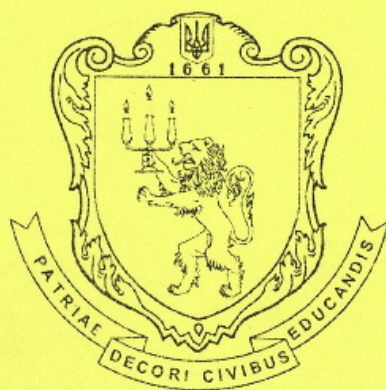


ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 72



2010

ISSN 2078-3744

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 72



Львівський національний університет імені Івана Франка
2010

V I S N Y K
OF THE LVIV
UNIVERSITY

Series
Mechanics and Mathematics

Issue 72

Scientific journal

Published 1-2 issues per year

Published since 1965

Ivan Franko National
University of Lviv

В І С Н И К
ЛЬВІВСЬКОГО
УНІВЕРСИТЕТУ

Серія
механіко-математична

Випуск 72

Збірник наукових праць

Виходить 1-2 рази на рік

Видається з 1965 року

Львівський національний
університет імені Івана Франка

2010

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. 2010.
Випуск 72. 294 с.

Visnyk of the Lviv University. Series Mechanics and Mathematics. 2010.
Issue 72. 294 p.

У Віснику публікуються праці з теорії крайових задач для диференціальних рівнянь, алгебри, топології, теорії функцій комплексного змінного, функціонального аналізу, теорії ймовірності та статистики, проблем математичного моделювання фізико-механічних процесів і механіки.

Visnyk contains articles on theory of boundary value problems for differential equations, algebra, topology, complex analysis, functional analysis, probability theory and statistics, problems of mathematical modelling of physical and mechanical processes and mechanics.

Редакційна колегія: д-р фіз.-мат. наук, проф. **М. Зарічний** – головний редактор; д-р фіз.-мат. наук, проф. **М. Комарницький** – заступник головного редактора; канд. фіз.-мат. наук, доц. **О. Бугрій** – відповідальний секретар; д-р фіз.-мат. наук, проф., член-кор. НАН України **О. Андрейків**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. Андрійчук**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **Т. Ванах**; д-р фіз.-мат. наук, проф., член-кор. НАН України **Я. Бурак**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **Я. Єлейко**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **М. Заболоцький**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **М. Іванчов**; д-р фіз.-мат. наук, доц. **В. Кирилич**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **А. Кондратюк**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **Б. Копитко**; канд. фіз.-мат. наук, проф. **Я. Пригула**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. Скасків**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. Сторож**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **Г. Сулим**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **М. Шеремета**.

Professor **M. Zarichny** – Editor-in-chief

Professor **M. Komarnitskyi** – Associate editor

Associated professor **O. Buhrii** – Executive secretary

Адреса редакційної колегії:

Львівський національний університет
імені Івана Франка,
механіко-математичний факультет,
вул. Університетська, 1,
79000 Львів, Україна
тел. (0322) 74-11-07
ел. пошта: lnu.visn.mm@gmail.com
<http://blues.franko.lviv.ua/publish/visnyk.asp>

Editorial office address:

Ivan Franko National University
of Lviv,
Mechanical and Mathematical department,
Universytets'ka Str. 1,
UA-79000 Lviv, Ukraine
tel. +(38) (0322) 74-11-07
e-mail: lnu.visn.mm@gmail.com
http://blues.franko.lviv.ua/publish/visnyk_en.asp

Відповідальний за випуск *М. Зарічний*
Редактор *Н. Плиса*

Друкується за ухвалою Вченої Ради
Львівського національного університету імені Івана Франка

Свідоцтво про державну реєстрацію серія КВ № 14606-3577Р від 29 жовтня 2008 р.

© Львівський національний університет імені Івана Франка, 2010

ЗМІСТ

<i>Базилевич Лідія</i> . Простори Ейленберга-Маклейна компактних опуклих тіл сталої ширини	5
<i>Бокало Микола</i> . Однозначна розв'язність задачі без початкових умов для сильно не-лінійних еліптико-параболічних рівнянь	10
<i>Братійчук Микола, Жерновий Юрій</i> . Дослідження систем $M/G/1/m$ та $M/G/1$ з груповим надходженням замовлень і пороговим блокуванням вхідного потоку	26
<i>Бугрій Микола</i> . Про одну задачу оптимізації фондового портфеля акцій, покритих call-опціонами	40
<i>Васильків Ярослав, Політило Любомир</i> . Інтегральні середні функцій, спряжених до субгармонійних функцій	47
<i>Головатий Юрій, Грабчак Геннадій</i> . Про задачу Штурма-Ліувілля на зіркових графах з “важкими” вузлами	63
<i>Грод Іван, Кулик Віктор</i> . Побудова функцій Ляпунова деяких лінійних розширень динамічних систем	79
<i>Гутік Олег, Рейтер Андрій</i> . Про напівтопологічні симетричні інверсні півгрупи обмеженого скінченного рангу	94
<i>Довгань Богдан, Вус Андрій</i> . Інтегровні потенціали симетричних задач чотирьох та п'яти попарно взаємодіючих частинок на прямій	107
<i>Єлейко Ярослав, Косаревич Катерина</i> . Системний аналіз багатфакторних економічних моделей у випадковому середовищі	127
<i>Жерновий Костянтин</i> . Оптимізація середнього часу очікування для систем типу $M/M/1/m$ з блокуванням вхідного потоку та перемиканням режимів обслуговування	134
<i>Іванцов Микола</i> . Обернена задача для одновимірного параболічного рівняння загального вигляду	149
<i>Лугова Любомира, Шеремета Мирослав</i> . Про багаточленну степеневу асимптотику логарифма максимального члена цілого ряду Діріхле	158
<i>Манько Степан</i> . Диференціальні оператори четвертого порядку з узагальненими функціями в коефіцієнтах	168
<i>Мулява Оксана, Шеремета Мирослав</i> . Про поводження нулів часткових сум степеневого розвинення цілої функції в термінах класів збіжності	189
<i>Нестерук Володимир</i> . Про невиродженість добутку Тейта для кривих над псевдоскінченними полями	195
<i>Нечепуренко Максим, Торган Галина</i> . Мішана задача для сильно нелінійної еволюційної системи рівнянь у необмеженій області	201
<i>Никифорчин Олег, Мицицей Оксана</i> . Спряжені міри на напівґратках	221
<i>Обчар Ігор, Скасків Олег</i> . Теорема типу Бореля для цілих рядів Діріхле з немонотонними показниками	232
<i>Пароля Нестор, Єлейко Ярослав</i> . Обривні керовані марковські процеси на скінченному інтервалі часу для скінченних моделей	243
<i>Савченко Олександр</i> . Функтори і розмиті ультраметрики	255
<i>Сидоренко Юрій</i> . Конструктивний метод побудови оператора розсіяння для нестационарної гіперболічної системи рівнянь	263
<i>Сташишин Остап</i> . Дефекти мероморфних функцій у проколотій площині	275

CONTENT

<i>Bazylevych Lidiya</i> . Eilenberg-MacLane spaces of compact convex bodies of constant width	5
<i>Bokalo Mykola</i> . Uniqueness solvability of the problem without initial conditions for strongly nonlinear elliptic-parabolic equations	10
<i>Bratiichuk Mykola, Zhernovyi Yuriy</i> . Research of $M/G/1/m$ and $M/G/1$ queues with group arrivals and threshold blocking of an input flow	26
<i>Bugriy Mykola</i> . Some optimization's problem of the stock's portfolio, which are covered by call-options	40
<i>Vasytkiv Yaroslav, Politylo Lyubomyr</i> . Integral means of functions conjugate to subharmonic functions	47
<i>Golovaty Yuriy, Hrabchak Hennadij</i> . On Sturm-Liouville problem on starlike graphs with "heavy" nodes	63
<i>Grod Ivan, Kulik Viktor</i> . Construction of Lyapunov functions of some linear expansions of dynamic systems	79
<i>Gutik Oleg, Reiter Andriy</i> . On semitopological symmetric inverse semigroups of a bounded finite rank	94
<i>Dovhan' Bohdan, Vus Andriy</i> . Integrable potentials of symmetric problems of fourth and fifth pairwise interacting particles on line	107
<i>Yelejko Yaroslav, Kosarevych Kateryna</i> . Systems analysis of multifactor econometric models in stochastic environment	127
<i>Zhernovyi Kostyantyn</i> . Optimization of the average waiting time for the $M/M/1/m$ queues with blocking of an input flow and switching of modes of service	134
<i>Ivanchov Mykola</i> . An inverse problem for a general one-dimensional parabolic equation	149
<i>Luhova Lyubomyra, Sheremeta Myroslav</i> . On polytermed power asymptotic of the logarithm of maximal term for entire Dirichlet series	158
<i>Man'ko Stepan</i> . Fourth order differential operators with distributions in coefficients	168
<i>Mulyava Oksana, Sheremeta Myroslav</i> . On the behaviour of partial sums zeros of the power development of an entire function in the terms of convergence classes	189
<i>Nesteruk Volodymyr</i> . On nondegeneracy of Tate pairing for curves over complete discrete valuation fields with pseudofinite residue fields	195
<i>Nechepurenko Maksym, Torhan Halyna</i> . Mixed problem for a strong nonlinear evolution system in an unbounded domain	201
<i>Nykyforchyn Oleh, Mykytsey Oksana</i> . Conjugate measures on semilattices	221
<i>Ovchar Ihor, Skaskiv Oleh</i> . On the borel type theorem for entire Dirichlet series with nonmonotonous exponents	232
<i>Parolya Nestor, Yelejko Yaroslav</i> . Killed markov decision processes on finite time interval for finite models	243
<i>Savchenko Oleksandr</i> . Functors and fuzzy ultrametrics	255
<i>Sydorenko Yuriy</i> . A constructive method of finding a scattering operator for non-stationary hyperbolic system of equations	263
<i>Stashyshyn Ostap</i> . The deficiencies of meromorphic functions in a punctured plane	275

УДК 515.12

EILENBERG-MACLANE SPACES OF COMPACT CONVEX BODIES OF CONSTANT WIDTH

Lidiya BAZYLEVYCH

L'viv Polytechnic National University,
79013 L'viv, St. Bandera Str., 12
e-mail: izar@litech.lviv.ua

The Lie group S^1 acts on the hyperspace $\text{cw}(I^2)$ of convex bodies of constant width inscribed into the unit square I^2 by rotation. It is proved that the orbit space $\text{cw}(I^2)/S^1$ of this action contains a Q -manifold which is a $K(\mathbb{Z}, 2)$ -space.

Key words: max-min convex set, hyperspace, Hilbert cube.

1. Introduction. Let X be a compact convex body in the euclidean space $\mathbb{R}^n$ (to avoid trivialities, we always assume that $n \geq 2$). By S^{n-1} we denote the unit sphere in $\mathbb{R}^n$. For any $u \in S^{n-1}$, let $h_X(u) = \max\{\langle x, u \rangle \mid x \in X\}$. We call the function $h_X: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ the *support function* of X . A compact convex body X is said to be of *constant width* $d > 0$ if $h_X(u) - h_X(-u) = d$, for every $u \in S^{n-1}$.

Let $I = [0, 1]$. By $\text{cw}(I^2)$ of convex bodies of constant width inscribed into the unit square I^2 . We endow $\text{cw}(I^2)$ with the Hausdorff metric d_H :

$$d_H(A, B) = \inf\{r > 0 \mid A \subset O_r(B), B \subset O_r(A)\},$$

where $O_t(C)$ stands for the t -neighborhood of C in $\mathbb{R}^2$ (actually, this formula also works for the hyperspace $\exp \mathbb{R}^2$ of nonempty compact subsets in $\mathbb{R}^2$).

The Minkowski combination in $\text{cw}(I^2)$ is defined as follows:

$$tA + (1-t)B = \{ta + (1-t)b \mid a \in A, b \in B\}, \quad A, B \in \text{cw}(I^2), \quad t \in I.$$

With respect to this combination, the space $\text{cw}(I^2)$ is a convex subset of the space $\text{cw}(\mathbb{R}^n)$. Since the space $\text{cw}(I^2)$ is infinite-dimensional, it follows from Keller's theorem [5] that $\text{cw}(I^2)$ is homeomorphic to the Hilbert cube.

The Lie group S^1 acts on the hyperspace $\text{cw}(I^2)$ by rotations. The simplest way to describe this action is to identify $\mathbb{R}^2$ with the complex plane $\mathbb{C}$. Then for every $A \in \text{cw}(I^2)$ and every $\alpha \in S^1$ there exists $x_A(\alpha) \in \mathbb{C}$ such that the set $\alpha A + x_A(\alpha)$ is inscribed in I^2 , i.e. belongs to the space $\text{cw}(I^2)$. We define $\alpha \cdot A = A + x_A(\alpha)$. The circle B of radius $1/2$ centered at $(1/2, 1/2)$ is the unique fixed point of this action.

The natural action of the Lie group S^1 on the hyperspace $\exp S^1$ is investigated in [7]. It is proved therein that the orbit space of this action contains Q -manifolds which are Eilenberg-MacLane spaces $K(G, 2)$, for some groups G . Recall that X is a space $K(\mathbb{Z}, 2)$, if $\pi_2(X) = G$ and $\pi_i(X) = 0$ for $i \neq 2$.

The aim of this note is to prove that the orbit space $\text{cw}(I^2)/S^1$ contains a Q -manifold which is an Eilenberg-MacLane space $K(\mathbb{Z}, 2)$. Moreover, this Q -manifold is homeomorphic to its product by $[0, 1]$. We therefore can conclude that this Q -manifold is homeomorphic to $T(\mathbb{C}P^\infty) \times Q \times [0, 1]$, where T stands for the infinite telescope construction.

2. Notation and auxiliary results. If a group G acts on a set X , for any $x \in X$, we denote by x_G the stabilizer of x , i.e. $x_G = \{g \in G \mid gx = x\}$.

We denote by $q: \text{cw}(I^2) \rightarrow \text{cw}(I^2)/S^1$ the quotient map.

For every finite subgroup G of S^1 , we let $Z(G) = \{A \in \text{cw}(I^2) \mid S_A^1 \subset G\}$.

We will need the following construction due to Sallee [11]. Let K be a convex body of constant width h in $\mathbb{R}^2$ and let $p \in \mathbb{R}^2 \setminus K$ be a point sufficiently close to K . Let $q, r \in \partial K$ be points of the intersection of ∂K with the circumference of radius h centered at p . Let $q', r' \in \partial K$ be the points opposite to q and r respectively. Following [11] we call the Λ -modification of K the convex set bounded by the union of the following pieces: 1) the smaller arc of the circumference connecting q and r of radius h centered at p ; 2) the part of ∂K that connects q and r' ; 3) the part of ∂K that connects r and q' ; 4) the arc of the circumference centered at q of radius h that connects q' and p ; 5) the arc of the circumference centered at r of radius h that connects r' and p .

Note that this construction works only in the case when p is close enough to ∂K ; in the sequel we speak about the Λ -modification only in the situation where it is well-defined, i.e. leads to a body of constant width. We denote this modification by $\Lambda(K, p)$. In [11], it is remarked that $\Lambda(K, p)$ is also a convex set of constant width h . Note that the boundary of $\Lambda(K, p)$ is not a smooth curve.

In the sequel, we apply the Λ -modification to the sets from $\text{cw}(I^2)$; the result, $\Lambda(K, p)$, is a convex set of constant width 1 but does not belong to $\text{cw}(I^2)$. We denote by $\Lambda'(K, p)$ the (unique) shifted copy of $\Lambda(K, p)$ that belongs to $\text{cw}(I^2)$. We will call it the Λ' -modification.

Proposition 1. *The Λ' -modification map $(K, p) \mapsto \Lambda'(K, p)$ is continuous as a map of two variables.*

By an AR-space (ANR-space) we mean an absolute (neighborhood) retract for the class of metric spaces.

Recall that a Q -manifold is a separable metrizable space which is locally homeomorphic to the Hilbert cube.

A metric space (X, d) is said to satisfy the Disjoint Approximate Property if, for every $\alpha: X \rightarrow (0, \infty)$ there exist maps $f, g: X \rightarrow X$ such that $d(f(x), g(x)) < \alpha(f(x))$, for every $x \in X$, and $f(X) \cap g(X) = \emptyset$.

The following characterization theorem for Q -manifolds is proved by H. Toruńczyk [6].

Theorem 1 (Characterization theorem for Q -manifolds). *A separable locally compact metrizable ANR-space is a Q -manifold if it satisfies the Disjoint Approximation Property.*

Recall that a map is called *proper* if the preimage of every compact subset is compact.

An important consequence of the Slice theorem is that if X is a G -space with the orbits all of the same type, then the orbit map $X \rightarrow X/G$ is a locally trivial fibration [12, Chapter II, Theorem 5.8].

3. Main result.

Lemma 1. *There exists an equivariant deformation retraction (f_t) of the hyperspace $\text{cw}(I^2)$ to the set $\{B\}$ such that $f_t(Z(S^1)) \subset Z(S^1)$.*

Proof. Let $h: [0, 1] \rightarrow [1, \infty]$ be any nondecreasing homeomorphism (we endow $[1, \infty]$ with the order topology). For any $\tau \in [1, \infty]$ and any $A \in \text{cw}(I^2)$, the closed τ -neighborhood $\bar{O}_\tau(A)$ is a convex body of constant width and there is a unique homothetic copy of it (we denote it by $\varphi(\bar{O}_\tau(A))$) which belongs to $\text{cw}(I^2)$. We finally let $f_t(A) = \varphi(\bar{O}_{h(t)}(A))$. It is easy to deduce from known geometric properties of bodies of constant width that (f_t) is a required retraction.

Theorem 2. *The space $M(S^1) = Z(S^1)/\alpha$ is a Q -manifold which is $K(\mathbb{Z}, 2)$.*

Proof. First, note that M is an open subset in $\text{cw}(I^2)$; this follows immediately from the Slice Lemma. We are going to prove that the space M satisfies the Disjoint Approximate Property. By a consequence of the Slice Theorem, the quotient map $q: Z(S^1) \rightarrow M$ is a fibration. Given $x \in M$, find a neighborhood U of x such that q is trivial over U . Let $\alpha: U \rightarrow (0, \infty)$ be a continuous function. We will assume that $B_{\alpha(y)}(y) \subset U$, for every $y \in U$.

There exists a section $s: U \rightarrow q^{-1}(U)$ of the fibration $q|_{q^{-1}(U)}$. There exists a continuous function $\beta: U \rightarrow (0, \infty)$ such that $d_H(f_{\beta(q(A))}(A), A) < \alpha(q(A))/2$, for every $A \in q^{-1}(U)$.

There exists a small enough continuous function $\gamma: U \rightarrow (0, \infty)$ such that, for every $y \in U$, we have $d_H(\Lambda'(f_{\beta(q(s(y)))}(s(y)), p(y)), s(y)) < \alpha(y)$, where $p(y)$ is the point defined as follows. Let $r(y) = (r_1(y), r_2(y))$ denote the (unique) point of intersection of $s(y)$ and the upper side of the square I^2 ; then $p(y) = (r_1(y), r_2(y) + \gamma(y))$. Note that $\Lambda'(f_{\beta(q(s(y)))}(s(y)), p(y)) \in Z(S^1)$, because the boundary of $\Lambda'(f_{\beta(q(s(y)))}(s(y)), p(y))$ has exactly three non-differentiability points. If γ is small enough, then also two of these points are close enough so that three of them cannot form the vertices of an equilateral triangle.

Now, define the maps $F, G: U \rightarrow U$ by the following formulas:

$$F(x) = f_{\beta(y)}(s(y)), \quad G(y) = \Lambda'(f_{\beta(q(s(y)))}(s(y)), p(y)).$$

Since $d(F(y), y) < \alpha(y)$, $d(G(y), y) < \alpha(y)$ and $F(U) \cap G(U) = \emptyset$, we see that U satisfies the Discrete Approximation Property.

We are going to show that the orbit space is an ANR. This follows from the fact that the action of S^1 on $\text{cw}(I^2)$ is linear and results of [].

