(t)\,dt - \frac{2}{G}\hat{\sigma}_{nz}^{1p}(s_p) = -w_p^*\frac{G_{\text{B}p}}{Gh_p} - \\ \underline{-\frac{G_{\text{B}p}}{G^2}\left(\sigma_{nz}^{0p+} + \sigma_{nz}^{0p-}\right)} + \frac{1}{G}\left(\sigma_{nz}^{0p+}(s_p) + \sigma_{nz}^{0p-}(s_p)\right), \quad s_p \in [-a_p, a_p] \quad \left(p = \overline{0, N}\right) \end{gathered} \tag{9}$$

стосовно невідомих функцій стрибків f_{3p}, f_{6p} $\left(p=\overline{0,N}\right)$. Тут

$$\hat{\sigma}_{nz}^{1p}\left(s_p\right)+i\hat{\sigma}_{sz}^{1p}\left(s_p\right)=\sum_{k=0,k\neq p}^{N}\left(\hat{\sigma}_{nz}^{0\;pk}+i\hat{\sigma}_{sz}^{0\;pk}\right).$$

3. Застосування методу вирізування. Розв'язавши ССІР (9), зокрема методом колокацій [1, 10], можна визначити невідомі функції стрибка і за (2) знайти напружено-деформований стан простору зі стрічковими неоднорідностями. Дослідимо можливість застосування методу вирізування до тіл із довільно орієнтованими стрічковими включеннями та тріщинами. Зокрема, детально дослідимо задачі визначення напружено-деформованого стану півпростору з довільно орієнтованою неоднорідністю за різних крайових умов. Згідно з процедурою методу вирізування вільний край тіла моделюватимемо великою паралельною до осі Ox тріщиною за нульового навантаження на її берегах. Навантажений край тіла – тріщиною (щілиною), береги якої навантажені бажаними напруженнями. Аналогічно защемлений край моделюється великим абсолютно жорстким включенням за нульового натягу його поверхні. Оскільки для універсальності схеми розв'язування ми використовуємо умови взаємодії для пружного включення з матрицею (4), то тріщини моделюватимемо тонкими включеннями певної товщини з дуже малим відносним модулем зсуву $k_p=G_{\mathrm{B}p}/G$. Застосовуючи метод вирізування, вивчатимемо збіжність КІН для досліджуваної неоднорідності до результатів, отриманих за допомогою асимптотичних методів [11], а також результатів, отриманих за допомогою безпосереднього розв'язування відповідних задач без використання методу вирізування на підставі [1, 6]. КІН для стрічкової неоднорідності обчислюємо згідно з [1, 6, 12] на підставі знайдених функцій стрибків напружень і переміщень на осьовій лінії неоднорідності.

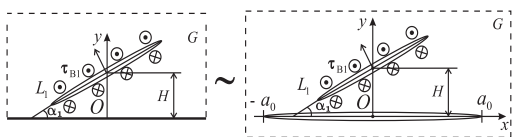


Рис. 2. Моделювання півпростору з тріщиною за допомогою простору і додаткової неоднорідності

Дослідимо збіжність ПМВ на прикладі дослідження напружено-деформованого стану півпростору $y>0$ зі симетрично навантаженою напруженнями $\tau_{\mathrm{B}1}=\mathrm{const}$ тріщиною. Вважатимемо, що тріщина з осьовою лінією перерізу L_1' завдовжки $2a_1$, товщини $2h_1$ із центром у $(0,H)$, нахилена під кутом α_1 до осі Ox.

Відповідно до методу розглянемо безмежний простір з такою самою неоднорідністю та навантаженням і додатковим вільним від навантаження (натягу) пружним включенням (рис. 2) з центром у $(0,0)$, який має відносний модуль зсуву $k_0=10^{-7}$ і моделює вільний край півпростору, або $k_0=10^{7}$ у випадку моделювання жорстко защемленого краю. Спочатку проаналізуємо випадок вільного краю півпростору.

У таблиці подано деякі результати обчислення нормованого КІН $K_{31}^{0\pm}=$ $=K_{31}^{\pm}/\left(\tau_{\mathrm{B}1}\sqrt{\pi a_1}\right)$ для правої (+) і лівої (–) вершин тріщини. Використовували такі параметри задачі: $a=a_0/a_1$ – відносна довжина моделюючого елемента; $H=1,25a_1$ – відстань від центра досліджуваної неоднорідності до краю. Напруження на безмежності $\tau=\tau_1=0$, відносні товщини неоднорідностей $h_k=0,1a_1$ $\;(k=0,\;1)$.

Значення нормованого КІН для тріщини у змодельованому півпросторі з вільним краєм для різних довжин моделюючого елемента

α_1	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
a	K_{31}^{0+}			K_{31}^{0-}		
0,3	1,0026	1,0029	1,0009	1,0090	1,0178	1,0138
1	1,0191	1,0175	1,0169	1,0641	1,0780	1,1058
2	1,0391	1,0389	1,0423	1,0908	1,1175	1,1718
4	1,0558	1,0589	1,0657	1,1080	1,1442	1,2099
8	1,0620	1,0674	1,0765	1,1143	1,1539	1,2236
12	1,0632	1,0692	1,0790	1,1156	1,1559	1,2266
20	1,0639	1,0702	1,0803	1,1162	1,1570	1,2280
30	**1,0641**	**1,0705**	**1,0809**	**1,1165**	**1,1574**	**1,2285**
∞	**1,0642**	**1,0707**	**1,0810**	**1,1166**	**1,1575**	**1,2288**
Формула (10)	1,0638	1,0730	1,0831	1,1090	1,1285	1,1472

У передостанньому рядку таблиці зі значенням “$a = \infty$” подано результати, які отримали внаслідок безпосереднього розв’язування методом колокацій ССІР задачі для півпростору $y > 0$ з тріщиною L_1' [1]. В останньому рядку подано результати обчислень на основі асимптотичної залежності [11]

$$K_{31}^{0\pm} = 1 + \lambda^2/8 \mp \lambda^3 \sin\alpha/16 + \lambda^4 \left(2 - 9\cos 2\alpha\right)/128 + O\left(\lambda^5\right), \quad \lambda = a_1/H. \tag{10}$$

Зазначимо, що зростання моделюючого елемента для цього прикладу супроводжується суттєвим збільшенням кількості N_1 членів розкладів функцій стрибків у ряди згідно з методом колокацій [1, 10]. Наприклад, за вертикальної орієнтації тріщини для $a = 2$ вистачає $N_1 = 40$, для $a = 12$ – $N_1 = 200$, а для $a = 30$ – $N_1 = 800$ членів рядів за поліномами Чебишова для обчислень КІН з похибкою меншою за 0,1%. Для порівняння у випадку горизонтальної орієнтації тріщини для $a = 30$ вистачає $N_1 = 80$ членів ряду. Зрозуміло, що зближення неоднорідностей також приводить до збільшення кількості членів ряду N_1.

Як видно з таблиці, орієнтація неоднорідності суттєво впливає на необхідну для забезпечення бажаної точності обчислень довжину моделюючого елемента. Зокрема, для отримання похибки не більше 0,01% порівняно з результатом, отриманим без використання ПМВ, довжина моделюючого елемента повинна становити $a_0 > 30a_1$. Нагадаємо, що для тріщини, яка паралельна до межі півпростору, ця ж точність досягалася вже за $a_0 = 10a_1$ [3]. Зазначимо також, що дещо більша, але цілком прийнятна похибка у 1% досягається вже за відносної довжини моделюючої тріщини $a = 12$. Зі зменшенням відносної довжини моделюючого елемента узагальнений КІН тріщини прямує до відповідних значень для одного дефекту в просторі (одиниці). Тобто, збурювальний вплив додаткової тріщини прямує до нуля. Спостерігаємо також, що зі збільшенням кута орієнтації досліджуваної тріщини за сталої довжини моделюючого елемента, відносна похибка отриманих результатів зростає. Наприклад, при значенні $a = 12$ відносна похибка обчислення КІН K_{31}^{0-} для $\alpha = \pi/4$ дорівнює приблизно 0,089%, а для $\alpha = \pi/2$ – близько 0,179%. З даних таблиці також можна зробити висновок про міру точності асимптотичного розв’язку (10). Оскільки результати, отримані безпосереднім розв’язуванням задачі і за допомогою методу вирізування практично збігаються, то відповідні результати можна вважати близькими до точних. Найбільше відхилення асимптотичних КІН від отриманих ПМВ результатів досягається за вертикальної орієнтації неоднорідності для вершини тріщини, що найближча до краю півпростору і дорівнює приблизно 7%.

Тепер розглянемо випадок моделювання півпростору з жорстко защемленим краєм і навантаженою однорідними зусиллями тріщиною за допомогою ПМВ і проаналізуємо вплив кута орієнтації тріщини на КІН (рис. 3). Для цього прикладу спостерігаємо протилежну тенденцію, а саме ліпшу збіжність для вертикальної орієнтації тріщини ($\alpha = \pm\pi/2$), і гіршу для орієнтації, що близька до горизонтальної.

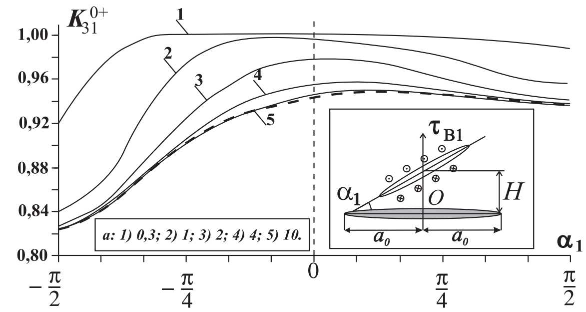
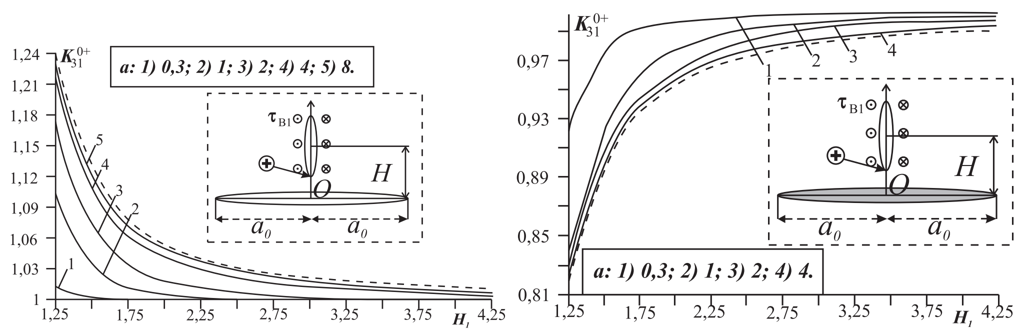


Рис. 3. Нормований КІН для тріщини, що навантажена однорідними зусиллями у змодельованому півпросторі з жорстко защемленим краєм

Зауважимо, що за відносної довжини $a = 10$ моделюючого АЖВ (лінія 5 на рис. 3) КІН для тріщини практично збігається зі значенням КІН, отриманим безпосереднім розв'язуванням задачі без використання ПМВ (на рис. 3 – пунктирна лінія) з похибкою до 1%. Зазначимо також, що за горизонтальної орієнтації тріщини для досягнення похибки у 0,01% необхідно брати відносну довжину моделюючого АЖВ $a > 30$. Для порівняння аналогічна задача для півпростору з вільними краями і навантаженою горизонтальною тріщиною вимагає лише $a \geq 10$ відносної довжини моделюючого елемента [3].



а *б*

Рис. 4. Дослідження впливу відносної відстані H_1 на нормований КІН тріщини у змодельованому ПМВ півпросторі для вільного *а* і защемленого *б* краю за різних відносних довжин моделюючого елемента *a*

Проаналізуємо вплив відносної відстані $H_1 = H/a_1$ заглиблення центра тріщини на вибір відносної довжини моделюючого елемента a для вертикальної орієнтації ($\alpha = -\pi/2$) тріщини у півпросторі з вільними (рис. 4 *а*) чи защемленими (рис. 4 *б*) краями.

Пунктирною лінією на рис. 4 подано графік КІН для тріщини у півпросторі без застосування ПМВ. Як і очікувалося, зі збільшенням відносної відстані H_1 вплив моделюючого елемента, чи берега півпростору зменшується, а отже, зменшується похибка обчислень КІН.

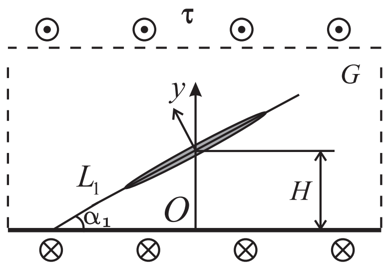


Рис. 5. Півпростір з пружним включенням і навантаженням на безмежності

Отож, ПМВ дає змогу отримати хороші результати для навантаженої тріщини у півпросторі. Тепер розглянемо випадок пружного включення і способи застосування ПМВ у задачах з однорідним навантаженням на безмежності. Дослідимо задачу для пружного включення з осьовою лінією перерізу L_1' у півпросторі $y > 0$, навантаженому однорідним навантаженням τ на безмежності (рис. 5) та проаналізуємо вплив модуля зсуву включення на КІН. Довжина включення $2a_1$, товщина $2h_1$, центр – у $(0, H)$, кут орієнтації щодо осі Ox дорівнює α_1. Зображену на рис. 5 задачу можна за допомогою ПМВ змоделювати кількома способами.

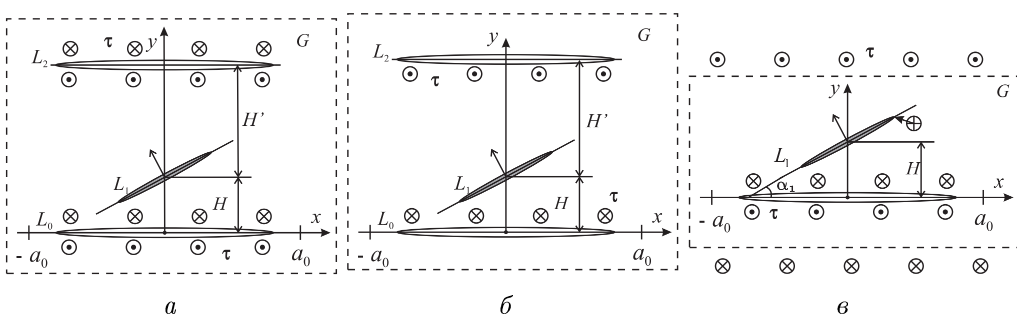


Рис. 6. Моделювання за допомогою ПМВ задачі для півпростору з пружним включенням і навантаженням на безмежності

Перший – у вільному від зовнішнього навантаження просторі з неоднорідністю за допомогою двох додаткових тріщин, береги яких можуть бути симетрично навантажені напруженнями $\tau_{B0} = \tau_{B2} = \tau$, (рис. 6 *а*), або може бути навантажений лише один з двох берегів моделюючих елементів (рис. 6 *б*). Відстань H' від центра досліджуваної неоднорідності до тріщини з віссю L_2 для правильного моделювання повинна бути досить довгою порядку $H' \geq 7a_1$, щоб забезпечити відсутність впливу берегів тріщини на досліджуване включення. Задача на рис. 6 *а* легко реалізується за допомогою розглянутих у частині 2 формул. Для задачі рис. 6 *б* треба або модифікувати умови взаємодії (4), або записати УВ для тріщини з заданим навантаженням лише одного берегу.

Оскільки доцільно, щоб ПМВ в загальному випадку міг працювати з довільною кількістю включень і використовувати довільні крайові умови, то модифікація УВ (4) для можливості задання довільного навантаження і натягу на берегах неоднорідності є необхідною умовою для універсалізації способу розв'язування. Оскільки досліджувану на рис. 5 задачу можна ефективно розв'язати за допомогою вже записаних формул, то такий підхід у цій праці розглядати не будемо.

Існує також другий простий спосіб (рис. 6 *в*), який найефективніший для дослідження за допомогою ПМВ розглядуваної задачі. Розглянемо простір із досліджуваним включенням, навантажений симетричними зусиллями τ на безмежності. Навантажений вільний берег півпростору моделюємо за допомогою навантаженої симетричними зусиллями $\tau_{\mathrm{B}0} = \tau$ тріщини (рис. 6 *в*). При обчисленнях вважатимемо, що $h = 0,1a_1$ і включення розташоване на відстані $H = 1,25a_1$ від моделюючого елемента. Вважатимемо також, що $K_{3j}^{0+} = K_{3j}^{+}/(\tau\sqrt{\pi a_1})$ $(j = 1, 2)$.

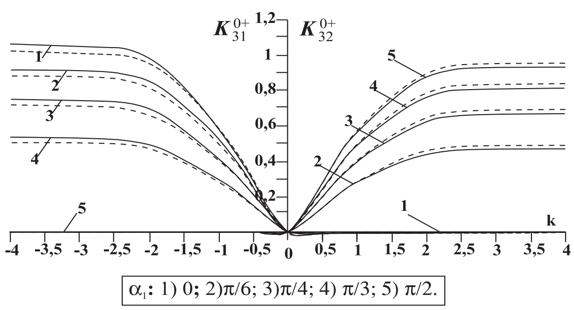


Рис. 7. Нормовані узагальнені КІН для неоднорідності залежно від відносного модуля зсуву включення

Суцільними лініями на рис. 7 побудовані графіки залежностей узагальнених КІН K_{31}^{0+} (ліва частина рисунка) і K_{32}^{0+} (права частина) від відносного модуля зсуву $k = \lg(G_{\mathrm{B}1}/G)$ для відносної довжини моделюючої тріщини $a = 10$. Можна зазначити, що така довжина забезпечила меншу від 0,1% похибку щодо результатів, отриманих без використання ПМВ. Для порівняння пунктирними лініями на рис. 7 показано графіки залежностей K_{3j}^{0+} від k за відносної довжини моделюючого елемента $a = 1$. Максимальна різниця між результатами, отриманими при $a = 10$ і $a = 1$, дорівнює близько 4%. Причому з прямуванням відносного модуля зсуву до нуля різниця між результатами обчислення КІН для $a = 1$ і $a = 10$ зменшується. Максимальна різниця отримується для крайніх випадків пружного включення – АЖВ і тріщини.

4. Висновки. У цій праці апробація прямого методу вирізування виконана на задачах тонких довільно орієнтованих стрічкових неоднорідностей (тріщин і включень) у півпросторі. Виявилося, що орієнтація неоднорідності та крайові умови задачі суттєво впливають на вибір параметрів методу вирізування, передусім довжину моделюючих елементів, які, для отримання результатів з похибкою не більше

0,1%, довелося доволі сильно збільшити (практично втричі порівняно з паралельною до границі області тріщиною [3]). Це призвело до суттєвого збільшення кількості розбиття за поліномами Чебишова у методі колокацій, а як наслідок – збільшення часу обчислення ССІР. Проте обчислення за допомогою ПМВ з прийнятною 1% похибкою виявилося сумірним за ефективністю з безпосереднім розв'язуванням задач без використання ПМВ. Також запропоновано й успішно апробовано простий спосіб моделювання за допомогою прямого методу вирізування задачі для півпростору з неоднорідністю і заданим на нескінченості навантаженням.

1. *Сулим Г.Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями / *Сулим Г.Т.* – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007.
2. *Сулим Г.Т.* Поздовжній зсув шаруватих анізотропних середовищ зі стрічковими неоднорідностями / *Сулим Г.Т., Шевчук С.П.* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – Т. 41. – №3. – С. 90-97.
3. *Васільєв К.В.* Прямий метод вирізування для моделювання напружено-деформованого стану ізотропних шаруватих середовищ з тонкими неоднорідностями за антиплоского деформування / *Васільєв К.В., Сулим Г.Т.* // Машинознавство. – 2006. – №12. – С. 10-17.
4. *Панасюк В.В.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / *Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П.* – К.: Наук. думка, 1976.
5. *Саврук М.П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / *Саврук М.П.* – К.: Наук. думка, 1981.
6. *Сулим Г.Т.* Вплив пружного стрічкового включення на деформацію поверхні анізотропного півпростору за поздовжнього зсуву / *Сулим Г.Т.* // Мат. мет. та фіз.- мех. поля. – 2006. – Т. 49. – №3. – С. 125-130.
7. *Божидарник В.В.* Продольный сдвиг изотропной среды с системой туннельных разрезов / *Божидарник В.В., Сулим Г.Т.* // Вестн. Львов. политехн. ин-та. – 1990. – Вып. 243. – С. 10-12.
8. *Сулим Г.Т.* Антиплоская задача для системы линейных включений в изотропной среде / *Сулим Г.Т.* // Прикл. матем. и механика. – 1981. – Т. 45, №2. – С. 308-318.
9. *Божидарник В.В.* Елементи теорії пружності / *Божидарник В.В., Сулим Г.Т.* – Львів: Світ, 1994.
10. *Божидарник В.В.* Метод колокацій розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь / *Божидарник В.В., Сулим Г.Т.* // Вісн. Львів. політехн. ін-ту. – 1990. – Вип. 242. – С. 8-13.
11. *Саврук М.П.* Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами / *Саврук М.П.* – К.: Наук. думка, 1988.
12. *Божидарник В.В.* Елементи теорії пластичності та міцності. Том. 2 / *Божидарник В.В., Сулим Г.Т.* – Львів: Світ, 1999.

USE THE DIRECT CUTTING METHOD AT RESEARCH OF HALFSPACE WITH ARBITRARILY ORIENTED THIN BAND INCLUSION AT LONGITUDINAL SHEAR

Kyryl VASILEV[1], **Georgy SULYM**[2]

[1]*Pidstryhach Institute for Applied Problem of Mechanics and Mathematics of National Academy of Science of Ukraine,*
79060, L'viv, Naukova Str., 3b
e-mail: kirill.all@gmail.com
[2]*Ivan Franko National University of L'viv,*
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: sulym@franko.lviv.ua

Use of a so-called direct method of a cutting to the task of halfspace with arbitrarily oriented thin band inclusion is investigated in the article. The cutting method consists in modelling of boundary conditions for the limited body with the help of thin objects – cracks and absolutely rigid inclusions. It was shown that the orientation of inclusion, and boundary conditions of the problem significantly affect to the choice of length of modelling elements. It was also suggested a simple method of modelling a halfspace with load at infinity by the method of a cutting.

Key words: halfspace, longitudinal shear, SIF, method of a cutting, thin band inclusion.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРЯМОГО МЕТОДА ВЫРЕЗАНИЯ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ПРОИЗВОЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННОЙ ЛЕНТОЧНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

Кирилл ВАСИЛЬЕВ[1], **Георгий СУЛИМ**[2]

[1]*Институт прикладных проблем механики и математики им. Я.С. Подстригача НАН Украины,*
79060, Львов, ул. Наукова, 3б
e-mail: kirill.all@gmail.com
[2]*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,*
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: sulym@franko.lviv.ua

Исследовано применение так называемого прямого метода вырезания к задаче полупространства с произвольно ориентированным ленточным включением. Метод вырезания состоит в моделировании краевых условий для ограниченного тела с помощью тонкостенных обьектов – трещин и абсолютно жестких включений. Было показано, что ориентация неоднородности, а также краевые условия задачи существенно влияют на выбор длины моделирующих элементов. Также предложен простой метод моделирования с помощью метода вырезания полупространства при нагрузке на бесконечности.

Ключевые слова: полуплоскость, продольный сдвиг, КИН, метод вырезания, тонкое ленточное включение.

Стаття надійшла до редколегії 01.07.2009

Прийнята до друку 16.12.2009

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2009. *Ser. Mech. Math. 2009.*
Вип. 71. С. 62–70 *Is. 71. P. 62–70*

УДК 517.547

ДВОПАРАМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗРОСТАННЯ НЕВІД'ЄМНИХ І МЕРОМОРФНИХ У КІЛЬЦІ ФУНКЦІЙ

[1]Оксана ГНАТЮК, [2]Ольга ГРЕШКО, [3]Остап СТАШИШИН

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: [1]*oksanka.gnatyuk@gmail.com*, [2]*olgagreshko@gmail.com*,
[3]*ostap.stashyshyn@gmail.com*

Для невід'ємних зростаючих функцій від однієї змінної $\varphi(t)$ характеристиками зростання є порядок і тип. Якщо $\exists\ t_0\ \forall\ t > t_0(\alpha)\ \varphi(t) \leqslant t^\alpha$, то функція $\varphi(t)$ називається функцією скінченного порядку (зростання), а infimum таких α називається порядком функції $\varphi(t)$. Отже, якщо ρ – порядок функції $\varphi(t)$, то

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, t_0(\varepsilon) \quad \forall\, t > t_0(\varepsilon) \quad \varphi(t) < t^{\rho+\varepsilon}.$$

Узагальнено поняття порядку зростання для невід'ємних функцій двох змінних і застосовуються введені поняття спряжених порядків до вивчення характеристик зростання голоморфних та мероморфних функцій.

Ключові слова: множина істинних порядків, пара істинних порядків, аналітична функція, мероморфна функція.

1. Характеристики зростання невід'ємних функцій.

1.1. Означення, приклади, геометричне тлумачення. Нехай $Q(\alpha_0, \beta_0) = \{(\alpha, \beta)\ :\ \alpha \geqslant \alpha_0,\ \ \beta \geqslant \beta_0\}$ і $Q = Q(0,0)$, функція $F(\tau, r)$ – невід'ємна при $\tau \geqslant 1$, $r \geqslant 1$. Нехай також

$$K(F) = \{(\alpha, \beta) \in Q\ :\ \exists\,(\tau_0, r_0) \quad \forall\,(\tau, r) \quad (\tau > \tau_0, \quad r > r_0) \quad F(\tau, r) \leqslant \tau^\alpha + r^\beta\}. \quad (1)$$

Зауважимо, що тут τ_0 та r_0 залежать від α і β. Через $\overset{\circ}{K}(F)$ позначимо внутрішність множини $K(F)$.

Означення 1. *Множина X з $\mathbb{R}^2$ називається квадрантотвореною, якщо разом з кожною точкою (α_0, β_0) вона містить квадрант $Q(\alpha_0, \beta_0)$.*

З означення $K(F)$ випливає, що $K(F)$ квадрантотворена множина. Справді, нехай $(\alpha_0, \beta_0) \in K(F)$. Тоді $F(\tau, r) \leqslant \tau^{\alpha_0} + r^{\beta_0} \leqslant \tau^\alpha + r^\beta$ при $\tau > \tau_0$, $r > r_0$, $\alpha \geqslant \alpha_0$, $\beta \geqslant \beta_0$. Отже, $Q(\alpha_0, \beta_0) \subset K(F)$.

Приклад 1. Розглянемо функцію $F(\tau, r) = \tau r$, $\tau \geqslant 1$, $r \geqslant 1$. Застосуємо добре відому нерівність Юнга
$$\tau r \leqslant \frac{\tau^\alpha}{\alpha} + \frac{r^\beta}{\beta}$$
при $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. З неї випливає, що множина пар (α, β) таких, що $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ належить до $K(F)$, тобто, $F(\tau, r) \leqslant \tau^\alpha + r^\beta$ при $\tau \geqslant 1, r \geqslant 1$, бо $\alpha > 1$ і $\beta > 1$.

Покажемо, що множина $\{(\alpha, \beta) : \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < 1\}$ належить до $K(F)$. Справді, $\frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha-1}{\alpha} = 1$ і $\beta > \frac{\alpha}{\alpha-1}$ для довільної точки з цієї множини. Тому ця точка належить до $Q(\alpha, \frac{\alpha}{\alpha-1})$. Оскільки $K(F)$ квадрантотворена, то $Q(\alpha, \beta) \subset K(F)$ і потрібне включення перевірено. Покажемо, що
$$(\alpha, \beta) \in \{Q \setminus \{(\alpha, \beta) \ : \ \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \leqslant 1\}\} \Rightarrow (\alpha, \beta) \notin K(F).$$
Візьмемо спочатку α_0 і β_0 такі, що $\frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{\beta_0} > 1$ і покажемо, що $(\alpha_0, \beta_0) \notin K(F)$. Нехай
$$\exists\, (\tau_0, r_0) \quad \forall\, (\tau, r) \quad (\tau > \tau_0, \quad r > r_0) \quad \tau r \leqslant \tau^{\alpha_0} + r^{\beta_0}. \tag{2}$$
Покажемо, що $\exists\, \alpha > \alpha_0$ і $\exists\, \beta > \beta_0$ такі, що $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, а саме
$$\alpha = \frac{2 + (\alpha_0 - \beta_0) + \sqrt{4 + (\alpha_0 - \beta_0)^2}}{2}, \quad \beta = \frac{\alpha}{\alpha - 1}. \tag{3}$$
Перевіримо нерівність $\alpha > \alpha_0$. Згідно з (3) вона еквівалентна такій нерівності:
$$\alpha_0 + \beta_0 - 2 < \sqrt{4 + (\alpha_0 - \beta_0)^2}. \tag{4}$$
Розглянемо 2 випадки:

а) $\alpha_0 + \beta_0 < 2$. Нерівність (4) правильна, бо її ліва частина від'ємна;

б) $\alpha_0 + \beta_0 > 2$. Тоді (4) еквівалентна $(\alpha_0 + \beta_0 - 2)^2 < 4 + (\alpha_0 - \beta_0)^2$, тобто
$$\alpha_0 \beta_0 < \alpha_0 + \beta_0. \tag{5}$$
Нерівність (5) рівносильна нерівності $\frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{\beta_0} > 1$.
Нерівність $\beta > \beta_0$ перевіряємо аналогічно до попередньої, оскільки
$$\beta = \frac{\alpha}{\alpha - 1} = \frac{2 + (\beta_0 - \alpha_0) + \sqrt{4 + (\beta_0 - \alpha_0)^2}}{2}.$$
Приймемо тепер у співвідношенні (2) $r = \tau^{\alpha - 1}$. Тоді його перепишемо так:
$$\tau^\alpha \leqslant \tau^{\alpha_0} + \tau^{(\alpha-1)\beta_0}, \tag{6}$$
де $\alpha > \alpha_0$ задане рівністю (3). Поділимо нерівність (6) на τ^α. Тоді
$$1 \leqslant \tau^{\alpha_0 - \alpha} + \tau^{(\alpha-1)\beta_0 - \alpha}. \tag{7}$$
Спрямовуючи $\tau \to \infty$, одержимо $1 \leqslant 0$, бо $\alpha_0 - \alpha < 0$ і
$$(\alpha - 1)\beta_0 - \alpha = (\alpha - 1)(\beta_0 - \frac{\alpha}{\alpha - 1}) = (\alpha - 1)(\beta_0 - \beta) < 0.$$
Ми отримали суперечність. Отож,
$$\{(\alpha_0, \beta_0) \ : \ \frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{\beta_0} > 1\} \not\subset K(F).$$

Отже,

$$K(F) = \{(\alpha, \beta) \ : \ \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \leqslant 1\}. \tag{8}$$

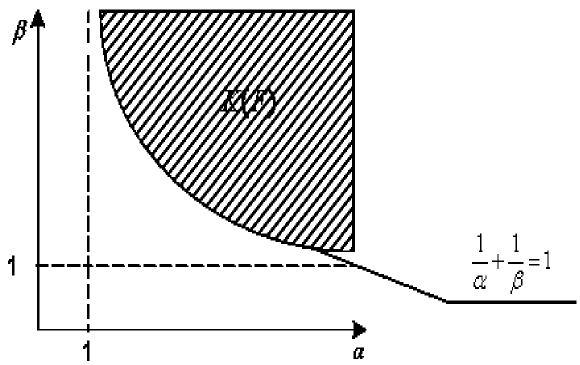


Рис. 1

Лема 1. *Якщо множина* $\overset{\circ}{K}(F)$ *непорожня, то вона однозв'язно необмежена область.*

Доведення. Необмеженість множини $\overset{\circ}{K}(F)$ безпосередньо випливає з її квадрантотвореності.

Нехай γ проста Жорданова крива $\overset{\circ}{K}(F)$. За теоремою Жордана γ розбиває площину (α, β) на дві області, а саме: внутрішність $int\gamma$ і зовнішність $ext\gamma$, яка є необмеженою областю. Припустимо $(\alpha_0, \beta_0) \in int\gamma$. Розглянемо півпряму $l : \{(\alpha, \beta) : \alpha = \alpha_0, \beta \leqslant \beta_0\}$, яка має точку перетину з γ. Нехай $\beta^* = \sup\{\beta : \beta \in l \cap ext\gamma\} \leqslant \beta_0$. Покажемо, що $\beta^* \neq \beta_0$. Припустимо, що $\beta^* = \beta_0$. Тоді отримаємо $(\alpha_0, \beta^*) \notin int\gamma$. Звідси $(\alpha_0, \beta_0) \notin int\gamma$, що суперечить припущенню. Отже, $\beta^* < \beta_0 \Rightarrow (\alpha_0, \beta^*) \in \gamma$. Припустимо, що $(\alpha_0, \beta^*) \notin \gamma$. Якщо $(\alpha_0, \beta^*) \in ext\gamma$, то $\exists\ U_\varepsilon((\alpha_0, \beta^*)) \subset ext\gamma$, що суперечить означенню β^*. Тоді $(\alpha_0, \beta^*) \in int\gamma$, що також суперечить означенню β^*. Отже, $(\alpha_0, \beta^*) \in \gamma$. З квадрантотвореності $K(F)$ маємо включення $Q(\alpha_0, \beta^*) \subset \subset K(F)$. Отож, $(\alpha_0, \beta_0) \in Q(\alpha_0, \beta^*) \subset K(F)$. □

Виникає питання чи область $\overset{\circ}{K}(F)$ опукла. Наступний приклад дає негативну відповідь на це запитання.

Приклад 2. Нехай

$$F(\tau, r) = \min(\tau, r) = \begin{cases} \tau, & 1 \leqslant \tau \leqslant r, \\ r, & 1 \leqslant r \leqslant \tau. \end{cases}$$

За означенням $K(F)$ маємо

$$\exists\ (\tau_0, r_0) \quad \forall\ (\tau, r) \quad (\tau > \tau_0, \quad r > r_0) \quad F(\tau, r) \leqslant \tau^1 + r^0,$$

оскільки

$$\min(\tau, r) = \begin{cases} \tau \leqslant \tau^1 + r^0, & \tau_0 < \tau \leqslant r, \\ r \leqslant \tau^1 + r^0, & r_0 < r \leqslant \tau. \end{cases}$$

Аналогічно

$$\exists\,(\tau_0, r_0) \quad \forall\,(\tau, r) \quad (\tau > \tau_0, \quad r > r_0) \quad F(\tau, r) \leqslant \tau^0 + r^1,$$

бо

$$\min(\tau, r) = \begin{cases} \tau \leqslant \tau^0 + r^1, & \tau_0 < \tau \leqslant r, \\ r \leqslant \tau^0 + r^1, & r_0 < r \leqslant \tau. \end{cases}$$

Отож, точки $(1,0)$ і $(0,1)$ належать до $K(F)$. Оскільки $K(F)$ квадрантотворена, то $Q(1,0) \subset K(F)$ і $Q(0,1) \subset K(F)$. Звідси $Q(1,0) \cup Q(0,1) \subset K(F)$. Покажемо, що $(\alpha, \beta) \in Q \setminus \{Q(1,0) \cup Q(0,1)\}$ не належить до $K(F)$.

Припустимо протилежне

$$\exists\,(\tau_0, r_0) \quad \forall\,(\tau, r) \quad (\tau > \tau_0, \quad r > r_0) \quad \min(\tau, r) \leqslant \tau^\alpha + r^\beta.$$

Приймемо $r = \tau$, тоді $\tau \leqslant \tau^\alpha + \tau^\beta$. Поділимо цю нерівність на τ

$$1 \leqslant \tau^{\alpha-1} + \tau^{\beta-1}.$$

Спрямуємо $\tau \to \infty$, тоді одержимо $1 \leqslant 0$, бо $\alpha - 1 < 0$ і $\beta - 1 < 0$. Ми отримали протиріччя. Отже,

$$K(F) = \{(\alpha, \beta) \ : \ (\alpha, \beta) \in Q(1,0) \cup Q(0,1)\}. \tag{9}$$

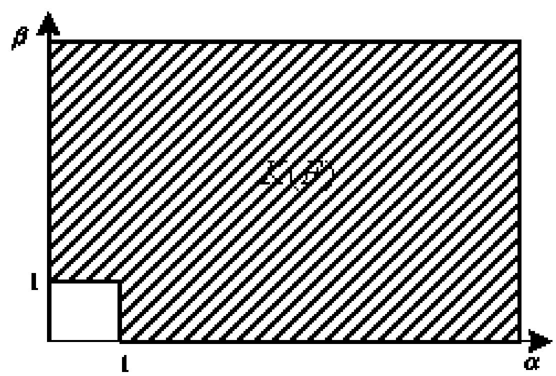


Рис. 2

Означення 2. *Кривою спряжених порядків функції* $F(\tau, r)$ *називається межа* $\partial K(F)$ *множини* $\overset{\circ}{K}(F)$.

Означення 3. *Нехай* $K(F) \neq \emptyset$. *Точка* $(\alpha_0, \beta_0) \in \partial K(F)$ *називається нормальною, якщо*

$$(\alpha < \alpha_0 \Rightarrow (\alpha, \beta_0) \notin \overline{K(F)}) \wedge (\beta < \beta_0 \Rightarrow (\alpha_0, \beta) \notin \overline{K(F)}).$$

Означення 4. *Сукупність нормальних точок множини* $\partial K(F)$ *будемо називати множиною істинних порядків і позначати* $OrdF$.

Означення 5. *Якщо* $OrdF$ *містить лише один елемент* (ρ_1, ρ_2), *то він називається парою істинних порядків функції* $F(\tau, r)$.

Зауважимо таке: якщо функція $F(\tau, r)$ має пару істинних порядків (ρ_1, ρ_2), то

$$\rho_1 = \inf\{\alpha \ : \ (\alpha, \beta) \in \partial K(F)\},$$
$$\rho_2 = \inf\{\beta \ : \ (\alpha, \beta) \in \partial K(F)\}.$$

Знайдемо множину істинних порядків $OrdF$ для прикладів 1 та 2.

Розглянемо функцію $F(\tau, r) = \tau r$. Покажемо, що $OrdF = \partial K(F)$, де $K(F)$ визначено співвідношенням (8). Нехай $\alpha < \alpha_0$ і $(\alpha_0, \beta_0) \in \partial K(F)$, тобто $\frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{\beta_0} = 1$. Тоді

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta_0} > \frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{\beta_0} = 1.$$

Отже, з огляду на (8), $(\alpha, \beta_0) \notin K(F)$. Випадок $\beta < \beta_0$ перевіряємо аналогічно. Тому точка (α_0, β_0) нормальна згідно з означенням 3 і $\partial K(F) \subset OrdF$. Оскільки $OrdF \subset \partial K(F)$, за означенням 4, то $OrdF = \partial K(F)$.

Покажемо, що $OrdF = \{(1, 0) \cup (0, 1)\}$ для функції $F(\tau, r) = \min(\tau, r)$, де $K(F)$ задане співвідношенням (9). Нехай $(\alpha_0, \beta_0) \in \partial K(F)$. З квадрантотвореності $Q(1, 0)$ та $Q(0, 1)$ множини $\{\alpha : \alpha < \alpha_0 \wedge (\alpha, \beta) \in Q(1, 0)\}$, $\{\beta : \beta < \beta_0 \wedge (\alpha, \beta) \in Q(0, 1)\}$ належать до $K(F)$, тому достатньо розглянути лише вершини квадрантів $Q(1, 0)$ та $Q(0, 1)$. З огляду на (9) множини $\{(\alpha, 0) : \alpha < 1\}$, $\{(0, \beta) : \beta < 1\}$ не належать до $K(F)$, тоді, за означенням 3, точки $(1, 0)$ та $(0, 1)$ є нормальними. Отже, $OrdF = \{(1, 0) \cup (0, 1)\}$.

1.2. Властивості характеристик зростання. Наступні леми дають нам змогу дослідити випадки, коли множина $OrdF$ складається з одного елемента.

Лема 2. *Нехай $F(\tau, r) = F_1(\tau) + F_2(r)$, де $F_1(\tau)$ і $F_2(r)$ невід'ємні функції,*

$$\rho_1^* = \overline{\lim_{\tau \to \infty}} \frac{\log F_1(\tau)}{\log \tau} < \infty \ \ i \ \ \rho_2^* = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log F_2(r)}{\log r} < \infty. \tag{10}$$

Тоді $F(\tau, r)$ має пару істинних порядків (ρ_1, ρ_2) і

$$\rho_1 = \rho_1^*, \ \rho_2 = \rho_2^*. \tag{11}$$

Доведення. Нехай (α, β) є елементом множини $K(F)$. За означенням 1

$$\exists\, (\tau_0, r_0) \in Q \quad \forall\, (\tau, r) \quad (\tau > \tau_0, \quad r > r_0) \quad F_1(\tau) + F_2(r) \leqslant \tau^\alpha + r^\beta,$$

звідки

$$\frac{\log F_1(\tau)}{\log \tau} \leqslant \frac{\alpha \log \tau + \beta \log r + \log 2}{\log \tau}.$$

Зафіксувавши r і спрямувавши τ до $+\infty$, отримаємо $\rho_1^* \leqslant \alpha$. Аналогічно $\rho_2^* \leqslant \beta$. Отже,

$$K(F) \subset Q(\rho_1^*, \rho_2^*). \tag{12}$$

Доведемо протилежне включення. Згідно з (10) для довільного ε існує τ_0 таке, що виконується така нерівність:

$$\frac{\log F_1(\tau)}{\log \tau} \leqslant \rho_1^* + \varepsilon,$$

для довільного $\tau \geqslant \tau_0$. Звідси отримуємо

$$F_1(\tau) \leqslant \tau^{\rho_1^* + \varepsilon}.$$

Аналогічно

$$F_2(r) \leqslant r^{\rho_2^*+\varepsilon}, \quad r > r_0.$$

Тобто, для довільного ε існують τ_0, r_0 такі, що

$$F_1(\tau) + F_2(r) \leqslant \tau^{\rho_1^*+\varepsilon} + r^{\rho_2^*+\varepsilon}$$

для довільних $\tau \geqslant \tau_0$, $r \geqslant r_0$. З довільності ε і за означенням 1 маємо $(\rho_1^*, \rho_2^*) \in K(F)$. Тому

$$\mathring{Q}(\rho_1^*, \rho_2^*) \subset K(F). \tag{13}$$

З огляду на (12) та (13) отримаємо

$$\overline{K(F)} = Q(\rho_1^*, \rho_2^*).$$

Отже,

$$OrdF = (\rho_1^*, \rho_2^*).$$

Згідно з означенням 5 одержимо (11). □

Лема 3. *Нехай $F(\tau, r) = \max(F_1(\tau), F_2(r))$, де $F_1(\tau)$ і $F_2(r)$ невід'ємні функції,*

$$\rho_1^* = \overline{\lim_{\tau\to\infty}} \frac{\log F_1(\tau)}{\log \tau} < \infty \quad i \quad \rho_2^* = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log F_2(r)}{\log r} < \infty.$$

Тоді $F(\tau, r)$ має пару істинних порядків (ρ_1, ρ_2) і

$$\rho_1 = \rho_1^*, \quad \rho_2 = \rho_2^*.$$

Доведення. Нехай $(\alpha, \beta) \in K(F)$. Правильні такі нерівності:

$$\frac{F_1(\tau) + F_2(r)}{2} \leqslant \max\left(F_1(\tau), F_2(r)\right) = F(\tau, r) \leqslant F_1(\tau) + F_2(r). \tag{14}$$

З лівої нерівності (14) випливає

$$F_1(\tau) + F_2(r) \leqslant 2(\tau^\alpha + r^\beta) \quad \forall\, \tau \geqslant \tau_0 \quad \forall\, r \geqslant r_0.$$

Аналогічно до початку доведення леми 2 одержимо включення

$$K(F) \subset Q(\rho_1^*, \rho_2^*).$$

Використовуючи праву нерівність (14), як і у доведенні леми 2, маємо протилежне включення

$$\mathring{Q}(\rho_1^*, \rho_2^*) \subset K(F).$$

□

2. Характеристики зростання голоморфних і мероморфних в кільцях функцій.

2.1. Максимум модуля голоморфних в кільцях фунцій.

Означення 6. *Нехай $A_{\frac{1}{\tau}r} = \{z \ :\ \frac{1}{\tau} < |z| < r\}$ і нехай f голоморфна функція в $\overline{A_{\frac{1}{\tau}r}}$. Визначимо*

$$M(\tau, r; f) = \max\{|f(z)| \ :\ \frac{1}{\tau} \leqslant |z| \leqslant r\}, \ \ \tau \geqslant 1, r \geqslant 1;$$
$$M(t; f) = \max\{|f(z)| \ :\ |z| = t\}.$$

Теорема A [1]. *Якщо f голоморфна в $A_{\frac{1}{\tau}r}$ і $\frac{1}{\tau} < a < t < b < r$, тоді*

$$\log M(t;f) \leqslant \frac{\log\frac{b}{t}}{\log\frac{b}{a}}\log M(a) + \frac{\log\frac{t}{a}}{\log\frac{b}{a}}\log M(b).$$

Іншими словами, $\log M(t;f)$ *є опуклою функцією* $\log t$.

Теорема 1. *Нехай f голоморфна функція в $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Тоді $\log M(\tau,r;f)$ є неперервною, неспадною та опуклою стосовно логарифма по кожній зі змінних при фіксованій іншій. Якщо $K(\log M) \neq \emptyset$, то*

$$Ord\log M(\tau,r;f) = \{(\widetilde{\rho_1},\widetilde{\rho_2})\}, \tag{15}$$

де

$$\widetilde{\rho_1} = \overline{\lim_{\tau\to\infty}}\ \frac{\log\log M(\frac{1}{\tau};f)}{\log\tau}, \quad \widetilde{\rho_2} = \overline{\lim_{r\to\infty}}\ \frac{\log\log M(r;f)}{\log r}.$$

Доведення. Зафіксуємо одну зі змінних, нехай це буде τ. За теоремою Адамара про три кола, функція $\log M(r;f)$ є опуклою функцією $\log r$. Зафіксуємо тепер r. Функція $\log M(\frac{1}{\tau};f)$ є опуклою стосовно $\log\tau$, оскільки правостороння похідна $\log M(\frac{1}{\tau};f)$ за $\log\tau$, а саме

$$\log M(\frac{1}{\tau};f)'_{\log\tau} = -\frac{1}{\tau}\log' M(\frac{1}{\tau};f)$$

є неспадною при $\tau \geqslant 1$. За принципом максимуму модуля

$$M(\tau,r;f) = \max(M(\frac{1}{\tau};f), M(r;f)). \tag{16}$$

Використовуючи (16) одержимо, що функція $\log M(\tau,r;f)$ опукла стосовно логарифма і неперервна по кожній зі змінних при фіксованій іншій.

Зафіксуємо τ. Звідси $A_{\frac{1}{\tau}r_1} \subset A_{\frac{1}{\tau}r_2}$ при $r_1 < r_2$, тоді $M(\tau,r_1;f) \leqslant M(\tau,r_2;f)$. Аналогічно для фіксованого r. Отже, функція $\log M(\tau,r;f)$ є неспадною по кожній зі змінних при фіксованій іншій.

Якщо $K(\log M) \neq \emptyset$, то рівність (15) одержуємо з леми 3. □

2.2. Пара істинних порядків неванліннової характеристики $T(\tau,r;f)$. Нехай функція f мероморфна в $\overline{A_{\frac{1}{\tau}r}}$.

Позначимо

$$m(\tau,r;f) = m(\frac{1}{\tau},f) + m(r,f) - 2m(1,f),$$

де $m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta$.

Означення 7 [2]. *Функція*

$$T(\tau,r;f) = m(\tau,r;f) + N(\tau,r;f) + c_f\log\frac{\tau}{r}, \quad \tau\geqslant 1, \quad r\geqslant 1,$$

де

$$N(\tau,r;f) = \int\limits_1^r \frac{n(\frac{1}{t},1;f)}{t}dt + \int\limits_1^r \frac{n(1,t;f)}{t}dt + n(T;f)\log\sqrt{\tau r},$$

T – одиничне коло, $n(\frac{1}{\tau}, r; f)$ – кількість полюсів функції f в $A_{\frac{1}{\tau}r}$, $n(T; f)$ – кількість полюсів функції f на T.

$$c_f = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{E_f^+} Im(\frac{f'}{f} dz) + \frac{1}{4\pi} \int\limits_{E_f^0} Im(\frac{f'}{f} dz),$$

$E_f^+ = \{z \in T : |f(z)| > 1\}, E_f^0 = \{z \in T : |f(z)| = 1\}$, *називається характеристикою Неванлінни функції f.*

Теорема B [2]. *Нехай $f(z)$ – мероморфна функція в кільці $A_{s_0 r_0}, s_0 < 1 < r_0$. Тоді функція $T(\tau, r, f)$, $\tau \geqslant 1$, $r \geqslant 1$ є невід'ємною, неперервною, неспадною і опуклою стосовно логарифма по кожній зі змінних при фіксованій іншій.*

Позначимо $T_1(\tau) = T(\tau, 1; f)$, $T_2(r) = T(1, r; f)$.

Теорема 2. *Нехай f мероморфна функція в $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Якщо $K(T) \neq \emptyset$, то*

$$OrdT(\tau, r; f) = \{(\rho_1^*, \rho_2^*)\},$$

де

$$\rho_1^* = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log T_1(\tau, f)}{\log \tau}, \quad \rho_2^* = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log T_2(r, f)}{\log r}.$$

Доведення. З означення 7 випливає, що $T(\tau, r; f) = T_1(\tau) + T_2(r)$. Якщо $A_{s_0 r_o} = \mathbb{C}\backslash\{0\}$, то з теореми B функція $T(\tau, r; f)$ є неспадною по кожній зі змінних при фіксованій іншій. Отож, функція $T_2(r)$ є неспадною. Аналогічно для $T_1(\tau)$. Отож, згідно з лемою 2 $T(\tau, r; f)$ має пару істинних порядків (ρ_1^*, ρ_2^*). □

1. *Rudin W.* Real and Complex Analysis / *Rudin W.* – McGraw-Hill, 1970.
2. *Kondratyuk A.A.* Meromorphic functions with several essential singularities, I / *Kondratyuk A.A.* // Matematychni Studii. – 2008. – Vol. 30. – P. 125-131.

TWO-PARAMETER GROWTH CHARACTERISTICS OF NONNEGATIVE AND MEROMORPHIC FUNCTIONS IN THE ANNULUS

[1]Oksana GNATIUK, [2]Olga GRESHKO, [3]Ostap STASHYSHYN

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: [1]oksanka.gnatyuk@gmail.com, [2]olgagreshko@gmail.com,
[3]ostap.stashyshyn@gmail.com

The notion of growth order is generalized for nonnegative functions of two variables. It allowes to introduce and study two-parameter growth characteristics of holomorphic and meromorphic functions in annuli.

Key words: the set of veritable orders, the couple of veritable orders, analytic function, meromorphic function.

ДВУПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РОСТА НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ И МЕРОМОРФНЫХ В КОЛЬЦЕ ФУНКЦИЙ

[1]Оксана ГНАТЮК, [2]Ольга ГРЕШКО, [3]Остап СТАШИШИН

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: [1]oksanka.gnatyuk@gmail.com, [2]olgagreshko@gmail.com,
[3]ostap.stashyshyn@gmail.com

Понятие порядка роста обобщается для неотрицательных функций двух переменных. Это разрешает вводить и изучать двупараметрические характеристики роста голоморфных и мероморфных функций в кольце.

Ключевые слова: множество истинных порядков, пара истинных порядков, аналитическая функция, мереморфная функция.

Стаття надійшла до редколегії 26.05.2009

Прийнята до друку 16.12.2009

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ — VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 2009. — Ser. Mech. Math. 2009.
Вип. 71. С. 71–77 — Is. 71. P. 71–77

УДК 517.547

ОБЕРНЕНІ ФОРМУЛИ ДЛЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ФУР'Є МЕРОМОРФНИХ У КІЛЬЦЯХ ФУНКЦІЙ

Мар'яна ГОЛДАК[1], **Андрій ХРИСТІЯНИН**[2]

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: [1]*marianagoldak@rambler.ru,* [2]*khrystiyanyn@ukr.net*

Отримано обернені формули для коефіцієнтів Фур'є мероморфних у кільцях функцій.

Ключові слова: коефіцієнти Фур'є, коефіцієнти Фур'є-Стільтьєса, аналітична функція, мероморфна функція.

1. Вступ. Метод вивчення асимптотичних властивостей цілих і мероморфних функцій, який ґрунтується на використанні ряду Фур'є для функції $\log|f(te^{i\theta})|$ як функції від θ, застосовують у працях багатьох математиків ([1]-[6]). Оскільки коефіцієнти Фур'є такої функції виражаються через її нулі та полюси, то за допомогою цих коефіцієнтів можна досліджувати їхній розподіл, а також асимптотичну поведінку функції.

Прямі формули для коефіцієнтів Фур'є функції $\log|f(te^{i\theta})|$, де f мероморфна в кільці, виявили в [6]. У цій праці ми доводимо обернені формули. Для мероморфних у крузі функцій аналогічні співвідношення довели в ([7, с. 106-107]). У [8], [9] отримано відповідні співвідношення для δ-субгармонійних у півплощині функцій.

2. Обернені формули для коефіцієнтів Фур'є мероморфних у кільцях функцій. Нехай f – мероморфна функція в $A = \{z : 1/R_0 < |z| < R_0\}$, $1 < R_0 \le +\infty$, з послідовністю нулів $\{a_j\}$ і послідовністю полюсів $\{b_j\}$. Через $c_k(t, f)$ позначимо коефіцієнти Фур'є функції $\log|f(te^{i\theta})|$,

$$c_k(t,f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ik\theta}\log|f(te^{i\theta})|\,d\theta, \quad k\in\mathbb{Z}, \quad \frac{1}{R_0} < t < R_0. \tag{1}$$

Позначимо $a_j = |a_j|e^{i\gamma_j}$,

$$n_k(t,f) = \sum_{\frac{1}{t}\leqslant|a_j|\leqslant t} e^{-ik\gamma_j},$$

$$N_k(r,f) = \int\limits_1^r \frac{n_k(t,f)}{t}\,dt, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Для початку розглянемо аналітичну в A функцію f і припустимо, що жоден з її нулів не лежить на одиничному колі. Тоді її логарифмічна похідна допускає розвинення в ряд Лорана

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_k z^k, \tag{3}$$

в деякому кільцевому околі одиничного кола.

Через A^* позначимо A без променів $\{z = \tau a, \tau \geq 1\}$, якщо $|a| > 1$, та $\{z = \tau a, 0 \leq \tau \leq 1\}$, якщо $|a| < 1$, де a є нулем функції.

Існує $m = m(f)$ ([6, с.14]) таке, що можна вибрати однозначну гілку $\log F$, $F(z) = z^{-m} f(z)$ в A^*. Оскільки F не має нулів на одиничному колі, то $\log F(z)$ голоморфна в деякому кільцевому околі одиничного кола, тому допускає розвинення в ряд Лорана

$$\log F(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k z^k. \tag{4}$$

З (4) випливає, що

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{k\neq 0} k\,\alpha_k z^{k-1}, \tag{5}$$

або

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z} + \sum_{k\neq 0} k\,\alpha_k z^{k-1}, \tag{6}$$

в деякому кільцевому околі одиничного кола. Порівнюючи (3) та (6), з єдиності розвинення в ряд Лорана знаходимо $\beta_{k-1} = k\,\alpha_k$, коли $k \neq 0$ і $\beta_{-1} = m$.

Наступні співвідношення ([6, с.58]) пов'язують коефіцієнти $c_k(r,f)$ з нулями функції f та послідовністю $\{\alpha_k\}$

$$c_0(r,f) + c_0(\frac{1}{r}, f) - 2c_0(1,f) = N_0(r,f),$$

$$c_k(t,f) = \frac{1}{2}(\alpha_k t^k + \overline{\alpha}_{-k} t^{-k}) + \frac{\operatorname{sign}(t-1)}{2k} \sum_{\substack{\max(1,\frac{1}{t})<|a_j|\leqslant \\ \leqslant\max(1,t)}} \left(\left(\frac{t}{a_j}\right)^k - \left(\frac{\overline{a_j}}{t}\right)^k \right), \tag{7}$$

$k \neq 0$, $\frac{1}{R_0} < t < R_0$.

Основний результат цієї статті – доведення обернених формул для коефіцієнтів Фур'є, які виражають коефіцієнти Фур'є-Стільтьєса $N_k(r,f)$ послідовності нулів $\{a_j\}$ у термінах послідовності $\{c_k(r,f)\}$.

Теорема 1. *Нехай функція f голоморфна в A з послідовністю нулів $\{a_j\}$, функції $c_k(r,f)$ та $N_k(r,f)$ визначені співвідношеннями (1) та (2) відповідно. Тоді*

$$N_0(r,f) = c_0(r,f) + c_0(\frac{1}{r}, f) - 2c_0(1,f),$$

$$N_k(r,f) = c_k(r,f) + c_k(\frac{1}{r},f) - k^2 \int_1^r \frac{dt}{t} \int_{\frac{1}{t}}^{t} \frac{c_k(u,f)}{u} du + C_k(1,f), \tag{8}$$

де $C_k(r,f) = \frac{1}{k} \sum\limits_{|a_j|=1} e^{-ik\gamma_j} - c_k(1,f)$, $1 \leqslant r < R_0$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Доведення. Припустимо спочатку, що жоден з нулів функції f не лежить на одиничному колі. Маємо,

$$\int_1^r \frac{dn_k(t)}{t^k} = \sum_{1<|a_j|\leqslant r} \frac{e^{-ik\gamma_j}}{|a_j|^k} + \sum_{\frac{1}{r}\leqslant|a_j|\leqslant 1} |a_j|^k e^{-ik\gamma_j}.$$

Приймемо $A_k = \dfrac{\alpha_k + \overline{\alpha}_{-k}}{2}$. З (7) випливає

$$c_k(r,f) + c_k\left(\frac{1}{r},f\right) = A_k\left(r^k + \frac{1}{r^k}\right) + \frac{1}{2\pi}\int_1^r \left[\left(\frac{r}{t}\right)^k - \left(\frac{t}{r}\right)^k\right] dn_k(t,f).$$

Інтегруючи частинами це співвідношення, отримаємо

$$c_k(r,f) + c_k\left(\frac{1}{r},f\right) = A_k\left(r^k + \frac{1}{r^k}\right) + \frac{k}{2}\int_1^r \left[\left(\frac{r}{t}\right)^k - \left(\frac{t}{r}\right)^k\right] \frac{N_k(t,f)}{t} dt + N_k(r,f). \tag{9}$$

Ми можемо розглядати (9) як інтегральне рівняння стосовно $N_k(t,f)$. Для його розв'язання позначимо

$$\Phi_k(r,f) = \frac{k}{2}\int_1^r \left[\left(\frac{r}{t}\right)^k - \left(\frac{t}{r}\right)^k\right] \frac{N_k(t,f)}{t} dt, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{10}$$

Знаходячи похідну другого порядку $\Phi_k(r,f)$ стосовно $\log r$ отримуємо таке диференціальне рівняння

$$\frac{d^2\Phi_k(r,f)}{(d\log r)^2} = k^2\left(c_k(r,f) + c_k\left(\frac{1}{r},f\right)\right) - A_k\left(r^k + \frac{1}{r^k}\right), \ \Phi_k(1,f) = 0, \ \Phi'_k(1,f) = 0. \tag{11}$$

Розв'язуючи диференціальне рівняння (11) і використовуючи (9) та (10), отримуємо

$$c_k(r,f) + c_k\left(\frac{1}{r},f\right) = k^2 \int_1^r \left(\int_1^\tau \frac{c_k(t,f) + c_k(\frac{1}{t},f)}{t} dt\right) \frac{d\tau}{\tau} + \alpha_k + \overline{\alpha}_{-k} + N_k(r,f). \tag{12}$$

З огляду на (4)

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log F(e^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log(e^{-im\theta} f(e^{i\theta})) e^{-ik\theta} d\theta.$$

Тому

$$\alpha_k + \overline{\alpha}_{-k} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \log|e^{-im\theta} f(e^{i\theta})| e^{-ik\theta} d\theta = 2c_k(1,f). \tag{13}$$

Зауважимо, що
$$\int\limits_1^{\tau} \frac{c_k(\frac{1}{t}, f)}{t} dt = \int\limits_{1/\tau}^{1} \frac{c_k(v, f)}{v} dv. \tag{14}$$
Співвідношення (2), (13) і (14) дають (8).

У загальному випадку, коли функція f має нулі $\{a_j\}$ на одиничному колі, розглянемо функцію
$$\widetilde{f}(z) = \frac{f(z)}{\prod\limits_{|a_j|=1} (1 - \frac{z}{a_j})}.$$
Тоді
$$c_k(\tau, \widetilde{f}) = c_k(\tau, f) - \sum_{|a_j|=1} c_k\left(\tau, 1 - \frac{z}{a_j}\right), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{15}$$

Функція $\widetilde{f}$ аналітична в A і не має нулів на одиничному колі. За теоремою 1
$$\begin{gathered} N_0(r, \widetilde{f}) = c_0(r, \widetilde{f}) + c_0\left(\frac{1}{r}, \widetilde{f}\right) - 2c_0(1, \widetilde{f}), \\ N_k(r, \widetilde{f}) = c_k(r, \widetilde{f}) + c_k\left(\frac{1}{r}, \widetilde{f}\right) - k^2 \int\limits_1^r \frac{dt}{t} \int\limits_{\frac{1}{t}}^{t} \frac{c_k(u, \widetilde{f})}{u} du - 2c_k(1, \widetilde{f}), \end{gathered} \tag{16}$$
$1 \leqslant r < R_0$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Але
$$N_k(r, \widetilde{f}) = N_k(r, f) - n_k(1, f) \cdot \log r.$$

Отже, при $k = 0$, враховуючи (15), маємо згідно з (16)
$$N_0(r, f) = c_0(r, f) - \sum_{|a_j|=1} c_0\left(r, 1 - \frac{z}{a_j}\right) + c_0\left(\frac{1}{r}, f\right) - \sum_{|a_j|=1} c_0\left(\frac{1}{r}, 1 - \frac{z}{a_j}\right) +$$
$$+ n_0(1, f) \log r - 2c_0(1, f), \quad r > 1.$$

Зауважимо, що
$$\sum_{|a_j|=1} c_0\left(r, 1 - \frac{z}{a_j}\right) = n_0(1, f) \log r, \quad \sum_{|a_j|=1} c_0\left(\frac{1}{r}, 1 - \frac{z}{a_j}\right) = 0, \quad r > 1,$$
(див., наприклад, [7, с. 10]).

Отож, одержуємо (8) для f при $k = 0$, оскільки $c_0(1, f) = c_0(1, \widetilde{f})$ (див. [10, с. 34]).

Нехай тепер $k \neq 0$. Маємо
$$c_k\left(\tau, 1 - \frac{z}{a_j}\right) = \begin{cases} -\dfrac{\tau^k}{2k} e^{-ik\gamma_j}, & 0 < \tau < 1, \\ -\dfrac{e^{-ik\gamma_j}}{2kr^k}, & \tau > 1. \end{cases} \tag{17}$$

Тоді (16) дає

$$N_k(r,f)=c_k(r,f)+\frac{1}{2k}\sum_{|a_j|=1}\frac{e^{-ik\gamma_j}}{r^k}+c_k\left(\frac{1}{r},f\right)+\frac{1}{2k}\sum_{|a_j|=1}\frac{e^{-ik\gamma_j}}{r^k}-\sum_{|a_j|=1}\frac{k^2e^{-ik\gamma_j}}{2k}\times$$

$$\times\int_1^r\frac{dt}{t}\left(\int_{\frac{1}{t}}^t\tau^{k-1}d\tau+\int_1^t\tau^{-k-1}d\tau\right)-k^2\int_1^r\frac{dt}{t}\int_{\frac{1}{t}}^t c_k(\tau,f)d\tau+n_k(1,f)\cdot\log r-2c_k(1,\widetilde{f})=$$

$$=c_k(r,f)+c_k\left(\frac{1}{r},f\right)-k^2\int_1^r\frac{dt}{t}\int_{\frac{1}{t}}^t c_k(\tau,f)d\tau-2c_k(1,\widetilde{f}). \tag{18}$$

Згідно з (15)

$$c_k(1,\widetilde{f})=c_k(1,f)-\sum_{|a_j|=1}c_k\left(1,1-\frac{z}{a_j}\right),\quad k\in\mathbb{Z}.$$

З огляду на неперервність коефіцієнтів $c_k(\tau,f)$, враховуючи (17), маємо

$$c_k\left(1,1-\frac{z}{a_j}\right)=-\frac{e^{-ik\gamma_j}}{2k}.$$

Підставляючи це у (18), одержимо (8). Теорему доведено. □

Якщо f мероморфна, то наявність полюсів суттєво не ускладнює доведення, і ми отримаємо таку загальнішу теорему.

Теорема 2. *Нехай f – мероморфна функція в $A=\{z\ :\ 1/R_0<|z|<R_0\}$, $R_0\le+\infty$, відмінна від тотожного нуля з послідовністю нулів $\{a_j\}$, $a_j=|a_j|e^{i\gamma_j}$ та послідовністю полюсів $\{b_j\}$, $b_j=|b_j|e^{i\delta_j}$. Тоді*

$$N_k(r,f)=c_k(r,f)+c_k\left(\frac{1}{r},f\right)-k^2\int_1^r\frac{dt}{t}\int_{\frac{1}{t}}^t\frac{c_k(u,f)}{u}du-2c_k(1,f)+$$

$$+\frac{1}{k}\sum_{|a_j|=1}e^{-ik\gamma_j}-\frac{1}{k}\sum_{|b_j|=1}e^{-ik\delta_j},$$

де

$$N_k(r,f)=\int_1^r\frac{n_k(t,f)}{t}dt,$$

$$n_k(t,f)=\sum_{\frac{1}{t}\le|a_j|\le t}e^{-ik\gamma_j}-\sum_{\frac{1}{t}\le|b_j|\le t}e^{-ik\delta_j},$$

$1\leqslant r<R_0$, $k\in\mathbb{Z}$.

1. *Rubel L.A.* A Fourier series method for entire functions / *Rubel L.A.* // Duke Math. J. – 1963. – Vol. 30. – P. 437-442.

2. *Rubel L.A.* A Fourier series method for meromorphic and entire functions / *Rubel L.A., Taylor B.A.* // Bull. Soc. Math. France. – 1968. – Vol. 96. – P. 53-96.
3. *Miles J.B.* Quotient representations of meromorphic functions / *Miles J.B.* // J. d'Analyse Math. – 1972. – Vol. 25. – P. 371-388.
4. *Khrystiyanyn A.Ya.* On the Nevanlinna theory for meromorphic functions on annuli, I / *Khrystiyanyn A.Ya., Kondratyuk A.A.* // Mat. Stud. – 2005. – Vol. 23, №1 – P. 19-30.
5. *Khrystiyanyn A.Ya.* On the Nevanlinna theory for meromorphic functions on annuli, II / *Khrystiyanyn A.Ya., Kondratyuk A.A.* // Mat. Stud. – 2005. – Vol. 24, №2 – P. 57-68.
6. *Kondratyuk A.* Meromorphic functions in multiply connected domains / *Kondratyuk A., Laine I.* – Joensuu-L'viv, 2006.
7. *Кондратюк А.А.* Ряды Фурье и мероморфные функции / *Кондратюк А.А.* – Львов: Выща шк., 1988.
8. *Malyutin K.G.* Fourier series and delta-subharmonic functions of zero-type in a halfplane / *Malyutin K.G., Malyutina T.I.* // Mat. Stud. – 2008. – Vol. 30, №2. – P. 132-138.
9. *Malyutin K.G.* Reverse formulae for Fourier coefficients of delta-subharmonic functions / *Malyutin K.G.* // Mat. Stud. – 2009. – Vol. 32, №2. (у друці)
10. *Гольдберг А.А.* Распределение значений мероморфных функций / *Гольдберг А.А., Островский И.В.* – Москва: Наука, 1970.

INVERSE FORMULAE FOR THE FOURIER COEFFICIENTS OF MEROMORPHIC FUNCTIONS ON ANNULI

Mariana GOLDAK[1], Andriy KHRYSTIYANYN[2]

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: [1]marianagoldak@rambler.ru, [2]khrystiyanyn@ukr.net

We establish inverse relations for the Fourier coefficients of meromorphic functions on annuli.

Key words: analytic function, meromorphic function, Fourier coefficients, Fourier-Stieltjes coefficients.

ОБРАТНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ МЕРОМОРФНЫХ В КОЛЬЦАХ ФУНКЦИЙ

Марьяна ГОЛДАК[1], Андрей ХРИСТИЯНИН[2]

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: [1]marianagoldak@rambler.ru, [2]khrystiyanyn@ukr.net

Получены обратные формулы для коэффициентов Фурье мероморфных в кольцах функций.

Ключевые слова: аналитическая функция, мероморфная функция, коэффициенты Фурье, коэффициенты Фурье-Стилтьеса.

Стаття надійшла до редколегії 20.10.2009

Прийнята до друку 16.12.2009

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2009.
Вип. 71. С. 78–87

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech. Math. 2009.
Is. 71. P. 78–87

УДК 517.95

ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА ПЕРЕД ПЕРШОЮ ПОХІДНОЮ У ПАРАБОЛІЧНОМУ РІВНЯННІ З ВИРОДЖЕННЯМ

Надія ГРИНЦІВ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: hryntsiv@ukr.net

Знайдено умови існування та єдиності класичного розв'язку оберненої задачі визначення залежного від часу коефіцієнта при першій похідній невідомої функції в одновимірному параболічному рівнянні з виродженням. Досліджено випадок слабкого степеневого виродження.

Ключові слова: коефіцієнтна обернена задача, параболічне рівняння, слабке степеневе виродження.

1. Вступ. Найрізноманітнішими застосуваннями в економіці, медицині, ракетобудуванні, геофізиці та інших галузях науки та техніки пояснюється бурхливий розвиток теорії обернених задач в останні десятиліття. Важливе місце серед цих задач займають коефіцієнтні обернені задачі для рівнянь параболічного типу.

Сьогодні досить детально вивчені обернені задачі визначення залежного від часу коефіцієнта при старшій похідній у параболічних рівняннях [1]-[5]. Дослідженню обернених задач визначення залежного від часу молодшого коефіцієнта в одновимірному параболічному рівнянні присвячені праці [6-8]. В [6] в області $Q_T = (0,1) \times (0,T]$ знайдено умови локального за часом існування, єдиності та неперервної залежності від вихідних даних розв'язку $(p(t), u(x,t))$ першої крайової задачі для рівняння

$$u_t = u_{xx} + p(t)u_x \tag{1}$$

з умовою перевизначення

$$m(t) = \int_0^{b(t)} u(x,t)dx, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

де $0 < b(t) < 1$, $0 \leqslant t \leqslant T$ – задана функція.

Умови глобального існування пари функцій (p, u), що задовольняє (1) в області $\Omega_T = \{(x,t) \ : \ 0 < x < 1, \ t > 0\}$, знайдено в [7]. Як додаткову інформацію в цій праці використано умову

$$u_x(0,t) + p(t)u(0,t) = g(t), \quad t > 0. \tag{2}$$

Дослідження такої задачі продовжено в [8], де отримано умови локального існування розв'язку, а також умови, за яких згадана задача не може мати глобального розв'язку.

За допомогою теореми Шаудера в [9] одержано умови існування розв'язку оберненої задачі визначення коефіцієнта при першій похідній невідомої функції. Шуканий коефіцієнт має вигляд квадратичної за просторовою змінною функції з трьома невідомими параметрами, що залежать від часу. Окремо визначено умови єдиності розв'язку цієї задачі.

Обернені задачі визначення залежного від часу коефіцієнта при першій похідній у параболічному рівнянні в області з вільною межею розглянуто в [10]-[12]. Задачі одночасного визначення залежних від часу старшого та молодшого коефіцієнтів в одновимірному параболічному рівнянні вивчали в [13], [14].

Обернені задачі для параболічних рівнянь з виродженням вивчені мало. Серед відомих результатів можна зазначити [15], [16], в яких розглядали обернені задачі визначення коефіцієнта $a = a(t)$, $a(t) > 0$, $t \in [0,T]$ в одновимірному параболічному рівнянні

$$u_t = a(t)t^\beta u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t), \quad (x,t) \in (0,h) \times (0,T),$$

із заданими початковою умовою, крайовими умовами першого роду та умовою перевизначення вигляду

$$a(t)t^\beta u_x(0,t) = \mu(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Досліджено випадки слабкого $(0 < \beta < 1)$ та сильного $(\beta \geqslant 1)$ степеневого виродження.

У цій праці розглянуто обернену задачу визначення залежного від часу коефіцієнта перед першою похідною в одновимірному параболічному рівнянні зі слабким степеневим виродженням.

2. Формулювання задачі та головні результати. В області $Q_T = \{(x,t)\colon 0 < x < h, \ 0 < t < T\}$ розглядається обернена задача визначення залежного від часу коефіцієнта $b = b(t)$ перед молодшою похідною у параболічному рівнянні з виродженням

$$u_t = a(t)t^\beta u_{xx} + b(t)u_x + c(x,t)u + f(x,t) \tag{3}$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant h, \tag{4}$$

крайовими умовами

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(h,t) = \mu_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{5}$$

та інтегральною умовою перевизначення

$$\int_0^h u(x,t)dx = \mu_3(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{6}$$

Досліджується випадок слабкого виродження, коли $0 < \beta < 1$.

Означення 1. *Під розв'язком задачі (3)-(6) розуміють пару функцій* (b, u) *з класу* $C[0,T] \times C^{2,1}(Q_T) \cap C^1(\overline{Q}_T)$, *що задовольняє рівняння (3) та умови (4)-(6).*

На підставі теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора знайдено умови на вихідні дані, за яких існує розв'язок задачі (3)-(6). Доведення єдиності розв'язку згаданої задачі ґрунтується на властивостях розв'язків інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду.

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються умови:*

1) $a \in C[0,T]$, $\varphi \in C^1[0,h]$, $\mu_i \in C^1[0,T]$, $i = \overline{1,3}$, $c, f \in C(\overline{Q}_T)$ *та задовольняють умову Гельдера за змінною* x *з показником* α, $0 < \alpha < 1$;

2) $a(t) > 0$, $t \in [0,T]$, $\mu_1(t) - \mu_2(t) \neq 0$, $t \in [0,T]$;

3) $\varphi(0) = \mu_1(0)$, $\varphi(h) = \mu_2(0)$, $\int_0^h \varphi(x)dx = \mu_3(0)$.

Тоді можна зазначити таке число T_0, $0 < T_0 \leqslant T$, *що визначається вихідними даними задачі (3)-(6), що розв'язок* (b, u) *згаданої задачі існує при* $x \in [0,h]$, $t \in [0,T_0]$.

Теорема 2. *При виконанні умови* $\mu_1(t) - \mu_2(t) \neq 0$, $t \in [0,T]$, *задача (3)-(6) не може мати більше одного розв'язку.*

3. Зведення задачі (3)-(6) до системи рівнянь.

Щоб звести задачу (3)-(6) до системи рівнянь, використаємо функції Гріна. Позначимо через $G_k(x,t,\xi,\tau)$, $k = 1, 2$, функції Гріна першої ($k = 1$) та другої ($k = 2$) крайових задач для рівняння

$$u_t = a(t)t^\beta u_{xx}.$$

Вони визначаються формулою

$$G_k(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Bigg(\exp\Bigg(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))} \Bigg) + \\ + (-1)^k \exp\Bigg(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))} \Bigg) \Bigg), \quad k = 1, 2, \tag{7}$$

де $\theta(t) = \int\limits_0^t a(\sigma)\sigma^\beta d\sigma$.

Припустимо тимчасово, що функція $b = b(t)$ відома. Використовуючи властивості функцій Гріна [17, с. 13], задачу (3)-(5) зведемо до системи інтегральних рівнянь стосовно невідомих $u(x,t)$, $v(x,t) \equiv u_x(x,t)$

$$u(x,t) = \int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,0)\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^t G_{1\xi}(x,t,0,\tau)a(\tau)\tau^\beta \mu_1(\tau)d\tau - \int\limits_0^t G_{1\xi}(x,t,h,\tau)a(\tau)\tau^\beta \mu_2(\tau)d\tau +$$

$$+\int_0^t\int_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)(f(\xi,\tau)+b(\tau)v(\xi,\tau)+c(\xi,\tau)u(\xi,\tau))d\xi d\tau, \quad (x,t)\in\overline{Q}_T, \tag{8}$$

$$v(x,t)=\int_0^h G_2(x,t,\xi,0)\varphi'(\xi)d\xi-\int_0^t G_2(x,t,0,\tau)\mu_1'(\tau)d\tau+\int_0^t G_2(x,t,h,\tau)\mu_2'(\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)(f(\xi,\tau)+b(\tau)v(\xi,\tau)+c(\xi,\tau)u(\xi,\tau))d\xi d\tau, \quad (x,t)\in\overline{Q}_T. \tag{9}$$

Для того, щоб отримати рівняння стосовно функції $b=b(t)$, проінтегруємо рівняння (3). Враховуючи (4)-(6), знаходимо

$$b(t)=\left(\mu_3'(t)-a(t)t^{\beta}(v(h,t)-v(0,t))-\int_0^h(f(x,t)+c(x,t)u(x,t))dx\right)\times$$
$$\times(\mu_2(t)-\mu_1(t))^{-1}, \quad t\in[0,T]. \tag{10}$$

Задача (3)-(6) та система рівнянь (8)-(10) еквівалентні в тому сенсі, якщо (b,u) є розв'язком задачі (3)-(6), то (b,u,v) є неперервним розв'язком системи рівнянь (8)-(10). Покажемо, що правильне й обернене твердження: якщо $(b,u,v)\in$ $\in C[0,T]\times(C(\overline{Q}_T))^2$ є розв'язком системи рівнянь (8)-(10), то пара функцій (b,u) – розв'язок задачі (3)-(6).

Умови на вихідні дані дають змогу продиференціювати рівність (8) за просторовою змінною. Враховуючи властивості функцій Гріна та припущення теореми 1, отримуємо

$$u_x(x,t)=\int_0^h G_2(x,t,\xi,0)\varphi'(\xi)d\xi+\int_0^t G_2(x,t,0,\tau)\mu_1'(\tau)d\tau-\int_0^t G_2(x,t,h,\tau)\mu_2(\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)(f(\xi,\tau)+b(\tau)v(\xi,\tau)+c(\xi,\tau)u(\xi,\tau))d\xi d\tau, \quad (x,t)\in\overline{Q}_T. \tag{11}$$

Праві частини рівностей (9) та (11) збігаються, тому $u\in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$ і $v(x,t)\equiv u_x(x,t)$. Використовуючи цей факт в (9), отримуємо, що $u\in C^{2,1}(Q_T)\cap C^1(\overline{Q}_T)$ та задовольняє (3)-(5), а умова (6) еквівалентна умові (10).

4. Апріорні оцінки розв'язків системи рівнянь (8)-(10).

Розглянемо задачу (3)-(5). Згідно з принципом максимуму [18, с. 22] для функції $u(x,t)$ отримуємо оцінку

$$|u(x,t)|\leqslant M_1, \quad (x,t)\in\overline{Q}_T, \tag{12}$$

де стала M_1 визначається вихідними даними згаданої задачі.

Позначимо $V(t) \equiv \max\limits_{x\in[0,h]} |v(x,t)|$. Враховуючи (12) та введене позначення, з рівняння (10) матимемо

$$|b(t)| \leqslant C_1 + C_2 t^{\beta} V(t), \quad t \in [0,T]. \tag{13}$$

Враховуючи відомі оцінки функцій Гріна [17, с. 12]

$$\int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,0)d\xi = 1, \qquad G_2(x,t,\xi,\tau) \leqslant C_3 + \frac{C_4}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}},$$

$$\int\limits_0^h |G_{1x}(x,t,\xi,\tau)|d\xi \leqslant \frac{C_5}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}},$$

з (9) для $V(t)$ одержуємо нерівність

$$V(t) \leqslant C_6 + C_7 \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} + C_8 \int\limits_0^t \frac{|b(\tau)|V(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} d\tau, \quad t \in [0,T],$$

або, з врахуванням (13),

$$V(t) \leqslant C_6 + C_7 \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} + C_9 \int\limits_0^t \frac{V(\tau)+\tau^{\beta}V^2(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} d\tau, \quad t \in [0,T]. \tag{14}$$

Розглянемо інтеграл $I = \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}$. Використовуючи означення функції $\theta(t)$, знаходимо

$$I = \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\int\limits_\tau^t a(\sigma)\sigma^{\beta}d\sigma}} \leqslant \sqrt{\frac{1+\beta}{A_0}} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t^{1+\beta}-\tau^{1+\beta}}},$$

де $A_0 \equiv \min\limits_{[0,T]} a(t)$. В останньому інтегралі зробимо заміну змінних $z = \frac{\tau}{t}$. Тоді

$$I \leqslant \sqrt{\frac{1+\beta}{A_0}} t^{\frac{1-\beta}{2}} \int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^{1+\beta}}} \leqslant C_{10},$$

оскільки розглядається випадок слабкого виродження. Враховуючи отриману оцінку в (14), приходимо до нерівності

$$V(t) \leqslant C_{11} + C_{12} \int\limits_0^t \frac{V(\tau)+V^2(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} d\tau,$$

або, позначивши $V_1(t) \equiv V(t) + \dfrac{1}{2}$,

$$V_1(t) \leqslant C_{13} + C_{14} \int\limits_0^t \frac{V_1^2(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} d\tau, \quad t \in [0,T]. \tag{15}$$

Обидві частини нерівності (15) піднесемо до квадрата. Використовуючи нерівності Коші та Коші-Буняковського, отримаємо

$$V_1^2(t) \leqslant 2C_{13}^2 + 2C_{14}^2 \int\limits_0^t \frac{V_1^4(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} d\tau \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \leqslant$$

$$\leqslant C_{15} + C_{16} \int\limits_0^t \frac{V_1^4(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} d\tau.$$

В останній нерівності змінимо t на σ і, домноживши на $\dfrac{1}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}$, проінтегруємо її по σ від 0 до t. Одержимо

$$\int\limits_0^t \frac{V_1^2(\sigma) d\sigma}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}} \leqslant C_{17} + C_{16} \int\limits_0^t \frac{d\sigma}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}} \int\limits_0^\sigma \frac{V_1^4(\tau) d\tau}{\sqrt{\theta(\sigma)-\theta(\tau)}},$$

звідки, змінюючи порядок інтегрування та враховуючи рівність

$$\int\limits_\tau^t \frac{a(\sigma)\sigma^\beta d\sigma}{\sqrt{(\theta(t)-\theta(\sigma))(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}} = \pi,$$

знаходимо

$$\int\limits_0^t \frac{V_1^2(\sigma) d\sigma}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}} \leqslant C_{17} + C_{18} \int\limits_0^t \frac{V_1^4(\tau)}{\tau^\beta} d\tau, \quad t \in [0,T]. \tag{16}$$

Підставляючи (16) в (15), отримуємо нерівність стосовно $V_1(t)$

$$V_1(t) \leqslant C_{19} + C_{20} \int\limits_0^t \frac{V_1^4(\tau)}{\tau^\beta} d\tau, \quad t \in [0,T]. \tag{17}$$

Нерівність (17) розв'язуємо тим самим способом, що й в [19]. В результаті одержимо

$$V_1(t) \leqslant M_2, \quad t \in [0,T_0], \tag{18}$$

де число T_0, $0 < T_0 \leqslant T$ задовольняє умову

$$1 - \beta - 3C_{19}^3 C_{20} T_0^{1-\beta} > 0.$$

Повертаючись до введених позначень, отримаємо

$$|v(x,t)| \leqslant M_2, \quad (x,t) \in \overline{Q}_{T_0}, \tag{19}$$

$$|b(t)| \leqslant M_3, \quad t \in [0,T_0]. \tag{20}$$

Отож, апріорні оцінки розв'язків системи рівнянь (8)-(10) знайдено.

5. Доведення теореми 1. Для доведення існування розв'язку системи рівнянь (8)-(10) використаємо наслідок до теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора [20, с. 381]. Для цього згадану систему подамо у вигляді операторного рівняння

$$w = Pw,$$

де $w = (b, u, v)$, а оператор P визначається правими частинами рівностей (8)-(10).

Через N позначимо множину $N = \{(b, u, v) \in C[0, T_0] \times (C(\overline{Q}_{T_0}))^2 \ : \ |b(t)| < M_3,$ $t \in [0, T_0], \ |u(x,t)| \leqslant M_1, \ |v(x,t)| \leqslant M_2, \ (x,t) \in \overline{Q}_{T_0}\}$. Вибрана таким способом множина N замкнена й опукла. Те, що оператор P цілком неперервний на N, доводиться як в [17, с. 27]. Отже, умови теореми Шаудера виконуються, а це означає, що існує розв'язок (b, u, v) системи рівнянь (8)-(10), а відповідно і розв'язок (b, u) задачі (3)-(6) при $y \in [0, 1]$, $t \in [0, T_0]$. Теорему 1 доведено.

6. Доведення теореми 2. Єдиність розв'язку задачі (3)-(6) доводитимемо від супротивного. Припустимо, що існує два розв'язки $(b_i(t), u_i(x,t))$, $i = 1, 2$, задачі (3)-(6). Стосовно різниць $b(t) = b_1(t) - b_2(t)$, $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ отримаємо задачу:

$$u_t = a(t)t^\beta u_{xx} + b_1(t)u_x + c(x,t)u + b(t)u_{2x}(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{21}$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in [0, h], \tag{22}$$

$$u(0,t) = u(h,t) = 0, \quad t \in [0, T], \tag{23}$$

$$\int_0^h u(x,t)dx = 0, \quad t \in [0, T]. \tag{24}$$

За допомогою функції Гріна $G_1^*(x, t, \xi, \tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$u_t = a(t)t^\beta u_{xx} + b_1(t)u_x + c(x,t)u$$

розв'язок задачі (21)-(23) подамо у вигляді

$$u(x,t) = \int_0^t \int_0^h G_1^*(x, t, \xi, \tau) b(\tau) u_{2\xi}(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (x,t) \in \overline{Q}_T. \tag{25}$$

Продиференціювавши (25) за змінною x, знаходимо

$$u_x(x,t) = \int_0^t \int_0^h G_{1x}^*(x, t, \xi, \tau) b(\tau) u_{2\xi}(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (x,t) \in \overline{Q}_T. \tag{26}$$

З рівності (24) шляхом диференціювання отримуємо рівняння стосовно $b(t)$

$$b(t) = -\frac{1}{\mu_2(t) - \mu_1(t)} \left(a(t)t^\beta (u_x(h,t) - u_x(0,t)) + \int_0^h c(x,t)u(x,t)dx \right), \ t \in [0, T]. \tag{27}$$

Підставимо (25), (26) в (27). В результаті отримаємо інтегральне рівняння

$$b(t) = \int_0^t K(t,\tau)b(\tau)d\tau, \quad t \in [0,T], \tag{28}$$

де

$$K(t,\tau) = \frac{1}{\mu_1(t)-\mu_2(t)}\int_0^h c(x,t)dx\int_0^h G_1^*(x,t,\xi,\tau)u_{2\xi}(\xi,\tau)d\xi +$$

$$+\frac{a(t)t^\beta}{\mu_1(t)-\mu_2(t)}\int_0^h (G_{1x}^*(h,t,\xi,\tau)-G_{1x}^*(0,t,\xi,\tau))u_{2\xi}(\xi,\tau)d\xi. \tag{29}$$

Використовуючи відомі оцінки функції Гріна [18, с. 468]

$$|D_x^s G_1^*(x,t,\xi,\tau)| \leqslant C_{21}(t-\tau)^{-\frac{1+s}{2}}\exp\left(-C_{22}\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right), \quad s=0,1,$$

оцінимо ядро рівняння (28)

$$|K(t,\tau)| \leqslant \frac{C_{23}}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\int_0^h e^{-\frac{C_{22}(x-\xi)^2}{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\xi + \frac{C_{24}}{\theta(t)-\theta(\tau)}\int_0^h e^{-\frac{C_{22}(x-\xi)^2}{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\xi.$$

Після заміни змінних

$$z = \sqrt{\frac{C_{22}}{\theta(t)-\theta(\tau)}}(\xi - x),$$

враховуючи значення інтеграла Гауса, знаходимо

$$|K(t,\tau)| \leqslant \frac{C_{25}}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}.$$

Це означає, що ядро інтегрального рівняння (28) має інтегровну особливість, і рівняння (28) має єдиний тривіальний розв'язок

$$b(t) \equiv 0, \quad t \in [0,T].$$

Використовуючи цей факт в задачі (21)-(23), знаходимо

$$v(x,t) \equiv 0, \quad (x,t) \in \overline{Q}_T,$$

що й завершує доведення теореми.

1. *Jones B.F.* The determination of a coefficient in a parabolic equation. Part I. Existence and uniqueness / *Jones B.F.* // J. Math. Mech. – 1962. – Vol. 11, №6. – P. 907-918.
2. *Cannon J.R.* Recovering a time dependent coefficient in a parabolic differential equation / *Cannon J.R., Rundell W.* // J. Math. Anal. Appl. – 1991. – Vol. 160. – P. 572-582.
3. *Иванчов Н.И.* Об определении зависящего от времени старшего коэффициента в параболическом уравнении / *Иванчов Н.И.* // Сиб. мат. журн. – 1998. – Т. 39, №3. – С. 539-550.

4. *Ivanchov M.I.* Inverse problem for semilinear parabolic equation / *Ivanchov M.I.* // Мат. студії. – 2008. – Т. 29, №2. – С. 181-191.
5. *Пабирівська Н.В.* Визначення старшого коефіцієнта у параболічному рівнянні / *Пабирівська Н. В., Власов В. А.* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – Т. 49, №3. – С. 18-25.
6. *Cannon J.R.* Determination of the coefficient of u_x in a linear parabolic equation / *Cannon J.R., Peres-Esteva S.* // Inverse Problems. – 1993. – Vol. 10, №3. – P. 521-531.
7. *Hong-Ming Yin.* Global solvability for some parabolic inverse problems / *Hong-Ming Yin.* // J. Math. Anal. Appl. – 1991. – P. 392-403.
8. *Trong D.D.* Coefficient identification for a parabolic equation / *Trong D.D., Ang D.D.* // Inverse Problems. – 1994. – Vol. 10, №3. – P. 733-752.
9. *Пабирівська Н.* Визначення молодшого коефіцієнта у параболічному рівнянні / *Пабирівська Н., Вареник О.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 181-189.
10. *Гринців Н.М.* Обернені задачі визначення коефіцієнта при першій похідній в параболічному рівнянні в області з вільною межею / *Гринців Н.М., Снітко Г.А.* // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 181-189.
11. *Снітко Г.А.* Обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею / *Снітко Г.А.* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – Т. 50, №4. – С. 7-18.
12. *Снітко Г.А.* Визначення невідомого множника в коефіцієнті при першій похідній в параболічному рівнянні в області з вільною межею / *Снітко Г.А.* // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.- мат. – 2007. – Вип. 67. – С. 233-247.
13. *Иванчов Н.И.* Об определении двух зависящих от времени коэффициентов в параболическом уравнении / *Иванчов Н.И., Пабыривськa Н.В.* // Сиб. мат. журн. – 2002. – Т. 43, №2. – С. 406-413.
14. *Пабирівська Н.В.* Теплові моменти в оберненій задачі для параболічного рівняння / *Пабирівська Н.В.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 56. – С. 142-149.
15. *Салдіна Н.В.* Ідентифікація старшого коефіцієнта в параболічному рівнянні з виродженням / *Салдіна Н.В.* // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. – 2006. – Вип. 288. Матем. – С. 99-106.
16. *Іванчов М.І.* Обернена задача для параболічного рівняння з сильним степеневим виродженням / *Іванчов М.І., Салдіна Н.В.* // Укр. мат. журн. – 2006. – Т. 58, №11. – С. 1487-1500.
17. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type / *Ivanchov M.* – Lviv: VNTL Publishers, 2003.
18. *Ладыженская О.А.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* – М.: Наука, 1967.
19. *Гринців Н.М.* Обернені задачі для параболічного рівняння з виродженням в області з вільною межею / *Гринців Н.М.* // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.- мат. – 2006. – Вип. 66. – С. 45-59.
20. *Ладыженская О.А.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* – М.: Наука, 1973.

DETERMINATION OF THE COEFFICIENT OF THE FIRST DERIVATIVE IN A DEGENERATE PARABOLIC EQUATION

Nadiya HRYNTSIV

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: hryntsiv@ukr.net

It is established conditions of existence and uniqueness of the classical solution to the inverse problem of determination the time dependent coefficient of the first derivative of unknown function at the one-dimensional degenerate parabolic equation. The case of weak power degeneration is investigated.

Key words: coefficient inverse problem, parabolic equation, weak power degeneration.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПРИ ПЕРВОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В ВЫРОЖДАЮЩЕМСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ

Надежда ГРЫНЦИВ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: hryntsiv@ukr.net

Найдены условия существования и единственности классического решения обратной задачи определения зависящего от времени коэффициента при первой производной в одномерном параболическом уравнении. Исследовано случай слабого степенного вырождения.

Ключевые слова: коэффициентная обратная задача, параболическое уравнение, слабое степенное вырождение.

Стаття надійшла до редколегії 27.10.2009

Прийнята до друку 16.12.2009

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2009. *Ser. Mech. Math. 2009.*
Вип. 71. С. 88–91 *Is. 71. P. 88–91*

УДК 512.522.12

ПРАВЕ КВАЗІДУОКІЛЬЦЕ СЛАБКОГО СТАБІЛЬНОГО РАНГУ 1 Є ЛІВИМ КВАЗІДУОКІЛЬЦЕМ

Ольга ДОМША

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: olya.domsha@i.ua

Лам і Дугас сформулювали задачу знаходження правого квазідуокільця, яке не є лівим квазідуокільцем. Введено поняття кільця слабкого стабільного рангу 1 і показано, що область Безу слабкого стабільного рангу 1 є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли вона є дуообластю. Доведено також, що праве квазідуокільце слабкого стабільного рангу 1 є лівим квазідуокільцем.

Ключові слова: кільце стабільного рангу 1, кільце слабкого стабільного рангу 1, квазідуокільце, кільце елементарних дільників.

Стабільний ранг кільця – один з найважливіших інваріантів K-теорії. Введене Х. Басом [1] поняття і сьогодні відіграє важливу роль у розв'язанні багатьох важливих проблем не тільки K-теорії, а й теорії кілець [2-4]. Особлива роль серед кілець належить кільцям стабільного рангу 1, тобто кільцям, в яких для довільних елементів $a, b \in R$ таких, що $Ra + Rb = R$ існує елемент $t \in R$ такий, що $a + tb$ – зворотний елемент кільця R [5-7]. Виділимо в цьому класі кілець підклас, який назвемо кільцем слабкого стабільного рангу 1.

Означення 1. *Кільце R називається кільцем слабкого стабільного рангу 1, якщо для довільних елементів $a, b \in R$ таких, що $Ra + Rb = R$ існує елемент $t \in R$ такий, що $a + tb = 1$.*

Прикладом такого кільця є довільне кільце стабільного рангу 1, в якому група зворотних елементів двоелементна.

Нагадаємо, що кільце є правим (лівим) квазідуокільцем, якщо довільний максимальний правий (лівий) ідеал кільця двобічний і кільце називається квазідуокільцем, якщо воно є правим і лівим квазідуокільцем [8]. Вартий уваги такий відомий результат про квазідуокільця.

Теорема 1. *Для довільного кільця R такі твердження еквівалентні:*
1) R-праве (ліве) квазідуокільце;
2) для довільних елементів $a, b \in R$ якщо $Ra + Rb = R$ $(aR + bR = R)$, то $aR + bR = R$ $(Ra + Rb = R)$.

Теорема 2. *Нехай R праве квазідуокільце слабкого стабільного рангу 1. Тоді R є квазідуокільцем.*

Доведення. Нехай елементи $a, b \in R$ такі, що

$$aR + bR = R.$$

Оскільки кільце слабкого стабільного рангу 1 є кільцем стабільного рангу 1, то існує такий елемент $t \in R$, що $a + bt = u$, де $u \in U(R)$. Тобто $Ra + Rb = R$.

Згідно з означенням кільця слабкого стабільного рангу 1 існує елемент $x \in R$ такий, що $xa + t = 1$. Звідси $t = 1 - xa$, а отже, $a + b(1 - xa) = u$. Тоді

$$a + b - bxa = b + (1 - bx)a = u,$$

де u - зворотний елемент R, тобто $Ra + Rb = R$. Враховуючи теорему 1, R є лівим квазідуокільцем. □

Означення 2. [9] *Кільце R називається кільцем елементарних дільників, якщо для довільної матриці A порядку $n \times m$ над R існують такі зворотні матриці $P \in GL_n(R)$, $Q \in GL_m(R)$, що:*
1) $PAQ = D$ – діагональна матриця, $D = (d_i)$;
2) $Rd_{i+1}R \subseteq Rd_i \cap d_iR$.

Теорема 3. *Область Безу слабкого стабільного рангу 1 є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли вона є дуообластю.*

Доведення. Достатність. Нехай R є дуообластю слабкого стабільного рангу 1. Враховуючи [2, 9], достатньо показати, що для довільних елементів $a, b, c \in R$ таких, що $aR + bR + cR = R$ матриця

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$$

володіє канонічною діагональною редукцією.

Нехай $Ra + Rb = Rd$. Тоді існує елемент $t \in R$ такий, що $ta + b = d$. Оскільки $dR = Rd$ і $aR + bR = dR$, $aR + bR + cR = R$, то $dR + cR = R$ та існує елемент s такий, що $d + cs = 1$. Тоді

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ ta + b & c \end{pmatrix}$$

і

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ ta + b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ ta + b + cs & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & c \end{pmatrix} = B.$$

Очевидно, що елементарними перетвореннями рядків і стовпців матриця B, а отже, і матриця A зводиться до канонічного діагонального вигляду. Тобто R є кільцем елементарних дільників.

Необхідність. Нехай R є областю елементарних дільників слабкого стабільного рангу 1. Тоді для довільного $a \in R$ існують зворотні матриці $P = (p_{ij})_1^2$, $Q = (q_{ij})_1^2$, що

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} P = Q \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \tag{1}$$

де

$$RbR \subseteq zR \cap Rz. \tag{2}$$

Розглянемо (1)

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

$$ap_{11} = q_{11}z, ap_{21} = q_{21}z. \tag{3}$$

Із того, що матриці P, Q – оборотні, враховуючи (2), отримуємо

$$RaR = RbR. \tag{4}$$

Оскільки $Rp_{11}+Rp_{21} = R$, згідно з теоремою 1, $p_{11}R+p_{21}R = R$, тобто $p_{11}u+p_{21}v = 1$ для деяких елементів $u, v \in R$. Тоді з (2) отримуємо $a = q_{11}zu + q_{21}zv$. Отже,

$$a \in RzR. \tag{5}$$

Враховуючи (2) і (4), (5), одержуємо

$$RaR = zR = Rz. \tag{6}$$

Оскільки R – область, то на підставі (6) $a = za_0$, $a = a_1z$ для деяких елементів $a_0, a_1 \in R$, причому $Ra_0R = Ra_1R = R$. Відповідно до теореми 1 і [10] маємо, що елементи a_0, a_1 – оборотні, тобто a – дуоелемент. Отже, R є дуокільцем. $\square$

1. *Bass X.* K-theory and stable algebra / *Bass X.* // J. Haunts Etudes Scien. Publ. Math. – 1964. – №22. – P. 485-544.
2. *Zabavsky B.V.* Diagonalizability theorem for matrices with finite stable range / *Zabavsky B.V.* // Alg. Discr. Math. – 2005. – №1. – P. 134-148.
3. *Warfield R.B.* Cancellation of modules and groups and stable range of endomorphism rings / *Warfield R.B.* // Pacific. S. Math. – 1980. – Vol. 91, №2. – P. 457-485.
4. *Vasserstein L.N.* The stable rank of rings and dimensionability of topological spaces / *Vasserstein L.N.* // Functional Anal. Appl. – 1971. – №5. – P. 102-110.
5. *Vasserstein L.N.* Bass's first stable range conclusion / *Vasserstein L.N.* // Pure App. Alg. – 1984. – №34. – P. 319-330.
6. *Lam T.* A crash course on stable range, cancellation, substitution and exchange. / *Lam T.* – University of California, Berkeley, CA 94720.
7. *B.Goodearl K.* Stable range one for rings with many units / *B.Goodearl K., Menal P.* // Pure App. Alg. – 1949. – №54. – P. 261-287
8. *Lam T.* Quasi-Duo Rings and Stable Range Decent / *Lam T., Dugas A.* // J. Pure App. Alg. – 2005. – №195. – P. 243-259.
9. *Kaplansky I.* Elementary divisors and modules / *Kaplansky I.* // Trans. American. Math. Soc. – 1949. – №66. – P. 464-491.
10. *Brungs H. H.* Rings with a distributive lattice of right ideals / *Brungs H. H.* // S. Algebra. – 1976. – №40. – P. 392-400.

RIGHT QUASIDUO-RING WITH FAINT STABLE RANGE 1 IS LEFT QUASIDUO-RING

Ol'ha DOMSHA

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: olya.domsha@i.ua

The problem of discovering a right quasiduo-ring, which is not left quasiduo-ring, is proposed by Lam and Dugas. In this paper the notion of a ring with faint stable range 1 is introduced and showed that Bezout domain with faint stable range 1 is elementary divisors ring if and only if it is duo domain. It is also proved that right quasiduo-ring with faint stable range 1 is left quasiduo-ring.

Key words: ring with stable range 1, ring with faint stable range 1, quasiduo-ring, elementary divisor ring.

ПРАВОЕ КВАЗИДУОКОЛЬЦО СЛАБОГО СТАБИЛЬНОГО РАНГА 1 ЯВЛЯЕТСЯ ЛЕВЫМ КВАЗИДУОКОЛЬЦОМ

Ольга ДОМША

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: olya.domsha@i.ua

Лам и Дугас сформулировали задачу о поиске правого квазидуокольца, которое не является левым квазидуо. В этой работе дано определение кольца слабого стабильного ранга 1 и показано, что область Безу слабого стабильного ранга 1 является кольцом элементарных делителей тогда и только тогда, когда оно дуообласть. Доказано также, что правое квазидуокольцо слабого стабильного ранга 1 есть левым квазидуокольцом.

Ключевые слова: кольцо стабильного ранга 1, кольцо слабого стабильного ранга 1, кольцо элементарных делителей.

Стаття надійшла до редколегії 13.03.2009

Прийнята до друку 16.12.2009

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2009.
Вип. 71. С. 92–101

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech. Math. 2009.
Is. 71. P. 92–101

УДК 519.21

ОПТИМІЗАЦІЯ РЕЖИМІВ ОБСЛУГОВУВАННЯ ДЛЯ СИСТЕМ M/M/1/m ТА M/M/1 З БЛОКУВАННЯМ ВХІДНОГО ПОТОКУ

Костянтин ЖЕРНОВИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська 1,
e-mail: k_zhernovyi@yahoo.com

Вивчено системи обслуговування M/M/1/m і M/M/1, в яких відбувається перехід на "швидке" обслуговування і одночасне блокування вхідного потоку за умови перевищення кількості замовлень у системі деякого порогового рівня l. Визначено стаціонарні характеристики систем і розв'язано задачі оптимального вибору: 1) інтенсивності "швидкого" обслуговування; 2) порога перемикання на "швидке" обслуговування; 3) порога перемикання на режим блокування вхідного потоку; 4) інтенсивності обслуговування без переходу на "швидке" обслуговування.

Ключові слова: системи M/M/1/m і M/M/1, блокування вхідного потоку, оптимізація режимів обслуговування.

1. Вступ. Адекватною математичною моделлю процесів, які відбуваються в багатьох фрагментах і вузлах сучасних комп'ютерних мереж і мереж зв'язку, є системи обслуговування з керованим режимом функціонування [1; 2, § 2.6, 2.7]. Для таких систем, крім питання визначення стаціонарних характеристик, розглядають, зокрема, задачу оптимального вибору режимів обслуговування, пов'язану з мінімізацією деякого економічного функціонала якості функціонування системи (див. статтю [3] і огляд [1]). Задачі керування вхідним потоком замовлень вивчало багато авторів переважно у зв'язку з вибором пріоритетів в обслуговуванні [1, розд. 2, § 2.3].

Якщо система обслуговування може працювати в кількох режимах з різними інтенсивностями обслуговування, то задачі визначення її стаціонарних характеристик і оптимального вибору режимів обслуговування значно ускладнюються порівняно з такими задачами для класичних систем M/M/1/m і M/M/1. Застосування режиму блокування вхідного потоку дещо спрощує систему рівнянь для стаціонарних імовірностей станів системи і в деяких випадках дає підстави знаходити її розв'язки в явному вигляді.

Нижче ми розглянемо задачі оптимального керування системами обслуговування, в яких перехід до "швидкого" обслуговування відбувається одночасно з блокуванням вхідного потоку.

2. Стаціонарні характеристики системи з обмеженою чергою. Розглянемо одноканальну систему обслуговування, для якої довжина черги не може перевищувати числа m. Замовлення в систему надходять по одному, а проміжки часу між моментами надходження замовлень – незалежні випадкові величини, розподілені за показниковим законом з параметром λ.

Обслуговування замовлень може відбуватись у двох режимах. Час обслуговування в кожному з них розподілений за показниковим законом з параметрами μ_1 і μ_2 відповідно. Припускаємо, що $\mu_1 < \mu_2$, тобто перший режим "повільний", а другий "швидкий". "Швидке" обслуговування відбувається за умови, що в момент початку обслуговування чергового замовлення кількість замовлень у системі перевищує число l ($l = \overline{1, m-1}$). Під час роботи системи у "швидкому" режимі відбувається блокування вхідного потоку замовлень, тобто жодне замовлення не допускається в чергу.

Введемо нумерацію станів системи: s_0 – система вільна; s_k ($k = \overline{1, m+1}$) – в системі є k замовлень, використовується режим "повільного" обслуговування; x_k ($k = \overline{l+1,\, m}$) – в системі є k замовлень, обслуговування відбувається в "швидкому" режимі, вхідний потік заблокований.

Нехай $p_k(t)$ ($q_k(t)$) – імовірність того, що система в момент часу t перебуває у стані s_k (x_k). Кількість станів системи скінченна, процес зміни станів транзитивний марковський, тому існують границі

$$p_k = \lim_{t\to\infty} p_k(t), \qquad q_k = \lim_{t\to\infty} q_k(t).$$

Користуючись графом станів системи, запишемо рівняння для визначення стаціонарних імовірностей p_k і q_k

$$\begin{gathered}
\mu_1 p_1 - \lambda p_0 = 0; \quad \lambda p_{k-1} + \mu_1 p_{k+1} - (\lambda+\mu_1) p_k = 0 \quad \bigl(k = \overline{1,\ l-1}\bigr);\\
\lambda p_{l-1} + \mu_1 p_{l+1} + \mu_2 q_{l+1} - (\lambda+\mu_1) p_l = 0;\\
\lambda p_{k-1} - (\lambda+\mu_1) p_k = 0 \quad \bigl(k = \overline{l+1,\ m}\bigr); \quad \lambda p_m - \mu_1 p_{m+1} = 0;\\
\mu_2 q_{k+1} + \mu_1 p_{k+1} - \mu_2 q_k = 0 \quad \bigl(k = \overline{l+1,\ m-1}\bigr); \quad \mu_1 p_{m+1} - \mu_2 q_m = 0;\\
\sum_{k=0}^{m+1} p_k + \sum_{k=l+1}^{m} q_k = 1.
\end{gathered} \tag{1}$$

Введемо позначення: $\beta = 1/\rho$, $\gamma = \mu_1/\mu_2$, де $\rho = \lambda/\mu_1$ – коефіцієнт завантаження системи у режимі "повільного" обслуговування. Якщо $\beta \neq 1$, то розв'язок системи (1) набуває вигляду

$$p_k = \beta^{l+1-k}(1+\beta)^{m-l} p_{m+1} \qquad \bigl(k = \overline{0,\ l-1}\bigr);$$

$$p_k = \beta(1+\beta)^{m-k} p_{m+1} \qquad \bigl(k = \overline{l,\ m}\bigr);$$

$$q_k=\gamma\sum_{s=k+1}^{m+1}p_s=\gamma(1+\beta)^{m-k}p_{m+1}\qquad\bigl(k=\overline{l+1,\ m}\bigr)\,;\tag{2}$$

$$p_{m+1}=\frac{\beta(\beta-1)}{\bigl(\beta(\beta^{l+2}-1)+\gamma(\beta-1)\bigr)(1+\beta)^{m-l}-\gamma(\beta-1)}.$$

Використовуючи розподіл станів (2), можемо знайти ергодичний розподіл довжини черги у системі. Позначимо через π_k стаціонарну ймовірність того, що довжина черги дорівнює k ($k=\overline{0,m}$). Тоді

$$\begin{gathered}\pi_0=p_0+p_1=\beta^l(1+\beta)^{m-l+1}p_{m+1};\qquad\pi_m=p_{m+1};\\ \pi_k=p_{k+1}=\beta^{l-k}(1+\beta)^{m-l}p_{m+1}\qquad\bigl(k=\overline{1,\ l-1}\bigr)\,;\\ \pi_k=p_{k+1}+q_{k+1}=(\beta+\gamma)(1+\beta)^{m-k-1}p_{m+1}\qquad\bigl(k=\overline{l,\ m-1}\bigr)\,.\end{gathered}\tag{3}$$

Середню довжину черги визначимо як математичне сподівання дискретної випадкової величини

$$\begin{aligned}\overline{r}=\sum_{k=1}^{m}k\pi_k=\frac{p_{m+1}}{\beta^2(\beta-1)^2}\bigl\{\beta(\beta^{l+2}-l\beta^2+l\beta-2\beta+1)(1+\beta)^{m-l}-\\ -\beta(\beta-1)^2+\gamma(\beta-1)^2\bigl((l\beta+1)(1+\beta)^{m-l}-m\beta-1\bigr)\bigr\}.\end{aligned}$$

Стаціонарне значення ймовірності обслуговування замовлення, що надійшло на вхід системи, (відносну пропускну здатність системи) обчислимо як суму ймовірностей тих станів, в яких вхідний потік не заблокований,

$$P_{\text{обс}}=\sum_{k=0}^{m}p_k=\frac{\beta\bigl((\beta^{l+2}-1)(1+\beta)^{m-l}-\beta+1\bigr)}{\bigl(\beta(\beta^{l+2}-1)+\gamma(\beta-1)\bigr)(1+\beta)^{m-l}-\gamma(\beta-1)}.\tag{4}$$

Середній час перебування замовлення в черзі визначимо за формулою Літтла, яка для системи з втратами замовлень набуває вигляду

$$\overline{t}_r=\frac{\overline{r}}{\lambda P_{\text{обс}}}.\tag{5}$$

Окремо випишемо формули для стаціонарних характеристик системи у випадку, коли $\beta=1$,

$$\begin{gathered}p_k=2^{m-l}p_{m+1}\quad\bigl(k=\overline{0,\ l-1}\bigr)\,;\quad p_k=2^{m-k}p_{m+1}\quad\bigl(k=\overline{l,\ m}\bigr)\,;\\ q_k=\gamma 2^{m-k}p_{m+1}\quad\bigl(k=\overline{l+1,\ m}\bigr)\,;\\ p_{m+1}=\frac{1}{(l+\gamma+2)2^{m-l}-\gamma}\,;\qquad P_{\text{обс}}=\frac{(l+2)2^{m-l}-1}{(l+\gamma+2)2^{m-l}-\gamma}\,;\\ \overline{t}_r=\frac{\bigl(l^2+l+2+2\gamma(l+1)\bigr)2^{m-l-1}-\gamma(m+1)-1}{\lambda\bigl((l+2)2^{m-l}-1\bigr)}.\end{gathered}\tag{6}$$

3. Стаціонарні характеристики системи з необмеженою чергою. Перейшовши до границі при $m\to\infty$ у співвідношеннях (2)-(5), одержимо ергодичні розподіли $\{p_k, q_k\}$ і $\{\pi_k\}$ та формули для стаціонарних характеристик відповідної системи обслуговування без обмежень на довжину черги у випадку, коли $\beta \neq 1$,

$$p_k = \frac{\beta^{l+2-k}(\beta-1)}{\beta(\beta^{l+2}-1)+\gamma(\beta-1)} \qquad \left(k=\overline{0,\ l-1}\right);$$

$$p_k = \frac{\beta^2(\beta-1)}{\big(\beta(\beta^{l+2}-1)+\gamma(\beta-1)\big)(1+\beta)^{k-l}} \qquad (k=l,\, l+1,\ldots);$$

$$q_k = \gamma p_k/\beta \qquad (k=l+1,\, l+2,\ldots);$$

$$\pi_0 = p_0 + p_1; \qquad \pi_k = p_{k+1} \quad \left(k=\overline{1,\ l-1}\right);$$

$$\pi_k = p_{k+1} + q_{k+1} \qquad (k=l,\, l+1,\ldots);$$

$$P_{\text{обс}} = \frac{\beta(\beta^{l+2}-1)}{\beta(\beta^{l+2}-1)+\gamma(\beta-1)};$$

$$\overline{t}_r = \frac{\beta\big(\beta^{l+2}-l\beta^2+(l-2)\beta+1\big)+\gamma(\beta-1)^2(l\beta+1)}{\lambda\beta^2(\beta-1)(\beta^{l+2}-1)}.$$

Аналогічно зі співвідношень (6) матимемо відповідні формули для випадку, коли $\beta = 1$,

$$p_k = \frac{1}{l+\gamma+2} \quad \left(k=\overline{0,\ l-1}\right); \quad p_k = \frac{1}{(l+\gamma+2)2^{k-l}} \quad (k=l,\, l+1,\ldots);$$

$$q_k = \gamma p_k \quad (k=l+1,\, l+2,\ldots); \qquad P_{\text{обс}} = \frac{l+2}{l+\gamma+2};$$

$$\overline{t}_r = \frac{l^2+l+2+2\gamma(l+1)}{2\lambda(l+2)}.$$

Зауважимо, що ергодичний процес для системи без обмежень на довжину черги існує для будь-яких значень β на відміну від класичної системи M/M/1, для якої він існує лише при $\beta > 1$.

4. Задача оптимального вибору інтенсивності "швидкого" обслуговування. Розглянемо економічний функціонал якості функціонування системи обслуговування у вигляді

$$I_\gamma = c_r\overline{t}_r + c_1P_1 + c_2P_2, \tag{7}$$

де c_r – штраф за одиницю часу перебування у черзі; P_i – середній відносний час використання i-го режиму; c_i – вартість одиниці часу використання i-го режиму, $i = 1,\, 2$. Зафіксуємо інтенсивність "повільного" обслуговування μ_1, тоді можна вважати, що $c_1 = const$. Припустимо, що $c_2 = c_2(\gamma) = c_1/\gamma$, де $\gamma = \mu_1/\mu_2$, $0 < \gamma < 1$. Вважаючи заданими параметри β і l, вибиратимемо параметр γ так, щоб мінімізувати середній ризик I_γ.

Зрозуміло, що

$$P_1 = \sum_{k=1}^{m+1} p_k; \qquad P_2 = \sum_{k=l+1}^{m} q_k,$$

тому після підстановки виразів для $\overline{t}_r$, P_1 і P_2 у співвідношення (7) одержимо явну залежність функціонала I_γ від параметра γ. Задачу зведено до мінімізації функції $I_\gamma = I_\gamma(\gamma)$ на проміжку $0 < \gamma < 1$.

Достатні умови існування мінімуму функціонала (7) визначає теорема 1.

Теорема 1. *Якщо* $c_2 = c_1/\gamma$, *і*
1) для $m < \infty$, $\beta \neq 1$ *виконуються умови*

$$\frac{\big((l\beta+1)(1+\beta)^{m-l}-m\beta-1\big)(\beta^{l+2}-1)^2(1+\beta)^{2(m-l)}}{\lambda\big((1+\beta)^{m-l}-1\big)\big((\beta^{l+2}-1)(1+\beta)^{m-l}-\beta+1\big)^2} < \frac{c_1}{c_r} <$$
$$< \frac{\big((l\beta+1)(1+\beta)^{m-l}-m\beta-1\big)\big((\beta^{l+3}-1)(1+\beta)^{m-l}-\beta+1\big)^2}{\lambda\big((1+\beta)^{m-l}-1\big)\big((\beta^{l+2}-1)(1+\beta)^{m-l}-\beta+1\big)^2\beta^2}; \tag{8}$$

$$\gamma^* = \frac{\beta}{|\beta-1|\big((1+\beta)^{m-l}-1\big)}\left(\sqrt{\frac{c_1\lambda\big((1+\beta)^{m-l}-1\big)}{c_r\big((l\beta+1)(1+\beta)^{m-l}-m\beta-1\big)}}\times\right.$$
$$\left.\times|(\beta^{l+2}-1)(1+\beta)^{m-l}-\beta+1|-|\beta^{l+2}-1|(1+\beta)^{m-l}\right);$$

2) для $m < \infty$, $\beta = 1$ *виконуються умови*

$$\frac{(l+2)^2 2^{2(m-l)}\big((l+1)2^{m-l}-m-1\big)}{\lambda(2^{m-l}-1)\big((l+2)2^{m-l}-1\big)^2} < \frac{c_1}{c_r} <$$
$$< \frac{\big((l+3)2^{m-l}-1\big)^2\big((l+1)2^{m-l}-m-1\big)}{\lambda(2^{m-l}-1)\big((l+2)2^{m-l}-1\big)^2}; \tag{9}$$

$$\gamma^* = \big((l+2)2^{m-l}-1\big)\sqrt{\frac{c_1\lambda}{c_r(2^{m-l}-1)\big((l+1)2^{m-l}-m-1\big)}} - \frac{(l+2)2^{m-l}}{2^{m-l}-1};$$

3) для $m = \infty$, $\beta \neq 1$ *виконуються умови*

$$\frac{\beta l+1}{\lambda} < \frac{c_1}{c_r} < \frac{(\beta l+1)(\beta^{l+3}-1)^2}{\lambda\beta^2(\beta^{l+2}-1)^2}; \tag{10}$$

$$\gamma^* = \frac{\beta(\beta^{l+2}-1)}{\beta-1}\left(\sqrt{\frac{c_1\lambda}{c_r(\beta l+1)}}-1\right);$$

4) для $m = \infty$, $\beta = 1$ *виконуються умови*

$$\frac{l+1}{\lambda} < \frac{c_1}{c_r} < \frac{(l+1)(l+3)^2}{\lambda(l+2)^2}; \tag{11}$$

$$\gamma^* = (l+2)\left(\sqrt{\frac{c_1\lambda}{c_r(l+1)}}-1\right);$$

то мінімум функціонала I_γ *на множині* $\gamma \in (0;\,1)$ *існує і досягається для* $\gamma = \gamma^*$.

Доведення. Похідна функції $I_\gamma(\gamma)$ має вигляд

$$I'_\gamma(\gamma) = a_1\big(a_2(a_3+a_4\gamma)^2-a_5\big),$$

де сталі a_i ($i = \overline{1,5}$) додатні. Виконання умов (8)-(11) (своїх для кожного випадку відповідно) забезпечує належність кореня γ^* рівняння $I'_\gamma(\gamma) = 0$ проміжку

(0; 1). Графіком функції $y = y(\gamma) = I'_\gamma(\gamma)$ є парабола, гілки якої спрямовані вгору, а вершина перебуває в точці з координатами (γ_0, y_0), де $\gamma_0 = -a_3/a_4 < 0$, $y_0 = y(\gamma_0) = -a_1a_5 < 0$. Оскільки $y(\gamma^*) = 0$ і $\gamma^* \in (0;1)$, то $y(\gamma^* - \varepsilon) < 0$, $y(\gamma^* + \varepsilon) > 0$ для як завгодно малого $\varepsilon > 0$, а це означає, що в точці $\gamma = \gamma^*$ функція $I_\gamma(\gamma)$ досягає мінімуму. Теорему доведено.

Зауваження 1. Якщо розглядати мінімум функціонала I_γ для всіх $\gamma > 0$, то теорема 1 залишається правильною за умови виконання лише перших частин подвійних нерівностей (8)-(11).

5. Задача оптимального вибору порога перемикання на "швидке" обслуговування. Зі збільшенням порога перемикання на "швидке" обслуговування l значення функціонала вигляду (7) зростає, тому задача його мінімізації за параметром l не має нетривіального розв'язку. Якість функціонування системи обслуговування з втратами замовлень залежить від імовірності втрати замовлення, тому враховуватимемо її у виразі для економічного функціонала.

Вважаючи заданими параметри $\beta > 0$, $\gamma \in (0;1)$, для системи без обмежень на довжину черги ($m = \infty$) вибиратимемо параметр l так, щоб мінімізувати середній ризик

$$I_l = c_r\bar{t}_r + c_{\text{в}}P_{\text{в}},$$

де c_r – штраф за одиницю часу перебування у черзі; $P_{\text{в}} = 1 - P_{\text{обс}}$ – імовірність втрати замовлення; $c_{\text{в}}$ – штраф за втрату одного замовлення.

Після підстановки виразів для $\bar{t}_r$ і $P_{\text{в}}$ у співвідношення для I_l матимемо задачу мінімізації функції $I_l = I_l(l)$ цілочисельної змінної $l \geq 1$. Цю задачу ми зможемо розв'язати, якщо мінімізуємо функцію $I_l(l)$ для всіх дійсних $l \geq 1$.

Теорема 2. *1) Якщо $\beta \neq 1$ і*

$$\frac{c_{\text{в}}}{c_r} \geq \frac{\big(\beta(\beta^2+\beta+1)+\gamma\big)^2\big(\gamma(\beta-1)-\beta\big)(\beta^3-1-\beta^2\ln\beta)}{\lambda\gamma\beta^5(\beta-1)(\beta^2+\beta+1)^2\ln\beta}, \tag{12}$$

то мінімум функціонала I_l на множині дійсних $l \geq 1$ існує і досягається для $l = l^*$, де l^* – єдиний на проміжку $[1;\infty)$ дійсний корінь рівняння

$$\frac{\big(\beta(\beta^{l+2}-1)+\gamma(\beta-1)\big)^2\Big(\big(\gamma(\beta-1)-\beta\big)\big(\beta^{l+2}-1-(l\beta+1)\beta^{l+1}\ln\beta\big)+\beta^{l+2}\ln\beta\Big)}{\lambda\gamma\beta^{l+4}(\beta-1)(\beta^{l+2}-1)^2\ln\beta} = \frac{c_{\text{в}}}{c_r}; \tag{13}$$

2) якщо $\beta = 1$ і

$$\frac{c_{\text{в}}}{c_r} \geq \frac{(\gamma+3)^2(2\gamma+5)}{18\lambda\gamma}, \tag{14}$$

то мінімум функціонала I_l на множині дійсних $l \geq 1$ існує і досягається для $l = l^*$, де l^* – єдиний на проміжку $[1;\infty)$ дійсний корінь рівняння

$$\frac{(\gamma+l+2)^2(l^2+4l+2\gamma)}{2\lambda\gamma(l+2)^2} = \frac{c_{\text{в}}}{c_r}. \tag{15}$$

Доведення. Похідна функції $I_l(l)$ має вигляд

$$I_l'(l) = a(l)\big(c_r f_r(l) - c_{\text{в}} f_{\text{в}}(l)\big),$$

де $a(l) > 0$, $f_r(l) > 0$ і $f_{\text{в}}(l) > 0$ для всіх $l \geq 1$. Виявляється, що функція $F(l) = f_r(l)/f_{\text{в}}(l)$ монотонно зростає для всіх $l \geq 1$, тому на проміжку $[1; \infty)$ рівняння $I_l'(l) = 0$ має єдиний дійсний корінь $l = l^*$, якщо $c_{\text{в}}/c_r \geq F(1)$ (тобто виконуються умови (12) або (14) відповідно для $\beta \neq 1$ і $\beta = 1$).

Оскільки $F(l^*) = c_{\text{в}}/c_r$, то нерівність $I_l'(l^* - \varepsilon) < 0$ еквівалентна нерівності $F(l^*) > F(l^* - \varepsilon)$, а нерівність $I_l'(l^* + \varepsilon) > 0$ еквівалентна нерівності $F(l^*) < F(l^* + \varepsilon)$ для як завгодно малого $\varepsilon > 0$. Але функція $F(l)$ зростаюча, тому $I_l'(l^* - \varepsilon) < 0$ і $I_l'(l^* + \varepsilon) > 0$, тобто в точці $l = l^*$ функція $I_l(l)$ досягає мінімуму. Теорему доведено.

Зауваження 2. Щоб знайти відношення $c_{\text{в}}/c_r$, для якого досягається мінімум функціонала I_l при фіксованому цілому $l^* \geq 1$, достатньо це значення l^* підставити у ліву частину рівності (13) або (15) відповідно для $\beta \neq 1$ і $\beta = 1$.

Зауваження 3. Для великих значень l поведінка середнього часу перебування у черзі $\overline{t}_r$ і самого функціонала I_l сильно змінюється при переході значення β через одиницю. Безпосереднім обчисленням границь можна переконатися:

1) якщо $\beta \in (0; 1]$, то

$$\lim_{l\to\infty} \overline{t}_r(l) = +\infty; \qquad \lim_{l\to\infty} P_{\text{в}}(l) = \frac{\gamma(\beta-1)}{\gamma(\beta-1)-\beta}; \qquad \lim_{l\to\infty} I_l(l) = +\infty;$$

2) якщо $\beta > 1$, то

$$\lim_{l\to\infty} \overline{t}_r(l) = \frac{1}{\lambda\beta(\beta-1)}; \qquad \lim_{l\to\infty} P_{\text{в}}(l) = 0; \qquad \lim_{l\to\infty} I_l(l) = \frac{c_r}{\lambda\beta(\beta-1)}.$$

Зауваження 4. Оскільки для цієї системи обслуговування $P_2 = P_{\text{в}}$, то твердження теореми 2 виконується також для функціонала

$$\tilde{I}_l = c_r \overline{t}_r + c_2 P_2,$$

де P_2 – середній відносний час використання режиму "швидкого" обслуговування; c_2 – вартість одиниці часу використання цього режиму. У теоремі для функціонала $\tilde{I}_l$ треба лише замінити $c_{\text{в}}$ на c_2 у формулах (12)-(15).

6. Задача оптимального вибору порога перемикання на режим блокування вхідного потоку. Нехай $\gamma = 1$, тобто внаслідок перевищення порогового значення l відбувається лише блокування вхідного потоку, а режим обслуговування не змінюється. Вважаючи заданим параметр $\beta > 0$, для системи без обмежень на довжину черги ($m = \infty$) вибиратимемо параметр l так, щоб мінімізувати середній ризик, який враховує штрафи за час перебування у черзі та за втрату замовлень

$$I_{l1} = c_r \overline{t}_r + c_{\text{в}} P_{\text{в}}.$$

Теорема 3. *1) Якщо* $\beta \neq 1$ *і*

$$\frac{c_{\text{в}}}{c_r} \geq \frac{(\beta^4-1)^2\big(\beta^2(2\beta+1)\ln\beta - \beta^3 + 1\big)}{\lambda\beta^5(\beta-1)(\beta^3-1)^2\ln\beta},$$

то мінімум функціонала I_{l1} на множині дійсних $l \geq 1$ існує і досягається для $l = l^*$, де l^* – єдиний на проміжку $[1; \infty)$ дійсний корінь рівняння

$$\frac{(\beta^{l+3}-1)^2\big(\beta^{l+1}(\beta l+\beta+1)\ln\beta-\beta^{l+2}+1\big)}{\lambda\beta^{l+4}(\beta-1)(\beta^{l+2}-1)^2\ln\beta}=\frac{c_в}{c_r};$$

2) якщо $\beta = 1$ і

$$\frac{c_в}{c_r} \geq \frac{56}{9\lambda},$$

то мінімум функціонала I_{l1} на множині дійсних $l \geq 1$ існує і досягається для $l = l^*$, де l^* – єдиний на проміжку $[1; \infty)$ дійсний корінь рівняння

$$\frac{(l+3)^2(l^2+4l+2)}{2\lambda(l+2)^2}=\frac{c_в}{c_r}.$$

Доведення. Функціонал I_{l1} – це частковий випадок функціонала I_l при $\gamma = 1$. Теорема 2 залишається правильною і для $\gamma = 1$. Тому підставляючи $\gamma = 1$ у співвідношення (12)-(15), одержимо твердження теореми 3.

7. Задача оптимального вибору інтенсивності обслуговування без переходу на "швидке" обслуговування. Нехай, як і в попередньому пункті, $\gamma = 1$. Вважаючи заданим пороговий рівень l, для системи з необмеженою чергою ($m = \infty$) вибиратимемо параметр β так, щоб мінімізувати середній ризик

$$I_\beta = c_r\bar{t}_r + c_1(\beta)P_1,$$

де $P_1 = 1 - p_0$ – середній відносний час робочого режиму системи (коефіцієнт використання системи), $c_1(\beta)$ – вартість одиниці часу роботи системи в режимі обслуговування з фіксованою інтенсивністю $\mu_1 = \lambda\beta$. Загалом згідно з її економічним змістом залежність $c_1(\beta)$ зростаюча. Ми обмежимось випадком, коли $c_1(\beta) = c_1^*\beta^k$, де $k > 0,\ c_1^* = c_1(1)$.

Теорема 4. *Якщо $c_1(\beta) = c_1^*\beta^k$, то для функції $I_\beta = I_\beta(\beta)$ виконуються граничні співвідношення*

$$\lim_{\beta\to\infty} I_\beta(\beta) = \begin{cases} 0, & k \in (0; 1); \\ c_1^*, & k = 1; \\ +\infty, & k > 1. \end{cases} \tag{18}$$

Якщо $k > 1$, то мінімум функціонала I_β існує і досягається для $\beta = \beta^*$, де (залежно від значення l) β^* – єдиний або один з додатних коренів рівняння

$$F_1(\beta) = \frac{c_r}{c_1^*}, \tag{19}$$

$$F_1(\beta) = f_1(\beta)/f_r(\beta),$$

$$f_1(\beta) = \lambda\beta^{k+2}(\beta-1)^2(\beta^{l+2}-1)^2\big((k-1)\beta^{2l+5}+(l+3-k)\beta^{l+3}-$$
$$-(l+2+k)\beta^{l+2}+k\big);$$

$$f_r(\beta) = (\beta^{l+3}-1)^2\big((\beta^{l+3}-\beta^2-\beta-l\beta^2+l\beta+1)\big((l+5)\beta^{l+3}-(l+4)\beta^{l+2}-$$
$$-3\beta+2\big)-\beta(\beta-1)(\beta^{l+2}-1)\big((l+3)\beta^{l+2}-2\beta-2l\beta+l-1\big)\big),$$

який належить проміжку зростання функції $F_1(\beta)$.

Доведення. Співвідношення (18) випливають з того, що

$$\bar{t}_r = \frac{\beta^{l+3} - l\beta^3 + l\beta^2 - 2\beta^2 + \beta + (\beta-1)^2(l\beta+1)}{\lambda\beta^2(\beta-1)(\beta^{l+2}-1)}, \qquad P_1 = \frac{\beta^{l+2}-1}{\beta^{l+3}-1};$$

$$\lim_{\beta\to\infty} \bar{t}_r(\beta) = 0; \qquad \lim_{\beta\to\infty} \beta^k P_1(\beta) = \begin{cases} 0, & k \in (0;\,1); \\ 1, & k = 1; \\ +\infty, & k > 1. \end{cases}$$

Розглянемо випадок, коли $k > 1$. Похідна функції $I_\beta(\beta)$ має вигляд

$$I'_\beta(\beta) = a_1(\beta)\big(c_1^* f_1(\beta) - c_r f_r(\beta)\big),$$

де $a_1(\beta) > 0$, $f_1(\beta) > 0$, $f_r(\beta) > 0$ для всіх $\beta > 0$, тому рівняння $I'_\beta(\beta) = 0$ зводиться до вигляду (19). Функція $F_1(\beta)$ є монотонно зростаючою для $\beta > 0$ не для всіх $l \geq 1$. Але $F_1(0) = 0$, $F_1(\beta) > 0$ при $\beta > 0$ і $\lim\limits_{\beta\to\infty} F_1(\beta) = +\infty$, тому для функції $F_1(\beta)$ для всіх $l \geq 1$ обов'язково знайдеться хоча б один проміжок, на якому вона монотонно зростає. Це означає, що рівняння (19) має хоча б один додатний корінь, який належить проміжку зростання функції $F_1(\beta)$.

Якщо для деякого $l \geq 1$ рівняння (19) має єдиний корінь $\beta = \beta^*$, то він обов'язково належить проміжку зростання функції $F_1(\beta)$. Тому, враховуючи, що $\lim\limits_{\beta\to+0} I_\beta(\beta) = +\infty$, $\lim\limits_{\beta\to\infty} I_\beta(\beta) = +\infty$, і міркуючи так само, як у доведенні теореми 2, можна переконатись, що в точці $\beta = \beta^*$ функція $I_\beta(\beta)$ досягає мінімуму. Якщо ж для деякого $l \geq 1$ функція $F_1(\beta)$ має хоча б один інтервал, на якому вона спадає, то рівняння (19) може мати кілька додатних коренів, які належать інтервалам зростання $F_1(\beta)$. Кожен з них є точкою локального мінімуму функції $I_\beta(\beta)$. Абсолютний мінімум досягається для одного з цих коренів. Теорему доведено.

---

1. *Рыков В.В.* Управляемые системы массового обслуживания / *Рыков В.В.* // Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятн. Мат. стат. Теор. кибернет. – 1975. – Т. 12. – С.43-153.
2. *Дудин А.Н.* Практикум на ЭВМ по теории массового обслуживания: Учебное пособие. / *Дудин А.Н., Медведев Г.А., Меленец Ю.В.* – Минск, 2003.
3. *Соловьев А.Д.* Задача об оптимальном обслуживании / *Соловьев А.Д.* // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1970. – №5. – С. 40-50.

OPTIMIZATION OF MODES OF SERVICE FOR THE M/M/1/M AND M/M/1 QUEUEING SYSTEMS WITH BLOCKING OF AN INPUT FLOW

Kostyantyn ZHERNOVYI

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: k_zhernovyi@yahoo.com

The M/M/1/m and M/M/1 queueing systems with transition to a mode of "fast" service and simultaneous blocking of an input flow under condition of excess of number of customers in system of some threshold level l are examined. Stationary characteristics of systems are defined and following problems of an optimum choice are solved for: 1) intensity of "fast" service; 2) a threshold of switching on "fast" service; 3) a threshold of switching on a mode of blocking of an input flow; 4) intensity of service without transition to "fast" service.

Key words: the M/M/1/m and M/M/1 queueing systems, blocking of an input flow, optimization of modes of service.

ОПТИМИЗАЦИЯ РЕЖИМОВ ОБСЛУЖИВАНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ M/M/1/m И M/M/1 С БЛОКИРОВАНИЕМ ВХОДЯЩЕГО ПОТОКА

Константин ЖЕРНОВЫЙ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: k_zhernovyi@yahoo.com

Изучены системы обслуживания M/M/1/m и M/M/1, в которых осуществляется переход на "быстрое" обслуживание и одновременное блокирование входящего потока при условии превышения числа заявок в системе некоторого порогового уровня l. Определены стационарные характеристики систем и решены задачи оптимального выбора: 1) интенсивности "быстрого" обслуживания; 2) порога переключения на "быстрое" обслуживание; 3) порога переключения на режим блокирования входящего потока; 4) интенсивности обслуживания без перехода на "быстрое" бслуживание.

Ключевые слова: системы M/M/1/m и M/M/1, блокирование входящего потока, оптимизация режимов обслуживания.

Стаття надійшла до редколегії 07.10.2009

Прийнята до друку 16.12.2009

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2009. *Ser. Mech. Math. 2009.*
Вип. 71. С. 102–105 *Is. 71. P. 102–105*

УДК 512.552.12

РЕГУЛЯРНІ КІЛЬЦЯ З ІДЕМПОТЕНТНОЮ ДІАГОНАЛЬНОЮ РЕДУКЦІЄЮ МАТРИЦЬ

Богдан ЗАБАВСЬКИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: b_zabava@franko.lviv.ua

Показано, що в класі регулярних кілець, кільцем з ідемпотентною діагональною редукцією матриць є лише одинично регулярне кільце.

Ключові слова: регулярне кільце, редукція матриць.

Нехай R – асоціативне кільце з $1 \neq 0$. Скажемо, що R є кільцем з ідемпотентною діагональною редукцією, якщо для довільної квадратної матриці A над R існують зворотні матриці P, Q такі, що $PAQ = E$ – діагональна матриця, причому $E^2 = E$ [1]. Очевидним прикладом такого кільця є довільне тіло. Комутативне регулярне кільце є також таким [2]. В наш час активно проводять дослідження про зведення регулярних матриць (тобто квадратна матриця A називається регулярною, якщо існує така матриця X, що $AXA = A$) до ідемпотентної діагональної матриці [1, 3-6].

У цій праці показано, що в класі регулярних кілець, кільцем з ідемпотентною діагональною редукцією матриць є лише одинично регулярне кільце.

Нагадаємо, що кільце R називається одинично регулярним, якщо для довільного $a \in R$ існує зворотний елемент $u \in R$, такий що $aua = a$ [7].

Теорема 1. *В класі регулярних кілець одинично регулярне кільце є кільцем з ідемпотентною діагональною редукцією матриць і тільки воно є таким.*

Доведення. Нехай R – одинично регулярне кільце. Тоді згідно з [8] для довільної квадратної матриці A над R існують такі зворотні матриці відповідного розміру

P, Q, що

$$PAQ = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D.$$

Оскільки в одинично регулярному кільці для довільного елемента $a \in R$ існує ідемпотент e і зворотний елемент u такі, що $au = e$ [8]. Тоді нехай $d_i u_i = e_i$, $i = 1, 2, \dots, r$, де u_i – зворотний і $e_i^2 = e$ – ідемпотенти.

Нехай

$$D = \begin{pmatrix} e_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} U,$$

де

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ – зворотна матриця.}$$

Звідси

$$PAQU = \begin{pmatrix} e_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E,$$

причому $E^2 = E$, тобто ми довели, що одинично регулярне кільце є кільцем з ідемпотентною діагональною редукцією матриць.

Навпаки, нехай R – регулярне кільце, яке є ідемпотентно діагоналізованим, тобто для довільної квадратної матриці A над R існують зворотні матриці P і Q відповідних розмірів такі, що $PAQ = E$ – діагональна матриця, причому $E^2 = E$. Тоді $A = P^{-1}EQ^{-1}$, звідси

$$AQPA = P^{-1}EQ^{-1}QPP^{-1}EQ^{-1} = P^{-1}E^2Q^{-1} = P^{-1}EQ^{-1} = A.$$

Оскільки елемент A довільний, то ми бачимо, що кільце квадратних матриць довільного порядку $n > 1$ одинично регулярний. Це можливо лише тоді, коли R – одинично регулярне кільце. Справді, одинично регулярне кільце можна означити як регулярне кільце стабільного рангу 1 (тобто, якщо $aR + bR = R$, де $a, b \in R$, тоді існують елементи $x \in R$ і зворотний елемент u, такі що $a + bx = u$) [7]. Оскільки кільце матриць над кільцем стабільного рангу 1 є лише кільцем стабільного рангу 1 [9], а кільце матриць $M_n(R)$ є регулярне тоді і лише тоді, коли R – регулярне [7]. тоді, насправді, кільце R є одинично регулярним.

Теорему доведено. □

---

1. *Головачева Т.В.* О диагонализируемости регулярных матриц над кольцами / *Головачева Т.В.* // Фундаментальная и прикладная математика. – 1996. – Т. 2, №1. – С. 103-111.
2. *Gilman L, Henriksen M.* Some remarks about elementary divisor rings / *Gilman L, Henriksen M.* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – Vol. 82. – P. 362-365.
3. *Ara P.* Diagonalization of matrices over regular rings / *Ara P., Goodearl K., O'Meara K.C., Pardo E.* // Linear Algebra and Appl. – 1987. – Vol. 256. – P. 147-163.
4. *Puystjens R.* On the diagonalization of von Neumann regular matrices / *Puystjens R., van Gell J.* // Acta Uniu. Coral. Math. Phy. – 1985. – Vol. 26, №2. – P. 51-56.
5. *Steger A.* Diagonability of idempotente matrices / *Steger A.* // Pacific J. Math. – 1966. – Vol. 19, №3. – P. 535-542.
6. *Huylebrouck D.* Diagonal and von Neumann regular matrices over a Dedeking domain / *Huylebrouck D.* // Portucal. Math. – 1994. – Vol. 51, №2. – P. 291-303.
7. *Goodeare K.R.* Von Neumann regular rings / *Goodeare K.R.* – Pitman, London-San, Francisco-Mellaume, 1979.
8. *Henriksen M.* On a class of regular rings that are elementary divisor rings / *Henriksen M.* // Arch. Mat. – 1973. – Vol. 24, №2. – P. 133-141.
9. *Vaserstein L.N.* Bass's first stable range condition / *Vaserstein L. N.* // J. Pure and Appl. Alg. – 1984. – Vol. 34. – P. 319-330.

REGULAR RINGS WITH AN IDEMPOTENT DIAGONAL REDUCTION OF MATRICES

Bogdan ZABAVSKY

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: b_ zabava@franko.lviv.ua

It was shown, that only unit regular ring is a ring with an idempotent diagonal reduction in the class of regular ring.

Key words: regular ring, reduction of matrices.

РЕГУЛЯРНЫЕ КОЛЬЦА С ИДЕМПОТЕНТНОЙ ДИАГОНАЛЬНОЙ РЕДУКЦИЕЙ МАТРИЦ

Богдан ЗАБАВСКИЙ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: b_zabava@franko.lviv.ua

Доказано, что в классе регулярных колец, кольцом с идемпотентной диагональной редукцией матриц является только единично регулярное кольцо.

Ключевые слова: регулярное кольцо, редукция матриц.

Стаття надійшла до редколегії 10.02.2009

Прийнята до друку 16.12.2009

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2009. *Ser. Mech. Math. 2009.*
Вип. 71. С. 106–112 *Is. 71. P. 106–112*

УДК 517.95

ПРО ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ОДНІЄЇ ЕВОЛЮЦІЙНОЇ ВАРІАЦІЙНОЇ НЕРІВНОСТІ ВИЩОГО ПОРЯДКУ З ТЕОРІЇ ПЛАСТИН

Павло ЗАГОРБЕНСЬКИЙ, Микола БУГРІЙ, Олег БУГРІЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: ol_buhrii@i.ua

Розглянуто півлінійну еволюційну варіаційну нерівність вищого порядку. Показано, що вона описує коливні процеси в теорії пластин. Знайдено умови єдиності розв'язку цієї нерівності.

Ключові слова: теорія пластин, варіаційна нерівність вищого порядку, єдиність розв'язку.

1. Мішані задачі для рівняння

$$u_{tt} + (-1)^m \Delta^m u + c|u|^{p-2}u + g|u_t|^{q-2}u_t = f \tag{1.1}$$

розглядали багато авторів. У випадку $m = 1$ такі задачі досліджували в [1]-[3]. Якщо $m \geq 2$, то таким задачам присвячені праці [2], [4], [5]. Відповідні варіаційні нерівності вивчено в [1], [6]-[8]. Останнім часом згадані задачі почали розглядати для p та q, які є функціями незалежних змінних (див., наприклад, [9]). Наша мета – розглянути варіаційну нерівність для рівняння типу (1.1) з $m = 2$, $c = 0$, $q = q(x)$, яка виникає в теорії пластин і довести теорему єдиності її розв'язку.

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область з межею $\partial\Omega \subset C^1$, $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1, t_2)$, $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$. Розглянемо варіаційну нерівність

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[u_{tt}(v - u_t) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leq 2} a_{\alpha\beta} D^\alpha u (D^\beta v - D^\beta u_t) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leq 1} b_{\alpha\beta} D^\alpha u_t (D^\beta v - D^\beta u_t) +$$
$$+ g|u_t|^{q(x)-2} u_t (v - u_t) \Big] \, dxdt + \int\limits_0^\tau \varphi(v(t)) \, dt - \int\limits_0^\tau \varphi(u_t(t)) \, dt \geq \int\limits_{Q_{0,\tau}} f(v - u_t) \, dxdt, \tag{1.2}$$

де $\tau \in (0, T]$, v – пробна функція; φ – деякий функціонал з початковими умовами

$$u|_{t=0} = u_0, \qquad u_t|_{t=0} = u_1. \tag{1.3}$$

У другій частині статті розглянуто одну задачу з теорії пластин для рівняння вигляду (1.1) з $q = q(x)$. Показано, що її узагальнений розв'язок задовольняє варіаційну нерівність типу (1.2). Третя частина статті присвячена знаходженню умов єдиності розв'язку (1.2). Для спрощення розглянуто лише випадок однієї просторової змінної.

Якщо $\varphi \equiv 0$, $q \equiv 2$, то при деяких додаткових обмеженнях існування та єдиність розв'язку (1.2) доведено в [8].

2. Про одну модель з теорії пластин. Розглянемо одну задачу з теорії пластин (див [1, с. 191-201]). Пластину ототожнимо з множиною точок

$$\Pi = \Big\{ x \;\Big|\; x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \;\; (x_1, x_2) \in \Omega, \;\; -\frac{h}{2} < x_3 < \frac{h}{2} \Big\},$$

де $h > 0$ – товщина пластини; $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – обмежена область з межею $\partial\Omega \subset C^1$. Нехай $u(x_1, x_2, t)$ – це вертикальне відхилення серединної поверхні пластини від горизонтальної площини в момент часу t.

Припустимо, що:

- товщина пластини $h > 0$ мала;
- матеріал, з якого зроблена пластина, ізотропний і задовольняє закон Гука, тобто (див [1, с. 194])

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\Big[\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\,\varepsilon_{\kappa\kappa}\delta_{ij}\Big], \tag{2.1}$$

  де ν – коефіцієнт Пуассона; E – модуль Юнга; σ_{ij} – елементи тензора напружень в Π; ε_{ij} – елементи тензора деформацій в Π.
- сили, що діють на пластину нормальні і мають об'ємну густину $(0, 0, g_3)$.

Аналогічно як в [1, с. 192] введемо усереднені силу G_3, тензори напружень Σ_{ij} і моментів M_{ij} за формулами

$$G_3 = \int\limits_{-h/2}^{h/2} g_3 \, dx_3, \qquad \Sigma_{ij} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} \, dx_3, \qquad M_{ij} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} x_3 \sum_{k=1}^{3} \sigma_{i3k}\sigma_{kj} \, dx_3.$$

За певних додаткових обмежень (див. [1, с. 195, 196]) матимемо, що

$$\Sigma_{ij} = O(h^3), \quad i = 1,2,3, \quad j = 1,2,$$

$$M_{11} = \frac{E}{1+\nu}\frac{h^3}{12}u_{x_1x_2} + O(h^4),$$

$$M_{22} = -\frac{E}{1+\nu}\frac{h^3}{12}u_{x_1x_2} + O(h^4),$$

$$M_{12} = \frac{E}{1-\nu^2}\frac{h^3}{12}(\nu u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}) + O(h^4),$$

$$M_{21} = -\frac{E}{1-\nu^2}\frac{h^3}{12}(u_{x_1x_1} + \nu u_{x_2x_2}) + O(h^4). \tag{2.2}$$

Якщо $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – модуль жорсткості пластини на згин, то для знаходження функції u (див [1, с. 196, 200]) отримаємо рівняння

$$I + D\,\Delta^2 u = G_3, \tag{2.3}$$

де I – сила інерції. Нехай ρ – поверхнева густина пластини в недеформованому стані. Тоді $I = \rho\, h\, u_{tt}$. Припустимо, що зовнішня сила G_3 містить складову, залежну від швидкості руху пластини u_t, а саме, що G_3 має такий вигляд:

$$G_3(x_1, x_2, t) = f(x_1, x_2, t) - g(x_1, x_2, t)|u_t(x_1, x_2, t)|^{\alpha(x_1,x_2)} u_t(x_1, x_2, t), \qquad (2.4)$$

де f, g, α – відомі функції. В цьому випадку рівняння (2.3) набуде вигляду

$$\rho\, h\, u_{tt} + D\Delta^2 u + g|u_t|^{\alpha(x_1,x_2)} u_t = f. \qquad (2.5)$$

Доповнимо його крайовими умовами

$$\Delta u|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \qquad (2.6)$$

$$\left.\frac{\partial(D\,\Delta u)}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega\times(0,T)} = \Phi(u) \qquad (2.7)$$

та початковими умовами (1.3). Тут Φ – неперервна неспадна функція, $u_0, u_1 \in L^2(\Omega)$.