We conclude that U is a Q -manifold. Thus, M is also a Q -manifold.

In order to prove that M is homeomorphic to $M \times [0, 1]$ it is sufficient to prove that there exists a proper homotopy $H: M \times [0, 1] \rightarrow M$ such that $H(x, 0) = x$, for every $x \in M$ (see [14]). This homotopy is defined by the formula $H(x, t) = q(f_t s(x))$, $x \in M$.

It follows from the homotopy exact sequence of the bundle $Z \rightarrow M$ (with fiber S^1) and from contractibility of Z that M is a $K(\mathbb{Z}, 2)$ -space. Consider the space

$$T(\mathbb{C}P^\infty) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{C}P^i \times [i, \infty) \subset \mathbb{C}P^\infty \times [1, \infty).$$

This is a locally compact $K(\mathbb{Z}, 2)$ -space and therefore $T(\mathbb{C}P^\infty) \times Q \times [0, 1)$ is a $[0, 1)$ -stable Q -manifold. Since the $[0, 1)$ -stable Q -manifolds are classified by their homotopy types, we conclude that $Z(S^1) \simeq T(\mathbb{C}P^\infty) \times Q \times [0, 1)$.

4. Remarks. One can ask whether there are counterparts of the main result of this note for the hyperspace of rotors. Recall that a *rotor* in a regular polygon P is a convex set X which admits a complete rotation in P such that X touches every side of P in the process of rotation. It is proved in [4] that the hyperspace $\mathcal{R}(P_n)$ of the rotors inscribed in the regular n -gon is homeomorphic to the Hilbert cube.

Let (X, Y) be a pair of compact convex subsets in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Following [13] we say that (X, Y) is of constant relative width $r > 0$ if

$$w_{(X,Y)}(u) = h_X(u) + h_Y(-u) = r \quad \text{for every } u \in S^{n-1}.$$

Let Oxy be the standard rectangular coordinate system in $\mathbb{R}^2$. Denote by $\text{crw}_r(\mathbb{R}^2)$ the set of all pairs (X, Y) of compact convex subsets in $\mathbb{R}^2$ of constant relative width r such that X lies in the first quadrant of the system and touches both the x -axis and y -axis. The topology on the set $\text{crw}_r(\mathbb{R}^2)$ is inherited from the product $\exp \mathbb{R}^2 \times \exp \mathbb{R}^2$, where the Hausdorff metric is considered on each factor. The Lie group S^1 acts on $\text{crw}_r(\mathbb{R}^2)$ by rotations. Are there counterparts of the main result of this note for the hyperspace $\text{crw}_r(\mathbb{R}^2)$?

-
1. Nadler S.B. Hyperspace of compact convex sets / Nadler S.B., Jr., Quinn J., Stavrokas N.M. // Pacif. J. Math. – 1979. – Vol. 83. – P. 441-462.
 2. Montejano L. The hyperspace of compact convex subsets of an open subset of $\mathbb{R}^n$ / Montejano L. // Bull. Pol. Acad. Sci. Math. – 1987. – Vol. 35. – №11/12. – P. 793-799.
 3. Bazylevych L.E. On the hyperspace of strictly convex bodies / Bazylevych L.E. // Mat. studii. – 1993. – Vol. 2. – P. 83-86.
 4. Bazylevych L.E. On the hyperspace of rotors in convex polygons / Bazylevych L.E. // Mat. Stud. – 2006. – Vol. 26. – № 1. – P. 49-54.
 5. Bessaga C. Selected topics in infinite-dimensional topology / Bessaga C., Pełczyński A. – Warsaw: PWN, 1975.
 6. Toruńczyk H. On CE-images of the Hilbert cube and characterization of Q -manifolds / Toruńczyk H. // Fund. Math. – 1980. – Vol. 106. – № 1. – P. 31-40.
 7. Toruńczyk H. The fine structure of S^1/S^1 ; a Q -manifold hyperspace localization of the integers / Toruńczyk H., West J. – Proc. Int. Conference on Geometric Topology (Warsaw, 1978), PWN, Warszawa, 1980. – S. 439-449.
 8. Antonyan S.A. The Banach-Mazur compactum $BM(2)$ is homeomorphic to the orbit space $(\exp S^1)/O(2)$ / Antonyan S.A. // Topology and its Applications. – 2007. – Vol. 154. – P. 1236-1244.
 9. Antonyan S.A. Retraction properties of the orbit space / Antonyan S.A. // Matem. Sbornik. – 1988. – Vol. 137. – P. 300-318. (Eng. transl. Math. USSR Sb. – 1990. – Vol. 65. – P. 305-321).
 10. Antonyan S.A. Extending equivariant maps into spaces with convex structure / Antonyan S.A. // Topol. Appl. – 2005. – Vol. 153. – № 2/3. – P. 261-275.

11. *Sallee G.T.* The maximal set of constant width in a lattice / *Sallee G.T.* // *Pacif. J. Math.* – 1969. – Vol. 28. – № 3. P. 669-674.
12. *Bredon G.E.* Introduction to Compact Transformation Groups / *Bredon G.E.* // *Pure and Applied Mathematics.* – Vol. 46. – New York: Academic Press, 1972.
13. *Maehara H.* Convex bodies forming pairs of constant width / *Maehara H.* // *J. Geom.* – 1984. – Vol. 22. – № 2. – P. 101-107.
14. *Wong R.Y.-T.* Non-compact Hilbert cube manifolds / *Wong R.Y.-T.* – preprint.

ПРОСТОРИ ЕЙЛЕНБЕРГА-МАКЛЕЙНА КОМПАКТНИХ ОПУКЛИХ ТІЛ СТАЛОЇ ШИРИНИ

Лідія БАЗИЛЕВИЧ

*Національний університет “Львівська політехніка”,
79013 Львів, вул. Степана Бандери, 12
e-mail: izar@litech.lviv.ua*

Група Ли S^1 діє поворотами на гіперпросторі $\text{sw}(I^2)$ опуклих тіл сталої ширини, вписаних в одиничний квадрат I^2 . Доведено, що простір орбіт цієї дії містить Q -многовид, який є $K(\mathbb{Z}, 2)$ -простором.

Ключові слова: min-max опукла множина, гіперпростір, гільбертів куб.

ПРОСТРАНСТВА ЭЙЛЕНБЕРГА-МАКЛЕЙНА КОМПАКТНЫХ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ ПОСТОЯННОЙ ШИРИНЫ

Лидия БАЗИЛЕВИЧ

*Национальный университет “Львовская политехника”,
79013 Львов, ул. Степана Бандеры, 12
e-mail: izar@litech.lviv.ua*

Группа Ли S^1 действует поворотами на гиперпространстве $\text{sw}(I^2)$ выпуклых тел постоянной ширины, вписанных в единичный квадрат I^2 . Доказано, что пространство орбит этого действия содержит Q -многообразие, являющееся $K(\mathbb{Z}, 2)$ -пространством.

Ключевые слова: max-min выпуклое множество, гиперпространство, гильбертов куб.

Стаття надійшла до редколегії 21.05.2010

Прийнята до друку 22.12.2010

УДК 517.95

ОДНОЗНАЧНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ СИЛЬНО НЕЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИКО-ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

Микола БОКАЛО

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000 Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: m.m.bokalo@gmail.com

Доведено існування єдиного узагальненого розв'язку задачі без початкових умов для нелінійних анізотропних еліптико-параболічних рівнянь другого порядку в необмежених за просторовими змінними областях. Рівняння мають показники нелінійності, які залежать від точок області визначення рівнянь та напряду диференціювання, а їхні узагальнені розв'язки беруться з узагальнених просторів Лебега-Соболева. У цьому разі не накладаються умови на поведінку розв'язків і зростання вихідних даних на нескінченності.

Ключові слова: нелінійне рівняння, еліптико-параболічне рівняння, вироджене параболічне рівняння, задача без початкових умов, узагальнений простір Лебега-Соболева, необмежена область.

Вступ. Нехай Ω – необмежена область в арифметичному просторі $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) з евклідовою нормою $|\cdot|$ ($|x| := (|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2)^{1/2}$ для $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$). Припускаємо, що межа $\partial\Omega$ області $\Omega \in C^1$ многовидом розмірності $n - 1$. Нехай Γ_0 – замикання відкритої множини на $\partial\Omega$ (зокрема, Γ_0 може бути порожньою множиною або збігатися з $\partial\Omega$), $\Gamma_1 := \partial\Omega \setminus \Gamma_0$; $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ – одиничний вектор зовнішньої до $\partial\Omega$ нормалі. Позначаємо $S := (-\infty, 0]$, $Q := \Omega \times S$, $\Sigma_0 := \Gamma_0 \times S$, $\Sigma_1 := \Gamma_1 \times S$.

У цій праці досліджують однозначну розв'язність задачі: знайти функцію $u : \overline{\Omega} \times S \rightarrow \mathbb{R}$ таку, що

$$\frac{\partial}{\partial t}(b(x)u) - \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i} a_i(x, t, u, \nabla u) + a_0(x, t, u, \nabla u) = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (1)$$

$$u(y, t) = 0, \quad (y, t) \in \Sigma_0, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i(y, t, u, \nabla u) \nu_i(y) = 0, \quad (y, t) \in \Sigma_1. \quad (3)$$

Далі цю задачу коротко називатимемо *задачею (1)-(3)*. У цьому разі вважаємо, що $b \geq 0$ на Ω і рівність $b = 0$ може виконуватися на підмножині Ω ненульової міри, а просторова частина диференціального виразу в лівій частині рівняння (1) є еліптичною. Отож, рівняння (1) можна назвати *еліптико-параболічним*.

Прикладами рівнянь типу (1), які тут вивчають, є

$$\frac{\partial}{\partial t}(b(x)u) - \sum_{i=1}^n \left(\widehat{a}_i(x, t) |u_{x_i}|^{p_i(x)-2} u_{x_i} \right)_{x_i} + \widehat{a}_0(x, t) |u|^{p_0(x)-2} u = f(x, t), \quad (4)$$

де $\widehat{a}_i$ ($i = \overline{0, n}$) – деякі вимірні додатні та відділені від нуля функції, $p_i > 1$ ($i = \overline{0, n}$) – вимірні обмежені функції (так звані показники нелінійності), f, u – відповідно задана і невідома функції.

В останні десятиліття дуже активно вивчають нелінійні диференціальні рівняння зі змінними показниками нелінійності, прикладами яких є рівняння (4). Це пов'язано з тим, що такі рівняння виникають при математичному моделюванні різних типів фізичних процесів, зокрема, описують потоки електрореологічних речовин, процеси відновлення зображень, електричний струм у кондукторі під впливом змінного температурного поля [18].

Як добре відомо, крайові задачі для лінійних еліптичних і параболічних рівнянь в необмежених областях є коректними, якщо на їхні розв'язки та вихідні дані додатково до крайових умов накладені певні обмеження на зростання на нескінченності. Така ж ситуація з крайовими задачами в необмежених областях і для нелінійних еліптичних та параболічних рівнянь з певних класів [1], [7], [12]. Проте є рівняння, крайові задачі для яких однозначно розв'язні без будь-яких умов на нескінченності [3, 4, 6, 8, 13, 14, 15, 16]. У [14] вперше отримано такий результат для рівняння (4) при $p_0 = \text{const} > 2$ і $p_1 = \dots = p_n = 2$. Нові класи рівнянь з таким ефектом отримали в багатьох працях. Зокрема, це було зроблено завдяки рівнянням зі змінними показниками нелінійності. У праці [2] розглянуто крайові задачі для квазілінійних еліптичних рівнянь та їхніх систем другого порядку, що є узагальненням рівняння (1) з $b = 0$, $p_i = 2$ ($i = \overline{1, n}$), $p_0(\cdot) > 2$ і доведено коректність таких задач у класах функцій без умов на нескінченності. У праці [4] такий самий результат отримано стосовно узагальнень рівняння (1) з $b = 0$, $1 < p_i(\cdot) \leq 2$ ($i = \overline{1, n}$), $p_0(\cdot) \geq 2$. Подібні результати отримані і для параболічних рівнянь [3] (див. також бібліографію).

У цій статті, зробивши додаткові припущення на вихідні дані, доведено однозначну розв'язність задач без початкових умов без обмежень на нескінченності для одного класу нелінійних анізотропних еліптико-параболічних рівнянь. Отримані тут результати є узагальненням і доповненням результатів [3] стосовно рівнянь другого порядку.

Ми розглядатимемо узагальнені розв'язки задачі (1)-(3), а для їхнього означення та дослідження нам будуть потрібні деякі лінійні локально опуклі простори, які ми й введемо зараз.

Нехай G – довільна область в $\mathbb{R}^m$, де $m = n$ або $m = n+1$, а $r \in L_\infty(G)$ і $r(z) \geq 1$ для м.в. $z \in G$. На просторі $C_c(\overline{G}) := \{v \in C(\overline{G}) \mid \text{supp } v - \text{обмежена множина}\}$ вводимо норму

$$\|v\|_{L_{r(\cdot)}} := \inf \{ \lambda > 0 : \rho_{G,r}(v/\lambda) \leq 1 \},$$

де $\rho_{G,r}(v) := \int_G |v(z)|^{r(z)} dz$. (Зауважимо таке: коли $r(z) = r_0 \equiv \text{const} \geq 1$ для м.в. $z \in G$, то $\|\cdot\|_{L_{r(\cdot)}(G)} = \|\cdot\|_{L_{r_0}(G)}$.) Поповнення отриманого нормованого лінійного простору позначимо через $L_{r(\cdot)}(G)$ і назовемо його *узагальненим простором Лебега* (див., наприклад, [17]). Зауважимо таке: якщо $\text{ess inf}_{z \in \Omega} r(z) > 1$, то спряжений до $L_{r(\cdot)}(G)$ можна ототожнити з $L_{r^*(\cdot)}(G)$, де $r^*(z)$, $z \in G$, – функція, яка визначена рівністю $\frac{1}{r(z)} + \frac{1}{r^*(z)} = 1$, $z \in G$.

Якщо G є необмеженою областю, то через $L_{r(\cdot), \text{loc}}(\overline{G})$ позначимо поповнення $C(\overline{G})$ в топології, що породжена системою півнорм: $\{\|\cdot\|_{L_{r(\cdot)}(G')} \mid G' \in Bd(G)\}$, де $Bd(G)$ – множина всіляких можливих обмежених підобластей G .

Нехай $p = (p_0, \dots, p_n)$ – вектор-функція, яка задовольняє умову:

P₁) для кожного $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ функція $p_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – вимірна,
 $\text{ess inf}_{x \in \Omega} p_i(x) > 1$, $\text{ess sup}_{x \in \Omega} p_i(x) < \infty$.

Позначимо через $W_{p(\cdot), \text{loc}}^1(\overline{\Omega}, \Gamma_0)$ поповнення простору $C^1(\overline{\Omega}, \Gamma_0) := \{v \in C^1(\overline{\Omega}) \mid v|_{\Gamma_0} = 0\}$ в топології, яка породжена системою півнорм

$$\left\{ \|v\|_{L_{p_0(\cdot)}(\Omega')} + \sum_{i=1}^n \|v_{x_i}\|_{L_{p_i(\cdot)}(\Omega')} \mid \Omega' \in Bd(\Omega) \right\}.$$

Нехай $W_{p(\cdot), c}^1(\Omega, \Gamma_0)$ – підпростір простору $W_{p(\cdot), \text{loc}}^1(\overline{\Omega}, \Gamma_0)$, складений з функцій з обмеженими носіями.

Нехай

$$C(S; L_{2, \text{loc}}(\overline{\Omega})) := \{v : S \rightarrow L_{2, \text{loc}}(\overline{\Omega}) \mid v \in C([-l, 0]; L_2(\Omega')) \forall l \in \mathbb{N}, \forall \Omega' \in Bd(\Omega)\}$$

з системою півнорм $\{\|\cdot\|_{C([-l, 0]; L_2(\Omega'))} \mid l \in \mathbb{N}, \Omega' \in Bd(\Omega)\}$.

Введемо лінійний локально опуклий простір

$$\mathbb{U}_{p, \text{loc}} := \{u \in (S \rightarrow W_{p(\cdot), \text{loc}}^1(\overline{\Omega}, \Gamma_0)) \mid$$

$$u \in L_{p_0(\cdot), \text{loc}}(\overline{Q}), \quad u_{x_i} \in L_{p_i(\cdot), \text{loc}}(\overline{Q}) \quad (i = \overline{1, n}), \quad b^{1/2}u \in C(S; L_{2, \text{loc}}(\overline{\Omega}))\}$$

з топологією, яка породжена системою півнорм

$$\left\{ \|u\|_{L_{p_0(\cdot)}(\Omega' \times (-l, 0))} + \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L_{p_i(\cdot)}(\Omega' \times (-l, 0))} + \sup_{t \in [-l, 0]} \|b^{1/2}(\cdot)u(\cdot, t)\|_{L_2(\Omega')} \mid \right.$$

$$\left. l \in \mathbb{N}, \Omega' \in Bd(\Omega) \right\}.$$

1. Формулювання задачі й основних результатів. Спочатку дамо означення узагальненого розв'язку задачі (1)-(3), а для цього введемо відповідні обмеження на вихідні дані (класи вихідних даних).

Нехай $\mathbb{B}$ – множина визначених на Ω функцій b , які задовольняють умову

B) $b \in L_{\infty, \text{loc}}(\overline{\Omega})$, $b \geq 0$ на Ω .

Нехай $p = (p_0, \dots, p_n)$ – вектор-функція, яка задовольняє умову **P₁**. Під $\mathbb{A}_p$ розумітимемо множину впорядкованих наборів дійснозначних функцій $(a_0, a_1, \dots, a_n)$, які визначені на $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ і задовольняють умови:

A₁) для кожного $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ функція $a_i(x, t, s, \xi)$, $(x, t, s, \xi) \in Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, є каратеодорівською, тобто для майже всіх $(x, t) \in Q$ функція $a_i(x, t, \cdot, \cdot) : \mathbb{R}^{1+n} \equiv$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною і для будь-яких $(s, \xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$ функція $a_i(\cdot, \cdot, s, \xi) : Q \rightarrow \mathbb{R}$ – вимірною;

A₁* $a_i(x, t, 0, 0) = 0$ ($i = \overline{0, n}$) для майже всіх $(x, t) \in \overline{Q}$;

A₂ для кожного $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, майже всіх $(x, t) \in Q$ і будь-яких $(s, \xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$ виконується нерівність

$$|a_i(x, t, s, \xi)| \leq h_{1,i}^a(x, t) (|s|^{p_0(x)/p_i^*(x)} + \sum_{j=1}^n |\xi_j|^{p_j(x)/p_i^*(x)}) + h_{2,i}^a(x, t),$$

де $h_{1,i}^a \in L_{\infty, \text{loc}}(\overline{Q})$, $h_{2,i}^a \in L_{p_i^*(\cdot), \text{loc}}(\overline{Q})$, $1/p_i(x) + 1/p_i^*(x) = 1$.

Нехай

$$\mathbb{F}_{p, \text{loc}} := L_{p_0^*(\cdot), \text{loc}}(\overline{Q}).$$

Означення 1. Нехай $b \in \mathbb{B}$, $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_p$, $f \in \mathbb{F}_{p, \text{loc}}$. Скажемо, що функція $u \in \mathbb{U}_{p, \text{loc}}$ є узагальненим розв'язком задачі (1)–(3), якщо виконується інтегральна рівність

$$\iint_Q \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, t, u, \nabla u) \psi_{x_i} \varphi + a_0(x, t, u, \nabla u) \psi \varphi - b(x) u \psi \varphi' \right\} dx dt = \iint_Q f \psi \varphi dx dt \quad (5)$$

для будь-яких $\psi \in W_{p(\cdot), c}^1(\Omega, \Gamma_0)$, $\varphi \in C_0^1(-\infty, 0)$.

Мета нашої праці – за додаткових умов на вихідні дані довести однозначну розв'язність задачі (1)–(3).

Нехай $k \in \{1, \dots, n\}$ – число таке, що множина $\Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_k^2 < R^2\}$ обмежена для будь-якого $R > 0$. Зокрема, коли $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, де Ω_1 – необмежена область в $\mathbb{R}^k$; Ω_2 – обмежена область в $\mathbb{R}^{n-k}$, то k – саме те, про яке тільки що говорилося.