Покажемо, що узагальнений розв'язок цієї задачі задовольняє певну інтегральну варіаційну нерівність. Припустимо для спрощення, що $\rho h = 1$ та що подальші перетворення законні. Нехай ν – орт зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$,

$$\langle A\, z, v\rangle = \int\limits_\Omega [D\,\Delta z(x)\,\Delta v(x) + g|z_t|^{\alpha(x_1,x_2)} z_t v]\; dx,$$

u – розв'язок задачі (2.5)-(2.7), (1.3). Домножимо (2.5) на $\omega = \omega(x)$ і проінтегруємо по Ω. Одержимо рівність

$$\int\limits_\Omega u_{tt}(t)\omega\; dx + \int\limits_\Omega [D\,\Delta^2 u(t) + g(t)|u_t(t)|^{\alpha(x_1,x_2)} u_t(t)]\omega\; dx = \int\limits_\Omega f(t)\omega\; dx. \qquad (2.8)$$

Скористаємося другою формулою Гріна

$$\int\limits_\Omega \Delta^2 u\,\omega\; dx = \int\limits_{\partial\Omega} \Big(\frac{\partial\Delta u}{\partial\nu}\omega - \Delta u\frac{\partial\omega}{\partial\nu}\Big)\; dS_x + \int\limits_\Omega \Delta u\,\Delta\omega\; dx.$$

Використавши умови (2.6), (2.7), з (2.8) після інтегрування за $t \in (0,\tau) \subset (0,T)$ отримаємо, що

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} u_{tt}\omega\; dxdt + \int\limits_0^\tau \langle Au, \omega\rangle\; dt + \int\limits_0^\tau dt \int\limits_{\partial\Omega} \Phi(u)\omega\; dS_x = \int\limits_{Q_{0,\tau}} f\omega\; dxdt. \qquad (2.9)$$

Оскільки $\Phi(\lambda)$ є монотонно зростаючою функцією, то $\varphi(\lambda) = \int \Phi(\lambda)\; d\lambda$ – опукла функція. Тому $\varphi(\mu) - \varphi(\lambda) - \Phi(\lambda)(\mu - \lambda) \geq 0$. Якщо

$$\psi(z) = \int\limits_{\partial\Omega} \varphi(z(x))\; dS_x, \qquad (2.10)$$

то

$$\psi(v) - \psi(u) - \int\limits_{\partial\Omega} \Phi(u)(v-u)\; dS_x = \int\limits_{\partial\Omega} [\varphi(v) - \varphi(u) - \Phi(u)(v-u)]\; dS_x \geq 0.$$

Додамо до обох частин (2.9) вираз $\int_0^\tau [\psi(v)-\psi(u)]\ dt$, де $v=v(x,t)$ – довільна функція, візьмемо $\omega = v-u$

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} u_{tt}(t)(v-u(t))\ dxdt + \int\limits_0^\tau \langle Au, v-u\rangle\ dt + \int\limits_0^\tau \psi(v)\ dt - \int\limits_0^\tau \psi(u)\ dt = \int\limits_{Q_{0,\tau}} f(v-u)\ dxdt +$$

$$+\int\limits_0^\tau \Big[\psi(v)-\psi(u) - \int\limits_{\partial\Omega} \Phi(u)(v-u)\ dS_x\Big]\ dt \ge \int\limits_{Q_{0,\tau}} f(v-u)\ dxdt. \qquad (2.11)$$

Отож, розв'язок задачі (2.5)-(2.7), (1.3) задовольняє еволюційну варіаційну нерівність типу (1.2) і відомо, що узагальненим розв'язком задачі (2.5)-(2.7), (1.3) можна вважати функцію u, яка задовольняє (2.11) для всіх $\tau \in (0,T]$ та для всіх пробних функцій v.

3. Варіаційна нерівність четвертого порядку. Перейдемо до чіткого формулювання та доведення основного результату нашої статті. Нехай для спрощення $\Omega=(0,1)$, $Q_{t_1,t_2} = \Omega\times(t_1,t_2)$, $0\le t_1<t_2\le T$.

Узагальнені простори Лебега були введені в [10] і досліджували, зокрема в [11]. Нехай $L^\infty_+(\Omega) = \{v\in L^\infty(\Omega) \mid \operatorname{ess\,inf}\limits_{x\in\Omega} v(x) > 1\}$, $q\in L^\infty_+(\Omega)$. Визначимо функціонал $\rho_q(\cdot,\Omega)$ рівністю $\rho_q(v,\Omega) = \int_\Omega |v(x)|^{q(x)}dx$, де v – деяка функція. Узагальненим простором Лебега $L^{q(x)}(\Omega)$ називатимемо множину таких вимірних функцій $v:\Omega\to\mathbb{R}^1$, для яких $\rho_q(v,\Omega)<+\infty$. Відомо, що функціонал ρ_q є слабко напівнеперервним знизу на $L^{q(x)}(\Omega)$ (див. [10, с. 208]). Крім того, $L^{q(x)}(\Omega)$ є рефлексивним банаховим простором з нормою

$$||v;L^{q(x)}(\Omega)|| = \inf\{\lambda>0\ :\ \rho_q(v/\lambda,\Omega)\le 1\}.$$

Зауважимо таке: якщо $r(x)\ge q(x)$, то $L^{r(x)}(\Omega)\subset L^{q(x)}(\Omega)$. Аналогічно до $L^{q(x)}(\Omega)$ визначимо простір $L^{q(x)}(Q_{0,T})$, ввівши замість $\rho_q(\cdot,\Omega)$ функціонал $\rho_q(\cdot,Q_{0,T})$.

Нехай V – замкнений підпростір, $H^2_0(\Omega)\subset V\subset H^2(\Omega)$. Припустимо, що виконуються умови:

(A): $a, a_t\in L^\infty(Q_{0,T})$, $0<a_0\le a(x,t)<a^0$,
$|a_t(x,t)|\le a^1$ майже для всіх $(x,t)\in Q_{0,T}$;
(B): $b\in L^\infty(Q_{0,T})$, $b(x,t)\ge b_0\ge 0$ майже для всіх $(x,t)\in Q_{0,T}$;
(C): $c, c_t\in L^\infty(Q_{0,T})$, $0<c_0\le c(x,t)<c^0$,
$|c_t(x,t)|\le c^1$ майже для всіх $(x,t)\in Q_{0,T}$;
(H): $h\in L^\infty(Q_{0,T})$, $|h(x,t)|\le h^0$ майже для всіх $(x,t)\in Q_{0,T}$;
(G): $g\in L^\infty(Q_{0,T})$, $0<g_0\le g(x,t)\le g^0$ майже для всіх $(x,t)\in Q_{0,T}$;
(Φ): $\varphi: V\to(-\infty,+\infty]$ – опукла функція, $\varphi\not\equiv+\infty$;
(F): $f\in L^2(Q_{0,T})$;
(U): $u_0\in H^2(\Omega)$, $u_1\in L^2(\Omega)$.

Означення 1. *Функція $u: Q_{0,T}\to\mathbb{R}^1$ називається розв'язком задачі*

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} [u_{tt}(v-u_t) + a(x,t)u_{xx}(v_{xx}-u_{xxt}) + b(x,t)u_{xt}(v_x-u_{xt}) + c(x,t)u(v-u_t) +$$

$$+ h(x,t)u_t(v-u_t) + g(x,t)|u_t|^{q(x)-2}u_t(v-u_t)]\ dxdt +$$

$$+\int\limits_0^\tau \varphi(v(t))\,dt - \int\limits_0^\tau \varphi(u_t(t))\,dt \geq \int\limits_{Q_{0,\tau}} f(x,t)(v-u_t)\,dxdt, \tag{3.1}$$

$$u(0)=u_0, \qquad u_t(0)=u_1, \tag{3.2}$$

якщо $u \in L^2(0,T;V)$, $u_t \in L^2(0,T;V)\cap L^{q(x)}(Q_{0,T})$, $u_{tt} \in L^2(Q_{0,T})$ *і* u *задовольняє початкові умови (3.2) та еволюційну варіаційну нерівність (3.1) для всіх* $\tau \in (0,T]$ *та для всіх* $v \in L^2(0,T;V)$.

Головний результат нашої статті – така теорема.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови **(A)-(U)**, то задача (3.1), (3.2) не може мати більше одного розв'язку.*

Доведення. Нехай u^1 та u^2 – розв'язки задачі (3.1), (3.2), $\tau \in (0,T]$. В нерівності (3.1), записаній для u^1, приймемо $v=u_t^2$. В нерівності (3.1), записаній для u^2, приймемо $v=u_t^1$. Додавши отримані нерівності, одержимо

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} [u_{tt}^1(u_t^2-u_t^1)+u_{tt}^2(u_t^1-u_t^2)+au_{xx}^1(u_{xxt}^2-u_{xxt}^1)+au_{xx}^2(u_{xxt}^1-u_{xxt}^2)+$$
$$+bu_{xt}^1(u_{xt}^2-u_{xt}^1)+bu_{xt}^2(u_{xt}^1-u_{xt}^2)+hu_t^1(u_t^2-u_t^1)+hu_t^2(u_t^1-u_t^2)+$$
$$+g|u_t^1|^{q(x)-2}u_t^1(u_t^2-u_t^1)+g|u_t^2|^{q(x)-2}u_t^2(u_t^1-u_t^2)+$$
$$+cu^1(u_t^2-u_t^1)+cu^2(u_t^1-u_t^2)]\,dxdt \geq 0, \tag{3.3}$$

бо доданки з f та φ скоротяться. Перепишемо цю нерівність у вигляді

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[(u_{tt}^2-u_{tt}^1)(u_t^2-u_t^1)+a(u_{xx}^2-u_{xx}^1)(u_{xxt}^2-u_{xxt}^1)+$$
$$+b|u_{xt}^2-u_{xt}^1|^2+c(u^2-u^1)(u_t^2-u_t^1)+$$
$$+g(|u_t^1|^{q(x)-2}u_t^1-|u_t^2|^{q(x)-2}u_t^2)(u_t^2-u_t^1)\Big]\,dxdt \leq -\int\limits_{Q_{0,\tau}} h|u_t^1-u_t^2|^2\,dxdt. \tag{3.4}$$

Зінтегрувавши частинами та врахувавши початкові умови (3.2), отримаємо

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega \Big[|u_t^2(\tau)-u_t^1(\tau)|^2+a(\tau)|u_{xx}^2(\tau)-u_{xx}^1(\tau)|^2+c(\tau)|u^2(\tau)-u^1(\tau)|^2\Big]\,dx+$$
$$+\int\limits_{Q_{0,\tau}} b|u_{xt}^2-u_{xt}^1|^2dxdt \leq \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[a_t|u_{xx}^2-u_{xx}^1|^2+c_t|u^2-u^1|^2-h|u_t^1-u_t^2|^2\Big]\,dxdt.$$

Використавши умови теореми, одержимо нерівність

$$\int\limits_\Omega \Big[|u_t^2(\tau)-u_t^1(\tau)|^2+a_0|u_{xx}^2(\tau)-u_{xx}^1(\tau)|^2+c_0|u^2(\tau)-u^1(\tau)|^2\Big]\,dx \leq$$
$$\leq \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[a^1|u_{xx}^2-u_{xx}^1|^2+c^1|u^2-u^1|^2+2h^0|u_t^1-u_t^2|^2\Big]\,dxdt. \tag{3.5}$$

Позначимо

$$w(\tau) = \int_{\Omega} \Big[|u^2_t(\tau) - u^1_t(\tau)|^2 + |u^2_{xx}(\tau) - u^1_{xx}(\tau)|^2 + |u^2(\tau) - u^1(\tau)|^2 \Big]\, dx, \quad \tau \in (0, T].$$

Тоді з (3.5) отримаємо, що $w(\tau) \le C_1 \int_0^\tau w(t)\, dt$ для всіх $\tau \in (0, T]$, де стала $C_1 > 0$ не залежить від w. Тому з леми Гроноулла-Белмана [12] маємо, що $w = 0$. Отже, $u^1 = u^2$ і теорему доведено. □

4. Висновки. В статті розглянуто математичну модель процесу коливання плоскої пластини. Показано, що узагальнений розв'язок мішаної задачі, яка у цьому разі виникає, задовольняє певну еволюційну варіаційну нерівність четвертого порядку. Для нерівності такого типу отримано умови єдиності її розв'язку.

1. *Дюво Г.* Неравенства в механике и физике / *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* – Москва, 1980.
2. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейних краевых задач. / *Лионс Ж.-Л.* – М.: Мир, 1972.
3. *Lions J.-L.* Some non-linear evolution equations / *Lions J.-L., Strauss W.A.* // Bulletin de la S. M. F. – 1965. – Tome 93. – P. 43-96.
4. *Лавренюк С.П.* Існування і єдиність розв'язку нелінійного рівняння коливання пластини / *Лавренюк С.П.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1981. – Вип. 18. – С. 6-11.
5. *Лавренюк С.П.* Необмеженість розв'язків у скінченний момент часу одного слабко нелінійного рівняння четвертого порядку / *Лавренюк С.П., Торган Г.Р.* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – Т. 50, №3. – С. 88-93.
6. *Brezis H.* Problemes unilateraux / *Brezis H.* // J. Math. pures et appl. – 1972. – Vol. 51. – P. 1-168.
7. *Lavrenyuk S.* Variational hyperbolic inequality in the domains unbounded in spatial variables / *Lavrenyuk S., Pukach P.* // International J. of Evolution Equations. – 2007. – Vol. 3, №1. – P. 103-122.
8. *Бугрій О.М.* Параболічна варіаційна нерівність вищого порядку в обмеженій області / *Бугрій О.М.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2001. – Вип. 59. – С. 102-115.
9. *Lavrenyuk S.* The mixed problem for a semilinear hyperbolic equation in generalized Lebesgue spaces / *Lavrenyuk S., Panat O.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2006. – Вип. 66. – С. 243-260.
10. *Orlicz W.* Uber konjugierte Exponentenfolgen / *Orlicz W.* // Studia Mathematica (Lwow). – Vol. 3. – 1931. – P. 200-211.
11. *Buhrii O.M.* Uniqueness of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity / *Buhrii O.M., Mashiyev R.A.* // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Appl. – 2009. – Vol. 70, № 6. – P. 2335-2331.
12. *Гаевский Х.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* – М., 1978.

ABOUT UNIQUENESS OF SOLUTION TO SOME EVOLUTIONAL HIGH ORDER VARIATIONAL INEQUALITY OF THE PLATE THEORY

Pavlo ZAHORBENS'KYI, Mykola BUHRII, Oleh BUHRII

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: ol_buhrii@i.ua

We consider semilinear evolutional high order variational inequality. This inequality describe some oscillation process of the plate theory. The condition of uniqueness of solution to inequality are find.

Key words: plate theory, high order variational inequality, uniqueness of solution.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО ВАРИАЦИОННОГО НЕРАВЕНСТВА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ИЗ ТЕОРИИ ПЛАСТИН

Павел ЗАГОРБЕНСКИЙ, Николай БУГРИЙ, Олег БУГРИЙ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: ol_buhrii@i.ua

Рассмотрено одно полулинейное вариационное неравенство высокого порядка. Показано, что оно моделирует колебательные процессы в теории пластин. Найдены условия единственности решения этого неравенства.

Ключевые слова: теория пластин, вариационное неравенство высокого порядка, единственность решения.

Стаття надійшла до редколегії 20.11.2009

Прийнята до друку 16.12.2009

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2009. *Ser. Mech. Math. 2009.*
Вип. 71. С. 113–124 *Is. 71. P. 113–124*

УДК 513.6

ПРО ГРУПИ БРАУЕРА І ТЕЙТА-ШАФАРЕВИЧА КРИВИХ НАД ПСЕВДОГЛОБАЛЬНИМИ ПОЛЯМИ

Леся ЗДОМСЬКА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: lesyazdom@rambler.ru

Вивчено співвідношення між групами Брауера і групами Тейта-Шафаревича для кривих над псевдоглобальними полями.

Ключові слова: псевдоглобальне поле, алгебрична крива, якобіан, група Брауера, група Тейта-Шафаревича.

1. Вступ. Нехай K – поле, наділене множиною нормувань V_K, $\bar{K}$ – сепарабельне замикання поля K. Нехай X_K – зв'язна неособлива абсолютно незвідна крива. Для нормування v позначимо через K_v відповідне поповнення поля K. Позначимо через δ (відп. δ') *індекс* (відп. *період*) кривої X_K. За означенням індекс і період дорівнюють найменшому додатному порядку дивізора на X_K та найменшому додатному порядку класу дивізорів в $(\operatorname{Pic} X_{\bar{K}})^{\Gamma}$, відповідно. (Тут через Γ позначено групу Галуа сепарабельного алгебричного замикання $\bar{K}$ поля K над K.) Відомо, що індекс дорівнює найбільшому спільному дільникові степенів розширень L/K, для яких $X_K(L) \neq \emptyset$. Надалі δ_v та δ'_v позначатимуть індекс і період кривої X_{K_v}. Нехай A – якобіан кривої X_K. Відомо [13], що існує зв'язок між групою Брауера $\operatorname{Br}(X)$ та групою Тейта-Шафаревича Ш(A), де

$$Ш(A) = \operatorname{Ker}(H^1(K, A) \to \oplus_v H^1(K_v, A)).$$

У класичному випадку кривої над глобальним полем А. Гротендік [9, 10] довів існування зв'язку між групою Брауера $\operatorname{Br} X$ алгебричної кривої X та групою Тейта-Шафаревича Ш(A) многовиду Якобі A цієї кривої. Він довів, що у випадку, коли крива X визначена над глобальним функціональним полем і X має індекс 1 над всіма поповненнями поля K, то існує така скінченна підгрупа T_2 групи Ш(A), що група Брауера $\operatorname{Br}(X)$ ототожнюється з підгрупою скінченного індексу фактор-групи (Ш$(A)/T_2$). Дж. Мілн [13] при певних обмеженнях дослідив зв'язок між групою Брауера та групою Тейта-Шафаревича у випадку, коли X визначена над глобальним полем. Зокрема, він показав таке: коли група $Ш(A)$ не має ненульових нескінченно подільних елементів і X має індекс 1 над всіма поповненнями поля K, то період кривої X дорівнює її індексу. Крім того, якщо одна з груп $Ш(A)$ чи $\mathrm{Br}(X)'$ є скінченною, тоді такою ж є й інша з них, їхні порядки зв'язані рівністю

$$\delta^2[\mathrm{Br}\,(X)'] = [Ш(A)],$$

де

$$\mathrm{Br}\,(X)' = \mathrm{Ker}\left[\mathrm{Br}\,(X) \to \oplus_v \mathrm{Br}\,(X_{K_v})\right].$$

У випадку, коли не всі індекси δ_v дорівнюють 1, описання зв'язку між групами $\mathrm{Br}\,(X)$ і $Ш(A)$ отримав Дж. Гонзалес-Авілес в [8].

С. Ліхтенбаум [11] довів, що для кривої X над полем p-адичних чисел δ_v дорівнює одному з чисел δ'_v чи $2\delta'_v$. Нормування з властивістю $\delta_v = 2\delta'_v$ називаються *дефектними*, їхню кількість позначатимемо через d. (Це завжди скінченне число, бо, як відомо, існує лише скінченне число нормувань, для яких $\delta_v \neq 1$.)

Гонзалес-Авілес виявив, що для кривої X визначеної над глобальним полем K, для якої періоди δ'_v попарно взаємно прості, і група $Ш(A)$ не містить нескінченно подільних ненульових елементів, існує точна послідовність

$$0 \to T_0 \to T_1 \to \mathrm{Br}\,(X)' \to Ш(A)/T_2 \to T_3 \to 0,$$

в якій T_0, T_1, T_2, та T_3 – скінченні групи таких порядків:

$$[T_0] = \delta/\delta', \quad [T_1] = 2^e, \quad [T_2] = \delta'/\prod \delta'_v, \quad [T_3] = \frac{\delta'/\prod \delta'_v}{2^f},$$

де $e = \max\{0, d-1\}$ і $f = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \delta'/\prod \delta'_v \text{ є парним і } d \geqslant 1; \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$

Тут d є числом дефектних нормувань кривої X_K. Зокрема, якщо одна з груп $\mathrm{Br}\,(X)'$ чи $Ш(A)$ скінченна, тоді такою ж є й інша група, їхні порядки зв'язані рівністю

$$\delta\delta'[\mathrm{Br}\,(X)'] = 2^{e+f} \prod (\delta'_v)^2 [Ш(A)].$$

Мета цієї праці – вивчити зв'язки між групою Брауера $\mathrm{Br}\,X$ алгебричної кривої X, визначеної над псевдоглобальним полем K, та групою Тейта-Шафаревича $Ш(A)$ многовиду Якобі A цієї кривої. Згідно з [3] під псевдоглобальним полем ми розуміємо поле алгебричних функцій від однієї змінної з псевдоскінченним [5] полем констант. Нагадаємо, що поле k називається *псевдоскінченним*, якщо воно досконале, має єдине розширення степеня n для кожного натурального n, та кожний непорожній абсолютно незвідний многовид, визначений над полем k, має k-раціональну точку (остання властивість називається *псевдоалгебричною замкненістю.*)

Псевдоглобальні поля є природним узагальненням глобальних полів. Багато властивостей глобальних полів залишаються правильними і для псевдоглобальних полів, зокрема для псевдоглобальних полів справджується аналог глобальної теорії полів класів [3]. Різноманітні результати з арифметики алгебричних груп над глобальними полями узагальнюється на випадок псевдоглобального основного поля [4, 3, 13]. Зокрема, результати про зв'язок групи Брауера та групи Тейта-Шафаревича теж мають аналоги для кривих над псевдоглобальними полями, один з яких виражає така теорема.

Теорема 1. *Нехай X неособлива, геометрично незвідна крива, визначена над псевдоглобальним полем K. Припустимо, що крива X має індекс δ і період δ'. Тоді існує точна послідовність*

$$0 \longrightarrow T_0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow \mathrm{Br}\,(X)' \longrightarrow Ш(P) \longrightarrow \mathbb{Q}/\Delta^{-1}\mathbb{Z},$$

де T_0 та T_1 скінченні групи порядків $[T_0] = (\delta/\delta')\cdot[A(K) : \mathrm{Pic}^0(X_K)]$ і $[T_1] = \prod \delta_v/\Delta$ відповідно, і Δ найменше спільне кратне локальних індексів δ_v кривої X.

2. Допоміжні результати. Нехай X – неособлива зв'язна абсолютно незвідна крива над K, $\bar{K}$ – сепарабельне замикання поля K, $\bar{X}$ – крива X, розглянута над $\bar{K}$, та $\Gamma = \mathrm{Gal}\,(\bar{K}/K)$. Стандартно позначимо через $\mathrm{Div}(X)$ групу дивізорів кривої X над K, $\mathrm{Div}^0(X)$ – підгрупу дивізорів степеня 0, $P := \mathrm{Pic}\,(X)$ – групу класів дивізорів та через $\mathrm{Pic}^0(X)$ – підгрупу класів дивізорів степеня 0. Відомо, що $A := \mathrm{Pic}^0(X)$, якобіан кривої X, є абелевим многовидом. Для розширення L/K поля K позначимо через X_L криву, отриману з X розширенням скалярів з K до L, $P(L) = \mathrm{Pic}\,(X_L)$ та $A(L) = \mathrm{Pic}^0(X_L)$. Маємо точну послідовність

$$0 \longrightarrow A(\bar{K}) \longrightarrow P(\bar{K}) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \longrightarrow 0. \tag{1}$$

Γ-модулів. Переходячи в цій послідовності до Γ-інваріантних елементів, отримуємо точні послідовності

$$0 \longrightarrow A(K) \longrightarrow P(K) \longrightarrow \delta'\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \tag{2}$$
$$\mathrm{Div}^0(X)^\Gamma \longrightarrow A(K) \longrightarrow H^1(\Gamma, K(X)/K^*), \tag{3}$$

де $K(X)$ – поле раціональних функцій на кривій X. З означення груп $\mathrm{Div}^0(X)$ і $\mathrm{Pic}^0(X)$ одержуємо точні послідовності

$$0 \longrightarrow K(X_{\bar{K}})^*/\bar{K}^* \longrightarrow \mathrm{Div}^0(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(X) \longrightarrow 0 \tag{4}$$
$$0 \longrightarrow K(X_{\bar{K}})^*/\bar{K}^* \longrightarrow \mathrm{Div}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}\,(X) \longrightarrow 0. \tag{5}$$

Звідси отримуємо точні послідовності

$$0 \to K(X_K)^*/K^* \to \mathrm{Div}^0(X_K) \to A(K) \to A(K)/\mathrm{Pic}^0(X_K) \to 0 \tag{6}$$
$$0 \to K(X_K)^*/K^* \to \mathrm{Div}(X_K) \to P(K) \to P(K)/\mathrm{Pic}\,(X_K) \to 0. \tag{7}$$

Розглянемо точну послідовність когомологій, відповідну точній послідовності (4)

$$\mathrm{Div}^0(X)^\Gamma \xrightarrow{\alpha} (\mathrm{Pic}^0(X))^\Gamma \longrightarrow H^1(\Gamma, \bar{K}(X)^*/\bar{K}^*). \tag{8}$$

Враховуючи, що $\mathrm{Pic}^0(X)^\Gamma = A(K)$ і образ гомоморфізму α дорівнює $\mathrm{Pic}^0(X_K)$, з точної послідовності (3) отримуємо, що $A(K)/\mathrm{Pic}^0(X_K)$ є підгрупою групи $H^1(\Gamma, \bar{K}(X)^*/\bar{K}^*)$.

Лема 1. *Групи $A(K)/\mathrm{Pic}^0(X_K)$ і $P(K)/\mathrm{Pic}\,(X_K)$ скінченні.*

Доведення. Зауважимо спочатку, що група $A(K)/\mathrm{Pic}^0(X_K)$ скінченно породжена. Нехай $(A^{K/k}(k), \tau_K)$ та $P^{K/k}(k), \tau_K)$ – K/k-сліди [14] многовидів $A(K)$ і $\mathrm{Pic}^0(X_K)$ відповідно. Знайдеться скінченне розширення L/K, над яким крива X має

L-раціональні точки. Нехай l поле констант поля L. Тоді $A(L) = \mathrm{Pic}^0(X_L)$ і многовиди $P(K)$ та $\mathrm{Pic}^0(X_K)$ мають однакові сліди $(A^{L/l}(l), \tau_L)$, якщо їх розглядати над полем L. Розглянемо таку діаграму підгруп групи $A(K)$:

$$\begin{array}{ccccc} A(K) & \supset & \tau_L(A^{L/l}(l)) \cap A(K) & \supset & \tau_K(A^{K/k}(k)) \\ \cup & & & & \cup \\ \mathrm{Pic}^0(X_K) & \supset & \tau_L(P^{K/k}(k)) \cap \mathrm{Pic}^0(X_K) & \supset & \tau_K(P^{K/k}(k)). \end{array}$$

Теорема Морделла-Вейля для функціональних полів [14] стверджує, що групи $A(K)/\tau_K(A^{K/k}(k))$ та $\mathrm{Pic}^0(X_K)/\tau_K(P^{K/k}(k))$ скінченно породжені. Групи $\tau_K(A^{K/k}(k))$ та $\tau_K(P^{K/k}(k))$ ізоморфні, оскільки над полем L кожна з них ізоморфна $A^{L/l}(l)$ над l. Отже, $A^{K/k}(k)$ та $P^{K/k}(k)$ є l-ізоморфними головними однорідними просторами. Оскільки група головних однорідних просторів тривіальна для абелевих многовидів над псевдоскінченним полем, то $A^{K/k}(k) \simeq P^{K/k}(k)$, тому у попередній діаграмі $\tau_K(A^{K/k}(k)) \simeq \tau_K(P^{K/k}(k))$. Звідси випливає, що група $A(K)/\mathrm{Pic}^0(X_K)$ скінченно породжена. Оскільки ця група є підгрупою групи кручення $H^1(\Gamma, \bar{K}(X)^*/\bar{K}^*)$, то вона скінченна. Застосовуючи лему про "змію" до точної послідовності

$$0 \to \mathrm{Pic}^0(X_K) \to \mathrm{Pic}\,(X_K) \to s\mathbb{Z} \to 0$$

та точної послідовності (2) з природними вкладеннями в ролі вертикальних гомоморфізмів, отримуємо точну послідовність

$$0 \to t\mathbb{Z} \to A(K)/\mathrm{Pic}^0(X_K) \to P(K)/\mathrm{Pic}\,(X_K) \to \mathbb{Z}/r\mathbb{Z} \to 0,$$

де s, r і t підходящі натуральні числа. Оскільки групи $A(K)/\mathrm{Pic}^0(X_K)$ та $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ скінченні, такою ж є і група $P(K)/\mathrm{Pic}\,(X_K)$, що і треба було довести. □

Лема 2. *Нехай X – крива, визначена над псевдоглобальним полем K. Тоді для майже всіх нормувань v поля функцій на X, $\delta_v = \delta(X_{K_v}) = 1$.*

Доведення. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що для кожного v коефіцієнти рівняння кривої X належать $\mathcal{O}_v$-кільцю цілих елементів поля K_v. Редукуючи коефіцієнти кривої X за модулем максимального ідеала $\mathfrak{m}_v$, отримуємо криві $X(v)$ над псевдоскінченним полем $k' \supset k$. Для майже всіх v криві $X(v)$ непорожні. Крім того, для кожного v крива $X(v)$ має неособливу точку, бо особливих точок може бути лише скінченна кількість, а $X(v)$ має [7] нескінченно багато точок. Застосовуючи лему Гензеля, отримуємо, що X_{K_v} має раціональну точку, тому $\delta_v = 1$ за означенням індексу. □

Наслідок 1. *Нехай крива X визначена над псевдоглобальним полем K. Тоді*

$$[P(K) : \mathrm{Pic}\,(X_K)] = (\delta/\delta')[A(K) : \mathrm{Pic}^0(X_K)].$$

Доведення. Достатньо застосувати лему про змію так, як це робиться у випадку глобального основного поля [8] до комутативної діаграми з точними рядками

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Div}^0(X_K) & \longrightarrow & \mathrm{Div}(X_K) & \longrightarrow & \delta\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A(K) & \longrightarrow & P(K) & \longrightarrow & \delta'\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

у якій нижній рядок є точною послідовністю (2), а верхній рядок отримуємо з точної послідовності

$$0 \to \mathrm{Div}^0(\bar{X}_K) \to \mathrm{Div}(\bar{X}_K) \to \delta\mathbb{Z} \to 0$$

за означенням індексу, переходячи до Γ-інваріантних елементів. □

Тепер доведемо рівність $[A(K_v) : \mathrm{Pic}^0(X_{K_v})] = \delta'_v$, яка у поєднанні з наслідком 1 дає $[P(K_v) : \mathrm{Pic}^0(X_{K_v})] = \delta_v$. У випадку глобального основного поля доведення цієї рівності використовує невиродженість добутку Тейта-Шафаревича для абелевих многовидів над локальними полями. Відомо [1], що для еліптичної кривої, визначеної над псевдолокальним полем K, добуток Тейта-Шафаревича індукує двоїстість скінченних груп $A(K)/nA(K)$ і $H^1(K, A)_n$. Виявляється, що аналогічний факт виконується і для довільного абелевого многовиду, визначеного над повним дискретно нормованим полем з псевдоскінченним полем лишків. Покажемо це, використовуючи класичні методи та результати з [11] та [12]. Для цього сформулюємо спочатку один результат про двоїстість Тейта в когомологіях Галуа скінченних модулів над загальними локальними полями, тобто повними дискретно нормованими полями з квазіскінченними [17] полями (досконалими полями, які мають точно одне розширення степеня n для кожного натурального числа n) лишків.

Лема 3. *Нехай K – загальне локальне поле, G_K – його абсолютна група, M – скінченний G_K-модуль, $(|M|, \mathrm{char} k) = 1$, і $\hat{M} = \mathrm{Hom}\,(M, K_s^*)$, де K_s^* мультиплікативна група сепарабельного замикання поля K. Тоді групи $H^i(K, M)$ і $H^i(K, \hat{M})$ скінченні для $0 \leqslant i \leqslant 2$ і двоїсті між собою стосовно $\cup$-добутку*

$$H^i(K, M) \times H^i(K, \hat{M}) \longrightarrow H^2(K, K_s^*) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Доведення. Див. [17], теорема 2 на ст. 111 та вправа 2 на ст. 113. □

Лема 4. *Нехай K – загальне локальне поле, M – скінченний G_K-модуль, $(|M|, \mathrm{char} k) = 1$. Тоді групи $H^i(K, M)$ – скінченні і*

$$|H^0(K, M)| \cdot |H^2(K, M)| = |H^1(K, M)|.$$

Доведення. Див. [17], твердження 17 на ст. 115 та вправа на ст. 117. □

Лема 5. *Нехай A – довільний абелевий многовид, визначений над псевдолокальним полем K з полем лишків k. Припустимо, що $(n, \mathrm{char}\, k) = 1$. Тоді $|A(K)/nA(K)| \geqslant \geqslant |(A(K))_n|$.*

Доведення. Якщо A – абелевий многовид, визначений над полем лишків k, то рівність $|A(k)/nA(k)| = |(A(k))_n|$ випливає з точної когомологічної послідовності

$$0 \longrightarrow A(k) \xrightarrow{n} A(k) \longrightarrow H^1(k, A_n) \longrightarrow H^1(k, A)_n = 0,$$

відповідної точній послідовності $0 \to A_n(\bar{k}) \to A(\bar{k}) \xrightarrow{n} A(\bar{k}) \to 0$, враховуючи, що $H^1(k, A) = 0$ з огляду на псевдоскінченності поля k, і $|H^1(k, A_n)| = |H^0(k, A_n)| = = |A_n(k)|$, оскільки $\mathrm{Gal}\,(\bar{k}/k) = \hat{\mathbb{Z}}$ (див., наприклад [18], лема 3, с. 322). Так само

$|T(k)/nT(k)| = |(T(k))_n|$ для алгебричного тора T, визначеного над псевдоскінченним полем k.

Нехай тепер A – абелевий многовид, визначений над псевдолокальним полем K з полем лишків k. Відомо, що існує скінченне розширення L поля K над яким A має напівстабільну редукцію A' над полем лишків l поля L, тобто $A'(l)$ є розширенням абелевого многовиду $B(l)$ за допомогою тора $T(l)$. Тому, застосувавши лему про змію до комутативної діаграми

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T(l) \arrow[r] \arrow[d, "n"] & A'(l) \arrow[r] \arrow[d, "n"] & B(l) \arrow[r] \arrow[d, "n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & T(l) \arrow[r] & A'(l) \arrow[r] & B(l) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

і використовуючи, що, за доведеним,

$$|B(l)/nB(l)| = |B_n(l)| \text{ і } |T(l)/nT(l)| = |T_n(l)|,$$

отримуємо, що $|A'(l)/nA'(l)| = |A'_n(l)| = A_n(L)$. Крім того, відомо, що відображення редукції $A(L) \to A'(l)$ сюр'єктивне. Звідси випливає, що $|A(L)/nA(L)| \geqslant$ $\geqslant |A'(l)/nA'(l)| = |A'_n(l)| = |A_n(L)|$.

Припустимо, що $|A(L)/nA(L)| = |A_n(L)|$. Нехай A_{tor} – підгрупа кручення A. Група $A(L)/A_{\mathrm{tor}}(L)$ подільна. З іншого боку, нехай Q – коядро канонічного відображення $A(K) \to A(L)$. Тоді фактор-група Q/Q_{tor} також подільна за сюр'єктивністю відображення $A(L) \to Q$. Тому $[Q/nQ] = [Q_{\mathrm{tor}}/nQ_{\mathrm{tor}}]$. Оскільки група Q_{tor} скінченна, то також $[A_n(K)] = [A(K)/nA(K)]$.

З наступного результату випливатиме, що насправді $|A(L)/nA(L)| = |A_n(L)|$ і $|A(K)/nA(K) = |A_n(K)|$. □

Теорема 2. *Нехай A – абелевий многовид, визначений над псевдолокальним полем K, $\hat{A}$ – двоїстий многовид. Тоді добуток Тейта-Шафаревича індукує двоїстість скінченних груп $A(K)/nA(K)$ і $H^1(K,\hat{A})_n$.*

Доведення. Припустимо спочатку, що $|A(K)/nA(K)| \geqslant |A_n(K)|$. Нехай i_n та j_n – гомоморфізми з точних послідовностей

$$0 \longrightarrow A(K)/nA(K) \xrightarrow{i_n} H^1(K, A_n) \longrightarrow H^1(K,A)_n \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \hat{A}(K)/n\hat{A}(K) \longrightarrow H^1(K, \hat{A}_n) \xrightarrow{j_n} H^1(K,\hat{A})_n \longrightarrow 0,$$

які одержують з точної послідовностості когомологій Галуа, відповідні точній послідовності G_K-модулів $0 \to A_n \to A \to A \to 0$ та аналогічної точної послідовності для $\hat{A}$. Згідно з твердженням 9 з [19] одержуємо комутативну діаграму

$$\begin{tikzcd}
H^1(K, A_n) & \times & H^1(K,\hat{A}_n)' \arrow[r, "W"] \arrow[d, "j_n"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\
A(K)/nA(K) \arrow[u, "i_n"] & \times & H^1(K,\hat{A})_n \arrow[r, "T"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z},
\end{tikzcd}$$

де добуток W' індукований добутком Вейля (означення добутку Вейля можна знайти у [19]), а добуток T індукований добутком Тейта-Шафаревича. Добуток W' є двоїстістю скінченних груп, тому з комутативної діаграми (2) випливає, що добуток T невироджений зліва. Для того, щоб вивести звідси його двобічну невиродженість, достатньо показати, що $|A(K)/nA(K)| \geqslant |H^1(K,A)_n|$. Маємо, використовуючи леми 4-5, ізоморфізм A_n і $\hat{A}_n$ та точну послідовність (2)

$$\begin{aligned}|A(K)/nA(K)|\cdot|\hat{A}(K)/n\hat{A}(K)| \geqslant |A(K)_n|\cdot|\hat{A}(K)_n| = \\ = |H^0(K,\hat{A}_n)|\cdot|H^0(K,A_n)| = |H^0(K,\hat{A}_n)|\cdot|H^2(K,\hat{A}_n)| = \\ = |H^1(K,\hat{A}_n)| = |\hat{A}(K)/n\hat{A}(K)|\cdot|H^1(K,\hat{A})_n|.\end{aligned}$$

Звідси випливає, що $|A(K)/nA(K)| \geqslant |H^1(K,\hat{A}_n)|$, оскільки добуток T невироджений зліва, то насправді $|A(K)/nA(K)| \geqslant |H^1(K,\hat{A}_n)|$, і це завершує доведення теореми 2 у випадку, коли $|A(K)/nA(K)| \geqslant |A_n(K)|$. □

Ще один потрібний нам результат – це аналог теореми Роккета про період та індекс кривих.

Теорема 3. *Нехай K – псевдолокальне поле. Тоді порядок підгрупи* $\mathrm{Br}\,(K)$*, що складається з тих класів алгебр, які розкладаються в полі функцій $K(X)$ на кривій X, дорівнює індексу кривої X.*

Доведення. Розглянемо відому точну послідовність (доведення її точності можна знайти, наприклад, у [11]))

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow \mathrm{Pic}\,(X) \longrightarrow H^0(G,\mathrm{Pic}\,(\bar{X})) \longrightarrow \mathrm{Br}\,(k) \longrightarrow \mathrm{Br}\,(X) \\ \longrightarrow H^1(G,\mathrm{Pic}\,(\bar{X})) \longrightarrow H^3(G,\bar{k}^*). \quad (9)\end{aligned}$$

С. Ліхтенбаум розглядав у [11] таку комутативну діаграму з точними рядками і стовпчиками

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Br}\,(K) & & \\
 & \mathrm{Br}\,(k) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Br}\,(k) \arrow[u] & & \\
0 \arrow[r] & H^0(G,\mathrm{Pic}^0(\bar{X})) \arrow[r] \arrow[u, "\theta"'] & H^0(G,\mathrm{Pic}\,(\bar{X})) \arrow[r] \arrow[u] & \delta'\mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^0(G,\mathrm{Div}^0(\bar{X})) \arrow[r] \arrow[u, "\lambda_1"'] & H^0(G,\mathrm{Div}\,(\bar{X})) \arrow[r] \arrow[u, "\lambda_2"'] & \delta\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & & & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Середній стовпчик – це частина точної послідовності (9), і лівий стовпчик, отриманий так само. Нехай M – коядро гомоморфізму λ_1, і N – коядро гомоморфізму λ_2. Теорема стверджує, що $|N| = \delta$. За лемою про змію, безпосередньо бачимо, $\delta|M| = \delta'|N|$, тому теорема еквівалентна твердженню, що $|M| = \delta'$. Але рівність

$\theta(x) = \rho_0(\alpha, x)$ разом з фактом, що ρ_0 є дуалізуючим добутком, і ми одержуємо, що $|M| =$ порядку $\alpha = \delta'$. □

Лема 6.

$$[A(K_v) : \mathrm{Pic}^0(X_{K_v})] = \delta'_v, \quad [P(K_v) : \mathrm{Pic}\,(X_{K_v})] = \delta_v.$$

Доведення. Нехай $\Gamma_v = \mathrm{Gal}\,(\bar{K}_v/K_v)$. З когомологічної послідовності, асоційованої з точною послідовністю Γ_v-модулів $0 \to A(\bar{K}_v) \to P(\bar{K}_v) \overset{\deg}{\to} \mathbb{Z} \to 0$, отримуємо точну послідовність

$$0 \to \mathbb{Z}/\delta'_v\mathbb{Z} \to H^1(\Gamma_v, A) \to H^1(\Gamma_v, P) \to 0. \tag{10}$$

□

Нам також буде потрібний певний варіант леми про змію. Розглянемо таку комутативну діаграму в категорії абелевих груп:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d] & A_2 \arrow[r, "f"] \arrow[d] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "\eta"] & A_4 \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"] & A_5 \arrow[r] \arrow[d, "\mu"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r, "g"] & B_3 \arrow[r] & B_4 \arrow[r] & B_5 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{11}$$

Вона породжує комутативну діаграму

$$\begin{tikzcd}
 & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\eta}"] & A_4 \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"] & A_5 \arrow[r] \arrow[d, "\mu"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_3/\mathrm{Im}g \arrow[r] & B_4 \arrow[r] & B_5 \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

де $\bar{\eta}$ – композиція η з канонічним відображенням з B_3 в $B_3/\mathrm{Im}g$. Наступне твердження випливає з $\mathrm{Im}f \subset \mathrm{Ker}\,\bar{\eta}$ та леми про змію, застосованої до попередньої діаграми.

Лема 7. (Гонзалес-Авілес [8].) *Кожна комутативна діаграма вигляду (11) породжує точну послідовність*

$$0 \to \mathrm{Im}f \to \mathrm{Ker}\,\bar{\eta} \to \mathrm{Ker}\,\lambda \to \mathrm{Ker}\,\mu \to Coker\bar{\eta},$$

де η визначено раніше. Крім того, існує точна послідовність

$$0 \to \mathrm{Ker}\,\eta \to \mathrm{Ker}\,\bar{\eta} \to \mathrm{Im}g \to \mathrm{Coker}\eta \to \mathrm{Coker}\bar{\eta} \to 0.$$

3. Доведення теореми. Всі когомологічні групи, які ми будемо розглядати, будуть або групами когомологій Галуа, або ж етальними когомологіями. Нехай Γ_v – підгрупа групи Γ, ототожнена з групою розкладу деякого фіксованого нормування поля $\bar{K}$, що породжує v. Для кожного v, $\mathrm{inv}_v : \mathrm{Br}\,(K_v) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ є звичайним відображенням інваріанта локальної теорії полів класів. n-кручення абелевої групи M будемо позначати $M_{n-\mathrm{tor}}$.

Нагадаємо одну фундаментальну точну послідовність. Оскільки $H^q(X_{\bar{K}}, \mathbb{G}_m) = 0$ для всіх $q \geqslant 2$ [15], то зі спектральної послідовності Хохшільда-Серра

$$H^p(\Gamma, H^q(X_{\bar{K}}, \mathbb{G}_m)) \Rightarrow H^{p+q}(X_K, \mathbb{G}_m)$$

випливає [6, XV.5.11] точна послідовність

$$0 \to \mathrm{Pic}\,(X_K) \to P(K) \to \mathrm{Br}\,(K) \to \mathrm{Br}\,(X_K) \to H^1(\Gamma, P) \to 0, \tag{12}$$

де нуль справа у цій послідовності випливає з рівності $H^3(\Gamma, \bar{K}^*) = 0$ [2, 17]. (Тут ми використали відомі факти, що $\mathrm{Pic}\,(X_K) = H^1(X_K, \mathbb{G}_m)$ і що група Брауера кривої X дорівнює когомологічній групі Брауера цієї кривої.) Так само, для кожного нормування v існує точна послідовність

$$0 \to \mathrm{Pic}\,(X_{K_v}) \to P(K_v) \xrightarrow{g_v} \mathrm{Br}\,(K_v) \to \mathrm{Br}\,(X_{K_v}) \to H^1(\Gamma_v, P). \tag{13}$$

Лема 8. $\mathrm{Im}\, g_v = \mathrm{Br}\,(K_v)_{\delta_v-\mathrm{tor}}$ *для кожного нормування* v *поля* K.

Доведення. За лемою 6 $\mathrm{Im} g_v$ є підгрупою групи $\mathrm{Br}\,(K_v)$ порядку δ_v. З іншого боку, відображення inv_v породжує ізоморфізм $\mathrm{Br}\,(K_v)_{\delta_v-\mathrm{tor}} \xrightarrow{\sim} \delta_v^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$, звідки випливає твердження леми. □

Розглянемо комутативну діаграму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Pic}\,(X_K) \arrow[r] \arrow[d] & P(K) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Br}\,(K) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\eta}"] & {} \\
0 \arrow[r] & \oplus_v \mathrm{Pic}\,(X_{K_v}) \arrow[r] & \oplus_v P(K_v) \arrow[r, "g"] & \oplus_v \mathrm{Br}\,(K_v) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \mathrm{Br}\,(X_K) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(\Gamma, P) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
{} \arrow[r] & \oplus_v \mathrm{Br}\,(X_{K_v}) \arrow[r] & \oplus_v H^1(\Gamma_v, P) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

де прямі суми беруть за всіма нормуваннями поля K, вертикальні відображення є природними гомоморфізмами, і $g = \oplus g_v$. Ця діаграма має ту саму форму, що і діаграма (11), тому ми можемо застосувати до неї лему 7. Перед цим нам буде потрібна така лема.

Лема 9. *а) Для псевдоглобального поля* K *існує точна послідовність*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Br}\,(K) \xrightarrow{\eta} \oplus_v \mathrm{Br}\,(K_v) \xrightarrow{\Sigma \mathrm{inv}_v} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

б) Існує точна послідовність

$$0 \to \mathrm{Br}\,(X) \longrightarrow \mathrm{Br}\,(X_K) \longrightarrow \oplus_{v \notin S} \mathrm{Br}\,(X_{K_v}),$$

де S *– множина тих нормувань поля* K*, що не відповідають точкам непорожньої відкритої підсхеми* U *єдиної гладкої повної кривої над* k*, полем функцій якої є* K.

Доведення. Перше твердження – це один з ключових результатів теорії полів класів глобального поля. Для випадку псевдоглобального поля аналогічну точну послідовність виявили в [3]. Друге твердження доведене в [13, лема 2.6]. Наведене там доведення придатне і для нашого випадку – випадку псевдоглобального основного поля K, оскільки єдине місце у згаданому доведенні, де використовується специфіка основного поля, є тривіальність групи Брауера редукованої кривої для кривої X, визначеної над K. Проте група Брауера кривої над псевдоскінченним полем також тривіальна. □

Застосуємо лему 7 до попередньої діаграми, використовуючи у цьому разі попередню лему. Отримаємо точну послідовність

$$0 \longrightarrow P(K)/\mathrm{Pic}\,(X_K) \longrightarrow \mathrm{Ker}\ \bar{\eta} \longrightarrow \mathrm{Br}\,(X)' \longrightarrow \text{Ш}(P) \longrightarrow \mathrm{Coker}\,\bar{\eta},$$

де відображення $\bar{\eta} : \mathrm{Br}\,(K) \to \oplus_v \mathrm{Br}\,(K_v)/\mathrm{Im} g$ породжується відображенням η і

$$\mathrm{Br}\,(X)' = \mathrm{Ker}\left[\mathrm{Br}\,(X) \longrightarrow \oplus_{v\in S} \mathrm{Br}\,(X_{K_v})\right].$$

Згідно з наслідком 1 порядок $P(K)/\mathrm{Pic}\,(X_K)$ дорівнює $(\delta/\delta') \cdot [A(K) : \mathrm{Pic}^0(X_K)]$. Властивості ядра та коядра відображення $\bar{\eta}$ наведені в твердженні 1.

Твердження 1. *Правильна рівність*

$$[\mathrm{Ker}\ \bar{\eta}] = \prod \delta_v/\Delta,$$

і відображення $\Sigma \mathrm{inv}_v : \oplus \mathrm{Br}\,(K_v) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ *породжує ізоморфізм*

$$\mathrm{Coker}\,\bar{\eta} \cong \mathbb{Q}/\Delta^{-1}\mathbb{Z}.$$

Доведення. Поєднуючи леми 7, 8 та 9, отримуємо точну послідовність

$$0 \to \mathrm{Ker}\ \bar{\eta} \to \oplus \mathrm{Br}\,(K_v)_{\delta_v-\mathrm{tor}} \stackrel{\Sigma \mathrm{inv}_v}{\to} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \mathrm{Coker}\,\bar{\eta} \to 0. \tag{14}$$

Для кожного v відображення інваріанта inv_v породжує ізоморфізм $\mathrm{Br}\,(K_v)_{\delta_v-\mathrm{tor}} \cong$ $\cong \delta_v^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$, тому ядро і коядро середнього відображення попередньої точної послідовності (14) можна ототожнити з ядром і коядром відображення Σ, визначеного перед лемою 6. Як наслідок, наше твердження випливає з властивостей відображення Σ, наведених перед лемою 6. □

Підсумовуючи отримані вище результати, бачимо, що існує точна послідовність

$$0 \longrightarrow T_0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow \mathrm{Br}\,(X)' \to \text{Ш}(P) \longrightarrow \mathbb{Q}/\Delta^{-1}\mathbb{Z},$$

де T_0 та T_1 – скінченні групи порядків $[T_0] = (\delta/\delta') \cdot [A(K) : \mathrm{Pic}^0(X_K)]$ і $[T_1] = \prod \delta_v/\Delta$, що й завершує доведення теореми 1.

Наслідок 2. *Припустимо, що всі локальні індекси δ_v кривої X дорівнюють 1 і група Ш(P) не має нескінченно подільних елементів. Якщо одна з груп $\mathrm{Br}'(X)$ або Ш(P) скінченна, то такою є й інша, і їхні порядки зв'язані рівністю*

$$\delta^2|\mathrm{Br}'(X)| = |\text{Ш}(P)|.$$

Отримана під час доведення теореми 1 інформація дає підстави довести такий факт.

Теорема 4. *Припустимо, що числа δ'_v – попарно взаємно прості. Тоді*

$$A(K) = \mathrm{Pic}^0(X_K).$$

Доведення. Існує комутативна діаграма з точними рядками

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & A(K)/\mathrm{Pic}^0(X_K) & \longrightarrow & \mathrm{Br}\,(K) \\
 & & \downarrow & & \downarrow \eta \\
0 & \longrightarrow & \oplus_v A(K_v)/\mathrm{Pic}^0(X_{K_v}) & \longrightarrow & \oplus_v \mathrm{Br}\,(K_v)
\end{array}$$

з природними вертикальними відображеннями, в якій нетривіальні горизонтальні гомоморфізми породжуються відображеннями

$$P(K)/\mathrm{Pic}\,(X_K) \to \mathrm{Br}\,(K) \;\text{ i }\; P(K_v)/\mathrm{Pic}\,(X_{K_v}) \to \mathrm{Br}\,(K_v)$$

з комутативних діаграм (12) та (13) відповідно. Міркуючи аналогічно до доведення леми 8, отримуємо, що для кожного v образ $A(K_v)/\mathrm{Pic}^0(X_{K_v})$ в $\mathrm{Br}\,(K_v)$ дорівнює $\mathrm{Br}\,(K_v)_{\delta'_v-\mathrm{tor}}$. Як наслідок, група $A(K)/\mathrm{Pic}^0(X_K)$ вкладається в $\mathrm{Ker}\;\bar{\eta}'$, де гомоморфізм

$$\bar{\eta}' : \mathrm{Br}\,(K) \to \oplus_v \mathrm{Br}\,(X_{K_v})/\mathrm{Br}\,(K_v)_{\delta'_v-\mathrm{tor}}$$

є породженим η. Застосовуючи ті самі міркування, що і в доведенні твердження 1, отримуємо, що порядок $\mathrm{Ker}\;\bar{\eta}'$ дорівнює $\prod \delta'_v/\Delta'$. Згідно з нашими припущеннями це відношення дорівнює 1, звідки і випливає твердження теореми. $\square$

1. *Андрийчук В.И.* Об эллиптических кривых над псевдолокальнымы полями / *Андрийчук В.И.* // Мат. сб. – 1979. – Т. 110, №9. – С. 88-101.
2. *Andriychuk V.* Algebraic curves over n-dimensional general local fields / *Andriychuk V.* // Mat. Stud. – 2001. – Vol. 15, №2. – P. 209-214.
3. *Andriychuk V.* On the algebraic tori over some function fields / *Andriychuk V.* // Mat. Stud. – 1999. – Vol. 12, №2. – P. 115-126.
4. *Андрійчук В.І.* Арифметика алгебричних многовидів: / *Андрійчук В.І.* Дис. ... докт. фіз.-мат. наук: Київ, 2002.
5. *Ax J.* The elementary theory of finite fields / *Ax J.* // Ann. Math. – 1968. – Vol. 88, №2. – P. 239-271.
6. *Cartan H.* Homological Algebra / *Cartan H., Eilenberg S.* – Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956.
7. *Fried M.D.* Field Arithmetic / *Fried M.D., Jarden M.* – Springer, 2005.
8. *Gonzalez-Avilez C.D.* Brauer groups and Tate-Shafarevich groups / *Gonzalez-Avilez C.D.* // J. Math. Sci. Univ. Tokyo. – 2003. – Vol. 10. – P. 381-419.
9. *Grothendieck A.* Technique de descente et théorèmes d'existence en Géométrie Algébrique, V, VI. Les Schémas de Picard / *Grothendieck A.* // Sém. Bourbaki, 1961. – №232, 1962. – №236.
10. *Grothendieck A.* Le Groupe de Brauer I-II-III, in: Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas / *Grothendieck A.* – North-Holland, Amsterdam, 1968.
11. *Lichtenbaum S.* Duality theorems for curves over P-adic fields / *Lichtenbaum S.* // Invent. Math. – 1969. – Vol. 7. – P. 1209-1223.
12. *Milne J.S.* Weil-Chatelet groups over local fields / *Milne J.S.* // Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. – 1970. – Vol. 3. – P. 273-284. Addendum, Ibid. – 1972. – Vol. 5. – P. 261-264.
13. *Milne J.S.* Comparison of the Brauer group and the Tate-Šafarevič group / *Milne J.S.* // Journal of the Faculty of Science, the University of Tokyo. – 1982. – Vol. 28, №3. – P. 735-743.
14. *Ленг С.* Основы диофантовой геометрии / *Ленг С.* – М.: Мир, 1986.
15. *Милн Дж.* Этальные когомологии / *Милн Дж.* – М.: Мир, 1983.
16. *Milne J.S.* Arithmetic Duality Theorems. – Persp. in Math., 1 / *Milne J.S.* – Academic Press Inc., 1986.
17. *Серр Ж.-П.* Когомологии Галуа / *Серр Ж.-П.* – М.: Мир, 1968.
18. *Платонов В.П.* Алгебраические группы и теория чисел / *Платонов В.П., Рапинчук А.С.* – М.: Наука, 1991.

19. *Башмаков М.И.* Когомологии абелевых многообразий над числовым полем / *Башмаков М.И.* // Успехи матем. наук. – 1972. – Т. 28, Вып. 6. – С. 25-66.

ON THE BRAUER GROUPS AND THE TATE-SHAFAREVICH GROUPS OF CURVES OVER PSEUDOGLOBAL FIELDS

Lesya ZDOMSKA

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: lesyazdom@rambler.ru

The relation between the Brauer groups and the Tate-Shafarevich groups of curves over pseudoglobal fields are studied.

Key words: pseudoglobal field, algebraic curve, jacobian, Brauer group, Tate-Shafarevich group.

О ГРУППАХ БРАУЭРА И ТЭЙТА-ШАФАРЕВИЧА КРИВЫХ НАД ПСЕВДОГЛОБАЛЬНЫМИ ПОЛЯМИ

Леся ЗДОМСКАЯ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: lesyazdom@rambler.ru

Изучено соотношения между группами Брауэра и группами Тэйта-Шафаревича для кривых над псевдоглобальными полями.

Ключевые слова: псевдоглобальное поле, алгебраическая кривая, якобиан, группа Брауэра, группа Тэйта-Шафаревича.

Стаття надійшла до редколегії 26.05.2009

Прийнята до друку 16.12.2009

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2009.
Вип. 71. С. 125–134

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech. Math. 2009.
Is. 71. P. 125–134

УДК 517.956

ДЕЯКІ НЕЛІНІЙНІ ЗАДАЧІ З ВІЛЬНИМИ МЕЖАМИ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНИХ СИСТЕМ КВАЗІЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Володимир КИРИЛИЧ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: vkyrylych@ukr.net

Знайдено достатні умови глобальної розв'язності задачі з невідомою лінією контактного розриву та локальної розв'язності сингулярної задачі з внутрішніми невідомими межами для гіперболічних систем квазілінійних рівнянь першого порядку, записаних відповідно у канонічних формах Рімана та Шаудера.

Ключові слова: гіперболічна система, квазілінійні рівняння, невідомі межі, метод характеристик.

1. Вступ. Системи квазілінійних гіперболічних рівнянь першого порядку відіграють важливу роль при моделюванні фізичних процесів природознавства. До таких моделей, наприклад, можна зарахувати рівняння Ейлера газової динаміки [1], рівняння мілкої води [2] тощо. За своєю суттю ці рівняння є записом законів збереження різних фізичних величин у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0.$$

Наприклад, в [3], добавляючи до закону збереження імпульсу визначальне співвідношення, яке характеризує деяку фізичну систему, одержано гіперболічне рівняння, що моделює рух у в'язко-пружних тілах з "пам'яттю"(врахування післядії та релаксації). Згодом з'явився інший підхід, ніж в [3], який враховував запізнення у визначальному співвідношенні (закон Каттанео-Фур'є) [4]-[5], що приводить до гіперболічної моделі дифузії [5], тобто засвідчує хвильову природу теплопровідності. Тому задачі з вільними межами, які насамперед пов'язують з параболічними та еліптичними рівняннями [6], виконуються і для гіперболічних систем [5].

Ми розглянули дві нелінійні задачі з невідомими (вільними) межами для систем гіперболічних квазілінійних рівнянь першого порядку, записаних відповідно в інваріантах Рімана та канонічній характеристичній формі (форма Шаудера) [7]. Одна з них узагальнює результати для задач із контактним розривом вздовж невідомої лінії [8]-[9] на випадок глобальної коректної розв'язності, а в другій, на підставі існування єдиного локального розв'язку сингулярної гіперболічної квазілінійної задачі [10], отримано достатні умови локальної розв'язності подібної задачі для системи, записаної в загальному вигляді.

Для доведення основних теорем тут використано метод характеристик та його модифікації в комбінації з принципом стискуючих відображень і методики, застосованої в [10]-[11].

2. Спряження розв'язків мішаної задачі вздовж невідомої лінії. Нехай область $D_T = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < t < T, \ s_1(t) < x < s_2(t)\}$ з рухомими межами $x = s_j(t), \ t \in [0,T), j \in \{1,2\}$ невідома лінія $x = s(t) : t \in [0,T]$ розбиває на дві підобласті: $D_T^{s-} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < T, s_1(t) < x < s(t)\}$, $D_T^{s+} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2$: $0 < t < T, s(t) < x < s_2(t)\}$.

Розглянемо записану в інваріантах гіперболічну систему квазілінійних рівнянь

$$\frac{\partial u_i^-}{\partial t} + \lambda_i^-(x,t,u^-)\frac{\partial u_i^-}{\partial x} = f_i^-(x,t,u^-), \quad i \in \{1,\dots,n\}, \text{ в } D_T^{s-}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_i^+}{\partial t} + \lambda_i^+(x,t,u^+)\frac{\partial u_i^+}{\partial x} = f_i^+(x,t,u^+), \quad i \in \{1,\dots,n\}, \text{ в } D_T^{s+}, \tag{2}$$

де $u^-(x,t) = (u_1^-(x,t),\dots,u_n^-(x,t))$ $(x,t) \in \overline{D_T^{s-}}$, $u^+(x,t) = (u_1^+(x,t),\dots,u_n^+(x,t))$ $(x,t) \in \overline{D_T^{s+}}$ – шукані дійснозначні функції, а $\lambda_i^{\pm}(x,t,u)$, $(x,t,u) \in \mathbb{R}^{n+2}$, $f_i^{\pm}(x,t,u)$, $(x,t,u) \in \mathbb{R}^{n+2}$ – відомі функції.

Нехай поведінка функції s описується системою диференціальних рівнянь

$$\frac{ds}{dt} = g(s,t,u^{\pm}(s,t)), \tag{3}$$

де $(y,t) \to u^{\pm}(y,t) = (u^-(y,t),u^+(y,t)) : \mathbb{R} \times [0,T] \to \mathbb{R}^{2n}$, а $(y,t,z) \to g(y,t,z)$: $\mathbb{R} \times [0,T] \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ – відома функція.

Доповнимо системи (1)-(3) початковими умовами вигляду

$$s(0) = s^0, \tag{4}$$

$$u^-(x,0) = \alpha^-(x), \quad x \in [s_1^0, s^0], \qquad u^+(x,0) = \alpha^+(x), \quad x \in [s^0, s_2^0]. \tag{5}$$

Тут $s_k^0 \overset{def}{=} s_k(0)$, $k \in \{1,2\}$, $s^0 \in (s_1^0, s_2^0)$ – задане значення, $\alpha^- = (\alpha_1^-,\dots,\alpha_n^-)$: $[s_1^0, s^0] \to \mathbb{R}^n$, $\alpha^+ = (\alpha_1^+,\dots,\alpha_n^+) : [s^0, s_2^0] \to \mathbb{R}^n$ – задані набори функцій.

Визначимо множини індексів I_1, I_2, I_-, I_+, J_-, J_+ :

$$I_1 = \{i \in \{1,\dots,n\} : \lambda_i^-(s_1^0, 0, \alpha^-(s_1^0)) > s_1'(0)\};$$
$$I_2 = \{i \in \{1,\dots,n\} : \lambda_i^+(s_2^0, 0, \alpha^+(s_2^0)) < s_2'(0)\};$$
$$I_- = \{i \in \{1,\dots,n\} : \lambda_i^-(s^0, 0, \alpha^-(s^0)) < g(s^0, 0, \alpha^{\pm}(s^0))\};$$
$$I_+ = \{i \in \{1,\dots,n\} : \lambda_i^+(s^0, 0, \alpha^+(s^0)) > g(s^0, 0, \alpha^{\pm}(s^0))\};$$
$$J_- \subset \{1,\dots,n\} \backslash I_-, \qquad J_+ \subset \{1,\dots,n\} \backslash I_+,$$

де $\alpha^{\pm}(s^0) = (\alpha^-(s^0), \alpha^+(s^0))$. Нехай k_-, k_+ – кількість елементів множин J_-, J_+.

Припустимо, що на фіксованих бічних межах областей D_T^{s-}, D_T^{s+} задовольняються крайові умови вигляду

$$u_i^-(s_1(t),t)=\beta_{i1}(t),\quad i\in I_1,\qquad u_i^+(s_2(t),t)=\beta_{i2}(t),\quad i\in I_2, \tag{6}$$

а на вільній межі $x=s(t)$ виконуються умови спряження

$$\begin{aligned} u_i^-(s(t),t)&=\gamma_i^-(s(t),t,\tilde u^\pm(s(t),t)),\quad i\in I_-,\\ u_i^+(s(t),t)&=\gamma_i^+(s(t),t,\tilde u^\pm(s(t),t)),\quad i\in I_+,\end{aligned} \tag{7}$$

де $\tilde u^\pm(s,t)=(\tilde u^-(s,t),\tilde u^+(s,t))$, $\tilde u^-=(u_i^-)$, $i\in J_-$, $\tilde u^+=(u_i^+)$, $i\in J_+$, причому $\beta_{ij}(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\gamma_i^\pm(s,t,\tilde u^\pm):\mathbb{R}^{k_-+k_++2}\to\mathbb{R}$ – відомі функції.

Нехай $i\in\{1,\dots,n\}$, $s(t):[0,T]\to\mathbb{R}$, $u^-(x,t):\overline{D_T^{s-}}\to\mathbb{R}^n$ – визначені функції, а $(x_0,t_0)\in\overline{D_T^{s-}}$. Розглянемо задачу Коші

$$\frac{dx}{dt}=\lambda_i^-(x,t,u^-(x,t)),\quad x(t_0)=x_0.$$

Припустимо, що ця задача має єдиний розв'язок, який позначимо $\varphi_i^-[u^-](t;x_0,t_0)$. В результаті отримаємо сім'ю функцій аргументу t з параметрами x_0,t_0, яка залежить від вибору функції u^-, тобто, іншими словами, сім'ю операторів.

Зауважимо, що розв'язок $\varphi_i^-[u^-](t;x_0,t_0)$ при фіксованих i,s,u^-,x_0,t_0 можна продовжити до перетину з межею області D_T^{s-}. Нехай

$$\chi_i^-[u^-,s](x_0,t_0)=\min\Big\{t\in[0,t_0]:\ (\varphi_i^-[u^-](t;x_0,t_0),t)\in\overline{D_T^{s-}}\Big\}.$$

Отже, функція $\varphi_i^-[u^-](t;x_0,t_0)$ буде визначена на відрізку $\big[\chi_i^-[u^-,s](x_0,t_0),\ t_0\big]$, причому $\chi_i^-[u^-,s](x_0,t_0)$ є сім'єю функціоналів з параметрами x_0,t_0.

Перепишемо систему рівнянь (1) у вигляді

$$\frac{du_i^-(\varphi_i^-[u^-](t;x_0,t_0),t)}{dt}=f_i(\varphi_i^-[u^-](t;x_0,t_0),t,u^-(\varphi_i^-[u^-](t;x_0,t_0),t)),\quad i\in\{1,\dots,n\}.$$

Проінтегруємо кожне рівняння отриманої системи в межах від $\chi_i^-[u^-,s](x_0,t_0)$ до t_0. У результаті одержимо систему інтегро-функціональних рівнянь

$$\begin{aligned} u_i^-(x,t)&=u_i^-\Big(\varphi_i^-[u^-](\chi_i^-[u^-,s](x,t);x,t),\chi_i^-[u^-,s](x,t)\Big)+\\ &+\int\limits_{\chi_i^-[u^-,s](x,t)}^{t} f_i^-\Big(\varphi_i^-[u^-](\tau;x,t),\tau,u^-(\varphi_i^-[u^-](\tau;x,t),\tau)\Big)\,d\tau,\\ &\qquad i\in\{1,\dots,n\},\quad (x,t)\in\overline{D_T^{s-}}.\end{aligned} \tag{8}$$

Зауважимо, що системи (1) та (8) еквівалентні в класі функцій (u^-,s): $u^-\in[C^1(\overline{D_T^{s-}})]^n$, $s\in C[0,T]$, проте розв'язок останньої системи може бути, взагалі кажучи, не диференційовним.

Міркуючи подібно, виводимо систему інтегро-функціональних рівнянь

$$u_i^+(x,t) = u_i^+\Big(\varphi_i^+[u^+](\chi_i^+[u^+,s](x,t);x,t), \chi_i^+[u^+,s](x,t)\Big) + \\ + \int\limits_{\chi_i^+[u^+,s](x,t)}^{t} f_i^+\Big(\varphi_i^+[u^+](\tau;x,t),\tau,u^+(\varphi_i^+[u^+](\tau;x,t),\tau)\Big)\,d\tau, \\ i\in\{1,\dots,n\}, \quad (x,t)\in\overline{D_T^{s+}}, \quad (9)$$

що еквівалентна системі (2) в класі достатньо гладких функцій (u,s).

Означення 1. *Узагальненим розв'язком задачі (1)-(7), визначеним на часовому відрізку $[0,T_0]$, $(0 < T_0 \leqslant T)$ будемо називати набір функцій (u^-,u^+,s): $u^- \in \in \big[\mathrm{Lip}(\overline{D_{T_0}^{s-}})\big]^n$, $u^+ \in \big[\mathrm{Lip}(\overline{D_{T_0}^{s+}})\big]^n$, $s\in C^1[0,T_0]$, що задовольняє системи (3), (8), (9), а також умови (4)-(7). Якщо $T_0 < T$, то розв'язок називається локальним, якщо ж $T_0 = T$, то – глобальним.*

Нехай

$$U = \max\left\{\max_{x\in[s_1^0,s^0]}|\alpha^-(x)|, \max_{x\in[s^0,s_2^0]}|\alpha^+(x)|\right\}+1, \qquad S = |g(s^0,0,\alpha^\pm(s^0))|+1.$$

Визначимо такі множини:

$$D_{T,U}^1 = \{(x,t,u)\in\mathbb{R}^{n+2}:\ 0\leqslant t\leqslant T,\ s_1(t)\leqslant x\leqslant s_2(t),\ |u|\leqslant U\},$$
$$D_{T,U,S}^2 = \{(s,t,u^\pm)\in\mathbb{R}^{2n+2}:\ 0\leqslant t\leqslant T,\ s^0 - St\leqslant s\leqslant s^0+St,\ |u^\pm|\leqslant U\},$$
$$D_{T,U,S}^3 = \{(s,t,\tilde u^\pm)\in\mathbb{R}^{k_-+k_++2}:\ 0\leqslant t\leqslant T,\ s^0 - St\leqslant s\leqslant s^0+St,\ |\tilde u^\pm|\leqslant U\}.$$

Тут $|\cdot|$– норма в просторі $\mathbb{R}^N$ в сенсі максимуму модулів.

Введемо також інші позначення

$$\Lambda = \max_{(x,t,u)\in D_{T,U}^1}|\lambda^\pm(x,t,u)|, \qquad F = \max_{(x,t,u)\in D_{T,U}^1}|f^\pm(x,t,u)|,$$

$$\delta = \frac{1}{2}\min_{i\in\{1,\dots,n\}}\Big\{|\lambda_i^-(s_1^0,0,\alpha^-(s_1^0)) - s_1'(0)|,\ |\lambda_i^+(s_2^0,0,\alpha^+(s_2^0)) - s_2'(0)|, \\ |\lambda_i^-(s^0,0,\alpha^-(s^0)) - g(s^0,0,\alpha^\pm(s^0))|,\ |\lambda_i^+(s^0,0,\alpha^+(s^0)) - g(s^0,0,\alpha^\pm(s^0))|\Big\},$$

і нехай λ_0, f_0, g_0, α_0, β_0, γ_0, S_0 – сталі Ліпшиця функцій $\lambda_i^\pm$, $f_i^\pm$, g, $\alpha_i^\pm$, β_{ij}, $\gamma_i^\pm$, s_j за відповідними змінними.

Теорема 1 (про локальну розв'язність). *Нехай виконуються такі умови:*

1) $\lambda_i^- \in Lip(D_{T,U}^1)$, $\lambda_i^+\in Lip(D_{T,U}^1)$, $i\in\{1,\dots,n\}$;
2) $f_i^-\in C(D_{T,U}^1)\cap Lip_{x,u}(D_{T,U}^1)$, $f_i^+\in C(D_{T,U}^1)\cap Lip_{x,u}(D_{T,U}^1)$, $i\in\{1,\dots,n\}$;
3) $g\in Lip(D_{T,U,S}^2)$;
4) $\alpha_i^-\in Lip[s_1^0,s^0]$, $\alpha_i^+\in Lip[s^0,s_2^0]$, $i\in\{1,\dots,n\}$;
5) $\beta_{ij}\in Lip[0,T]$, $j\in\{1,2\}$, $i\in I_j$;
6) $\gamma_i^-\in Lip(D_{T,U,S}^3)$, $i\in I_-$, $\gamma_i^+\in Lip(D_{T,U,S}^3)$, $i\in I_+$;
7) $s_j\in C^1[0,T]$, $s_j'\in Lip[0,T]$, $j\in\{1,2\}$;

8) $\delta > 0$;
9) $\alpha_i^-(s_1^0) = \beta_{i1}(0),\ \ i \in I_1, \quad \alpha_i^+(s_2^0) = \beta_{i2}(0),\ \ i \in I_2,$
$\alpha_i^-(s^0) = \gamma_i^-(s^0, 0, \tilde\alpha^\pm(s^0)),\ \ i \in I_-, \quad \alpha_i^+(s^0) = \gamma_i^+(s^0, 0, \tilde\alpha^\pm(s^0)),\ i \in I_+,$
де $\tilde\alpha^\pm(s^0) = (\tilde\alpha^-(s^0), \tilde\alpha^+(s^0))$, $\tilde\alpha^-(s^0) = (\alpha_i^-(s^0))$, $i \in J_-$, $\tilde\alpha^+(s^0) = (\alpha_i^+(s^0))$, $i \in J_+$ *(умови погодження).*

Тоді на часовому відрізку $[0, T_0]$ *існує єдиний локальний узагальнений розв'язок задачі (1)-(7).*

Введемо позначення для монотонних характеристик функцій:

$F(x_1, \dots, x_n) \nearrow (x_{k_1}, \dots)$ (відповідно $\searrow (x_{k_2}, \dots)$) – функція F не спадає за групою аргументів $(x_{k_1}, \dots)$ (не зростає за групою аргументів $(x_{k_2}, \dots)$).

Лема 1. *Нехай виконуються такі умови знакосталості та монотонності:*

F): $f_i^- \geqslant 0, \quad i \in I_1, \quad f_i^- \leqslant 0, \quad i \in I_- \cup J_-,$
$f_i^+ \leqslant 0, \quad i \in I_2, \quad f_i^+ \geqslant 0, \quad i \in I_+ \cup J_+;$
M1): $\lambda_i^- \nearrow (x, u), \quad \lambda_i^+ \nearrow (x, u), \quad i \in \{1, \dots, n\};$
M2): $f_i^- \nearrow (x, u), \quad f_i^+ \nearrow (x, u), \quad i \in \{1, \dots, n\};$
M3): $\alpha_i^- \nearrow (x), \quad \alpha_i^+ \nearrow (x), \quad i \in \{1, \dots, n\};$
M4): $\beta_{i1} \searrow (t), \quad i \in I_1, \quad \beta_{i2} \nearrow (t), \quad i \in I_2;$
M5): $\gamma_i^- \nearrow (t, \tilde u^+) \searrow (\tilde u^-), \quad i \in I_-, \quad \gamma_i^+ \nearrow (\tilde u^-) \searrow (t, \tilde u^+), \quad i \in I_+.$

Тоді, якщо (u^-, u^+, s) *– узагальнений розв'язок задачі (1)-(7),* $u^- \nearrow (x)$, $u^+ \nearrow (x)$, *то* $A^{u-}[u-, s] \nearrow (x)$, $A^{u+}[u+, s] \nearrow (x)$, *де оператори* A^{u-}, A^{u+} *визначаються правими частинами (8), (9).*

В $\overline{D_T}$ для довільних $x \in \mathbb{R}^{N_1}$, $y \in \mathbb{R}^{N_2}$ через $|x, y|$ позначимо максимум норм $|x|$, $|y|$.

Теорема 2 (про глобальну розв'язність). *Нехай виконуються умови:*

1) $\lambda_i^- \in Lip_{loc}(D_T \times \mathbb{R}^n),\ \ \lambda_i^+ \in Lip_{loc}(D_T \times \mathbb{R}^n),\ \ i \in \{1, \dots, n\};$
2) $f_i^- \in C(D_T \times \mathbb{R}^n) \cap Lip_{x,u,loc}(D_T \times \mathbb{R}^n),$
$f_i^+ \in C(D_T \times \mathbb{R}^n) \cap Lip_{x,u,loc}(D_T \times \mathbb{R}^n),\ \ i \in \{1, \dots, n\};$
3) $g \in Lip_{loc}(\mathbb{R} \times [0, T] \times \mathbb{R}^{2n});$
4) $\alpha_i^- \in Lip[s_1^0, s^0],\ \ \alpha_i^+ \in Lip[s^0, s_2^0],\ \ i \in \{1, \dots, n\};$
5) $\beta_{ij} \in Lip[0, T],\ \ j \in \{1, 2\},\ i \in I_j;$
6) $\gamma_i^- \in Lip_{loc}([0, T] \times \mathbb{R}^{k_- + k_+}),\ \ i \in I_-, \quad \gamma_i^+ \in Lip_{loc}([0, T] \times \mathbb{R}^{k_- + k_+}),\ \ i \in I_+;$
7) $s_j \in C^1[0, T],\ \ s_j' \in Lip[0, T],\ \ j \in \{1, 2\};$
8) *погодження 9) теореми 1;*
9) *знакосталості та монотонності леми 1;*
10) *обмеження на зростання вихідних даних:*
G1): $|f^-(x, t, u), f^+(x, t, u)| \leqslant f_1(1 + |x, u|);$
G2): $|g(s, t, u^\pm)| \leqslant g_1(1 + |s, u^\pm|);$
G3): $|\gamma^-(t, \tilde u^\pm), \gamma^+(t, \tilde u^\pm)| \leqslant \gamma_1(1 + |\tilde u^\pm|);$
11) $(\lambda_i^- - s_1')(\lambda_i^+ - s_2')(\lambda_i^- - g)(\lambda_i^+ - g) \neq 0,\ \ i \in \{1, \dots, n\};$
12) $s_1(t) + \mathcal{S}t < s^0 < s_2(t) - \mathcal{S}t$ *(стала* $\mathcal{S}$ *визначається вихідними даними задачі).*

Тоді існує єдиний глобальний узагальнений розв'язок задачі (1)-(7).

Доведення обидвох теорем з незначними змінами повторює доведення теореми 1 і теореми 2 з [11].

3. Випадок гіперболічної квазілінійної системи в канонічній формі Шаудера. В прямокутнику $\Pi(T_0) = \{(x,t):\ 0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T_0\}$, де $l > 0,\ T_0 > 0$ – деякі сталі, розглянемо систему

$$\frac{\partial u}{\partial t} \ +\ \widetilde{\mathcal{D}}\frac{\partial u}{\partial x} \ =\ d, \tag{10}$$

в якій $\widetilde{\mathcal{D}}(x,t,u,v)$ матриця розмірності $m \times m$, $d = (d_1,...,d_m)^T$, $u = (u_1,...,u_m)^T$, $v = (v_1,...,v_n)^T$, причому функції $u(x,t),\ (x,t) \in \Pi(T_0),\ v(x,t),\ (x,t) \in \Pi(T_0)$ – невідомі, а залежності $\widetilde{\mathcal{D}}(x,t,u,v),\ d(x,t,u,v)$ – задані.

Припустимо, що матриця $\widetilde{\mathcal{D}}$ має тільки дійсні власні значення $\lambda_1(x,t,u,v)$, ..., $\lambda_m(x,t,u,v)$ і може бути зведена до діагонального вигляду (існує база з лівих власних векторів $g^1(x,t,u,v),...,g^m(x,t,u,v)$), тобто система (10) – гіперболічна.

Як відомо [7], шляхом множення зліва рівнянь системи (10) на вектори $g^1,...,g^m$, (10) може бути перетворена до вигляду

$$\sum_{k=1}^{m} g_k^i\Big(\frac{\partial u_k}{\partial t} + \lambda_i\frac{\partial u_k}{\partial x}\Big) = f_i, \quad f_i := g^i d, \quad i \in \{1,...,m\}, \tag{11}$$

який в [9] називають канонічною формою Шаудера, а в [7] – характеристичною канонічною формою вихідної системи.

У деяких випадках [7] можливе перетворення системи (10) до канонічного вигляду в інваріантах Рімана

$$\frac{\partial z_i}{\partial t} + \lambda_i\frac{\partial z_i}{\partial x} = p_i, \quad i \in \{1,...,m\}, \tag{12}$$

де z_i – нові невідомі функції (інваріанти Рімана).

Система (10) завжди має вигляд (12), якщо матриця $\widetilde{\mathcal{D}}$ – діагональна. Якщо кількість рівнянь системи (10) $m \geqslant 3$, то перетворення системи (10) до вигляду (12) не завжди можливе [7], що в деяких випадках значно звужує область застосувань. Наприклад, для системи з трьох рівнянь газової динаміки в загальному випадку такий перехід неможливий [7]. Тому ми розглянемо вихідну систему в формі (11).

Разом з системою (11) будемо розглядати систему

$$\frac{\partial v_j}{\partial x} = q_j(x,t,u,v), \quad j \in \{1,...,n\}, \tag{13}$$

ліву частину якої формально можна отримати з лівої частини системи (12), якщо деякі з $\lambda_i = \infty$. Це відповідає випадку, коли в суцільному середовищі, яке моделюється системами (10), (13), частина збурень (наприклад, механічних) поширюється зі скінченними швидкостями ($\lambda_1,...,\lambda_m$ – скінченні), а частина (наприклад, електромагнітних) – з нескінченними.

Крім того, одночасно з системами (11),(13) будемо також розглядати систему

$$\frac{ds_j}{dt} = r_j(t,s,u(s_j(t),t),v(s_j(t),t)), \quad j \in \{1,...,n\}, \tag{14}$$

де $s = (s_1,...,s_n)^T$. Розв'язки системи (14) будемо називати невідомими (внутрішніми) межами.

Отже, розв'язком системи (11), (13), (14) буде впорядкована трійка (u, v, s). Для системи (11), (13), (14) задамо такі початкові та крайові умови:

$$u(x, 0) = \alpha(x), \quad 0 \le x \le \ell, \tag{15}$$

$$s_j(0) = c_j, \quad j \in \{1, \dots, n\}, \quad 0 \le c_j \le \ell, \tag{16}$$

$$u_i(0, t) = \gamma_i^0(t, u(0, t)), \quad i \in I_+^0 = \{i | \operatorname{sgn}(\lambda_i(0, 0, 0, 0)) = 1\}, \tag{17}$$

$$u_i(\ell, t) = \gamma_i^\ell(t, u(\ell, t)), \quad i \in I_-^\ell = \{i | \operatorname{sgn}(\lambda_i(\ell, 0, 0, 0)) = -1\}, \tag{18}$$

$$v_j(s_j(t), t) = \beta_j(t), \quad j \in \{1, \dots, n\}. \tag{19}$$

Позначимо пару $(u, v) = w$ і припустимо, що для вихідних даних задачі (11), (13)-(19) виконуються умови **A1-A12** з [10]. Нехай також виконується умова.

A13. Позначимо через $h_{ik}(x, t, w)$ елементи матриці $\widetilde{H}$, оберненої до матриці $\widetilde{G}$, у стрічках якої стоять ліві власні вектори матриці $\widetilde{\mathcal{D}}$. Припустимо, що функціональні матриці $\widetilde{G}$, $\widetilde{H}$ визначені в області $\mathbb{D}(T_0, P_0) = \Pi(T_0) \times \{w |\ w \in \mathbb{R}^{m+n},\ ||w|| \leqslant P_0\}$, а функції $h_{ik}(x, t, w)$ і $g_k^i(x, t, w),\ i, k \in \{1, ..., m\}$ обмежені за модулем деякими сталими G, H відповідно. Крім того, існують невід'ємні сумовні на $[0, T_0]$ функції $H_1(t), H_2(t), G_1(t), G_2(t)$ такі, що майже для всіх $t \in [0, T_0]$ при $(x_1, t, w_1) \in \mathbb{D}(T_0, P_0)$, $(x_2, t, w_2) \in \mathbb{D}(T_0, P_0)$ виконуються нерівності:

$$|h_{ik}(x_1, t, w_1) - h_{ik}(x_2, t, w_2)| \leqslant H_1(t)|x_1 - x_2| + H_2(t)|w_1 - w_2|;$$

$$|g_k^i(x_1, t, w_1) - g_k^i(x_2, t, w_2)| \leqslant G_1(t)|x_1 - x_2| + G_2(t)|w_1 - w_2|; \quad k,\ i \in \{1, ..., m\}.$$

Ввівши як і в [10], для заданої функції w рівняння характеристик

$$\dot{x} = \lambda_i(x, t, w), \qquad i \in \{1, \dots, m\}, \tag{20}$$

розв'язки якого позначимо через $\varphi_i(\tau; x, t, w)$, $\varphi_i(t; x, t, w) = x$, або коротко позначатимемо $x = \varphi_i(\tau)$. Тоді ліву частину системи (11) можна переписати так:

$$\sum_{k=1}^{m} g_k^i \frac{du_k}{dt}\Big|_{x=\varphi_i(\tau)} = f_i, \quad i \in \{1, \dots, m\}. \tag{21}$$

Для довільних функцій $(x, t) \mapsto z(x, t)$ і $(x, t, z) \mapsto \zeta(x, t, z)$ введемо позначення $z[\varphi_i(\tau)] = z(\varphi_i(\tau), \tau),\ \zeta[\varphi_i(\tau)] = \zeta(\varphi_i(\tau), \tau, z(\varphi_i(\tau), \tau)$. Позначимо $\chi_i = \chi_i(x, t, z)$, де $\chi_i(x, t, z)$ - мінімальне значення τ, при якому визначена функція $\varphi_i(\tau)$ є розв'язком задачі (20).

Легко довести, що при зроблених припущеннях для функцій g_k^i майже всюди існує похідна вздовж відповідної характеристики. Це дає змогу проінтегрувати (21) вздовж характеристик за частинами (див. [10])

$$\sum_{k=1}^{m} (g_k^i u_k)\Big|_{\chi_i}^{t} - \int\limits_{\chi_i}^{t} \sum_{k=1}^{m} u_k[\varphi_i(\tau)] \frac{dg_k^i}{d\tau}[\varphi_i(\tau)] d\tau = \int\limits_{\chi_i}^{t} f_i[\varphi_i(\tau)] d\tau, \quad i \in \{1, ..., m\}.$$

Враховуючи умови для u, одержимо

$$\sum_{k=1}^{m} g_k^i(x, t, w(x, t)) u_k(x, t) = \sum_{k=1}^{m} \Big(g_k^i[\varphi_i(\chi_i)] u_k[\varphi(\chi_i)] \pm g_k^i(x, t, w(x, t)) u_k[\varphi(\chi_i)] +$$

$$+\int\limits_{\chi_i}^{t}\sum_{k=1}^{m}u_k[\varphi_i(\tau)]\frac{dg_k^i}{d\tau}[\varphi_i(\tau)]d\tau\Big)+\int\limits_{\chi_i}^{t}f_i[\varphi_i(\tau)]d\tau.$$

Однак

$$g_k^i[\varphi_i(\chi_i)]-g_k^i(x,t,w(x,t))u_k(\varphi_i(t))=-\int\limits_{\chi_i}^{t}\frac{dg_k^i}{d\tau}[\varphi_i(\tau)]u_k(\varphi_i(\chi_i))d\tau.$$

Тому

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m}g_k^i(x,t,w(x,t))u_k(x,t)=\sum_{k=1}^{m}g_k^i(x,t,w(x,t))u_k[\varphi_i(\chi_i)]+\\ +\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{\chi_i}^{t}\frac{dg_k^i}{d\tau}[\varphi_i(\tau)]\Big(u_k[\varphi_i(\tau)]-u_k[\varphi(\chi_i)]\Big)d\tau+\int\limits_{\chi_i}^{t}f_i[\varphi_i(\tau)]d\tau,\quad i\in\{1,...,m\}.\end{aligned}\tag{22}$$

Помножимо (22) на елементи h_{ik} оберненої до G матриці H та підсумовуючи за k, одержимо

$$\begin{aligned}u_i(x,t)=u_i(\varphi_i(\chi_i))+\sum_{j=1}^{m}h_{ij}(x,t,w(x,t))\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{\chi_j}^{t}\frac{dg_k^j}{d\tau}[\varphi_j(\tau)]\Big(u_k[\varphi_j(\tau)]-\\ -u_k[\varphi_j(\chi_j)]\Big)d\tau+\sum_{j=1}^{m}h_{ij}(x,t,w(x,t))\int\limits_{\chi_j}^{t}f_j[\varphi_j(\tau)]d\tau,\quad i\in\{1,...,m\}.\end{aligned}\tag{23}$$

Значення $u_k[\chi_i]$ визначають з урахуванням початкових і крайових умов.

В результаті, позначивши праві частини отриманих рівностей через $\mathfrak{U}\{w\}$, приходимо до запису $u=\mathfrak{U}\{w\}$.

Аналогічно, інтегруючи (13) за x і (14) за t, одержимо відповідно $v=\mathfrak{L}\{w,s\}$, $s=\mathfrak{C}\{w,s\}$.

Отже, символічно вихідну задачу можна записати як систему інтегро-операторних рівнянь

$$(u,v,s)=\mathfrak{S}\{u,v,s\},\qquad \mathfrak{S}=(\mathfrak{U},\mathfrak{L},\mathfrak{C}).\tag{24}$$

Означення 2. *Ліпшицевий розв'язок системи (24) будемо називати узагальненим неперервним розв'язком задачі (11), (13)-(19).*

Теорема 3. *При зроблених вище припущеннях, існує таке $T>0$, що в прямокутнику $\Pi(T)$ існує єдиний узагальнений неперервний розв'язок задачі (11), (13)-(19).*

Доведення цієї теореми проводиться за схемою, яка аналогічна до доведення відповідної теореми викладеної в [10] і належить до випадку вихідної діагональної матриці $\widetilde{\mathcal{D}}$, тобто до системи, записаної в інваріантах Рімана.

1. *Евсеев Е.Г.* Квазимонотонные разностные схемы для некоторых систем гиперболических уравнений первого порядка / *Евсеев Е.Г., Убилова М.Г., Шония В.В.* // Математич. моделирование. – 1991. – Т. 3, №5. – С. 81-85.
2. *Вольцингер Н.Е.* Длинные волны на мелкой воде / *Вольцингер Н.Е.* – Л.: Гидрометеоиздат, 1985.

3. *Ишлинский А.Ю.* Продольные колебания стержня при наличии нелинейного закона последействия и релаксации / *Ишлинский А.Ю.* // Прикладная математика и механика. –1940. – Т. IV, Вып. 1. – С. 79-92.
4. *Coleman B.D.* On the thermodynamics od second sound in dialectric crystals / *Coleman B.D., Fabrizio M., Owen D. R.* // Arch. for Rat. Mech. and Anal. – 1982. – Vol. 80, №2. – P. 135-158.
5. *Gupta S.C.* The classical Stefan problem: basic concepts, modeling and analysis / *Gupta S.C.* – Amsterdam: Elsevier, 2003.
6. *Данилюк И.И.* Задача Стефана / *Данилюк И.И.* // Успехи мат. наук. – 1985. – Т. 4, №5. – С. 133-185.
7. *Рождественский Б.Л.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* – М.: Наука, 1978.
8. *Казаков К. Ю.* Локальная разрешимость смешанной задачи для квазилинейной гиперболической системы с внутренней свободной границей / *Казаков К.Ю., Морозов С.Ф.* // Дифференц. и интегр. уравнения – 1994. – №4. – С. 57–66.
9. *Turo J.* Mixed problems for quasilinear hyperbolic systems / *Turo J.* // Nonlin. Anal., Theory, Meth., Appl. – 1997. – Vol. 30, №4. – P. 2329-2340.
10. *Кирилич В. М.* Локальна гладка розв'язність задачі з вільними межами для сингулярних гіперболічних систем квазілінійних рівнянь / *Кирилич В., Філімонов А.* // Вісн. Львів. у-ту. Сер. мех.-мат. – 2008. – Вип. 68. – С. 120-156.
11. *Андрусяк Р.В.* Локальная и глобальная разрешимости квазилинейной гиперболической задачи Стефана на прямой / *Андрусяк Р.В., Кирилич В.М., Мышкис А.Д.* // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42, №4. – С. 489-503.

SOME NONLINEAR FREE BOUNDARY PROBLEMS FOR HYPERBOLIC SYSTEMS OF QUASI-LINEAR EQUATIONS

Volodymyr KYRYLYCH

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: vkyrylych@ukr.net

The sufficient conditions of the global solvability of the problem with unknown line of contact break are established and wee obtain the local solvability of singular problem with internally free boundaries for hyperbolic systems of quasi-linear first order equations in canonical Riemann's and Schauder's forms respectively.

Key words: hyperbolic system, free boundary problems, method of characteristic, quasi-linear equation.

НЕКОТОРЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Владимир КИРИЛИЧ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: vkyrylych@ukr.net

Найдено достаточные условия глобальной разрешимости задачи с неизвестной линией контактного разрыва и доказано локальную разрешимость сингулярной задачи с внутренними неизвестными границами для гиперболических систем квазилинейных уравнений первого порядка, записаных соответственно в канонических формах Римана и Шаудера.

Ключевые слова: гиперболическая система, неизвестные границы, метод характеристик, квазилинейные уравнения.

Стаття надійшла до редколегії 25.11.2009

Прийнята до друку 16.12.2009

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2009. *Ser. Mech. Math. 2009.*
Вип. 71. С. 135–141 *Is. 71. P. 135–141*

УДК 515.12

ON SPACE OF OPEN MAPS OF THE UNIT SEGMENT

Kateryna KOPORKH

Vasyl' Stefanyk National Pre-Carpathian University,
76025, Ivano-Frankivs'k, Shevchenko Str., 57
e-mail: katerynka.k@gmail.com

We consider the space of the equivalence classes of continuous open maps defined on a unit segment induced by the Hausdorff metric. The main result provides a description of topology of the components of this space.

Key words: hyperspace, open map, segment, Hilbert space.

Recall that a map of topological spaces is said to be open if the image of every open set is open. It turns out that, in the case of compact Hausdorff spaces, the set of all open maps can be endowed with the natural topology generated by the Vietoris topology on the corresponding hyperspace.

The aim of this note is to investigate the space of open maps of the unit segment. Our main result states that every non-degenerated component of this space is homeomorphic to the separable Hilbert space l^2.

All maps are assumed to be continuous.

1. Space $\Phi(X)$. Let X be a compact Hausdorff space. Following [1] we say that two continuous onto maps $f_i\colon X \to Y_i$, $i = 1, 2$, are equivalent if there exists a homeomorphism $h\colon Y_1 \to Y_2$; here Y_1, Y_2 are compact Hausdorff spaces such that $f_2 = hf_1$. Let $\Phi(X)$ denote the set of equivalence classes and $\Psi(X)$ denote the subset of $\Phi(X)$ consisting of classes of open maps.

Recall that, given a compact Hausdorff space X, we denote by $\exp X$ the set of all nonempty closed subsets of X. The Vietoris topology is the topology whose base consists of the sets of the form

$$\langle V_1, \dots, V_n \rangle = \{A \in \exp X \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i \text{ and } A \cap V_i \neq \varnothing, \text{ for all } i \in \{1, 2, \dots, n\}\},$$

where $V_1, \dots, V_n$ are open subsets in X, $n \in \mathbb{N}$.

In the case of a compact metric space (X, d), the Vietoris topology can be generated by the Hausdorff metric d_H,

$$d_H(E, F) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid E \subseteq O_\varepsilon(F) \text{ and } F \subseteq O_\varepsilon(E)\}.$$

Suppose now that all spaces under consideration are compact Hausdorff. We identify every equivalence class $[f]$ of a map $f\colon X \to Y$ with the family $\langle f\rangle = \{f^{-1}(y) \mid y \in Y\}$. The latter is a closed subset of $\exp X$, i.e. an element of $\exp^2 X = \exp(\exp X)$. We endow $\Psi(X)$ with the topology induced from $\exp^2 X$ by this identification [3].

2. The set $\Psi(I)$. By I we denote the unit segment. Recall that a map $f\colon I \to X$ is called a piecewise homeomorphism if there exists a partition $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$ of I such that the embedding $f|_{[a_{i-1},a_i]}\colon [a_{i-1}, a_i] \to X$ is a homeomorphism, for all $i = 1, 2, \dots, n$.

We will use the following result (see [2] for its proof).

Theorem 1. *Every continuous open map from I onto a non-degenerated Hausdorff space X is necessarily a piecewise homeomorphism onto X.*

We denote by K_n, $n \in \mathbb{N}$, the set of all $\langle f\rangle \in \Psi(I)$ such that the following condition holds: there exists a partition $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 1$ for which every restriction $f|_{[t_{i-1},t_i]}\colon [t_{i-1}, t_i] \to X$ is a homeomorphism, $i = 1, 2, \dots, n$. Evidently, $K_m \cap K_n = \emptyset$, if $m \neq n$.

One can conclude that $\Psi(I) = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i \cup \{\langle c\rangle\}$, where $c\colon I \to \{*\}$ is the constant map onto a singleton.

Proposition 1. *Every K_n, $n \in \mathbb{N}$, is an open and closed subset of the space $\Phi(I)$.*

Proof. Let $\langle g\rangle \in \Psi(I) \setminus K_n$, then there exists $m \neq n$ such that $\langle g\rangle \in K_m$.

There exists $x \in X$ such that $|g^{-1}(x)| = m > n$. Let $g^{-1}(x) = \{y_1, y_2, \dots y_m\}$, where $y_1 < y_2 < \cdots < y_m$ and $y_i \in I$ for all $i = 1, 2, \dots m$. Let us choose open disjoint subsets $U_i \subset I$ such, as $y_i \in U_i$ for all $i = 1, 2, \dots m$. Then $\langle U_1, \dots, U_m\rangle$ is an open subset in $\exp I$ and $\langle g\rangle \cap \langle U_1, \dots, U_m\rangle \neq \emptyset$. From this it follows that $\langle g\rangle \in \langle \exp I, \langle U_1, \dots, U_m\rangle\rangle = W$. The set W is an open subset of the space $\exp^2 I$, i.e., is a neighborhood of an element $\langle g\rangle \in \exp^2 I$.

Let $\langle \widetilde{g}\rangle \in W$. Then $\langle \widetilde{g}\rangle \cap \langle U_1, \dots, U_m\rangle \neq \emptyset$, and there exists $y \in Y$ such that $\widetilde{g}^{-1}(y) \in \langle U_1, \dots, U_m\rangle$. From this it follows that $\widetilde{g}^{-1}(y) \cap U_i \neq \emptyset$, for every $i = 1, 2, \dots, m$. Inasmuch, as the sets $U_1, U_2 \dots, U_m$ are disjoint, we can draw a conclusion that $|\widetilde{g}^{-1}(y)| \geqslant m > n$. Therefore $\langle \widetilde{g}\rangle$ does not belong to the set K_n.

We are going to show that the set $M = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i \cup \{\langle c\rangle\}$ is closed in $\Psi(I)$. Assume the contrary and let $(\langle f_i\rangle)_{i=1}^{\infty}$ be a sequence from M converging to $\langle f\rangle \in K_m$.

Without loss of generality, one may assume that $\langle f_i\rangle \in M \setminus \{\langle c\rangle\}$. Consider $f\colon I \to X$. By Theorem 1, X is homeomorphic to I and let $x_0 \in X$ be an interior point of X. Let $f^{-1}(x_0) = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$, where $0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_m < 1$. There exists $a > 0$ such that a-neighborhoods of y_i and y_j are disjoint if $i \neq j$. Consider the sequence of neighborhoods $U_i = O_{a/i}(f^{-1}(x_0))$ of the set $f^{-1}(x_0)$.

By the pigeon-hole principle, for every i there exist $f_{k(i)}$ and $x_{k(i)} \in f_{k(i)}(I)$ such that $|f_{k(i)}^{-1}(x_{k(i)}) \cap O_{a/i}(y_j)| \geqslant 2$, for some $j \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Passing, if necessary, to a subsequence, one can assume, without loss of generality, that $|f_{k(i)}^{-1}(x_{k(i)}) \cap O_{a/i}(y_1)| \geqslant 2$ for all $i \in \mathbb{N}$. Denote by w_i and z_i the endpoints of $f_i(I)$. Theorem 1 it follows that $f^{-1}(\{w_i, z_i\}) \cap O_{a/i}(y_i) \neq \emptyset$. Passing to the limit, we obtain

$$f^{-1}(\{w, z\}) \cap \{y_i\} \neq \emptyset$$

where w, z are the endpoints of $X_0 = f(I)$. Note that the limits of the preimages of the endpoints are also endpoints. This follows from the fact that the preimages of the endpoints are precisely the sets that contain 0 or 1. We obtain that $f(y_1)$ is an endpoint of X and this is a contradiction.

3. We say that f preserves segments, if, for every $a, b \in I$, $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$. It is easy to observe that in this case the image of every convex subset of I is convex and $f^{-1}\colon f(I) \to I$ also preserves segments.

As usual, $C(I)$ denotes the set of all continuous real functions on I endowed with the uniform convergence topology. We denote by $C_0(I)$ the set of all $f \in C(I)$ such that f preserves segments.

Let $\langle f \rangle \in \Psi(I)$, then $f\colon I \to X$ is a piecewise homeomorphism. Suppose now that $[0, t_1] \subset I$ is a subsegment in I such that $f|_{[0,t_1]}\colon [0, t_1] \to X$ is a homeomorphism. Then there exists a partition $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} = 1$ for which every restriction $f|_{[t_{i-1},t_i]}\colon [t_{i-1}, t_i] \to X$ is a homeomorphism, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Denote by

$$\mathrm{L} = f^{-1}(f(0)) \cup f^{-1}(f(t_1)) = \{t_0, t_1, t_2, \ldots t_{n-1}\},$$

the partition on I, thus $t_0 = 0$ and $t_{n-1} = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Consider a map $\phi_i\colon [0, t_1] \to [t_{i-1}, t_i]$, defined by the formula

$$\phi_i(t) = f^{-1}(f(t)) \cap [t_{i-1}, t_i].$$

Let $f(0) = 0$ and consider a map $\varphi_i\colon I \to I$, defined by the formula

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{\phi_i(x \cdot t_1) - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}, & \text{when } i \text{ is an odd number } i = 2k+1, \\ \frac{t_i - \phi_i(x \cdot t_1)}{t_i - t_{i-1}}, & \text{when } i \text{ is an even number } i = 2k, \end{cases}$$

where $k = \{0, 1, 2, \ldots, [n/2]\}$.

So, every $\langle f \rangle \in \Psi(I)$ can be identified with the element

$$(t_0, t_1, t_2, \ldots t_{n-1}, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)) \in I^n \times C_0^{n-1}(I)$$

where $n \in \mathbb{N}$.

And, vice versa, let $(t_0, t_1, t_2, \ldots t_{n-1}; \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n)$ be some element of the space $I^n \times C_0(I)^{n-1}$ such that $0 < t_1 < \cdots < t_{n-2} < 1$ and $\varphi_i\colon I \to \mathbb{R}$ is continuous maps which preserves segments, such that $\varphi_1(I) = \varphi_2(I) = \ldots \varphi_{n-1}(I) = Y \subset \mathbb{R}$. Consider maps $\xi_i\colon [t_{i-1}, t_i] \to Y$ defined by the formula:

$$\xi_i(x) = \begin{cases} \varphi_i\left(\frac{x - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}\right) & \text{if } i \text{ is an odd number,} \\ \varphi_i\left(\frac{x - t_i}{t_{i-1} - t_i}\right) & \text{if } i \text{ is an even number.} \end{cases}$$

Consider a map $f\colon I \to Y$ defined by the formula

$$f(x) = \begin{cases} \xi_1(x) \text{ if } x \in [0, t_1], \\ \xi_2(x) \text{ if } x \in [t_1, t_2], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \xi_{n-1}(x) \text{ if } x \in [t_{n-1}, 1]. \end{cases}$$

Then f is a continuous open map from I onto $Y \subset \mathbb{R}$ and $\langle f \rangle = \{f^{-1}(f((x)) \mid x \in I\} \in \Psi(I)$.

In this way, we obtain a one-to-one map between the elements of subset K_n in the space $\Psi(I)$ and the elements of some subset $\mathcal{K}_n$ in the space $I^n \times C_0^{n-1}(I)$, for each $n \in \mathbb{N}$. The set K_n is a closed subset in $\Psi(I)$, therefore $\mathcal{K}_n$ is a closed subset in $I^{n+1} \times (C_0(I))^n$ as well.

Proposition 2. *For every $n \in \mathbb{N}$, the set $\mathcal{K}_n$ is convex in $\mathbb{R}^{n+1} \times (C_0(I))^n$.*

Proof. Let $(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}; \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ and $(r_1, r_2, \dots, r_{n-1}; \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$ be elements of the set $\mathcal{K}_n \subset I^{n+1} \times (C_0(I))^n$. Let s be some element in I. Let us consider the following transformation:

$$\begin{gathered} s(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}; \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) + (1-s)(r_1, r_2, \dots, r_{n-1}; \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = \\ = (st_1 + (1-s)r_1, st_2 + (1-s)r_2, \dots, st_{n-1} + (1-s)r_{n-1}; \\ s\varphi_1 + (1-s)\psi_1, s\varphi_2 + (1-s)\psi_2, \dots, s\varphi_n + (1-s)\psi_n) \end{gathered}$$

For all $i = \{1, 2, \dots n-1\}$, we have $0 < t_i < 1$, $0 < r_i < 1$. Take $s \in I$, then $0 < st_i < s$ and $0 < (1-s)r_i < (1-s)$, whence $st_i + (1-s)r_i < 1$. As φ_i, $\psi_i \in C_0(I)$, we see that $a \leqslant \varphi_i(t) \leqslant b$ and $a \leqslant \psi_i(t) \leqslant b$, where $a, b \in \mathbb{R}$. Then

$$sa + (1-s)a \leqslant s\varphi_i(t) + (1-s)\psi_i(t) \leqslant sb + (1-s)b$$

or $a \leqslant s\varphi_i(t) + (1-s)\psi_i(t) \leqslant b$. Whence $s\varphi_i(t) + (1-s)\psi_i(t) \in C_0(I)$.

Therefore,

$$s(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}; \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) + (1-s)(r_1, r_2, \dots, r_{n-1}; \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) \in \mathcal{K}_n.$$

Then, for all $n \in \mathbb{N}$, the set $\mathcal{K}_n$ is a closed convex subset in the space $\mathbb{I}^{n+1} \times (C_0(I))^n$.

Let us state the Anderson-Kadec Theorem. Recall that a *Fréchet space,* by definition, is a locally convex linear complete metric space.

Theorem 2. *([5]) Every infinite-dimensional Fréchet space is homeomorphic to l^2.*

The following statements are well known (see [5]):

(1) The countable infinite product of non-degenerated separable Banach spaces is homeomorphic to l^2;
(2) $I^n \times l_2 \cong l_2$, where $n \in \mathbb{N}$;
(3) Each convex bounded subset in l^2 is homeomorphic to l^2.

Then, $C(I) \cong l^2$ according to Theorem 2. The set $C_0(I)$ is dense in $C(I)$, therefore $C_0(I) \cong l^2$. From Statements 1 and 2 it follows that $I^{n+1} \times C_0^n(I) \cong l^2$. From Statement 3 we obtain $\mathcal{K}_n \cong l^2$, for every $n \in \mathbb{N}$.

Corollary 1. *The set $\Psi(I) \setminus \{\langle c\rangle\}$ is homeomorphic to the disjoint sum of the singleton and a countable number of copies of a separable Hilbert space l^2.*

Thus, $\Psi(I) \setminus \{\langle c\rangle\} \cong \bigoplus_{i=1}^{\infty}(l^2)_i \oplus \{\langle c\rangle\}$.

4. By a *compactification* of a completely regular topological space X we mean any pair (Y, r) such that Y is a compact space and $r\colon X \to Y$ is an embedding such that $r(X)$ is dense subset in Y. The *one-point compactification* of X is defined to be a space $Y = X \cup \{\infty\}$, where ∞ is an arbitrary point which does not belong to X.

We will prove that space $\Psi(I)$ is not a one-point compactification of $\Psi(I) \setminus \{\langle c\rangle\}$.

Example 1. Let us consider a sequence $\{\langle f_n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$ of elements of space $\Psi(I)$ such that:

1) $\langle f_n\rangle \in K_n$ for all $n \in \mathbb{N}$;
2) the limit of the sequence is a constant map, $\lim\limits_{i\to\infty}\langle f_n\rangle = \langle c\rangle$.

Let $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$, where $t_i = \frac{i}{n}$ and $i = 0, 1, 2, \ldots n$. Define $f_n\colon I \twoheadrightarrow I$ by the conditions:

1) $f_n(t_{2i}) = 0$, for $i = 0, \ldots [\frac{n}{2}]$;
2) $f_n(t_{2i+1}) = 1$, for $i = 0, \ldots \left([\frac{n}{2}] + ((-1)^{n+1} - 1)\frac{1}{2}\right)$;
3) $f_n\colon [t_{i-1}; t_i] \twoheadrightarrow I$ is a linear map, for all $i = 1, 2, \ldots n-1$.

Let us estimate the distance

$$d_{HH}(\langle f_n\rangle, \langle c\rangle) = d_{HH}(\{f_n^{-1}(f_n(x)) \mid x \in I\}, \{c^{-1}(c(x)) \mid x \in I\}).$$

According to condition (3), on each segment $[t_{i-1}; t_i]$, where $i = 1, 2, \ldots n-1$, there exists a point from $\{f_n^{-1}(f_n(x))\}$, where $0 \leqslant x \leqslant 1$. Thus,

$$d_H(f_n^{-1}(f_n(x)), c^{-1}(c(x))) = d_H(f_n^{-1}(f_n(x)), I) \leqslant \frac{1}{n}.$$

From this it follows:

$$d_{HH}(\langle f_n\rangle, \langle c\rangle) = d_{HH}(\{f_n^{-1}(f_n(x)) \mid x \in I\}, \{I\}) \leqslant \frac{1}{n}.$$

We conclude that $\lim\limits_{i\to\infty}\langle f_n\rangle = \langle c\rangle$.

Example 2. Let us consider a sequence $\{\langle f_n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$ of elements of the space $\Psi(I)$ such that:

1) $\langle f_n\rangle \in K_n$ for each $n \in \mathbb{N}$;
2) $\langle f_n\rangle$ does not converge to the constant map $\lim\limits_{i\to\infty}\langle f_n\rangle \neq \langle c\rangle$.

Let $0 = t_0 < t_1 = \frac{1}{2} < t_2 < t_3 < t_4 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$, where $t_i = \frac{1}{2} + \frac{i-1}{2n}$ and $i = 0, 1, 2, \ldots n+1$. Define $f_n\colon I \twoheadrightarrow I$ by the conditions:

1) $f_n(x) = 2x$, for $x \in [0, \frac{1}{2}]$;
2) $f_n(t_{2i}) = 1$, for $i = 0, \ldots [\frac{n}{2}]$;
3) $f_n(t_{2i+1}) = 0$, for $i = 0, \ldots \left([\frac{n}{2}] + \frac{((-1)^{n+1}-1)}{2}\right)$;
4) $f_n\colon [t_{i-1}; t_i] \twoheadrightarrow I$ is a linear map, for all $i = 0, 1, 2, \ldots n+1$.

Let us estimate the distance

$$d_{HH}(\langle f_n\rangle, \langle c\rangle) = d_{HH}(\{f_n^{-1}(f_n(x)) \mid x \in I\}, \{c^{-1}(c(x)) \mid x \in I\}).$$

According to condition (4), on each segment $[t_{i-1}; t_i]$, where $i = 1, 2, \dots n-1$, there exists a point from $\{f_n^{-1}(f_n(x))\}$, where $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$. Therefore,

$$d_H(f_n^{-1}(f_n(x)), c^{-1}(c(x))) = d_H(f_n^{-1}(f_n(x)), I) \leqslant \frac{1}{n}.$$

However, for $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, we obtain $f_n^{-1}(f_n(x)) = f_n^{-1}(2x) = \{x\}$ and then

$$d_H(f_n^{-1}(f_n(x)), c^{-1}(c(x))) = d_H(f_n^{-1}(f_n(x)), I) = \max\{x, x - \frac{1}{2}\} \geqslant \frac{1}{4}.$$

Thus,

$$d_{HH}(\langle f_n \rangle, \langle c \rangle) = d_{HH}(\{f_n^{-1}(f_n(x)) \mid x \in I\}, \{c^{-1}(c(x)) \mid x \in I\}) \geqslant \frac{1}{4},$$

which means that the sequence is not convergent.

1. *Shchepin E.V.* Functors and countable powers of compacta / *Shchepin E.V.* // Uspekhi mat. nauk. – 1981. – Vol. 36. – P. 3-62.
2. *Mitra S.S.* Continuous open maps on the unit interval / *Mitra S.S.* // Amer. Math. Monthly – 1969. – Vol. 76. – P. 817-818.
3. *Koporkh K.* On the space of quotient objects of compact Hausdorff spaces / *Koporkh K.* // International Conference "Analysis and topology. Lviv-2008", Abstracts.
4. *Banakh T.* Absorbing Sets in Infinite-Dimensional Manifolds / *Banakh T., Radul T., Zarichnyi M.* – Lviv: VNTL Publishers, 1996. – Vol. 1.
5. *Bessaga C.* Selected topics in infinite-dimensional topology / *Bessaga C., Pełczyński A.* – Warszawa: PWN, 1975.
6. *van Mill J.* The Infinite-Dimensional Topology of Function Spaces / *van Mill J.* – Amsterdam: Elsevier, 2001. – Vol. 64.

ПРО ПРОСТІР ВІДКРИТИХ ВІДОБРАЖЕНЬ ОДИНИЧНОГО СЕГМЕНТА

Катерина КОПОРХ

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
76025, Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57
e-mail: katerynka.k@gmail.com

Розглянуто простір класів еквівалентності неперервних відкритих відображень одиничного сегмента у топології, індукованій метрикою Гаусдорфа. Основний результат дає опис топології компонент цього простору.

Ключові слова: гіперпростір, відкрите відображення, сегмент, гільбертів простір.

О ПРОСТРАНСТВЕ ОТКРЫТЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ЕДИНИЧНОГО СЕГМЕНТА

Катерина КОПОРХ

Прикарпатский национальный университет имени Василия Стефаника,
76025, Ивано-Франковск, ул. Шевченко, 57
e-mail: katerynka.k@gmail.com

Рассмотрено пространство классов эквивалентности открытых отображений единичного сегмента в топологии, индуцированной метрикой Хаусдорфа. Основной результат дает описание топологии компонент этого пространства.

Ключевые слова: гипперпространство, единичное отображение, сегмент, гільбертово пространство.

Стаття надійшла до редколегії 17.09.2009

Прийнята до друку 16.12.2009

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2009. *Ser. Mech. Math. 2009.*
Вип. 71. С. 142–155 *Is. 71. P. 142–155*

УДК 517.4

ПРО ОПЕРАТОРИ ШРЕДИНҐЕРА ТА ШТУРМА-ЛІУВІЛЛЯ З δ'-ПОТЕНЦІАЛАМИ

Степан МАНЬКО

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: s_manko@franko.lviv.ua

Розглянуто моделі квантової механіки, в яких виникає одновимірний оператор Шредингера з псевдопотенціалом $\alpha\delta'(x)$, де $\delta(x)$ – функція Дірака. Досліджено спектральні властивості та поведінку коефіцієнтів розсіяння для сім'ї регуляризованих гамільтоніанів з потенціалами вигляду $\alpha\varepsilon^{-2}\Psi(\varepsilon^{-1}x)$, які при $\varepsilon \to 0$ в топології узагальнених функцій прямують до $\alpha\delta'(x)$. Доведено, що реалізація точної моделі залежить від способу регуляризації, а саме від профілю Ψ. Виявлено ефект резонансу для ймовірності проходження крізь $\alpha\delta'$-бар'єр. Досліджено граничну поведінку спектра та чистих станів оператора Штурма-Ліувілля з локальним збуренням потенціалу вигляду $\alpha\varepsilon^{-2}\Psi(\varepsilon^{-1}x)$.

Ключові слова: оператор Шредингера, точні моделі, δ'-потенціал, резонансна множина, функція зв'язку.

1. Вступ. У квантовій механіці, атомній фізиці та фізиці твердих станів часто застосовують моделі, де виникають оператори Шредингера зі сингулярними потенціалами, а саме потенціалами, які зосереджені на дискретній множині точок. Такі моделі в науковій літературі називають *точними*, тому що резольвенти відповідних операторів будуються явно, що дає змогу обчислити основні фізичні й математичні характеристики: спектр, власні функції, коефіцієнти розсіяння та ін.

Гамільтоніанам зі сингулярними потенціалами треба надати строгого математичного сенсу, тобто поставити у відповідність самоспряжені оператори, позаяк лише такі застосовують у квантовій механіці. Дуже часто це завдання досить складне, бо виникає проблема множення узагальнених функцій, одна з яких є потенціалом, а інша – розв'язком рівняння, однак у просторі узагальнених функцій $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ не можна визначити множення розподілів, яке б успадковувало основні властивості множення неперервних функцій. Часом проблема трактування гамільтоніанів зі сингулярними потенціалами приводить до тривалих дискусій серед математиків і фізиків. Кожен дослідник намагається по-своєму надати математичного сенсу диференціальним операторам із узагальненими функціями у коефіцієнтах, що відповідають тій чи іншій точній моделі. Для розв'язання цієї проблеми в праці [3] вперше, як нам відомо, застосували теорію фон Неймана самоспряжених розширень симетричних операторів. Достатньо детальну бібліографію про дослідження гамільтоніанів з псевдопотенціалами можна знайти в книгах [1, 2]. Важливий внесок у дослідження точних моделей зробили вітчизняні математики [10]-[14].

У фізичній літературі трапляються моделі двох типів. Перші з них нечутливі до способу регуляризації потенціалу, наприклад, гамільтоніан з δ-потенціалом. Інші ж моделі залежать від цієї регуляризації, тобто з математичного погляду містять "приховані параметри". В таких моделях вибір гамільтоніана неоднозначний і залежатиме від профілю потенціалу локальної дії в реальній фізичній моделі. А, отже, всі спектральні властивості та матриця розсіяння теж залежатимуть від шляху регуляризації.

1.1. Що таке δ'-потенціал: історичний ракурс. Одним із перших операторів, трактування якого зумовило значні труднощі, був оператор з δ'-потенціалом

$$A_\alpha = -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha\delta'(x),$$

δ' – похідна функції Дірака, α – дійсна стала, яку називають *сталою зв'язку.* Зауважимо таке: коли добуток $\delta'(x)y(x)$ розуміти як $y(0)\delta'(x) - y'(0)\delta(x)$, то при $\alpha \neq 0$ рівняння $A_\alpha y = \lambda y$ не має жодного розв'язку в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, окрім нульового.

Першими відомими нам публікаціями, які тлумачать оператор A_α, були книга [1] та статті [5, 6, 7]. Причому в літературі розрізняють два фізичні феномени, пов'язані з похідною функції Дірака, а саме *δ'-взаємодія* та *δ'-потенціал.* С. Альбеверіо, Ф. Гезтезі, Р. Хоег-Крон та Х. Холден [1] досліджують сім'ю самоспряжених операторів $T_\beta = -\frac{d^2}{dx^2}$ із областю визначення

$$\mathcal{D}(T_\beta) = \{f \in W_2^2(\mathbb{R}\setminus 0) : \ f'(-0) = f'(+0),\ f(+0) - f(-0) = \beta f'(0)\}, \tag{1}$$

яка описує явище δ'-взаємодії і відповідає евристичному оператору

$$-\frac{d^2}{dx^2} + c|\delta'(x)\,\rangle\,\langle\,\delta'(x)|,$$

де $|g\,\rangle\,\langle\,g|$ – позначення оператора рангу 1

$$(|g\,\rangle\,\langle\,g|\varphi\,\rangle)(x) = g(x)\int_{\mathbb{R}} g(y)\varphi(y)\,dy.$$

Тут β – нормувальна константа, яка залежить від сталої зв'язку c. Питання про трактування гамільтоніана A_α розглянуто в [5]. Такий оператор називають *гамільтоніаном дипольної δ-взаємодії або δ'-потенціалом*, якщо δ' розуміти як границю лінійної комбінації

$$\frac{1}{2\varepsilon}\big(\delta(x+\varepsilon) - \delta(x-\varepsilon)\big)$$

двох δ-функцій в топології $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Надалі послідовність вигляду $\varepsilon^{-2}\Psi(\varepsilon^{-1}x)$, де $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, називатимемо *$\delta'$-подібною*, якщо ця послідовність збігається до $\delta'(x)$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Функцію Ψ називатимемо *δ'-подібним профілем.* В [5] показано, що для довільного гамільтоніана вигляду $\varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}x)$, де функція V є функцією з компактним носієм і має нульове середнє, граничний оператор є прямою сумою $S_- \oplus S_+$ операторів Шредингера на півосях $\mathbb{R}_\pm$, де $S_\pm = -\frac{d^2}{dx^2}$, $\mathcal{D}(S_\pm) = \{f \in W_2^2(\mathbb{R}_\pm)\colon f(0) = 0\}$. Але δ'-подібні потенціали є частковим випадком цього збурення. Тому в точній моделі, якій відповідає ця пряма сума, δ'-бар'єр має бути непроникним.

Проте в працях [16, 17, 18] явно обчислені коефіцієнти розсіяння на кусково-сталому δ'-подібному потенціалі з профілем $\Psi(\xi) = \chi_{[-1,1]}\operatorname{sign}\xi$, де χ_K – характеристична функція множини K, і описано цікавий ефект. Виявляється, що існує зліченна множина значень сталих зв'язку $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, для яких граничне значення ймовірності проходження крізь δ'-бар'єр є ненульовим. Ці сталі знаходять з деякого трансцендентного рівняння. Таке явище називатимемо *явищем резонансу для коефіцієнта проходження.*

Варто зауважити, що в літературі трапляються й інші означення δ'-потенціалу. В [14], [15] гамільтоніан з δ'-потенціалом трактують як оператор другої похідної в $L_2(\mathbb{R})$, визначений на $W_2^2(\mathbb{R}\setminus 0)$, з умовами спряження

$$
\begin{aligned}
f(+0) - f(-0) &= \frac{\alpha}{2}(f(+0) + f(-0)),\\
f'(+0) - f'(-0) &= -\frac{\alpha}{2}(f'(+0) + f'(-0)).
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Таке означення опиралося на узагальнені функції Дірака та її похідних на випадок розривних у нулі пробних функцій: $\langle\delta^{(n)}(x), \varphi(x)\rangle = \frac{(-1)^n}{2}(\varphi^{(n)}(+0) + \varphi^{(n)}(-0))$. У цій моделі коефіцієнт проникнення крізь δ'-потенціал для всіх α відмінних від 2 та -2 є відмінним від нуля.

На нашу думку, відповідь на питання про проникність крізь δ'-бар'єр можна отримати так. Треба розглянути всілякі можливі регуляризації δ'-бар'єра, а також границі характеристик розсіяння, і перевірити, чи залежать ці границі від способу регуляризації. У [9] аналогічне дослідження було проведено для аналізу енергетичних рівнів і чистих станів для гамільтоніанів вигляду

$$
-\frac{d^2}{dx^2} + U(x) + \alpha\delta'(x).
$$

Було показано, що самоспряжені розширення, отримані при переході у регуляризації до границі, не завжди є прямою сумою операторів Шредингера на півосях, як було в [5]. Для кожного профілю регуляризації існує дискретна множина сталих зв'язку, яка називається *резонансною*, для якої граничні оператори є операторами Шредингера на всій осі з деякими умовами спряження в початку координат.

Мета нашої праці – довести, що явище резонансу для коефіцієнта проходження характерне для довільного δ'-подібного потенціалу $\alpha\varepsilon^{-2}\Psi(\varepsilon^{-1}x)$ та показати, що резонансні сталі зв'язку, які в [16, 17, 18] для кусково-сталих профілів є коренями деяких трансцендентних рівнянь, насправді визначаються спектральними характеристиками профілю збурення Ψ. Крім того, з'ясувати зв'язок цих характеристик зі спектральними властивостями задачі Штурма-Ліувілля з δ'-подібним потенціалом.

1.2. Головні результати. Наведемо деякі означення, які вперше були введені в [8], [9]. Розглянемо задачу

$$-w'' + \alpha\Psi w = 0, \quad \xi \in (-1, 1), \qquad w'(-1) = 0, \quad w'(1) = 0. \tag{3}$$

Зауважимо, що функція $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ є δ'-подібним профілем тоді і лише тоді, коли $\int_{-1}^{1} \Psi\, d\xi = 0$ та $\int_{-1}^{1} \xi\Psi\, d\xi = -1$. Перша умова вимагає знакозмінності функції Ψ. Отже, задача (3) є спектральною стосовно спектрального параметра α зі знакозмінною ваговою функцією, тому властивості її спектра зручно досліджувати в просторі Крейна. Спектр задачі (3) дійсний, дискретний, простий поза $\alpha = 0$ і має дві точки скупчення $\pm\infty$ [4], [9].

Означення 1. Резонансною множиною *називатимемо спектр задачі* (3) *і позначатимемо її* Σ_Ψ.

Означення 2. *Нехай* w_α*– власна функція задачі* (3), *що відповідає власному значенню* α. *Функцію* $\theta_\Psi : \Sigma_\Psi \to \mathbb{R}$, *визначену за правилом*

$$\theta_\Psi(\alpha) = \frac{w_\alpha(1)}{w_\alpha(-1)}, \tag{4}$$

називатимемо функцією зв'язку.

Функція зв'язку визначена коректно, бо обидва числа $w_\alpha(-1)$ та $w_\alpha(1)$ відмінні від нуля. Крім того, функція θ_Ψ є однозначною, оскільки спектр задачі (3) простий.

У частині 2 статті вивчена задача розсіяння на δ'-подібному потенціалі. Ця задача полягає у знаходженні такого розв'язку y_ε рівняння:

$$-y'' + \alpha\varepsilon^{-2}\Psi(\varepsilon^{-1}x)y = k^2 y, \quad x \in \mathbb{R},$$

що $y_\varepsilon(x; \alpha, k) = e^{ikx} + R_\varepsilon(\alpha, k)e^{-ikx}$ при $x \to -\infty$ та $y_\varepsilon(x; \alpha, k) = T_\varepsilon(\alpha, k)e^{ikx}$ при $x \to \infty$. Величина $|R_\varepsilon(k, \alpha)|^2$ визначає ймовірність, з якою квантово-механічна частинка відбивається від бар'єра, а $|T_\varepsilon(k, \alpha)|^2$ – ймовірність, з якою квантово-механічна частинка проходить крізь бар'єр. Ці величини називаються *коефіцієнтом відбиття* та *коефіцієнтом проникнення (коефіцієнтом прозорості бар'єра)* відповідно. Добре відомо, що між ними виконується співвідношення $|R_\varepsilon(k, \alpha)|^2 + |T_\varepsilon(k, \alpha)|^2 = 1$. Досліджено граничну поведінку коефіцієнта проникнення. Доведено, що лише у випадку, коли $\alpha \in \Sigma_\Psi$, коефіцієнт проникнення має при $\varepsilon \to 0$ ненульову границю $|T(\alpha)|^2$, яка визначається через функцію зв'язку $\theta_\Psi(\alpha)$ за формулою

$$|T(\alpha)|^2 = \frac{4}{(\theta_\Psi(\alpha) + \theta_\Psi(\alpha)^{-1})^2}, \quad \alpha \in \Sigma_\Psi.$$

Якщо ж $\alpha \notin \Sigma_\Psi$, то $|T(\alpha)|^2 = 0$.

У частині 3 розглянуто модель руху квантово-механічної частинки в нескінченній прямокутній ямі з δ'-подібним потенціалом, розташованим в ній. Досліджено граничну поведінку власних значень і власних функцій оператора Штурма-Ліувілля

$$-y'' + \alpha\varepsilon^{-2}\Psi(\varepsilon^{-1}x)y = \lambda y, \quad x \in (a, b), \qquad y(a) = 0, \quad y(b) = 0,$$

для фіксованого кусково-сталого профілю Ψ. Доведено, що власні значення та відповідні власні функції збігаються до власних значень та відповідних власних функцій оператора $A(\alpha, \Psi) = -\frac{d^2}{dx^2}$ з областю визначення

$$\mathcal{D}(A(\alpha, \Psi)) = \{f \in W_2^2((a, b) \setminus 0) : \ f(a) = f(0) = f(b) = 0\}$$

при $\alpha \notin \Sigma_\Psi$ і

$$\mathcal{D}(A(\alpha, \Psi)) = \{f \in W_2^2((a, b) \setminus 0) : \ f(+0) = \theta_\Psi(\alpha) f(-0), \ \ \theta_\Psi(\alpha) f'(+0) = f'(-0)\}$$

у випадку, коли $\alpha \in \Sigma_\Psi$. Тут Σ_Ψ і θ_Ψ – резонансна множина та функція зв'язку потенціалу Ψ. Це означає, що резонансні значення α мають суттєвий вплив і на поведінку спектра при $\varepsilon \to 0$.

2. Задача розсіяння на δ'-подібному бар'єрі. Розглянемо задачу про проникнення частинки з заданою енергією k^2, де $k > 0$, крізь потенціальний бар'єр, що має вигляд $\alpha\varepsilon^{-2}\Psi(\varepsilon^{-1}x)$. Тут ε – малий додатний параметр, α – дійсне число, а Ψ є гладкою функцією такою, що $\operatorname{supp}\Psi = [-1, 1]$. Задача розсіяння частинки на цьому потенціалі полягає у знаходженні розв'язку $y_\varepsilon(x; \alpha, k)$ рівняння

$$-y'' + \alpha\varepsilon^{-2}\Psi(\varepsilon^{-1}x)y = k^2 y, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

який має вигляд

$$y_\varepsilon(x; k, \alpha) = \begin{cases} e^{ikx} + R_\varepsilon\, e^{-ikx} & \text{при } x < -\varepsilon, \\ C_{\varepsilon,1}\, u_1(\varepsilon^{-1}x; \varepsilon k, \alpha) + C_{\varepsilon,2}\, u_2(\varepsilon^{-1}x; \varepsilon k, \alpha) & \text{при } |x| < \varepsilon, \\ \qquad T_\varepsilon\, e^{ikx} & \text{при } x > \varepsilon. \end{cases}$$

Розглянемо допоміжне рівняння

$$-u'' + (\alpha\Psi(\xi) - \tau^2)u = 0, \quad \xi \in (-1, 1), \tag{6}$$

де $(\alpha, \tau) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Розглянемо функції $u_1(\xi; \tau, \alpha)$ та $u_2(\xi; \tau, \alpha)$, які утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (6) з визначником Вронського $W(\tau, \alpha)$, який дорівнює одиниці для всіх $(\alpha, \tau) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Нехай кожна з цих функцій є неперервною функцією параметрів α, τ. Очевидно, що пара функцій $u_1(\varepsilon^{-1}x; \varepsilon k, \alpha)$ та $u_2(\varepsilon^{-1}x; \varepsilon k, \alpha)$ утворюватиме фундаментальну систему розв'язків рівняння (5) на інтервалі $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Розв'язок рівняння (5) задовольняє умови спряження в точках $-\varepsilon$ та ε

$$[y_\varepsilon]_{x=-\varepsilon} = 0, \quad [y_\varepsilon]_{x=\varepsilon} = 0, \quad [y'_\varepsilon]_{x=-\varepsilon} = 0, \quad [y'_\varepsilon]_{x=\varepsilon} = 0, \tag{7}$$

де $[f]_{x=a} = f(a+0) - f(a-0)$ позначає стрибок функції f в точці a. Підставляючи $y_\varepsilon(x; k, \alpha)$ в (7), отримуємо систему для знаходження невідомих коефіцієнтів

$$\begin{pmatrix} -e^{ik\varepsilon} & u_1(-1; \varepsilon k, \alpha) & u_2(-1; \varepsilon k, \alpha) & 0 \\ ik\varepsilon e^{ik\varepsilon} & u_1'(-1; \varepsilon k, \alpha) & u_2'(-1; \varepsilon k, \alpha) & 0 \\ 0 & u_1(1; \varepsilon k, \alpha) & u_2(1; \varepsilon k, \alpha) & -e^{ik\varepsilon} \\ 0 & u_1'(1; \varepsilon k, \alpha) & u_2'(1; \varepsilon k, \alpha) & -ik\varepsilon e^{ik\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_\varepsilon \\ C_{\varepsilon,1} \\ C_{\varepsilon,2} \\ T_\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-ik\varepsilon} \\ ik\varepsilon e^{-ik\varepsilon} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Коефіцієнт T_ε шукатимемо за правилом Крамера

$$T_\varepsilon = \frac{\Delta_{T\varepsilon}(k, \alpha)}{\Delta_\varepsilon(k, \alpha)},$$

де через $\Delta_\varepsilon(k, \alpha)$ позначатимемо визначник цієї системи. Функція $\Delta_\varepsilon(k, \alpha)$ має таку асимптотику:

$$\Delta_\varepsilon(k, \alpha) = h(\alpha) + i\varepsilon k(h_1(\alpha) + 2h(\alpha)) + O(\varepsilon^2 k^2) \tag{8}$$

при $\varepsilon k \to 0$. Тут

$$h(\alpha) = \begin{vmatrix} u_1'(1;0,\alpha) & u_2'(1;0,\alpha) \\ u_1'(-1;0,\alpha) & u_2'(-1;0,\alpha) \end{vmatrix},$$

$$h_1(\alpha) = \begin{vmatrix} u_1'(-1;0,\alpha) & u_2'(-1;0,\alpha) \\ u_1(1;0,\alpha) & u_2(1;0,\alpha) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_1(-1;0,\alpha) & u_2(-1;0,\alpha) \\ u_1'(1;0,\alpha) & u_2'(1;0,\alpha) \end{vmatrix}.$$

Зауважимо, що функції h та h_1 не залежать від вибору фундаментальної системи розв'язків рівняння (6) за умови, що визначник Вронського усіх таких фундаментальних систем дорівнює одиниці. Визначник $\Delta_{T\varepsilon}$ можна записати так:

$$\Delta_{T\varepsilon} = \begin{vmatrix} -e^{ik\varepsilon} & e^{-ik\varepsilon} & u_1(-1;\varepsilon k,\alpha) & u_2(-1;\varepsilon k,\alpha) \\ ik\varepsilon e^{ik\varepsilon} & ik\varepsilon e^{-ik\varepsilon} & u_1'(-1;\varepsilon k,\alpha) & u_2'(-1;\varepsilon k,\alpha) \\ 0 & 0 & u_1(1;\varepsilon k,\alpha) & u_2(1;\varepsilon k,\alpha) \\ 0 & 0 & u_1'(1;\varepsilon k,\alpha) & u_2'(1;\varepsilon k,\alpha) \end{vmatrix}.$$

За правилом Лапласа $\Delta_{T\varepsilon} = -2ik\varepsilon$, бо визначник Вронського розв'язків u_1 та u_2 дорівнює 1. Отже, коефіцієнт T_ε має таку асимптотику:

$$T_\varepsilon(k,\alpha) = \frac{-2i\varepsilon k}{h(\alpha) + i\varepsilon k(h_1(\alpha) + 2h(\alpha))} + O(\varepsilon^2 k^2) \quad \text{при} \quad \varepsilon k \to 0. \tag{9}$$

Дослідимо граничну поведінку при $\varepsilon k \to 0$ коефіцієнта проходження $|T_\varepsilon|^2$, яка залежить від того, чи належить α до резонансної множини.

Теорема 1. *При $\varepsilon k \to 0$ коефіцієнт проникнення має таку поведінку:*

- *якщо $\alpha \notin \Sigma_\Psi$, то $|T_\varepsilon(k,\alpha)|^2 = O(\varepsilon^2 k^2)$;*
- *якщо ж $\alpha \in \Sigma_\Psi$, тоді $|T_\varepsilon(k,\alpha)|^2 = 4(\theta_\Psi(\alpha) + \theta_\Psi(\alpha)^{-1})^{-2} + O(\varepsilon k)$.*

Доведення. Спершу зауважимо, що число α належить Σ_Ψ тоді й лише тоді, коли α є коренем рівняння $h(z) = 0$. Справді, $\alpha \in \Sigma_\Psi$ тоді й лише тоді, коли існує нетривіальна лінійна комбінація $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$ функцій u_1 та u_2 з фундаментальної системи розв'язків, яка задовольняє крайові умови $u'(-1) = u'(1) = 0$, а це виконується тоді й лише тоді, коли $h(\alpha) = 0$.

Нехай α не належить до Σ_Ψ, тоді $h(\alpha) \neq 0$. Врахувавши асимптотику (9), отримаємо

$$|T_\varepsilon(k,\alpha)|^2 = \frac{4}{h^2(\alpha)}\varepsilon^2 k^2 + O(\varepsilon^3 k^3) \quad \text{при} \quad \varepsilon k \to 0.$$

Проведемо доведення у випадку, коли $\alpha \in \Sigma_\Psi$. Виберемо таку фундаментальну систему розв'язків рівняння (6), що при всіх $\alpha \in \Sigma_\Psi$ функція $u_1(\xi;0,\alpha)$ є власною функцією задачі (3). Обчислимо $h_1(\alpha)$, бо $h(\alpha) = 0$. Визначник Вронського цієї системи сталий

$$\begin{vmatrix} u_1(-1;0,\alpha) & u_2(-1;0,\alpha) \\ u_1'(-1;0,\alpha) & u_2'(-1;0,\alpha) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1(1;0,\alpha) & u_2(1;0,\alpha) \\ u_1'(1;0,\alpha) & u_2'(1;0,\alpha) \end{vmatrix} = 1.$$

Функція $u_1(\xi;0,\alpha)$ є власною функцією задачі (3), тому $u_1'(-1;0,\alpha) = 0$ та $u_1'(1;0,\alpha) = 0$. Враховуючи це, остання рівність набуває вигляду

$$u_1(-1;0,\alpha)u_2'(-1;0,\alpha) = u_1(1;0,\alpha)u_2'(1;0,\alpha) = 1.$$

З цієї рівності отримуємо такі співвідношення:

$$\begin{aligned}\theta_\Psi(\alpha) &= \frac{u_1(1;0,\alpha)}{u_1(-1;0,\alpha)} = \frac{1}{u_1(-1;0,\alpha)u_2'(1;0,\alpha)},\\ \theta_\Psi(\alpha) &= \frac{u_1(1;0,\alpha)}{u_1(-1;0,\alpha)} = u_1(1;0,\alpha)u_2'(-1;0,\alpha).\end{aligned} \tag{10}$$

Враховуючи (10), безпосередньо обчислюємо $h_1(\alpha) = -\theta_\Psi(\alpha) - \theta_\Psi(\alpha)^{-1}$. Підставляючи h_1 у (9), одержуємо

$$T_\varepsilon(\alpha,k) \to 2(\theta_\Psi(\alpha) + \theta_\Psi(\alpha)^{-1})^{-1} \quad \text{при} \quad \varepsilon k \to 0.$$

$\square$

3. Оператор Штурма-Ліувілля з δ'-подібним потенціалом. Нехай частинка перебуває в безмежно глибокій потенціальній ямі (a,b), де a, b – числа різних знаків. Окрім того, в околі початку координат розташований потенціал малого радіуса дії $\alpha\varepsilon^{-2}\Psi(\varepsilon^{-1}x)$. В такій моделі квантово-механічна частинка з ймовірністю 1 перебуває на інтервалі (a,b) і для відшукання її стаціонарних станів треба знайти власні значення та власні функції задачі Штурма-Ліувілля

$$-y'' + \alpha\varepsilon^{-2}\Psi(\varepsilon^{-1}x)y = \lambda y, \quad x \in (a,b), \qquad y(a) = 0, \quad y(b) = 0. \tag{11}$$

Тут ε – малий додатний параметр. Граничні спектральні властивості цієї задачі, як і в попередньому розділі, можна досліджувати для довільного гладкого профілю Ψ. Щоб отримати точні формули для спектральних характеристик профілю, ми розглянемо кусково-сталий профіль. Нехай профіль Ψ є δ'-подібним із носієм на $[-1,1]$ такий, що $\Psi(\xi) = 1$ при $\xi \in (-1,0)$ і $\Psi(\xi) = -1$ при $\xi \in (0,1)$.

Задача (11) є стандартною спектральною задачею з дійсним дискретним простим спектром. Для фіксованого ε послідовність $\{y_\varepsilon^j(\cdot,\alpha,\Psi)\}_{j=1}^\infty$ нормованих власних функцій формує ортогональну базу в $L_2(a,b)$. Із варіаційного принципу випливає, що власні значення $\lambda_j^\varepsilon(\alpha,\Psi)$ задачі (11) є неперервними функціями змінної $\varepsilon \in (0,1)$ і залишаються обмеженими зверху при $\varepsilon \to 0$.

Опишемо конструктивно резонансну множину та функцію зв'язку. Для профілю Ψ характеристичний визначник задачі (3) набуває вигляду

$$h(z) = \sqrt{z}(\operatorname{sh}\sqrt{z}\,\cos\sqrt{z} - \operatorname{ch}\sqrt{z}\,\sin\sqrt{z}). \tag{12}$$

Тут і надалі беремо таку гілку квадратного кореня, що $\sqrt{-1} = i$. Нагадаємо, що Σ_Ψ є підмножиною в $\mathbb{R}$.

Лема 1. *(i) Резонансна множина Σ_Ψ симетрична стосовно початку координат.*

(ii) Функція зв'язку θ_Ψ має вигляд $\theta_\Psi(\alpha) = \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\alpha}}{\cos\sqrt{\alpha}}$, коли $\alpha > 0$, $\theta_\Psi(\alpha) = \frac{\cos\sqrt{-\alpha}}{\operatorname{ch}\sqrt{-\alpha}}$, коли $\alpha < 0$, та $\theta_\Psi(0) = 1$.

Доведення. (i) Нехай α належить Σ_Ψ, і йому відповідає власна функція w, тобто

$$-w'' + \alpha\Psi(\xi)w = 0, \quad \xi \in (-1,1), \qquad w'(-1) = 0, \quad w'(1) = 0. \tag{13}$$

Зробимо в рівнянні (13) і крайових умовах заміну аргументу $\xi = -\zeta$

$$-w''(-\zeta) - \alpha\Psi(\zeta)w(-\zeta) = 0, \quad \zeta \in (-1,1), \qquad w'(-1) = 0, \quad w'(1) = 0.$$

Тут ми скористались тим, що профіль Ψ непарний. Отже, число $-\alpha$ теж належить резонансній множині, і йому відповідає власна функція $w(-\xi)$.

(ii) Власну функцію шукатимемо у вигляді

$$g_\alpha(\xi) = \begin{cases} a_1 \operatorname{ch} \sqrt{\alpha}(\xi+1), & \xi \in (-1,0), \\ a_2 \cos \sqrt{\alpha}(\xi-1), & \xi \in (0,1), \end{cases}$$

$$g_\alpha(\xi) = \begin{cases} b_1 \cos \sqrt{-\alpha}(\xi+1), & \xi \in (-1,0), \\ b_2 \operatorname{ch} \sqrt{-\alpha}(\xi-1), & \xi \in (0,1) \end{cases}$$

для додатного та від'ємного α відповідно. Зауважимо, що $g'_\alpha(-1) = 0$ та $g'_\alpha(1) = 0$. Функція g_α задовольняє умови спряження в початку координат

$$g_\alpha(-0) = g_\alpha(+0), \quad g'_\alpha(-0) = g'_\alpha(+0). \tag{14}$$

Підставляючи g_α в умови спряження (14), отримуємо остаточний вигляд власної функції

$$g_\alpha(\xi) = \begin{cases} \cos\sqrt{\alpha} \operatorname{ch} \sqrt{\alpha}(\xi+1), & \xi \in (-1,0), \\ \operatorname{ch}\sqrt{\alpha} \cos \sqrt{\alpha}(\xi-1), & \xi \in (0,1), \end{cases}$$

$$g_\alpha(\xi) = \begin{cases} \operatorname{ch}\sqrt{-\alpha} \cos \sqrt{-\alpha}(\xi+1), & \xi \in (-1,0), \\ \cos\sqrt{-\alpha} \operatorname{ch} \sqrt{-\alpha}(\xi-1), & \xi \in (0,1) \end{cases}$$

для додатного та від'ємного α відповідно. Очевидно, що $\alpha = 0$ є власним значенням. Йому відповідає власна функція $g_0(\xi) = 1$, тому $\theta_\Psi(0) = 1$. Якщо $\alpha > 0$, то

$$\theta_\Psi(\alpha) = \frac{g_\alpha(1)}{g_\alpha(-1)} = \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\alpha}}{\cos\sqrt{\alpha}}.$$

Функція θ_Ψ визначена для таких α, що $h(\alpha) = 0$, тому знаменник виразу для θ_Ψ не перетворюється на нуль. Аналогічно перевіряємо формулу для θ_Ψ у випадку від'ємного α. □

У працях [16, 17, 18] була розв'язана задача розсіяння для різних кусково-сталих профілів. Зокрема, було показано, що резонансні сталі зв'язку для профілю Ψ є коренями рівняння $h(\alpha) = 0$, де функція h має вигляд (12). Тобто такий δ'-подібний бар'єр проникний лише у випадку, коли $\alpha \in \Sigma_\Psi$.

3.1. Асимптотика власних значень і власних функцій. Як було показано в [9], скінченна кількість перших власних значень задачі (11) необмежені знизу, і мають порядок $O(\varepsilon^{-2})$ при $\varepsilon \to 0$. Решта власних значень є додатними та обмеженими при $\varepsilon \to 0$. Надалі ми розглядатимемо лише обмежені власні значення. Знайдемо границі цих власних значень і відповідних власних функцій. Розглянемо рівняння (11) на інтервалі $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Зробимо в ньому заміну $\xi = \varepsilon^{-1}x$, $u_\varepsilon(\xi) = y_\varepsilon(\varepsilon\xi)$

$$-\varepsilon^{-2}u''_\varepsilon + \varepsilon^{-2}\alpha\Psi(\xi)u_\varepsilon = \lambda^\varepsilon u_\varepsilon. \tag{15}$$

Розглянемо допоміжне рівняння

$$-u'' + \alpha\Psi u = \tau^2 u, \quad \xi \in (-1,1), \quad (\alpha,\tau) \in \mathcal{M}.$$

Тут $\mathcal{M} = \{(\alpha,\tau) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\colon\ |\alpha| > \tau^2\}$. Це рівняння має таку фундаментальну систему розв'язків:

$$u_1(\xi;\tau,\alpha) = \begin{cases} \operatorname{ch}\sqrt{\alpha-\tau^2}\,\xi, & \xi\in(-1,0),\\ \cos\sqrt{\alpha+\tau^2}\,\xi, & \xi\in(0,1),\end{cases} \tag{16}$$

$$u_2(\xi;\tau,\alpha) = \begin{cases} \alpha^{-1}\sqrt{\alpha+\tau^2}\operatorname{sh}\sqrt{\alpha-\tau^2}\,\xi, & \xi\in(-1,0),\\ \alpha^{-1}\sqrt{\alpha-\tau^2}\sin\sqrt{\alpha+\tau^2}\,\xi, & \xi\in(0,1).\end{cases} \tag{17}$$

Кожен з елементів бази є неперервним в нулі разом зі своєю похідною. Зрозуміло, що пара $u_1(\varepsilon^{-1}x;\varepsilon\omega_\varepsilon,\alpha)$ та $u_2(\varepsilon^{-1}x;\varepsilon\omega_\varepsilon,\alpha)$ утворюватиме фундаментальну систему розв'язків рівняння (15). Носій функції Ψ зосереджений на відрізку $[-1,1]$, тому на $(a,b)\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)$ рівняння (11) матиме вигляд $-y'' = \lambda^\varepsilon y$. Отже, власну функцію задачі (11) шукатимемо у вигляді

$$y_\varepsilon(x;\omega_\varepsilon,\alpha) = \begin{cases} A\sin\omega_\varepsilon(x-a), & x\in(a,-\varepsilon),\\ B\,u_1(\varepsilon^{-1}x,\alpha,\varepsilon\omega_\varepsilon) + C\,u_2(\varepsilon^{-1}x,\alpha,\varepsilon\omega_\varepsilon), & x\in(-\varepsilon,\varepsilon),\\ D\sin\omega_\varepsilon(x-b), & x\in(\varepsilon,b),\end{cases} \tag{18}$$

де $\omega_\varepsilon = \sqrt{\lambda^\varepsilon}$. Легко перевірити, що виконуються умови $y_\varepsilon(a)=0$ та $y_\varepsilon(b)=0$. Крім того, функції y_ε та y_ε' неперервні в початку координат. Власна функція задовольняє умови спряження в точках $-\varepsilon$ та ε

$$[y_\varepsilon]_{x=-\varepsilon}=0,\quad [y_\varepsilon]_{x=\varepsilon}=0,\quad [y_\varepsilon']_{x=-\varepsilon}=0,\quad [y_\varepsilon']_{x=\varepsilon}=0. \tag{19}$$

Підставляючи $y_\varepsilon(x;\omega_\varepsilon,\alpha)$ в (19), отримуємо характеристичний визначник

$$\Delta_\varepsilon(\omega,\alpha) = \begin{vmatrix} \sin(\varepsilon+a)\omega & u_1(-1;\varepsilon\omega,\alpha) & u_2(-1;\varepsilon\omega,\alpha) & 0\\ -\varepsilon\omega\cos(\varepsilon+a)\omega & u_1'(-1;\varepsilon\omega,\alpha) & u_2'(-1;\varepsilon\omega,\alpha) & 0\\ 0 & u_1(1;\varepsilon\omega,\alpha) & u_2(1;\varepsilon\omega,\alpha) & -\sin(\varepsilon-b)\omega\\ 0 & u_1'(1;\varepsilon\omega,\alpha) & u_2'(1;\varepsilon\omega,\alpha) & -\varepsilon\omega\cos(\varepsilon-b)\omega \end{vmatrix}.$$

Введемо комплекснозначні функції дійсного аргументу

$$\begin{aligned} h_1(z) &= \operatorname{ch}\sqrt{z}\cos\sqrt{z} + \operatorname{sh}\sqrt{z}\sin\sqrt{z},\\ h_2(z) &= \operatorname{ch}\sqrt{z}\cos\sqrt{z} - \frac{\operatorname{sh}\sqrt{z}\cos\sqrt{z} + \operatorname{ch}\sqrt{z}\sin\sqrt{z}}{2\sqrt{z}}. \end{aligned} \tag{20}$$

Лема 2. *Функція Δ_ε має таку асимптотику:*

$$\Delta_\varepsilon(\omega,\alpha) = f_0(\omega,\alpha) + \varepsilon\omega f_1(\omega,\alpha) + \varepsilon^2\omega^2 f_2(\omega,\alpha) + O(\varepsilon^3\omega^3) \tag{21}$$

при $\varepsilon\omega\to 0$, де $f_0(\omega,\alpha) = h(\alpha)\sin a\omega\sin b\omega$,

$$f_1(\omega,\alpha) = h(\alpha)\sin(b-a)\omega + h_1(\alpha)\sin a\omega\cos b\omega - h_1(-\alpha)\cos a\omega\sin b\omega; \tag{22}$$

$$f_2(\omega,\alpha) = -h(\alpha)\cos(b-a)\omega + h_2(\alpha)(\sin a\omega\sin b\omega + 2\cos a\omega\cos b\omega). \tag{23}$$

Доведення. Перейшовши в визначнику Δ_ε до границі при $\varepsilon\omega\to 0$, ми отримаємо

$$\begin{vmatrix} \sin a\omega & u_1(-1;0,\alpha) & u_2(-1;0,\alpha) & 0\\ 0 & u_1'(-1;0,\alpha) & u_2'(-1;0,\alpha) & 0\\ 0 & u_1(1;0,\alpha) & u_2(1;0,\alpha) & \sin b\omega\\ 0 & u_1'(1;0,\alpha) & u_2'(1;0,\alpha) & 0 \end{vmatrix} = h(\alpha)\sin a\omega\sin b\omega.$$

Знайдемо наступний член асимптотики функції Δ_ε. Перейдемо до границі при $\varepsilon\omega \to 0$ у виразі $(\varepsilon\omega)^{-1}[\Delta_\varepsilon(\omega,\alpha) - f_0(\omega,\alpha)]$. Ця границя буде такою:

$$\begin{vmatrix} u_1'(-1;0,\alpha) & u_2'(-1;0,\alpha) \\ u_1'(1;0,\alpha) & u_2'(1;0,\alpha) \end{vmatrix} \sin(b-a)\omega + \begin{vmatrix} u_1'(-1;0,\alpha) & u_2'(-1;0,\alpha) \\ u_1(1;0,\alpha) & u_2(1;0,\alpha) \end{vmatrix} \sin a\omega \cos b\omega$$
$$- \begin{vmatrix} u_1(-1;0,\alpha) & u_2(-1;0,\alpha) \\ u_1'(1;0,\alpha) & u_2'(1;0,\alpha) \end{vmatrix} \cos a\omega\, \sin b\omega.$$

Отже, $f_1(\omega,\alpha)$ має вигляд (22). Тепер знайдемо f_2. Для цього у виразі

$$(\varepsilon\omega)^{-2}[\Delta_\varepsilon(\omega,\alpha) - f_0(\omega,\alpha) - \varepsilon\omega f_1(\omega,\alpha)]$$

перейдемо до границі при $\varepsilon\omega \to 0$. Аналогічно показуємо, що функція $f_2(\omega,\alpha)$ має зображення (23). □

Зауваження 1. Асимптотика визначника Δ_ε, отримана в лемі 2, правильна лише для власних частот ω_ε задачі (11), які є обмеженими при $\varepsilon \to 0$, тому що для скінченної кількості частот з малими номерами $\varepsilon\omega_\varepsilon \not\to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Далі опишемо граничну поведінку власних значень задачі (11).