Вважатимемо, що $0 \in \Omega$ і позначимо для будь-якого $R > 0$ через Ω_R зв'язну компоненту множини $\Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_k^2 < R^2\}$, що містить 0. Нехай $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ – найменші з чисел, для яких виконуються, відповідно, нерівності

$$\text{mes}_n \{\Omega_R\} \leq c_1 R^\alpha, \quad R > 0, \quad (6)$$

$$\text{mes}_n \{\Omega_R \cap \text{supp } b\} \leq c_2 R^\beta, \quad R > 0, \quad (7)$$

де через $\text{mes}_n \{G\}$ позначається міра Лебега множини G в $\mathbb{R}^n$, $c_1 \geq 0$, $c_2 \geq 0$ – деякі сталі.

Стосовно вектор-функції $p = (p_0, \dots, p_n)$ додатково до умови **P₁** зробимо ще таке припущення:

P₂ $p_0(x) \geq 2$ та $\max_{i \in \{1, \dots, k\}} p_i(x) \leq 2$ для майже всіх $x \in \Omega$;

$$\min_{i \in \{1, \dots, k\}} \text{ess inf}_{x \in \Omega} [p_0(x) - p_i(x)] > 0.$$

Позначимо через $\mathbb{A}_p^*$ підмножину $\mathbb{A}_p$, елементи якої задовольняють ще такі умови:

A₃ для майже всіх $(x, t) \in Q$ та довільних $(s_1, \xi^1), (s_2, \xi^2) \in \mathbb{R}^{1+n}$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i(x, t, s_1, \xi^1) - a_i(x, t, s_2, \xi^2))(\xi_i^1 - \xi_i^2) + (a_0(x, t, s_1, \xi^1) - a_0(x, t, s_2, \xi^2))(s_1 - s_2) \geq \\ \geq K_1 |s_1 - s_2|^{q(x)}, \end{aligned}$$

де $K_1 > 0$ – деяка стала; q – вимірна функція така, що $2 \leq q(x) \leq p_0(x)$ для майже всіх $x \in \Omega$, $q_b^- := \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega \cap \operatorname{supp} b} q(x) > 2$, $q_b^+ := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega \cap \operatorname{supp} b} q(x) < 2(\beta - 1)/\beta$ та, крім того,

для кожного $i \in \{1, \dots, k\}$ $r_i^- := \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} r_i(x) > \alpha + 1$, $r_i^+ := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} r_i(x) < +\infty$, де

α, β – сталі відповідно з умов (6) та (7), $r_i(x) := \frac{q(x)p_i(x)}{q(x)-p_i(x)}$, $x \in \Omega$;

A₄) для майже всіх $(x, t) \in Q$ і будь-яких $(s, \xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$

$$\sum_{i=1}^n a_i(x, t, s, \xi) \xi_i + a_0(x, t, s, \xi) s \geq K_2 \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^{p_i(x)} + |s|^{p_0(x)} \right) - h_3^a(x, t),$$

де $K_2 > 0$ – деяка стала, $h_3^a \in L_{1,\operatorname{loc}}(\overline{Q})$, $h_3^a \geq 0$;

A₅) для майже всіх $(x, t) \in Q$ і будь-яких $(s_1, \xi^1), (s_2, \xi^2) \in \mathbb{R}^{1+n}$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k |a_i(x, t, s_1, \xi^1) - a_i(x, t, s_2, \xi^2)|^{p_i^*(x)} \leq \\ & \leq K_3 \left[\sum_{i=1}^k (a_i(x, t, s_1, \xi^1) - a_i(x, t, s_2, \xi^2))(\xi_i^1 - \xi_i^2) + \right. \\ & \quad \left. + (a_0(x, t, s_1, \xi^1) - a_0(x, t, s_2, \xi^2))(s_1 - s_2) \right], \end{aligned}$$

де $K_3 > 0$ – деяка стала.

Зауваження 1. Опираючись на результати [4], неважко переконатися, що підмножиною $\mathbb{A}_p^*$ є множина $\mathbb{A}_p^1$ тих елементів $(a_0, \dots, a_n)$ з $\mathbb{A}_p$, які задовольняють умови

A₃') для кожного $i \in \{1, \dots, n\}$ $a_i(x, t, s, \xi) \equiv a_i(x, t, \xi_i)$, $(x, t, s, \xi) \in Q \times \mathbb{R}^{1+n}$, та для майже всіх $(x, t) \in Q$ існує похідна $\partial a_i(x, t, \xi_i)/\partial \xi_i$, $\xi_i \neq 0$, і виконуються нерівності

$$A_i |\xi_i|^{p_i(x)-2} \leq \partial a_i(x, t, \xi_i)/\partial \xi_i \leq \tilde{A}_i |\xi_i|^{p_i(x)-2}, \quad \xi_i \neq 0,$$

якщо $i \in \{1, \dots, k\}$, якщо $i \in \{k+1, \dots, n\}$, то

$$\partial a_i(x, \xi_i)/\partial \xi_i \geq A_i |\xi_i|^{p_i(x)-2}, \quad \xi_i \neq 0, \quad |a_i(x, \xi_i)| \leq \tilde{A}_i |\xi_i|^{p_i(x)-1} + h_i^a(x, t), \quad \xi_i \in \mathbb{R},$$

де $A_i > 0$, $\tilde{A}_i > 0$, $\sigma_i \geq 0$ – деякі сталі, $h_i^a \in L_{p_i^*(\cdot), \operatorname{loc}}(\overline{Q})$;

A₄') $a_0(x, t, s, \xi) \equiv a_0(x, t, s)$, $(x, t, s, \xi) \in Q \times \mathbb{R}^{1+n}$, і для майже всіх $(x, t) \in Q$ існує похідна $\partial a_0(x, s)/\partial s$, $s \neq 0$, та виконуються нерівності

$$\partial a_0(x, t, s)/\partial s \geq A_0 |s|^{p_0(x)-2} + A'_0, \quad s \neq 0, \quad |a_0(x, t, s)| \leq \tilde{A}_0 |s|^{p_0(x)-1} + h_0^a(x, t), \quad s \in \mathbb{R},$$

де $A_0, \tilde{A}_0$ – додатні сталі; A'_0 – невід'ємна стала, причому $A'_0 = 0$ тільки в тому випадку, коли $\operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega \cap \operatorname{supp} b} p_0(x) > 2$, $\operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega \cap \operatorname{supp} b} p_0(x) < 2(\beta + 1)/\beta$ та $\operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} \frac{p_0(x)p_i(x)}{p_0(x)-p_i(x)} > \alpha + 1$ (α, β – сталі відповідно з умов (6)), (7)), а h_0^a – функція з $L_{p_0^*(\cdot), \operatorname{loc}}(\overline{\Omega})$.

Прикладом елемента з класу $\mathbb{A}_p^1$ є набір функцій $(\hat{a}_0(x, t) |s|^{p_0(x)-2} s, \hat{a}_1(x, t) |\xi_1|^{p_1(x)-2} \xi_1, \dots, \hat{a}_n(x, t) |\xi_n|^{p_n(x)-2} \xi_n)$, де $\hat{a}_i \in L_\infty(Q)$ – додатні і відділені від нуля функції. Тоді рівняння (1) набуде вигляду (4).

Зауваження 2. Іншою підмножиною $\mathbb{A}_p^*$ є множина $\mathbb{A}_p^2$ тих елементів $(a_0, \dots, a_n)$ з $\mathbb{A}_p$ при $p_1(x) = \dots = p_k(x) = 2$ для м.в. $x \in \Omega$, які задовольняють умову $\mathbf{A}_4$ та умови $\mathbf{A}_3''$ для м.в. $(x, t) \in Q$ і будь-яких $(s_1, \xi^1), (s_2, \xi_2) \in \mathbb{R}^{1+n}$ виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^k |a_i(x, t, s_1, \xi_1) - a_i(x, t, s_2, \xi_2)| \leq D_1 \sum_{i=1}^k |\xi_i^1 - \xi_i^2| + D_2 |s_1 - s_2|,$$

де D_1, D_2 – невід’ємні сталі;

$\mathbf{A}_4''$ для м.в. $(x, t) \in Q$ і будь-яких $(s_1, \xi^1), (s_2, \xi_2) \in \mathbb{R}^{1+n}$ виконується нерівність

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (a_i(x, t, s_1, \xi^1) - a_i(x, t, s_2, \xi^2))(\xi_i^1 - \xi_i^2) + (a_0(x, t, s_1, \xi^1) - a_0(x, t, s_2, \xi^2))(s_1 - s_2) \geq \\ \geq K_4 \sum_{i=1}^k |\xi_i^1 - \xi_i^2|^2 + K_5 |s_1 - s_2|^2 + K_6 |s_1 - s_2|^{p_0(x)}, \end{aligned}$$

де $K_4 > 0, K_5 \geq 0, K_6 > 0$ – деякі сталі, причому $K_5 = 0$ тільки в тому випадку, коли $D_2 = 0$, $\text{ess inf}_{x \in \Omega \cap \text{supp } b} p_0(x) > 2$, $\text{ess inf}_{x \in \Omega \cap \text{supp } b} p_0(x) < 2(\beta + 1)/\beta$ та $\text{ess inf}_{x \in \Omega} \frac{p_0(x)p_i(x)}{p_0(x) - p_i(x)} > \alpha + 1$ (α, β – сталі, відповідно, з умов (6)), (7)).

Прикладом рівнянь вигляду (1), для якого коефіцієнти $(a_0, \dots, a_n)$ належать класу $\mathbb{A}_p^2$, є рівняння

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(b(x)u) - \sum_{i,j=1}^k (\hat{a}_{ij}(x, t)u_{x_j})_{x_i} + \sum_{i=k+1}^n (\hat{a}_i(x, t)|u_{x_i}|^{p_i(x)-2}u_{x_i})_{x_i} + \\ + \hat{a}_*(x, t)u + \hat{a}_0(x, t)|u|^{p_0(x)-2}u = f(x, t), \end{aligned} \quad (8)$$

де $\hat{a}_{ij}$ ($i, j = \overline{1, k}$) – обмежені функції, які задовольняють умову: існує $\lambda > 0$ таке, що $\sum_{i,j=1}^k \hat{a}_{ij}(x, t)\xi_i\xi_j \geq \lambda \sum_{i=1}^k \xi_i^2$ для м.в. $(x, t) \in Q$ і будь-яких $\xi_i \in \mathbb{R}$ ($i = \overline{1, k}$).

Теорема 1. Нехай $b \in \mathbb{B}, a \in \mathbb{A}_p^*, f \in \mathbb{F}_{loc}$. Тоді існує єдиний узагальнений розв’язок задачі (1)-(3), причому для будь-яких R, R_0 таких, що $R > R_0 > 0, R \geq 1$, виконується оцінка

$$\begin{aligned} \max_{t \in [-R_0, 0]} \int_{\Omega_{R_0}} b(x)|u(x, t)|^2 dx + \iint_{Q_{R_0}} \left[\sum_{i=1}^n |u_{x_i}(x, t)|^{p_i(x)} + |u(x, t)|^{p_0(x)} \right] dx dt \leq \\ \leq C_1 \left(R/(R - R_0) \right)^\mu \left\{ R^{\alpha+1-\theta} + \varkappa R^{\beta+1-q_b^+/(q_b^+-2)} + \right. \\ \left. + \iint_{Q_R} |f(x, t)|^{p_0^*(x)} dx dt + \iint_{Q_R} h_3^a(x, t) dx dt \right\}, \end{aligned} \quad (9)$$

де $\varkappa := \max \left\{ \left(\text{ess sup}_{x \in \Omega} b(x) \right)^{q_b^-/(q_b^- - 2)}, \left(\text{ess sup}_{x \in \Omega} b(x) \right)^{q_b^+/(q_b^+ - 2)} \right\}$,

$\mu := \max_{1 \leq i \leq k} r_i^+ + q_b^-/(q_b^- - 2), \theta := \min_{1 \leq i \leq k} r_i^-$,

C_1 – стала, яка залежить тільки від $K_1, K_2, K_3, c_1, c_2, r_i^+ (i = \overline{1, k}), q_b^-$.

2. Допоміжні твердження.

Зауваження 3. Для довільних $a \geq 0$, $c \geq 0$, $\varepsilon > 0$, $\nu > 1$ правильна нерівність

$$ac \leq \varepsilon a^\nu + \varepsilon^{1-\nu^*} c^{\nu^*}, \quad (10)$$

яка легко випливає з нерівності Юнга [9]: $ac \leq \frac{a^\nu}{\nu} + \frac{c^{\nu^*}}{\nu^*}$, $\nu^* = \frac{\nu}{\nu-1}$.

Зауваження 4. Для будь-яких $a \geq 0$, $c \geq 0$, $d \geq 0$, $\varepsilon > 0$, $\nu_1 > 1$, $\nu_2 > 1$, $\nu_3 > 1$, $\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} + \frac{1}{\nu_3} = 1$ правильна нерівність

$$acd \leq \varepsilon a^{\nu_1} + \varepsilon c^{\nu_2} + \varepsilon^{1-\nu_3} d^{\nu_3}, \quad (11)$$

яка легко випливає з нерівності Юнга [9]: $acd \leq \frac{a^{\nu_1}}{\nu_1} + \frac{c^{\nu_2}}{\nu_2} + \frac{d^{\nu_3}}{\nu_3}$.

Лема 1. Нехай $R > 0$, τ_1, τ_2 ($\tau_1 < \tau_2$) – довільні фіксовані числа, $b \in \mathbb{B}$. Припустимо, що функція $v \in ((\tau_1, \tau_2) \rightarrow W_{p(\cdot), loc}^1(\overline{\Omega}, \Gamma_0)) \cap L_{p_0(\cdot), loc}(\overline{\Omega} \times (\tau_1, \tau_2))$,

$v_{x_i} \in L_{p_i(\cdot), loc}(\overline{\Omega} \times (\tau_1, \tau_2))$ ($i = \overline{1, n}$), така, що для деяких функцій

$g_0 \in L_{p_0^*(\cdot), loc}(\overline{\Omega} \times (\tau_1, \tau_2))$, $g_i \in L_{p_i^*(\cdot), loc}(\overline{\Omega} \times (\tau_1, \tau_2))$ ($i = \overline{1, n}$) виконується рівність

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega_R} \left\{ \sum_{i=1}^n g_i \psi_{x_i} \varphi + g_0 \psi \varphi - b v \psi \varphi' \right\} dx dt = 0 \quad (12)$$

для всіх $\varphi \in C_0^1(\tau_1, \tau_2)$, $\psi \in W_{p(\cdot), loc}^1(\overline{\Omega}, \Gamma_0)$, $\text{supp } \psi \subset \overline{\Omega_R}$.

Тоді $b^{1/2} v \in C([\tau_1, \tau_2]; L_2(\Omega_{R'}))$ для кожного $R' \in (0, R)$. Крім того, для довільних функцій $\theta \in C^1([\tau_1, \tau_2])$, $w \in C^1(\overline{\Omega})$, $\text{supp } w \subset \overline{\Omega_R}$, $w \geq 0$ і будь-яких чисел t_1, t_2 таких, що $\tau_1 \leq t_1 < t_2 \leq \tau_2$, виконується рівність

$$\begin{aligned} & \theta(t) \int_{\Omega_R} b(x) |v(x, t)|^2 w(x) dx \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega_R} b(x) |v(x, t)|^2 w(x) \theta'(t) dx dt + \\ & + 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega_R} \left\{ \sum_{i=1}^n g_i (vw)_{x_i} + g_0 v w \right\} \theta dx dt = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Таке твердження доводиться аналогічно, як лема 1 [3].

Лема 2. Нехай $a \in \mathbb{A}_p^*$, i для кожного $l \in \{1, 2\}$ функції $u_l \in \mathbb{U}_{p, loc}$, $f_l \in \mathbb{F}_{p, loc}$ такі, що для деякого числа $R > 1$ виконується рівність (5) з $u = u_l$ для будь-яких $\psi \in W_{p(\cdot), c}^1(\Omega, \Gamma_0)$, $\text{supp } \psi \subset \overline{\Omega_R}$, $\varphi \in C_0^1(-R, 0)$.

Тоді для будь-якого числа $R_0 \in (0, R)$ правильна нерівність

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_{R_0}} \left[\sum_{i=1}^n (a_i(x, t, u_1, \nabla u_1) - a_i(x, t, u_2, \nabla u_2)) (u_{1, x_i} - u_{2, x_i}) + \right. \\ & \left. + (a_0(x, t, u_1, \nabla u_1) - a_0(x, t, u_2, \nabla u_2)) (u_1 - u_2) + |u_1(x) - u_2(x)|^{q(x)} \right] dx dt \leq \\ & \leq C_2 \left(\frac{R}{R - R_0} \right)^\mu \left\{ R^{\alpha+1-\theta} + \varkappa R^{\beta+1-q_b^+/(q_b^+-2)} + \iint_{Q_R} |f_1(x, t) - f_2(x, t)|^{q^*(x)} dx dt \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

де $\mu, \alpha, \varkappa$ – такі ж як в теоремі 1, а C_2 – додатна стала, яка залежить тільки від $K_1, K_3, c_1, c_2, r_i^+$ ($i = \overline{1, k}$), q_b^- .

Доведення. Введемо в розгляд такі дві зрізувальні функції:

$$\zeta(x') = \begin{cases} (R^2 - |x'|^2)/R, & |x'| < R, \\ 0, & |x'| \geq R, \end{cases} \quad \eta(t) = \begin{cases} t + R, & -R \leq t \leq 0, \\ 0, & t < -R, \end{cases}$$

де $x' = (x_1, \dots, x_k)$, $|x'| = (x_1^2 + \dots + x_k^2)^{1/2}$.

Для заданих $\psi \in W_{p(\cdot), c}^1(\Omega, \Gamma_0)$, $\text{supp } \psi \subset \overline{\Omega_R}$, $\varphi \in C_0^1(-R, 0)$ розглянемо рівність (5) при $u = u_1$ та цю ж рівність при $u = u_2$ і віднімемо ці рівності. У підсумку, прийнявши

$$u_{12}(x, t) := u_1(x, t) - u_2(x, t), \quad f_{12}(x, t) := f_1(x, t) - f_2(x, t),$$

$a_{i,12}(x, t) := a_i(x, t, u_1(x, t), \nabla u_1(x, t)) - a_i(x, t, u_1(x, t), \nabla u_1(x, t))$, $(x, t) \in Q$, $i = \overline{0, n}$, отримаємо рівність, до якої застосуємо лему 1 з $g_0 := a_{0,12} - f_{12}$, $g_i = a_{i,12}$ ($i = \overline{1, n}$), $w = \zeta^s$, $\theta = \chi^r$, де $s := \max_{1 \leq i \leq k} r_i^+$, $r := q_b^-/(q_b^- - 2)$, $t_1 = -R$, $t_2 = \tau \in (-R, 0]$ – довільне число. Внаслідок простих перетворень отримаємо рівність

$$\begin{aligned} \eta^r(\tau) \int_{\Omega_R} b(x) |u_{12}(x, \tau)|^2 \zeta^s(x) dx + 2 \iint_{Q_R^\tau} \left\{ \sum_{i=1}^n a_{i,12}(u_{12})_{x_i} + a_{0,12} u_{12} \right\} \zeta^s \eta^r dx dt = \\ = r \iint_{Q_R^\tau} b |u_{12}|^2 \zeta^s \eta^{r-1} dx dt - 2s \iint_{Q_R^\tau} \left(\sum_{i=1}^k a_{i,12} \zeta_{x_i} \right) u_{12} \zeta^{s-1} \eta^r dx dt + \\ + 2 \iint_{Q_R^\tau} f_{12} u_{12} \zeta^s \chi^r dx dt, \end{aligned} \quad (15)$$

де $Q_R^\tau := \Omega_R \times (-R, \tau)$ при $\tau \in (-R, 0]$.

Зробимо відповідні оцінки інтегралів рівності (15).