Теорема 2. *Нехай власне значення λ^ε задачі* (11) *є обмеженим при $\varepsilon \to 0$, тоді λ^ε має границю λ_0 при $\varepsilon \to 0$. Крім того, λ_0 є власним значенням оператора Штурма-Ліувілля $A(\alpha,\Psi)$.*

Доведення. Спершу припустимо, що власне значення λ^ε має границю λ_0 при $\varepsilon \to 0$. Нехай α не належить до резонансної множини, тобто $h(\alpha) \neq 0$. Якщо число $\omega_0 = \sqrt{\lambda_0}$ є границею власної частоти при $\varepsilon \to 0$, то згідно з лемою 2 воно є коренем рівняння

$$\sin a\omega \sin b\omega = 0. \tag{24}$$

Легко переконатися, що рівняння (24) є характеристичним для оператора $A(\alpha,\Psi)$ у випадку, коли $\alpha \notin \Sigma_\Psi$; отже, λ_0 є власним значенням цього оператора.

Тепер нехай α належить резонансній множині. З леми 1 отримуємо, що $h(\alpha) = 0$, і легко перевірити, що $h_1(\alpha) \neq 0$. Застосовуючи лему 2, отримуємо, що $f_0(\omega;\alpha) = 0$, бо містить множник $h(\alpha)$. Граничні частоти визначають із коефіцієнта порядку ε у розвиненні функції Δ_ε , а саме

$$\cos a\omega \sin b\omega - \frac{h_1(\alpha)}{h_1(-\alpha)} \sin a\omega \cos b\omega = 0. \tag{25}$$

Зауважимо таке: якщо α належить до Σ_Ψ, то виконується: $\operatorname{tg}\sqrt{\alpha} = \operatorname{th}\sqrt{\alpha}$. Нехай $\alpha > 0$, тоді правильні такі перетворення:

$$h_1(\alpha) = \operatorname{ch}\sqrt{\alpha}\cos\sqrt{\alpha}(1 + \operatorname{th}\sqrt{\alpha}\operatorname{tg}\sqrt{\alpha}) = \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\alpha}}{\cos\sqrt{\alpha}} = \theta_\Psi(\alpha).$$

У випадку від'ємного α аналогічно перевіряємо, що $h_1(\alpha) = \theta_\Psi(\alpha)$. З леми 1 випливає, що $\theta_\Psi(-\alpha) = \theta_\Psi(\alpha)^{-1}$. Отже, враховуючи останню рівність, маємо

$$h_1(-\alpha) = \theta_\Psi(-\alpha) = \theta_\Psi(\alpha)^{-1}.$$

Тому рівняння (25) можна записати так:

$$\cos a\omega \sin b\omega - \theta_\Psi^2(\alpha) \sin a\omega \cos b\omega = 0.$$

Легко перевірити, що це рівняння є характеристичним для оператора $A(\alpha,\Psi)$, якщо $\alpha\in\Sigma_\Psi$. Отже, λ_0 є власним значенням оператора $A(\alpha,\Psi)$.

Тепер доведемо існування границі для довільного власного значення λ^ε задачі (11), обмеженого при $\varepsilon\to 0$. Нагадаємо, що λ^ε є неперервною функцією параметра $\varepsilon\in(0,1)$. Доведемо від супротивного. Нехай виконується нерівність

$$\mu_*=\varliminf_{\varepsilon\to 0}\lambda^\varepsilon<\varlimsup_{\varepsilon\to 0}\lambda^\varepsilon=\mu^*,$$

де числа μ_*, μ^* – скінченні, бо λ^ε – обмежена функція. Тоді для кожного $\lambda\in[\mu_*,\mu^*]$ існує збіжна до нього підпослідовність $\lambda_{\varepsilon'}$, $\varepsilon'\to 0$. Згідно з доведеним вище число λ буде власним значенням оператора $A(\alpha,\Psi)$. Зважаючи на те, що λ – довільне число з $[\mu_*,\mu^*]$, отримуємо, що цей відрізок міститься в $\sigma(A(\alpha,\Psi))$. Це можливо лише тоді, коли $\mu_*=\mu^*$. □

Як випливає з доведення теореми, якщо α не належить до Σ_Ψ, то власні частоти оператора $A(\alpha,\Psi)$ є коренями рівняння (24). У випадку, коли α є елементом резонансної множини, власні частоти визначаються з рівняння (25). Очевидно, що кожен кратний корінь (24) є розв'язком рівняння (25). Позначимо через Ω множину кратних коренів рівняння (24), тобто $\Omega=\{\omega\colon \exists(k,m)\in\mathbb{N}^2,\ \omega=\frac{\pi k}{a}=\frac{\pi m}{b}\}$.

Якщо ω_ε є нулем функції Δ_ε та $\omega_\varepsilon\to\omega_0$ при $\varepsilon\to 0$, то коефіцієнти власної функції (18) обчислюємо явно, й після нормування функція y_ε матиме таку асимптотику:

$$y_\varepsilon(x;\omega_\varepsilon,\alpha)=Y(x;\omega_0,\alpha)+O(\varepsilon),\quad \varepsilon\to 0,$$

де

$$Y(x;\omega_0,\alpha)=\begin{cases}\nu(\omega_0,\alpha)h_1(-\alpha)\sin b\omega_0\,\sin\omega_0(x-a), & x\in(a,0),\\ \nu(\omega_0,\alpha)\sin a\omega_0\,\sin\omega_0(x-b), & x\in(0,b).\end{cases}\tag{26}$$

Тут ν – нормувальний множник, тобто $\|Y(\,\cdot\,;\omega_0,\alpha)\|=1$.

Теорема 3. *Нехай $\omega_\varepsilon\to\omega_0$ при $\varepsilon\to 0$, і гранична частота ω_0 не належить множині Ω. Тоді y_ε збігається в $L_2(a,b)$ до власної функції оператора $A(\alpha,\Psi)$, яка відповідає граничній частоті ω_0.*

Доведення. Нехай α не належить до множини Σ_Ψ. В цьому випадку вважатимемо, що оператор $A(\alpha,\Psi)$ відповідає системі двох струн, закріплених в точках $x=a$, $x=0$ та $x=0$, $x=b$ відповідно. Зауважимо, що ω_0 є власною частотою лише однієї з цих струн, бо $\omega_0\notin\Omega$. Не обмежуючи загальності, припустимо, що ω_0 є власною частотою струни, розташованої на $(a,0)$, тобто $\omega_0=\frac{\pi k}{a}$ для деякого $k\in\mathbb{N}$. Зрозуміло, що тоді власна функція оператора $A(\alpha,\Psi)$ дорівнює нулю на $(0,b)$. При всіх натуральних n виконується $\omega_0\neq\frac{\pi n}{b}$, бо ω_0 – простий корінь рівняння (24). Тому $\sin a\omega_0=0$, але $\sin b\omega_0\neq 0$. Підставляючи ω_0 в (26), отримуємо, що власна функція y_ε, яка відповідає ω_ε, при $\varepsilon\to 0$ прямує до функції

$$Y(x;\omega_0,\alpha)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{|a|}}\sin\frac{\pi k}{a}(x-a), & x\in(a,0),\\ 0, & x\in(0,b)\end{cases}$$

в топології простору $L_2(a,b)$. Залишилося зауважити, що функція Y є нормованою власною функцією оператора $A(\alpha,\Psi)$, яка відповідає власній частоті $\frac{\pi k}{a}$. Якщо ω_0 –

власна частота струни на $(0, b)$, то

$$Y(x;\omega_0,\alpha) = \begin{cases} 0, & x \in (a,0), \\ \sqrt{\frac{2}{b}} \sin \frac{\pi m}{b}(x-b), & x \in (0,b). \end{cases}$$

Зауважимо, що границі власних функцій у нерезонансному випадку не залежать від α.

Тепер припустимо, що α належить резонансній множині. Тоді ω_0 є коренем рівняння (25), як це видно з доведення теореми 2. Позаяк $\omega_0 \notin \Omega$, то ω_0 не може бути коренем рівняння (24). Отже, в цьому випадку обидва значення $\sin a\omega_0$ та $\sin b\omega_0$ відмінні від нуля. В доведенні теореми 2 було показано таке: коли $\alpha \in \Sigma_\Psi$, то $h_1(-\alpha) = \theta_\Psi(\alpha)^{-1}$. З (26) одержуємо, що власна функція $y_\varepsilon(x;\omega_\varepsilon,\alpha)$ збігається в $L_2(a,b)$ до функції

$$Y(x;\omega_0,\alpha) = \begin{cases} \nu(w_0,\alpha)\theta_\Psi(\alpha)^{-1} \sin b\omega_0 \, \sin \omega_0(x-a), & x \in (a,0), \\ \nu(w_0,\alpha) \sin a\omega_0 \, \sin \omega_0(x-b), & x \in (0,b), \end{cases}$$

де нормувальний множник ν такий:

$$\nu(\omega_0,\alpha) = \sqrt{2}\theta_\Psi(\alpha)\big(\theta_\Psi^2(\alpha) b \sin^2 a\omega_0 - a \sin^2 b\omega_0\big)^{-\frac{1}{2}}.$$

Неважко переконатися, що $Y(x;\omega_0,\alpha)$ є власною функцією оператора $A(\alpha,\Psi)$, яка відповідає власній частоті ω_0. □

Автор висловлює щиру подяку Ю. Д. Головатому за формулювання задачі та увагу, виявлену під час підготовки статті. Автор також вдячний рецензенту за критичні зауваження та цінні поради, які вдосконалити текст статті.

---

1. *Albeverio S.* Solvable models in quantum mechanics. With an appendix by Pavel Exner. 2nd revised ed. / *Albeverio S., Gesztesy F., Høegh-Krohn R., Holden H.* – Providence, RI: AMS Chelsea Publishing, 2005.
2. *Albeverio S.* Singular perturbations of differential operators and solvable Schrödinger type operators / *S. Albeverio, P. Kurasov* – Cambridge: Univ. Press, 2000.
3. *Березин Ф.А.* Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом / *Березин Ф.А, Фадеев Л.Д.* // Докл. АН СССР. – 1961. – Т. 137. – С. 1011-1015.
4. *Ćurgus B.* A Krein space approach to symmetric ordinary differential operators with an indefinite weigth function / *Ćurgus B., Langer H.* // J. Diff. Eq. – 1989. – Vol. 79, №1. – P. 31-61.
5. *Šeba P.* Some remarks on the δ'-interaction in one dimension / *Šeba P.* // Rep. Math. Phys. – 1986. – Vol. 24, №1. – P. 111–120.
6. *Grossmann A.* A class of explicitly soluble, local, many-center Hamiltonians fot one-particle quantum mechanics in two and three dimensions / *Grossmann A., Høegh-Krohn R., Mebkhout M.* // J. Math. Phys. – 1980. – Vol. 21, №9. – P. 2376-2385.
7. *Gesztesy F.* A new class of solvable models in quantum mechanics describing point interactions on the line / *Gesztesy F., Holden H.* // J. Phys. – 1987. – Vol. A20 – P. 5157-5177.
8. *Головатий Ю.Д.* Оператор Шредінґера з δ'-потенціалом / *Головатий Ю.Д., Манько С.С.* // Доп. НАНУ. –2009. – №5.– С. 16-21.
9. *Головатий Ю.Д.* Точні моделі для операторів Шредінґера з δ'-подібними потенціалами / *Головатий Ю.Д., Манько С.С.* // Укр. матем. вісник. –2009. – Т. 6, №2.– С. 173-207.

10. *Нижник Л.П.* Оператор Шрёдингера с δ'-взаимодействием / *Нижник Л.П.* // Функц. анализ и его прил. – 2003. – Т. 37, №1. – С. 85–88.
11. *Derkach V.A.* Generalized resolvents and the boundary value problems for Hermitian operators with gaps / *Derkach V.A., Malamud M.M.* // J. Funct. Anal. – 1991. – Vol. 95, №1. – P. 1–95.
12. *Кочубей А.Н.* Симметрические операторы и неклассические спектральные задачи / *Кочубей А.Н.* // Матем. Заметки. – 1979. – Т. 25, №3. – С. 425–434.
13. *Koshmanenko V.D.* Towards the rank one singular perturbations theory of selfadjoint operators / *Koshmanenko V.D.* // Ukrainian Math. J. – 1991. – Vol. 43, №11. – P. 1559-1566.
14. *Нижник Л.П.* Одномерный оператор Шрёдингера с точечными взаимодействиями в пространствах Соболева / *Нижник Л.П.* // Функц. анализ и его прил. – 2006. – Т. 40, №2. – С. 74–79.
15. *Kurasov P.* On the δ'-interactions in one dimension / *Kurasov P., Elander N.* – Prepr. MSI 93-7, ISSN-1100-214X, Stockholm, Sweden, 1993.
16. *Christiansen P.L.* On the existence of resonances in the transmission probability for interactions arising from derivatives of Dirac's delta function / *Christiansen P.L., Arnbak H.C., Zolotaryuk A.V., Ermakov V.N., Gaididei Y.B.* // J. Phys. A. – 2003. – Vol. 36. – P. 7589-7600.
17. *Zolotaryuk A.V.* Two-parametric resonant tunneling across the $\delta'(x)$ potential / *Zolotaryuk A.V.* // Adv. Sci. Lett. – 2008. – Vol. 1. – P. 187-191.
18. *Toyama F.* Transmission-reflection problem with a potential of the form of the derivative of the delta function / *Toyama F., NogamiY.* // J. Phys. A – 2007. – Vol. 40. – P. F685-F690.

ON SCHRÖDINGER AND STURM-LIOUVILLE OPERATORS WITH δ'-POTENTIALS

Stepan MAN'KO

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: s_manko@franko.lviv.ua

Solvable models of quantum mechanics, where the one-dimensional Schrödinger operator with the pseudopotential $\alpha\delta'(x)$ appears, are considered. In the paper spectral properties and the asymptotic behavior of transmission coefficients of the Hamiltonians perturbed by the short-range potentials $\alpha\varepsilon^{-2}\Psi(\varepsilon^{-1}x)$, which converge to $\alpha\delta'(x)$ as $\varepsilon \to 0$ in the space of distributions, are studied. It has been proved that the solvable model depends on the method of regularization, that is to say, it depends on profile Ψ. The resonant phenomenon for the probability of transmission through δ'-potential is discovered. It has been investigated the asymptotic behavior of spectrum and pure states for the Sturm-Liouville operator with the local perturbation in the potential of the type $\alpha\varepsilon^{-2}\Psi(\varepsilon^{-1}x)$.

Key words: Schrödinger operator, solvable models, δ'-potential, resonant set, coupling function.

ОБ ОПЕРАТОРАХ ШРЁДИНГЕРА И ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С δ'-ПОТЕНЦИАЛАМИ

Степан МАНЬКО

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: s_manko@franko.lviv.ua

Рассмотрено модели квантовой механики, в которых возникает одномерный оператор Шрёдингера с псевдопотенциалом $\alpha\delta'(x)$, где $\delta(x)$ – функция Дирака. Изучены спектральные свойства и поведение коэффициентов рассеяния для семейства регуляризированых гамильтонианов с потенциалами вида $\alpha\varepsilon^{-2}\Psi(\varepsilon^{-1}x)$, которые при $\varepsilon \to 0$ сходятся к $\alpha\delta'(x)$ в топологии обобщенных функций. Доказано, что реализация точной модели зависит от метода регуляризации, а именно, профиля Ψ. Доказано существование эффекта резонанса для вероятности проникновения сквозь $\alpha\delta'$-барьер. Исследовано предельное поведение спектра и чистых состояний оператора Штурма-Лиувилля с локальным возмущением потенциала вида $\alpha\varepsilon^{-2}\Psi(\varepsilon^{-1}x)$.

Ключевые слова: оператор Шрёдингера, точные модели, δ'-потенциал, резонансное множество, функция связи.

Стаття надійшла до редколегії 27.03.2009

Прийнята до друку 16.12.2009

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2009. *Ser. Mech. Math. 2009.*
Вип. 71. С. 156–174 *Is. 71. P. 156–174*

УДК 517.95

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛІНІЙНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНО-ПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ В НЕОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ

Максим НЕЧЕПУРЕНКО

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: m.nechepurenko@mfc.in.ua

Розглянуто нелінійну зв'язну еволюційну гіперболічно-параболічну систему в необмеженій за просторовими змінними області. Одержано умови існування та єдиності узагальненого розв'язку. Розширено наші попередні результати [8] до необмеженої області. Класи існування та єдиності є просторами локально інтегровних функцій.

Ключові слова: нелінійна система, мішана задача.

Мішані та крайові задачі для лінійних систем зв'язаних гіперболічно-параболічних рівнянь розглянуто в працях [1]-[3]. Праця [1] містить дослідження мішаної задачі для квазілінійних еволюційних систем зі сталими коефіцієнтами в обмеженій області. Знайдено умови за яких розв'язок таких задач існує та єдиний, також досліджено асимптотичну поведінку повної енергії, асоційованої зі слабким розв'язком. У [3] показано існування та єдиність розв'язку мішаної задачі, асоційованої з нелінійною системою. У праці [5] досліджено квазілінійну систему термопружності та показано, що енергія довільного слабкого розв'язку вибухає за скінченний час, якщо початкова енергія від'ємна.

Нелінійність $|v|^\rho v$ часто виникає в релятивістській квантовій механіці (див. Шифф [11], Сегал [12]), і розглядають її багато авторів для гіперболічних, параболічних і еліптичних рівнянь. Ліонс [15] досліджував хвильове рівняння з такою нелінійністю, тобто $|v|^\rho v$ в гладкій обмеженій і відкритій області Ω з простору $\mathbb{R}^n$ для $n \in \mathbb{N}$ і довів існування та єдиність розв'язку за допомогою методу Фаедо-Гальоркіна та методу компактності. Кларк в [2] розглядав систему зі сталими коефіцієнтами й однорідними умовами на межі Γ. Він довів існування глобального сильного та слабкого розв'язку за методом Фаедо-Гальоркіна, використовуючи спеціальну базу в просторі $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$, також показав стійкість повної енергії асоційованої зі слабким розв'язком, використовуючи метод Коморніка-Зузи [10].

У цій праці в необмеженій області розглянуто мішану задачу для нелінійної еволюційної системи, яка, зокрема, містить нелінійні доданки зі степенями $p,q\in(1,2]$, використано метод введення параметра для дослідження еволюційних рівнянь (див., наприклад, [13]-[14]).

1. Формулювання задачі. Нехай Ω – необмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\Omega\in C^1$; $Q_\tau=(0,\tau)\times\Omega,\ 0<\tau\leqslant T;\ S_T=(0,T)\times\partial\Omega;\ \Omega_\tau=Q_T\cap\{t=\tau\}$. В області Q_T розглянемо систему

$$A_1(u,\theta)\equiv u_{tt}-\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(t,x)u_{x_i})_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}a_i(t,x)u_{x_i}+\sum_{i=1}^{n}b_i(t,x)\theta_{x_i}+ \\ +\alpha_0(t,x)u+\alpha_1(t,x)\theta+\gamma_1(t,x)|u_t|^{p-2}u_t=f_1(t,x), \tag{1}$$

$$A_2(u,\theta)\equiv \theta_t-\sum_{i,j=1}^{n}(c_{ij}\theta_{x_i})_{x_j}-\sum_{i=1}^{n}(c_i(t,x)u_t)_{x_i}+\sum_{i=1}^{n}d_i(t,x)u_{x_i}+\sum_{i=1}^{n}e_i(t,x)\theta_{x_i}+ \\ +\beta_0(t,x)u+\beta_1(t,x)\theta+\gamma_2(t,x)|\theta|^{q-2}\theta=f_2(t,x), \tag{2}$$

з початковими умовами

$$u(0,x)=u_0(x),\quad u_t(0,x)=u_1(x),\quad \theta(0,x)=\theta_0(x)\quad \text{на}\quad \Omega. \tag{3}$$

Крім початкових умов (3), задамо для системи (1)-(2) крайові умови вигляду

$$u(t,x)=0,\quad \theta(t,x)=0\quad \text{на}\quad S_T. \tag{4}$$

Для спрощення викладення припускатимемо, що $\Omega_R=\Omega\cap\mathcal{B}_R$ є областю для всіх $R>R_0>0$, регулярною в сенсі Кальдерона [7, с. 44], $\mathcal{B}_R=\{x\in\mathbb{R}^n:\ |x|<R\}$. Позначимо $Q_{\tau,R}=(0,\tau)\times\Omega_R,\ \tau\in(0,T];\ \Omega_{\tau,R}=Q_{T,R}\cap\{t=\tau\};\ S_{\tau,R}=(0,\tau)\times\partial\Omega_{\tau,R}$.

Введемо простори

$$L^r_{loc}(\overline{\Omega})=\{v\ :\ v\in L^r(\Omega_R),\ \forall\, R>R_0\},\quad r\in[1,+\infty],$$
$$H^1_{0,loc}(\overline{\Omega})=\{v\ :\ v\in H^1(\Omega_R),\ u\big|_{\partial\Omega\cap\mathcal{B}_R}=0\ \ \forall\, R\geqslant R_0\},$$
$$H^2_{loc}(\overline{\Omega})=\{v\ :\ v\in H^2(\Omega_R),\ \ \forall\, R\geqslant R_0\}.$$

Припустимо, що для коефіцієнтів системи (1) - (2) виконуються такі умови:

(A): $a_{ij},a_{ijt}\in L^\infty(Q_T),\ a_{ij}(t,x)=a_{ji}(t,x)$ майже всюди в Q_T, $i,j\in\{1,\dots,n\}$;

$$a_0|\xi|^2\leqslant\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j\leqslant a^0|\xi|^2$$

майже для всіх $(t,x)\in Q_T$ і для всіх $\xi\in\mathbb{R}^n$, a_0 і a^0 – додатні константи;

(C): $c_{ij},c_{ijt}\in L^\infty(Q_T)$, $i,j\in\{1,\dots,n\}$;

$$c_0|\xi|^2\leqslant\sum_{i,j=1}^{n}c_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j\leqslant c^0|\xi|^2$$

майже для всіх $(t,x)\in Q_T$ і для всіх $\xi\in\mathbb{R}^n$, c_0 і c^0 – додатні константи;

(D): $a_i,\ ,a_{it},\ b_i,\ b_{it},\ c_i,\ c_{it},\ d_i,\ d_{it},\ e_i,\ e_{it}\in L^\infty(Q_T)$;

(E): $\alpha_0, \alpha_{0t}, \alpha_1, \beta_0, \beta_1 \in L^\infty(Q_T)$;

(G): $\gamma_1, \gamma_2 \in L^\infty(Q_T)$; $\gamma_1(t,x) \geqslant \tilde{\gamma}_1, \gamma_2(t,x) \geqslant \tilde{\gamma}_2$ майже всюди в Q_T, $\tilde{\gamma}_1$ і $\tilde{\gamma}_2$ – додатні константи; $p > 1$, $q > 1$, $\min\{p,q\} \leqslant 2$.

Нехай $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$, $\Phi(\eta) = 1$ при $\eta \leqslant 0$, $\Phi(\eta) = 0$ при $\eta \geqslant 1$ і $0 \leqslant \Phi(\eta) \leqslant 1$ при $\eta \in \mathbb{R}$.

Приймемо

$$h_R(x) = \Phi\left(\frac{|x| - R}{\chi}\right), \quad \text{де} \quad \chi > 0,$$
$$\omega_R(x) = [h_R(x)]^\gamma, \quad \gamma > 2.$$

Тоді $\omega_R(x) = 1$ при $|x| \leqslant R$, $\omega_R(x) = 0$ при $|x| \geqslant R + \chi$, $0 \leqslant \omega_R(x) \leqslant 1$ при $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|\omega_{R,x_i}(x)| \leqslant \gamma \frac{d}{\chi}\,[h_R(x)]^{\gamma - 1}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad i = \{1, \dots, n\}, \quad d = \mathrm{const} > 0.$$

Вважатимемо, що праві частини системи (1)-(2) і початкові функції в (3) задовольняють умову (**F**), якщо:

$f_j, f_{jt} \in L^2(0,T; L^2_{loc}(\overline{\Omega}))$ $j \in \{1,2\}$, $u_0 \in H^1_{0,loc}(\overline{\Omega}) \cap H^2_{loc}(\overline{\Omega})$,

$u_1 \in H^1_{0,loc}(\overline{\Omega}) \cap L^{2(p-1)}_{loc}(\overline{\Omega})$, $\theta_0 \in H^1_{0,loc}(\overline{\Omega}) \cap L^{2(q-1)}_{loc}(\overline{\Omega})$.

Для компактності записів введемо позначення $V_1 = L^2(0,T; H^1_{0,loc}(\overline{\Omega})) \cap C(0,T; L^2_{loc}(\overline{\Omega}))$, $V_2 = V_1 \cap L^p(0,T; L^p_{loc}(\overline{\Omega}))$, $V_3 = V_1 \cap L^q(0,T; L^q_{loc}(\overline{\Omega}))$.

Означення 1. *Пару функцій $\{u, \theta\}$, які задовольняють включення $u \in V_1$, $u_t \in V_2$, $\theta \in V_3$ називатимемо сильним узагальненим розв'язком задачі (1)-(4), якщо вона є границями у відповідних просторах послідовностей $\{u^k\}$, $\{\theta^k\}$ таких, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ функції $u^k \in V_1$, $u^k_t \in V_2$, $u^k_{tt} \in L^2(0,T; L^2_{loc}(\overline{\Omega}))$, $\theta^k \in V_3$, $\theta^k_t \in L^2(0,T; L^2_{loc}(\overline{\Omega}))$ і для довільного $k \in \mathbb{N}$ пара функцій $\{u^k, \theta^k\}$ задовольняє систему*

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega_\tau} u^k_t v\, dx - \int\limits_{\Omega_0} u^k_1(x) v\, dx + \int\limits_{Q_\tau} \Big[-u^k_t v_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x) u^k_{x_i} v_{x_j} + \\
&\quad + \sum_{i=1}^n a_i(t,x) u^k_{x_i} v + \sum_{i=1}^n b_i(t,x) \theta^k_{x_i} v + \alpha_0(t,x) u^k v + \alpha_1(t,x) \theta^k v + \\
&\quad + \gamma_1(t,x) |u^k_t|^{p-2} u^k_t v\Big]\, dx\, dt = \int\limits_{Q_\tau} f^k_1(t,x) v\, dx\, dt,
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega_\tau} \theta^k w\, dx - \int\limits_{\Omega_0} \theta^k_0(x) w\, dx + \int\limits_{Q_\tau} \Big[-\theta^k w_t + \sum_{i,j=1}^n c_{ij}(t,x) \theta^k_{x_i} w_{x_j} + \sum_{i=1}^n c_i(t,x) u^k_t w_{x_i} + \\
&\quad + \sum_{i=1}^n d_i(t,x) u^k_{x_i} w + \sum_{i=1}^n e_i(t,x) \theta^k_{x_i} w + \beta_0(t,x) u^k w + \beta_1(t,x) \theta^k w + \\
&\quad + \gamma_2(t,x) |\theta^k|^{q-2} \theta^k w\Big]\, dx\, dt = \int\limits_{Q_\tau} f^k_2(t,x) w\, dx\, dt,
\end{aligned} \tag{6}$$

для всіх $\tau \in (0,T]$ *і для довільних функцій* $v, w \in C^\infty(0,T; C_0^\infty(\Omega))$ *таких, що* $\operatorname{supp} v \in Q_{T,k}$ *і* $\operatorname{supp}\ w \in Q_{T,k}$*, де функції* f_j^k*,* u_0^k*,* u_1^k*,* θ_0^k *задовольняють умову* (**F**) *і*

$$
\begin{aligned}
&f_j^k \to f_j \quad \text{в} \quad L^2(0,T; L^2_{loc}(\overline{\Omega})) \quad j \in \{1,2\},\\
&u_0^k \to u_0 \quad \text{в} \quad H^1_{0,loc}(\overline{\Omega}),\\
&u_1^k \to u_1 \quad \text{в} \quad L^2_{loc}(\overline{\Omega}),\\
&\theta_0^k \to \theta_0 \quad \text{в} \quad L^2_{loc}(\overline{\Omega}), \quad k \to \infty,
\end{aligned} \tag{7}
$$

і початкову умову $u(0,x) = u_0(x)$*.*

2. Існування розв'язку. Доведемо теорему існування розв'язку для випадку $\max\{p,q\} \leqslant 2$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* (**A**), (**C**), (**D**), (**E**), (**G**) *і, крім того,* $f_i \in L^2(0,T; L^2_{loc}(\overline{\Omega}))$*,* $i \in \{1,2\}$*,* $u_0 \in H^1_{0,loc}(\overline{\Omega})$*,* $u_1 \in L^2_{loc}(\overline{\Omega})$*,* $\theta_0 \in L^2_{loc}(\overline{\Omega})$*,*

$$
\int\limits_{\Omega_R} \left[|u_0(x)|^2 + |\nabla u_0(x)|^2 + |u_1(x)|^2 + |\theta_0(x)|^2\right]\, dx +
$$

$$
+ \int\limits_{Q_{T,R}} \sum_{j=1}^{2} |f_j(t,x)|^2\, dx\, dt \leqslant 2a \exp\{bR^2\} \quad \forall\, R > R_0 + 1 > 0,
$$

де a, b *– деякі додатні сталі. Тоді існує таке* $T_0 \leqslant T$*, що задача (1)-(4) має сильний узагальнений розв'язок задачі в області* Q_{T_0}*.*

Доведення. Нехай $\{f_i^k\}$, $i \in \{1,2\}$, u_0^k, u_1^k, θ_0^k такі послідовності функцій, що кожний член цих послідовностей задовольняє умову (**F**) і виконуються умови (7).

Нехай $R = R(k) = 2^k > R_0 + 1$. В області $Q_{T,R(k)}$ розглянемо систему рівнянь

$$
A_1(u,\theta) = f_1^{k,R(k)}(t,x), \tag{8}
$$

$$
A_2(u,\theta) = f_2^{k,R(k)}(t,x), \quad (t,x) \in Q_{T,R(k)}, \tag{9}
$$

з початковими умовами

$$
u(0,x) = u_0^{k,R(k)}(x),\ u_t(0,x) = u_1^{k,R(k)}(x), \quad \theta(0,x) = \theta_0^{k,R(k)}(x), \quad x \in \Omega_{R(k)}, \tag{10}
$$

і крайовими умовами

$$
u\big|_{S_{T,R(k)}} = 0, \quad \theta\big|_{S_{T,R(k)}} = 0, \tag{11}
$$

де

$$
f_i^{k,R(k)}(t,x) = \begin{cases} f_i^k(t,x), & (t,x) \in Q_{T,R(k)};\\ 0, & (t,x) \in Q_T \setminus Q_{T,R(k)}, \end{cases} \qquad i = 1,2.
$$

Тут $u_0^{k,R(k)}(x) = u_0^k(x)\xi_{R(k)}(x)$, $u_1^{k,R(k)}(x) = u_1^k(x)\xi_{R(k)}(x)$, $\theta_0^{k,R(k)}(x) = \theta_0^k(x)\xi_{R(k)}(x)$, де ξ^R – функція зрізки така, що $\xi^R \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $\xi_k^R(x) = 1$ при $|x| \leqslant R - 1$, $\xi^R(x) = 0$ при $|x| \geqslant R$, і $0 \leqslant \xi^R(x) \leqslant 1$ при $x \in \mathbb{R}^n$.

У праці [8] доведено, що при виконанні умов (**A**), (**C**), (**D**), (**E**), (**G**) існує узагальнений розв'язок (u^R, θ^R) задачі (8)-(11) з такими властивостями:

$u^R \in L^\infty(0,T; H^1_{0,loc}(\Omega_R))$, $u_t^R \in L^\infty(0,T; H^1_0(\Omega_R)) \cap L^p(0,T; L^p(\Omega_R))$,

$u_{tt}^R \in L^2(Q_{T,R})$, $\theta^R \in L^\infty(0,T;H^1_{0,loc}(\Omega_R)) \cap L^q(0,T;L^q(\Omega_R))$, $\theta_t^R \in L^2(Q_{T,R})$. Крім того, функції u^R, θ^R задовольняють систему рівностей

$$\int\limits_{\Omega_\tau} u_t^R v\,dx - \int\limits_{\Omega_0} u_1^R(x) v\,dx + \int\limits_{Q_\tau} \Big[-u_t^R v_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x) u_{x_i}^R v_{x_j} + \\ + \sum_{i=1}^n a_i(t,x) u_{x_i}^R v + \sum_{i=1}^n b_i(t,x)\theta_{x_i}^R v + \alpha_0(t,x) u^R v + \\ + \alpha_1(t,x)\theta^R v + \gamma_1(t,x)|u_t^R|^{p-2} u_t^R v \Big]\,dx\,dt = \int\limits_{Q_\tau} f_1^R(t,x) v\,dx\,dt, \tag{12}$$

$$\int\limits_{Q_\tau} \Big[\theta_t^R w + \sum_{i,j=1}^n c_{ij}(t,x)\theta_{x_i}^R w_{x_j} + \sum_{i=1}^n c_i(t,x) u_t^R w_{x_i} + \sum_{i=1}^n d_i(t,x) u_{x_i}^R w + \\ + \sum_{i=1}^n e_i(t,x)\theta_{x_i}^R w + \beta_0(t,x) u^R w + \beta_1(t,x)\theta^R w + \\ + \gamma_2(t,x)|\theta^R|^{q-2}\theta^R w \Big]\,dx\,dt = \int\limits_{Q_\tau} f_2^R(t,x) w\,dx\,dt \tag{13}$$

для довільних $\tau \in (0,T]$ і довільних функцій $v \in L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega_R)) \cap L^p(0,T;L^p(\Omega_R))$, $w \in L^\infty(0,T;H^1_{0,loc}(\Omega_R)) \cap L^q(0,T;L^q(\Omega_R))$.

Продовжимо функції $u^{R(k)}$, $\theta^{R(k)}$ нулем на область $Q_T \setminus Q_{T,R(k)}$ і позначимо їх, відповідно, u^k, θ^k. Тоді для цих функцій будуть правильні рівності (5), (6), відповідно з вільними частинами $f_i^{k,R(k)}$, $i \in \{1,2\}$ і початковими умовами $u_0^{k,R(k)}$, $u_1^{k,R(k)}$, $\theta_0^{k,R(k)}$.

Нехай $R = R(l) = 2^l > R_0 + 1$. Підставимо (u^k, θ^k) і (u^l, θ^l) в інтегральну систему рівностей (5)-(6), віднімемо відповідні рівняння і за пробні функції візьмемо $v = u_t^{k,\,l}\omega_R e^{-\lambda t}$, $w = \theta^{k,\,l}\omega_R e^{-\lambda t}$, де $u^{k,\,l} = (u^k - u^l)$, $\theta^{k,\,l} = (\theta^k - \theta^l)$, $\lambda > 0$, а R деяке фіксоване число таке, що $R > R_0 + 1$ і $R < \min\{R(k), R(l)\}$. Тоді одержимо рівності

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |u_t^{k,\,l}|^2 \omega_R e^{-\lambda t}\,dx + \int\limits_{Q_\tau} \Big[\frac{\lambda}{2}|u_t^{k,\,l}|^2\omega_R + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x) u_{x_i}^{k,\,l} u_{x_j t}^{k,\,l}\omega_R + \\ + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x) u_{x_i}^{k,\,l} u_t^{k,\,l}\omega_{R x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(t,x) u_{x_i}^{k,\,l} u_t^{k,\,l}\omega_R + \\ + \sum_{i=1}^n b_i(t,x)\theta_{x_i}^{k,\,l} u_t^{k,\,l}\omega_R + \alpha_0(t,x) u^{k,\,l} u_t^{k,\,l}\omega_R + \alpha_1(t,x)\theta^{k,\,l} u_t^{k,\,l}\omega_R + \\ + \gamma_1(t,x)\left[|u_t^k|^{p-2} u_t^k - |u_t^l|^{p-2} u_t^l \right] u_t^{k,\,l}\omega_R \Big] e^{-\lambda t}\,dx\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} |u_1^{k,R(k)} - u_1^{l,R(l)}|^2 \omega_R\, dx + \int\limits_{Q_\tau} (f_1^{k,R(k)} - f_1^{l,R(l)}) u_t^{k,\,l} \omega_R e^{-\lambda t}\, dx\, dt, \tag{14}$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |\theta^{k,\,l}|^2 \omega_R e^{-\lambda t}\, dx + \int\limits_{Q_\tau} \Big[\frac{\lambda}{2}|\theta^{k,\,l}|^2\omega_R + \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(t,x)\theta^{k,\,l}_{x_i}\theta^{k,\,l}_{x_j}\omega_R +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(t,x)\theta^{k,\,l}_{x_i}\theta^{k,\,l}\omega_{Rx_j} + \sum_{i=1}^{n} c_i(t,x)u_t^{k,\,l}\theta^{k,\,l}_{x_i}\omega_R + \sum_{i=1}^{n} c_i(t,x)u_t^{k,\,l}\theta^{k,\,l}\omega_{Rx_i} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} d_i(t,x)u^{k,\,l}_{x_i}\theta^{k,\,l}\omega_R + \sum_{i=1}^{n} e_i(t,x)\theta^{k,\,l}_{x_i}\theta^{k,\,l}\omega_R + \beta_0(t,x)u^{k,\,l}\theta^{k,\,l}\omega_R +$$
$$+ \beta_1(t,x)\theta^{k,\,l}\theta^{k,\,l}\omega_R + \gamma_2(t,x)\left[|\theta^k|^{q-2}\theta^k - |\theta^l|^{q-2}\theta^l\right]\theta^{k,\,l}\omega_R\Big] e^{-\lambda t}\, dx\, dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} |\theta_0^{k,R(k)} - \theta_0^{l,R(l)}|^2 \omega_R\, dx + \int\limits_{Q_\tau} (f_2^{k,R(k)} - f_2^{l,R(l)})\theta^{k,\,l}\omega_R e^{-\lambda t}\, dx\, dt, \tag{15}$$

для всіх $\tau \in (0,T]$.

Оцінимо кожний доданок системи (14) - (15). На підставі умови (**A**)

$$I_1^a = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)u^{k,\,l}_{x_i}u^{k,\,l}_{x_j t}\omega_R(x)e^{-\lambda t}\, dx\, dt \geqslant \frac{a_0}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |\nabla u^{k,\,l}|^2\omega_R(x)e^{-\lambda t}\, dx -$$
$$- \frac{a_2}{2}\int\limits_{\Omega_0} |\nabla u_0^{k,R(k)} - \nabla u_0^{l,R(l)}|^2\omega_R(x)\, dx - \frac{a_1}{2}\int\limits_{Q_\tau} |\nabla u^{k,\,l}|^2\omega_R(x)e^{-\lambda t}\, dx\, dt +$$
$$+ \frac{\lambda a_0}{2}\int\limits_{Q_\tau} |\nabla u^{k,\,l}|^2\omega_R(x)e^{-\lambda t}\, dx\, dt,$$

де $a_1 = \operatorname{ess\,sup}\limits_{Q_T}\sum\limits_{i,j}^{n}|a_{ijt}(t,x)|^2$, $a_2 = \operatorname{ess\,sup}\limits_{Q_T}\sum\limits_{i,j}^{n}|a_{ij}(0,x)|^2$. Відповідно до умов (**A**), (**D**)

$$I_2^a = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)u^{k,\,l}_{x_i}u^{k,\,l}_t\omega_R(x)_{x_j}e^{-\lambda t}\, dx\, dt \leqslant \frac{\delta_0^a}{2}\int\limits_{Q_\tau} |\nabla u^{k,\,l}|^2\omega_R(x)e^{-\lambda t}\, dx\, dt +$$
$$+ \frac{a^0 n\gamma^2 d^2}{2\delta_0^a\chi^2}\int\limits_{Q_\tau} [h_R(x)]^{\gamma-2}\, |u_t^{k,\,l}|^2 e^{-\lambda t}\, dx\, dt, \quad \delta_0^a > 0.$$

Далі, для довільної константи $\delta_1^a > 0$

$$I_3^a = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)u^{k,\,l}_{x_i}u^{k,\,l}_t\omega_R(x)e^{-\lambda t}\, dx\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} \left[\nu_a\delta_1^a|\nabla u^{k,\,l}|^2 + \frac{1}{\delta_1^a}|u_t^{k,\,l}|^2\right]\omega_R(x)e^{-\lambda t}\, dx\, dt.$$

За умовою (**D**) і для довільної $\delta_2^a > 0$

$$I_4^a = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\theta_{x_i}^{k,\,l} u_t^{k,\,l} \omega_R(x) e^{-\lambda t}\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} \left[\nu_b \delta_2^a |\nabla\theta^{k,\,l}|^2 + \frac{1}{\delta_2^a}|u_t^{k,\,l}|^2\right] \omega_R(x) e^{-\lambda t}\,dx\,dt.$$

Зважаючи на умови теореми

$$I_5^a = \int\limits_{Q_\tau} \alpha_0(t,x) u^{k,\,l} u_t^{k,\,l} \omega_R(x) e^{-\lambda t}\,dx\,dt \geqslant -\frac{1}{2}\delta^a \int\limits_{Q_\tau} |u_t^{k,\,l}|^2 \omega_R(x) e^{-\lambda t}\,dx\,dt -$$

$$-\frac{\nu_{\alpha_0}}{2}\int\limits_{\Omega_0} |u_0^{k,R(k)} - u_0^{l,R(l)}|^2 \omega_R(x)\,dx,\ \delta^a > 0,$$

оскільки правильна нерівність

$$\int\limits_{Q_\tau} |u^{k,\,l}|^2 \omega_R(x) e^{-\lambda \tau}\,dx\,dt \leqslant c_1 \int\limits_{\Omega_0} |u_0^{k,R(k)} - u_0^{l,R(l)}|^2 \omega_R(x)\,dx +$$

$$+ c_2 \int\limits_{Q_\tau} |u_t^{k,\,l}|^2 \omega_R(x) e^{-\lambda t}\,dx\,dt, \tag{16}$$

де c_1, c_2 константи, які залежать від T.

Легко отримати таку оцінку, враховуючи довільність $\delta_3^a > 0$

$$I_6^a = \int\limits_{Q_\tau} \alpha_1(t,x)\theta^{k,\,l} u_t^{k,\,l} \omega_R(x) e^{-\lambda t}\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} \left[\nu_{\alpha_1} \delta_3^a |\theta^{k,\,l}|^2 + \frac{1}{\delta_3^a}|u_t^{k,\,l}|^2\right] \omega_R(x) e^{-\lambda t}\,dx\,dt.$$

Використовуючи відому нерівність, отримаємо

$$I_7^a = \int\limits_{Q_\tau} \gamma_1(t,x)\left[|u_t^k|^{p-2}u_t^k - |u_t^l|^{p-2}u_t^l\right](u_t^k - u_t^l)\omega_R(x) e^{-\lambda t}\,dx\,dt \geqslant 0, \quad p \in (1,2].$$

Сталі $\nu_a = \max\limits_i \operatorname{ess\,sup}_{Q_T} |a_i(t,x)|^2$, $\nu_b = \max\limits_i \operatorname*{ess\,sup}\limits_{Q_T} |b_i(t,x)|^2$, $\nu_{\alpha_0} = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{Q_T} |\alpha_0(t,x)|^2$, $\nu_{\alpha_1} = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{Q_T} |\alpha_1(t,x)|^2$.

Зазначимо, що

$$I_8^a = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} |u_1^{k,R(k)} - u_1^{l,R(l)}|^2 \omega_R(x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega_0} \left[|u_1^{k,R(k)} - u_1|^2 + |u_1 - u_1^{l,R(l)}|^2\right] \omega_R(x)\,dx.$$

Далі

$$I_9^a = \int\limits_{Q_\tau} (f_1^{k,R(k)} - f_1^{l,R(l)}) u_t^{k,\,l} \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} \Big[(f_1^{k,R(k)} - f_1)^2 + (f_1 - f_1^{l,R(l)})^2 \Big] \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt + \int\limits_{Q_\tau} |u_t^{k,\,l}|^2 \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt.$$

Перетворимо кожний доданок рівності (15), використавши умови теореми. Згідно з умовою (**C**)

$$I_1^c = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j}^{n} c_{ij}(t,x) \theta_{x_i}^{k,\,l} \theta_{x_j}^{k,\,l} \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt \geqslant c_0 \int\limits_{Q_\tau} |\nabla \theta^{k,\,l}|^2 \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt.$$

Використаємо умову (**D**) для оцінки таких доданків:

$$I_2^c = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(t,x) \theta_{x_i}^{k,\,l} \theta^{k,\,l} \omega_R(x)_{x_j} e^{-\lambda t}\, dx\, dt \leqslant \frac{\delta_0^c}{2} \int\limits_{Q_\tau} |\nabla \theta^{k,\,l}|^2 \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt +$$

$$+ \frac{c^0 n \gamma^2 d^2}{2\delta_0^c \chi^2} \int\limits_{Q_\tau} [h_R(x)]^{\gamma-2} |\theta^{k,\,l}|^2 e^{-\lambda t}\, dx\, dt, \quad \delta_0^c > 0,$$

$$I_3^c = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} c_i(t,x) u_t^{k,\,l} \theta^{k,\,l} \omega_R(x)_{x_i} e^{-\lambda t}\, dx\, dt \leqslant \frac{\nu_c \delta_1^c}{2} \int\limits_{Q_\tau} |u^{k,\,l}|^2 \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt +$$

$$+ \frac{\nu_c n \gamma^2 d^2}{2\delta_1^c \chi^2} \int\limits_{Q_\tau} [h_R(x)]^{\gamma-2} |\theta^{k,\,l}|^2 e^{-\lambda t}\, dx\, dt, \quad \delta_1^c > 0.$$

Далі, зважаючи на (**E**), одержимо нерівності

$$I_4^c = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} c_i(t,x) u_t^{k,\,l} \theta_{x_i}^{k,\,l} \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} \left[\nu_c \delta_2^c |\nabla \theta^{k,\,l}|^2 + \frac{1}{\delta_2^c} |u_t^{k,\,l}|^2 \right] \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt,$$

$$I_5^c = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} d_i(t,x) u_{x_i}^{k,\,l} \theta^{k,\,l} \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} \left[\nu_d \delta_3^c |\nabla u^{k,\,l}|^2 + \frac{1}{\delta_3^c} |\theta^{k,\,l}|^2 \right] \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt,$$

$$I_6^c = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} e_i(t,x) \theta_{x_i}^{k,\,l} \theta^{k,\,l} \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left[\nu_e\delta_4^c|\nabla\theta^{k,\,l}|^2+\frac{1}{\delta_4^c}|\theta^{k,\,l}|^2\right]\omega_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt,$$

$$I_7^c=\int\limits_{Q_\tau}\beta_0(t,x)u^{k,\,l}\theta^{k,\,l}\omega_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left[\nu_{\beta_0}\delta_5^c|u^{k,\,l}|^2+\frac{1}{\delta_5^c}|\theta^{k,\,l}|^2\right]\omega_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt,$$

$$I_8^c=\int\limits_{Q_\tau}\beta_1(t,x)|\theta^{k,\,l}|^2\omega_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt\leqslant\int\limits_{Q_\tau}\nu_{\beta_1}|\theta^{k,\,l}|^2\omega_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt,$$

$$I_9^c=\int\limits_{Q_\tau}\gamma_2(t,x)\left[|\theta^k|^{q-2}\theta^k-|\theta^l|^{q-2}\theta^l\right](\theta^k-\theta^l)\omega_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt\geqslant 0,\quad q\in(1,2]$$

Сталі $\delta_l^c>0$, $l\in\{2,\dots,5\}$, а $\nu_c,\nu_d,\nu_e,\nu_{\beta_0},\nu_{\beta_1}$ залежать від функцій $c_i,d_i,e_i,\beta_0,\beta_1$ і визначені так:

$$\nu_c=\max_i\operatorname*{ess\,sup}_{Q_T}|c_i(t,x)|^2,\quad \nu_d=\max_i\operatorname*{ess\,sup}_{Q_T}|d_i(t,x)|^2,\quad \nu_e=\max_i\operatorname*{ess\,sup}_{Q_T}|e_i(t,x)|^2,$$

$$\nu_{\beta_0}=\operatorname*{ess\,sup}_{Q_T}|\beta_0(t,x)|^2,\quad \nu_{\beta_0}=\operatorname*{ess\,sup}_{Q_T}|\beta_0(t,x)|^2.$$

Враховуючи попередні оцінки, одержуємо

$$I_{10}^c=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}|\theta_0^{k,R(k)}-\theta_0^{l,R(l)}|^2\omega_R(x)\,dx\leqslant\int\limits_{\Omega_0}\left[|\theta_0^{k,R(k)}-\theta_0|^2+|\theta_0-\theta_0^{l,R(l)}|^2\right]\omega_R(x)\,dx.$$

Далі

$$I_{11}^c=\int\limits_{Q_\tau}(f_2^{k,R(k)}-f_2^{l,R(l)})\theta^{k,\,l}\omega_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left[(f_2^{k,R(k)}-f_2)^2+(f_2-f_2^{l,R(l)})^2\right]\omega_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt+\int\limits_{Q_\tau}|\theta^{k,\,l}|^2\omega_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt.$$

Враховуючи оцінки інтегралів $I_1^a-I_9^a$ та $I_1^c-I_{11}^c$, з системи (14)-(15) отримаємо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\left[|u^{k,\,l}|^2+|u_t^{k,\,l}|^2+a_0|\nabla u^{k,\,l}|^2+|\theta^{k,\,l}|^2\right]\omega_R(x)e^{-\lambda t}\,dx+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[\left(\lambda-\delta^a-\frac{1}{\delta_1^a}-\frac{1}{\delta_2^a}-\frac{1}{\delta_3^a}-\nu_c\delta_1^c-\frac{1}{\delta_2^c}-\nu_{\beta_0}\delta_5^c-2\right)|u_t^{k,\,l}|^2+$$

$$+\left(\lambda a_0-a_1-\delta_0^a-\nu_a\delta_1^a-\nu_d\delta_3^c\right)|\nabla u^{k,\,l}|^2+$$

$$+\left(\lambda-\nu_{\alpha_1}\delta_3^a-\nu_{\beta_1}-\frac{1}{\delta_3^c}-\frac{1}{\delta_4^c}-\frac{1}{\delta_5^c}-2\right)|\theta^{k,\,l}|^2\Bigg]\omega_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt+$$

$$+\,(2c_0-\nu_b\delta_2^a-\delta_0^c-\nu_c\delta_2^c-\nu_e\delta_4^c)\int\limits_{Q_\tau}|\nabla\theta^{k,\,l}|^2\omega_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt\leqslant F(\tau), \qquad (17)$$

де

$$F(\tau)=\frac{\tilde a^0 n\gamma^2d^2}{\delta_0^a\chi^2}\int\limits_{Q_\tau}[h_R(x)]^{\gamma-2}\,|u_t^{k,\,l}|^2e^{-\lambda t}\,dx\,dt+$$

$$+\left(\frac{\tilde c^0}{\delta_0^c}+\frac{\nu_c}{\delta_1^c}\right)\frac{n\gamma^2d^2}{\chi^2}\int\limits_{Q_\tau}[h_R(x)]^{\gamma-2}\,|\theta^{k,\,l}|^2e^{-\lambda t}\,dx\,dt+$$

$$+\,\nu_{\alpha_0}\int\limits_{\Omega_0}\Big[|u_0^{k,R(k)}-u_0|^2+|u_0-u_0^{l,R(l)}|^2\Big]\,\omega_R(x)e^{-\lambda t}\,dx+$$

$$+\,a_2\int\limits_{\Omega_0}\Big[|\nabla u_0^{k,R(k)}-\nabla u_0|^2+|\nabla u_0-\nabla u_0^{l,R(l)}|^2\Big]\,\omega_R(x)e^{-\lambda t}\,dx+$$

$$+\,2\int\limits_{\Omega_0}\Big[|u_1^{k,R(k)}-u_1|^2+|u_1-u_1^{l,R(l)}|^2\Big]\,\omega_R(x)e^{-\lambda t}\,dx+$$

$$+\,2\int\limits_{\Omega_0}\Big[|\theta_0^{k,R(k)}-\theta_0|^2+|\theta_0-\theta_0^{l,R(l)}|^2\Big]\,\omega_R(x)e^{-\lambda t}\,dx+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{2}\Big[(f_i^{k,R(k)}-f_i)^2+(f_i-f_i^{l,R(l)})^2\Big]\,\omega_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt+$$

для $\tau\in(0,T)$.

Виберемо додатні числа λ_0, δ^a, δ_k^a, $k\in\{0,\ldots,3;\ \delta_l^c\}$, $l\in\{0,\ldots,5\}$ так, щоб виконувалися нерівності

$$\lambda_0-\delta^a-\frac{1}{\delta_1^a}-\frac{1}{\delta_2^a}-\frac{1}{\delta_3^a}-\nu_c\delta_1^c-\frac{1}{\delta_2^c}-\nu_{\beta_0}\delta_5^c>2$$

$$\lambda_0a_0-a_1-\delta_0^a-\nu_a\delta_1^a-\nu_d\delta_3^c>0,$$

$$\lambda_0-\nu_{\alpha_1}\delta_3^a-\nu_{\beta_1}-\frac{1}{\delta_3^c}-\frac{1}{\delta_4^c}-\frac{1}{\delta_5^c}>2,$$

$$2c_0-\nu_b\delta_2^a-\delta_0^c-\nu_c\delta_2^c-\nu_e\delta_4^c>0,$$

де $\lambda+\lambda_0+\lambda_1$, $\lambda_1>0$.

Тоді одержимо

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[|u^{k,\,l}|^2+|u_t^{k,\,l}|^2+|\nabla u^{k,\,l}|^2+|\theta^{k,\,l}|^2\Big]\,\omega_R(x)e^{-\lambda_1 t}\,dx+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\Big[|u^{k,\,l}|^2+\lambda_1\left(|u_t^{k,\,l}|^2+|\nabla u^{k,\,l}|^2+|\theta^{k,\,l}|^2\right)\Big]\,\omega_R(x)e^{-\lambda_1 t}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau} |\nabla\theta^{k,\,l}|^2\omega_R(x)e^{-\lambda_1 t}\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant C_1\left[\int\limits_{Q_\tau}\frac{1}{\chi^2}\left[|u_t^{k,\,l}|^2+|\theta^{k,\,l}|^2\right][h_R(x)]^{\gamma-2}\,e^{-\lambda_1 t}\,dx\,dt+F_R(\tau)\right], \tag{18}$$

де стала C_1 визначається коефіцієнтами системи (1) - (2) і числом T, а

$$F_R(\tau)=\nu_{\alpha_0}\int\limits_{\Omega_0}\left[|u_0^{k,R(k)}-u_0|^2+|u_0^{l,R(l)}-u_0|^2\right]\omega_R(x)e^{-\lambda t}\,dx+$$

$$+\,a_2\int\limits_{\Omega_0}\left[|\nabla u_0^{k,R(k)}-\nabla u_0|^2+|\nabla u_0^{l,R(l)}-\nabla u_0|^2\right]\omega_R(x)e^{-\lambda t}\,dx+$$

$$+\,2\int\limits_{\Omega_0}\left[|u_1^{k,R(k)}-u_1|^2+|u_1^{l,R(l)}-u_1|^2\right]\omega_R(x)e^{-\lambda t}\,dx+$$

$$+\,2\int\limits_{\Omega_0}\left[|\theta_0^{k,R(k)}-\theta_0|^2+|\theta_0^{l,R(l)}-\theta_0|^2\right]\omega_R(x)e^{-\lambda t}\,dx+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\left[(f_1^{k,R(k)}-f_1)^2+(f_1^{l,R(l)}-f_1)^2\right]\omega_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\left[(f_2^{k,R(k)}-f_2)^2+(f_2^{l,R(l)}-f_2)^2\right]\omega_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt,$$

для $\tau\in(0,T)$.

На підставі умов теореми існує таке $s_0\in\mathbb{N}$, що для всіх $s>s_0$ правильні нерівності

$$\int\limits_{\Omega_R}\left[|u_0^s(x)|^2+|\nabla u_0^s(x)|^2+|u_1^s(x)|^2+|\theta_0^s(x)|^2\right]\,dx+\int\limits_{Q_{T,R}}\sum_{j=1}^{2}|f_j^s(t,x)|^2\,dx\,dt\leqslant$$
$$\leqslant 2a\exp\{bR^2\}, \tag{19}$$

$$\int\limits_{\Omega_R}\left[|u_0^s(x)-u_0(x)|^2+|\nabla u_0^s(x)-\nabla u_0(x)|^2+|u_1^s(x)-u_1(x)|^2+\right.$$

$$\left.+\,|\theta_0^s(x)-\theta_0(x)|^2\right]dx+\int\limits_{Q_{T,R}}\sum_{j=1}^{2}|f_j^s(t,x)-f_j(t,x)|^2\,dx\,dt\leqslant\exp\{-m+bR^2\}, \tag{20}$$

де m – натуральне число, $a,b=\mathrm{const}>0$.

З (18), зокрема, одержимо, що

$$\int\limits_{Q_{\tau,R(k)}}\left[|u_t^{k+3,k+2}|^2+|\theta^{k+3,k+2}|^2\right]\omega_R(x)e^{-\lambda_1 t}\,dx\,dt\leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_1}{\lambda_1\chi^2} \int\limits_{Q_{\tau,R(k+1)}} \left[|u_t^{k+3,k+2}|^2 + |\theta^{k+3,k+2}|^2\right] \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt + \frac{C_1}{\lambda_1} F_{R(k+1)}(\tau), \tag{21}$$

при $\chi^2 = 2^k$.

Поділимо відрізок $[R(k), R(k)+\chi]$ на m частин. Виберемо $m = \sigma 2^{2k}$, $\lambda_1 = \chi_0 2^{2k} C_1$, де σ натуральне число, що $\sigma^2 \leqslant \chi_0 e^{-1}$.

Тоді аналогічно як в [14] з (21) одержуємо оцінку

$$\int\limits_{Q_{\tau,R(k)}} \left[|u_t^{k+3,k+2}|^2 + |\theta^{k+3,k+2}|^2\right] \omega_R(x) e^{-\lambda_1 t}\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant e^{-m} \int\limits_{Q_{\tau,R(k+1)}} \left[|u_t^{k+3,k+2}|^2 + |\theta^{k+3,k+2}|^2\right] \omega_R(x) e^{-\lambda_1 t}\, dx\, dt + \frac{C_1 e}{e-1} F_{R(k+1)}(\tau). \tag{22}$$

Оскільки

$$|f_i^{k+3,R(k+3)} - f_i^{k+2,R(k+2)}|^2 \leqslant 2\left(|f_i^{k+3,R(k+3)} - f_i|^2 + |f_i^{k+2,R(k+2)} - f_i|^2\right),$$

$$|u_0^{k+3,R(k+3)} - u_0^{k+2,R(k+2)}|^2 \leqslant 2\left(|u_0^{k+3,R(k+3)} - u_0|^2 + |u_0^{k+2,R(k+2)} - u_0|^2\right),$$

$$|\nabla u_0^{k+3,R(k+3)} - \nabla u_0^{k+2,R(k+2)}|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(|\nabla u_0^{k+3,R(k+3)} - \nabla u_0|^2 + |\nabla u_0^{k+2,R(k+2)} - \nabla u_0|^2\right),$$

$$|u_1^{k+3,R(k+3)} - u_1^{k+2,R(k+2)}|^2 \leqslant 2\left(|u_1^{k+3,R(k+3)} - u_1|^2 + |u_1^{k+2,R(k+2)} - u_1|^2\right),$$

$$|\theta_0^{k+3,R(k+3)} - \theta_0^{k+2,R(k+2)}|^2 \leqslant 2\left(|\theta_0^{k+3,R(k+3)} - \theta_0|^2 + |\theta_0^{k+2,R(k+2)} - \theta_0|^2\right),$$

для $i \in \{1,2\}$, то на підставі (19)

$$F_{R(k+1)}(\tau) \leqslant 2C_2 \exp\{-m + b(R(k+1))^2\}, \quad C_2 = \max\{a_0, \nu_{\alpha_0}\} + 2. \tag{23}$$

Отже, з (22) випливає нерівність

$$\int\limits_{Q_{\tau,R(k)}} \left[|u_t^{k+3,k+2}|^2 + |\theta^{k+3,k+2}|^2\right] \omega_R(x) e^{-\lambda_1 t}\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant e^{-m} \int\limits_{Q_{\tau,R(k+1)}} \left[|u_t^{k+3,k+2}|^2 + |\theta^{k+3,k+2}|^2\right] \omega_R(x) e^{-\lambda_1 t}\, dx\, dt +$$

$$+ C_3 \exp\{-m + b(R(k+1))^2\}. \tag{24}$$

Використовуючи систему (12)-(13) при $v = u_t^k \omega_R e^{-\lambda t}$, $w = \theta^k \omega_R e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$, отримаємо систему рівностей

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_{\tau,R(k)}} |u_t^k|^2 \omega_R e^{-\lambda t}\, dx + \int\limits_{Q_{\tau,R(k)}} \left[\frac{\lambda}{2}|u_t^k|^2 \omega_R + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x) u_{x_i}^k u_{x_j t}^k \omega_R + \right.$$

$$+ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x) u_{x_i}^k u_t^k \omega_{R x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(t,x) u_{x_i}^k u_t^k \omega_R + \sum_{i=1}^n b_i(t,x) \theta_{x_i}^k u_t^k \omega_R +$$

$$+\alpha_0(t,x)u^k u_t^k\omega_R+\alpha_1(t,x)\theta^k u_t^k\omega_R+\gamma_1(t,x)|u_t^k|^p\omega_R\Big]e^{-\lambda t}\,dx\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{0,R(k)}}|u_1^{k,R(k)}|^2\omega_R\,dx+\int\limits_{Q_{\tau,R(k)}}f_1^{k,R(k)}u_t^k\omega_R e^{-\lambda t}\,dx\,dt, \tag{25}$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{\tau,R(k)}}|\theta^k|^2\omega_R e^{-\lambda t}\,dx+\int\limits_{Q_{\tau,R(k)}}\Big[\frac{\lambda}{2}|\theta^k|^2\omega_R+\sum_{i,j=1}^n c_{ij}(t,x)\theta^k_{x_i}\theta^k_{x_j}\omega_R+$$
$$+\sum_{i,j=1}^n c_{ij}(t,x)\theta^k_{x_i}\theta^k\omega_{Rx_j}+\sum_{i=1}^n c_i(t,x)u_t^k\theta^k_{x_i}\omega_R+\sum_{i=1}^n c_i(t,x)u_t^k\theta^k\omega_{Rx_i}+$$
$$+\sum_{i=1}^n d_i(t,x)u^k_{x_i}\theta^k\omega_R+\sum_{i=1}^n e_i(t,x)\theta^k_{x_i}\theta^k\omega_R+\beta_0(t,x)u^k\theta^k\omega_R+$$
$$+\beta_1(t,x)\theta^k\theta^k\omega_R+\gamma_2(t,x)|\theta^k|^q\omega_R\Big]e^{-\lambda t}\,dx\,dt=$$
$$=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{0,R(k)}}|\theta_0^{k,R(k)}|^2\omega_R\,dx+\int\limits_{Q_{\tau,R(k)}}f_2^{k,R(k)}\theta^k\omega_R e^{-\lambda t}\,dx\,dt, \tag{26}$$

для всіх $\tau\in(0,T]$.

На підставі умов (**A**)-(**G**) та леми Гронуолла-Белмана з (25)-(26) легко одержати оцінку

$$\int\limits_{\Omega_{\tau,R(k)}}\left[|u^k|^2+|u_t^k|^2+|\nabla u^k|^2+|\theta^k|^2\right]\,dx+$$
$$+\int\limits_{Q_{\tau,R(k)}}\Big[|u^k|^2+|u_t^k|^2+|\nabla u^k|^2+|\theta^k|^2\Big]\,dx\,dt+\int\limits_{Q_{\tau,R(k)}}|\nabla\theta^k|^2\,dx\,dt+$$
$$+\int\limits_{Q_{\tau,R(k)}}\left[|u_t^k|^p+|\theta^k|^q\right]\,dx\,dt\leqslant C_4\Bigg[\int\limits_{Q_{\tau,R(k)}}\Big[|f_1^{k,R(k)}|^2+|f_2^{k,R(k)}|^2\Big]\,dx\,dt+$$
$$+\int\limits_{\Omega_{0,R(k)}}\Big[|u_0^{k,R(k)}|^2+|u_1^{k,R(k)}|^2+|\nabla u_0^{k,R(k)}|^2+|\theta_0^{k,R(k)}|^2\Big]\,dx\Bigg]. \tag{27}$$

Враховуючи (19), з (24) отримаємо, що

$$\int\limits_{Q_{\tau,R(k)}}|u_t^k|^2\,dx\,dt\leqslant 2C_4a\exp\{b\,R^2\},\qquad \int\limits_{Q_{\tau,R(k)}}|\theta^k|^2\,dx\,dt\leqslant 2C_4a\exp\{b\,R^2\}. \tag{28}$$

Оскільки

$$|u_t^{k+3,k+2}|^2\leqslant 2(|u_t^{k+3}|^2+|u_t^{k+2}|^2),\ |\theta^{k+3},\theta^{k+2}|^2\leqslant 2(|\theta^{k+3}|^2+|\theta^{k+2}|^2),$$

то з (22), (28) випливає оцінка

$$\int\limits_{Q_{\tau,R(k+1)}} \left[|u_t^{k+3,k+2}|^2 + |\theta^{k+3,k+2}|^2\right] dx\, dt \leqslant 4aC_4 \exp\{-m + b(R(k+4))^2 + \lambda_1\tau\} + \\ + C_3 \exp\{-m + b(R(k+2))^2\} \leqslant C_5 \exp\{-m + b(R(k+4))^2 + \lambda_1\tau\}. \tag{29}$$

Тому існує таке $T_0 \leqslant T$, що для всіх $\tau \in (0, T_0]$ число σ можна вибрати так, щоб $\sigma > 2^8 b + \chi_0 C_1 T_0$. Тоді праву частину (29) можна оцінити так:

$$\exp\{-m + b(R(k+4))^2 + \lambda_1\tau\} \leqslant \exp\{-[2^{2k}\sigma_0]\},$$

де $\sigma_0 = \sigma - 2^8 b - \chi_0 C_1 T_0$.

Нехай $\tilde{R} > R_0 + 1$ – довільне фіксоване число, $R(k) > \tilde{R}$.

З (29) випливають оцінки

$$\|u_t^{k+3,k+2}\|_{C(0,T_0;L^2(\Omega^{\tilde{R}}))} + \|u_t^{k+3,k+2}\|_{L^2(0,T_0;H_0^1(\Omega^{\tilde{R}}))} \leqslant C_6 \exp\{-[2^{2k}\sigma_0]\},$$
$$\|\theta^{k+3,k+2}\|_{C(0,T_0;L^2(\Omega^{\tilde{R}}))} + \|\theta^{k+3,k+2}\|_{L^2(0,T_0;H_0^1(\Omega^{\tilde{R}}))} \leqslant C_7 \exp\{-[2^{2k}\sigma_0]\}.$$

Тоді

$$\|u_t^{k+l+2} - u_t^{k+2}\|_{C(0,T_0;L^2(\Omega^{\tilde{R}}))} + \|u_t^{k+l+2} - u_t^{k+2}\|_{L^2(0,T_0;H_0^1(\Omega^{\tilde{R}}))} \leqslant \\ \leqslant \sum_{i=0}^{l-1} \{\|u_t^{k+i+3} - u_t^{k+i+2}\|_{C(0,T_0;L^2(\Omega^{\tilde{R}}))} + \|u_t^{k+i+2} - u_t^{k+i+2}\|_{L^2(0,T_0;H_0^1(\Omega^{\tilde{R}}))}\} \leqslant \\ \leqslant C_6 \sum_{i=0}^{l-1} \exp\{-\sigma_0 2^{2(k+i)+1}\} \leqslant C_8 \exp\{-\sigma_0 2^{2(k-1)}\}, \tag{30}$$

аналогічно

$$\|\theta^{k+l+2} - \theta^{k+2}\|_{C(0,T_0;L^2(\Omega^{\tilde{R}}))} + \|\theta^{k+l+2} - \theta^{k+2}\|_{L^2(0,T_0;H_0^1(\Omega^{\tilde{R}}))} \leqslant \\ \leqslant C_9 \exp\{-\sigma_0 2^{2(k-1)}\}, \tag{31}$$

де сталі C_8, C_9 не залежать від k, l.

Враховуючи (18), (30) та (31), легко показати, що пара послідовностей $\{u_t^k, \theta^k\}$ фундаментальна в просторі

$$\left[C(0,T_0;L^2(\Omega^{\tilde{R}})) \cap L^2(0,T_0;H_0^1(\Omega^{\tilde{R}})) \cap L^p(0,T_0;L^p(\Omega_{\tilde{R}}))\right] \times \\ \times \left[C(0,T_0;L^2(\Omega^{\tilde{R}})) \cap L^2(0,T_0;H_0^1(\Omega^{\tilde{R}})) \cap L^q(0,T_0;L^q(\Omega_{\tilde{R}}))\right].$$

На підставі довільності $\tilde{R}$ одержуємо, що $u^k \to u$ у просторі $L^2(0,T_0;H_{0,loc}^1(\overline{\Omega}))\cap$ $\cap C(0,T_0;L_{loc}^2(\overline{\Omega}))$ та $\theta^k \to \theta$ у просторі $L^2(0,T_0;H_{0,loc}^1(\overline{\Omega})) \cap C(0,T_0;L_{loc}^2(\overline{\Omega}))\cap$ $\cap L^q(0,T_0;L_{loc}^q(\overline{\Omega}))$, тобто пара функцій $\{u,\theta\}$ – сильний узагальнений розв'язок задачі (1)-(4).

Оскільки, $u^k \to u$ в $C(0,T;H_{0,loc}^1(\overline{\Omega})) \cap L_{loc}^2(\overline{\Omega}))$, $\theta^k \to \theta$ в $C(0,T;L_{loc}^2(\overline{\Omega}))$. Тоді $u^k(0) \to u(0)$, $u_t^k \to u_t(0)$, $\theta^k(0) \to \theta(0)$ in $L_{loc}^2(\overline{\Omega})$, відповідно, $u(0) = u_0$, $u_t(0) = u_1$, $\theta(0) = \theta_0$. Теорему доведено. $\square$

3. Умови єдиності розв'язку.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* $(\mathbf{A}), (\mathbf{C})-(\mathbf{G})$. *Тоді задача (1)-(4) не може мати більше одного сильного узагальненого розв'язку в класі функцій таких, що*

$$\int\limits_{Q_{T,R}} \left(|u_t|^2 + \theta|^2\right)\, dx\, dt \leqslant a \exp\{bR^2\} \quad \forall\ R > R_0 + 1, \tag{32}$$

де a, b *– додатні сталі.*

Доведення. Нехай існують два розв'язки (u^1, θ^1), (u^2, θ^2) задачі (1)-(4). Задамо довільне фіксоване число $\tilde{R} > R_0 + 1$ і як завгодно мале число $\varepsilon > 0$. Нехай $R(l) = 2^l > \tilde{R}$, $l \in \mathbb{N}$.

Згідно з означенням сильного узагальненого розв'язку існують пари послідовностей $\{u^{i,k}\}, \{\theta^{i,k}\}$ таких, що $u^k \to u$ у просторі V_1 та $\theta^k \to \theta$ у просторі V_3; причому пара $\{u^{i,k}\}, \{\theta^{i,k}\}$ задовольняє систему (5) - (6) з правими частинами $\{f_j^{i,k}\}$, $j \in \{1,2\}$ і початковими функціями $\{u_0^{i,k}\}$, $\{u_1^{i,k}\}$, $\{\theta_0^{i,k}\}$, де $\{f_j^{i,k}\}$, $j \in \{1,2\}$ задовольняють умову $(\mathbf{F})$, $f_j^{i,k} \to f_j$, $j \in \{1,2\}$ у просторі $L^2(0,T; L^2_{loc}(\overline{\Omega}))$, $u_0^{i,k} \to u_0$ у просторі $H^1_{0,loc}(\overline{\Omega})$, $u_1^k \to u_1$ та $\theta_0^k \to \theta_0$ відповідно у просторі $L^2_{loc}(\overline{\Omega})$ при $k \to \infty$, $i = 1, 2$.

Аналогічно як (18) одержимо нерівність

$$\int\limits_{Q_\tau} \left[|u_t^{2,k} - u_t^{1,k}|^2 + |\theta^{2,k} - \theta^{1,k}|^2\right] \omega_R(x) e^{-\lambda_1 t}\, dx\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C_2}{\lambda_1 \chi^2} \int\limits_{Q_\tau} \left[|u_t^{2,k} - u_t^{1,k}|^2 + |\theta^{2,k} - \theta^{1,k}|^2\right] [h_R(x)]^{\gamma-2}\, e^{-\lambda_1 t}\, dx\, dt + \frac{C_2}{\lambda_1} F(R,\tau), \tag{33}$$

де функція ω_R і стала C_2 визначені при доведенні існування розв'язку, $R = R(l)$, $\lambda_1 > 0$, а

$$F(R,\tau) = \frac{\nu_{\alpha_0}}{2} \int\limits_{\Omega_0} |u_0^{2,k} - u_0^{1,k}|^2 \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx + \frac{a_0}{2} \int\limits_{\Omega_0} |\nabla u_0^{2,k} - \nabla u_0^{1,k}|^2 \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx +$$

$$+2 \int\limits_{\Omega_0} |u_1^{1,k} - u_1^{2,k}|^2 \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx + 2 \int\limits_{\Omega_0} |\theta_0^{1,k} - \theta_0^{2,k}|^2 \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx +$$

$$+ \int\limits_{Q_\tau} |f_1^{1,k} - f_1^{2,k}|^2 \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt + \int\limits_{Q_\tau} |f_2^{1,k} - f_2^{2,k}|^2 \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt.$$

Виберемо $m = \sigma[2^{2l}]$, $\lambda_1 = \chi_0 2^{2l} C_2$ Для $\chi = 2^l$, де σ таке натуральне число, що $\sigma^2 \leqslant \chi_0 e^{-1}$.