З умови **A₃** маємо

$$\iint_{Q_R^\tau} \left\{ \sum_{i=1}^n a_{i,12}(u_{12})_{x_i} + a_{0,12} u_{12} \right\} \zeta^s \eta^r dx dt \geq K_1 \iint_{Q_R^\tau} |u_{12}|^{q(x)} \zeta^s \eta^r dx dt. \quad (16)$$

Вибравши для майже кожного $x \in \Omega$ $\nu = q(x)/2$ ($\nu' = q(x)/(q(x) - 2)$), $a = |u_{12}|^2 \zeta^{s/\nu} \eta^{r/\nu}$, $c = b \zeta^{s/\nu'} \eta^{r/\nu'-1}$, $\varepsilon = \varepsilon_1 > 0$, на підставі (10) отримаємо

$$\begin{aligned} \iint_{Q_R^\tau} b |u_{12}|^2 \zeta^s \eta^{r-1} dx dt \leq \varepsilon_1 \iint_{Q_R^\tau} |u_{12}|^{q(x)} \zeta^s \eta^r dx dt + \\ + \varepsilon_1^{-2/(q_b^- - 2)} \iint_{Q_R^\tau} b^{q(x)/(q(x)-2)} \zeta^s \eta^{r-q(x)/(q(x)-2)} dx dt, \end{aligned} \quad (17)$$

де $\varepsilon_1 \in (0, 1)$ – довільне число.

Аналогічно на підставі нерівності (11), врахувавши оцінку $|\zeta_{x_i}(x')| \leq 2$ ($i = \overline{1, k}$) для довільних $x' \in \mathbb{R}^k$, отримуємо

$$\begin{aligned} \iint_{Q_R^\tau} \sum_{i=1}^k |a_{i,12}| |u_{12}| |\zeta_{x_i}| \zeta^{s-1} \eta^r dx dt &\leq 2\varepsilon_2 \iint_{Q_R^\tau} \sum_{i=1}^k |a_{i,12}|^{p_i^*(x)} \zeta^s \eta^r dx dt + \\ &+ 2\varepsilon_2 k \iint_{Q_R^\tau} |u_{12}|^{q(x)} \zeta^s \eta^r dx dt + 2\varepsilon_2^{1-r_i^+} \iint_{Q_R^\tau} \sum_{i=1}^k \zeta^{s-r_i(x)} \eta^r dx dt, \end{aligned} \quad (18)$$

де $\varepsilon_2 \in (0, 1)$ – довільне число.

Згідно з умовою **A₅** маємо

$$\iint_{Q_R^\tau} \sum_{i=1}^k |a_{i,12}|^{p_i^*(x)} \zeta^s \eta^r dx dt \leq K_3 \iint_{Q_R^\tau} \left[\sum_{i=1}^k a_{i,12} (u_{12})_{x_i} + a_{0,12} u_{12} \right] \zeta^s \eta^r dx dt. \quad (19)$$

На підставі нерівності (10) та умов на q одержуємо

$$\left| \iint_{Q_R^\tau} f_{12} u_{12} \zeta^s \eta^r dx dt \right| \leq \varepsilon_3 \iint_{Q_R^\tau} |u_{12}|^{q(x)} \zeta^s \eta^r dx dt + \varepsilon_3^{-1} \iint_{Q_R^\tau} |f_{12}|^{q^*(x)} \zeta^s \eta^r dx dt, \quad (20)$$

де $\varepsilon_3 \in (0, 1)$ – довільне число.

З (15) на підставі (16)-(20) за достатньо малих значень $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ отримуємо

$$\begin{aligned} \eta^r(\tau) \int_{\Omega_R} b(x) |u_{12}(x, \tau)|^2 \zeta^s(x) dx + \iint_{Q_R^\tau} \left\{ \sum_{i=1}^n a_{i,12} (u_{12})_{x_i} + a_{0,12} u_{12} + |u_{12}|^{q(x)} \right\} \zeta^s \eta^r dx dt &\leq \\ &\leq C_3 \left[\iint_{Q_R^\tau} \sum_{i=1}^k \zeta^{s-r_i(x)} \eta^r dx dt + \iint_{Q_R^\tau} b^{q(x)/(q(x)-2)} \zeta^s \eta^{r-q(x)/(q(x)-2)} dx dt + \right. \\ &\quad \left. + \iint_{Q_R^\tau} |f_{12}|^{q^*(x)} \zeta^s \eta^r dx dt \right], \end{aligned} \quad (21)$$

де C_3 – додатна стала, яка залежить тільки від K_1, K_3, r_i^+ ($i = \overline{1, k}$), q_b^- , а $\tau \in [-R, 0]$ – довільне число.

Зауважимо, що $0 \leq \zeta(x') \leq R$, коли $x' \in \mathbb{R}^k$, $\zeta(x') \geq R - R_0$ при $|x'| \leq R_0$, $0 \leq \eta(t) \leq R$, коли $t \leq 0$, $\eta(t) \geq R - R_0$ при $R_0 \leq t \leq 0$, де $R_0 \in (0, R)$ – яке-небудь число. Враховуючи це, а також умови (6), (7) та те, що $R \geq 1$, з (21) отримуємо потрібне твердження. $\square$

Наслідок 1. Нехай $a \in \mathbb{A}_p^*$ і функції $\tilde{u} \in \mathbb{U}_{p,loc}$, $f \in \mathbb{F}_{p,loc}$ такі, що для деякого числа $R > 1$ виконується рівність (5) з $u = \tilde{u}$ для будь-яких $\psi \in W_{p(\cdot),c}^1(\Omega, \Gamma_0)$, $\text{supp } \psi \subset \subset \overline{\Omega_R}$, $\varphi \in C_0^1(-R, 0)$. Тоді для будь-якого числа $R_0 \in (0, R)$ правильна нерівність (9) з $u = \tilde{u}$.

Доведення. Доведення цього твердження повторює доведення леми 2, якщо прийняти $u_1 := \tilde{u}$, $u_2 := 0$. У цьому разі треба замінити нерівність (20) на нерівність

$$\left| \iint_{Q_R^-} f \tilde{u} \zeta^s \eta^r dx dt \right| \leq \varepsilon_3 \iint_{Q_R^-} |\tilde{u}|^{p_0(x)} \zeta^s \eta^r dx dt + \varepsilon_3^{-1} \iint_{Q_R^-} |f|^{p_0^*(x)} \zeta^s \eta^r dx dt,$$

де $\varepsilon_3 \in (0, 1)$ – довільне число, та використати умову **A**₄. $\square$

3. Доведення основного результату. *Перший етап (єдиність розв'язку).* Покажемо, що задача (1)-(3) має не більше одного узагальненого розв'язку. Припустимо протилежне. Нехай u_1 , u_2 – (різні) узагальнені розв'язки заданої задачі. З леми 2 одержуємо

$$\iint_{Q_{R_0}} |u_1(x, t) - u_2(x, t)|^{q(x)} dx dt \leq C_2 \left(\frac{R}{R - R_0} \right)^\mu \left\{ R^{\alpha+1-\theta} + \varkappa R^{\beta+1-q_b^+/(q_b^+-2)} \right\}, \quad (22)$$

де R_0 , R – довільні числа такі, що $0 < R_0 < R$, $R \geq 1$, та $\alpha + 1 - \theta < 0$, $\beta + 1 - q_b^+/(q_b^+ - 2) < 0$.

Зафіксуємо $R_0 > 0$ і перейдемо в (22) до границі при $R \rightarrow +\infty$. У підсумку отримаємо, що $u_1 = u_2$ на Q_{R_0} . Оскільки $R_0 > 0$ – довільне число, то звідси одержуємо, що $u_1 = u_2$ майже всюди на Q .

Другий етап (наближення розв'язку). Нехай $R > 0$ – довільне число. Позначимо $\Gamma_{0,R} := \partial\Omega_R \setminus \Gamma_1$, $\Gamma_{1,R} := \partial\Omega_R \setminus \Gamma_{0,R}$. Під $W_{p(\cdot)}^1(\Omega_R, \Gamma_{0,R})$ розумітимемо замикання простору $C^1(\overline{\Omega_R}, \Gamma_{0,R}) := \{v \in C^1(\overline{\Omega_R}) \mid v|_{\Gamma_{0,R}} = 0\}$ за нормою $\|v\|_{W_{p(\cdot)}^1(\Omega_R)} := \sum_{i=1}^n \|v_{x_i}\|_{L_{p_i(\cdot)}(\Omega_R)} + \|v\|_{L_{p_0(\cdot)}(\Omega_R)}$. Введемо в розгляд також простір $U_R := \{w \in (-R, 0) \rightarrow W_{p(\cdot)}^1(\Omega_R, \Gamma_{0,R}) \mid w \in L_{p_0(\cdot)}(Q_R), w_{x_i} \in L_{p_i(\cdot)}(Q_R) \ (i = \overline{1, n}), b^{1/2}w \in C([-R, 0]; L_2(\Omega_R))\}$ з нормою

$$\|w\|_{U_R} := \sum_{i=1}^n \|w_{x_i}\|_{L_{p_i(\cdot)}(Q_R)} + \|w\|_{L_{p_0(\cdot)}(Q_R)} + \max_{t \in [-R, 0]} \|b^{1/2}(\cdot)w(\cdot, t)\|_{L_2(\Omega_R)}.$$

Для кожного $l \in \mathbb{N}$ розглянемо задачу: знайти функцію $u_l \in U_l$, яка задовольняє інтегральну рівність

$$\iint_{Q_R} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, t, u_l, \nabla u_l) \psi_{x_i} \varphi + a_0(x, t, u_l, \nabla u_l) \psi \varphi - b(x) u_l \psi \varphi' \right\} dx dt = \iint_{Q_R} f \psi \varphi dx dt \quad (23)$$

для будь-яких $\psi \in W_{p(\cdot)}^1(\Omega_R, \Gamma_{0,R})$, $\varphi \in C_0^1(-R, 0)$.

Доведення існування розв'язку $u_l \in U_l$ цієї задачі проводимо методом Гальоркіна з використанням методу параболічної регуляризації (див., наприклад, [5, 11, 10]). Єдиність функції u_l впливає з умови **A**₃.

Третій етап (збіжність послідовності наближень розв'язку). Для кожного $l \in \mathbb{N}$ функцію u_l продовжимо нулем на Q , залишивши за цим продовженням позначення u_l . Очевидно, що $u_l \in \mathbb{U}_{p, \text{loc}}$. Покажемо, що послідовність $\{u_l\}_{l=1}^\infty$ містить підпослідовність, яка збігається в певному сенсі до розв'язку задачі (1)-(3).

Нехай l і m – довільні натуральні числа, причому $1 < l < m$, R_0, R – будь-які дійсні числа такі, що $0 < R_0 < R \leq l - 1$, $R \geq 1$. Тоді з леми 2 отримаємо

$$\begin{aligned} & \max_{t \in [-R_0, 0]} \int_{\Omega_{R_0}} b(x) |u_l(x, t) - u_m(x, t)|^2 dx + \iint_{Q_{R_0}} |u_l(x, t) - u_m(x, t)|^{q(x)} dx dt \leq \\ & \leq C_2 \left(R / (R - R_0) \right)^\mu \left\{ R^{\alpha+1-\theta} + \varkappa R^{\beta+1-q_b^+/(q_b^+-2)} \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Нехай $\varepsilon > 0$ – яке-небудь число. Зафіксуємо довільно вибране значення $R_0 > 0$ і виберемо $R > \max\{1; R_0\}$ настільки великим, щоби права частина нерівності (24) була меншою за ε . Це можна зробити, оскільки показники степенів R в правій частині нерівності (24) від’ємні. Тоді для будь-яких $l \geq R + 1$ і $m > l$ ліва частина нерівності (24) менша за ε . Це означає, що послідовності $\{u_l|_{Q_{R_0}}\}_{l=1}^\infty$, $\{b^{1/2}u_l|_{Q_{R_0}}\}_{l=1}^\infty$ є фундаментальними відповідно в $L_{q(\cdot)}(Q_{R_0})$ і $C([-R_0, 0]; L^2(\Omega_{R_0}))$. Оскільки $R_0 > 0$ – довільне число, то звідси випливає існування функції $u \in L_{q(\cdot), \text{loc}}(\overline{Q})$ такої, що $b^{1/2}u \in C(S; L_{2, \text{loc}}(\overline{\Omega}))$ і

$$u_l \xrightarrow[l \rightarrow \infty]{} u \quad \text{сильно в } L_{q(\cdot), \text{loc}}(\overline{Q}), \quad (25)$$

$$b^{1/2}u_l \xrightarrow[l \rightarrow \infty]{} b^{1/2}u \quad \text{в } C(S; L_{2, \text{loc}}(\overline{\Omega})). \quad (26)$$

Покажемо обмеженість послідовностей $\{u_l\}_{l=1}^\infty$, $\{u_{l,x_j}\}_{l=1}^\infty$ ($j = \overline{1, n}$), $\{a_i(u_l)\}_{l=1}^\infty$ ($i = \overline{0, n}$) відповідно в $L_{p_0(\cdot), \text{loc}}(\overline{Q})$, $L_{p_j(\cdot), \text{loc}}(\overline{Q})$ ($j = \overline{1, n}$), $L_{p_i^*(\cdot), \text{loc}}(\overline{Q})$ ($i = \overline{0, n}$). Справді, нехай R_0 – будь-яке дійсне число, а $R := R_0 + 1$. На підставі наслідку з леми 2 для довільного натурального числа $l > R + 1$ отримаємо

$$\iint_{Q_{R_0}} \left[\sum_{i=1}^n |u_{l,x_i}(x, t)|^{p_i(x)} + |u_l(x, t)|^{p_0(x)} \right] dx dt \leq C_4(R_0), \quad (27)$$

де $C_4(R_0) > 0$ – деяка стала, яка від l не залежить.

Згідно з умовою **A**₂ та оцінкою (27) для кожного $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ отримаємо

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_{R_0}} |a_i(x, t, u_l, \nabla u_l)|^{p_i^*(x)} dx dt \leq C_5 \iint_{Q_R} \left[\sum_{j=1}^n |u_{l,x_j}(x, t)|^{p_j(x)} + |u_l(x, t)|^{p_0(x)} \right] dx dt + \\ & + C_6 \iint_{Q_R} |h_{2,i}^a(x, t)|^{p_i^*(x)} dx dt < C_7(R_0), \end{aligned} \quad (28)$$

де C_5, C_6, C_7 – деякі додатні сталі, які від l не залежать.

З (25), (27), (28), використовуючи рефлексивність просторів $L_{p_i^*(\cdot)}(Q_{R_0})$ ($i = \overline{0, n}$) для довільного $R_0 > 0$, отримаємо існування підпослідовності послідовності $\{u_l\}_{l=1}^\infty$, за якою залишимо те саме позначення, та функцій $\chi_i \in L_{p_i^*(\cdot), \text{loc}}(\overline{Q})$ ($i = \overline{0, n}$) таких, що

$$u_l \xrightarrow[l \rightarrow \infty]{} u \quad \text{слабо в } L_{p_0(\cdot), \text{loc}}(\overline{Q}), \quad u_{l,x_i} \xrightarrow[l \rightarrow \infty]{} u_{x_i} \quad \text{слабо в } L_{p_i(\cdot), \text{loc}}(\overline{Q}), \quad (29)$$

$$a_i(\cdot, \cdot, u_l(\cdot, \cdot), \nabla u_l(\cdot, \cdot)) \xrightarrow[l \rightarrow \infty]{} \chi_i(\cdot, \cdot) \quad \text{слабо в } L_{p_i^*(\cdot), \text{loc}}(\overline{Q}), \quad i = \overline{0, n}. \quad (30)$$

Залишилося довести, що

$$\chi_i(\cdot, \cdot) = a_i(\cdot, \cdot, u(\cdot, \cdot), \nabla u(\cdot, \cdot)), \quad i = \overline{0, n}. \quad (31)$$

Четвертий етап (правильність рівностей (31)). Використаємо метод монотонності [10]. Нехай $v \in L_{p_0(\cdot), \text{loc}}(\overline{Q})$ – довільна функція така, що $v_{x_i} \in L_{p_i(\cdot), \text{loc}}(\overline{Q})$ ($i = \overline{1, n}$), а $w(x')$, $x' = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, – невід'ємна, неперервно диференційовна функція з обмеженим носієм і $\theta \in C_0^1(-\infty, 0), \theta \geq 0$.

На підставі умови **A₃** для всіх $l \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$\iint_Q \left[\sum_{i=1}^n (a_i(u_l) - a_i(v))(u_{l,x_i} - v_{x_i}) + (a_0(u_l) - a_0(v))(u_l - v) \right] w \theta \, dx dt \geq 0, \quad (32)$$

де тут і далі використовується позначення: $a_i(v) := a_i(x, t, v, \nabla v)$ ($i = \overline{0, n}$). Тоді

$$\begin{aligned} & \iint_Q \left[\sum_{i=1}^n a_i(u_l) u_{l,x_i} + a_0(u_l) u_l \right] w \theta \, dx dt - \\ & - \iint_Q \left[\sum_{i=1}^n (a_i(u_l) v_{x_i} + a_i(v)(u_{l,x_i} - v_{x_i})) + a_0(u_l) v + a_0(v)(u_l - v) \right] w \theta \, dx dt \geq 0 \end{aligned} \quad (33)$$

для всіх $l \in \mathbb{N}$. За означенням функції u_l ($l \in \mathbb{N}$) одержимо

$$\iint_Q \left[\sum_{i=1}^n a_i(u_l) \psi_{x_i} \varphi + (a_0(u_l) - f) \psi \varphi - b u_l \psi \varphi' \right] dx dt = 0 \quad (34)$$

для довільних $\psi \in W_{p(\cdot), c}^1(\Omega, \Gamma_0)$, $\text{supp } \psi \subset \overline{\Omega}_l$, $\varphi \in C_0^1(-l, 0)$.