Оскільки

$$F(R,\tau) \leqslant \nu_{\alpha_0} \int\limits_{\Omega_{0,R(l+1)}} \left[|u_0^{k,R(k)} - u_0|^2 + |u_0^{l,R(l)} - u_0|^2\right] \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx +$$
$$+ a_2 \int\limits_{\Omega_{0,R(l+1)}} \left[|\nabla u_0^{k,R(k)} - \nabla u_0|^2 + |\nabla u_0^{l,R(l)} - \nabla u_0|^2\right] \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx +$$
$$+ 2 \int\limits_{\Omega_{0,R(l+1)}} \left[|u_1^{k,R(k)} - u_1|^2 + |u_1^{l,R(l)} - u_1|^2\right] \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx +$$
$$+ 2 \int\limits_{\Omega_{0,R(l+1)}} \left[|\theta_0^{k,R(k)} - \theta_0|^2 + |\theta_0^{l,R(l)} - \theta_0|^2\right] \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx +$$
$$+ \int\limits_{Q_{\tau,R(l+1)}} \left[(f_1^{k,R(k)} - f_1)^2 + (f_1^{l,R(l)} - f_1)^2\right] \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt +$$
$$+ \int\limits_{Q_{\tau,R(l+1)}} \left[(f_2^{k,R(k)} - f_2)^2 + (f_2^{l,R(l)} - f_2)^2\right] \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt,$$

для $\tau \in (0,T)$. Тоді, враховуючи збіжності послідовностей $\{f_j^{i,k}\}$, $\{u_0^{i,k}\}$, $\{u_1^{i,k}\}$, $\{\theta_0^{i,k}\}$, $i,j \in \{1,2\}$, можемо зазначити таке $k_0(l)$, що

$$F(R,\tau) < e^{-m}$$

для всіх $k > k_0(l)$.

Тоді з (33), аналогічно як при доведенні існування розв'язку, одержимо оцінку

$$\int\limits_{Q_{\tau,R(l)}} \left[|u_t^{2,k} - u_t^{1,k}|^2 + |\theta^{2,k} - \theta^{1,k}|^2\right] e^{-\lambda t}\, dx\, dt \leqslant$$
$$\leqslant e^{-m} \int\limits_{Q_{\tau,R(l+1)}} \left[|u_t^{2,k} - u_t^{1,k}|^2 + |\theta^{2,k} - \theta^{1,k}|^2\right] e^{-\lambda t}\, dx\, dt + e^{-m}, \tag{34}$$

для $l \geqslant l_0(C_2)$.

Оскільки $u_t^k \to u_t$ у просторі $L^2(0,T;H^1_{0,loc}(\overline{\Omega})) \cap C(0,T;L^2_{loc}(\overline{\Omega})) \cap L^p(0,T;$ $L^p_{loc}(\Omega))$ та $\theta^k \to \theta$ у $L^2(0,T;H^1_{0,loc}(\overline{\Omega})) \cap C(0,T;L^2_{loc}(\overline{\Omega})) \cap L^q(0,T;L^q_{loc}(\Omega))$, то існує таке $k_1(l,\varepsilon) \in \mathbb{N}$, $k_1 \geqslant k_0$, що

$$\int\limits_{Q_{\tau,R(l+1)}} |u_t^{i,k} - u_t^i|\, dx\, dt \leqslant \frac{\varepsilon}{32}, \quad \int\limits_{Q_{\tau,R(l+1)}} |\theta^{i,k} - \theta^i|\, dx\, dt \leqslant \frac{\varepsilon}{32}, \quad i \in \{1,2\}, \tag{35}$$

для всіх $k > k_1(l,\varepsilon)$.

Враховуючи те, що

$$|u_t^{2,k} - u_t^{1,k}|^2 \leqslant 3\left(|u_t^{2,k} - u_t^2|^2 + |u_t^{1,k} - u_t^1| + 2|u_t^1|^2 + 2|u_t^2|^2\right),$$
$$|\theta^{2,k} - \theta^{1,k}|^2 \leqslant 3\left(|\theta^{2,k} - \theta^2|^2 + |\theta^{1,k} - \theta^1| + 2|\theta^1|^2 + 2|\theta^2|^2\right)$$

і умови (32), з (34) отримаємо оцінку

$$\int\limits_{Q_{\tau,R(l)}} \Big[|u_t^{2,k} - u_t^{1,k}|^2 + |\theta^{2,k} - \theta^{1,k}|^2\Big] e^{-\lambda_t}\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant e^{-m}\left(\frac{3\varepsilon}{8} + 8a\exp\{b(R(l+1))^2\} + 1\right) \leqslant (2+8a)\exp\{-m + b(R(l+1))^2\}, \qquad (36)$$

при $k > k_1(l,\varepsilon)$. Аналогічно як при доведенні теореми 1 можемо стверджувати про існування такого $T_0 \leqslant T$, що $-m + b(R(l+1))^2 < -[2^{2l}]\sigma_0$, $\sigma_0 > 0$ для всіх $\tau \in (0, T_0]$.

Тоді з (36) випливає оцінка

$$\int\limits_{Q_{\tau,R(l)}} \Big[|u_t^{2,k} - u_t^{1,k}|^2 + |\theta^{2,k} - \theta^{1,k}|^2\Big] e^{-\lambda t}\,dx\,dt \leqslant (2+8a)\exp\{-\sigma_0[2^{2l}]\}.$$

Отже, існує таке $l_1 \in \mathbb{N}$, $l_1 \geqslant l_0$, що

$$\int\limits_{Q_{T_0,\tilde R}} |u_t^{2,k} - u_t^{1,k}|^2\,dx\,dt < \frac{\varepsilon}{16}, \quad \int\limits_{Q_{T_0,\tilde R}} |\theta^{2,k} - \theta^{1,k}|^2\,dx\,dt < \frac{\varepsilon}{16} \qquad (37)$$

для всіх $l > l_1$, $k > k_1(l,\varepsilon)$.

Оскільки

$$|u_t^2 - u_t^1|^2 \leqslant 3(|u_t^2 - u_t^{2,k}|^2 + |u_t^1 - u_t^{1,k}|^2 + |u_t^{2,k} - u_t^{1,k}|^2),$$
$$|\theta^2 - \theta^1|^2 \leqslant 3(|\theta^2 - \theta^{2,k}|^2 + |\theta^1 - \theta^{1,k}|^2 + |\theta^{2,k} - \theta^{1,k}|^2),$$

то на підставі (35), (37)

$$\int\limits_{Q_{T_0,\tilde R}} |u_t^2 - u_t^1|^2\,dx\,dt < \varepsilon, \quad \int\limits_{Q_{T_0,\tilde R}} |\theta^2 - \theta^1|^2\,dx\,dt < \varepsilon.$$

З огляду на те, що правильна нерівність

$$\int\limits_{Q_\tau} |u^2 - u^1|^2\,dx\,dt \leqslant c_1 \int\limits_{\Omega_0} |u_0^2 - u_0^1|^2\,dx + c_2 \int\limits_{Q_\tau} |u_t^2 - u_t^1|^2\,dx\,dt,$$

де c_1, c_2 константи, які залежать від T, та враховуючи те, що $u_0^{i,k} \to u_0$ у просторі $H^1_{0,loc}(\overline{\Omega})$, отримаємо

$$\int\limits_{Q_{T_0,\tilde R}} |u^2 - u^1|^2\,dx\,dt < \varepsilon,$$

тобто, враховуючи довільність ε, $u^2(x,t) = u^1,(x,t)$ та $\theta^2(x,t) = \theta^1,(x,t)$ майже всюди в $Q_{T_0}^{\tilde R}$. Оскільки $\tilde R$ – довільне число, то $u^2(x,t) = u^1,(x,t)$ та $\theta^2(x,t) = \theta^1,(x,t)$ майже всюди в Q_{T_0}. Якщо $T_0 > T$, то за скінченну кількість кроків доводимо єдиність у всій області Q_T. Теорему доведено. $\square$

1. *Apolaya R.F.* On a nonlinear coupled system with internal damping / *Apolaya R.F., Clark H.R., Feitosa A.J.* // Electronic Journal of Differential Equations. – Vol. 2000. – №. 64. – P. 1-17.
2. *Clark H.R.* On a mixed problem for a linear coupled system with variable coefficients / *Clark H.R., San Gil Jutuca L.P., Milla Miranda* // Electronic Journal of Differential Equations. – 1998. – Vol. 1. – №04. – P. 1-20.
3. *Clark M.R.* On a mixed problem for a coupled nonlinear system / *Clark M.R., Lima O.A.* // Electronic Journal of Differential Equations. – 1997. – Vol. 1997. – №06. – P. 1–11.
4. *Lions J.L.* Non-homogeneous boundary value problems and applications / *Lions J.L., Magenes E.* – Springer-Verlag, New York, 1972. – Vol. I.
5. *Salim A. Messaoudi.* A blowup result in a multidimensional semilinear thermoelastic system / *Salim A. Messaoudi* // Electronic Journal of Differential Equations. – 2001. – Vol. 2001. – №. 30. – P. 1-9.
6. *Nechepurenko M.O.* The mixed problem for a nonlinear coupled evolution system in an unbounded domain / *Nechepurenko M.O.* (в друці).
7. *Гаевский Х.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* – М., 1978.
8. *Нечепуренко М.О.* Мішана задача для нелінійної зв'язної еволюційної системи рівнянь в обмеженій області / *Нечепуренко М.О.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2007. – Вип. 67. – С. 207-223.
9. *Medeiros L.A.* On a boundary value problem for wave equations: existence, uniqueness-asymptotic behavior / *Medeiros L.A., Milla Miranda M.* // Revista de Matematicas Aplicadas, Universidade de Chile. – 1996. – №17. – P. 47-73.
10. *Komornik V., Zuazua E.* A direct method for boundary stabilization of the wave equation / *Komornik V., Zuazua E.* // J. Math. Pure et Appl. – 1990. – №69. – P. 33-54.
11. *Schiff L.I.* Non-linear meson theory of nuclear forces / *Schiff L.I.* // J. Physic. Rev. – 1951. – №.84. – P. 1-9.
12. *Segal I.E.* The global Cauchy problem for a relativistic scalar field with power interaction / *Segal I.E.* // Bull. Soc. Math. France. – 1963. – №91. – P. 129-135.
13. *Лавренюк С.П.* Мішана задача для ультрапараболічного рівняння з нелокальною дією / *Лавренюк С.П., Оліскевич М.О.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2006. – Вип. 66. – С. 99-114.
14. *Олейник О.А.* Метод введения параметра для исследования эволюционных уравнений / *Олейник О.А., Радкевич Е.В.* // Успехи мат. наук. – 1978. – Т. 33, Вып.5. – С. 7-72.
15. *Лионс Ж.Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / *Лионс Ж.Л.* – М., 1972.

THE MIXED PROBLEM FOR A NONLINEAR HYPERBOLIC-PARABOLIC SYSTEM IN AN UNBOUNDED DOMAIN

Maksym NECHEPURENKO

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: m.nechepurenko@mfc.in.ua

A nonlinear coupled evolutions hyperbolic-parabolic system in a domain unbounded with respect to space variables is considered.The conditions of the existence and uniqueness of generalized solution have been obtained. Here we extend our previous results in [8] to an unbounded domain. The classes of the existence and uniqueness are the spaces of local integrable functions.

Key words: nonlinear system, mixed problem.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Максим НЕЧЕПУРЕНКО

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: m.nechepurenko@mfc.in.ua

Рассмотрено нелинейную связную эволюционную гиперболо-параболическую систему в неограниченной по пространственным переменным области. Получены условия существования и единственности обобщенного решения. Расширено наши предыдущие результаты [8] до неограниченной области. Классы существования и единственности есть пространства локально интегрируемых функций.

Ключевые слова: нелинейная система, смешанная задача.

Стаття надійшла до редколегії 17.12.2008

Прийнята до друку 16.12.2009

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2009.
Вип. 71. С. 175–183

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech. Math. 2009.
Is. 71. P. 175–183

УДК 512.553.2

ПРО МОНОЇДИ, НАД ЯКИМИ ВСІ КВАЗІФІЛЬТРИ ТРИВІАЛЬНІ

Роман ОЛІЙНИК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: forvard-or@ukr.net

В категорії $S-$полігонів частина результатів гомологічного характеру є аналогами відповідних фактів з теорії $R-$модулів. Цанг, Гао і Ксі дослідили взаємозв'язок між теоріями скруту та квазіфільтрами лівих конгруенцій, визначених на $S-$полігоні S. Розглянуто квазіфільтри та $\sigma-$квазіфільтри лівих конгруенцій моноїда з нулем. Основний результат засвідчує, що усі квазіфільтри і $\sigma-$квазіфільтри є тривіальними тоді і тільки тоді, коли комутативний моноїд S досконалий.

Ключові слова: моноїд, полігон, конгруенція, квазіфільтр, теорія скруту.

1. Вступ. Теорія скрутів у випадку категорії модулів розвинута достатньо повно. Для полігонів над моноїдом немає навіть єдиного підходу до поняття радикала чи скруту, оскільки можливі різні підходи до введення цих понять, одні з яких ґрунтуються на основі теорії конгруенцій, інші на використанні традиційних підполігонів. Ще радикальний підхід заснований на ідеї побудови спеціальної категорії полігонів, у якій морфізми визначають як композиції рісових морфізмів та вкладень. Цей метод вперше використали у праці Віганта і Лекса [10], яка ґрунтувалася на радикалах Хьонке. Він розширений і суттєво розвинений у праці Вігандта [11].

Основні поняття пов'язані зі скрутами у категорії $S-$полігонів ввів до розгляду Людеман ще у 1983 р. [7], використавши аналогію з існуючою теорією скрутів у категорії $R-$модулів. Є ще багато праць, в яких розглядали теорію скрутів у категорії полігонів, серед яких зазначимо [12], [13]. Зауважимо, що працюючи з цими об'єктами, природні результати отримують за допомогою техніки квазіфільтрів.

Однією з первісних проблем, які виникають у випадку вивчення скрутів у тій чи іншій категорії, є задача про їхню тривіальність. Для деяких категорій вона розв'язана, зокрема, у категорії модулів. Відповідні результати описані у книзі Голана [4]. Найбільш загальне формулювання цієї проблеми розглядали у праці Насташеску [9] у контексті категорій Гротендика. Ця проблема для таких категорій еквівалентна задачі про двоелементність ґратки відповідних фільтрів Габріеля.

У категорії полігонів, яка над більшістю моноїдів не є Гротендиковою, відмічена вище задача важка, тому ми розглядаємо випадок тривіальності спеціальних квазіфільтрів, тобто $\sigma-$квазіфільтрів конгруенцій моноїда S. Вони є аналогами $S-$фільтрів ідеалів кільця R [1] та квазіфільтрів. У [2] Комарницький М. Я. довів, що кільця, над якими всі $S-$скрути тривіальні є локальними і досконалими. Ми доводимо полігонний аналог цього результату.

Моноїдними відповідниками фільтрів Габріеля є квазіфільтри конгруенцій і виникає потреба згадати деякі результати, пов'язані з такими фільтрами. У [12], [13] досліджували фільтри правих конгруенцій, які тісно позв'язані зі скрутами і схожі на фільтри Габріеля. Ці фільтри називають квазіфільтрами, з метою узгодження термінології. Відмінність між квазіфільтром і радикальним фільтром [3] полягає в тому, що квазіфільтри складаються з конгруенцій із певними властивостями, а радикальні фільтри – з ідеалів.

Означення та термінологія, які не наведені у статті, можна знайти у монографіях [3], [6], [8].

2. Термінологія та попередні відомості.

Надалі, якщо не сказано протилежне, літера S позначатиме фіксований моноїд з одиницею 1 та нулем 0 .

Поняття $S-$полігону є природним узагальненням модуля над кільцем і множини з дією групи, але при відсутності нуля в моноїді виникають великі труднощі, тоді треба шукати такі твердження, які правильні і для множин, і для модулів.

Нагадаємо формальне означення полігону над моноїдом.

Означення 1. *Нехай S – моноїд і* А $\neq \emptyset$ *множина. Назвемо множину A лівим полігоном над S, якщо задано таке відображення $\mu : S \times A \to A$,*

$$(s, a) \to sa = \mu (s, a),$$

що виконуються умови:

1) $1a = a$;

2)$(st)\, a = s\,(ta)$ *для всіх* $a \in A,\ s, t \in S$.

Називатимемо μ множенням зліва елементів з A на елементи з S. Аналогічно визначається правий $S-$полігон A і в позначеннях це відображається так: A_S – правий, ${}_SA$ – лівий полігони. Вживаємо скорочений термін «$S-$полігон», якщо відомо яку з операцій – праву, чи ліву, вибрано на ньому.

Зауважимо, що замість терміна $S-$полігон різні автори вживають такі: $S-$множина, $S-$операнда, $S-$дія, $S-$система, $S-$автомат і т. д.

Зазначимо, що впродовж статті кожен лівий $S-$полігон є унітарним (тобто $1A = A$) та центрованим (тобто $0a = s0 = 0$, де 0 – нуль полігону A).

Означення 2. *Нехай ${}_SA$ та ${}_SB$ – ліві $S-$полігони. Відображення $f :_S A \to_S B$ називається гомоморфізмом з $S-$полігонів A в B, якщо для будь-яких $s \in S$ та $a \in A$ виконується рівність $f\,(sa) = sf\,(a)$.*

Категорію лівих $S-$полігонів та їхніх гомоморфізмів позначатимемо через $S - Act$.

Означення 3. *Нехай ρ – відношення еквівалентності на $S-$полігоні A. Тоді ρ називається лівою конгруенцією на A, якщо $sa\rho sb$ для всіх $s \in S$ та $a, b \in A$, що задовольняють умову $a\rho b$.*

Аналогічно визначається права конгруенція.

Як відомо, над конгруенціями можна виконувати операції.

1. Нехай ρ, τ – ліві конгруенції на моноїді S. Тоді

$$\rho \wedge \tau = \{(a, b) \ \mid \ (a, b) \in \rho, \ \ (a, b) \in \tau\}$$

– звичайний перетин конгруенцій на моноїді S.

2. Нехай ρ, τ – ліві конгруенції на моноїді S. Тоді $\rho \vee \tau$ – найменша конгруенція на моноїді S, яка містить конгруенції ρ та τ.

Множину всіх лівих конгруенцій на S позначатимемо через $Con_l(S)$. Ця множина насправді є обмеженою ґраткою стосовно щойно визначених об'єднання і перетину конгруенцій [8]. Найменшу конгруенцію позначатимемо через Δ, а найбільшу – 1_S. Зрозуміло, що $\Delta = \{(a, b) \in S \times S \,|a = b\}$ і $1_S = S \times S$.

Для довільної лівої конгруенції ρ на A і для будь-якого елемента $m \in A$ визначимо множину

$$(\rho : m) = \{(a, b) \in S \times S \ \mid \ (am, bm) \in \rho\}.$$

Відомо, що $(\rho : m)$ є лівою конгруенцією на S. Для повноти викладення доведемо таку просту лему.

Лема 1. *Нехай I – лівий ідеал моноїда S. Тоді $\Delta \bigcup (I \times I)$ – ліва конгруенція моноїда S.*

Доведення. Нехай $\rho = \Delta \bigcup (I \times I)$, $(a, b) \in \rho$ тоді і тільки тоді, коли $a, b \in I$ або $a = b$. Перевіримо, що ρ є відношенням еквівалентності на моноїді S. За побудовою ρ – рефлексивне. Покажемо, що ρ – симетричне. Нехай $(a, b) \in \rho$. Оскільки I – ідеал, то $(b, a) \in \rho$. Транзитивність: нехай $(a, b) \in \rho$ і $(b, c) \in \rho$. Це означає, що $a, b, c \in I$. Звідси отримуємо, що $(a, c) \in \rho$. Покажемо, що для будь-яких пар $(a, b) \in \rho$ та елементів $s \in S$ виконується $(sa, sb) \in \rho$. Оскільки $a, b \in I$, то за означенням ідеалу $sa, sb \in I$. Лему доведено. □

Конгруенцію побудовану за допомогою ідеалу, за схемою, використаною у лемі 1, називають конгруенцією Ріса і позначають через ρ_I.

Лема 2. *Нехай I_1, I_2 – ліві ідеали моноїда S, $\rho = \Delta \bigcup (I_1 \times I_1)$ та $\tau = \Delta \bigcup (I_2 \times I_2)$ – ліві конгруенції на S. Тоді*

$$\rho \wedge \tau = \Delta \bigcup \left(\left(I_1 \bigcap I_2 \right) \times \left(I_1 \bigcap I_2 \right) \right)$$

та

$$\rho \vee \tau = \Delta \bigcup \left(\left(I_1 \bigcup I_2 \right) \times \left(I_1 \bigcup I_2 \right) \right).$$

Доведення. Випливає з леми 1. □

Означення 4. *([7]) Теорією скруту τ в категорії лівих $S-$полігонів $S - Act$ називаємо впорядковану пару $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{F})$ класів $S-$полігонів з такими властивостями:*

1) $Hom_S(T, F) = 0$ для всіх $T \in \boldsymbol{T}$ і $F \in \boldsymbol{F}$;

2) якщо $Hom_S(T, F) = 0$ для всіх $F \in \boldsymbol{F}$, тоді $T \in \boldsymbol{T}$;

3) якщо $Hom_S(T, F) = 0$ *для всіх* $T \in \boldsymbol{T}$*, тоді* $F \in \boldsymbol{F}$.

Тоді $S-$полігони з класу $\boldsymbol{T}$ називаються періодичними полігонами та з класу $\boldsymbol{F}$ називають напівпростими. Класи $\boldsymbol{T}$ та $\boldsymbol{F}$ називаються періодичними та напівпростими відповідно. Теорія скруту τ називається спадковою, якщо $\boldsymbol{T}$ – замкнений стосовно підполігонів. Спадкову теорію скруту τ називаємо скрутом.

Означення 5. *Конгруенція* ρ *на* $S-$*полігоні* A *називається* $\tau-$*щільною, якщо* $A/\rho \in \boldsymbol{T}_\tau$.

Позначимо множину всіх $\tau-$щільних конгруенцій на A через $\mathrm{C}_\tau[A]$, або просто C_τ, якщо зрозуміло про який полігон йдеться.

Означення 6. *Напередрадикальним квазіфільтром моноїда* S *називається підмножина* $\mathcal{E}$ *в* $Con(S)$*, яка задовольняє умови:*
1) якщо $\rho \in \mathcal{E}$ *і* $\rho \subseteq \tau \in Con(S)$*, то* $\tau \in \mathcal{E}$*;*
2) з умови $\rho \in \mathcal{E}$ *випливає* $(\rho : s) \in \mathcal{E}$ *для всіх* $s \in S$.
Якщо крім цих умов виконується:
3) якщо $\rho \in \mathcal{E}$ *і* $\tau \in Con(S)$ *таке, що* $(\tau : s)$, $(\tau : t)$ *належать до* $\mathcal{E}$ *для всіх* $(s, t) \in \rho$*, то* $\tau \in \mathcal{E}$*;*
то $\mathcal{E}$ *називається квазіфільтром.*

Напередрадикальні квазіфільтри утворюють ґратку стосовно очевидних операцій об'єднання і перетину.

Зв'язок між скрутами в категорії $S-$полігонів і квазіфільтрами моноїда S визначає така теорема.

Теорема 1. *([13]) Нехай* S *–* $S-$*полігон та* τ *– теорія скруту над* S*:*
1) якщо τ *є спадковою теорією скруту, то* C_τ *є квазіфільтром лівих конгруенцій визначених на моноїді* S*;*
2) якщо $\mathcal{E}$ *є квазіфільтром, то існує така спадкова теорія скруту* τ*, що* $\mathcal{E} = \mathrm{C}_\tau$.

Наведемо означення фільтра часток лівих ідеалів для моноїда.

Означення 7. *([13])Нехай* $\mathcal{R}$ *множина лівих ідеалів моноїда* S*. Тоді* $\mathcal{R}$ *називається лівим фільтром часток моноїда* S*, якщо виконуються такі умови:*
1) якщо $I \in \mathcal{R}$ *та* J *лівий ідеал такий, що* $I \subseteq J$*, то* $J \in \mathcal{R}$*;*
2) якщо $I, J \in \mathcal{R}$*, то* $I \bigcap J \in \mathcal{R}$*;*
3) якщо $I \in \mathcal{R}$*, то* $(I : s) \in \mathcal{R}$ *для всіх* $s \in S$*, де* $(I : s) = \{t \in S \,|st \in I\}$.
Якщо крім цих умов виконується:
4) якщо для кожного $a \in I \in \mathcal{R}$ *виконується* $(J : a) \in \mathcal{R}$*, то* $J \in \mathcal{R}$*, де* J *лівий ідеал моноїда* S*;*
то $\mathcal{R}$ *називається спеціальним лівим фільтром часток моноїда* S.

Нагадаємо означення досконалого моноїда, яке є аналогом досконалого кільця.

Означення 8. *Об'єкт* P *є проективним, якщо для кожного сур'єктивного гомоморфізму* $s : A \to B$ *та гомоморфізму* $g : P \to B$ *існує таке* $f : P \to A$*, що* $sf = g$.

Означення 9. *Покриттям лівого полігону* B *називається сур'єктивний гомоморфізм* $s : Z \to B$*, всі звуження якого на підоб'єкти в* Z *не є сур'єктивними.*

Означення 10. *Проективним покриттям називають таке $f : Z \to B$, де Z – проективний об'єкт.*

Означення 11. *Назвемо моноїд S досконалим, якщо будь-який $S-$ полігон має проективне покриття.*

Наведемо теорему-критерій про досконалі моноїди.

Теорема 2. *([5]) Комутативний моноїд є досконалим тоді і тільки тоді, коли в ньому немає нескінчених строго спадних та строго зростаючих ланцюгів головних ідеалів.*

У випадку кілець умова обриву зростаючих ланцюгів є наслідком умови обриву спадних ланцюгів і в означенні досконалого кільця тоді достатньо умови обриву спадних ланцюгів головних ідеалів.

3. Основні результати.

Квазіфільтри відіграють важливу роль, як було сказано вище, у вивченні скрутів у категорії $S - Act$.

Нехай задано фіксовану ліву конгруенцію σ на S. Тоді розглянемо множину:

$$\mathcal{E}_\sigma = \{\tau \ \mid \ \tau \in Con\,(S)\,, \ \ \tau \vee \sigma = 1_S\}\,.$$

Лема 3. *Для довільної конгруенції σ множина $\mathcal{E}_\sigma$ є квазіфільтром.*

Доведення. Перевіримо три умови з означення 6. Перші дві умови перевіряються безпосередньо. Покажемо від супротивного, що третя умова виконується. Припустимо, що 3 виконується, але $\tau \notin \mathcal{E}_\sigma$. Тоді існує така конгруенція ρ, яка містить конгруенції σ та τ, але $\rho \neq 1_S$. Далі можемо знайти такі пари (a, b) конгруенції 1_S, додаванням яких до τ збільшують $\sigma \vee \tau$ до 1_S. З іншого боку, (a, s) та (s, b) належать до ρ. Оскільки ρ – конгруенція, за транзитивністю маємо, що $(a, b) \in \rho$. А це суперечність. Лему доведено. $\square$

Називатимемо $\mathcal{E}_\sigma$ спеціальним квазіфільтром або скорочено $\sigma-$квазіфільтром. Говоритимемо, що $\sigma-$квазіфільтр тривіальний, якщо він містить Δ або ж складається тільки з одиничної конгруенції.

Лема 4. *Нехай S – моноїд, I – лівий ідеал в S, $\sigma = \sigma_I$ – рісова конгруенція. Тоді $\sigma-$квазіфільтр $\mathcal{E}_\sigma$ не містить нетривіальних рісових конгруенцій.*

Доведення. Від супротивного. Нехай $\tau, \rho \in Con\,(S)$, але вони рісові. Тобто їх можна побудувати так: $\rho = \Delta \bigcup (I_1 \times I_1)$ та $\tau = \Delta \bigcup (I_2 \times I_2)$. Щоб фільтр був $\sigma-$квазіфільтр $\mathcal{E}_\sigma$, треба, щоб $\sigma \vee \tau = 1_S$. З леми 2: $\rho \vee \tau = \Delta \bigcup ((I_1 \bigcup I_2) \times (I_1 \bigcup I_2))$. З іншого боку, $\sigma \vee \tau = \Delta \bigcup ((I_1 \bigcup I_2) \times (I_1 \bigcup I_2)) = S \times S$. Звідси випливає, що $I_1 \bigcup I_2 = S$. Але це виконується тоді і тільки тоді, якщо $I_1 = S$ або $I_2 = S$. Оскільки моноїд S містить одиницю , то отримуємо, що I_1 або I_2 збігається з всім S. Лему доведено. $\square$

Означення 12. *Нехай I – головний ідеал комутативного моноїда S. Елемент $a \in S$ називається твірним, якщо $aS = I$.*

Визначимо множину

$$\rho_{(1,a)} = \{s(1,a),\ s(a,1),\ s(1,a^2),\ s(a^2,1),\ ...,\ s(1,a^n),\ s(a^n,1),\ ...\} \bigcup \Delta,$$

де a – твірний елемент головного ідеалу I та $n \in \mathrm{N}$.

Лема 5. *Нехай I – головний ідеал комутативного моноїда S. Множина $\rho_{(1,a)}$, де a – твірний елемент головного ідеалу I та $n \in \mathrm{N}$, породжує нерісову конгруенцією на комутативному моноїді S.*

Доведення. За побудовою $\rho_{(1,a)}$ рефлексивне, симетричне. Транзитивність випливає з того, що в цій множині є тільки пари вигляду $s(1,a), s(a,1), s(1,a^2), s(a^2,1), ...$ Замкненість щодо множення також випливає з побудови. Лему доведено. $\square$

Зауваження 1. Якщо існує два твірних елементи головного ідеалу, тоді треба перевірити, який буде породжувати цю конгруенцію, а який ні.

Лема 6. *Нехай I – головний ідеал комутативного моноїда S, ρ_{aS} – рісова конгруенція, $\tau_{(1,a)}$ – нерісова конгруенція, де a – твірний елемент головного ідеалу I. Тоді $\rho_{aS} \vee \tau_{(1,a^n)} = 1_S$, де n – довільне натуральне число.*

Доведення. Візьмемо пари $(s, sa^n) \in \tau_{(1,a^n)}$ та $(sa^n, a^n) \in \rho_{aS}$. За транзитивністю отримаємо пару: (s, a^n). Взявши пари $(a^n, 1) \in \tau_{(1,a^n)}$ та (s, a^n), отримаємо пару вигляду $(s, 1)$, де $s \in S$. Це означає, що ми отримали всі пари з $S \times S$. Лему доведено. $\square$

Лема 7. *Нехай I – головний ідеал комутативного моноїда S, ρ_{aS} – рісова конгруенція, $\tau_{(1,a)}$ – нерісова конгруенція, де a – твірний елемент головного ідеалу I. Тоді $\rho_{a^nS} \vee \tau_{(1,a)} = 1_S$, де n – довільне натуральне число.*

Доведення. Аналогічне як в лемі 6. $\square$

Лема 8. *Нехай a_1 та a_2 – твірні елементи головних ідеалів комутативного моноїда S такі, що $a_1 \neq a^n$ та $a_2 \neq a^k$, де $a \in S$ та є твірним елементом головного ідеалу, ρ_{a_2S} – рісова конгруенція, $\tau_{(1,a_1)}$ – нерісова конгруенція. Тоді $\rho_{a_2S} \vee \tau_{(1,a_1)} \neq 1_S$.*

Доведення. Якщо a_1 не ділить a_2, тоді $\rho_{a_2S} \vee \tau_{(1,a_1^n)} = \rho_{a_2S} \bigcup \tau_{(1,a_1^n)} \neq 1_S$. Це звичайне об'єднання буде конгруенцією. Транзитивність ніяких нових пар не дасть. Нехай $u = (a_1, a_2)$, тобто $a_1 = uk_1$ та $a_2 = uk_2$. Тоді виберемо пари $(a_2, k_1a_2) \in \rho_{a_2S}$ та $(k_2a_1, k_2) \in \tau_{(1,a_1)}$. Оскільки $a_1 = uk_1$, тоді $(k_2ua_2, k_2) \in \tau_{(1,a_1)}$ та $a_2 = uk_2$ отримаємо пару $(k_1a_2, k_2) \in \tau_{(1,a_1)}$. За транзитивністю отримаємо пари (a_2, k_2). Отже, $\rho_{a_2S} \vee \tau_{(1,a_1)} = \rho_{k_2S} \vee \tau_{(1,a_1)} \neq 1_S$, бо a_2 не ділить a_1.

Доведення другого випадку випливає при $k_1 = 1$. Лему доведено. $\square$

Лема 9. *Нехай $\sigma = \rho_{aS}$ – рісова конгруенція, де a – твірний елемент головного ідеалу I та $n \in \mathrm{N}$. Для довільного конгруенції σ правильна рівність $\mathcal{E}_\sigma = \left\{S \times S, \tau_{(1,a)}\tau_{(1,a^2)}, ..., \tau_{(1,a^n)}, ...\right\}$, де $n \in \mathrm{N}$.*

Доведення. Випливає з лем 4 та 6. $\square$

Лема 10. *Нехай $\sigma = \tau_{(1,a)}$ – нерісова конгруенція, де a – твірний елемент головного ідеалу I та $n \in \mathrm{N}$. Для довільного σ-квазіфільтра $\mathcal{E}_\sigma = \{S \times S, \tau_{aS}, \tau_{a^2S}, ..., \tau_{a^nS}, ...\}$, де $n \in \mathrm{N}$.*

Доведення. Випливає з лем 7 та 8. □

Лема 11. *Нехай S – досконалий комутативний моноїд. Тоді довільний квазіфільтр вигляду $\mathcal{E}_\sigma$ є тривіальним.*

Доведення. За теоремою 2: досконалий комутативний моноїд S немає ні зростаючого, ні спадного нескінченного ланцюга головних ідеалів. Припустимо, що

$$aS \supset a^2S \supseteq a^3S \supseteq ... \supseteq a^nS,$$

де a – твірний елемент головного ідеалу I та $n \in \mathrm{N}$. Але цей ланцюг повинен обриватися, тобто $a^k = 0$, для деякого фіксованого $k \in \mathrm{N}$. За лемою 5 отримаємо, що $\sigma_{(1,a)} = \{s(1,a), ..., s(1,a^{k-1})\}$ та за третьою умовою квазіфільтра $(\Delta : t) \in \mathcal{E}_\sigma$ для довільного $t \in aS$. Це означає, що $\mathcal{E}_\sigma$ – тривіальні. Тепер розглянемо випадок, коли головний ідеал ідемпотентний, тобто $I^2 = I$. Тоді за допомогою ідеалу I з леми 5 можна отримати конгруенцію $\sigma_{(1,a)}$. Але за умовою $\mathcal{E}_\sigma$ є тривіальним, бо $(\Delta : t) \in \mathcal{E}_\sigma$ для довільного $t \in aS$. Це випливає з того, що ідеал I – головний та $a^2 = a$. Лему доведено. □

Теорема 3. *Всі квазіфільтри в категорії лівих $S-$полігонів є тривіальними тоді і тільки тоді, коли S є досконалим.*

Доведення. Від супротивного. Припустимо, що існують нетривіальні квазіфільтри. Візьмемо довільний твірний елемент a головного ідеалу. За допомогою цього елемента можна побудувати спадний ланцюг головних ідеалів $aS \supseteq a^2S \supseteq ... \supseteq a^nS \supseteq ...$. Але цей ланцюг повинен обірватися, бо в іншому випадку моноїд не буде досконалим. Звідси отримуємо суперечність. У протилежний бік доведення випливає з леми 11. Теорему доведено. □

Наслідок 1. *Всі фільтри часток в категорії лівих $S-$полігонів є тривіальними тоді і тільки тоді, коли S є досконалим.*

Отримані результати можна об'єднати в одну теорему.

Теорема 4. *Нехай S – комутативний моноїд. Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) *всі спеціальні квазіфільтри тривіальні;*
(2) *всі квазіфільтри тривіальні;*
(3) *S – досконалий моноїд.*

Доведення. Випливає з попередньої леми 11 і теореми 3. □

1. *Горбачук О.Л.* Про $S-$кручення в модулях / *Горбачук О.Л., Комарницький М.Я.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1977. – Вип. 12. – С. 32-34.
2. *Комарницкий Н.Я.* Об аксиоматизируемости некоторых классов модулей, связаных с кручением / *Комарницкий Н.Я.* // Мат.ислед. – 1980. – Вып. 48. – С. 92-109.
3. *Мишина А.П.* Абелевы группы и модули / *Мишина А.П., Скорняков Л.А.* – М.: Наука, 1969. – С. 152.
4. *Golan J.S.* Torsion Theories / *Golan J.S.* – Longman Scientific and Technical, Harlow, 1986.
5. *Isbell J.R.* Perfect Monoids / *Isbell J.R.* // Semigroup Forum. – 1971. – Vol. 2. – P. 95-118.

6. *Kilp M.* Monoids, Acts and Categories / *Kilp M., Knauer U., Mikhalov A. V.* – Walter de Gruyter, Berlin, 2000.
7. *Luedeman J.K.* Torsion theories and semigroup of quotients / *Luedeman J.K.* – Lecture Notes in Mathematics 998, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1983. – P. 350-373.
8. *Mitsch H.* Semigroups and Their Lattice of Congruences II / *Mitsch H.* // Semigroup Forum. – 1997. – Vol. 54. – P. 1-42.
9. *Nastasescu C.* Atomical Grothendieck categories / *Nastasescu C., Torrecillas B.* // Int. J. Math. Math. Sci. – 2003. – Vol. 71. – P. 4501-4509.
10. *Wiegandt R.* Torsion Theory for Acts / *Wiegandt R., Lex W.* // Studio Scientiarum Mathematicarum Hungarica. – 1981. – Vol. 16. – P. 263-280.
11. *Wiegandt R.* Radicals and Torsion Theory for Acts / *Wiegandt R.* // Semigroup Forum. – 2006. – Vol. 72. – P. 312-328.
12. *Zhang R.Z.* Torsion theories and quasi-filters of right congruences / *Zhang R.Z., Gao W.M., Xu F.Y.* // Algebra Colloq. – 1994. – Vol. 1, №3. – P. 273-280.
13. *Zhang R.Z.* Hereditary torsion classes of $S-$systems *Zhang R.Z., Shum K.P.* // Semigroup Forum. – 1996. – Vol. 52. – P. 253-270.

ON THE MONOIDS OVER WHICH ALL QUASI-FILTERS ARE TRIVIAL

Roman OLIYNYK

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: forvard-or@ukr.net

In the category of $S-$acts many results of homological character can be prowed which are analogous of known from $R-$modules. An important branch of module theory is hereditary torsion theory. It was observed by Zhang, Gao and Xi that the hereditary torsion theories are closely related with the quasi-filters of left congruences defined on the $S-$set S. In this paper, we investigate the concept of $\sigma-$quasi-filters of left congruences of monoid S. The main result describes a commutative monoids S over which all quasi-filters and $\sigma-$quasi-filters are trivial. Namely, all quasi-filters and $\sigma-$quasi-filters are trivial if and only if monoid S is perfect.

Key words: monoid, poligon, congruence, quasi-filter, torsion theory.

ПРО МОНОИДЫ, НАД КОТОРЫМИ ВСЕ КВАЗИФИЛЬТРЫ ТРИВИАЛЬНЫ

Роман ОЛИЙНЫК

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: forvard-or@ukr.net

Часть результатов гомологического характера для категории $S-$полигонов аналогичны соответственным фактам из теории $R-$модулей. Цанг, Гао и Кси изучили связи между теориями кручений и квазифильтрами левых конгруэнций, которые определены на $S-$полигоне S. Рассмотрено квазифильтры и $\sigma-$квазифильтры левых конгруэнций моноида с нулем. Основной результат показывает, что все квазифильтры и $\sigma-$квазифильтры тривиальны тогда и только тогда, когда комутативный моноид S совершенен.

Ключевые слова: моноид, полигон, конгруэнция, квазифильтр, теория кручений.

Стаття надійшла до редколегії 16.06.2009

Прийнята до друку 16.12.2009

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2009.
Вип. 71. С. 184–190

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech. Math. 2009.
Is. 71. P. 184–190

УДК 517.95

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ ЗІ ЗМІННИМИ ПОКАЗНИКАМИ НЕЛІНІЙНОСТІ

Оксана ПАНАТ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: panat_ot@i.ua

Знайдено поведінку при $t \to +\infty$ глобальних (за часом) розв'язків мішаних задач для деяких класів нелінійних гіперболічних рівнянь третього порядку.

Ключові слова: гіперболічне рівняння третього порядку, змінний показник нелінійності.

Диференціальне рівняння третього порядку

$$u_{tt} = g(u, \nabla u, \Delta u) + h\Delta u_t, \tag{1}$$

де g – деяка функція, $h \in \mathbb{R}^1$, $h > 0$, розглядали раніше багато авторів (див. [1]-[15]). Зокрема, якщо функція u визначає коефіцієнт згущення в'язкого газу, то вона задовольняє рівняння (1) при $g(u, \nabla u, \Delta u) = c^2\Delta u$, $h = 4/3\nu$, де c – швидкість поширення звуку у нев'язкому газі; ν – кінематичний коефіцієнт в'язкості. Задачу Коші для такого рівняння досліджено в [1]. Розв'язок одержано методом Коші, а також вивчено його хвильові властивості. Мішані задачі для рівняння (1), коли g – нелінійна функція, розглянуто в [2]-[3]. Знайдено умови існування єдиного класичного розв'язку і його поведінку при $t \to +\infty$. У [4]-[15] вивчали питання існування та єдиності узагальнених розв'язків відповідних задач для рівняння (1) та деяких його узагальнень.

Мета нашої праці – дослідити поведінку при $t \to +\infty$ розв'язків деяких узагальнень рівняння (1).

Нехай $n \in \mathbb{N}$; $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область з межею $\partial\Omega \in C^1$; $Q_\tau = \Omega \times (0, \tau)$; $\Omega_\tau = \Omega \times \{\tau\}$; $p \in L^\infty(\Omega)$, $p_0 \equiv \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} p(x) > 1$, $p^0 \equiv \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} p(x) < +\infty$ і $1/p(x) + 1/p'(x) = 1$, $x \in \Omega$.

В області Q_T розглянемо мішану задачу

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_i t})_{x_j} - \sum_{i,j=1}^{n} (b_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + c_1(x)u_t +$$
$$+g_1(x)|u_t|^{p(x)-2}u_t + g_2(x)|u|^{p(x)-2}u = 0, \tag{2}$$

$$u|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \tag{3}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \;\; u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega. \tag{4}$$

Нагадаємо, що узагальненим простором Лебега називають множину функцій

$$L^{p(x)}(\Omega) = \Big\{ v : \Omega \to \mathbb{R}^1 \;\Big|\; v - \text{ вимірна}, \, \rho_p(v,\Omega) < +\infty \Big\},$$

де $\rho_p(v,\Omega) = \int_\Omega |v(x)|^{p(x)}\,dx$. У праці [16] доведено, що $L^{p(x)}(\Omega)$ є сепарабельним, рефлексивним і банаховим простором, якщо на ньому ввести норму за правилом

$$||v; L^{p(x)}(\Omega)|| = \inf\Big\{ \lambda > 0 : \int\limits_\Omega |v/\lambda|^{p(x)}\,dx \leqslant 1 \Big\}.$$

Крім того, $[L^{p(x)}(\Omega)]^* = L^{p'(x)}(\Omega)$ і $L^{r(x)}(\Omega) \subset L^{p(x)}(\Omega)$, якщо $r(x) \geqslant p(x)$ (див. [16], с. 599-600).

Припускаємо, що виконуються такі умови:

(A): $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $a_{ij} = a_{ji}$ $(i,j = \overline{1,n})$,
$a_0|\xi|^2 \leqslant \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant a^0|\xi|^2$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$ та майже всіх $x \in \Omega$,
де $a_0, a^0 > 0$;

(B): $b_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ $(i,j = \overline{1,n})$,
$b_0|\xi|^2 \leqslant \sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant b^0|\xi|^2$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$ та майже всіх $x \in \Omega$,
де $b_0, b^0 > 0$;

(C): $c_1 \in L^\infty(\Omega)$, $0 < c_{1,0} \leqslant c_1(x) \leqslant c_1^0$ для майже всіх $x \in \Omega$;

(G): $g_1, g_2 \in L^\infty(\Omega)$, $g_{i,0} \leqslant g_i(x) \leqslant g_i^0$ для майже всіх $x \in \Omega$, де
$g_{i,0}, g_i^0 > 0$ $(i = 1,2)$;

(U): $u_0 \in L^2(\Omega) \cap L^{p(x)}(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$.

Означення 1. *Узагальненим розв'язком задачі (2)-(4) в області* Q_T *називаємо функцію* $u \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap L^{p(x)}(Q_T)$, $u_t \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap L^{p(x)}(Q_T)$, $u_{tt} \in L^2(Q_T)$, *яка задовольняє умови (4), а також інтегральну рівність*

$$\int\limits_{Q_T} \Bigg[u_{tt}v + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i t}v_{x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x)u_{x_i}v_{x_j} + c_1(x)u_t v +$$
$$+g_1(x)|u_t|^{p(x)-2}u_t v + g_2(x)|u|^{p(x)-2}uv \Bigg]\,dx\,dt = 0$$

для всіх $v \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap L^{p(x)}(Q_T)$.

Означення 2. *Якщо функція $u : \Omega\times(0,\infty) \to \mathbb{R}^1$ для кожного $T > 0$ є узагальненим розв'язком задачі (2)-(4) в області Q_T, то u називатимемо глобальним розв'язком задачі (2)-(4).*

Припустимо, що функція u – глобальний розв'язок задачі (2)-(4), введемо функціонал

$$E(t) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_t}\left[|u_t|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}\right]dx + \int\limits_{\Omega_t}\frac{g_2(x)}{p(x)}|u|^{p(x)}\,dx, \quad t > 0.$$

З метою спрощення записів позначимо

$$A_1 = n\max_{i,j=\overline{1,n}}\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|a_{ij}(x)|, \quad W = \min\left\{\frac{2a_0b_0}{A_1^2}, \frac{2c_{1,0}}{c_1^0+2}, \frac{p^0}{p^0-1}\right\}. \tag{5}$$

Нехай $\gamma = \gamma(\Omega) > 0$ – стала з нерівності Фрідріхса (див. [17], с. 44), тобто

$$\int\limits_{\Omega}|v|^2\,dx \leqslant \gamma\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}|v_{x_i}|^2\,dx \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega). \tag{6}$$

Говоритимемо, що виконується умова **(V)**, якщо

(V): $K_1 \equiv 1 - c_1^0\gamma/b_0 > 0$, $K_2 \equiv p_0 - g_1^0/g_{2,0} > 0$.

Доведемо таку теорему.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(G)**, **(U)**, **(V)**. Якщо u – глобальний розв'язок задачі (2)-(4), то існують сталі $C > 0$, $\omega > 0$ такі, що*

$$E(t) \leqslant CE(0)e^{-\omega t}, \quad t > 0. \tag{7}$$

Доведення. Нехай u – глобальний розв'язок задачі (2)-(4). Тоді для всіх $v \in H_0^1(\Omega)\cap$ $\cap L^{p(x)}(\Omega)$ правильна рівність

$$\int\limits_{\Omega_t}\Bigg[u_{tt}v + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_it}v_{x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x)u_{x_i}v_{x_j} + c_1(x)u_tv +$$

$$+g_1(x)|u_t|^{p(x)-2}u_tv + g_2(x)|u|^{p(x)-2}uv\Bigg]dx = 0, \quad t \geq 0. \tag{8}$$

Знайдемо похідну від E за t та скористаємося рівністю (8) при $v = u_t$

$$\frac{dE}{dt} = \int\limits_{\Omega_t}\left[u_{tt}u_t + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}u_{x_i}u_{x_jt} + g_2|u|^{p(x)-2}uu_t\right]dx =$$

$$= -\int\limits_{\Omega_t}\left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_it}u_{x_jt} + c_1|u_t|^2 + g_1|u_t|^{p(x)}\right]dx. \tag{9}$$

Розглянемо функціонал

$$J(t) = E(t) + \varepsilon\int\limits_{\Omega_t} uu_t\,dx, \quad \varepsilon > 0, \quad t > 0. \tag{10}$$

Враховуючи (10), (9) та (8) при $v = u$, отримаємо

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{dE}{dt} + \varepsilon \int\limits_{\Omega_t} |u_t|^2\, dx + \varepsilon \int\limits_{\Omega_t} u_{tt} u\, dx =$$

$$= -\int\limits_{\Omega_t} \Big[\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i t} u_{x_j t} + c_1 |u_t|^2 + g_1 |u_t|^{p(x)} \Big]\, dx + \varepsilon \int\limits_{\Omega_t} |u_t|^2\, dx - \tag{11}$$

$$-\varepsilon \int\limits_{\Omega_t} \Big[\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i t} u_{x_j} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + c_1 u_t u + g_1 |u_t|^{p(x)-2} u_t u + g_2 |u|^{p(x)} \Big]\, dx.$$

Оцінимо доданки останньої рівності. У цьому разі використовуватимемо умови (**A**), (**B**), (**C**), (**G**), оцінку (6), нерівність Юнга з параметром $\varkappa > 0$

$$\alpha\beta \leqslant \varkappa |\alpha|^2 + \frac{1}{4\varkappa} |\beta|^2,$$

де $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$, а також нерівність

$$\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} \beta_i \gamma_j \leqslant \alpha_{i^*j^*} \sum_{i,j=1}^n |\beta_i \gamma_j| = \alpha_{i^*j^*} \Big(\sum_{i=1}^n |\beta_i| \Big) \Big(\sum_{i=1}^n |\gamma_i| \Big) \leqslant$$

$$\leqslant \alpha_{i^*j^*} \left(\kappa \Big(\sum_{i=1}^n |\beta_i| \Big)^2 + \frac{1}{4\kappa} \Big(\sum_{i=1}^n |\gamma_i| \Big)^2 \right) \leqslant n \alpha_{i^*j^*} \left(\kappa \sum_{i=1}^n \beta_i^2 + \frac{1}{4\kappa} \sum_{i=1}^n \gamma_i^2 \right),$$

де α_{ij}, β_i, $\gamma_i \in \mathbb{R}^1$ $(i, j = \overline{1,n})$, $\alpha_{i^*j^*} = \max\limits_{i,j=\overline{1,n}} |\alpha_{ij}|$, $\kappa > 0$ – довільне число. Матимемо

$$\left| -\varepsilon \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i t} u_{x_j}\, dx \right| \leqslant \varepsilon A_1 \int\limits_{\Omega_t} \Big[\delta_1 \sum_{i=1}^n |u_{x_i t}|^2 + \frac{1}{4\delta_1} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 \Big]\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon A_1 \delta_1}{a_0} \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i t} u_{x_j t}\, dx + \frac{\varepsilon A_1}{4\delta_1 b_0} \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^n b_{ij} u_{x_i} u_{x_j}\, dx,$$

де $\delta_1 > 0$;

$$\left| -\varepsilon \int\limits_{\Omega_t} c_1 u_t u\, dx \right| \leqslant \frac{\varepsilon c_1^0}{2} \int\limits_{\Omega_t} \Big[|u_t|^2 + |u|^2 \Big]\, dx \leqslant \frac{\varepsilon c_1^0}{2} \int\limits_{\Omega_t} |u_t|^2\, dx + \frac{\varepsilon c_1^0 \gamma}{2b_0} \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^n b_{ij} u_{x_i} u_{x_j}\, dx;$$

$$\left| -\varepsilon \int\limits_{\Omega_t} g_1 |u_t|^{p(x)-2} u_t u\, dx \right| \leqslant \varepsilon \int\limits_{\Omega_t} g_1 |u_t|^{p(x)-1} |u|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon (p^0 - 1)}{p^0} \int\limits_{\Omega_t} g_1 |u_t|^{p(x)}\, dx + \frac{\varepsilon g_1^0}{g_{2,0}} \int\limits_{\Omega_t} \frac{g_2}{p} |u|^{p(x)}\, dx.$$

На підставі одержаних оцінок, рівність (11) перепишемо у вигляді

$$\frac{dJ}{dt} \leqslant \Big(-1 + \frac{\varepsilon A_1 \delta_1}{a_0} \Big) \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i t} u_{x_j t}\, dx +$$

$$+\Big(-\varepsilon+\frac{\varepsilon A_1}{4\delta_1 b_0}+\frac{\varepsilon c_1^0\gamma}{2b_0}\Big)\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i,j=1}^n b_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\,dx+\Big(-c_{1,0}+\varepsilon+\frac{\varepsilon c_1^0}{2}\Big)\int\limits_{\Omega_t}|u_t|^2\,dx+$$
$$+\Big(-1+\frac{\varepsilon(p^0-1)}{p^0}\Big)\int\limits_{\Omega_t}g_1|u_t|^{p(x)}\,dx+\varepsilon\Big(\frac{g_1^0}{g_{2,0}}-p_0\Big)\int\limits_{\Omega_t}\frac{g_2}{p}|u|^{p(x)}\,dx,$$

де $\delta_1>0$.

Взявши $\delta_1=\dfrac{A_1}{2b_0}$ та врахувавши умову **(V)**, одержимо нерівність

$$\frac{dJ}{dt}\leqslant-\left(1-\frac{\varepsilon A_1^2}{2a_0b_0}\right)\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_it}u_{x_jt}\,dx-\frac{K_1\varepsilon}{2}\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i,j=1}^n b_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\,dx-c_{1,0}\Bigg(1-$$
$$-\frac{\varepsilon(2+c_1^0)}{2c_{1,0}}\Bigg)\int\limits_{\Omega_t}|u_t|^2\,dx-\left(1-\frac{\varepsilon(p^0-1)}{p^0}\right)\int\limits_{\Omega_t}g_1|u_t|^{p(x)}\,dx-K_2\varepsilon\int\limits_{\Omega_t}\frac{g_2}{p}|u|^{p(x)}\,dx,\quad(12)$$

де $K_1>0$, $K_2>0$ визначені в **(V)**.

Якщо

$$0<\varepsilon<W,$$

де W взято з (5), то правильні оцінки $1-\frac{\varepsilon A_1^2}{2a_0b_0}>0$, $1-\frac{\varepsilon(2+c_1^0)}{2c_{1,0}}>0$, $1-\frac{\varepsilon(p^0-1)}{p^0}>0$. На підставі цього нерівність (12) перепишемо у вигляді

$$\frac{dJ}{dt}\leqslant-\frac{K_1\varepsilon}{2}\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i,j=1}^n b_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\,dx-K_3\int\limits_{\Omega_t}|u_t|^2\,dx-K_2\varepsilon\int\limits_{\Omega_t}\frac{g_2}{p}|u|^{p(x)}\,dx,$$

де $K_3\equiv c_{1,0}(1-\frac{\varepsilon(2+c_1^0)}{2c_{1,0}})>0$. Звідси матимемо нерівність

$$\frac{dJ}{dt}\leqslant-K_4(\varepsilon)E(t),\tag{13}$$

де $K_4(\varepsilon)=\min\{K_1\varepsilon,2K_3,K_2\varepsilon\}$.

Одержимо ще одну оцінку. З рівності (10) та нерівності (6) отримуємо, що

$$J(t)\leqslant E(t)+\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{\Omega_t}\left[|u|^2+|u_t|^2\right]dx\leqslant E(t)+\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{\Omega_t}|u_t|^2\,dx+\frac{\varepsilon\gamma}{2b_0}\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i,j=1}^n b_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\,dx\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_{\Omega_t}\left[\frac12\left(1+\frac{\varepsilon\gamma}{b_0}\right)\sum_{i,j=1}^n b_{ij}u_{x_i}u_{x_j}+\frac12(1+\varepsilon)|u_t|^2+\frac{g_2}{p}|u|^{p(x)}\right]dx\leqslant A(\varepsilon)E(t),\tag{14}$$

де $A(\varepsilon)=\max\{1+\varepsilon\gamma/b_0,\ 1+\varepsilon\}$.

Подібними міркуваннями для $0<\varepsilon<\min\{1,b_0/\gamma\}$ одержимо оцінку

$$J(t)\geqslant E(t)-\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{\Omega_t}\left[|u|^2+|u_t|^2\right]dx\geqslant\int\limits_{\Omega_t}\Bigg[\frac12\left(1-\frac{\varepsilon\gamma}{b_0}\right)\sum_{i,j=1}^n b_{ij}u_{x_i}u_{x_j}+$$
$$+\frac12(1-\varepsilon)|u_t|^2+\frac{g_2}{p}|u|^{p(x)}\Bigg]dx\geqslant N(\varepsilon)E(t),$$

де $N(\varepsilon)=\min\{1-\varepsilon\gamma/b_0,\ 1-\varepsilon\}$.

Зафіксуємо довільне значення параметра ε з проміжку $(0, \min\{W, 1, b_0/\gamma\})$. Тоді для такого $\varepsilon > 0$, на підставі (14), з (13) матимемо, що $\frac{dJ}{dt} \leqslant -\frac{K_4(\varepsilon)}{A(\varepsilon)} J(t)$. Звідси $J(t) \leqslant J(0)\, e^{-\omega t}$, де $\omega = K_4(\varepsilon)/A(\varepsilon)$. Оскільки $J(0) \leqslant A(\varepsilon)E(0)$ і $J(t) \geqslant N(\varepsilon)E(t)$, то

$$E(t) \leqslant \frac{J(t)}{N(\varepsilon)} \leqslant \frac{J(0)}{N(\varepsilon)}\, e^{-\omega t} \leqslant \frac{A(\varepsilon)}{N(\varepsilon)} E(0)\, e^{-\omega t},$$

тобто (7) виконується з $C = A(\varepsilon)/N(\varepsilon)$. Теорему доведено. □

1. *Войт С.С.* Распространение начальных уплотнений в вязком газе / *Войт С.С.* // Уч. зап. МГУ. Механика. – 1954. – Вып. 172, № 5. – С. 125-142.
2. *James M. Greenberg* On the existence, uniqueness, and stability of solutions of the equation $\sigma'(u_x)u_{tt} + +\lambda u_{xtx} = \rho_0 u_{tt}$ / *James M. Greenberg, Richard C. Mac Camy and Victor J. Mizel.* // Journal of Mathematics and Mechanics. – 1968. – Vol. 17, №7. – P. 707-728.
3. *Constantine M. Dafermos.* The mixed initial-boundary value problem for the equations of nonlinear one-dimensional viscoelasticity / *Constantine M. Dafermos.* // J. Diff. Equat. – 1969. – Vol. 6. – P. 71-86.
4. *Andrews G.* On the existence of solution to the equation $u_{tt} = u_{xxt} + \sigma(u_x)_x$ / *Andrews G.* // J. Diff. Equat. – 1980. – Vol. 35. – P. 200-231.
5. *Andrews G.* Asymptotic behaviour and changes of phase in one-dimensional nonlinear viscoelasticity / *Andrews G., Ball J.M.* // J. Diff. Equat. – 1982. – Vol. 44. – P. 306-340.
6. *Сувейка И.В.* Смешанные задачи для уравнения распространения возмущений в вязких средах / *Сувейка И.В.* // Диф. уравн. – 1983. – Вып. 19, № 2. – С. 337-347.
7. *Dang Dinh Hai.* On a strongly damped quasilinear wave equation / *Dang Dinh Hai* // Demonstratio mathematica – 1986. – Vol. XIX, №2. – P. 327-340.
8. *Слєпцова І.П.* Змішана задача для рівняння розповсюдження збурень у в'язких середовищах в необмежених областях / *Слєпцова І.П., Шишков А.Є.* // Доп. АН УРСР. Сер. А. Фіз.-мат. та техн. науки. – 1988. – № 11. – С. 27-30.
9. *Глазатов С.Н.* Некоторые задачи для нелинейных уравнений третьего порядка. – Новосибирск, 1992. Преприпт № 7.
10. *Mitsuhiro Nakao.* Existence of an anti-periodic solution for the quasilinear wave equation with viscosity / *Mitsuhiro Nakao.* // J. Math. Anal. and Appl. – 1996. – Vol. 204. – P. 754-764.
11. *Mitsuhiro Nakao.* Anti-periodic solution for $u_{tt} - (\sigma(u_x))_x - u_{xxt} = f(x,t)$ / *Mitsuhiro Nakao and Hiroko Okochi.* // J. Math. Anal. and Appl. – 1996. – Vol. 197. – P. 796-809.
12. *Fengxin Chen* Long time behavior of strongly damped nonlinear wave equations / *Fengxin Chen, Boling Guo and Ping Wang.* // J. Diff. Equat. – 1998. – Vol. 147. – P. 231-241.
13. *João-Paulo Dias.* On the existence of a global strong radial symmetric solution for a third-order nonlinear evolution equation in two space dimensions / *João-Paulo Dias.* // J. Math. Pures Appl. – 2001. – Vol. 80, №5. – P. 535-546.
14. *Zhijian Yang.* Global existence of solutions for quasi-linear wave equations with viscous damping / *Zhijian Yang and Guowang Chen.* // J. Math. Anal. and Appl. – 2003. – Vol. 285. – P. 604-618.
15. *Yang Zhijian.* Cauchy problem for quasi-linear wave equations with nonlinear damping and source terms / *Yang Zhijian.* // J. Math. Anal. and Appl. – 2004. – Vol. 300. – P. 218-243.
16. *Kováčik O.* On spaces L^p and $W^{1,p}$ / *Kováčik O., Rákosnik J.* // Czechoslovak Math. J. – 1991. – Vol. 41 (116). – P. 592-618.

17. *Гаевский Х.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* – М., 1978.

SOME PROPERTIES OF THE SOLUTIONS TO THIRD ORDER EVOLUTION EQUATIONS WITH VARIABLE EXPONENTS OF NONLINEARITY

Oksana PANAT

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: panat_ot@i.ua

In this article we established the behaviour of the global (in time) solutions to the mixed problems for some classes nonlinear hyperbolic equations of the third order if $t \to +\infty$.

Key words: hyperbolic equation of the third order, variable exponent of nonlinearity.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Оксана ПАНАТ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: panat_ot@i.ua

Исследовано поведение при $t \to +\infty$ глобального (за временем) решения смешаных задач для некоторых классов нелинейных гиперболических уравнений третьего порядка.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение третьего порядка, переменный показатель нелинейности.

Стаття надійшла до редколегії 20.11.2009

Прийнята до друку 01.12.2009

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2009.
Вип. 71. С. 191–203

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech. Math. 2009.
Is. 71. P. 191–203

УДК 512.546

ON THE ISOMORPHISMS OF FREE PARATOPOLOGICAL GROUPS AND FREE HOMOGENEOUS SPACES II

Nazar PYRCH

Ukraine Academy of Printing,
79020, L'viv, Pidgolosko St., 19
e-mail: pnazar@ukr.net

In the paper we prove that a free paratopological group on a T_0-topological space is a T_0-topological space. We consider the functors that preserve the isomorphisms of the free (abelian) paratopological groups and free homogeneous spaces.

Key words: free paratopological group, free homogeneous space, isomorphism of paratopological groups, isomorphism of homogeneous spaces.

1. Preliminaries. The paper is a continuation of the paper [11]. All the notations and definition are taken from [11].

In the second section of the paper we prove that a free paratopological group on a T_0-space is a T_0-space. The third section is devoted to functors preserving isomorphisms of free (abelian) paratopological groups and free homogeneous spaces. The fourth section contains a method of the reducing of the isomorphic classification of free (abelian) paratopological groups to the isomorphic classification of free (abelian) paratopological groups on T_0-spaces.

Some results of the paper were announced in [10].

2. Free paratopological groups on T_0-spaces. For every $n \geq 1$, by D_n we denote the set $\{1, 2, \ldots, n\}$ with the topology $\{\emptyset, U_1, U_2, \ldots U_n\}$, where $U_k = \{1, 2, \ldots, k\}$.

It was proved in [13, Pr. 3.4] that a Markov free abelian paratopological group on T_0-space is a T_0-space.

Theorem 1. *A Markov free paratopological group over a T_0-space is a T_0-space.*

To prove the theorem we need the following lemmas.

Lemma 1. *Let X be a T_0-space, Y a finite non-empty subset of X and $n = |Y|$. Then there exists a continuous mapping $f\colon X \to D_n$ such that $f|Y$ is injective.*

Proof. Let $Y = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $G = (\mathbb{R}, +)$ and τ be the topology on G with the base $\{[x; +\infty) : x \in \mathbb{R}\}$. Then (G, τ) is a paratopological group [14, Ex. 2.14]. We shall denote this group by $\mathbb{R}^*$. Since X is a T_0-space, for each pair $\{i, j\}$ such that $i \neq j$ there exists an open set U_{ij} containing exactly one of the points x_i and x_j. Consider the mapping $f_{ij} \colon X \to \mathbb{R}^*$ defined by $f_{ij}(U_{ij}) = 2^{ni+j}$ and $f_{ij}(X \setminus U_{ij}) = 0$. The mapping f_{ij} is continuous [13, Lem. 2.3]. Since $\mathbb{R}^*$ is a paratopological group, the mapping $g \colon X \to \mathbb{R}^*$ such that $g(x) = \sum f_{ij}(x)$ is continuous. Then $f_{ij}(x) = 2^{ni+j}([g(x)/2^{ni+j}] \mod 2)$ for every $x \in X$ and $i \neq j$. Since $f_{ij}(x_i) \neq f_{ij}(x_j)$ provided $i \neq j$, we see that $g|Y$ is an injection. Let $g(Y) = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ where $a_1 > a_2 > \cdots > a_n$. Consider the mapping $h \colon \mathbb{R}^* \to D_n$ such that $h(x) = i$, where $i = n$ if $x < a_n$ and i is the smallest number such that $x \geq a_i$ otherwise. It is easy to check that h is continuous. Now we put $f = hg \colon X \to D_n$. Since $g|Y$ is an injection and $h(a_i) = i$ for each i, the map $f|Y$ is an injection too.

Lemma 2. *(T.O. Banakh) A Markov free paratopological group $F_p(D_n)$ is a T_0-space for every positive integer n.*

Proof. It was proved in [13, Pr. 3.4] that a Markov free abelian paratopological group on a T_0-space is a T_0-space. Let $\varphi : F_p(D_n) \to A_p(D_n)$ be a continuous homomorphism such that $\varphi(x) = x$ for each $x \in D_n$, K be the commutant of $F_p(D_n)$. Since $A_p(D_n)$ is abelian, $K \subset \ker \varphi$. Let $\pi : F_p(D_n) \to F_p(D_n)/K$ be the quotient homomorphism. Since the group $F_p(D_n)/K$ is abelian, there exists a continuous homomorphism $\psi : A_p(D_n) \to F_p(D_n)/K$ such that $\psi(x) = \pi(x)$ for every $x \in D_n$. Since the group $F_p(D_n)$ is generated by the set D_n, we obtaine $\pi = \psi\varphi$. Then $K = \ker \pi \supset \ker \varphi$, thus $K = \ker \varphi$.

Therefore, in order to prove that $F_p(D_n)$ is a T_0-space it suffices to construct a topology τ on $F(D_n)$ which separates every point from $K \backslash \{e\}$ and the identity $\{e\}$ of $F_p(D_n)$ and D_n is a subspace of $(F_p(D_n), \tau)$. Using results from [15] it is easy to prove that the group $F_p(D_n)$ is algebraically free over the set D_n. For every word $A \in F_p(D_n)$ let $\varphi_i(A)$ be the sum of degrees of the letters "i" in the word A. Consider the subsemigroup S of $F_p(D_n)$ generated by $\{e\}$ and the set of all the words $A \in F_p(D_n)$ over the alphabet D_n such that the last nonzero element in the sequence $(\varphi_1(A), \varphi_2(A), \ldots, \varphi_n(A))$ is positive. For every $s \in S$ and for every $g \in F_p(D_n)$ we see that $g^{-1}xg \in S$, thus the semigroup S defines a semigroup topology τ on $F_p(D_n)$ [14, 2] such that $S \subset \tau$. Then D_n is a subspace of $(F_p(D_n), \tau)$ and the topology τ induces the discrete topology on K.

Proof of the theorem. Using results from [15] it is easy to prove that the group $F_p(X)$ is algebraically free over the set X. Since the space of paratopological group is homogeneous, it is sufficient to prove that for each word $A \in F_p(X)$ over the alphabet X there exists an open set U separating A and the identity of $F_p(X)$. Let $A = x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} ... x_n^{\epsilon_n}$ be a word in the irreducible form and $a_1, a_2, ..., a_k$, $k \leqslant n$, be its letters. Then by Lemmma 1 there exists a continuous mapping $f \colon X \to D_k$ such that $f(a_i) \neq f(a_j)$ provided $i \neq j$. We may extend the mapping f to a continuous homomorphism $f^* \colon F_p(X) \to F_p(D_k)$. Then $f^*(A) \neq e_{F_p(D_k)}$. Since $F_p(D_k)$ is a T_0-space, there exists an open set $U \subseteq F_p(D_k)$ containing exactly one of the points $f^*(A)$ and $e_{F_p(D_k)}$. The set $(f^*)^{-1}(U)$ is open and contains exactly one of the points A and $e_{F_p(X)}$.

3. The reflections of spaces and the isomorphisms of free paratopological groups. A topological space is *totally disconnected* if each its quasicomponent is a singleton.

Let T be a class of spaces satisfying the following property:

Let X be a space such that for every $x, y \in X$ there exists $f\colon X \to Y$, where $Y \in T$ with $f(x) \neq f(y)$, then $X \in T$. $(*)$

Examples of the classes spaces satisfying property $(*)$ are: T_0-spaces, T_1-spaces, T_2-spaces, functionally Hausdorff spaces, totally disconnected spaces.

A class T of spaces is *hereditary* provided that if $X \in T$ then $Y \in T$ for each subspace Y of X. The following observation was made by T. O. Banakh.

Proposition 1. *A class T of spaces satisfies condition $(*)$ if and only if T is a hereditary class closed under Tychonoff products and strengthening of topology.*

Let T be a class of spaces satisfying condition $(*)$ and let X be a space. Consider the following equivalence relation on X. Let $x, y \in X$. Put $x \sim_T y$ if and only if $f(x) = f(y)$ for each continuous mapping $f\colon X \to Y$, where $Y \in T$. The quotient space $X/\sim_T$ is called *the T-reflection of X* and is denoted by TX. If $X \in T$ then the identity homeomorphism $i\colon X \to X$ separates all pairs of different points of X, thus $X = TX$.

For some classes T of spaces the equivalence relation $\sim_T$ has an other descriptions. If T_0 is the class of T_0-spaces and $x, y \in X$ then $x \sim_{T_0} y$ if and only if either $x = y$ or there is no open subset of the space X containing exactly one of the points x, y. If fT_2 is the class of functionally Hausdorff spaces and $x, y \in X$ then $x \sim_{fT_2} y$ if and only $f(x) = f(y)$ for each continuous mapping $f\colon X \to [0;1]$, where the segment $[0;1]$ has the standard topology. If TD is the class of totally disconnected spaces and $x, y \in X$ then $x \sim_{TD} y$ if and only if the points x and y have the same quasicomponent (see also [5, §46, V.]).

Proposition 2. *Any class T satisfying condition $(*)$ determines a covariant functor $T\cdot$ from the category of spaces and continuous mappings to the category of spaces from the class T and their continuous mappings.*

Proof. Let us check that $TX \in T$ for each space X. Note that for each continuous mapping $f\colon X \to Y \in T$ there exists a continuous mapping $g\colon TX \to Y$ such that $f = g \circ t_X$, where $t_X\colon X \to TX$ is the quotient mapping. Let $x, y \in TX$, $x \neq y$. Choose points $x_1 \in t_X^{-1}(x), y_1 \in t_X^{-1}(y)$. Then there exists a continuous mapping $f\colon X \to Y \in T$ such that $f(x_1) \neq f(y_1)$. Then for the above defined g we have that $g(x) \neq g(y)$, therefore $TX \in T$.

Let $f\colon X \to Y$ be a continuous mapping, $t_X\colon X \to TX$, $t_Y\colon Y \to TY$ be the quotient mappings. Let us prove that there exists a unique continuous mapping $g\colon TX \to TY$ such that $g \circ t_X = t_Y \circ f$. Let $u \in TX$ and $x \in t_X^{-1}(u)$. Put $g(u) = t_Y(f(x))$. Let us check that the mapping g is well-defined. If $z \in t_X^{-1}(u)$ then $h(x) = h(z)$ for all continuous mappings $h\colon X \to Z$, where $Z \in T$. Since $TY \in T$, we obtaine $t_Y(f(x)) = t_Y(f(z))$, and we are done. Since t_X is the quotient mapping and the composition $t_Y \circ f$ is continuous, the mapping t_X is continuous too. Put $Tf = g$.

It is easy to check that the rule which corresponds a space TX to each space X and a mapping $Tf : TX \to TY$ to each continuous mapping $f : X \to Y$ is a covariant functor.

The functor from Proposition 2 is called *the T-reflection.*

Theorem 2. *Let T be a class of spaces satisfying condition $(*)$ such that $F_p(X') \in T$ for each space $X' \in T$. Let X and Y be spaces such that the Markov free paratopological groups $F_p(X)$ and $F_p(Y)$ are topologically isomorphic. Then the quotient mappings $t_X\colon X \to TX$ and $t_Y\colon Y \to TY$ are M_p-equivalent and hence the Markov free paratopological groups $F_p(TX)$ and $F_p(TY)$ are topologically isomorphic.*

Proof. Let $i\colon F_p(X) \to F_p(Y)$ be a topological isomorphism, $t_X\colon X \to TX$, $t_Y\colon Y \to TY$ be the quotient mappings, $t^*_X\colon F_p(X) \to F_p(TX)$ and $t^*_Y\colon F_p(Y) \to F_p(TY)$ be their homomorphic extensions.

Let us construct a continuous mapping $h\colon TX \to F_p(TY)$ such that $h \circ t_X = t^*_Y \circ (i|X)$. Let $x' \in TX$. Choose an arbitrary point $x \in X$ such that with $t_X(x) = x'$ and put $h(x') = t^*_Y i(x)$. Let $y \in X$. There is a point $x \in X$ such that $t_X(x) = t_X(y)$ and $ht_X(x) = t^*_Y i(x)$. Thus $ht_X(y) = ht_X(x) = t^*_Y i(x) = t^*_Y i(y)$ since $TY \in T$ and therefore $F_p(TY) \in T$. Thus $h \circ t_X = t^*_Y \circ (i|X)$. The continuity of the mapping h is implied from the continuity of i and t^*_Y and the fact that the mapping t_X is quotient.