Нехай m таке, що $\text{supp } w \subset \{x' \mid |x'| \leq m\}$, $\text{supp } \theta \subset [-m, 0]$. На підставі леми 1 з тотожності (34) при $l > m$ отримаємо

$$\begin{aligned} & \iint_Q \left[\sum_{i=1}^n a_i(u_l) u_{l,x_i} + a_0(u_l) u_l \right] w \theta \, dx dt = \frac{1}{2} \iint_Q b |u_l|^2 w \theta' \, dx dt - \\ & - \iint_Q \left[\sum_{i=1}^k a_i(u_l) u_l w_{x_i} - f u_l w \right] \theta \, dx dt. \end{aligned} \quad (35)$$

З (33) та (35) одержимо

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \iint_Q b |u_l|^2 w \theta' \, dx dt - \iint_Q \left[\sum_{i=1}^k a_i(u_l) u_l w_{x_i} - f u_l w \right] \theta \, dx dt - \\ & - \iint_Q \left[\sum_{i=1}^n (a_i(u_l) v_{x_i} + a_i(v)(u_{l,x_i} - v_{x_i})) + a_0(u_l) v + a_0(v)(u_l - v) \right] w \theta \, dx dt \geq 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Перейдемо в (36) до границі при $l \rightarrow \infty$. На підставі (25), (29), (30) і того, що $L_{q(\cdot)}(G) \subset L_2(G) \subset L_{p_i(\cdot)}(G)$ для будь-яких $i \in \{1, \dots, k\}$ та довільної обмеженої області G в $\mathbb{R}^{n+1}$, отримаємо

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \iint_Q b|u|^2 w \theta' dxdt - \iint_Q \left[\sum_{i=1}^k \chi_i u w_{x_i} - f u w \right] dxdt - \\ & - \iint_Q \left[\sum_{i=1}^n (\chi_i v_{x_i} + a_i(v)(u_{x_i} - v_{x_i})) + \chi_0 v + a_0(v)(u - v) \right] w \theta dxdt \geq 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Тепер в (34) перейдемо до границі при $l \rightarrow \infty$. На підставі (29), (30) отримаємо

$$\iint_Q \left[\sum_{i=1}^n \chi_i \psi_{x_i} \varphi + (\chi_0 - f) \psi \varphi - b u \psi \varphi' \right] dxdt = 0 \quad (38)$$

для довільних $\psi \in W_{p(\cdot),c}^1(\Omega, \Gamma_0)$, $\varphi \in C_0^1(-\infty, 0)$. Звідси на підставі леми 1 одержуємо

$$\iint_Q \left[\sum_{i=1}^n \chi_i u_{x_i} + \chi_0 u \right] w \theta dxdt = \frac{1}{2} \iint_Q b|u|^2 w \theta' dxdt - \iint_Q \left[\sum_{i=1}^k \chi_i u w_{x_i} - f u w \right] \theta dxdt. \quad (39)$$

З (37) та (39) отримаємо

$$\begin{aligned} & \iint_Q \left[\sum_{i=1}^n \chi_i u_{x_i} + \chi_0 u \right] w \theta dxdt - \\ & - \iint_Q \left[\sum_{i=1}^n (\chi_i v_{x_i} + a_i(v)(u_{x_i} - v_{x_i})) + \chi_0 v + a_0(v)(u - v) \right] w \theta dxdt \geq 0, \end{aligned}$$

тобто

$$\iint_Q \left[\sum_{i=1}^n (\chi_i - a_i(v))(u_{x_i} - v_{x_i}) + (\chi_0 - a_0(v))(u - v) \right] w \theta dxdt \geq 0. \quad (40)$$

Візьмемо в (40) $v = u - \lambda g$, де $\lambda > 0$ – довільне число, $g \in L_{p_0(\cdot), \text{loc}}(\overline{Q})$ – будь-яка функція така, що $g_{x_i} \in L_{p_i(\cdot), \text{loc}}(\overline{Q})$ ($i = \overline{1, n}$). У підсумку після ділення на λ і врахування довільності функції g одержуємо

$$\iint_Q \left[\sum_{i=1}^n (\chi_i - a_i(u - \lambda g)) g_{x_i} + (\chi_0 - a_0(u - \lambda g)) g \right] w \theta dxdt = 0. \quad (41)$$

В цій рівності спрямуємо λ до 0

$$\iint_Q \left\{ \sum_{i=1}^n (a_i(u) - \chi_i) g_{x_i} + (a_0(u) - \chi_0) g \right\} w \theta dxdt = 0. \quad (42)$$

Тепер приймемо в (42) спочатку $g(x, t) = 1$, а потім $g(x, t) = x_i$ для кожного $i \in \{1, \dots, n\}$. Внаслідок отримаємо

$$\iint_Q (a_0(u) - \chi_0) w \theta \, dx dt = 0, \quad \iint_Q (a_i(u) - \chi_i) w \theta \, dx dt = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (43)$$

Оскільки рівності (43) виконуються для довільних неперервно-диференційовних невід'ємних фінітних функцій w, θ , то правильними є рівності (31).

П'ятий етап (завершення доведення теореми 1). З (38), врахувавши (31), отримаємо інтегральну тотожність (5) для функції u , звідки, зокрема, на підставі леми 1 маємо, що $b^{1/2}u \in C(S; L_{2, \text{loc}}(\Omega))$. Отже, функція u належить $\mathbb{U}_{p, \text{loc}}$ і задовольняє інтегральну тотожність (5), тобто є узагальненим розв'язком задачі (1)-(3). $\square$

-
1. Бокало Н.М. Энергетические оценки решений и однозначная разрешимость задачи Фурье для линейных и квазилинейных параболических уравнений / Бокало Н.М. // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30, №8. – С. 1325-1334.
 2. Бокало М.М. Про коректність крайових задач для квазілінійних еліптичних систем в необмежених областях / Бокало М.М., Кушнір О.В. // Мат. студії. – 2005. – Т. 24, №1. – С. 69-82.
 3. Бокало М.М. Про коректність задачі Фур'є для нелінійних параболических рівнянь вищих порядків зі змінними показниками нелінійності / Бокало М.М., Паучок І.Б. // Мат. студії. – 2006. – Т. 24, №1. – С. 25-48.
 4. Bokalo M. On well-posedness of boundary problems for elliptic equations in general anisotropic Lebesgue-Sobolev spaces / Bokalo M., Domanska O. // Math. studii. – 2007. – Vol. 28, №1. – P. 77-91.
 5. Бугрій О.М. Мішана задача для параболического рівняння, яке узагальнює рівняння політропної фільтрації / Бугрій О.М., Лавренко С.П. // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 56. – С. 33-43.
 6. Бугрій О.М. Задача з початковою умовою для нелінійної параболическої варіаційної нерівності в необмеженій за просторовими змінними області / Бугрій О.М. // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2007. – Вип. 67. – С. 30-52.
 7. Доманська О.В. Нелінійні еліптичні рівняння в квазіциліндричних областях / Доманська О.В. // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2007. – Вип. 67. – С. 104-118.
 8. Медвідь І. Задачі для нелінійних еліптичних і параболических рівнянь в анізотропних просторах / Медвідь І. // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 149-166.
 9. Ладыженская О.А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / Ладыженская О.А., Уралъцева Н.Н. – М., 1964.
 10. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Лионс Ж.-Л. – М., 1972.
 11. Самохин В.Н. Об одном классе уравнений, обобщающих уравнения политропной фильтрации / Самохин В.Н. // Дифференциальные уравнения. – 1996. – Т. 32, №5. – С. 643-651.
 12. Шишков А.Е. Разрешимость граничных задач для квазилинейных эллиптических и параболических уравнений в неограниченных областях в классах функций, растущих на бесконечности / Шишков А.Е. // Укр. мат. журн. – 1995. – Т. 47, №2. – С. 277-289.
 13. Boccardo L. Nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^n$ without growth restrictions on the data / Boccardo L., Gallouët T., Vázquez J. L. // J. Differential Equations. – 1993. – Vol. 105, №2. – P. 334-363.

14. *Brézis H.* Semilinear equations in $\mathbb{R}^N$ without condition at infinity / *Brézis H.* // Appl. Math. Optim. – 1984. – Vol. 12, №3. – P. 271-282.
15. *Bernis F.* Elliptic and parabolic semilinear problems without conditions at infinity / *Bernis F.* // Arch. Rational Mech. Anal. – 1989. – Vol. 106, №3. – P. 217-241.
16. *Gladkov A.* Diffusion-absorption equation without growth restrictions on the data at infinity / *Gladkov A., Guedda M.* // J. Math. Anal. Appl. – 2002. – Vol. 269, №. 1. – P. 16-37.
17. *Kováčik O.* On spaces $L^{p(x)}(Q)$ and $W^{1,p(x)}$ / *Kováčik O., Rákosník J.* // Czechosl. Math. J. – 1991. – Vol. 41, №4. – P. 592-618.
18. *Růžička M.* Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory / *Růžička M.* – Berlin: Springer-Verl., 2000.

UNIQUE SOLVABILITY OF PROBLEM WITHOUT INITIAL CONDITIONS FOR STRONGLY NONLINEAR ELLIPTIC-PARABOLIC EQUATIONS

Mykola BOKALO

*Ivan Franko National University of L'viv,
79000 L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: mm.bokalo@gmail.com*

Existence and uniqueness of weak solutions of a problem without initial conditions for second order nonlinear anisotropic elliptic-parabolic equations in spatial unbounded domains are obtained. Nonlinearity exponents of the equations depends on the points of domains and differentiation direction. The weak solutions are from Lebesgue-Sobolev spaces. There are no restrictions for solutions and initial data at infinity.

Key words: nonlinear equation, elliptic-parabolic equation, degenerate parabolic equations, problem without initial condition, generalized Lebesgue-Sobolev space, unbounded domain.

ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ БЕЗ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Николай БОКАЛО

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000 Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: mm.bokalo@gmail.com*

Получены условия существования единственного обобщённого решения задачи без начальных условий для нелинейных анизотропных эллиптико-параболических уравнений второго порядка в неограниченных по пространственным переменным областях. Уравнения имеют показатели нелинейности, зависящие от точек области определения уравнений и направления дифференцирования, а их обобщённые решения берутся из обобщённых анизотропных пространств Лебега-Соболева. При этом не налагаются условия на поведение решений и возрастание исходных данных на бесконечности.

Ключевые слова: нелинейное уравнение, эллиптико-параболическое уравнение, обобщённое параболическое уравнение, задача без начальных условий, обобщённое анизотропное пространство Лебега-Соболева, неограниченная область.

Стаття надійшла до редколегії 10.09.2010

Прийнята до друку 22.12.2010

УДК 519.21

ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМ $M^{\theta}/G/1/m$ ТА $M^{\theta}/G/1$ З ГРУПОВИМ НАДХОДЖЕННЯМ ЗАМОВЛЕНЬ І ПОРОГОВИМ БЛОКУВАННЯМ ВХІДНОГО ПОТОКУ

Микола БРАТІЙЧУК¹, Юрій ЖЕРНОВИЙ²

¹Шльонський політехнічний університет,
44-100 Глівіце, вул. Кашубська, 23,

²Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000 Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: yu_zhernovyi@yahoo.com

Досліджено систему обслуговування типу $M^{\theta}/G/1/m$ з груповим надходженням замовлень і пороговим блокуванням вхідного потоку. Блокування потоку замовлень відбувається, якщо в момент початку обслуговування чергового замовлення кількість замовлень у системі перевищує заданий пороговий рівень h . Знайдено перетворення Лапласа для розподілу кількості замовлень у системі під час періоду зайнятості і для функції розподілу періоду зайнятості; визначено середню тривалість періоду зайнятості, отримано формули для ергодичного розподілу кількості замовлень у системі. Запропоновано ефективний алгоритм обчислення ергодичного розподілу, рекурентні співвідношення якого явно не залежать від m .

Ключові слова: системи $M^{\theta}/G/1/m$ і $M^{\theta}/G/1$, блокування вхідного потоку, період зайнятості, ергодичний розподіл.

1. Вступ. Розглянемо систему масового обслуговування (СМО) $M^{\theta}/G/1/m$, яку формально опишемо так. Нехай задано послідовності випадкових величин $\{\alpha_n\}$, $\{\theta_n\}$, $\{\beta_n\}$ ($n \geq 1$), де α_n – час між надходженням $(n-1)$ -ї і n -ї групи замовлень, $\{\theta_n\}$ – кількість замовлень в n -й групі, а $\{\beta_n\}$ – час обслуговування n -го замовлення. Всі наведені вище величини незалежні, причому $\mathbf{P}\{\alpha_n < x\} = 1 - e^{-\lambda x}$ ($\lambda > 0$), $\mathbf{P}\{\theta_n = i\} = a_i$ ($i \geq 1$), і $\mathbf{P}\{\beta_n < x\} = F(x)$ ($x \geq 0$), $F(0) = 0$. Якщо $\mathbf{P}\{\theta_n = 1\} = a_1 = 1$, то замовлення в систему надходять по одному.

Замовлення обслуговуються по одному, обслужене замовлення покидає систему, а обслуговуючий пристрій негайно починає обслуговувати замовлення з черги за

її наявності або чекає надходження чергової групи замовлень. Застосовують дисципліну обслуговування FIFO. Черга всередині однієї групи замовлень може бути організована довільно.

Нехай m – максимальна кількість замовлень, які одночасно можуть перебувати у черзі. Отже, якщо в систему, в якій вже є $k \in [0, m+1]$ замовлень, надходить група кількістю θ_n замовлень, то лише $\min\{\theta_n, m+1-k\}$ з них приєднуються до черги, а решта втрачаються.

Позначимо через $\xi(t)$ кількість замовлень у системі в момент часу t і введемо для нашої системи $M^\theta/G/1/m$ так званий пороговий рівень h . Якщо t – момент початку обслуговування чергового замовлення і $\xi(t) > h$ ($h = \overline{1, m-1}$), то під час обслуговування цього замовлення відбувається блокування вхідного потоку замовлень (вони не допускаються на вхід системи). Процес надходження замовлень відновлюється в момент t початку обслуговування чергового замовлення, для якого $\xi(t) \leq h$. Описану СМО позначимо через $M_h^\theta/G/1/m$.

Мета нашої праці – вивчити за допомогою методу потенціалу В. С. Королюка [1, 2] головних функціоналів від процесу обслуговування системи $M_h^\theta/G/1/m$ (періоду зайнятості, розподілу кількості замовлень у системі) і побудувати ефективні обчислювальні алгоритми для визначення стаціонарного розподілу кількості замовлень, враховуючи і випадок відсутності обмежень на довжину черги ($m = \infty$).

Більшість авторів розглядають системи $M/G/1/m$, що зумовлено специфікою методів, які вони використовують. У випадку надходження замовлень по одному вхідний потік є звичайним пуассонівським процесом, а у випадку групового надходження цей процес стає узагальненим пуассонівським, що значно ускладнює дослідження з погляду аналітики. В 1974 р. В. С. Королюк [1] запропонував новий підхід до вивчення функціоналів, пов'язаних з флуктуаціями напівнеперервного узагальненого процесу Пуассона, який у його монографії [2] був перенесений і на випадок неперервних знизу випадкових блукань. У працях його учнів (Братійчука А. М. [3], Хусанова М. [4], Пирджанова Б. [5]) цей підхід успішно застосували до аналізу систем типу $M/G/1$ як з необмеженою, так і з обмеженою чергою, а в працях [6, 7] – до дослідження систем $M^\theta/G/1/m$.

Системи $M^\theta/G/1/m$ з блокуванням вхідного потоку мало вивчені в літературі. Нам відомі лише статті А. М. Братійчука [8-10], в яких методом потенціалу досліджено системи з так званим відновлюючим рівнем вхідного потоку. Коли довжина черги в такій системі досягає рівня m , процес надходження замовлень блокується і відновлюється лише тоді, коли кількість замовлень досягне певного рівня $h \in [1, m]$. У випадку, коли $\theta = 1$ (замовлення надходять по одному), такі системи вперше розглянуто в [11, 12]. Застосування блокування вхідного потоку в системах обслуговування можна пояснити намаганням зменшити кількість втрачених замовлень, користуючись таким правилом: “краще наперед попередити про переповнення системи, ніж прийняти замовлення і втратити його”.

2. Основні позначення і допоміжні результати. Позначимо через M_n (P_n) умовне математичне сподівання (умовну ймовірність) за умови, що в початковий момент часу в системі перебуває $n \geq 0$ замовлень, і через M (P) умовне математичне сподівання (умовну ймовірність) за умови, що система починає працювати в момент

надходження першої групи замовлень. Далі будемо використовувати такі позначення: $\eta(x)$ – кількість замовлень, які надійшли в систему на проміжку часу $[0; x)$; β_j – час обслуговування j -го замовлення; a_i^{k*} – k -кратна згортка послідовності a_i ; $a(s, z) = s + \lambda(1 - \alpha(z))$; $\rho_k(m)$ – ергодичний розподіл кількості замовлень у системі. Нехай

$$\begin{aligned} f(s) &= \int_0^\infty e^{-sx} dF(x), \quad m_1 = \int_0^\infty x dF(x) < \infty, \quad b_1 = \sum_{k=1}^\infty k a_k < \infty; \\ \bar{F}(x) &= 1 - F(x), \quad \alpha(z) = \sum_{k=0}^\infty z^k a_k; \quad \bar{a}_n = \sum_{k=n}^\infty a_k, \\ \bar{p}_n(s) &= \sum_{k=n}^\infty p_k(s), \quad \bar{q}_n(s) = \sum_{k=n}^\infty q_k(s), \quad \sum_{k=1}^0 b_k = 0. \end{aligned}$$

Для $\operatorname{Re} s \geq 0$ визначимо послідовності $p_i(s)$ ($i = -1, 0, 1, \dots$) і $q_i(s)$ ($i = 0, 1, \dots$) за допомогою співвідношень

$$\sum_{i=-1}^\infty z^i p_i(s) = \frac{f(a(s, z))}{z f(s)}, \quad \sum_{i=0}^\infty z^i q_i(s) = \frac{1 - f(a(s, z))}{a(s, z)}. \quad (1)$$

Легко показати, що

$$\begin{aligned} p_i(s) &= \frac{1}{f(s)} \sum_{k=0}^{i+1} a_{i+1}^{k*} \int_0^\infty e^{-(\lambda+s)x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} dF(x) \quad (i = -1, 0, 1, \dots); \\ q_i(s) &= \int_0^\infty e^{-sx} \mathbf{P}\{\eta(x) = i\} \bar{F}(x) dx = \sum_{k=0}^i a_i^{k*} \int_0^\infty e^{-(\lambda+s)x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \bar{F}(x) dx. \end{aligned} \quad (2)$$

Далі будемо використовувати функцію $R_k(s)$, визначену за допомогою рівності

$$\sum_{k=1}^\infty z^k R_k(s) = \frac{z}{f(a(s, z)) - z}, \quad |z| < \nu_-(s), \quad (3)$$

де $\nu_-(s)$ – єдиний корінь рівняння $f(a(s, z)) = z$ на проміжку $[0; 1]$.

Позначимо $\rho = \lambda m_1 b_1$, $\nu_- = \lim_{s \rightarrow +0, \rho > 1} \nu_-(s)$;

$$p_i = \lim_{s \rightarrow +0} p_i(s), \quad R_i = \lim_{s \rightarrow +0} R_i(s), \quad q_i = \lim_{s \rightarrow +0} q_i(s). \quad (4)$$

Тоді з рівностей (1)–(3) одержуємо

$$\begin{aligned} \sum_{i=-1}^{\infty} z^i p_i &= \frac{f(\lambda(1-\alpha(z)))}{z}; \quad p_i = \sum_{k=0}^{i+1} a_{i+1}^{k*} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} dF(x) \quad (i = -1, 0, 1, \dots); \\ \sum_{k=1}^{\infty} z^k R_k &= \frac{z}{f(\lambda(1-\alpha(z))) - z}, \quad |z| < \min\{1, \nu_-\}; \\ \sum_{i=0}^{\infty} z^i q_i &= \frac{1 - f(\lambda(1-\alpha(z)))}{\lambda(1-\alpha(z))}, \quad q_i = \sum_{k=0}^i a_{i+1}^{k*} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \bar{F}(x) dx, \quad \sum_{k=0}^{\infty} q_k = m_1. \end{aligned}$$

3. Розподіл кількості замовлень у системі під час періоду зайнятості.

Нехай $\tau(m) = \inf\{t \geq 0 : \xi(t) = 0\}$ позначає перший період зайнятості для системи $M_h^0/G/1/m$, і

$$\varphi_n(t, k) = \mathbf{P}_n\{\xi(t) = k, \tau(m) > t\} \quad (1 \leq n, k \leq m+1),$$

$$\Phi_n(s, k) = \int_0^{\infty} e^{-st} \varphi_n(t, k) dt, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

Очевидно, що $\varphi_0(t, k) = 0$. Використовуючи формулу повної ймовірності, для $1 \leq n \leq h$ одержимо

$$\begin{aligned} \varphi_n(t, k) &= \sum_{j=0}^{m-n} \int_0^t \mathbf{P}\{\eta(x) = j\} \varphi_{n+j-1}(t-x, k) dF(x) + \\ &+ \int_0^t \mathbf{P}\{\eta(x) \geq m+1-n\} \varphi_m(t-x, k) dF(x) + \\ &+ (P\{\eta(t) = k-n\} + I\{k = m+1\} \mathbf{P}\{\eta(t) \geq m+2-n\}) \bar{F}(t). \end{aligned} \quad (5)$$

Тут $I\{A\}$ дорівнює 1 або 0, залежно від того, відбулась подія A чи ні.