Similarly, we can construct a continuous mapping $g\colon TY \to F_p(TX)$ such that $g \circ t_Y = t^*_X \circ (i^{-1}|Y)$. Let us extend the mappings h, g to the continuous homomorphisms $h^*\colon F_p(TX) \to F_p(TY)$ and $g^*\colon F_p(TY) \to F_p(TX)$. Let $x \in X$. Then

$$h^* t^*_X(x) = h^* t_X(x) = ht_X(x) = t^*_Y i(x).$$

Since the group $F_p(X)$ is generated by the set X, we have $h^* \circ t^*_X = t^*_Y \circ i$. Similarly we can show that $g^* \circ t^*_Y = t^*_X \circ i^{-1}$. Since

$$g^* \circ h^* \circ t^*_X = g^* \circ t^*_Y \circ i = t^*_X \circ i^{-1} \circ i = t^*_X,$$

we obtain $g^* \circ h^* = 1_{F_p(TX)}$. Similarly, we can prove that $h^* \circ g^* = 1_{F_p(TY)}$. Thus $h^*\colon F_p(TX) \to F_p(TY)$ is a topological isomorphism. Since $h^* \circ t^*_X = t^*_Y \circ i$, the mappings t_X and t_Y are M_p-equivalent.

Corollary 1. *Let T be one of the following clasess:*

- *T_0-spaces,*
- *functionally Hausdorff spaces,*
- *totally disconnected spaces.*

Let X and Y be spaces such that the Markov free paratopological groups $F_p(X)$ and $F_p(Y)$ are topologically isomorphic. Then the Markov free paratopological groups $F_p(TX)$ and $F_p(TY)$ are topologically isomorphic too.

Proof. If X' is a T_0-space then $F_p(X')$ is a T_0-space too [12]. If X' is a functionally Hausdorff space then $F_p(X')$ is a functionally Hausdorff space too [13, Pr. 3.8]. If X' is a totally disconnected space then by [13, Pr. 2.15] the quasicomponent of the unit in $F_p(X')$ is a singleton, thus $F_p(X')$ is a totally disconnected space too.

Corollary 2. *Let T be a class of spaces satisfying condition $(*)$ such that $F_p(X') \in T$ for each space $X' \in T$. Let X_1, X_2, Y_1, Y_2 be spaces, $f_1\colon X_1 \to Y_1$ and $f_2\colon X_2 \to Y_2$ be M_p-equivalent mappings. Then the mappings Tf_1 and Tf_2 are M_p-equivalent.*

Proof. Let $i\colon F_p(X_1) \to F_p(X_2)$, $j\colon F_p(Y_1) \to F_p(Y_2)$ be topological isomorphisms such that $f_2^* \circ i = j \circ f_1^*$. Similarly to the proof of Theorem 2 we can build topological isomorphisms $i_T\colon F_p(TX_1) \to F_p(TX_2)$ and $j_T\colon F_p(TY_1) \to F_p(TY_2)$ such that $i_T \circ t^*_{X_1} = = t^*_{X_2} \circ i$ and $j_T \circ t^*_{Y_1} = t^*_{Y_2} \circ j$. Proposition 2 implies that $Tf_1 \circ t_{X_1} = t_{Y_1} \circ f_1$ and $Tf_2 \circ t_{X_2} = t_{Y_2} \circ f_2$. If $x \in X_2$ then

$$t^*_{Y_2} f^*_2(x) = t^*_{Y_2} f_2(x) = t_{Y_2} f_2(x) = (Tf_2)t_{X_2}(x) = (Tf_2)^* t_{X_2}(x) = (Tf_2)^* t^*_{X_2}(x).$$

Since the group $F_p(X_2)$ is generated by the set X_2, we have $t^*_{Y_2} \circ f^*_2 = (Tf_2)^* \circ t^*_{X_2}$. Let $x \in X_1$. Then

$$j_T(Tf_1)^* t^*_{X_1}(x) = j_T(Tf_1)^* t_{X_1}(x) = j_T(Tf_1)t_{X_1}(x) = j_T t_{Y_1} f_1(x) = j_T t^*_{Y_1} f_1(x) =$$
$$= t^*_{Y_2} j f_1(x) = t^*_{Y_2} j f^*_1(x) = t^*_{Y_2} f^*_2 i(x) = (Tf_2)^* t^*_{X_2} i(x) = (Tf_2)^* i_T t^*_{X_1}(x).$$

Since the group $F_p(TX_1)$ is generated by the set $t^*_{X_1}(X_1)$, we obtain $(Tf_2)^* \circ i_T = = j_T \circ (Tf_1)^*$. Thus, the mappings Tf_1 and Tf_2 are M_p-equivalent.

If we replace the words “free paratopological group” by the words “free abelian paratopological group” in the Definitions 1.8 and 1.9 from the paper [11] then we obtain the definitions of A_p-equivalent spaces and A_p-equivalent mappings (remark that in the paper [11] the author did misprints in these definitions; there must we written “in Definitions 1.8 and 1.9” instead of “in Definitions 1.10 and 1.11”).

Similarly to Theorem 2 we can prove the following

Theorem 3. *Let T be a class of spaces satisfying condition $(*)$ such that $A_p(X') \in T$ for each space $X' \in T$. Let X and Y be spaces such that the Markov free abelian paratopological groups $A_p(X)$ and $A_p(Y)$ are topologically isomorphic. Then the quotient mappings $t_X\colon X \to TX$ and $t_Y\colon Y \to TY$ are A_p-equivalent and hence the Markov free abelian paratopological groups $A_p(TX)$ and $A_p(TY)$ are topologically isomorphic.*

Corollary 3. *Let T be one of the following clasess:*

- *T_0-spaces,*
- *T_1-spaces,*
- *functionally Hausdorff spaces,*
- *totally disconnected spaces.*

Let X and Y be spaces such that the Markov free abelian paratopological groups $A_p(X)$ and $A_p(Y)$ are topologically isomorphic. Then Markov free abelian paratopological groups $A_p(TX)$ and $A_p(TY)$ are topologically isomorphic too.

Proof. If X' is a T_0-space then $A_p(X')$ is a T_0-space too [13, Pr. 3.4]. If X' is a T_1-space then $A_p(X')$ is a T_1-space too [12, Pr. 3.5]. If X' is a functionally Hausdorff space then $F_p(X')$ is a functionally Hausdorff space too [13, Pr. 3.8].

Now let X' be a totally disconnected space. We are going to show that the quasi-component of the zero in $A_p(X')$ is a singleton. Let $x \in A_p(X')\backslash\{0\}$. Then there exists a finite nonempty subset $F \in X'$ and a set $\{n_y : y \in F\}$ of non-zero integers such that $x = \sum\{n_y y : y \in F\}$. Since the space X' is totally disconnected, for every point $y \in F$ there exists a clopen neighborhood $U_y \subset X'$ of y such that $U_y \cap F = \{y\}$. For every point $y \in F$ put $V_y = U_y \backslash \bigcup\{U_{y'} : y' \in F\backslash\{y\}\}$. Then $\{V_y : y \in F\}$ is a family of pairwise disjoint clopen subsets of X'. Let $f : X \to \mathbb{Z}$ be a mapping such that $f(z) = n_y$ if $z \in V_y$ for some $y \in F$ and $F(X'\backslash \bigcup\{V_y : y \in F\}) = \{0\}$. Then f is a continuous mapping.

Let $f^* : A_p(X') \to \mathbb{Z}$ be a continuous homomorphic extension of the mapping f. Then $f^*(0) = 0$ but $f^*(x) = \sum\{n_y^2 : y \in F\} > 0$. Therefore $f^{*-1}(0)$ is a clopen neighborhood of the zero of the group $A_p(X')$ not containing x. Thus $A_p(X')$ is a totally disconnected space.

Corollary 4. *Let T be a class of spaces satisfying condition $(*)$ such that $A_p(X') \in T$ for each space $X' \in T$. Let X_1, X_2, Y_1, Y_2 be spaces, $f_1 \colon X_1 \to Y_1$ and $f_2 \colon X_2 \to Y_2$ be A_p-equivalent mappings. Then the mappings Tf_1 and Tf_2 are A_p-equivalent.*

Proof. The proof is similar to the proof of Corollary 2.

Let X_1, X_2, Y_1, Y_2 be spaces. A mapping $f_1 : X_1 \to Y_1$ is called *B-equivalent* to a mapping $f_2 : X_2 \to Y_2$ if there exist isomorphisms $i : H(X_1) \to H(X_2)$ and $j : H(Y_1) \to H(Y_2)$ such that $j \circ \bar{f}_1 = \bar{f}_2 \circ i$. Recall that here by $H(X) = (H_B(X), G(X), h)$ we denote the free homogeneous space on a space X described in the beginning of [11, Part 2].

We shall need the following

Lemma 3. *Let X, Y be spaces and $(i, \varphi) : H(X) \to H(Y)$ be a morphism. Let $n \geq 0$ and $z_1, z_2, \ldots, z_{2n+1} \in H_B(X)$. Then $z = z_1 z_2^{-1} \cdots z_{2n}^{-1} z_{2n+1} \in H_B(X)$ and*

$$i(z) = i(z_1) i(z_2)^{-1} \cdots i(z_{2n})^{-1} i(z_{2n+1}).$$

Proof. Let $x, y \in H_B(x)$. Then $xy^{-1} \in G(X)$ and since (i, φ) is a morphism,

$$\varphi(xy^{-1}) = i(xy^{-1}y) i(y)^{-1} = i(x) i(y)^{-1}.$$

It is clear that $z \in H_B(X)$. Put $g = z_1 z_2^{-1} \cdots z_{2n}^{-1}$ if $n > 0$ and $g = e$ if $n = 0$. Then $g \in G(X)$ and $i(z) = i(g z_{2n+1}) = \varphi(g) i(z_{2n+1})$. Since φ is a homomorphism,

$$\varphi(g) = \varphi(z_1 z_2^{-1}) \cdots \varphi(z_{2n-1} z_{2n}^{-1}) = i(z_1) i(z_2)^{-1} \cdots i(z_{2n-1}) i(z_{2n})^{-1}.$$

Corollary 5. *Let X, Y be spaces and $(i, \varphi), (j, \psi) : H(X) \to H(Y)$ be morphisms. If $i|X = j|X$ then $(i, \varphi) = (j, \psi)$.*

Theorem 4. *Let T be a class of spaces satisfying condition $(*)$ such that $H_B(X') \in T$ for each space $X' \in T$. Let X and Y be spaces such that the free homogeneous spaces $H(X)$ and $H(Y)$ are isomorphic. Then the quotient mappings $t_X \colon X \to TX$ and $t_Y \colon Y \to TY$ are B-equivalent and hence the free homogeneous spaces $H(TX)$ and $H(TY)$ are isomorphic.*

Proof. Let $(i, \varphi) \colon H(X) \to H(Y)$ be an isomorphism of the homogeneous spaces, $t_X \colon X \to TX$, $t_Y \colon Y \to TY$ be the quotient mappings and $\bar{t}_X = (t_X^*, \psi_X) \colon H(X) \to H(TX)$, $\bar{t}_Y = (t_Y^*, \psi_Y) \colon H(Y) \to H(TY)$ be the morphisms constructed from the mappings t_X and t_Y (see [11, Part 2]).

Let us construct a continuous mapping $h \colon TX \to H_B(TY)$ such that $h \circ t_X = t_Y^* \circ (i|X)$. Let $x' \in TX$. Choose an arbitrary point $x \in X$ such that with $t_X(x) = x'$ and put $h(x') = t_Y^* i(x)$. Let $y \in X$. There is a point $x \in X$ such that $t_X(x) = t_X(y)$ and $ht_X(x) = t_Y^* i(x)$. Thus $ht_X(y) = ht_X(x) = t_Y^* i(x) = t_Y^* i(y)$ because $TY \in T$ and therefore $H_B(TY) \in T$. So $h \circ t_X = t_Y^* \circ (i|X)$. The continuity of the mapping h follows from the continuity of i and t_Y^* and the fact that the mapping t_X is quotient.

Similarly, we can construct a continuous mapping $g\colon TY \to H_B(TX)$ such that $g \circ t_Y = t_X^* \circ (i^{-1}|Y)$. Let $(h^*, \varphi_X)\colon H(TX) \to H(TY)$, $(g^*, \varphi_Y)\colon H(TY) \to H(TX)$ be the morphisms constructed from the mappings h and g. Let $x \in X$. Then

$$h^* t_X^*(x) = h^* t_X(x) = h t_X(x) = t_Y^* i(x).$$

Corollary 5 implies that $h^* \circ t_X^* = t_Y^* \circ i$. Similarly we can show that $g^* \circ t_Y^* = t_X^* \circ i^{-1}$. Since $g^* \circ h^* \circ t_X^* = g^* \circ t_Y^* \circ i = t_X^* \circ i^{-1} \circ i = t_X^*$, $g^* \circ h^* = 1_{H_B(TX)}$. Similarly, we can prove that $h^* \circ g^* = 1_{H_B(TY)}$. Corollary 5 implies that $(h^*, \varphi_X) \circ (g^*, \varphi_Y) = 1_{H(TY)}$ and $(g^*, \varphi_Y) \circ (h^*, \varphi_X) = 1_{H(TX)}$. Hence (h^*, φ_X) is an isomorphism. Since $h^* t_X^* = t_Y^* i$, $\bar{t}_Y \circ (i, \varphi) = h^* \circ \bar{t}_X$ by Corollary 5 and the mappings t_X and t_Y are B-equivalent.

Corollary 6. *Let T be one of the following clasess:*

- *T_0-spaces,*
- *T_1-spaces,*
- *T_2-spaces,*
- *functionally Hausdorff spaces,*
- *totally disconnected spaces.*

Let X and Y be spaces such that the free homogeneous spaces $H(X)$ and $H(Y)$ are isomorphic. Then the free homogeneous spaces $H(TX)$ and $H(TY)$ are isomorphic too.

Proof. If T is either the class of T_0-spaces or the class of totally disconnected spaces or the class of functionally Hausdorff spaces and $X' \in T$ then $F_p(X') \in T$ (see the proof of Corollary 1) and therefore $H_p(X') \in T$ thus $H_B(X') \in T$ by Lemma 1 from [11]. If X' is a T_1-space then $H_B(X')$ is a T_1-space too [6]. If X' is a T_2-space then $H_B(X')$ is a T_2-space too [7].

Corollary 7. *Let T be a class of spaces satisfying condition $(*)$ such that $H_B(X') \in T$ for each space $X' \in T$. Let X_1, X_2, Y_1, Y_2 be spaces, $f_1\colon X_1 \to Y_1$ and $f_2\colon X_2 \to Y_2$ be B-equivalent mappings. Then the mappings Tf_1 and Tf_2 are B-equivalent.*

Proof. Let $(i, \varphi)\colon H(X_1) \to H(X_2)$, $(j, \psi)\colon H(Y_1) \to H(Y_2)$ be topological isomorphisms such that $\bar{f}_2 \circ (i, \varphi) = (j, \psi) \circ \bar{f}_1$. Similarly to the proof of Theorem 4 we can construct isomorphisms $(i_T, \varphi_T)\colon H(TX_1) \to H(TX_2)$ and $(j_T, \psi_T)\colon H(TY_1) \to H(TY_2)$ such that $(i_T, \varphi_T) \circ \bar{t}_{X_1} = \bar{t}_{X_2} \circ (i, \varphi)$ and $(j_T, \psi_T) \circ \bar{t}_{Y_1} = \bar{t}_{Y_2} \circ (j, \psi)$. Proposition 2 implies that $Tf_1 \circ t_{X_1} = t_{Y_1} \circ f_1$ and $Tf_2 \circ t_{X_2} = t_{Y_2} \circ f_2$. If $x \in X_2$ then

$$t_{Y_2}^* f_2^*(x) = t_{Y_2}^* f_2(x) = t_{Y_2} f_2(x) = (Tf_2) t_{X_2}(x) = (Tf_2)^* t_{X_2}(x) = (Tf_2)^* t_{X_2}^*(x).$$

Corollary 5 implies that $t_{Y_2}^* \circ f_2^* = (Tf_2)^* \circ t_{X_2}^*$. Let $x \in X_1$. Then

$$\begin{aligned} j_T (Tf_1)^* t_{X_1}^*(x) &= j_T (Tf_1)^* t_{X_1}(x) = j_T (Tf_1) t_{X_1}(x) = j_T t_{Y_1} f_1(x) = j_T t_{Y_1}^* f_1(x) = \\ &= t_{Y_2}^* j f_1(x) = t_{Y_2}^* j f_1^*(x) = t_{Y_2}^* f_2^* i(x) = (Tf_2)^* t_{X_2}^* i(x) = (Tf_2)^* i_T t_{X_1}^*(x). \end{aligned}$$

Since the set $H_B(TX_1)$ is generated by the set $t_{X_1}^*(X_1)$, we see that $\overline{Tf_2} \circ (i_T, \varphi_T) = (j_T, \psi_T) \circ \overline{Tf_1}$ by Corollary 5. Thus the the mappings Tf_1 and Tf_2 are B-equivalent.

4. On T_0-reflection.

Proposition 3. *For each topological space X the quotient mapping t_X has a continuous right inverse.*

Proof. Let X_1 be a subset of X such that $X_1 \cap C$ is a singleton for each class C of the relation $\sim_{T_0}$ on X. Define the mapping $f\colon T_0X \to X_1$ by putting $f(x) = y$, where $y = t^{-1}(x) \cap X_1$. It is clear that $t_X \circ f$ is the identity mapping on the space TX. Let us check that the mapping f is continuous. Let U be an open subset in X_1. Let us put $V = \{x \in X$: there exists a point $y \in U$ such that $x \sim_{T_0} y\}$. Since U is open in X_1, there exists an open set W in X such that $U = W \cap X_1$. Let us prove that $V = W$. Suppose that there exists $z \in V \setminus W$. Then there exists $z_1 \in U$ such that $z \sim_{T_0} z_1$. Since the points z and z_1 are not separated by open subsets in X, we see that $z_1 \notin W$. We get a contradiction with the fact that $U = W \cap X_1$. Let $z \in W$. Then there exists $z_1 \in X_1$ such that $z \sim_{T_0} z_1$. Since the points z and z_1 are not separated by open subsets in X, we have $z_1 \in W$, therefore $z_1 \in U$ and $z \in V$. Thus $V = W$ and the set V is open in X. By the construction, $V = t_X^{-1}(f^{-1}(U))$. Since the mapping t_X is quotient and V is open subset in X, we see that $f^{-1}(U)$ is an open subset in T_0X.

Remark 1. Let X be a topological space. Let X_1 be a subset of X such that $X_1 \cap C$ is a singleton for each class C of the relation $\sim_{T_0}$ on X. The above lemma imply that the mapping $t_X|X_1$ is a homeomorphism. Since every neighborhood of the set X_1 coincides with X, the quotient space X/X_1 is antidiscrete. It easy to check that the size of the set X/X_1 does not depend on the choice of X_1. The cardinal of this size with antidiscrete topology is denoted as the space X/T_0X.

Let (X, x_0) and (Y, y_0) be pointed spaces such that $X \cap Y = \varnothing$. The quotient space $(X \oplus Y)/\{x, y\}$ is called a bouquet of pointed spaces (X, x_0) and (Y, y_0) and is denoted by $(X, x_0) \vee (Y, y_0)$.

Lemma 4. *Let X, Y be disjoint spaces, $x_1, x_2 \in X$, $y_1, y_2 \in Y$. Then spaces $(X, x_1) \vee (Y, y_1)$ and $(X, x_2) \vee (Y, y_2)$ are B-equivalent.*

Proof. For $i = 1, 2$ put $K_i = \{x_i, y_i\}$ and define maps $r_i : X \oplus Y \to K_i$ such that $r_i(X) = \{x_i\}$ and $r_i(Y) = \{y_i\}$. Then the maps r_1 and r_2 are parallel retractions. So by [11, Pr. 3] the spaces $(X, x_1) \vee (Y, y_1)$ and $(X, x_2) \vee (Y, y_2)$ are B-equivalent.

We shall write sometimes "$X \vee Y$" instead of "$(X, x_0) \vee (Y, y_0)$". We also recall that the B-equivalence of spaces implies their M_p-equivalence.

Lemma 5. *Let X, Y be spaces and $f : X \to Y$ be a continuous map. Let $f^* : F_p(X) \to F_p(Y)$ be the homomorphic extension of the map f. Then $\ker f^*$ is the subgroup N of $F_p(X)$ generated by the set $\{g^{-1}xy^{-1}g : x, y \in X, g \in F_p(X),\ f(x) = f(y)\}$.*

Proof. It is clear that $N \subset \ker f^*$. Now we prove the opposite inclusion. Using results from [15] it is easy to prove that the group $F_p(X)$ is algebraically free over the set X and the group $F_p(Y)$ is algebraically free over the set Y. If w is an arbitrary element of $F_p(X)$ then $w = x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_1^{\varepsilon_1}$ where $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ and $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\} \subset \{-1, 1\}$. Then by easy induction on n we can prove that if $f^*(w) = e$ then $w \in N$.

Proposition 4. *Let X be a nonempty topological space. Then $X \overset{M_p}{\sim} (T_0X \times \{1\} \vee (X/T_0X) \times \{2\})$.*

Proof. Let X_1 be a subset of X such that $X_1 \cap C$ is a singleton for each class C of the relation $\sim_{T_0}$ on X. Put $Z = X_1 \times \{1\} \oplus X \times \{2\}$. Choose an arbitrary point $x_0 \in X$ and put $Z' = Z/\{(x_0, 1), (x_0, 2)\}$ and $\pi : Z \to Z'$ be the quotient mapping.

Define a mapping $r : X \to X_1$ as follows. Let $x \in X$. There is a unique point $x_1 \in X_1$ such that $x_1 \sim_{T_0} x$. Put $r(x) = x_1$. The proof of Proposition 3 implies that $r^{-1}(U)$ is open for each open subset U of X_1 so r is continuous.

Let $t \in \{1, 2\}$. Define a mapping $r_t : Z \to Z$ putting $r_t(x, s) = (r(x), t)$ for each $x \in X, s \in \{1, 2\}$ such that $(x, s) \in Z$. Since

$$r_t^{-1}(U \times \{t\}) = (r^{-1}(U \cap X_1) \cap X_1) \times \{1\} \cup r^{-1}(U \cap X_1) \times \{2\}$$

for each open set $U \subset X_1$, the mapping r_t is a continuous retraction. Since $r_t((x_0, 1)) = r_t((x_0, 2))$, there exists a mapping $r'_t : Z' \to Z'$ such that $r'_t\pi = \pi r_t$. Since π is the quotient mapping and the mapping $r_t\pi$ is continuous then the mapping r'_t is continuous too.

It is easy to check that r_1 and r_2 are parallel retractions. Let $t, t' \in \{1, 2\}$. Then $r'_t r'_{t'}\pi = r'_t\pi r_{t'} = \pi r_t r_{t'} = \pi r_t = r'_t\pi$. Since the mapping π is surjective then $r'_t r'_{t'} = r'_t$ so the mappings r'_1 and r'_2 are parallel retractions too.

Let $i\colon Z' \to F_p(Z')$ be the mapping such that $i(z') = r'_1(z')z'^{-1}r'_2(z')$ for each $z' \in Z'$. Let us check that the mapping i is continuous. It is sufficient to prove that its restrictions onto $\pi(X_1 \times \{1\})$ and $\pi(X \times \{2\})$ are continuous. If $z \in X_1 \times \{1\}$ then

$$i\pi(z) = r'_1\pi(z) \times \pi(z)^{-1} \times r'_2\pi(z) = \pi r_1(z) \times \pi(z)^{-1} \times \pi r_2(z) =$$

$$= \pi(z) \times \pi(z)^{-1} \times \pi r_2(z) = \pi r_2(z) = r'_2\pi(z).$$

Therefore $i|\pi(X_1 \times \{1\})$ is a continuous map. Now let $z \in X \times \{2\}$. Define a mapping $j : \pi(X \times \{2\}) \to F_p(Z')$ putting $j(z') = z'^{-1}r'_2(z')$ for each $z' \in \pi(X \times \{2\})$. Let us check that the mapping j is continuous. For this purpose we prove that $j\pi(X \times \{2\})$ is an antidiscrete subspace of $F_p(Z')$. It is easy to check that for each point $z' \in \pi(X \times \{2\})$ such that $z' \neq r'_2(z')$ there is no open subset U of Z' such that U contains exactly one of the points z' and $r'_2(z')$. Let z' be an arbitrary point of $\pi(X \times \{2\})$. Let $R_{z'}$ be a subset of $F_p(Z')$ such that $R_{z'} = z'^{-1}\{z', r'_2(z')\} = \{e, j(z')\}$. Thus, by the homogeneity, for each open subset U of $F_p(Z')$ we have the following dichotomy: $R_{z'} \subset U$ or $R_{z'} \subset F_p(Z')\backslash U$. Let V be an open subset of $F_p(Z')$ such that $V \cap j\pi(X \times \{2\}) \neq \varnothing$. Choose a point $z' \in \pi(X \times \{2\})$ such that $j(z') \in V$. Then $R_{z'} \subset V$ so $e \in V$. The dichotomy implies that $R_{u'} \subset V$ for each point $u' \in \pi(X \times \{2\})$ so $j\pi(X \times \{2\}) \subset V$. Since $F_p(Z')$ is a paratopological group and the mappings j and r'_2 are continuous and $i(z') = j(z') \times r'_2(z')$ for each $z' \in \pi(X \times \{2\})$, the mapping i is continuous too.

Denote by $i^*\colon F_p(Z') \to F_p(Z')$ the continuous homomorphic extension of the mapping i. It was proved in [9] that $i^* \circ i^* = 1_{F_p(Z')}$.

Let $t \in \{1, 2\}$. Let Y_t be the quotient space $Z'/\pi(X_1 \times \{t\})$, $p_t : Z' \to Y_t$ be the quotient mapping and $p^*_t\colon F_p(Z') \to F_p(Y_t)$ be the continuous homomorphic extension of p_t. Lemma 5 implies that $\ker p^*_t$ is a smallest normal subgroup of $F_p(Z')$ containing the set $\{xy^{-1} : x, y \in Z', f(x) = f(y)\} = \{xy^{-1} : x, y \in \pi(X_1 \times \{t\})\}$.

Let $x \in X_1$. Then $i\pi((x, 1)) = r'_2\pi((x, 1)) = \pi r_2((x, 1)) = \pi((r(x), 2)) = \pi((x, 2))$. So $i(\pi(X_1 \times \{1\}) = \pi(X_1 \times \{2\})$ and thus $i^*(\ker p^*_1) = \ker p^*_2$. Then Proposition 6 from [11] implies that the spaces Y_1 and Y_2 are M_p-equivalent.

Let $f_1 : Z \to X$ be a mapping such that $f_1(x,1) = x_0$ for each $x \in X_1$ and $f_1(x,2) = x$ for each $x \in X$. Using this mapping we can construct a homeomorphism from Y_1 to X.

Let $q_1 : X \to X/X_1$ be the quotient mapping, $\widetilde{f}_2 : Z \to X_1 \times \{1\} \oplus (X/X_1) \times \{2\}$ be a mapping such that $\widetilde{f}_1(x_1,1) = (x_1,1)$ for each $x \in X_1$ and $\widetilde{f}_2(x,2) = (q_1(x),2)$ for each $x \in X$. Let

$$Y_2' = X_1 \times \{1\} \oplus (X/X_1) \times \{2\}/\{(x_0,1),(q_1(x_0),2)\}$$

and $q : X_1 \times \{1\} \oplus (X/X_1) \times \{2\} \to Y_2'$ be the quotient mapping. Let $f_2 = q\widetilde{f}_2$. Using this mapping we can construct a homeomorphism from Y_2 to Y_2'.

Since the space X_1 is homeomorphic to the space T_0X and the space X/X_1 is homeomorphic to the space X/T_0X, we obtain that the space Y_2' is M_p-equivalent to the space $T_0X \times \{1\} \vee (X/T_0X) \times \{2\}$. Thus

$$X \overset{M_p}{\sim} Y_1 \overset{M_p}{\sim} Y_2 \overset{M_p}{\sim} Y_2' \overset{M_p}{\sim} T_0X \times \{1\} \vee (X/T_0X) \times \{2\}.$$

Let X be a pseudometrizable space, and d be a pseudometric generating the topology of X. Then one can easily check that T_0X is a metrizable space.

Corollary 8. *Each pseudometrizable space is M_p-equivalent to the bouquet of metrizable and antidiscrete spaces.*

Proposition 5. *Let X_1 and X_2 be spaces with topologically isomorphic Graev free paratopological groups, Y_1 and Y_2 be spaces with topologically isomorphic Markov free paratopological groups. If $X_i \cap Y_i = \varnothing$ for $i \in \{1,2\}$ then Graev free paratopological groups on spaces $X_1 \oplus Y_1$ and $X_2 \oplus Y_2$ are topologically isomorphic.*

Proof. Let $i\colon FG_p(X_1) \to FG_p(X_2)$ be an isomorphism of the Graev free paratopological groups with distinguished points $a_i \in X_i$, $i = 1,2$, $j\colon F_p(Y_1) \to F_p(Y_2)$ be an isomorphism of the Markov free paratopological groups.

Let $t \in \{1,2\}$. Let $i_{Xt} : X_t \to X_t \oplus Y_t$ and $i_{Yt} : Y_t \to X_t \oplus Y_t$ be the identity embeddings, and $i^*_{Xt} : FG_p(X_t) \to FG_p(X_t \oplus Y_t, a_t)$ and $i^*_{Yt} : F_p(Y_t) \to FG_p(X_t \oplus Y_t, a_t)$ be their extensions to the continuous homomorphisms of paratopological groups.

Consider the mapping $k\colon X_1 \oplus Y_1 \to FG_p(X_2 \oplus Y_2)$ defined as $k(z) = i^*_{X2}i(z)$ if $z \in X_1$ and $k(z) = i^*_{Y2}j(z)$, if $z \in Y_1$. Similarly to [4, Pr. 8.8] one can check that the extension of the mapping k to the continuous homomorphism $k^*\colon FG_p(X_1 \oplus Y_1) \to FG_p(X_2 \oplus Y_2)$ is a topological isomorphism of the Graev free paratopological groups $FG(X_1 \oplus Y_1)$ and $FG(X_2 \oplus Y_2)$ with the distinguished points $a_i \in X_i \oplus Y_i$.

Proposition 6. *Let X_1 and X_2 be spaces with topologically isomorphic Graev free abelian paratopological groups, Y_1 and Y_2 spaces with topologically isomorphic Markov free abelian paratopological groups. If $X_i \cap Y_i = \varnothing$ for $i \in \{1,2\}$ then Graev free abelian paratopological groups on spaces $X_1 \oplus Y_1$ and $X_2 \oplus Y_2$ are topologically isomorphic.*

Proof. The proof is similar to the proof of the previous proposition.

Corollary 9. *Let X_1 and X_2 be nonempty topological spaces with topologically isomorphic Markov free paratopological groups, Y be a nonempty topological space such that*

$Y \cap (X_1 \cup X_2) = \varnothing$. Then Markov free paratopological groups on spaces $X_1 \vee Y$ and $X_2 \vee Y$ are topologically isomorphic.

Proof. By Proposition 5 we have that Graev free paratopological groups on the spaces $X_1 \oplus Y$ and $X_2 \oplus Y$ are topologically isomorphic. Similarly to [3, §5] one can check that Graev free paratopological groups on the spaces $X_i \oplus Y$ and $(X_i \vee Y)^+$ are topologically isomorphic. Since Graev free paratopological group on the space X^+ is naturally isomorphic to the Markov free paratopological group on the space X,

$$F_p(X_1 \vee Y) \simeq FG_p((X_1 \vee Y)^+) \simeq FG_p(X_1 \oplus Y) \simeq$$
$$\simeq FG_p(X_2 \oplus Y) \simeq FG_p((X_2 \vee Y)^+) \simeq F_p(X_2 \vee Y).$$

Corollary 10. *Let X_1 and X_2 be nonempty topological spaces with topologically isomorphic Markov free abelian paratopological groups, Y be a nonempty topological space such that $Y \cap (X_1 \cup X_2) = \varnothing$. Then Markov free abelian paratopological groups on spaces $X_1 \vee Y$ and $X_2 \vee Y$ are topologically isomorphic.*

Proof. The proof is similar to the proof of the previous corollary.

Theorem 5. *Topological spaces X and Y are A_p-equivalent if and only if $T_0X \overset{A_p}{\sim} T_0Y$ and $X/T_0X = Y/T_0Y$.*

Proof. Without loss of the generality it suffices to consider only the case $X \neq \varnothing$ and $Y \neq \varnothing$.

Sufficiency. Since $A_p(T_0X) \simeq A_p(T_0Y)$ and $X/T_0X = Y/T_0Y$, Corollary 10 implies that $A_p(T_0X \times \{1\} \vee (X/T_0X) \times \{2\}) \simeq A_p(T_0Y \times \{1\} \vee (Y/T_0Y) \times \{2\})$. Since the M_p-equivalence of two spaces implies the A_p-equivalence,

$$A_p(X) \simeq A_p(T_0X \times \{1\} \vee (X/T_0X) \times \{2\})$$

and $A_p(Y) \simeq A_p(T_0Y \times \{1\} \vee (Y/T_0Y) \times \{2\})$ by proposition 4. Thus

$$X \overset{A_p}{\sim} T_0X \times \{1\} \vee (X/T_0X) \times \{2\} \overset{A_p}{\sim} T_0Y \times \{1\} \vee (Y/T_0Y) \times \{2\} \overset{A_p}{\sim} Y.$$

Necessity. Let X and Y be A_p-equivalent. Then Corollary 3 implies that $T_0X \overset{A_p}{\sim} T_0Y$. Theorem 3 implies that the quotient mappings $t_X : X \to T_0X$ and $t_Y : Y \to T_0Y$ be A_p-equivalent. Since $\ker t_X^*$ is an algebraically free abelian group on the set of generators with cardinality X/T_0X, $X/T_0X = 1 + \operatorname{rank} \ker t_X^* = 1 + \operatorname{rank} \ker t_Y^* = Y/T_0Y$.

Theorem 6. *Topological spaces X and Y are M_p-equivalent if and only if $T_0X \overset{M_p}{\sim} T_0Y$ and $X/T_0X = Y/T_0Y$.*

Proof. The proof of the necessity is similar to the abelian case. Let us prove the sufficiency. Let X and Y be M_p-equivalent. Then Corollary 1 implies that $T_0X \overset{M_p}{\sim} T_0Y$. Since the spaces X and Y are A_p-equivalent, Theorem 5 implies that $X/T_0X = Y/T_0Y$.

---

1. *Bel'nov V. K.* On the dimension of the topologically homogenous spaces and free homogeneous spaces / *Bel'nov V. K.* // Dokl. Acad. Nauk SSSR. – 1978. – V. 238, №4. – P. 781–784.

2. *Engelking R.* General topology / *Engelking R.* // Moscow. Mir, 1986. – 751 p.
3. *Graev M. I.* Free topological groups / *Graev M. I.* // Izvestiya Akad. Nauk SSSR Ser.Mat. – 1948. – V. 12. – P. 279–381.
4. *Guran I. Y.* To the theory of the topological groups / *Guran I. Y., Zarichniy M. M.* // Kiyv, 1991. – 75 p.
5. *Kuratowski K.* Topology / *Kuratowski K.* // Moscow, Mir, 1969. – 624 p.
6. *Megrelishvili M. G.* Topological spaces with isomorphic free homogeneous spaces / *Megrelishvili M. G.* // Bull. of Acad. Scien. Georgian SSR. – 1981. – V. 103, №3. – P. 549–552.
7. *Okromeshko N. G.* On retractions of homogeneous spaces / *Okromeshko N. G.* // Dokl. AN SSSR. – 1983. – V. 268, №3. – P. 547–551.
8. *Okunev O. G.* A method for constructing examples of M-equivalent spaces / *Okunev O. G.* // Topology and its Applications. – 1990. – V. 36. – P. 157–171.
9. *Okunev O. G.* M-equivalence of products / *Okunev O. G.* // Transactions of the Moscow Mathematical Society. – 1995. – V. 56. – P. 149–158.
10. *Pyrch N. M.* On isomorphisms of free paratopological groups and free homogeneous spaces / *Pyrch N. M.* // International conference "Analysis and related topics", Lviv, November 17-20, 2005. – 87 p.
11. *Pyrch N. M.* On isomorphisms of free paratopological groups and free homogeneous spaces I / *Pyrch N. M.* // Visnik LNU, 2006.
12. *Pyrch N. M.* Free products of paratopological groups / *Pyrch N. M.* // Matematychni Studii. (submitted). (in Ukrainian)
13. *Pyrch N. M.* Free paratopological groups / *Pyrch N. M., Ravsky O. V.* // Matematychni Studii. – 2006. – V. 25. – P. 115–125.
14. *Ravsky O. V.* The topologically and algebraical properties of paratopological groups / *Ravsky O. V.* // Ph.D. thesis, Lviv, 2002. (in Ukrainian)
15. *Romaguera S.* Free paratopological groups / *Romaguera S., Sanchis M., Tkachenko M.* // Topology Proceedings. – 2002. – V. 27. – P. 1–28.

ІЗОМОРФІЗМИ ВІЛЬНИХ ПАРАТОПОЛОГІЧНИХ ГРУП І ВІЛЬНИХ ОДНОРІДНИХ ПРОСТОРІВ II

Назар ПИРЧ

Українська академія друкарства,
79020, Львів, вул. Підголоско, 19
e-mail: pnazar@ukr.net

Доведено, що вільна паратопологічна група T_0-простору є T_0-простором. Подано приклади функторів, які зберігають ізоморфізми вільних (абелевих) паратопологічних груп і вільних однорідних просторів. Також наведено метод зведення ізоморфної класифікації вільних (абелевих) паратопологічних груп над топологічними просторами до ізоморфної класифікації вільних (абелевих) паратопологічних груп над T_0-просторами.

Ключові слова: вільна паратопологічна група, вільний однорідний простір, ізоморфізм паратопологічних груп, ізоморфізм однорідних просторів.

ИЗОМОРФИЗМЫ СВОБОДНЫХ ПАРАТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУПП И СВОБОДНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ II

Назар ПЫРЧ

Украинская академия печати,
79020, Львов, ул. Подголоско, 19
e-mail: pnazar@ukr.net

Доказано, что свободная паратопологическая группа T_0-пространства является T_0-пространством. Рассмотрено функторы, сохраняющие изоморфизмы свободных (абелевых) паратопологических групп и свободных однородных пространств.

Ключевые слова: свободная паратопологическая группа, свободное однородное пространство, изоморфизм паратопологических групп, изоморфизм однородных пространств.

Стаття надійшла до редколегії 25.01.2008

Прийнята до друку 16.12.2009

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2009.
Вип. 71. С. 204–212

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech. Math. 2009.
Is. 71. P. 204–212

УДК 515.12

EXTENSION OF FUZZY METRICS: ZERO-DIMENSIONAL CASE

Oleksandr SAVCHENKO

Kherson State Agrarian University,
73006, Kherson, R. Luxemburg str., 23
e-mail: savchenko1960@rambler.ru

The main result of this note is a construction of an operator that extends fuzzy metrics defined on the closed sets of zero-dimensional fuzzy metrizable space over the whole space. The extension operator preserves the operation of minimum of fuzzy metrics as well as the operation of truncation. We also define a fuzzy metric on the countable product of fuzzy metric spaces.

Key words: fuzzy metric, extension operator, zero-dimensional space.

1. Introduction. The notion of fuzzy metric space is tightly related with that of probabilistic metric space introduced by Menger [6] (see also [7]). The fuzzy metric spaces were defined in the paper [5] and later their definition was modified in [8]. The version from [8] is more restrictive. However, it turns out that the fuzzy metrics in the sense of [8] determine the metrizable topologies.

It is well-known that the family of metrics on a set forms a cone with respect to the operations of sum and product with the non-negative scalar. Also, the maximum of two metrics is a metric. We establish counterparts of these properties for the fuzzy metrics.

One of the main results of this note is the construction that allows, in the zero-dimensional case, to extend fuzzy metrics from a closed subset to the whole set. Remark that, in the case of metrics, the problem of extension has a long history, which traces back to Hausdorff. The problem of existence of operators extending the cones of metrics was first formulated (and partially solved) by Bessaga [3]. Its complete solution is obtained by Banakh [1]; a short proof of existence can be found in [11].

It turns out that this extension operator preserves the mentioned operations on the fuzzy metrics. Our construction is based on fuzzy metrization of the countable product of the fuzzy metric spaces. We also prove that, for any two fuzzy metric spaces, there exists a fuzzy metrization of the bouquet of these spaces that agrees with these fuzzy metrics.

2. Preliminaries. We start with some necessary definitions concerning the notion of fuzzy metric space.

A continuous t-norm is a continuous map $(x, y) \mapsto x * y\colon [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ which satisfies the following properties:

(1) $(x * y) * z = x * (y * z)$;
(2) $x * y = y * x$;
(3) $x * 1 = x$;
(4) if $x \le x'$ and $y \le y'$, then $x * y \le x' * y'$.

In other words, a continuous t-norm is a continuous Abelian monoid with unit 1 and with the monotonic operation. The following are examples of continuous t-norms:

(1) $x * y = \min\{x, y\}$;
(2) $x * y = \max\{0, x + y - 1\}$.

Definition 1. *A* fuzzy metric space *is a triple $(X, M, *)$, where X is a nonempty set, $*$ is a continuous t-norm and M is a fuzzy set of $X \times X \times (0, \infty)$ (i.e. M is a map from $X \times X \times (0, \infty)$ to $[0, 1]$) satisfying the following properties:*

(i) $M(x, y, t) > 0$*;*
(ii) $M(x, y, t) = 1$ *if and only if* $x = y$*;*
(iii) $M(x, y, t) = M(y, x, t)$*;*
(iv) $M(x, y, s) * M(y, z, t) \le M(x, z, s + t)$*;*
(v) *the function* $M(x, y, -)\colon (0, \infty) \to (0, 1]$ *is continuous.*

We obtain the notion of a fuzzy pseudometric space if we replace condition (ii) from the above definition by the following condition:

(ii') $M(x, x, t) = 1$.

In a fuzzy metric space $(X, M, *)$, we say that the set

$$B_M(x, r, t) = \{y \in X \mid M(x, y, t) > 1 - r\}, \quad x \in X, \quad r \in (0, 1), \quad t \in (0, \infty),$$

is the *open ball* of radius $r > 0$ centered at x for t. It is proved in [8] that the family of all open balls is a base of a topology on X; this topology is denoted by τ_M.

Proposition 1. *Let $(X, M_i, *)$, $i = 1, 2$, be fuzzy metric spaces. Then $(X, M, *)$, where $M(x, y, t) = M_1(X, y, t) * M_2(x, y, t)$, is also a fuzzy metric space.*

Proof. We are going to verify properties (i)–(iv) from Definition 1.

(i) Obvious.

(ii) Clearly, $M(x, x, t) = 1$, for every $x \in X$ and $t \in (0, \infty)$. If $M(x, y, t) = 1$, then

$$1 = M(x, y, t) = M_1(x, y, t) * M_2(x, y, t) \le M_1(x, y, t) * 1 = M_1(x, y, t),$$

whence $M_1(x, y, t) = 1$ and therefore $x = y$.

(iii) Obvious.

(iv) We have

$$\begin{aligned} M(x, y, s) * M(y, z, t) =& M_1(x, y, s) * M_2(x, y, s) * M_1(y, z, t) * M_2(y, z, t) = \\ =& M_1(x, y, s) * M_1(y, z, t) * M_2(x, y, s) * M_2(y, z, t) \le \\ \le& M_1(x, z, s + t) * M_2(x, z, s + t) = M(x, z, s + t). \end{aligned}$$

(v) Obvious.

Proposition 2. *Let* $(X, M_i, *)$, $i = 1, 2$, *be fuzzy metric spaces. Then* $(X, M, *)$, *where* $M(x, y, t) = \min\{M_1(X, y, t), M_2(x, y, t)\}$, *is also a fuzzy metric space.*

Proof. We are going to verify properties (i)–(iv) from Definition 1.

(i) Obvious.

(ii) Clearly, $M(x, x, t) = 1$, for every $x \in X$ and $t \in (0, \infty)$. If $M(x, y, t) = 1$, then $M_1(x, y, t) = M_2(x, y, t) = 1$ and therefore $x = y$.

(iii) Obvious.

(iv) We have

$$M(x, y, s) * M(y, z, t) = \min\{M_1(x, y, s), M_2(x, y, s)\} * \min\{M_1(y, z, t), M_2(y, z, t)\} \leq$$
$$\leq M_i(x, y, s) * M_i(y, z, t) \leq M_i(x, z, s + t), \quad i = 1, 2,$$

whence $M(x, y, s) * M(y, z, t) \leq M(x, z, s + t)$.

(v) Obvious.

One can similarly prove the following statement.

Proposition 3. *Let* $(X, M_\alpha, *)$, $\alpha \in \mathcal{A}$, *be fuzzy metric spaces. Suppose that, for every* $x, y \in X$, $x \neq y$, *we have* $\inf\{M_\alpha(x, y, t) \mid \alpha \in \mathcal{A}\} < 1$. *Then* $(X, M, *)$, *where*

$$M(x, y, t) = \inf\{M_\alpha(x, y, t) \mid \alpha \in \mathcal{A}\},$$

is also a fuzzy metric space.

Proposition 4. *Let* $(X, M, *)$ *be a fuzzy metric space and* $c \in (0, 1)$. *Then* $(X, M', *)$, *where* $M'(x, y, t) = \max\{M(x, y, t), c\}$, *is also a fuzzy metric space.*

Proof. The only condition from Definition 1 which requires verification is (iv). We are going to prove that

$$M'(x, y, s) * M'(y, z, t) \leq M'(x, z, s + t). \tag{1}$$

The proof splits into three cases.

a) $M(x, y, s) \leq c$. Then (1) reduces to the following:

$$c * M'(y, z, t) \leq M'(x, y, s + t).$$

Since

$$c * M'(y, z, t) \leq c * 1 \leq c \leq M'(x, z, s + t),$$

we are done.

b) $M(x, y, s) > c$, $M(y, z, t) > c$. Then

$$M'(x, y, s) * M'(y, z, t) = M(x, y, s) * M(y, z, t) \leq M(x, z, s + t) \leq M'(x, z, s + t).$$

c) $M(x, y, s) > c$, $M(y, z, t) \leq c$. Then

$$M'(x, y, s) * M'(y, z, t) \leq M(x, y, s) * c \leq c \leq M'(x, z, s + t).$$

In the sequel, we use the notation $c \odot M$ for the fuzzy metric $\max\{M(x, y, t), c\}$.

Remark 1. Counterparts of Propositions 1-4 are also valid for the fuzzy pseudometric spaces.

2.1. Fuzzy metrics on bouquets. Let $X = X_1 \vee X_2$ and let a be the base point of X. Let M_i be fuzzy metrics on X_i, $i = 1, 2$, (with respect to the same t-norm $*$). Define the symmetric with respect to the first and the second variable function $M\colon X \times X \times (0, \infty) \to \to [0, 1]$ as follows:

$$M(x, y, t) = \begin{cases} M_i(x, y, t), & \text{if } x, y \in X_i,\ i = 1, 2, \\ \sup\{M_1(x, a, t_1) * M_2(a, y, t_2) \mid t_1 + t_2 = t\}, & \text{if } x \in X_1, y \in X_2. \end{cases}$$

Proposition 5. *The function M is a fuzzy metric on X with respect to the t-norm $*$. The topology induced by M is that of the bouquet topology on $X = X_1 \vee X_2$.*

Proof. Clearly, $M(x, x, t) = 1$, for every $x \in X$. Suppose now that $M(x_1, x_2, t) = 1$ and $x_1 \neq x_2$. Then, without loss the generality, one may assume that $x_i \in X_i \setminus \{a\}$, $i = 1, 2$. Then $M_1(x_i, a, t) < 1$, $i = 1, 2$, whence

$$\begin{aligned} M(x_1, x_2, t) \leq& \sup\{M_1(x, a, t_1) * M_2(a, y, t_2) \mid t_1 + t_2 = t\} \leq \\ \leq& M_1(x_1, a, t) * M_2(a, x_2, t) < 1 * 1 = 1 \end{aligned}$$

and we obtain a contradiction.

(iii) We have to prove that, for all $x, y, z \in X$ and $t, s \in (0, \infty)$,

$$M(x, y, t) * M(y, z, t) \leq M(x, z, t + s).$$

We consider two cases. 1) $x, y \in X_1$, $z \in X_2$, then

$$\begin{aligned} M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq& M_1(x, y, t) * (\sup\{M_1(y, a, s_1) * M(a, z, s_2) \mid s_1 + s_2 = s\}) = \\ =& \sup\{M_1(x, y, t) * (\{M_1(y, a, s_1) * M(a, z, s_2) \mid s_1 + s_2 = s\} \leq \\ \leq& \sup\{M_1(x, a, t + s_1) * M(a, z, s_2) \mid s_1 + s_2 = s\} = \\ =& \sup\{M_1(x, a, \tau_1) * M(a, z, \tau_2) \mid \tau_1 + \tau_2 = t + s,\ \tau_1 \geq t\} \leq \\ \leq& \sup\{M_1(x, a, \tau_1) * M(a, z, \tau_2) \mid \tau_1 + \tau_2 = t + s\} = \\ =& M(x, z, t + s). \end{aligned}$$

2) $x, z \in X_1$, $y \in X_2$. Then

$$\begin{aligned} M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq& (\sup\{M_1(x, a, t_1) * M(a, y, t_2) \mid t_1 + t_2 = t\}) * \\ &* (\sup\{M_1(y, a, s_1) * M_2(a, z, s_2) \mid s_1 + s_2 = s\}) \leq \\ \leq& \sup\{M_1(x, a, t_1) \mid t_1 \leq t\} * \sup\{M_1(a, z, s_1) \mid s_1 \leq s\} \leq \\ \leq& M_1(x, z, t) = M(x, z, t). \end{aligned}$$

(iv) We are going to prove that, for any $x, y \in X$, the map $\gamma\colon t \mapsto M(x, y, t)$ is continuous. We only need to consider the case $x \in X_1$, $y \in X_2$. First, since the maps $t \mapsto M_1(x, a, t)$ and $t \mapsto M_2(a, y, t)$ are continuous and nondecreasing, there exist unique continuous extensions of these maps onto the set $[0, \infty)$. We preserve the same notations for the extended maps. Let us denote by $\varphi\colon [0, \infty) \times [0, \infty) \to [0, 1]$ the function acting by the formula:

$$\varphi(t_1, t_2) = M_1(x, a, -) * M_2(a, y, -).$$

The map

$$\alpha\colon t \mapsto \{(t_1, t_2) \in [0, \infty) \times [0, \infty) \mid t_1 + t_2 = t\}$$

is a continuous map from $[0,\infty)$ to the space $2^{[0,\infty)\times[0,\infty)}$ of nonempty compact subsets in $[0,\infty)\times[0,\infty)$; the latter is endowed with the Hausdorff metric d_H:

$$d_H(A,B)=\inf\{r>0\mid A\subset O_r(B),\ B\subset O_r(A)\}$$

(here O_r stands for the r-neighborhood with respect to the euclidean metric on $[0,\infty)\times[0,\infty)$). Now the map γ is the composition

$$(0,\infty)\xrightarrow{\quad\alpha\quad}2^{[0,\infty)\times[0,\infty)}\xrightarrow{\ \sup\_\ \varphi\ }[0,1]\ ,$$

where the function $\sup\_\ \varphi$ assigns to every $A\in 2^{[0,\infty)\times[0,\infty)}$ the number $\sup\{\varphi(x)\mid x\in A\}$; the function $\sup\_\ \varphi$ is known to be continuous (see, e.g., [4]). Therefore, γ is continuous.

It is clear that the fuzzy metric M induces the bouquet topology on X.

Remark 2. The proof of Proposition 5 can be immediately generalized over the case of bouquet of arbitrary number of fuzzy metric spaces.

3. Extension of metrics.

3.1. Fuzzy metrics on the countable powers. Let $(X_i,M_i,*)$, $i\in\mathbb{N}$, be a family of fuzzy metric spaces, $X=\prod_{i\in\mathbb{N}}X_i$.

Theorem 1. *The function $\bar M\colon X\times X\times(0,\infty)\to[0,1]$ defined by the formula*

$$\bar M((x_i),(y_i),t)=\inf\{(1/i)\odot M(x_i,y_i,t)\mid i\in\mathbb{N}\}$$

is a fuzzy metric on X. The topology τ_M coincides with the product topology on X generated by the fuzzy metrics τ_{M_i}, $i\in\mathbb{N}$.

Proof. Let us denote by $p_i\colon X\to X_i$ the projection onto the i-th coordinate, $i\in\mathbb{N}$. By Proposition 4, the function $M_i'\colon X_i\times X_i\times(0,\infty)\to[0,1]$ defined by the formula $M_i'(x,y,t)=M_i(p_i(x),p_i(y),t)$ is a fuzzy pseudometric on X_i. By the remark after Proposition 2, $\bar M$ is a fuzzy pseudometric on X.

Let $x,y\in X$, $x\neq y$, then there exists $i\in\mathbb{N}$ such that $p_i(x)\neq p_i(y)$. Therefore $M_i'(x,y,t)<1$ and consequently $\bar M(x,y,t)<1$, for every t. This shows that $\bar M$ is a fuzzy metric on X.

Let us use $\bar B$ to denote the balls with respect to the fuzzy metric $\bar M$ and B_i to denote the balls with respect to the fuzzy metric M_i.

Let $x,y\in X$, $r\in(0,1)$, and $t\in(0,\infty)$. Let $x_i=p_i(x)$, $y_i=p_i(y)$. If $y\in\bar B(x,r,t)$, then $\bar M(x,y,t)>1-r$ and therefore, there exists $\varepsilon\in(0,1-r)$ such that

$$\inf\{(1/i)\odot M_i(x_i,y_i,t)\mid i\in\mathbb{N}\}>1-r+\varepsilon.$$

Let

$$K=\bigcup_{\varepsilon\in(0,1-r)}\left(\prod_{(1/i)\le 1-r+\varepsilon}B_i(x_i,r-\varepsilon,t)\times\prod_{(1/i)>1-r+\varepsilon}X_i\right).$$

We conclude that $y\in K$. Since all the implications above are reversible, we see that $\bar B(x,r,t)=K$.

Show that

$$K=\prod_{(1/i)\le 1-r}B_i(x_i,r,t)\times\prod_{(1/i)>1-r}X_i.$$

If $y \in K$ and $1/i \leq 1-r$, then $(1/i) \leq 1-r+\varepsilon$ and therefore

$$y_i \in B_i(x_i, r-\varepsilon, t) \subset B_i(x, r, t),$$

whence

$$y \in \prod_{(1/i)\leq 1-r} B_i(x_i, r, t) \times \prod_{(1/i)>1-r} X_i.$$

On the other hand, let

$$y \in \prod_{(1/i)\leq 1-r} B_i(x_i, r, t) \times \prod_{(1/i)>1-r} X_i.$$

Then there exists $\varepsilon > 0$ such that $y_i \in B_i(x_i, r+\varepsilon, t)$ for all i with $(1/i) \leq 1-r$ and therefore $y \in K$.

We have proven that the topology on X generated by the fuzzy metric $\bar{M}$ on X is contained in the product topology on X generated by the fuzzy metrics M_i.

On the other hand, let

$$\prod_{i\leq n} B_i(x_i, r_i, t_i) \times \prod_{i>n} X_i$$

be a basic neighborhood of $x \in X$. Since the functions $M_i(a, b, -)$ are nondecreasing, we see that

$$x \in \prod_{i\leq n} B_i(x_i, r, t) \times \prod_{i>n} X_i \subset \prod_{i\leq n} B_i(x_i, r_i, t_i) \times \prod_{i>n} X_i,$$

where

$$r = \max\{r_1, \ldots, r_n\},\ t = \min\{t_1, \ldots, t_n\}.$$

Choose $r' \in (\max\{r, 1-\frac{1}{n}\}, 1)$, then

$$x \in \bar{B}(x, r', t) = \prod_{(1/i)\leq 1-r'} B_i(x_i, r', t) \times \prod_{(1/i)>1-r'} X_i \subset \prod_{i\leq n} B_i(x_i, r, t) \times \prod_{i>n} X_i$$

and this allows us to conclude that the topology on X generated by $\bar{M}$ coincides with the product topology of the topologies generated by the fuzzy metrics M_i, $i \in \mathbb{N}$.

3.2. Extension of fuzzy metrics. Given a metrizable space X, let us denote by $\mathcal{FPM}(X)$ (respectively $\mathcal{FM}(X)$) the set of all fuzzy pseudometrics (respectively fuzzy metrics) on X compatible with the topology of X.

Let A be a closed subset of X. An *extension operator* for fuzzy (pseudo)metrics is a map $u\colon \mathcal{FM}(A) \to \mathcal{FM}(X)$ (respectively $u\colon \mathcal{FPM}(A) \to \mathcal{FPM}(X)$) such that $u(M)|(A \times A \times (0, \infty)) = M$, for every $M \in \mathcal{FM}(A)$ (respectively $M \in \mathcal{FPM}(A)$)

Theorem 2. *Let A be a closed subspace of a zero-dimensional separable metrizable space X, $|A| \geq 2$. Then there exists a fuzzy metric extension operator u that satisfies the following properties:*

(1) $u(\min\{M_1, M_2\}) = \min\{u(M_1), u(M_2)\}$;
(2) $u(c \odot M) = c \odot u(M)$.

Proof. Let $a, b \in A$, $a \neq b$. Consider a countable base $\{U_i \colon i \in \mathbb{N}\}$ of $X \setminus A$ consisting of open and closed in X sets. Let also $\{V_i \colon i \in \mathbb{N}\}$ be a countable family of open and closed subsets in X which forms a base of topology at all the points of A.

Since A is a closed subset of a zero-dimensional metrizable space, there exists a continuous retraction $r \colon X \to A$ (see, e.g., [4]).

Define a countable family $\mathcal{R} = \{r_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ of continuous retractions of X onto A as follows:

$$\begin{aligned} r_{4i-3}|(X \setminus U_i) =& r_{4i-2}|(X \setminus U_i) = r|(X \setminus U_i), \\ r_{4i-3}(U_i) =& a, \quad r_{4i-2}(U_i) = b, \\ r_{4i-1}|(X \setminus (r^{-1}(V_i) \setminus V_i)) =& r_{4i}|(X \setminus (r^{-1}(V_i) \setminus V_i)) = r|(X \setminus (r^{-1}(V_i) \setminus V_i)), \\ r_{4i-1}(r^{-1}(V_i) \setminus V_i) =& a, \quad r_{4i}(r^{-1}(V_i) \setminus V_i) = b. \end{aligned}$$

Clearly, $r = (r_i)_{i \in \mathbb{N}} \colon X \to X^{\mathbb{N}}$ is continuous and injective. That the map r is an embedding easily follows from the fact that the set $\{r_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ separates the points and the closed sets in X.

Let $M \in \mathcal{FM}(A)$. Denote by $\bar{M}$ the fuzzy pseudometric on $A^{\mathbb{N}}$ defined by the formula:

$$\bar{M}((x_i), (y_i), t) = \inf\{(1/i) \odot M(x_i, y_i, t) \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

Define $u(M) \colon X \times X \times (0, \infty) \to [0, 1]$ by the formula: $u(M)(x, y, t) = \bar{M}(r(x), r(y), t)$. Since the map r is injective, we see that $u(M)$ is a fuzzy pseudometric on X; clearly, $u(M)$ is a fuzzy metric on X whenever $M \in \mathcal{FM}(A)$.

Let $x, y \in A$ and $t \in (0, \infty)$, then

$$\begin{aligned} u(M)(x, y, t) =& \bar{M}(r(x), r(y), t) = \inf\{(1/i) \odot M(r_i(x), r_i(y), t) \mid i \in \mathbb{N}\} = \\ =& \inf\{(1/i) \odot M(x, y, t) \mid i \in \mathbb{N}\} = M(x, y, t), \end{aligned}$$

i.e., $u(M)$ is an extension of M.

Given $M_1, M_2 \in \mathcal{FM}(A)$, we have

$$u(\min\{M_1, M_2\})(x, y, t) = \overline{\min\{M_1, M_2\}}(r(x), r(y), t) =$$

If $c \in (0, 1)$, then

$$\begin{aligned} u(c \odot M)(x, y, t) =& \overline{c \odot M}(r(x), r(y), t) = \inf\{(1/i) \odot c \odot M(x, y, t) \mid i \in \mathbb{N}\} \\ =& c \odot \inf\{(1/i) \odot M(x, y, t) \mid i \in \mathbb{N}\} = c \odot u(M)(x, y, t), \end{aligned}$$

thus (2) holds.

4. Remarks and open questions. Similarly as in [9], [10], one can consider the problem of simultaneous extension of fuzzy (pseudo)metrics defined on the closed subsets of a metrizable space. For any metric space (Y, d), let $\mathrm{CL}(Y)$ the family of all nonempty closed subsets of Y. We consider the following Wijsman convergence in $\mathrm{CL}(Y)$: a sequence (A_i) converges to A if, for any $y \in Y$, the sequence $d(y, A_i)$ converges to $d(y, A)$.

Given a fuzzy metric M defined on a set $A \in \mathrm{CL}(X)$ (we express this by writing $\mathrm{dom}(M) = A$), for a metric space X, identify every $M \in \mathcal{FM}(A)$ with its graph

$$\begin{aligned} \Gamma_M =& \{(x, y, t, r) \in A \times A \times (0, \infty) \times [0, 1] \mid r = M(x, y, t)\} \in \\ \in& \mathrm{CL}(X \times X \times (0, \infty) \times [0, 1]). \end{aligned}$$

We endow the set $\mathcal{FM} = \bigcup\{\mathcal{FM}(A) \mid A \in \mathrm{CL}(X)\}$ with the topology generated by the Wijsman convergence of their graphs.

Question 1. Is their a simultaneous extension operator $u\colon \mathcal{FM} \to \mathcal{FM}(X)$ (i.e. u satisfying the property

$$u(M)|(\mathrm{dom}(M) \times \mathrm{dom}(M) \times (0,\infty)) = M,$$

for every $M \in \mathcal{FM}$) which is continuous in the topology of Wijsman convergence?

A similar question can be formulated for the fuzzy pseudometrics.

One can consider also another topologies on the sets of closed subsets: Attouch-Wets, Hausdorff etc (see [2]).

1. *Banakh T.* AE(0)-spaces and regular operators extending (averaging) pseudometrics / *Banakh T.* // Bull. Polish Acad. Sci. Math. – 1994. – Vol. 42, №. 3. – P. 197-206.
2. *Beer G.* Topologies on closed and closed convex sets. Mathematics and its Applications 268 / *Beer G.* – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1993.
3. *Bessaga C.* On linear operators and functors extending pseudometrics / *Bessaga C.* // Fund. Math. – 1993. Vol. 142, №. 2. – P. 101-122.
4. *Engelking R.* General topology / *Engelking R.* – Sigma Ser. Pure Math. 6, Heldermann, Berlin, 1989.
5. *Kramosil O.* Fuzzy metric and statistical metric spaces / *Kramosil O., Michalek J.* // Kybernetica – 1975. – Vol. 11. – P. 326-334.
6. *Menger K.* Statistical metrics / *Menger K.* // Proc. Nat. Acad. Sci. – 1942. – Vol. 28. – P. 535-537.
7. *Schweizer B.* Probabilistic Metric Spaces / *Schweizer B., Sklar A.* – North-Holland, Amsterdam, 1983.
8. *George A.* On some results in fuzzy metric spaces / *George A., Veeramani P.* // Fuzzy Sets and Systems – 1994. – Vol. 64. – P. 395-399.
9. *Tymchatyn E.D.* On simultaneous linear extensions of partial (pseudo)metrics / *Tymchatyn E.D., Zarichnyi M.* // Proc. Amer. Math. Soc. – 2004. – Vol. 132. – P. 2799-2807.
10. *Tymchatyn E.* A note on operators extending partial ultrametrics / *Tymchatyn E., Zarichnyi M.* // Comment. Math. Univ. Carolinae – 2005. – Vol. 46, №3. – P. 515-524.
11. *Zarichnyi M.* Regular linear operators extending metrics: a short proof / *Zarichnyi M.* // Bull. Polish Acad. Sci. Math. – 1996. – Vol. 44, №. 3. – P. 267-269.

ПРОДОВЖЕННЯ РОЗМИТИХ МЕТРИК: НУЛЬВИМІРНИЙ ВИПАДОК

Олександр САВЧЕНКО

Херсонський державний аграрний університет,
73006, Херсон, вул. Рози Люксембург, 23
e-mail: savchenko1960@rambler.ru

Наша мета – побудова оператора, що продовжує розмиті метрики, означені на замкнених підпросторах нульвимірного розмитого метричного простору, на весь простір. Оператор продовження зберігає операцію мінімуму розмитих метрик, а також операцію обтинання. Подано також означення розмитої метрики на зліченному добутку розмитих метричних просторів.

Ключові слова: розмита метрика, оператор продовження, нульвимірний простір.

ПРОДОЛЖЕНИЕ НЕЧЕТКИХ МЕТРИК: НУЛЬМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Александр САВЧЕНКО

Херсонский государственный аграрный университет,
73006, Херсон, ул. Розы Люксембург, 23
e-mail: savchenko1960@rambler.ru

Наша цель – построение оператора, продолжающего нечеткие метрики, определенные на замкнутых подпространствах нульмерного нечеткого метрического пространства, на все пространство. Оператор продолжения сохраняет операцию минимума нечетких метрик, а также операцию отсечения. Дано также определение нечеткой метрики на счетном произведении нечетких метрических пространств.

Ключевые слова: нечеткая метрика, оператор продолжения, нульмерное пространство.

Стаття надійшла до редколегії 15.10.2009

Прийнята до друку 16.12.2009

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2009. *Ser. Mech. Math. 2009.*
Вип. 71. С. 213–219 *Is. 71. P. 213–219*

УДК 513.6

2-КРУЧЕННЯ ГРУП БРАУЕРА ЕЛІПТИЧНИХ І ГІПЕРЕЛІПТИЧНИХ КРИВИХ НАД ПСЕВДОЛОКАЛЬНИМИ ПОЛЯМИ

Людмила СТАХІВ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, Університетська, 1
e-mail: mlmstakhiv@gmail.com

Вивчено 2-кручення групи Брауера еліптичних і гіпереліптичних кривих над псевдолокальними полями.

Ключові слова: псевдолокальне поле, еліптична крива, гіпереліптична крива, якобіан, група Брауера.

Нехай k – квазіскінченне поле, тобто досконале поле, що має точно одне розширення степеня n для кожного натурального числа n (у фіксованому алгебричному замиканні поля k). Квазіскінченне поле k називають псевдоскінченним [1], якщо кожний абсолютно незвідний алгебричний многовид, визначений над k, має k – раціональну точку. Повне стосовно дискретного нормування поле K з квазіскінченним (псевдоскінченним) полем лишків k називають загальним локальним (псевдолокальним) полем. Якщо $\bar{K}$ – сепарабельне замикання поля K, $G_K = \mathrm{Gal}\,(\bar{K}/K)$ – його група Галуа, то ми позначаємо $H^i(K, M)$ когомології Галуа G_K – модуля M. C_n та C/nC означають ядро та коядро множення на n в абельовій групі C. Для алгебричного многовиду A, визначеного над полем K, ми позначаємо через $A(K)$ групу його K – раціональних точок, а через $K(A)$ – поле функцій многовиду A. Розглянемо відображення $\mu\colon K(A) \to \mathrm{Div}\,(A)$, яке ставить у відповідність функції з $K(A)^*$ її дивізор. Це відображення індукує таке відображення когомологій Галуа: $\mu^*\colon H^2(G, K(A)^*) \to H^2(G, \mathrm{Div}\,(A))$. Ядро відображення μ^* позначають через $\mathrm{Br}\,A$ і називають групою Брауера кривої A. Як показано у [2], група $\mathrm{Br}\,A$ складається з класів центральних простих K-алгебр, нерозгалужених у всіх нормуваннях поля K.

Про групу Брауера алгебричних многовидів до недавнього часу було відомо дуже мало навіть у найпростішому випадку алгебричних кривих. В.І. Янчевський і Г.Л. Марголін в серії статей (див., зокрема, [2], [3]) вивчили групи Брауера еліптичних та гіпереліптичних кривих, визначених над локальним полем. Вони описали

2-кручення групи Брауера еліптичної кривої над локальним полем через зображення цієї підгрупи кватерніонними алгебрами.

Виявляється, що частину результатів В.І.Янчевського і Г.Л. Марголіна можна узагальнити на випадок еліптичних кривих, визначених над повними дискретно нормованими полями з псевдоскінченними полями лишків. Це узагальнення опирається на аналог двоїстості Тейта-Шафаревича для еліптичних кривих над псевдолокальними полями та на тривіальності групи головних однорідних просторів для еліптичних кривих над псевдоглобальним полем. У теоремі 1 описано 2-кручення групи Брауера еліптичної кривої над псевдолокальним полем.

В. Черноусов і В.Гулецький [4] одержали описання 2-кручення групи Брауера еліптичних кривих над локальними полями в термінах твірних і співвідношень. Ми застосовуємо метод Черноусова і Гулецького до описання 2-кручення групи Брауера еліптичних кривих над псевдолокальним полем.

Ю. Реман, С.В. Тіхонов, В.І.Янчевський у [7] відкрили загальний підхід для обчислення 2 – кручення групи Брауера гіпереліптичної кривої над довільними полями та застосували цей підхід до випадку локального основного поля. Ключову роль тут відіграє теорема Ленга про алгебричні групи над скінченними полями, яка стверджує, що для будь-якого алгебричного многовиду, визначеного над скінченним полем, $H^1(\mathrm{Gal}\,(\overline{k}/k,\overline{J})) = 0$. Майже безпосередньо з означення псевдоскінченного поля випливає аналогічна рівність $H^1(\mathrm{Gal}\,(\overline{k}/k,\overline{J})) = 0$ і для псевдоскінченних полів. Це дає змогу поширити описання 2-кручення групи Брауера гіпереліптичної кривої на випадок псевдолокального основного поля. Таке описання дає теорема 6.

Починаємо з розгляду розкладних еліптичних кривих над псевдолокальним полем.

Далі n означає натуральне число, взаємно просте з характеристикою поля k, а $|C|$ – порядок скінченної групи C. Нехай тепер K – псевдолокальне поле. Позначимо через $\mathcal{O}_K$ кільце цілих поля K, π – простий елемент поля K. α – одиниця поля K, яка не є квадратом. Нехай A – еліптична крива визначена над полем K. Нехай $C_\alpha = [(\alpha, x-c)]$, $C_\pi = [(\pi, x-c)]$, $B_\alpha = [(\alpha, x-b)]$, $B_\pi = [(\pi, x-b)]$ – представники алгебри кватерніонів над $K(A)$.

Теорема 1. *Нехай A розкладна еліптична крива над псевдолокальним полем K.*

1. *Якщо A має невироджену редукцію, то $(BrA)_2 = (BrK)_2 \oplus \{1, B_\pi, C_\pi, B_\pi \otimes C_\pi\}$.*
2. *Якщо A має мультиплікативну редукцію і K – загальне локальне поле, то $(BrA)_2 = (BrK)_2 \oplus \{1, B_\pi, C_\pi, B_\pi \otimes C_\pi\}$ у випадку, коли дотичні в особливій точці редукції не визначені над основним полем K і $(BrA)_2 = (BrK)_2\{1, B_\alpha, B_\alpha, B_{\alpha\pi}\}$ у випадку, коли вони визначені над полем K.*
3. *Якщо A має адитивну редукцію і K – загальне локальне поле, то $(BrA)_2 = (BrK)_2 \oplus \{1, B_\alpha, C_\alpha, B_\alpha \otimes C_\alpha\}$.*

Сформулюємо деякі допоміжні результати, потрібні для доведення теореми 1.

Теорема 2. *Якщо A – еліптична крива, визначена над псевдолокальним полем K, то добуток Тейта – Шафаревича індукує двоїстість скінченних груп $A(K)/nA(K)$ і $H^1(K, A)_n$. Якщо A – крива з виродженою редукцією, то ця двоїстість зберігається і у випадку загального локального поля K.*

Теорема 3. *В умовах попередньої теореми* $|(\mathrm{Br}\,A)_n| = n|(A(K))_n|$.

Лема 1. *Нехай A – довільна еліптична крива, визначена над псевдолокальним полем K або крива з виродженою редукцією, визначена над загальним локальним полем K. Тоді $|A(K)/nA(K)| = |(A(K))_n|$.*

Доведення теорем 2, 3 та начерк доведення леми 1 наведено у [5].

Лема 2. *Нехай A – розкладна еліптична крива з невиродженою редукцією. Тоді у точній послідовності когомологій*

$$0 \longrightarrow A(K)/2A(K) \xrightarrow{\delta} H^1(G, A(\bar{K})_2) \xrightarrow{\rho} H^1(G, A(\bar{K}))_2 \longrightarrow 0, \qquad (1)$$

образ гомоморфізму δ породжується парами $(\alpha, 1)$ та $(1, \alpha)$.

Доведення. Як і у випадку еліптичної кривої, визначеної над локальним полем K (див. [3, лема 9.1]) достатньо довести, що пари $(\alpha, 1)$, $(1, \alpha) \in H^1(G, A(\bar{K})_2) \simeq K^*/K^{*2} \times K^*/K^{*2}$ належать до $\mathrm{Ker}\,\rho$. Нехай K^{nr}/K – максимальне нерозгалужене розширення поля K. Тоді

$$H^1(\mathrm{Gal}\,(K^{\mathrm{nr}}/K), A(K^{nr})) = H^1(\mathrm{Gal}\,(\bar{k}/k), \tilde{A}(\bar{k})) = 0$$

на підставі псевдоскінченності поля лишків k поля K. Тут $\bar{k}$ – алгебричне замикання поля k, $\tilde{A}$ – редукція кривої A. Тому зі спектральної послідовності Хохшільда-Серра випливає, що відображення $H^1(G, A(K)_2) \to H^1(K^{\mathrm{nr}}, A(\bar{K}))$ ін'єктивне. Крім того, очевидно, що $(\mathrm{res} \circ \rho)(\alpha, 1) = (\mathrm{res} \circ \rho)(1, \alpha) = 0$. $\square$

Лема 3. *Нехай A – розкладна еліптична крива над загальним локальним полем з мультиплікативною редукцією з рівнянням*

$$y^2 = x(x + \pi^m \beta)(x + \gamma), \qquad (2)$$

де $\beta, \gamma \in O_K^*$, $m \geqslant 1$, і нехай $A_0(K)$ – підгрупа точок групи $A(K)$, що редукуються в неособливі. Тоді існують точки $R_1 = (u_1, v_1) \in A_0(K)$ і $R_2 = (u_2, v_2) \in A(K) \backslash A_0(K)$ такі, що точки R_1, R_2 породжують групу $A(K)/2A(K)$.

Доведення. Якщо крива A визначена над локальним полем, то твердження леми доведено у [3, лема 7.5 і твердження 7.7]. Згадані доведення придатні і для випадку довільного поля, якщо врахувати, що для скінченних розширень квазіскінченних полів гомоморфізм норми є сюр'єктивним (див. [5, §2]). $\square$

Лема 4. *Якщо A – розкладна еліптична крива з мультиплікативною редукцією задана рівнянням (2) над загальним локальним полем, то образ гомоморфізму δ з точної послідовності (1) породжується парами $(1, \alpha), (1, \pi^m \beta)$, якщо $\gamma \notin O_K^{*2}$ і парами $(1, \alpha), (1, \pi)$, якщо $\gamma \in O_K^{*2}$.*

Доведення одержуємо з леми 3 за допомогою таких самих міркувань, як і у випадку локального основного поля (див. [3, Лема 9.5 і 9.7]).