Для $h+1 \leq n \leq m+1$ формула повної ймовірності дає таке співвідношення:

$$\begin{aligned} \varphi_n(t, k) &= \int_0^t \mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^{n-h} \beta_i \in dx\right\} \varphi_h(t-x, k) + \\ &+ I\{h+1 \leq k \leq n-1\} \int_0^t \mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^{n-k} \beta_i \in dx\right\} \bar{F}(t-x) + I\{k = n\} \bar{F}(t). \end{aligned} \quad (6)$$

Перейдемо в (5) і (6) до перетворень Лапласа. Враховуючи співвідношення (2), одержимо рівняння для визначення функцій $\Phi_n(s, k)$

$$\begin{aligned} \Phi_n(s, k) &= f(s) \sum_{j=0}^{m-n} p_{j-1}(s) \Phi_{n+j-1}(s, k) + f(s) \bar{p}_{m-n}(s) \Phi_m(s, k) + \\ &+ q_{k-n}(s) + I\{k = m+1\} \bar{q}_{m+2-n}(s), \quad 1 \leq n \leq h, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}\Phi_n(s, k) &= f^{n-h}(s)\Phi_h(s, k) + \\ &+ I\{h+1 \leq k \leq n\}f^{n-k}(s)\frac{1-f(s)}{s}, \quad h+1 \leq n \leq m+1\end{aligned}\quad (8)$$

з граничною умовою

$$\Phi_0(s, k) = 0. \quad (9)$$

Виразивши з (8) $\Phi_m(s, k)$ і всі $\Phi_n(s, k)$ для $h+1 \leq n \leq m-1$ і підставивши їх у (7), отримаємо рівняння

$$\begin{aligned}\Phi_n(s, k) - f(s) \sum_{j=-1}^{h-n-1} p_j(s)\Phi_{n+j}(s, k) &= \\ = f(s)L_n(s)\Phi_h(s, k) + M_n(s, k), \quad 1 \leq n \leq h.\end{aligned}\quad (10)$$

Тут

$$\begin{aligned}L_n(s) &= f^{m-h}(s)\bar{p}_{m-n}(s) + \sum_{j=h}^{m-1} p_{j-n}(s)f^{j-h}(s); \\ M_n(s, k) &= q_{k-n}(s) + I\{k = m+1\}\bar{q}_{m+2-n}(s) + \\ &+ \left(I\{h+1 \leq k \leq m\}\bar{p}_{m-n}(s)f^{m+1-k}(s) + \right. \\ &\left. + \sum_{j=h+1}^{m-1} p_{j-n}(s)f^{j-k+1}(s)I\{h+1 \leq k \leq j\} \right) \frac{1-f(s)}{s}.\end{aligned}$$

Для розв'язків системи рівнянь (10), використовуючи результати з [6], одержимо зображення

$$\begin{aligned}\Phi_n(s, k) &= \left(1 + Q_{h+1-n}(s) - f(s) \sum_{i=1}^{h-n} R_i(s)L_{n+i}(s) \right) \Phi_h(s, k) - \\ &- \sum_{i=1}^{h-n} R_i(s)M_{n+i}(s, k), \quad 1 \leq n \leq h,\end{aligned}\quad (11)$$

де $Q_n(s) = \sum_{j=1}^{n-1} R_j(s)d_{n-j-1}(s)$, $d_k(s) = 1 - f(s) \sum_{i=-1}^{k-1} p_i(s)$.

За допомогою співвідношення (3) можна отримати рівність

$$f(s) \sum_{j=1}^n R_j(s)\bar{p}_{n-j}(s) = R_n(s) - (1-f(s)) \sum_{j=1}^n R_j(s) - 1, \quad n \geq 1. \quad (12)$$

Це співвідношення, а також рівність $d_k(s) = 1 - f(s) + f(s)\bar{p}_k(s)$ дають:

$$1 + Q_n(s) = 1 + (1-f(s)) \sum_{j=1}^{n-1} R_j(s) + f(s) \sum_{j=1}^{n-1} R_j(s)\bar{p}_{n-j-1}(s) = R_{n-1}(s).$$

Тепер співвідношення (11) можемо переписати так:

$$\Phi_n(s, k) = D_n(s)\Phi_h(s, k) - \sum_{i=1}^{h-n} R_i(s)M_{n+i}(s, k), \quad 1 \leq n \leq h, \quad (13)$$

де

$$D_n(s) = R_{h-n}(s) - f(s) \sum_{i=1}^{h-n} R_i(s)L_{n+i}(s), \quad n \geq 0. \quad (14)$$

Прийнявши в (13) $n = 0$, з граничної умови (9) одержимо

$$\Phi_h(s, k) = \frac{1}{D_0(s)} \sum_{i=1}^h R_i(s)M_i(s, k). \quad (15)$$

Отже, ми довели таку теорему.

Теорема 1. Для довільних $1 \leq k \leq m+1$ і $\operatorname{Re} s > 0$ правильні зображення:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-st} \mathbf{P}_n\{\xi(t) = k, \tau(m) > t\} dt &= \\ &= D_n(s)\Phi_h(s, k) - \sum_{i=1}^{h-n} R_i(s)M_{n+i}(s, k), \quad 1 \leq n \leq h; \\ \int_0^\infty e^{-st} \mathbf{P}_n\{\xi(t) = k, \tau(m) > t\} dt &= f^{n-h}(s)\Phi_h(s, k) + \\ &+ I\{h+1 \leq k \leq n\} f^{n-k}(s) \frac{1-f(s)}{s}, \quad h+1 \leq n \leq m, \end{aligned} \quad (16)$$

де функція $\Phi_h(s, k)$ визначена в (15), а $D_n(s)$ – в (14).

4. Період зайнятості та ергодичний розподіл. Якщо система починає працювати в момент надходження першої групи замовлень, то

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-st} \mathbf{P}\{\xi(t) = k, \tau(m) > t\} dt &= \sum_{n=1}^m a_n \int_0^\infty e^{-st} \mathbf{P}_n\{\xi(t) = k, \tau(m) > t\} dt + \\ &+ \bar{a}_{m+1} \int_0^\infty e^{-st} \mathbf{P}_{m+1}\{\xi(t) = k, \tau(m) > t\} dt = \\ &= \sum_{n=1}^m a_n \Phi_n(s, k) + \bar{a}_{m+1} \Phi_{m+1}(s, k). \end{aligned} \quad (17)$$

Вираз для $\Phi_{m+1}(s, k)$ можна отримати з рівності (8), прийнявши, що $n = m + 1$. Тепер, використовуючи співвідношення (16), можемо детально розписати праву частину (17)

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-st} \mathbf{P}\{\xi(t) = k, \tau(m) > t\} dt = \\ & = \left(\sum_{n=1}^{h-1} a_n D_n(s) + \sum_{n=h}^m a_n f^{n-h}(s) + \bar{a}_{m+1} f^{m-h+1}(s) \right) \Phi_h(s, k) - \\ & - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i(s) M_{n+i}(s, k) + \left(\sum_{n=h+1}^m a_n f^{n-k}(s) I\{h+1 \leq k \leq n\} + \right. \\ & \left. + \bar{a}_{m+1} f^{m-k+1}(s) I\{h+1 \leq k \leq m+1\} \right) \frac{1-f(s)}{s}. \end{aligned} \quad (18)$$

Щоб отримати зображення для $\int_0^\infty e^{-st} \mathbf{P}\{\tau(m) > t\} dt$, нам треба перейти в рівності (18) до підсумовування по k від 1 до $m+1$.

Безпосереднім обчисленням можна переконатись, що

$$\sum_{k=1}^{m+1} (q_{k-n}(s) + I\{k = m+1\} \bar{q}_{m-n+2}(s)) = \sum_{k=0}^\infty q_k(s) = \frac{1-f(s)}{s}.$$

Позначимо $\sum_{k=1}^{m+1} M_n(s, k)$ через $M_n(s)$. Тоді

$$\begin{aligned} M_n(s) &= \frac{1-f(s)}{s} + f(s) \left(\frac{1-f^{m-h}(s)}{s} \bar{p}_{m-n}(s) + \sum_{j=h+1}^{m-1} p_{j-n}(s) \frac{1-f^{j-h}(s)}{s} \right); \\ \sum_{k=1}^{m+1} \Phi_h(s, k) &= \frac{1}{D_0(s)} \sum_{i=1}^h R_i(s) M_i(s), \end{aligned}$$

і з (18) отримуємо

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-st} \mathbf{P}\{\tau(m) > t\} dt &= \left(\sum_{n=1}^{h-1} a_n D_n(s) + \sum_{n=h}^m a_n f^{n-h}(s) + \bar{a}_{m+1} f^{m+1-h}(s) \right) \times \\ &\times \frac{1}{D_0(s)} \sum_{i=1}^h R_i(s) M_i(s) - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i(s) M_{n+i}(s) + \\ &+ \frac{1}{s} \sum_{n=h+1}^m a_n (1 - f^{n-h}(s)) + \frac{\bar{a}_{m+1}}{s} (1 - f^{m+1-h}(s)). \end{aligned} \quad (19)$$

Виконаємо обчислення, потрібні для переходу в (19) до границі при $s \rightarrow +0$. Використовуватимемо послідовності $\{p_i\}$, $\{q_i\}$ і $\{R_i\}$, визначені в (4). Для всіх $n \geq 1$

з (12) випливають рівності

$$\sum_{i=1}^n R_i \bar{p}_{n-i} = R_n - 1,$$

тому, враховуючи, що $f(0) = 1$, для $n \geq 0$ з (14) отримуємо

$$D_n(0) = R_{h-n} - \sum_{i=1}^{h-n} R_i \left(\bar{p}_{m-n-i} + \sum_{j=h}^{m-1} p_{j-n-i} \right) = R_{h-n} - (R_{h-n} - 1) = 1. \quad (20)$$

Оскільки

$$\lim_{s \rightarrow +0} \left(\sum_{n=1}^{h-1} a_n D_n(s) + \sum_{n=h}^m a_n f^{n-h}(s) + \bar{a}_{m+1} f^{m+1-h}(s) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1,$$

то, враховуючи (20), після переходу в рівності (19) до границі при $s \rightarrow +0$, одержуємо формулу для середньої тривалості періоду зайнятості

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \tau(m) = & m_1 \left(\sum_{i=1}^h R_i \left(1 + (m-h) \bar{p}_{m-i} + \sum_{j=h+1}^{m-1} (j-h) p_{j-i} \right) - \right. \\ & - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i \left(1 + (m-h) \bar{p}_{m-n-i} + \sum_{j=h+1}^{m-1} (j-h) p_{j-n-i} \right) + \\ & \left. + \sum_{n=h+1}^m (n-h) a_n + (m+1-h) \bar{a}_{m+1} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Прийнявши в рівності (18) $s = 0$, одержимо співвідношення

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \mathbf{P} \{ \xi(t) = k, \tau(m) > t \} dt = & \sum_{i=1}^h R_i M_i(k) - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i M_{n+i}(k) + \\ & + m_1 \left(\sum_{n=h+1}^m a_n I \{ h+1 \leq k \leq n \} + \bar{a}_{m+1} I \{ h+1 \leq k \leq m+1 \} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Тут

$$\begin{aligned} M_i(k) = & M_i(0, k) = q_{k-i} + I \{ k = m+1 \} \bar{q}_{m-i+2} + \\ & + m_1 \left(I \{ h+1 \leq k \leq m-1 \} \sum_{j=k}^{m-1} p_{j-i} + I \{ h+1 \leq k \leq m \} \bar{p}_{m-i} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Використовуючи вузлову теорему відновлення [13, с. 46], і міркуючи так, як у [6], обчислимо границі

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{ \xi(t) = k \} = & \frac{\lambda}{\lambda \mathbf{M} \tau(m) + 1} \int_0^{\infty} \mathbf{P} \{ \xi(u) = k, \tau(m) \geq u \} du \quad (k = \overline{1, m+1}); \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{ \xi(t) = 0 \} = & \frac{1}{\lambda \mathbf{M} \tau(m) + 1}. \end{aligned}$$

Звідси за допомогою (22)–(23) отримуємо таке твердження.

Теорема 2. Для ергодичного розподілу кількості замовлень у системі $M_h^\theta/G/1/t$ правильні такі зображення:

$$\begin{aligned}\rho_0(m) &= \frac{1}{\lambda M \tau(m) + 1}; \\ \rho_k(m) &= \frac{\lambda}{\lambda M \tau(m) + 1} \left(\sum_{i=1}^k R_i q_{k-i} - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{k-n} R_i q_{k-n-i} \right) \quad (k = \overline{1, h}); \\ \rho_k(m) &= \frac{\lambda}{\lambda M \tau(m) + 1} \left(\sum_{i=1}^h R_i (q_{k-i} + m_1 \bar{p}_{k-i}) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i (q_{k-n-i} + m_1 \bar{p}_{k-n-i}) + m_1 \bar{a}_k \right) \quad (k = \overline{h+1, m}); \\ \rho_{m+1}(m) &= \frac{\lambda}{\lambda M \tau(m) + 1} \left(\sum_{i=1}^h R_i \bar{q}_{m+1-i} - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i \bar{q}_{m+1-n-i} + m_1 \bar{a}_{m+1} \right).\end{aligned}\tag{24}$$

5. Випадок відсутності обмежень на довжину черги. Розглянемо систему $M_h^\theta/G/1$, для якої відсутня умова обмеженості довжини черги ($m = \infty$). Обмежимо визначенням середньої тривалості періоду зайнятості та ергодичного розподілу кількості замовлень у такій системі.

Проаналізуємо поведінку при $m \rightarrow \infty$ окремих доданків у формулі (21), яка визначає середню тривалість періоду зайнятості $M \tau(m)$. Оскільки

$$m \bar{p}_m = \sum_{i=m}^{\infty} m p_i \leq \sum_{i=m}^{\infty} i p_i,$$

то $\lim_{m \rightarrow \infty} m \bar{p}_m = 0$, бо

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m \bar{p}_m \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=m}^{\infty} i p_i = 0.$$

Аналогічно доводиться, що $\lim_{m \rightarrow \infty} m \bar{a}_m = 0$.

Тепер можна перейти до границі при $m \rightarrow \infty$ в рівності (21) і одержати формулу для середньої тривалості періоду зайнятості для системи $M_h^\theta/G/1$

$$\begin{aligned}M \tau(\infty) &= m_1 \left(\sum_{i=1}^h R_i \left(1 + \sum_{j=h+1}^{\infty} (j-h) p_{j-i} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i \left(1 + \sum_{j=h+1}^{\infty} (j-h) p_{j-n-i} \right) + \sum_{n=h+1}^{\infty} (n-h) a_n \right).\end{aligned}\tag{25}$$

Після переходу до границі при $m \rightarrow \infty$ у співвідношеннях (24) отримаємо таке твердження.

Теорема 3. Для ергодичного розподілу кількості замовлень у системі $M_h^0/G/1$ правильні такі зображення:

$$\begin{aligned}\rho_0(\infty) &= \frac{1}{\lambda M \tau(\infty) + 1}; \\ \rho_k(\infty) &= \frac{\lambda}{\lambda M \tau(\infty) + 1} \left(\sum_{i=1}^k R_i q_{k-i} - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{k-n} R_i q_{k-n-i} \right) \quad (k = \overline{1, h}); \\ \rho_k(\infty) &= \frac{\lambda}{\lambda M \tau(m) + 1} \left(\sum_{i=1}^h R_i (q_{k-i} + m_1 \bar{p}_{k-i}) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i (q_{k-n-i} + m_1 \bar{p}_{k-n-i}) + m_1 \bar{a}_k \right) \quad (k \geq h+1).\end{aligned}\tag{26}$$

6. Приклади обчислення ергодичного розподілу. Передусім побудуємо алгоритми для обчислення послідовностей R_i, q_i ($i \geq 1$). Зауважимо, що ці алгоритми не залежать від параметра m , тому для їхньої реалізації достатньо володіти інформацією про вхідний потік і розподіл часу обслуговування (функцію $F(x)$).

З означень послідовностей R_i, q_i випливають рекурентні співвідношення:

$$\begin{aligned}R_1 &= \frac{1}{p_{-1}}, \quad R_{k+1} = \frac{R_k - \sum_{i=0}^{k-1} p_i R_{k-i}}{p_{-1}} \quad (k \geq 1); \\ q_0 &= \frac{1 - f(\lambda)}{\lambda}, \quad q_k = \sum_{i=1}^k a_i q_{k-i} - \frac{p_{k-1}}{\lambda} \quad (k \geq 1).\end{aligned}$$

Припустимо, що час обслуговування розподілений за законом Ерланга другого порядку ($F(x) = 1 - (1 + \mu x)e^{-\mu x}$, $x \geq 0$) з середнім значенням m_1 , а замовлення надходять парами ($a_1 = 0$; $a_2 = 1$; $a_i = 0$, $i > 2$).

Якщо $a_2 = 1$, то обчислення за формулами

$$p_i = \sum_{k=0}^{i+1} a_{i+1}^{k*} \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} dF(x) \quad (i = -1, 0, 1, \dots)$$

дають такі результати:

$$\begin{aligned}p_{2i-1} &= \frac{(i+1)\mu^2 \lambda^i}{(\lambda + \mu)^{i+2}}; \quad p_{2i} = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots); \\ \bar{p}_{2i-1} &= \bar{p}_{2i-2} = \frac{(\lambda + (i+1)\mu)\lambda^i}{(\lambda + \mu)^{i+1}} \quad (i = 1, 2, 3, \dots); \\ \sum_{i=1}^\infty \bar{p}_i &= \bar{p}_1 + \frac{2\lambda^2(2\lambda + 3\mu)}{\mu(\lambda + \mu)^2}.\end{aligned}$$

Нехай $h = 4$, $\lambda = 1$, $\mu = 1$, тоді $m_1 = 2$. Розглянемо випадки: $m = 8$ (приклад 1); $m = \infty$ (приклад 2).

Приклад 1. Користуючись формулою (21), обчислюємо середню тривалість періоду зайнятості системи з обмеженою чергою

$$\begin{aligned} M\tau(8) = m_1 \left(\sum_{i=1}^4 R_i \left(1 + 4\bar{p}_{8-i} + \sum_{j=5}^7 (j-4)p_{j-i} \right) - \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^2 R_i \left(1 + 4\bar{p}_{6-i} + \sum_{j=5}^7 (j-4)p_{j-i-2} \right) \right) = 1658. \end{aligned}$$

Позначимо через π_i стаціонарну ймовірність того, що довжина черги дорівнює i . Тоді $\pi_0 = \rho_0 + \rho_1$, $\pi_i = \rho_{i+1}$, $i \geq 1$. У рядку “ π_i ” таблиці 1 наведені ймовірності π_i , обчислені за ергодичним розподілом ρ_i , знайденим за формулами (24). У нижньому рядку цієї таблиці для порівняння записані значення відповідних ймовірностей для часу $t = 150\,000$, одержані за допомогою системи імітаційного моделювання GPSS World [14, 15].

Таблиця 1. Стаціонарний розподіл довжини черги (приклад 1)

Довжина черги (i)	0	1	2	3	4
π_i	0,0024	0,0072	0,0265	0,0989	0,2506
π_i (GPSS World)	0,0027	0,0075	0,0275	0,0992	0,2501
Довжина черги (i)	5	6	7	8	—
π_i	0,2324	0,1644	0,1450	0,0726	—
π_i (GPSS World)	0,2326	0,1639	0,1446	0,0719	—

Приклад 2. За формулою (25) знаходимо середню тривалість періоду зайнятості системи з необмеженою чергою

$$M\tau(\infty) = m_1 \left(\sum_{i=1}^4 R_i \left(1 + \sum_{j=5}^{\infty} (j-4)p_{j-i} \right) - \sum_{i=1}^2 R_i \left(1 + \sum_{j=5}^{\infty} (j-4)p_{j-i-2} \right) \right) = 2276.$$

Стаціонарний розподіл кількості замовлень у системі обчислюємо за формулами (26). Результати, отримані для стаціонарного розподілу довжини черги, наведені у табл. 2.

Таблиця 2. Стаціонарний розподіл довжини черги (приклад 2)

Довжина черги (i)	0	1	2	3	4
π_i	0,0018	0,0053	0,0193	0,0720	0,1826
π_i (GPSS World)	0,0018	0,0051	0,0194	0,0721	0,1836
Довжина черги (i)	5	6	7	8	9
π_i	0,1693	0,1198	0,1056	0,0741	0,0633
π_i (GPSS World)	0,1687	0,1192	0,1080	0,0746	0,0630
Довжина черги (i)	10	11	12	13	...
π_i	0,0442	0,0369	0,0257	0,0211	...
π_i (GPSS World)	0,0439	0,0359	0,0261	0,0210	...

7. Додаток. Програми для GPSS WORLD.

```

Lam EQU 1; значення  $\lambda$ 
Myu EQU 1; значення  $\mu$ 
AH EQU 4; поріг блокування
Em EQU 8; максимальна довжина черги (для прикладу 1)
CHASM EQU 150000; час моделювання
QQ TABLE Q$CHER,0,1,10; гістограма розподілу довжини черги
GENERATE 0.5
TABULATE QQ
TERMINATE
GENERATE (Exponential(5,0,(1/Lam)))
SPLIT 2,MIT1; надходження замовлень парами
TRANSFER ,OUT
MIT1 TEST L Q$CHER,Em,OUT; обмеження на довжину черги (для прикладу 1)
GATE LS KLU,OUT
QUEUE CHER
SEIZE SYS
DEPART CHER
TEST L Q$CHER,AH,MMU2
MMU1 SPLIT 1,MITS
ADVANCE (Exponential(5,0,(1/Myu))+Exponential(5,0,(1/Myu))); час обслугов.
TRANSFER ,MIT2
MMU2 SPLIT 1,MITR
ADVANCE (Exponential(5,0,(1/Myu))+Exponential(5,0,(1/Myu))); час обслугов.
MIT2 RELEASE SYS
TERMINATE
MITS LOGIC S KLU
TERMINATE
MITR LOGIC R KLU
OUT TERMINATE
GENERATE ,, 1
LOGIC S KLU
TERMINATE
GENERATE CHASM
TERMINATE 1
START 1

```

-
1. *Королюк В.С.* Граничные задачи для сложного пуассоновского процесса / *Королюк В.С.* // Теория вероятностей и ее применения. – 1974. – Т. 19, №1. – С. 3-14.
 2. *Королюк В.С.* Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов / *Королюк В.С.* – К., 1975.
 3. *Bratiichuk M.S.* Semi-Markov walks in queueing theory / *Bratiichuk M.S.* // Proceedings of the 2nd International Symposium on Semi-Markov Models: Theory and Application. Compiègne (France): Universite de Technologie. – 1998. – P. 6.
 4. *Хусанов М.* Анализ распределения максимальной длины очереди в системе массового обслуживания методом потенциала / *Хусанов М.* // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1977. – №4. – С. 29-33.

5. *Королюк В.С.* Граничные задачи для случайных блужданий / *Королюк В.С., Братийчук Н.С., Пирджанов Б.* – Ашхабад, 1987.
6. *Братийчук А.М.* Дослідження систем обслуговування з обмеженою чергою: дис. ... канд. наук / *Братийчук А.М.* – К., 2008.
7. *Братийчук А.М.* Швидкість збіжності до ергодичного розподілу довжини черги в системах типу $M^{\theta}/G/1/b$ / *Братийчук А.М.* // Укр. мат. журн. – 2007. – Т. 59, №9. – С. 1169-1178.
8. *Братийчук А.М.* Система $M^{\theta}/G/1/b$ з відновлюючим рівнем вхідного потоку / *Братийчук А.М.* // Вісн. Київського ун-ту. Серія фіз.-мат. науки. – 2007. – №1. – С. 114-121.
9. *Братийчук А.М.* Граничні теореми для систем типу $M^{\theta}/G/1/b$ з відновлюючим рівнем вхідного потоку / *Братийчук А.М.* // Укр. мат. журн. – 2007. – Т. 59, №7. – С. 884-890.
10. *Братийчук А.М.* Точні зображення для характеристик системи $M^{\theta}/G/1/b$ з відновлюючим рівнем вхідного потоку / *Братийчук А.М.* // Вісн. Київського ун-ту. Серія фіз.-мат. науки. – 2007. – №2. – С. 114-120.
11. *Takagi H.* Analysis of finite -capacity $M/G/1$ queue with a resume level / *Takagi H.* // Performance Evaluation. – 1985. – Vol. 5, №3. – P. 197-203.
12. *Takagi H.* Queueing Analysis. Vol. 2. / *Takagi H.* – The Netherlands: Elsevier Science Publishers B.V., 1993.
13. *Ивченко Г.И.* Теория массового обслуживания / *Ивченко Г.И., Каштанов В.А., Коваленко И.Н.* – М., 1982.
14. *Боев В.Д.* Моделирование систем. Инструментальные средства GPSS World / *Боев В.Д.* – СПб., 2004.
15. *Жерновий Ю.В.* Імітаційне моделювання систем масового обслуговування / *Жерновий Ю.В.* – Львів, 2007.

RESEARCH OF $M/G/1/m$ AND $M/G/1$ QUEUES WITH GROUP ARRIVALS AND THRESHOLD BLOCKING OF AN INPUT FLOW

Mykola BRATIICHUK¹, Yuriy ZHERNOVYI²

¹*Silesian University of Technology,
44-100 Gliwice, Kashubska str., 23,*

²*Ivan Franko National University of L'viv,
79000 L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: yu_zhernovyi@yahoo.com*

The $M^{\theta}/G/1/m$ queue with group arrivals and threshold blocking strategy of an input flow is investigated. If at the moment of beginning the service of the next customer the number of customers in the system exceeds some level h , the input flow is blocked while service process goes its own way. The arrivals of the new customers resume when the number of customers in the system decreases to the level h . Laplace transforms for distributions of the number of customers in the system on the busy period and for the busy time distribution function are found. Average duration of the busy time, and formulae for the ergodic distribution of number of customers in the system are obtained. The

effective calculative algorithm for the ergodic distribution, based on recurrent relations which do not depend explicitly on m , is proposed.

Key words: the $M^\theta/G/1/m$ and $M^\theta/G/1$ queueing systems, blocking of an input flow, busy time, ergodic distribution.

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ $M/G/1/m$ И $M/G/1$ С ГРУППОВЫМ ПОСТУПЛЕНИЕМ ЗАЯВОК И ПОРОГОВОЙ БЛОКИРОВКОЙ ВХОДНОГО ПОТОКА

Николай БРАТИЙЧУК¹, Юрий ЖЕРНОВЫЙ²

¹Шлёнський політехнічний університет,

44-100 Гливице, ул. Кашубская, 23,

²Львовський національний університет імені Івана Франка,

79000 Львов, ул. Университетская, 1

e-mail: yu_zhernovyi@yahoo.com

Исследована система обслуживания типа $M^\theta/G/1/m$ с групповым поступлением заявок и пороговой блокировкой входного потока. Блокировка потока заявок осуществляется, если в момент начала обслуживания очередной заявки число заявок в системе превышает заданный пороговый уровень h . Найдены преобразования Лапласа для распределения числа заявок в системе на периоде занятости и для функции распределения периода занятости; определена средняя продолжительность периода занятости, получены формулы для эргодического распределения числа заявок в системе. Предложен эффективный алгоритм вычисления эргодического распределения, рекуррентные соотношения которого явно не зависят от m .

Ключевые слова: системы $M^\theta/G/1/m$ и $M^\theta/G/1$, блокировка входящего потока, период занятости, эргодическое распределение.

Стаття надійшла до редколегії 01.06.2010

Прийнята до друку 22.12.2010

УДК 519.8, 336.761.6

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ ОПТИМІЗАЦІЇ ФОНДОВОГО ПОРТФЕЛЯ АКЦІЙ, ПОКРИТИХ CALL-ОПЦІОНАМИ

Микола БУГРІЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000 Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: ol_buhrii@i.ua

У рамках нечітко-множинної теорії запропоновано метод розв'язування задачі оптимізації розширеного фондового портфеля акцій, форсованих call-опціонами європейського стилю.

Ключові слова: розширений фондовий портфель, call-опціони.

Вступ. Звичайною інвестиційною практикою в розвинутих країнах є розміщення коштів на фондовому ринку, оскільки сьогодні це вигідніше, ніж інвестування, наприклад, у нерухомість. Така тенденція притаманна й фондовому ринку України, який, певною мірою, вже сформувався і перебуває в стадії інтенсивного розвитку й удосконалення.

Відомо, що вкладання коштів у цінні папери досить ризикована фінансова операція. Формуючи портфель ризикових цінних паперів, можна практично звести до нуля його несистематичний ризик: якщо деякі типи компонент портфеля матимуть низьку дохідність, то інші типи можуть компенсувати втрати інвестора. Чим більше диверсифікований фондовий портфель ризикових цінних паперів, тим менший його рівень несистематичного ризику. Оптимальну диверсифікацію портфеля можна провести, зокрема, класичними методами Марковіца [1] або Шарпа [2].

Значно складніша задача зменшення систематичного ризику фондового портфеля, який породжується невизначеністю зовнішнього середовища. Цього ризику практично неможливо уникнути, однак зменшити його рівень можна шляхом хеджування (форсування) компонент портфеля ризикових цінних паперів похідними цінними паперами (деривативами), зокрема, опціонами. Такі фондові портфелі умовно називають розширеними. Стосовно таких портфелів можна сформулювати задачу про оптимальний вибір не тільки часткового співвідношення його компонент, а й глибини хеджування (форсування) кожної ризикової компоненти опціонами.

Якщо дохідності компонент портфеля вважати випадковими величинами з відомими ймовірнісними розподілами, то щільність розподілу дохідності портфеля можна знайти, наприклад, відомим чисельним методом Монте-Карло. Однак цей метод передбачає громіздку обчислювальну процедуру – десятки тисяч операцій на одну точку межі ефективності портфеля. Для об'ємних розширених фондових портфелів чисельне розв'язування задачі оптимізації займає не виправдано багато оперативного часу.

Можливим варіантом виходу з цієї ситуації є модельна зміна способу врахування невизначеності під час формулювання задачі оптимізації: перехід від випадкових величин до нечітких величин у рамках нечітко-множинної теорії [3]. Зокрема, в [4] у рамках цієї теорії запропоновано чисельний метод розв'язування задачі про оптимізацію фондового портфеля акцій, форсованих call-опціонами. В основу цього методу покладено ітераційний вибір часткового співвідношення компонент розширеного фондового портфеля з наступним уточненням глибини форсування кожної акції опціонами.

У межах нечітко-множинної теорії пропонуємо один з можливих варіантів зведення задачі про оптимізацію фондового портфеля акцій, форсованих call-опціонами європейського стилю, до еквівалентної задачі математичного програмування. Це дає змогу (в загальному випадку на підставі методу дефазифікації [5]) ефективно використовувати стандартні прикладні пакети для розв'язування таких задач оптимізації.

Формулювання нечіткої задачі оптимізації та схема її розв'язування.

Нехай інвестор хоче сформувати фондовий портфель з n типів акцій і не планує змінювати цей портфель впродовж деякого періоду T . Позначимо через x_i ($i = \overline{1, n}$) – відносну частку акції i -го типу в портфелі, а через r_i ($i = \overline{1, n}$) – фінальну дохідність акції i -го типу в момент часу T .

На підставі експертних даних відомо, що ринкова ціна компонент портфеля в межах періоду T може підвищитися, тому інвестор форсує кожну акцію call-опціонами європейського стилю з терміном дії T на глибину $\delta_i \in [0, 1]$ ($i = \overline{1, n}$): якщо $\delta_i = 0$, то форсування немає (опціону на акцію i -го типу немає), якщо $\delta_i = 1$, то акція i -го типу форсована повністю (форсована кожна грошова одиниця вартості акції). Якщо інвестор вгадає напрям зміни ринкової ціни компонент портфеля, то він отримує додатковий прибуток на кожній акції завдяки наявності call-опціону на неї.

Отже, в зазначених умовах інвестор формує розширений фондовий портфель, який складається з n типів акцій і n наборів call-опціонів. Позначимо через x_i ($i = \overline{n+1, 2n}$) – відносну частку опціону в портфелі, який форсує відповідну акцію $(i-n)$ -го типу, а через r_i ($i = \overline{n+1, 2n}$) – фінальну дохідність цього опціону в момент часу T . Всього розширений портфель містить $2n$ компонент з відносними частками x_i ($i = \overline{1, 2n}$), причому

$$\sum_{i=1}^{2n} x_i = 1, \quad (1)$$

$$0 \leq x_i \leq 1. \quad (2)$$

Нехай у момент формування розширеного фондового портфеля стосовно основних параметрів, які характеризують кожну його складову, наявна така інформація.

1. Ринкова ціна акції i -го типу становить $S_{i,0}$ ($i = \overline{1, n}$).
2. На підставі експертних даних доведено, що на момент часу T ринкова ціна акції i -го типу перебуватиме в інтервалі $[S_{i,min}, S_{i,max}]$ ($i = \overline{1, n}$), тобто буде нечітким числом прямокутного вигляду [3].
3. Ринкова ціна call-опціону з i -го набору становить $C_{i,c}$ ($i = \overline{n+1, 2n}$).
4. Страйк-ціна акції i -го типу (ціна виконання відповідного call-опціону) становить $X_{i,c}$ ($i = \overline{n+1, 2n}$), причому $S_{i-n,min} < X_{i,c} < S_{i-n,max}$ ($i = \overline{n+1, 2n}$).

На підставі цих даних можна обчислити нечітку дохідність розширеного фондового портфеля в момент часу T .

Справді, якщо форсування акції i -го типу немає ($\delta_i = 0$), то дохідність цієї акції в момент часу T характеризується нечітким числом r_i^a прямокутного вигляду

$$r_i^a = [r_{i,min}^a, r_{i,max}^a] = \left[\frac{S_{i,min} - S_{i,0}}{T \cdot S_{i,0}}, \frac{S_{i,max} - S_{i,0}}{T \cdot S_{i,0}} \right] \quad (i = \overline{1, n}). \quad (3)$$

Оскільки абсолютний прибуток $I_{i,c}$ ($i = \overline{n+1, 2n}$) від call-опціону європейського стилю з i -го набору в момент часу T за умови 100% форсування відповідної акції ($\delta_i = 1$) обчислюється за формулою [6]

$$I_{i,c} = \max\{0, S_{i-n} - X_{i,c}\} - C_{i,c} = \begin{cases} S_{i-n} - X_{i,c} - C_{i,c}, & S_{i-n} > X_{i,c}, \\ -C_{i,c}, & S_{i-n} \leq X_{i,c}, \end{cases}$$

де S_{i-n} ($i = \overline{n+1, 2n}$) – ринкова ціна відповідної акції в момент часу T , то дохідність call-опціону з i -го набору в момент часу T природно описати нечітким числом r_i^o прямокутного вигляду

$$r_i^o = [r_{i,min}^o, r_{i,max}^o] = \left[-\frac{1}{T}, \frac{S_{i-n,max} - X_{i,c} - C_{i,c}}{T \cdot C_{i,c}} \right] \quad (i = \overline{n+1, 2n}). \quad (4)$$

Тепер на підставі (3), (4) знайдемо, що дохідність розширеного фондового портфеля в момент часу T характеризується нечітким числом r прямокутного вигляду

$$r = [r_{min}, r_{max}] = \left[\sum_{i=1}^n x_i \cdot r_{i,min}^a + \sum_{i=n+1}^{2n} x_i \cdot r_{i,min}^o, \sum_{i=1}^n x_i \cdot r_{i,max}^a + \sum_{i=n+1}^{2n} x_i \cdot r_{i,max}^o \right].$$

У розгорнутому вигляді останню формулу запишемо так:

$$r = [r_{min}, r_{max}] = \left[\sum_{i=1}^n x_i \frac{S_{i,min} - S_{i,0}}{T \cdot S_{i,0}} - \frac{1}{T} \sum_{i=n+1}^{2n} x_i, \sum_{i=1}^n x_i \frac{S_{i,max} - S_{i,0}}{T \cdot S_{i,0}} + \sum_{i=n+1}^{2n} x_i \frac{S_{i-n,max} - X_{i,c} - C_{i,c}}{T \cdot C_{i,c}} \right]. \quad (5)$$

Формуючи розширений фондовий портфель, інвестор передусім обов'язково фіксує нормативний параметр – нижню межу дохідності портфеля. У випадку, який розглядається, нижню межу дохідності портфеля задамо у вигляді нечіткого прямокутного числа

$$r^P = [r_{min}^P, r_{max}^P]. \quad (6)$$

Оскільки ступінь ризику інвестицій у портфель залежатиме від того, наскільки дохідність портфеля буде нижчою від нормативної, то очевидно, що рівень ризику інвестицій у портфель з дохідністю (5) буде визначатися взаємним розміщенням інтервалів (5), (6). З огляду на це ризик того, що дохідність розширеного фондового портфеля, який розглядається, буде нижчою (вищою) від нормативної, можна обчислити за такою формулою [7]:

$$R = \begin{cases} 0, & r_{max}^P \leq r_{min}, \\ \frac{(r_{max}^P - r_{min})^2}{2(r_{max}^P - r_{min}^P)(r_{max} - r_{min})}, & r_{min}^P < r_{min} < r_{max}^P \leq r_{max}, \\ \frac{r_{min}^P + r_{max}^P - 2r_{min}}{2(r_{max} - r_{min})}, & r_{min} \leq r_{min}^P < r_{max}^P \leq r_{max}, \\ \frac{2r_{max}^P - r_{min} - r_{max}}{2(r_{max}^P - r_{min}^P)}, & r_{min}^P \leq r_{min} < r_{max} \leq r_{max}^P, \\ 1 - \frac{(r_{max} - r_{min}^P)^2}{2(r_{max}^P - r_{min}^P)(r_{max} - r_{min})}, & r_{min} \leq r_{min}^P \leq r_{max} \leq r_{max}^P, \\ 1, & r_{max} \leq r_{min}^P. \end{cases} \quad (7)$$

За цільову функцію в задачі оптимізації розширеного фондового портфеля акцій, форсованих call-опціонами європейського стилю, природно вибрати верхню межу його дохідності. Оптимізувати портфель у такому формулюванні означає максимізувати максимум його дохідності в момент часу T за заданого (фіксованого) значення ризику $R = R_0$. У цьому зв'язку формалізація задачі оптимізації розширеного фондового портфеля акцій і call-опціонів європейського стилю виглядатиме так:

$$r_{min}(x_i) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{S_{i,max} - S_{i,0}}{T \cdot S_{i,0}} + \sum_{i=n+1}^{2n} x_i \frac{S_{i-n,max} - X_{i,c} - C_{i,c}}{T \cdot C_{i,c}} \rightarrow \max, \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^{2n} x_i = 1, \quad (9)$$

$$0 \leq x_i \leq 1, \quad (10)$$

$$R(x_1, \dots, x_{2n}, r_{min}^P, r_{max}^P) = R_0. \quad (11)$$

Для побудови розв'язку задачі (8)-(11) в загальному випадку треба врахувати те, що умова (11) має нестандартний ("гіллястий") вигляд: за відомої структури розширеного фондового портфеля притаманний йому рівень ризику обчислюють на підставі однієї з гілок формули (7) залежно від взаємного розміщення інтервалів дохідності (5), (6). Якщо ж структуру розширеного фондового портфеля досліджувати шляхом розв'язування задачі оптимізації, то кожну з гілок формули (7) потрібно прийняти за обмеження на шуканий розв'язок. Тоді задача (8)-(11) розбивається на шість задач математичного програмування, для кожної з яких умову (11) треба конкретизувати на підставі співвідношення (7).

Для теоретично безризикового портфеля ($R_0 = 0$) умову, еквівалентну (11), запишемо у вигляді

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{S_{i,min} - S_{i,0}}{T \cdot S_{i,0}} - \frac{1}{T} \sum_{i=n+1}^{2n} x_i \geq r_{max}^P. \quad (12)$$

Аналогічно, для портфеля з ризиком $R_0 = 1$ замість умови (11) треба розглянути умову

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{S_{i,max} - S_{i,0}}{T \cdot S_{i,0}} + \sum_{i=n+1}^{2n} x_i \frac{S_{i-n,max} - X_{i,c} - C_{i,c}}{T \cdot C_{i,c}} \leq r_{min}^P. \quad (13)$$

Для визначення складових оптимального за дохідністю розширеного фондового портфеля у випадку, коли ризик портфеля $R_0 \in (0, 1)$, умову (11) в задачі оптимізації варто конкретизувати так.