Лема 5. *Нехай A – розкладна еліптична крива з адитивною редукцією, визначена над загальним локальним полем k і задана рівнянням $y^2 = x(x - \pi^m d)(\pi x - \pi e)$, де $d, e \in O_K^*$. Тоді образ гомоморфізму δ з точної послідовності (1) породжується елементами $\delta((0,0)) = (-\pi e, -\pi^m d)$ і $\delta((\pi e, 0)) = (\pi e(\pi e - \pi^m d), \pi e - \pi^m d)$.*

Доведення. Легко перевірити, що як і у випадку локального поля група $A(K)/2A(K)$ має своїми представниками точки $(0,0)$, $(\pi^m d, 0)$ і $(\pi e, 0)$. Тому $(A(K)/2A(K))$ породжується образами будь-якої пари цих точок.

Те, що $\delta((0,0))$ та $\delta((\pi e, 0))$ мають згаданий у формулюванні вигляд, випливає з явного обчислення гомоморфізму δ для еліптичних кривих над довільним полем, проведеного в [3, Твердження 3.2]. $\square$

Доведення теореми 1. Для еліптичної кривої A над довільним полем маємо точні послідовності

$$0 \longrightarrow A(K)2A(K) \xrightarrow{\delta} H^1(K, A(\bar{K})_2) \xrightarrow{\rho} H^1(K, A(\bar{K}))_2 \longrightarrow 0$$

і

$$0 \longrightarrow (\operatorname{Br} K)_2 \xrightarrow{\iota} (\operatorname{Br} A)_2 \xrightarrow{\kappa} H^1(K, A(\bar{K})_2) \longrightarrow 0 \tag{3}$$

Черноусов і Гулецький показали [4], що існує гомоморфізм

$$\varepsilon_0\colon H^1(K, A(\bar(K)_2)) \to (\operatorname{Br} A)_2$$

для якого $\kappa \circ \varepsilon_0 = \rho$ і $\varepsilon_0(\ker \rho) = 0$. Звідси випливає існування єдиного гомоморфізму $\varepsilon\colon H^2(K, A(\bar(K)_2)) \to (BrA)_2$, для якого $\kappa \circ \varepsilon_0 = 1$. Тому точна послідовність (3) засвідчує, що $(\operatorname{Br} A)_2 \cong (\operatorname{Br}_K)_2 \oplus \operatorname{Im} \varepsilon$.

$$|\operatorname{Im} \varepsilon| = |H^1(K, A(\bar(K)_2))| = |A(K)/2A(K)| = |A(K)_2| = 4$$

згідно з теоремами 1, 2 та лемою 1. Звідси, згідно з лемами 2 і 5 випливає, що достатньо знайти в групі $(\operatorname{Br} A)_2$ образи стосовно гомоморфізму ε_0 тих твірних елементів групи $H^1(K, A(\bar(K)_2))$, які доповнюють, відповідно, твірні $(\alpha, 1)$ та $(1, \alpha)$ у випадку невиродженої редукції; $(1, \alpha)$ і $(1, \pi^m \beta)$, якщо $\gamma \notin O_K^{*2}$ та $(1, \alpha)$, $(1, \pi)$, якщо $\gamma \in O_K^{*2}$, у випадку мультиплікативної редукції; $(-\pi e, -\pi^m d)$, $(\pi e(\pi e - \pi^m d)$, $\pi e - \pi^m d)$ у випадку адитивної редукції. Використовуючи обчислення гомоморфізму ε_0, проведені в [3], одержуємо, що цими образами є, відповідно, B_π, C_π, ; B_α, B_π ; B_α, C_α. Звідси і випливає твердження теореми.

Зазначимо, що для кривих з виродженою редукцією твердження 2, 3 теореми 1 правильне для загальних локальних полів на підставі теореми 2.

Теорема 4. *Нехай A – еліптична крива з невиродженою редукцією над псевдолокальним полем K з полем лишків характеристики, що не дорівнює 2. Нехай далі $y^2 = x^3 + ax + b$ – Вейєрштрассове рівняння кривої A. Тоді група $(BrA)_2$ складається з двох елементів, якщо поліном $x^3 + ax + b$ не має коренів у полі K; з чотирьох елементів, якщо цей поліном має один корінь в полі K; і з восьми елементів, якщо він має всі корені в полі K.*

Доведення. У [2] для кривої з невиродженою редукцією над локальним полем наведені списки попарно неізоморфних кватерніонних алгебр, які вичерпують всю групу $(BrA)_2$ і складаються відповідно з двох, чотирьох та восьми елементів залежно від того, чи поліном $x^3 + ax + b$ не має коренів, має один або три корені у полі K. Доведення того, що всі ці алгебри неізоморфні, дослівно проходить і для кривої A над загальним локальним полем. Оскільки за теоремою 3 в умовах теореми 4 не може бути більше, ніж відповідно два, чотири або вісім елементів групи $(BrA)_2$, то звідси і випливає твердження теореми 4. $\square$

Тепер перейдемо до гіпереліптичних кривих, визначених над псевдолокальним полем. Реман, Тіхонов і Янчевський [7] довели такий результат для гіпереліптичних кривих над довільним полем K.

Теорема 5 (Реман, Тіхонов, Янчевський). *Нехай C/K гіпереліптична крива над полем K, яка відповідає афінній кривій заданій рівнянням*

$$y^2 = (x-a)g_1(x)\dots g_n(x), \tag{4}$$

де $g_1(x),\dots,g_n(x)$ незвідний поліном. Нехай $b_1,\dots,b_n$ корені $g_1,\dots,g_n$. Нехай

$$\varepsilon\colon {}_2H^1(G,\overline{J}) \longrightarrow BrC_2$$

переріз гомоморфізму $\kappa\colon (BrC)_2 \to H^1(G,\overline{J})_2$ і нехай $I = \operatorname{Im}\varepsilon$. Тоді

$$BrC_2 \cong (BrK)_2 \oplus I$$

і довільний елемент з I можна зобразити за допомогою алгебри

$$\operatorname{tr}_G^{H_i}[(s_1,(x-a)(x-b_1))] \otimes \dots \otimes \operatorname{tr}_G^{H_n}[(s_n,(x-a)(x-b_n))], \tag{5}$$

де $s_1 \in K_i^* = K(b_i)$. Навпаки, довільна алгебра з (5) нерозгалужена над C. Вона тривіальна в I тоді і тільки тоді, якщо вона подібна до алгебри вигляду

$$A = A_1 \otimes \dots \otimes A_n,$$

де $A_i \in \operatorname{tr}_G^{H_i}[(s_i,(x-a)(x-b_i))]$, $s_i = \prod_j (x_j-b_i)^{n_j}$ і $\sum_j n_j(x_j,y_j)$ дивізор степеня 0 на C, визначений над K, носій якого не містить Вейерштрассових точок.

Використовуючи цю теорему та наступні леми, можемо отримати описання 2-кручення групи Брауера гіпереліптичних кривих над псевдолокальним полем.

Лема 6. *Нехай A – абелевий многовид над псевдоскінченним полем k. Тоді $H^1(k,A) = 0$.*

Доведення. Елементи групи $H^1(k,A)$ інтерпретують як класи ізоморфізму головних однорідних просторів для A над k, тобто алгебричні многовиди, які стають ізоморфними з A над скінченним розширенням поля k. Нейтральним елементом цієї групи є клас головних однорідних просторів, які мають k-раціональну точку. Вони всі ізоморфні з A над k. Оскільки псевдоскінченне поле є псевдоалгебрично замкненим, то кожен непорожній многовид над цим полем k має k-раціональну точку, тому кожен клас ізоморфізму головних однорідних просторів тривіальний. □

Лема 7. *Нехай A – абелевий многовид з невиродженою редукцією $\bar{A}$ над повним дискретно нормованим полем K з полем лишків k. Нехай K_{nr} – максимальне нерозгалужене розширення поля K і G_{nr} – його група Галуа. Тоді $G_{\mathrm{nr}} \cong \operatorname{Gal}(\overline{k}/k)$ і $H^1(G_{nr},A) \simeq H^1(\operatorname{Gal}(\overline{k}/k),\bar{A}(\bar{k}))$.*

Лема 8. *Нехай гіпереліптична крива C з доброю редукцією і нехай $A = (a,g)$ нерозгалужена кватерніонна алгебра над $K(C)$, де $g \in K(C)$. Тоді A тривіальна.*

Теорема 6. *У позначеннях теореми 5 нехай C/K гіпереліптична крива з доброю редукцією над не діадичним локальним полем K. Тоді кожен нетривіальний елемент з $(BrC)_2$ зображається тензорним добутком алгебр вигляду*

$$(\pi,(x-a)^{[K_i:K]}g_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Доведення. Доведення майже не відрізняється від доведення для випадку локального основного поля. Для зручності читача наведемо відповідні міркування з праці [7]. Нехай b_i корінь полінома $g_i(x)$, $K_i = K(b_i)$. Тоді розширення K_i/K нерозгалужене і кожен елемент з K_i/K_i^{*2} має вигляд $\alpha_{K_i}\pi^j$, де α_{K_i} неквадратний елемент в O_{K_i}.

На підставі теореми 5 і леми 8 кожен елемент з I можна зобразити у вигляді

$$\mathrm{tr}^{H_1}[(\pi,(x-b_1))] \otimes \cdots \otimes \mathrm{tr}_G^{H_n}[(\pi,(x-a)(x-b_n))],$$

де $H_i = \mathrm{Gal}\,(\bar{K}/K_i)$. Крім того,

$$\mathrm{tr}_G^{H_i}[(\pi,(x-a)(x-b_i))] = [(\pi,(x-a)^{[K_i:K]}.$$

Звідси випливає, що алгебри

$$[(\pi,(x-a)^{[K_i:K]}g_i)],\ldots,[(\pi,(x-a)^{[K_n:K]}g_n].$$

є системою твірних групи $(BrC)_2$. Тепер з наслідку 3.9 з праці [7] випливає, що не існує нетривіальних співвідношень між твірними групи $(BrC)_2$. Згаданий наслідок стверджує, що елемент з I тривіальний тоді і тільки тоді, коли він зображається алгеброю $A = A_1 \otimes \ldots \otimes A_n$, де

$$A_i \in tr_G^{H_i}[(s_i,(x-a)(x-b))], \qquad s_i = \prod_{j=1}^{t}\prod_{l=1}^{j_k}(x(\sigma_l Q_l) - b_1),$$

Q_i – точка кривої C така, що $y(Q_j) \in K(x(Q_j))$, $y(Q_j) \neq 0$.

Для цього достатньо показати, що не існує точок $Q_j \in C$, для яких $y(Q_j) \in$ $\in K(x(Q_j)), y(Q_j) \neq 0$ і $\pi = \prod_{l=1}^{j_k}(x(\sigma_l Q_j) - b_i)$, де $\sigma_{j_1}(Q_j), \sigma_{j_k}(U_l)$ спряжені з Q_j над K. Припустимо, що така точка Q_j існує. Оскільки C має добру редукцію, то $f(x(Q_j)) = \pi u$ для деякого $u \in O^*_{K(x(Q_j))}$. Отже, $f(x(Q_j)) \notin K(x(Q_j))^{*2}$ і $y(Q_j) \notin$ $\notin K(x(Q_j))$. Тому не існує нетривіальних співвідношень між зазначеними твірними ${}_2\mathrm{Br}\,C$. □

1. *Ax J.* The elementary theory of finite fields. / *Ax J.* // Ann. Math. – 1968. – Vol. 88, №2. – P. 239-271.
2. *Янчевский В.И.* Кручение и группы Брауэра локальных эллиптических кривых / *Янчевский В.И., Марголин Г.Л.* // Алгебра и анализ. – 1995. – Т. 7, №3. – С. 200-239.
3. *Янчевский В.И.* Кручение и группы Брауэра локальных гиперэллиптических кривых / *Янчевский В.И., Марголин Г.Л.* // Алгебра и анализ. – 1995. – Т. 7, №6. – С. 227-249.
4. *Chernousov V.* 2-Torsion of the Brauer group of an elliptic curve: generators and relations / *Chernousov V., Guletskii V.* – Universitat Bielefeld, 2000. – Preprint 00-037.
5. *Андрійчук В.І.* Про групи Брауера еліптичних кривих / *Андрійчук В.І., Стахів Л.Л.* // Вісник Київ. ун-ту. Серія фіз.-мат. науки. – 1999. – Т. 2. – С.10-13.
6. *Serre J.-P.* Corps locaux. / *Serre J.-P.* – Paris. Hermann, 1962.
7. *Rehman U.* Two torsion on the Brauer groups of hyperelliptic curves and unramified algebras over their function field / *Rehman U., Tikhonov S.V., and Yancevskii V.I.* // Communications in Algebraю – 2001. – Vol. 29, №9. – P. 3971-3987.

2-TORSION OF THE BRAUER GROUP OF ELLIPTIC AND HYPERELLIPTIC CURVES OVER PSEUDOLOCAL FIELDS

Ludmyla STAKHIV

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: mlmstakhiv@gmail.com

The 2-Torsion of the Brauer group of elliptic and hyperelliptic curves over pseudolocal fields are described.

Key words: pseudolocal field, elliptic curve, hyperelliptic curve, Brauer group.

2-КРУЧЕНИЯ ГРУПП БРАУЭРА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ И ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРИВЫХ НАД ПСЕВДОЛОКАЛЬНЫМИ ПОЛЯМИ

Людмила СТАХИВ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, Университетская, 1
e-mail: mlmstakhiv@gmail.com

Исследовано 2-кручения групп Брауэра эллиптических и гиперэллиптических кривых над псевдолокальными полями.

Ключевые слова: псевдолокальное поле, эллиптическая кривая, гиперэллиптическая кривая, якобиан, группа Брауэра.

Стаття надійшла до редколегії 01.09.2009

Прийнята до друку 16.12.2009

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2009. *Ser. Mech. Math. 2009.*
Вип. 71. С. 220–234 *Is. 71. P. 220–234*

УДК 517.95

ТОЧКОВІ ОСОБЛИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ НЕЛІНІЙНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ВОЛЬТЕРРА

Оксана ЧМИР

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності,
79000, Львів, вул. Клепарівська, 35
e-mail: o_chmyr@yahoo.com

Використовуючи принцип Шаудера, знайдено достатні умови розв'язності нелінійного інтегрального рівняння Вольтерра з полярним ядром у ваговому L^1 - просторі функцій з точковими степеневими особливостями.

Ключові слова: нелінійне інтегральне рівняння, ваговий функційний простір, неперервний оператор, компактна множина, теорема Шаудера про нерухому точку.

1. Вступ. У багатьох працях досліджували умови існування та поведінку розв'язків лінійних і півлінійних еліптичних та параболічних рівнянь і систем рівнянь на межі області та в окремих її точках, коли функції задані на межі області є узагальненими (див., наприклад, бібліографію в [1], а також [2], [3], [4], [5]).

Враховуючи наявне дослідження функції Гріна загальних лінійних параболічних крайових задач [6], [7], [8], природно для дослідження узагальнених крайових задач для півлінійних параболічних рівнянь використовувати метод зведення їх до еквівалентного нелінійного інтегрального рівняння Вольтерра у ваговому L^1-просторі з ядром – функцією Гріна.

Наша мета – вивчити характер розв'язку нелінійного інтегрального рівняння Вольтерра з полярним ядром у просторі функцій, які можуть мати особливості в окремих точках межі області. Одержані результати мають застосування до розв'язності узагальнених крайових задач для півлінійного параболічного рівняння у просторі функцій з точковими особливостями.

2. Основна частина.

2.1. Основні позначення та допоміжні твердження. Нехай $n \in \mathbb{N}$, Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею $S = \partial\Omega$ класу C^∞, $Q = \Omega \times (0,T]$, $\Sigma = S \times (0,T]$, $0 < T < +\infty$.

Використовуватимемо позначення: $||x-y||$ – евклідова відстань в $\mathbb{R}^n$; $P=(x,t)$, $M=(y,\tau)$, $\widehat{P}=(\hat{x},\hat{t})$, $d(x,t;y,\tau)=|PM|=(||x-y||^2+|t-\tau|)^{\frac{1}{2}}$ – параболічна відстань в $\mathbb{R}^{n+1}$; η – мультиіндекс з компонентами $(\eta_1,...,\eta_n)$, $\eta_i\in\mathbb{Z}_+$, $i=\overline{1,n}$, $|\eta|=\eta_1+...+\eta_n$ – довжина мультиіндексу η, $D^\eta\equiv D_x^\eta=\frac{\partial^{|\eta|}}{\partial x_1^{\eta_1}\cdot...\cdot\partial x_n^{\eta_n}}$.

Нехай $\varepsilon_0>0$ – задане число таке, що паралельна до S поверхня S_{ε_0} є класу C^∞ та надалі вважатимемо, що $\varepsilon_0\leqslant 1$. Через $\widetilde{\varrho}(\sigma)$ позначатимемо нескінченно диференційовну невід'ємну функцію, яка має порядок σ при $\sigma\to 0$ та володіє властивістю $M_1^{'}\sigma\leqslant\widetilde{\varrho}(\sigma)\leqslant M_2^{'}\sigma$, де $M_1^{'}$, $M_2^{'}$ – додатні сталі.

При довільній фіксованій точці $\widehat{P}\in\overline{Q}$ введемо функцію ϱ_0 точки $P\in\overline{Q}$ таку, що $0<\varrho_0(P,\widehat{P})\leqslant 1$ та $\varrho_0(P,\widehat{P})=\begin{cases}\widetilde{\varrho}(|P\widehat{P}|), & |P\widehat{P}|<\frac{\varepsilon_0}{2},\\ 1, & |P\widehat{P}|\geqslant\varepsilon_0.\end{cases}$

При $k\in\mathbb{R}$ введемо функційний простір

$$\mathcal{M}_k(Q,\,\widehat{P})=\{\mathrm{v}:\,||\mathrm{v};\,\widehat{P}||_k=\int\limits_Q\varrho_0^k(x,t,\hat{x},\hat{t})|\mathrm{v}(x,t)|\,dxdt<+\infty\}.$$

Нехай

$$(H\mathrm{v})(x,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_\Omega\mathcal{K}(x,t;y,\tau)\cdot F_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))\,dy,\ (x,t)\in Q,$$

$$H_1\mathrm{v}=H\mathrm{v}+h_0,$$

де $\mathcal{K}(x,t;y,\tau)((x,t;y,\tau)\in\overline{Q}\times\overline{Q})$ – ядро оператора H, що володіє такими властивостями:

1) $\mathcal{K}(x,t;y,\tau)=0$ при $t<\tau$;
2) $\mathcal{K}(x,t;y,\tau)$ при $(x,t)\neq(y,\tau)$ має похідні до порядку $s+n+2$, а в околі діагоналі $(x,t)=(y,\tau)$ разом із своїми похідними має такі оцінки:

$$|\frac{\partial^{\eta_0}}{\partial\tau^{\eta_0}}D_y^\eta\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\leqslant C_{\eta,\,\eta_0}[d(x,t;y,\tau)]^{s-|\eta|-2\eta_0},$$

де $-n-2<s<0$, $|\eta|+2\eta_0<s+n+2$, $C_{\eta,\,\eta_0}$ – додатні сталі;
3) для довільних η, $|\eta|<s+n+2$, $-n-2<s<0$ існують додатні сталі $\widetilde{C}_\eta$ такі, що $\int_Q|D_x^\eta\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\,dxdt\leqslant\widetilde{C}_\eta$ для довільних $(y,\tau)\in\overline{Q}$,

функція $F_0(x,t,\mathrm{v})$ визначена в $Q\times(-\infty,+\infty)$, функція h_0 визначена в Q.

Прикладом ядра $\mathcal{K}$ є функція Гріна першої крайової задачі для рівняння теплопровідності при $s=-n$, $n\geqslant 1$.

Подібно до результатів [6] доведено таку властивість функції $\mathcal{K}$.

Нехай $(\hat{x},\hat{t})\in\overline{Q}$, $r>-n-2$, $-n-2<s<0$, $|\eta|+2\eta_0<s+n+2$. *Тоді*

$$\Big|\frac{\partial^{\eta_0}}{\partial t^{\eta_0}}D_x^\eta\int\limits_Q\mathcal{K}(x,t;y,\tau)\varrho_0^r(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\,dyd\tau\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\widehat{L}_{\eta,\,\eta_0}\max\{[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{r+2+n+s-|\eta|-2\eta_0},\,1\}\quad\forall(x,t)\in\overline{Q},\tag{A}$$

де $\widehat{L}_{\eta,\eta_0}$ *– додатні сталі.*

У просторі $\mathcal{M}_k(Q,\,\widehat{P})$ при $k>-n-2$ розглянемо інтегральне рівняння

$$\mathrm{v}=H_1\mathrm{v}.\tag{1}$$

У [9] отримано існування розв'язку інтегрального рівняння (1) у просторі $\mathcal{M}_k(Q,\ \widehat{P})$. Зокрема, при $-n-2 < s < 0$, $k > -n-s-2$, $h_0 \in \mathcal{M}_k(Q,\ \widehat{P})$, $F_0(x,t,\mathrm{v}) = |\mathrm{v}|^q$, де $q \in (0, \min\{\frac{n+2}{k+n+2}; 1\})$, існує розв'язок рівняння (1) у просторі $\mathcal{M}_k(Q,\ \widehat{P})$.

Для довільної фіксованої точки $\widehat{P} = (\hat{x}, \hat{t}) \in \overline{Q}$ та $\alpha \in \mathbb{R}_- \cup \{0\}$ введемо функційний простір

$$\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\ \widehat{P}) = \{\mathrm{v} \in C(\overline{Q} \setminus \{\widehat{P}\}) : \varrho_0^{-\alpha}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\mathrm{v}(y,\tau) \in C(\overline{Q}) \\ (||\mathrm{v};\ \widehat{P}||'_\alpha = \sup_{(y,\tau)\in\overline{Q}} \varrho_0^{-\alpha}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})|\mathrm{v}(y,\tau)| < +\infty)\}.$$

Оскільки при $\mathrm{v} \in \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\ \widehat{P})$ та $k+\alpha > -n-2$ виконується

$$||\mathrm{v};\ \widehat{P}||_k = \int\limits_Q \varrho_0^k(M,\widehat{P})|\mathrm{v}(y,\tau)|\,dyd\tau \leqslant \widehat{C}\int\limits_Q \varrho_0^k(M,\widehat{P})[\varrho_0(M,\widehat{P})]^\alpha\,dyd\tau \leqslant$$

$$\leqslant \widehat{C} \int\limits_{\{M:\,|M\widehat{P}|<\varepsilon_0\}} [\varrho_0(M,\widehat{P})]^{k+\alpha}\,dyd\tau + \widehat{C}\int\limits_{\{M:\,|M\widehat{P}|>\varepsilon_0\}} dyd\tau < +\infty,$$

то $\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\ \widehat{P}) \subset \mathcal{M}_k(Q,\ \widehat{P})$ при $k > -\alpha-n-2$, де $\widehat{C}$ – додатна стала.

Нехай $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\,\widetilde{C}}(\overline{Q},\ \widehat{P}) = \{\mathrm{v} \in \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\ \widehat{P}) : ||\mathrm{v};\ \widehat{P}||'_\alpha \leqslant \widetilde{C}\}$ – замкнена куля радіуса $\widetilde{C}$ у просторі $\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\ \widehat{P})$.

Нехай $h_0 \in \widetilde{\mathcal{M}}_l(\overline{Q},\widehat{P})$, де $l \in \mathbb{R}$. Зі зробленого зауваження випливає, що $h_0 \in \mathcal{M}_k(Q,\ \widehat{P})$ при $k > -l-n-2$.

Лема 1. *Нехай $q \in (0,1)$, $-n-2 < s < 0$, $-\frac{n+s+2}{q} < \alpha \leqslant 0$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$ таке, що для довільної підобласті $V \subset Q$, міра якої $m(V)$ менша за σ, для довільних $(x,t) \in \overline{Q}$ виконується нерівність*

$$[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha}\int\limits_{V\cap Q} [\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha q}\cdot|\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau < \varepsilon.$$

Доведення. Доведення леми проводимо подібно до доведення леми 1 [9], розділяючи особливості функції $\varrho_0^{\alpha q}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\mathcal{K}(x,t;y,\tau)$. Нехай V – довільна підобласть в Q, $(\hat{x},\hat{t})$ – фіксована точка $\overline{Q}$, $\sigma \in (0,1)$ – яке-небудь число. Далі позначатимемо через C_j, $j = \overline{1,13}$ – додатні сталі.

1. Нехай точка $(x,t) \in \overline{Q}$ така, що $||x-\hat{x}|| < \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$, $|t-\hat{t}| < \frac{\sigma^2}{2}$.

а) Якщо $||y-\hat{x}|| < \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$, $|\tau-\hat{t}| < \frac{\sigma^2}{2}$, то $||x-y|| \leqslant ||x-\hat{x}|| + ||y-\hat{x}|| < \frac{2\sigma}{\sqrt{2}}$, $|t-\tau| < \sigma^2$, тоді

$$\mathcal{I}_1(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) =$$

$$= [\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha}\int\limits_{V\cap\{(y,\tau)\in Q:\,||y-\hat{x}||<\frac{\sigma}{\sqrt{2}},\,|\tau-\hat{t}|<\frac{\sigma^2}{2}\}} [\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha q}\cdot|\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau \leqslant$$

$$\leqslant [\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha} \int\limits_{\substack{V\cap\{(y,\tau)\in Q:\,||x-y||<\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\,|t-\tau|<\frac{\sigma^2}{8};\\ \frac{\sigma}{2\sqrt{2}}\leqslant||y-\hat{x}||<\frac{\sigma}{\sqrt{2}},\,\frac{\sigma^2}{8}\leqslant|\tau-\hat{t}|<\frac{\sigma^2}{2}\}}} [\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha q}\cdot|\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau+$$

$$+[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha} \int\limits_{\substack{V\cap\{(y,\tau)\in Q:\,||x-y||\geqslant\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\,|t-\tau|\geqslant\frac{\sigma^2}{8};\\ ||y-\hat{x}||<\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\,|\tau-\hat{t}|<\frac{\sigma^2}{8}\}}} [\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha q}\cdot|\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau+$$

$$+[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha} \int\limits_{\substack{V\cap\{(y,\tau)\in Q:\,||x-y||\geqslant\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\,|t-\tau|\geqslant\frac{\sigma^2}{8};\\ \frac{\sigma}{2\sqrt{2}}\leqslant||y-\hat{x}||<\frac{\sigma}{\sqrt{2}},\,\frac{\sigma^2}{8}\leqslant|\tau-\hat{t}|<\frac{\sigma^2}{2}\}}} [\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha q}\cdot|\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau =$$

$$= J_1(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma)+J_2(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma)+J_3(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma). \tag{2}$$

Зробимо заміну змінних в інтегралі J_1

$$\begin{array}{lll} y_i=\hat{x}_i+\xi_i\sigma, & x_i=\hat{x}_i+s_i\sigma, & i=\overline{1,n}. \\ \tau=\hat{t}+\xi_{n+1}\sigma^2; & t=\hat{t}+s_{n+1}\sigma^2, & \end{array} \tag{3}$$

У нових змінних

$M=\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n,\xi_{n+1})$, $|\overline{\xi}|=\sqrt{\xi_1^2+...+\xi_n^2+|\xi_{n+1}|}=\sqrt{||\xi||^2+|\xi_{n+1}|}$,

$|M\widehat{P}|=\sqrt{||y-\hat{x}||^2+|\tau-\hat{t}|}=\sqrt{\sigma^2||\xi||^2+\sigma^2|\xi_{n+1}|}=\sigma\cdot|\overline{\xi}|$,

$|MP|=\sqrt{||y-x||^2+|\tau-t|}=\sqrt{\sigma^2||s-\xi||^2+\sigma^2|s_{n+1}-\xi_{n+1}|}=\sigma\cdot d(\overline{s};\overline{\xi})$,

де $d(\overline{s};\overline{\xi})=\sqrt{||s-\xi||^2+|s_{n+1}-\xi_{n+1}|}$, $dyd\tau=\sigma^{n+2}d\xi d\xi_{n+1}$. Тоді

$$J_1(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma)=$$

$$=[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha} \int\limits_{\substack{V\cap\{(y,\tau)\in Q:\,||x-y||<\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\,|t-\tau|<\frac{\sigma^2}{8}\\ \frac{\sigma}{2\sqrt{2}}\leqslant||y-\hat{x}||<\frac{\sigma}{\sqrt{2}},\,\frac{\sigma^2}{8}\leqslant|\tau-\hat{t}|<\frac{\sigma^2}{2}\}}} [\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha q}\cdot|\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau\leqslant$$

$$\leqslant[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha}C_1\cdot\sigma^{\alpha q+n+s+2} \int\limits_{\{(\xi,\xi_{n+1}):||s-\xi||<\frac{1}{2\sqrt{2}},\,|s_{n+1}-\xi_{n+1}|<\frac{1}{8}\}} d^s(\overline{s};\overline{\xi})\,d\xi d\xi_{n+1}\leqslant$$

$$\leqslant C_2\sigma^{\alpha(q-1)+2+n+s},$$

де збіжність інтеграла випливає з формули 3 [10, с. 588].

Проводячи подібну заміну змінних (3) в інтегралі J_2, одержуємо

$$J_2(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma)=$$

$$=[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha} \int\limits_{\substack{V\cap\{(y,\tau)\in Q:\,||x-y||\geqslant\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\,|t-\tau|\geqslant\frac{\sigma^2}{8};\\ ||y-\hat{x}||<\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\,|\tau-\hat{t}|<\frac{\sigma^2}{8}\}}} [\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha q}\cdot|\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau\leqslant$$

$$\leqslant[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha}C_3\cdot\sigma^{\alpha q+n+s+2} \int\limits_{\{(\xi,\xi_{n+1}):||\xi||<\frac{1}{2\sqrt{2}},\,|\xi_{n+1}|<\frac{1}{8}\}} |\overline{\xi}|^{\alpha q}\,d\xi d\xi_{n+1}\leqslant$$

$$\leqslant C_4 \cdot \sigma^{\alpha(q-1)+n+s+2},$$

де збіжність інтеграла випливає з формули 3 [10, с. 588].

$$J_3(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) =$$

$$= [\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha} \int\limits_{\substack{V\cap\{(y,\tau)\in Q:\,||x-y||\geqslant\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\,|t-\tau|\geqslant\frac{\sigma^2}{8};\\ \frac{\sigma}{2\sqrt{2}}\leqslant||y-\hat{x}||<\frac{\sigma}{\sqrt{2}},\,\frac{\sigma^2}{8}\leqslant|\tau-\hat{t}|<\frac{\sigma^2}{2}\}}} [\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha q}\cdot|\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau \leqslant$$

$$\leqslant C_5\sigma^{\alpha(q-1)+s}m(V).$$

Отже, при $m(V) < \sigma^{n+2}$ із (2) та вище описаних міркувань, одержуємо

$$\mathcal{I}_1(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) \leqslant C_6(\sigma^{\alpha(q-1)+2+n+s} + \sigma^{\alpha(q-1)+2+n+s} + \sigma^{\alpha(q-1)+s}m(V)) \leqslant$$

$$\leqslant C_7\sigma^{\alpha(q-1)+2+n+s}.$$

За заданим $\varepsilon > 0$, вибравши $\sigma < \min\{(\frac{\varepsilon}{C_7})^{\frac{1}{\alpha(q-1)+n+s+2}}; 1\}$, при $(x,t)\in\overline{Q}$ такій, що $||x-\hat{x}|| < \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$, $|t-\hat{t}| < \frac{\sigma^2}{2}$ та $m(V) < \sigma^{n+2}$, матимемо

$$\mathcal{I}_1(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

б) При $(y,\tau)\in\overline{Q}$ такій, що $||y-\hat{x}|| \geqslant \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$, $|\tau-\hat{t}| \geqslant \frac{\sigma^2}{2}$ подібно знаходимо

$$\mathcal{I}_2(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) =$$

$$= [\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha} \int\limits_{V\cap\{(y,\tau)\in Q:\,||y-\hat{x}||\geqslant\frac{\sigma}{\sqrt{2}},\,|\tau-\hat{t}|\geqslant\frac{\sigma^2}{2}\}} [\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha q}\cdot|\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau \leqslant$$

$$\leqslant [\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha} \int\limits_{\substack{V\cap\{(y,\tau)\in Q:\,||y-\hat{x}||\geqslant\frac{\sigma}{\sqrt{2}},\,|\tau-\hat{t}|\geqslant\frac{\sigma^2}{2};\\ ||x-y||<\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\,|t-\tau|<\frac{\sigma^2}{8}\}}} [\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha q}\cdot|\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau +$$

$$+ [\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha} \int\limits_{\substack{V\cap\{(y,\tau)\in Q:\,||y-\hat{x}||\geqslant\frac{\sigma}{\sqrt{2}},\,|\tau-\hat{t}|\geqslant\frac{\sigma^2}{2};\\ ||x-y||\geqslant\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\,|t-\tau|\geqslant\frac{\sigma^2}{8}\}}} [\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha q}\cdot|\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau \leqslant$$

$$\leqslant C_8\sigma^{-\alpha}(\sigma^{\alpha q+s+n+2} + \sigma^{\alpha q+s}m(V)) \leqslant C_8\sigma^{\alpha(q-1)+s+n+2}$$

при $m(V) < \sigma^{n+2}$.

За заданим $\varepsilon > 0$, вибравши $\sigma < \min\{(\frac{\varepsilon}{C_8})^{\frac{1}{\alpha(q-1)+n+s+2}}; 1\}$, при $(x,t)\in\overline{Q}$ такій, що $||x-\hat{x}|| < \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$, $|t-\hat{t}| < \frac{\sigma^2}{2}$ та $m(V) < \sigma^{n+2}$, отримаємо

$$\mathcal{I}_2(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отже, для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\sigma < \min\{(\frac{\varepsilon}{C_7})^{\frac{1}{\alpha(q-1)+n+s+2}}; (\frac{\varepsilon}{C_8})^{\frac{1}{\alpha(q-1)+n+s+2}}; 1\}$ таке, що для довільної підобласті $V\subset Q$ такої, що $m(V) < \sigma^{n+2}$

$$\mathcal{I}(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) = \mathcal{I}_1(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) + \mathcal{I}_2(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) < \varepsilon$$

$$\forall (x,t) \in \overline{Q}, \quad ||x-\hat{x}|| < \frac{\sigma}{\sqrt{2}}, \quad |t-\hat{t}| < \frac{\sigma^2}{2}.$$

2. При $(x,t) \in \overline{Q}$ такій, що $||x-\hat{x}|| \geqslant \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$, $|t-\hat{t}| \geqslant \frac{\sigma^2}{2}$ розглянемо

$$\mathcal{J}(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) =$$

$$= [\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha} \int\limits_{V\cap\{(y,\tau)\in Q:\, ||x-y||<\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\, |t-\tau|<\frac{\sigma^2}{8}\}} [\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha q} \cdot |\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\, dyd\tau +$$

$$+ [\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha} \int\limits_{V\cap\{(y,\tau)\in Q:\, ||x-y||\geqslant\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\, |t-\tau|\geqslant\frac{\sigma^2}{8}\}} [\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha q} \cdot |\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\, dyd\tau =$$

$$= \mathcal{J}_1(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) + \mathcal{J}_2(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma).$$

При $||x-\hat{x}|| \geqslant \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$, $|t-\hat{t}| \geqslant \frac{\sigma^2}{2}$ та $||x-y|| < \frac{\sigma}{2\sqrt{2}}$, $|t-\tau| < \frac{\sigma^2}{8}$ виконується $||y-\hat{x}|| \geqslant ||x-\hat{x}|| - ||x-y|| > \frac{\sigma}{\sqrt{2}} - \frac{\sigma}{2\sqrt{2}} = \frac{\sigma}{2\sqrt{2}}$, $|\tau-\hat{t}| \geqslant |t-\hat{t}| - |t-\tau| > \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma^2}{8} = \frac{3\sigma^2}{8}$. Тоді, використовуючи заміну змінних (3),

$$\mathcal{J}_1(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) \leqslant C_9 \cdot \sigma^{\alpha q} \int\limits_{V\cap\{(y,\tau)\in Q:\, ||x-y||<\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\, |t-\tau|<\frac{\sigma^2}{8}\}} |MP|^s\, dyd\tau \leqslant C_{10}\sigma^{\alpha q+n+s+2};$$

$$\mathcal{J}_2(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) \leqslant C_{11} \cdot \sigma^s \Bigg(\int\limits_{\substack{V\cap\{(y,\tau)\in Q:\, ||x-y||\geqslant\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\, |t-\tau|\geqslant\frac{\sigma^2}{8};\\ ||y-\hat{x}||<\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\, |\tau-\hat{t}|<\frac{\sigma^2}{8}\}}} [\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha q}\, dyd\tau +$$

$$+ \int\limits_{\substack{V\cap\{(y,\tau)\in Q:\, ||x-y||\geqslant\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\, |t-\tau|\geqslant\frac{\sigma^2}{8};\\ ||y-\hat{x}||\geqslant\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\, |\tau-\hat{t}|\geqslant\frac{\sigma^2}{8}\}}} [\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha q}\, dyd\tau \Bigg) \leqslant C_{12}\sigma^s(\sigma^{\alpha q+n+2} + \sigma^{\alpha q} m(V)) \leqslant$$

$$\leqslant C_{13}\sigma^{\alpha q+n+s+2}$$

при $m(V) < \sigma^{n+2}$.

Отже, при $\alpha q + n + s + 2 > 0$ для довільного $\varepsilon > 0$ існує

$$\sigma < \min\Big\{ \Big(\frac{\varepsilon}{C_{10}}\Big)^{\frac{1}{\alpha q+n+s+2}};\, \Big(\frac{\varepsilon}{C_{13}}\Big)^{\frac{1}{\alpha q+n+s+2}};\, 1 \Big\}$$

таке, що для довільної підобласті $V \subset Q$ такої, що $m(V) < \sigma^{n+2}$

$$\mathcal{J}(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) = \mathcal{J}_1(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) + \mathcal{J}_2(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) < \varepsilon$$

$$\forall (x,t) \in \overline{Q}, \quad ||x-\hat{x}|| \geqslant \frac{\sigma}{\sqrt{2}}, \quad |t-\hat{t}| \geqslant \frac{\sigma^2}{2}.$$

$\square$

2.2. Характер розв'язку нелінійного інтегрального рівняння Вольтерра у класі функцій з точковими особливостями. Розглянемо інтегральне рівняння

$$\mathrm{v}(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega \mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\mathrm{v}(y,\tau)|^q\,dy + h_0(x,t) \tag{4}$$

при $q \in (0,1)$ та $h_0 \in \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\ \widehat{P})$.

Лема 2. *Якщо $q \in (0,1)$, $h_0 \in \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\ \widehat{P})$, де $-\frac{n+2}{q} < \alpha \leqslant 0$, то існує стала $\widetilde{K}_0 > 0$ така, що при всіх $\widetilde{C} > \widetilde{K}_0$ оператор H_1 відображає $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\widetilde{C}}(\overline{Q},\ \widehat{P})$ в себе.*

Доведення. Знайдемо оцінку $H_1\mathrm{v}$ при $\mathrm{v} \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\widetilde{C}}(\overline{Q},\ \widehat{P})$, де $\widetilde{C}$ – довільна додатна стала. Маємо

$$|(H_1\mathrm{v})(x,t)| \leqslant \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega |\mathcal{K}(x,t;y,\tau)| \cdot |\mathrm{v}(y,\tau)|^q\,dy + |h_0(x,t)|.$$

Використовуючи властивість (A) ядра $\mathcal{K}$ при $\alpha q > -n-2$ і те, що при $h_0 \in \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\ \widehat{P})$ існує додатна стала $\widehat{C}$ така, що $||h_0;\ \widehat{P}||_\alpha^{'} \leqslant \widehat{C}$ отримаємо

$$|(H_1\mathrm{v})(x,t)| \leqslant [\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^\alpha \times$$
$$\times(\widehat{L}_{0,0}\widetilde{C}^q \max\{[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha(q-1)+2+n+s},\ [\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha}\} + \widehat{C}).$$

При виконанні умов

$$\begin{cases} \alpha q > -n-2, \\ \alpha(q-1)+2+n+s \geqslant 0, \\ -\alpha \geqslant 0 \end{cases}$$

знаходимо $||H_1\mathrm{v};\widehat{P}||_\alpha^{'} \leqslant \widetilde{C}^{\,'}$ при $\mathrm{v} \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\widetilde{C}}(\overline{Q},\ \widehat{P})$, де $\widetilde{C}^{\,'} = \widehat{L}_{0,0}\widetilde{C}^q + \widehat{C}$.

Зауважимо, що при $q \in (0,1)$ існує стала $\widetilde{K}_0 > 0$ така, що $\widetilde{C}^{\,'} \leqslant \widetilde{C}$ при $\widetilde{C} > \widetilde{K}_0$. Отже, за умов леми одержуємо існування додатної сталої $\widetilde{K}_0$ такої, що при всіх $\widetilde{C} > \widetilde{K}_0$ оператор H_1 відображає $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\widetilde{C}}(\overline{Q},\ \widehat{P})$ в себе. □

Теорема 1. *Нехай $q \in (0,1)$, $-n-2 < s < 0$, $h_0 \in \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\ \widehat{P})$, де $-\frac{n+s+2}{q} < \alpha \leqslant 0$. Тоді існує розв'язок $u \in \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\ \widehat{P})$ інтегрального рівняння (4) і при $k > -\alpha-n-2$ цей розв'язок належить простору $\mathcal{M}_k(Q,\ \widehat{P})$.*

Доведення. Використаємо теорему Шаудера. З доведення леми 2 випливає, що H_1 відображає $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\widetilde{C}}(\overline{Q},\ \widehat{P})$ в себе.

Покажемо, що H_1 – цілком неперервний оператор у просторі $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\widetilde{C}}(\overline{Q},\ \widehat{P})$.

При $\mathrm{v},\ \mathrm{w} \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\widetilde{C}}(\overline{Q},\ \widehat{P})$

$$||H_1\mathrm{v}-H_1\mathrm{w};\ \widehat{P}||_\alpha^{'} \leqslant \sup_{(x,t)\in\overline{Q}} \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega |\mathcal{K}(x,t;y,\tau)| \cdot ||\mathrm{v}(y,\tau)|^q - |\mathrm{w}(y,\tau)|^q|\,dy.$$

Використовуючи формулу $|a^\mu - b^\mu| \leqslant |a-b|^\mu$ при $a,\, b > 0$, $\mu \in (0,1)$, отримаємо

$$\int_0^t d\tau \int_\Omega |\mathcal{K}(x,t;y,\tau)| \cdot ||\mathrm{v}(y,\tau)|^q - |\mathrm{w}(y,\tau)|^q|\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t d\tau \int_\Omega |\mathcal{K}(x,t;y,\tau)| \cdot |\mathrm{v}(y,\tau) - \mathrm{w}(y,\tau)|^q\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t d\tau \int_\Omega \varrho_0^{\alpha q}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |\mathcal{K}(x,t;y,\tau)| \cdot (\sup_{(y,\tau)\in\overline{Q}} \varrho_0^{-\alpha}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |\mathrm{v}(y,\tau) - \mathrm{w}(y,\tau)|)^q\, dy \leqslant$$

$$\leqslant (||\mathrm{v}-\mathrm{w};\, \widehat{P}||'_\alpha)^q \int_0^t d\tau \int_\Omega \varrho_0^{\alpha q}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\, dy.$$

Використовуючи властивість (A) ядра $\mathcal{K}$ при $\alpha q > -n-2$, одержуємо

$$||H_1\mathrm{v} - H_1\mathrm{w};\, \widehat{P}||'_\alpha \leqslant \widehat{L}_{0,\,0}(||\mathrm{v}-\mathrm{w};\, \widehat{P}||'_\alpha)^q \times$$

$$\times \sup_{(x,t)\in\overline{Q}} \{\max\{[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{(q-1)\alpha+2+n+s}, [\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha}\}\}.$$

Звідси, враховуючи умови на α, випливає, що H_1 – неперервний оператор в $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\,\widetilde{C}}(\overline{Q},\, \widehat{P})$.

Покажемо компактність оператора H_1 на $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\,\widetilde{C}}(\overline{Q},\, \widehat{P})$. З доведення леми 2 випливає, що множина $\{H_1\mathrm{v} : \mathrm{v} \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\,\widetilde{C}}(\overline{Q},\, \widehat{P})\}$ – рівномірно обмежена. Доведемо, що ця множина одностайно неперервна, тобто для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для довільних $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \delta$, $|z_0| < \delta$ та довільних $\mathrm{v} \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\,\widetilde{C}}(\overline{Q},\, \widehat{P})$

$$||(H_1\mathrm{v})(x+z,t+z_0) - (H_1\mathrm{v})(x,t);\, \widehat{P}||'_\alpha \leqslant \sup_{(x,t)\in\overline{Q}} |\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) \cdot (H\mathrm{v})(x+z,t+z_0) -$$

$$-\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot (H\mathrm{v})(x,t)| + \sup_{(x,t)\in\overline{Q}} |\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) \cdot h_0(x+z,t+z_0) -$$

$$-\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot h_0(x,t)| < \varepsilon.$$

Вважаємо $\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) = 0$, $\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t})\mathcal{K}(x+z,t+z_0;y,\tau) = 0$, $\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t})(H\mathrm{v})(x+z,t+z_0) = 0$, $\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t})h_0(x+z,t+z_0) = 0$, якщо $(x+z,t+z_0) \notin Q$.

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Оскільки $h_0 \in \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\, \widehat{P})$, то $\varrho_0^{-\alpha}h_0 \in C(\overline{Q})$. Тому існує $\widehat{\delta}_1 = \widehat{\delta}_1(\varepsilon) > 0$ таке, що для довільних $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \widehat{\delta}_1$, $|z_0| < \widehat{\delta}_1$ виконується

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q}} |\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) \cdot h_0(x+z,t+z_0) - \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot h_0(x,t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Розглянемо для довільних $(x,t) \in \overline{Q}$

$$\mathcal{I}(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0) = |\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) \cdot (H\mathrm{v})(x+z,t+z_0) - \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot (H\mathrm{v})(x,t)| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega |\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t})\cdot\mathcal{K}(x+z,t+z_0;y,\tau)-\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t})\cdot\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\times$$

$$\times|\mathrm{v}(y,\tau)|^q\,dy+\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t})\int\limits_t^{t+z_0} d\tau\int\limits_\Omega |\mathcal{K}(x+z,t+z_0;y,\tau)|\cdot|\mathrm{v}(y,\tau)|^q\,dy=$$

$$=\mathcal{I}_1(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0)+\mathcal{I}_2(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0).$$

Нехай $\eta_1>0$ – досить мале і довільне число, Q_{η_1} – підобласть області Q така, що $dist(x,\hat{x})\geqslant\eta_1$, $dist(t,\hat{t})\geqslant\eta_1$.

Тоді для довільних $\mathrm{v}\in\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\widetilde{C}}(\overline{Q},\ \widehat{P})$ та $(x,t)\in\overline{Q}$ матимемо

$$\mathcal{I}_1(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0)\leqslant\widetilde{C}^q\int\limits_Q|\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t})\cdot\mathcal{K}(x+z,t+z_0;y,\tau)-$$

$$-\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t})\cdot\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\cdot\varrho_0^{\alpha q}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\,dyd\tau=$$

$$=\widetilde{C}^q\int\limits_{Q\setminus Q_{\eta_1}}|\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t})\cdot\mathcal{K}(x+z,t+z_0;y,\tau)-\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t})\cdot\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\times$$

$$\times\varrho_0^{\alpha q}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\,dyd\tau+\widetilde{C}^q\int\limits_{Q_{\eta_1}}|\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t})\cdot\mathcal{K}(x+z,t+z_0;y,\tau)-$$

$$-\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t})\cdot\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\cdot\varrho_0^{\alpha q}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\,dyd\tau=\mathcal{I}_{11}(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0)+\mathcal{I}_{12}(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0).$$

Нехай $\delta_0>0$ – фіксоване число. За заданим δ_0 вибираємо число $\eta_1<\frac{\varepsilon_0}{2}$ таке, щоб $m(Q\setminus Q_{\eta_1})\leqslant\delta_0$ та $\eta_1<(\frac{\varepsilon}{8\widetilde{C}^q\widetilde{C}_0})^{\frac{1}{\alpha(q-1)}}$. За лемою 1 існує $\delta_0=\delta_0(\varepsilon)>0$, існує відповідне $\eta_1>0$ таке, що для довільних $(x,t)\in\overline{Q}$ та $(z,z_0)\in\mathbb{R}^{n+1}$ таких, що $(x+z,t+z_0)\in Q$

$$\int\limits_{Q\setminus Q_{\eta_1}}\varrho_0^{\alpha q}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\cdot|\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t})\cdot\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau<\frac{\varepsilon}{16\widetilde{C}^q},\tag{5}$$

$$\int\limits_{Q\setminus Q_{\eta_1}}\varrho_0^{\alpha q}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\cdot|\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t})\cdot\mathcal{K}(x+z,t+z_0;y,\tau)|\,dyd\tau<\frac{\varepsilon}{16\widetilde{C}^q}.\tag{6}$$

Тоді з (5), (6) при $(x,t)\in\overline{Q}$

$$\mathcal{I}_{11}(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0)\leqslant\widetilde{C}^q\int\limits_{Q\setminus Q_{\eta_1}}\Big(|\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t})\cdot\mathcal{K}(x+z,t+z_0;y,\tau)|+$$

$$+|\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t})\cdot\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\Big)\cdot\varrho_0^{\alpha q}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\,dyd\tau<\widetilde{C}^q\Big(\frac{\varepsilon}{16\widetilde{C}^q}+\frac{\varepsilon}{16\widetilde{C}^q}\Big)=\frac{\varepsilon}{8},$$

а отже,

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q}}\mathcal{I}_{11}(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0)<\frac{\varepsilon}{8}.$$

Виберемо $0 < \eta_2 < \frac{\eta_1}{2}$. Для довільної $(x,t) \in Q_{\frac{\eta_1}{2}}$ та числа η_2 визначимо множини $U_{\eta_2}(x,t) \stackrel{def}{=} \{(y,\tau) \in Q_{\eta_1} : ||x-y|| \leqslant \eta_2,\ |t-\tau| \leqslant \eta_2^2\}$. Обчислимо

$$m(U_{\eta_2}(x,t)) = \int\limits_{U_{\eta_2}(x,t)} dy d\tau = \int\limits_{||x-y||\leqslant\eta_2} dy \cdot \int\limits_{|t-\tau|\leqslant\eta_2^2} d\tau = 2\sigma_n \eta_2^{n+2},$$

де σ_n – площа поверхні сфери одиничного радіуса в $\mathbb{R}^n$. Якщо вибрати $\eta_2 < \min\{\frac{\eta_1}{2}; (\frac{\delta_0}{2\sigma_n})^{\frac{1}{n+2}}\}$, то $m(U_{\eta_2}(x,t)) < \delta_0$. Тоді з (5) для довільних $(x,t) \in \overline{Q}$ та $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ таких, що $(x+z, t+z_0) \in Q$

$$\int\limits_{U_{\eta_2}(x,t)} \varrho_0^{\alpha q}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot \mathcal{K}(x,t;y,\tau)| \, dyd\tau < \frac{\varepsilon}{24\widetilde{C}^q}, \tag{7}$$

$$\int\limits_{U_{\eta_2}(x,t)} \varrho_0^{\alpha q}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) \cdot \mathcal{K}(x+z,t+z_0;y,\tau)| \, dyd\tau < \frac{\varepsilon}{24\widetilde{C}^q}. \tag{8}$$

Виберемо $\delta_1 < \min\{\delta_0; \frac{\eta_2}{2}\}$. При $(x,t) \in Q_{\frac{\eta_1}{2}}$, $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ таких, що $||z|| \leqslant \delta_1 (< \frac{1}{4}\eta_1)$, $|z_0| \leqslant \delta_1 (< \frac{1}{4}\eta_1)$, маємо $(x+z, t+z_0) \in Q_{\frac{\eta_1}{4}}$. При $(x,t) \in Q_{\frac{\eta_1}{4}}$, $(y,\tau) \in Q_{\eta_1} \setminus U_{\eta_2}(x,t)$, $||x-y|| \geqslant \eta_2$, $|t-\tau| \geqslant \eta_2^2$, а отже, $(x,t) \neq (y,\tau)$. Тому функція $\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t})\mathcal{K}(x,t;y,\tau)$ рівномірно неперервна в області

$$V = \{(x,t;y,\tau) : (x,t) \in \overline{Q_{\frac{\eta_1}{4}}},\ (y,\tau) \in \overline{Q_{\eta_1} \setminus U_{\eta_2}(x,t)}\}.$$

Тоді існує $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) \in (0;\delta_1]$ таке, що для довільних $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \delta_2$, $|z_0| < \delta_2$, $(x,t) \in \overline{Q_{\frac{\eta_1}{2}}} \subset \overline{Q_{\frac{\eta_1}{4}}}$, $(y,\tau) \in \overline{Q_{\eta_1} \setminus U_{\eta_2}(x,t)}$ при $\alpha q > -n-2$ виконується

$$|\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) \cdot \mathcal{K}(x+z,t+z_0;y,\tau) - \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot \mathcal{K}(x,t;y,\tau)| < \frac{\varepsilon}{24A\widetilde{C}^q},$$

де $A = \int_{Q_{\eta_1} \setminus U_{\eta_2}(x,t)} \varrho_0^{\alpha q}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \, dyd\tau$, тоді

$$\int\limits_{Q_{\eta_1} \setminus U_{\eta_2}(x,t)} \varrho_0^{\alpha q}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) \cdot \mathcal{K}(x+z,t+z_0;y,\tau) -$$

$$-\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot \mathcal{K}(x,t;y,\tau)| \, dyd\tau < \frac{\varepsilon}{24A\widetilde{C}^q} \int\limits_{Q_{\eta_1} \setminus U_{\eta_2}(x,t)} \varrho_0^{\alpha q}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \, dyd\tau < \frac{\varepsilon}{24\widetilde{C}^q} \tag{9}$$

Отже, при $(x,t) \in Q_{\frac{\eta_1}{2}}$ із (7), (8) та (9) випливає існування $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ такого, що для довільних $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \delta_2$, $|z_0| < \delta_2$

$$\mathcal{I}_{12}(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0) = \widetilde{C}^q \int\limits_{Q_{\eta_1}} \varrho_0^{\alpha q}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) \cdot \mathcal{K}(x+z,t+z_0;y,\tau) -$$

$$-\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot \mathcal{K}(x,t;y,\tau)| \, dyd\tau \leqslant \widetilde{C}^q \int\limits_{U_{\eta_2}(x,t)} \varrho_0^{\alpha q}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) \times$$

$$\times \mathcal{K}(x+z,t+z_0;y,\tau)| \, dyd\tau + \widetilde{C}^q \int\limits_{U_{\eta_2}(x,t)} \varrho_0^{\alpha q}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot \mathcal{K}(x,t;y,\tau)| \, dyd\tau +$$

$$+\widetilde{C}^q \int\limits_{Q_{\eta_1}\setminus U_{\eta_2}(x,t)} \varrho_0^{\alpha q}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\cdot|\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t})\cdot\mathcal{K}(x+z,t+z_0;y,\tau)-\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t})\times$$

$$\times\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau < \frac{\varepsilon}{24}+\frac{\varepsilon}{24}+\frac{\varepsilon}{24}=\frac{\varepsilon}{8},$$

а отже,

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q_{\frac{\eta_1}{2}}}} \mathcal{I}_{12}(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0) < \frac{\varepsilon}{8}.$$

При $(x,t) \in \overline{Q\setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}}$, $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \delta_1(< \frac{\eta_1}{4})$, $|z_0| < \delta_1(< \frac{\eta_1}{4})$ буде $(x+z,x+z_0) \in \overline{Q\setminus Q_{\frac{3\eta_1}{4}}} \subset Q$ або $(x+z,t+z_0) \notin Q$. За рівномірною неперервністю функції $\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t})\mathcal{K}(x,t;y,\tau)$ на замкненій множині $V_1 = (\overline{Q\setminus Q_{\frac{3\eta_1}{4}}}) \times Q_{\eta_1}$ враховуючи, що $-\alpha \geqslant 0$, $\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \leqslant 1$, одержуємо: існує $\delta_3 = \delta_3(\varepsilon) \in (0,\delta_1]$ таке, що для довільних $(x,t) \in \overline{Q\setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}} \subset \overline{Q\setminus Q_{\frac{3\eta_1}{4}}}$, $(y,\tau) \in \overline{Q_{\eta_1}}$, $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \delta_3$, $|z_0| < \delta_3$ виконується

$$|\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t})\cdot\mathcal{K}(x+z,t+z_0;y,\tau)-\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t})\cdot\mathcal{K}(x,t;y,\tau)| < \frac{\varepsilon}{8B\widetilde{C}^q},$$

де $B = \int_{Q_{\eta_1}} \varrho_0^{\alpha q}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\,dyd\tau$, звідки

$$\sup_{\substack{(x,t)\in\overline{Q\setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}}\\(x+z,t+z_0)\in Q}} \mathcal{I}_{12}(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0) \leqslant \widetilde{C}^q\frac{\varepsilon}{8B\widetilde{C}^q}\int\limits_{Q_{\eta_1}} \varrho_0^{\alpha q}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\,dyd\tau = \frac{\varepsilon}{8}.$$

Для тих точок $(x,t) \in \overline{Q\setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}}$, $(y,\tau) \in Q_{\eta_1}$, $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \delta_1$, $|z_0| < \delta_1$, для яких $(x+z,t+z_0) \notin Q$ отримаємо

$$\sup_{\substack{(x,t)\in\overline{Q\setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}}\\(x+z,t+z_0)\notin Q}} \mathcal{I}_{12}(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0) \leqslant \sup_{\substack{(x,t)\in\overline{Q\setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}}\\(x+z,t+z_0)\notin Q}} \widetilde{C}^q \int\limits_{Q_{\eta_1}} \varrho_0^{\alpha q}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\cdot|\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t})\times$$

$$\times\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau \leqslant \sup_{\substack{(x,t)\in\overline{Q\setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}}\\(x+z,t+z_0)\notin Q}} \widetilde{C}^q \int\limits_{Q_{\eta_1}} \eta_1^{\alpha q}|\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t})\cdot\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{(x,t)\in\overline{Q\setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}}\\(x+z,t+z_0)\notin Q}} \widetilde{C}^q\eta_1^{\alpha q}\eta_1^{-\alpha} \int\limits_{Q_{\eta_1}} |\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau \leqslant \widetilde{C}^q\widetilde{C}_0\eta_1^{\alpha(q-1)} \leqslant \frac{\varepsilon}{8},$$

де остання нерівність виконується згідно з вибором η_1. Зауважимо, що при $q \in (0,1)$ також $\alpha(q-1) > 0$.

Показано, що існує $\widetilde{\delta}_1 = \min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\} > 0$ таке, що для довільних $(x,t) \in \overline{Q}$, $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \widetilde{\delta}_1$, $|z_0| < \widetilde{\delta}_1$

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q}} \mathcal{I}_1(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Розглянемо

$$\mathcal{I}_2(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0) = \varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) \int\limits_t^{t+z_0} d\tau \int\limits_\Omega |\mathcal{K}(x+z,t+z_0;y,\tau)| \cdot |\mathrm{v}(y,\tau)|^q \, dy.$$

Проводячи подібні міркування та враховуючи, що $m(\Omega \times (t, t+z_0)) = m(\Omega) \cdot |z_0|$, з леми 1 одержуємо: існує $\widetilde{\delta_2} = \widetilde{\delta_2}(\varepsilon) > 0$ таке, що для довільних $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \widetilde{\delta_2}$, $|z_0| < \widetilde{\delta_2}$ та довільних $\mathrm{v} \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\widetilde{C}}(\overline{Q}, \widehat{P})$ одержуємо

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q}} \mathcal{I}_2(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Отже, існує $\widehat{\delta_2} = \min\{\widetilde{\delta_1}; \widetilde{\delta_2}\} > 0$ таке, що для довільних $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \widehat{\delta_2}$, $|z_0| < \widehat{\delta_2}$ виконується

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q}} \mathcal{I}(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отже, множина $\{H_1\mathrm{v} : \mathrm{v} \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\widetilde{C}}(\overline{Q}, \widehat{P})\}$ – одностайно неперервна. За теоремою Шаудера та за умов лем 1, 2 інтегральне рівняння (4) має розв'язок $u \in \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q}, \widehat{P})$. $\square$

Зауважимо, що в [9], використовуючи принцип стиснених відображень, визначено характер точкових степеневих особливостей розв'язку рівняння (4) при $q > 1$.

2.3. Застосування отриманих результатів до розв'язності крайових задач для півлінійного параболічного рівняння. Нехай $D(\overline{\Sigma}) = C^\infty(\overline{\Sigma})$, $D(\overline{\Omega}) = C^\infty(\overline{\Omega})$;
$D^0(\overline{\Sigma}) = \{\varphi \in D(\overline{\Sigma}) : \frac{\partial^k}{\partial t^k}\varphi \,|_{t=T} = 0,\ k = 0, 1, \ldots\}$,
$D_0(\overline{\Omega}) = \{\varphi \in D(\overline{\Omega}) : \varphi|_S = 0\}$, ν – орт внутрішньої нормалі до S.

Надалі позначатимемо через $(D^0(\overline{\Sigma}))'$, $(D_0(\overline{\Omega}))'$ – простори лінійних неперервних функціоналів відповідно на просторах функцій $D^0(\overline{\Sigma})$, $D_0(\overline{\Omega})$, через $(\varphi, F)_1$ – значення узагальненої функції $F \in (D^0(\overline{\Sigma}))'$ на основній функції $\varphi \in D^0(\overline{\Sigma})$, через $(\varphi, F)_2$ – значення $F \in (D_0(\overline{\Omega}))'$ на $\varphi \in D_0(\overline{\Omega})$.

Для довільної фіксованої точки $(\hat{x}, \hat{t}) \in \Sigma$ розглянемо задачу

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \triangle u(x,t) = |u(x,t)|^q, \quad (x,t) \in Q, \\ &u\,|_{\Sigma} = F_1(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma, \qquad u\,|_{t=0} = F_2(x), \quad x \in \Omega, \end{aligned} \tag{10}$$

де $q \in (0, 1)$;

$$\begin{aligned} &F_1(x,t) = \sum_{|l|\leqslant p_1} \sum_{m=0}^{p_2} C_{lm} D_x^l \delta(x-\hat{x}) \delta^{(m)}(t-\hat{t}), \\ &F_2(x) = \sum_{|r|\leqslant p_3} C_r D_x^r \delta(x-\hat{x}), \\ &C_{lm},\, C_r \text{ – сталі}, p_1,\, p_2,\, p_3 \text{ – невід'ємні цілі числа.} \end{aligned} \tag{11}$$

Подібно до доведення теореми 2 [11] розв'язність задачі (10) у просторі $\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q}, \widehat{P})$ зводиться до розв'язності інтегрального рівняння (4) з ядром G –

функцією Гріна першої крайової задачі для рівняння теплопровідності, де

$$h_0(x,t) = g_1(x,t) + g_2(x,t) = (\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}, F_1(y,\tau))_1 + (G(x,t;y,0), F_2(y))_2.$$

Покажемо, що функція h_0 задовольняє умови теореми 1.

Лема 3. *Нехай виконуються припущення (11) та* $\alpha \leqslant \min\{-(1+p_1+2p_2);\ -p_3\}-n$. *Тоді* $h_0 \in \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\ \widehat{P})$, *а саме, існує додатна стала* $\widehat{C}$ *така, що* $||h_0;\ \widehat{P}||'_\alpha \leqslant \widehat{C} < +\infty$.

Доведення. Враховуючи припущення (11) та властивість функції Гріна G (аналогічну до другої властивості ядра $\mathcal{K}(x,t;y,\tau)$ при $s=-n$), матимемо

$$|g_1(x,t)| \leqslant \sum_{|l|\leqslant p_1}\sum_{m=0}^{p_2}|C_{lm}|\cdot\left|\frac{\partial^m}{\partial \hat{t}^m}D^l_{\hat{x}}\frac{\partial G(x,t;\hat{x},\hat{t})}{\partial \nu_{\hat{x}}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant C_{14}\sum_{|l|\leqslant p_1}\sum_{m=0}^{p_2}(|x-\hat{x}|^2+|t-\hat{t}|)^{\frac{-n-1-|l|-2m}{2}} \leqslant C_{14}[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-(n+1+p_1+2p_2)} =$$

$$= C_{14}[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha}[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-(n+1+p_1+2p_2+\alpha)} \leqslant \widehat{C}[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha}$$

при $\alpha \leqslant -(n+1+p_1+2p_2)$;

$$|g_2(x,t)| \leqslant \sum_{|r|\leqslant p_3}|C_r|\cdot|D^r_{\hat{x}}G(x,t;\hat{x},0)| \leqslant C_{15}\sum_{|r|\leqslant p_3}(|x-\hat{x}|^2+t)^{\frac{-n-|r|}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant C_{15}[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-(n+p_3)} = C_{15}[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha}[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-(n+p_3+\alpha)} \leqslant \widehat{C}[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha}$$

при $\alpha \leqslant -(n+p_3)$, де C_{14}, C_{15} – додатні сталі. □

З леми 3 та теореми 1 випливає наслідок.

Наслідок 1. *При*

$$a)\begin{cases} p_3 > 2-n, \\ p_1+2p_2 > p_3-1, \\ 0<q<\frac{2}{n+1+p_1+2p_2}, \\ -\frac{2}{q} < \alpha \leqslant -(1+p_1+2p_2)-n, \end{cases} \quad \text{або} \quad б)\begin{cases} p_1+2p_2 > 1-n, \\ p_3 \geqslant p_1+2p_2+1, \\ 0<q<\frac{2}{n+p_3}, \\ -\frac{2}{q} < \alpha \leqslant -p_3-n \end{cases}$$

існує розв'язок $u \in \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\ \widehat{P})$ *крайової задачі (10), який при* $k > -\alpha-n-2$ *належить до простору* $\mathcal{M}_k(Q,\ \widehat{P})$.

Для узагальненої крайової задачі Неймана

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \triangle u(x,t) = |u(x,t)|^q, \quad (x,t)\in Q, \\ &\tfrac{\partial u}{\partial \nu}\,|_{\,\Sigma} = F_1(x,t), \quad (x,t)\in\Sigma, \qquad u\,|_{\,t=0} = F_2(x), \quad x\in\Omega, \end{aligned} \tag{12}$$

одержуємо подібний результат.

Наслідок 2. *При*

$$a)\begin{cases} p_3 > 2-n, \\ p_1+2p_2 > p_3, \\ 0<q<\frac{2}{n+p_1+2p_2}, \\ -\frac{2}{q} < \alpha \leqslant -(p_1+2p_2)-n, \end{cases} \quad \text{або} \quad б)\begin{cases} p_1+2p_2 > 2-n, \\ p_3 \geqslant p_1+2p_2, \\ 0<q<\frac{2}{n+p_3}, \\ -\frac{2}{q} < \alpha \leqslant -p_3-n \end{cases}$$

існує розв'язок $u \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha}(\overline{Q},\, \widehat{P})$ *крайової задачі (12), який при* $k > -\alpha - n - 2$ *належить до простору* $\mathcal{M}_k(Q,\, \widehat{P})$.

3. Висновки. Стаття присвячена актуальній проблемі дослідження існування розв'язку нелінійного інтегрального рівняння Вольтерра з полярним ядром у ваговому L^1- просторі функцій, які можуть мати особливості в окремих точках межі області. Визначено характер точкових степеневих особливостей розв'язку цього рівняння.

---

1. *Лопушанська Г.П.* Крайові задачі у просторі узагальнених функцій D' / *Лопушанська Г.П.* – Львів: Вид-во Львів. нац. ун-ту ім. І. Франка, 2002.
2. *Лопушанська Г.П.* Узагальнені крайові задачі для лінійних та напівлінійних еліптичних рівнянь / *Лопушанська Г.П.* // Укр. мат. вісник. – 2005. – Т. 2, №3. – С. 377-394.
3. *Лопушанська Г.П.* Про розв'язок параболічної граничної задачі із сильними степеневими особливостями в правих частинах / *Лопушанська Г.П.* // Математичні Студії. – 2001. – Т. 15, №2. – С. 179-190.
4. *Лопушанська Г.П.* Узагальнені крайові значення розв'язків рівняння $u_t = \triangle u + F_0(x,t,u)$ / *Лопушанська Г.П., Чмир О.Ю.* // Математичні Студії. – 2004. – Т. 22, №1. – С.45-56.
5. *Лопушанська Г.П.* Характер особливостей розв'язку узагальненої крайової задачі для квазілінійної параболічної системи / *Лопушанська Г.П., Чмир О.Ю.* // Доповіді НАН України. – 2007. – №7. – С. 12-17.
6. *Ивасишен С.Д.* О композиции параболических ядер / *Ивасишен С.Д.* // Укр. мат. журн. – 1980. – Т. 32, №1. – С. 35-45.
7. *Ивасишен С.Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач / *Ивасишен С.Д.* – К.: Вища шк., 1990.
8. *Эйдельман С.Д.* Исследование матрицы Грина однородной параболической граничной задачи / *Эйдельман С.Д., Ивасишен С.Д.* // Труды Моск. мат. о-ва. – 1970. – Т. 23. – С. 179-234.
9. *Чмир О.Ю.* Точкові степеневі особливості розв'язку нелінійного інтегрального рівняння Вольтерри / *Чмир О.Ю.* // Матем. Вісник наук. тов-ва ім. Т.Г. Шевченка. – 2009. – Т. 6. – С. 73-87.
10. *Прудников А.П.* Интегралы и ряды / *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* – М.: Наука, 1981.
11. *Чмир О.Ю.* Про формулювання узагальненої крайової задачі для півлінійного параболічного рівняння / *Чмир О.Ю.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2003. – Вип. 62. – С. 134-143.

THE POINTED SINGULARITIES OF THE SOLUTION OF VOLTERRA NONLINEAR INTEGRAL EQUATION

Oksana CHMYR

L'viv State University of vital activity safety,
79000, L'viv, Kleparivska str., 35
e-mail: o_chmyr@yahoo.com

Using the Schauder method the sufficient conditions of the solvability for Volterra nonlinear integral equation with the polar kernel in weight L^1 - space of functions with power singularities near the the given point in domain are obtained.

Key words: nonlinear integral equation, weight functional space, continuous operator, compact set, Schauder fixed-point theorem.

ТОЧЕЧНЫЕ ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА

Оксана ЧМЫРЬ

Львовский государственный университет безопасности жизнедеятельности,
79000, Львов, ул. Клепаровская, 35
e-mail: o_chmyr@yahoo.com

С помощью принципа Шаудера установлено достаточные условия разрешимости нелинейного интегрального уравнения Вольтерра с полярным ядром в весовом L^1 - пространстве функций с точечными степенными особенностями.

Ключевые слова: нелинейное интегральное уравнение, весовое функциональное пространство, непрерывный оператор, компактное множество, теорема Шаудера о неподвижной точке.

Стаття надійшла до редколегії 09.10.2009

Прийнята до друку 16.12.2009

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

1. Стаття повинна містити результати нових досліджень автора з повним їхнім доведенням. Не доцільно робити великі огляди вже опублікованих результатів. Робити посилання на неопубліковані праці не можна.

2. Текст статті набирають на комп'ютері українською чи англійською мовами. До редакційної колегії потрібно подавати:

два примірники статті з підписом автора (співавторів) на останній сторінці;

назву статті, резюме (резюме повинно передавати зміст основних результатів статті, а не лише повторювати її назву), ключові слова, ім'я, прізвище автора, місце роботи, адресу українською, англійською та російською мовами, електронну адресу;

електронний варіант статті та резюме на дискеті 3,5" (редколегія повертає авторові дискету; тексти можна надіслати за адресою *lnu.visn.mm@gmail.com*);

довідка про автора (співавторів), у якій треба зазначити ім'я, по батькові та прізвище автора, місце роботи, посаду, домашню адресу, телефон та електронну адресу.

Оптимальний обсяг статті до 12 сторінок. Розмір шрифтів 10pt, висота сторінки – 190 mm, ширина – 135 mm.

3. Вимоги до набору.

Текст статті створювати у версії LaTeX з кодуванням кириличних шрифтів „Кирилиця (Windows)“ (кодова сторінка 1251).

На першій сторінці статті потрібно зазначити номер УДК.

Номери формул ставити з правого боку і нумерувати лише формули, на які є посилання.

У посиланнях на теорему з монографії зазначити сторінку, на якій вона описана.

Рисунки до статті подавати у графічному форматі BMP чи PCX. Назва рисунка чи його номер не входять у зображення їх треба створювати засобами LaTeX'у. Вибираючи розмір графічного зображення, належить врахувати, що воно буде надруковане на принтері з роздільною здатністю 600 dpi.

Літературу подавати загальним списком у порядку посилань на джерела в тексті статті.

Зразки бібліографічного опису книги, статті, препринту, дисертації, депонованого рукопису, тез доповідей конференцій (з'їздів та ін.):

1. *Грабович А.І.* Назва / *Грабович А.І.* – К.: Вища школа, 1985. – 196 с.
2. *Петренко О.Б.* Назва / *Петренко О.Б., Шинк М.М.* – Л.: Афіша, 2001. – 196 с.
3. *Кравчук О.М.* Назва / *Кравчук О.М.* // Укр. мат. журн. – 1985. – Т. 2, №2. – С. 4-20.
4. *Кравчук О.М.* Назва / *Кравчук О.М., Потічний М.М.* // Матем. Студії – 1995. – Т. 2, №2. – С. 4-20.

5. *Михайленко Г.Д.* Назва / *Михайленко Г.Д.* – Л.: ІППММ, 1993. – 9 с. – (Препринт / НАН України, Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача: 80.1).

6. *Михайленко Г.Д.* Назва / *Михайленко Г.Д., Степаняк С.І.* – Л.: ІППММ, 1993. – 9 с. – (Препринт / НАН України, Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача: 80.1).

7. *Колмаз Ю. А.* Назва: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук. / *Колмаз Ю.А.* – К., 2008. – 20 с.

8. *Сеник С.М.* Назва / *Сеник С.М.* – К., 1992. – 17 с. – Деп. в ДНТБ України, В2020-1995.

9. *Сеник С.М.* Назва / *Сеник С.М., Мандрик І.Т.* – К., 1992. – 17 с. – Деп. в ДНТБ України, В2020-1995.

10. *Муравський В.К.* Назва / *Муравський В.К.* // Наукова конф. "Нелінійні диференціальні рівняння": тези доп., 27 серпня - 2 вересня 1994 р., Київ. – К.: КНУ ім. Т. Г. Шевченка, 1994. – С. 540-551.

11. *Муравський В.К.* Назва / *Муравський В.К., Ліско С.В.* // Наукова конф. "Нелінійні диференціальні рівняння": тези доп., 27 серпня - 2 вересня 1994 р., Київ. – К.: КНУ ім. Т. Г. Шевченка, 1994. – С. 540-551.