Якщо

$$r_{min}^P < r_{min} < r_{max}^P \leq r_{max},$$

то (11) треба замінити такими умовами:

$$\begin{aligned} (r_{max}^P - r_{min})^2 &= 2R_0(r_{max}^P - r_{min}^P)(r_{max} - r_{min}), \\ r_{min} &> r_{min}^P, \quad r_{min} < r_{max}^P, \quad r_{max} \geq r_{max}^P. \end{aligned} \quad (14)$$

Коли

$$r_{min} \leq r_{min}^P < r_{max}^P \leq r_{max},$$

то замість умови (11) потрібно розглянути такі умови:

$$\begin{aligned} r_{min}^P + r_{max}^P - 2r_{min} &= 2R_0(r_{max} - r_{min}), \\ r_{min} &\leq r_{min}^P, \quad r_{min}^P < r_{max}^P, \quad r_{max} \geq r_{max}^P. \end{aligned} \quad (15)$$

У випадку

$$r_{min}^P \leq r_{min} < r_{max} \leq r_{max}^P$$

умова (11) еквівалентна умовам

$$\begin{aligned} 2r_{max}^P - r_{min} - r_{max} &= 2R_0(r_{max}^P - r_{min}^P), \\ r_{min} &\geq r_{min}^P, \quad r_{min} < r_{max}, \quad r_{max} \leq r_{max}^P. \end{aligned} \quad (16)$$

Якщо

$$r_{min} \leq r_{min}^P \leq r_{max} \leq r_{max}^P,$$

то умову (11) варто замінити системою умов

$$\begin{aligned} (r_{max} - r_{min}^P)^2 &= 2(1 - R_0)(r_{max}^P - r_{min}^P)(r_{max} - r_{min}), \\ r_{min} &\leq r_{min}^P, \quad r_{max} \leq r_{max}^P, \quad r_{max} \geq r_{min}^P. \end{aligned} \quad (17)$$

Зауважимо, що співвідношення (12)-(17) явно записуються через невідомі частки x_i ($i = \overline{1, 2n}$) відповідних компонент розширеного фондового портфеля, оскільки через ці параметри явно виражаються функції r_{min} , r_{max} з (5).

Отже, за заданих значень параметрів $S_{i,0}$, $S_{i,min}$, $S_{i,max}$ ($i = \overline{1, n}$), $C_{i,c}$ ($i = \overline{n+1, 2n}$), r_{min}^P , r_{max}^P , T , R_0 , складові x_i ($i = \overline{1, 2n}$) розширеного фондового портфеля акцій, форсованих call-опціонами європейського стилю, повинні бути

розв'язком однієї з задач (8), (9), (10), (12)-(8), (9), (10), (17) залежно від взаємного розміщення інтервалів (5), (6). Для побудови межі ефективності цього портфеля в системі координат “ризик недопустимо низької дохідності портфеля – максимум очікуваної дохідності портфеля” треба розв'язати відповідну задачу оптимізації, змінюючи параметр R_0 в межах $R_{0,min} \leq R_0 \leq R_{0,max}$, де $R_{0,min}$ – ризик збірки “акція з найменшим значенням правої межі дохідності – call-опціон, який 100% форсує цю акцію”, а $R_{0,max}$ – ризик збірки “акція з найбільшим значенням правої межі дохідності – call-опціон, який 100% форсує цю акцію”.

Висновки. Заміна стандартного способу моделювання дохідності активів (як випадкових величин) нечіткими значеннями дохідностей цих активів допомогла сформулювати й описати схему розв'язування задачі оптимізації розширеного фондового портфеля акцій, форсованих call-опціонами європейського стилю. Побудова розв'язку задачі оптимізації зводиться до розв'язування деякої задачі математичного програмування. Це дає змогу не тільки досить легко побудувати межу ефективності портфеля в системі координат “ризик недопустимо низької дохідності портфеля – максимум очікуваної дохідності портфеля”, а й ефективно проводити дослідження ролі call-опціонів у розширеному фондовому портфелі.

-
1. Markovitz H.M. Portfolio Selection / Markovitz H.M. // Journal of Finance. – 1952. – Vol. 7. – P. 77-91.
 2. Sharpe W.F. Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk / Sharpe W.F. // Journal of Finance. – 1964. – Vol. 19. – P. 425-442.
 3. Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Заде Л.А. – М., 1976.
 4. Недосекин А.О. Оптимизация фондового портфеля, содержащего call-опционы / Недосекин А.О. // Банки и Риски. – 2005. – № 1. (<http://www.hedging.ru/stored/ad/9.pdf>).
 5. Сяваско М. Математичне моделювання за умов невизначеності / Сяваско М., Рубицька О. – Львів, 2000.
 6. Іващук Н.Л. Ринок деривативів: економіко-математичне моделювання процесів ціноутворення / Іващук Н.Л. – Львів, 2008.
 7. Недосекин А.О. Оценка риска инвестиций для произвольно-размытых факторов инвестиционного проекта / Недосекин А.О., Кокоч А.М. (http://sedok.narod.ru/sc_group_2003.html).

SOME OPTIMIZATION'S PROBLEM OF THE STOCK'S PORTFOLIO, WHICH ARE COVERED BY CALL-OPTIONS

Mykola BUGRIY

Ivan Franko National University of L'viv,
79000 L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: ol_buhrii@i.ua

Using fuzzy-plural theory, we find the method of solving of the optimization's problems for the portfolio of the stocks. This stocks are covered by the call-options of European style.

Key words: extended portfolio, call-option.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ФОНДОВОГО ПОРТФЕЛЯ АКЦИЙ, ПОКРЫТЫХ CALL-ОПЦИОНАМИ

Николай БУГРИЙ

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000 Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: ol_buhrii@i.ua*

Используя нечётно-множественную теорию предлагается метод решения задачи оптимизации расширенного фондового портфеля акций, форсированных call-опционами европейского стиля.

Ключевые слова: расширенный фондовый портфель, call-опцион.

Стаття надійшла до редколегії 22.09.2010

Прийнята до друку 22.12.2010

УДК 517.574

ІНТЕГРАЛЬНІ СЕРЕДНІ ФУНКЦІЙ, СПРЯЖЕНИХ ДО СУБГАРМОНІЙНИХ ФУНКЦІЙ

Ярослав ВАСИЛЬКІВ, Любомир ПОЛІТИЛО

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000 Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: YaVVasyukiv@gmail.com, Ljupol7@gmail.com

Для пари функцій $\mathcal{F}(z) := u(z) + i\bar{v}(z)$, де $u(z)$ – субгармонійна в $\mathbb{C}$ функція, гармонійна в деякому околі точки $z = 0$, $u(0) = 0$, а $\bar{v}(z)$ – спряжена до $u(z)$, в термінах неванліннової характеристики $T(r, u)$ задано оцінки модулів коефіцієнтів Фур'є $|c_k(r, \mathcal{F})|$, $0 < r < +\infty$, $k \in \mathbb{Z}$; знайдено не поліпшувані оцінки q -х інтегральних лебегових середніх $m_q(r, \mathcal{F})$, $0 < r < +\infty$, $1 \leq q < +\infty$; оцінено q -ті інтегральні модулі неперервності таких функцій $\mathcal{F}$.

Ключові слова: субгармонійна функція, спряжена функція до субгармонійної функції, метод рядів Фур'є, коефіцієнти Фур'є, лебегові інтегральні середні.

1. Вступ. В теорії цілих і мероморфних функцій лебегові інтегральні середні їхніх логарифмів модуля $m_q(r, \log |f|)$ ($q \geq 1$) відіграють важливу роль. В [1] (див. також [2], [3]) в термінах $m_q(r, \log |f|)$ ($q \geq 1$) подано критерії належності мероморфних функцій f до класів мероморфних функцій скінченного λ -типу.

Д. Майлз і Д. Шей [4] знайшли у певному сенсі не поліпшувану оцінку зверху квадратичних середніх $m_2(r, \log |f|)$ мероморфних в $\mathbb{C}$ функцій f в термінах їхньої неванліннової характеристики $T(r, f)$

$$m_2(r, \log |f|) \leq T(R, f) \left\{ 1 + \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{\log(R/r)}} \right\}, \quad 0 < r < R. \quad (1)$$

Цю оцінку Л. Сонс в [5] застосувала до вивчення розподілу нулів аналітичних функцій в одиничному крузі. Крім того, Д. Майлз і Д. Шей [4] зазначили, що з (1) випливає таке: для довільного $\alpha > 1/2$ (але не для $\alpha = 1/2$)

$$\liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{m_2(r, \log |f|)}{T(r, f) \{\log T(r, f)\}^\alpha} = 0.$$

Для цілих функцій $f(z) \neq \text{const}$ і $\alpha > 1$ (але не для $\alpha = 1$) правильною є асимптотична рівність (див. [6], теорема 1.8)

$$\liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log M(r, f)}{T(r, f) \{\log T(r, f)\}^\alpha} = 0.$$

Якщо ж $f(z) \neq 0$ в $\mathbb{C}$, то теорема 1.8 з [6] залишається правильною при $\alpha > 1/2$.

Зростання відношень характеристик $T(r, f)$ і $\log M(r, f)$ для цілих функцій нескінченного порядку досліджували в [7], [8], [9]. Зокрема, в [8] доведено таке: якщо $\varphi(x)$ зростаюча додатна функція при $x \geq x_0 > 0$ така, що

$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{\varphi(x)} < +\infty,$$

то

$$\liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log M(r, f)}{T(r, f) \varphi(\log T(r, f))} = 0.$$

В [9] доведено, що

$$\log M(r, f) = o(T(r, f) \varphi(\log T(r, f))) \quad (2)$$

при $r \rightarrow +\infty$ зовні множини логарифмічної щільності нуль.

В [10] доведено, що для кожної необмеженої зверху субгармонійної функції u в $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, при $1 \leq q \leq +\infty$ і будь-яких $\alpha > (m-1)/q'$, $1/q + 1/q' = 1$, виконується

$$\lim_{E \not\rightarrow r \rightarrow +\infty} \frac{m_q(r, u^+)}{T(r, u) \{\log T(r, u)\}^\alpha} = 0,$$

де E – множина скінченної логарифмічної міри. У цьому разі стали $(m-1)/q'$ не можна замінити на меншу. Якщо ж w – δ -субгармонійна в $\mathbb{C}$ функція, $w(0) = 0$, $1 \leq q < +\infty$, то для будь-якого $\alpha > 1/q'$ виконується ([11])

$$\lim_{E \not\rightarrow r \rightarrow +\infty} \frac{m_q(r, w)}{T(r, w) \{\log T(r, w)\}^\alpha} = 0.$$

Тут E – множина скінченної логарифмічної міри.

У [12] на підставі методу рядів Фур'є для повного логарифма мероморфної в $\mathbb{C}$ функції f в термінах неванліннової характеристики $T(r, f)$ знайдено не поліпшувані оцінки інтегральних середніх $m_q(r, \log f)$, ($1 \leq q < +\infty$) і подано оцінки інтегральних модулів неперервності повних логарифмів таких функцій.

В цій статті, ґрунтуючись на результатах [13], результати з [4], [10], [11], [12] поширено й уточнено на випадок функцій $\mathcal{F} = u + i\check{u}$, де u – довільна субгармонійна в $\mathbb{C}$ функція, гармонійна в деякому околі нуля, $u(0) = 0$, а $\check{u}$ – спряжена до u функція. Оцінки ми подаємо в термінах функцій $T((1 + \varepsilon(r))^2 r, u)$, де $T(r, u)$ – неванліннова характеристика u , а $\varepsilon(r)$ – довільна незростаюча на $(0, +\infty)$ функція, $0 < \varepsilon(r) \leq 1$ і $\varepsilon(0) = 1$, що, на наш погляд, є суттєвим, коли функція $T(r, u)$ має нескінченний порядок у розумінні Пойя (див. [14]).

2. Означення та допоміжні твердження. У [13] введено поняття функції $\check{u}$, спряженої до субгармонійної функції u в зірковій стосовно початку координат області; знайдено зображення та вивчено деякі властивості таких функцій, зокрема, показано, що у випадку, коли $u = \log |f|$, f – голоморфна, спряжена $\check{u}$ до u є деякою гілкою $\text{Arg } f$.

Якщо $z \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, $t \geq 1$, то прийmemo

$$l(z, a) = \begin{cases} \int_0^z (\zeta - a)^{-1} d\zeta, & z \neq ta; \\ \log \left| 1 - \frac{z}{a} \right| + i\pi, & z = ta. \end{cases}$$

Нагадаємо, що множина G в $\mathbb{C}$ називається зірковою множиною стосовно початку координат, якщо разом з точкою z вона містить відрізок $[0, z] \subset \mathbb{C}$. Через E° позначатимемо внутрішність множини E .

Нехай u субгармонійна функція в області G , $\mu[u]$ – її міра Ріса, $0 \notin \text{supp } \mu[u]$, де $\text{supp } \mu[u]$ – носій міри $\mu[u]$. За теоремою Ріса про зображення (див., наприклад, [15]) для довільної компактної підмножини $K \subset G$ з непорожньою внутрішністю K° і довільної точки $z \in K^\circ$, виконується

$$u(z) = h_K(z) + \int_K \log \left| 1 - \frac{z}{a} \right| d\mu_a[u],$$

де функція h_K гармонійна в K° .

Означення 1. Нехай G – зіркова область в $\mathbb{C}$, u – субгармонійна в G функція, $u(0) = 0$, $0 \notin \text{supp } \mu[u]$. Спряжена функція $\check{u}$ до u в G визначається співвідношенням

$$\check{u}(z) = \tilde{h}_K(z) + \int_K \text{Im}\{l(z, a)\} d\mu_a[u],$$

де K – компактна підмножина в G із зірковою внутрішністю K° , $\tilde{h}_K$ – гармонійно спряжена до h_K в K° функція, $\tilde{h}_K(0) = 0$.

Нехай $\mathbb{D}_t = \{z \in \mathbb{C} : |z| < t\}$, $t > 0$, $G = \mathbb{D}_{R_0}$, $R_0 \leq +\infty$. Для довільних $z, a \in \mathbb{D}_R$, $a \neq 0$, $0 < R < R_0$ прийmemo

$$l_R(z, a) = l(z, a) - l(z, R^2/\bar{a}).$$

Нехай u субгармонійна функція в $\mathbb{D}_{R_0}$, $u(0) = 0$, $0 \notin \text{supp } \mu[u]$, $0 < R < R_0$. В [13] доведено таке узагальнення формули Шварца

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(z) := u(z) + i\check{u}(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta}) \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} d\theta + \\ &+ \int_{|a| \leq R} l_R(z, a) d\mu_a[u] + \int_{|a| \leq R} \log \frac{|a|}{R} d\mu_a[u]. \end{aligned} \quad (3)$$

Прийmemo

$$\begin{aligned} c_k(r, \mathcal{F}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} \mathcal{F}(re^{i\theta}) d\theta, \quad k \in \mathbb{Z}; \\ m_q(r, \mathcal{F}) &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\mathcal{F}(re^{i\theta})|^q d\theta \right)^{1/q}, \quad q \geq 1; \end{aligned}$$

$$T(r, u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^+(re^{i\theta}) d\theta, \quad N(r, u) = \int_0^r \int_{|a| \leq t} d\mu_a[u] \frac{dt}{t}, \quad r > 0.$$

Правильні такі леми.

Лема 1. [16] *Нехай u – субгармонійна функція в $\mathbb{D}_R$, $0 \notin \text{supp } \mu[u]$, $u(0) = 0$, $0 < r < R$, $k \in \mathbb{N}$. Тоді*

$$c_0(r, u) = N(r, u), \quad (4)$$

$$c_k(r, u) = \frac{1}{2} \gamma_k r^k + \frac{1}{2} \int_0^r \left(\left(\frac{r}{t} \right)^k + \left(\frac{t}{r} \right)^k \right) \frac{n_k(t, u)}{t} dt, \quad (5)$$

$$c_{-k}(r, u) = \overline{c_k(r, u)}, \quad (6)$$

де

$$c_k(r, u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} u(re^{i\theta}) d\theta, \quad n_k(r, u) = \int_{|a| \leq r} \left(\frac{\bar{a}}{|a|} \right)^k d\mu_a[u], \quad \gamma_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz^k} \mathcal{F}(z) \Big|_{z=0}.$$

Лема 2. [13] *Нехай u – субгармонійна функція в $\mathbb{D}_R$, $0 \notin \text{supp } \mu[u]$, $u(0) = 0$, $0 < r < R$, $k \in \mathbb{N}$. Тоді*

$$c_0(r, \mathcal{F}) = N(r, u), \quad (7)$$

$$c_k(r, \mathcal{F}) = \gamma_k r^k + \int_0^r \left(\frac{r}{t} \right)^k \frac{n_k(t, u)}{t} dt, \quad (8)$$

$$c_{-k}(r, \mathcal{F}) = \int_0^r \left(\frac{t}{r} \right)^k \frac{n_{-k}(t, u)}{t} dt. \quad (9)$$

М. Л. Содін [17] поставив у відповідність довільній субгармонійній функції $u(z)$ функцію

$$q(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta}) \frac{2Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta} - z)^2} d\theta + \int_{|a| < R} \frac{R^2 - |a|^2}{(z - a)(R^2 - \bar{a}z)} d\mu_a[u], \quad 0 < |z| < R. \quad (10)$$

Зауважимо таке: якщо $u = \log |f|$, де f – ціла функція, то $q = f'/f$.

Лема 3. *Нехай $0 < r_1 < r_2 < R < +\infty$, $\sigma > 1$. Нехай також u – субгармонійна функція в $\overline{\mathbb{D}}_{\sigma R}$, $u(0) = 0$; $E(t)$ ($t \in [r_1, r_2]$) – вимірна підмножина $[0, 2\pi]$, міра якої не перевищує η , $0 < \eta \leq 2\pi$. Тоді*

$$\int_{r_1}^{r_2} dt \int_{E(t)} |q(te^{i\theta})| d\theta \leq 4 \left(\frac{(r_2 - r_1)\eta R}{(R - r_2)^2} + \frac{\sqrt{2}\pi\sigma}{\sigma - 1} \psi(r_1, r_2; \eta) \right) T(\sigma R, u), \quad (11)$$

де

$$\psi(r_1, r_2; \eta) = \frac{r_2 - r_1}{r_1} \log \left(1 + \frac{r_1 \eta}{r_2 - r_1} \right) + \eta \log \left(1 + \frac{r_2 - r_1}{r_1 \eta} \right),$$

а $q(re^{i\theta})$ означена співвідношенням (10), при $0 < r < R$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Доведення. Доведення цієї леми проведемо за схемою, близькою до запропонованої для доведення теореми 7 з [18]. Нехай $0 < r < R < +\infty$, $|a| < R$. Тоді, зважаючи на (10), одержуємо

$$|q(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(Re^{i\theta})| \frac{2R}{|R-|z||^2} d\theta + \int_{|a|<R} \left| \frac{R^2 - |a|^2}{(z-a)(R^2 - \bar{a}z)} \right| d\mu_a[u].$$

Зауважимо, що

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(Re^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (2u^+(Re^{i\theta}) - u(Re^{i\theta})) d\theta \leq 2T(R, u),$$

і, також $\left| \frac{R^2 - |a|^2}{(R^2 - \bar{a}z)(z-a)} \right| \leq \frac{2}{|z-a|}$ при $|a| < R$. Тому

$$|q(z)| \leq \frac{4RT(R, u)}{(R-|z|)^2} + 2 \int_{|a|<R} \frac{d\mu_a[u]}{|z-a|}.$$

Враховуючи лему 7.2 з ([19], с. 52), отримуємо ($t \in [r_1, r_2]$)

$$\int_{E(t)} |q(te^{i\theta})| d\theta \leq \frac{4R\eta T(R, u)}{(R-t)^2} + 4 \int_{|a|<R} \int_0^{\eta/2} \frac{d\phi}{|te^{i\phi} - |a||} d\mu_a[u]. \quad (12)$$

В [18] доведено, що для всіх a , $0 < |a| < R$ правильна оцінка

$$\int_0^{\eta/2} \frac{d\phi}{|te^{i\phi} - |a||} \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{r_1} \log \left(1 + \frac{r_1\eta}{2|t-|a||} \right).$$

Отже,

$$\int_{r_1}^{r_2} dt \int_0^{\eta/2} \frac{d\phi}{|te^{i\phi} - |a||} \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{r_1} \int_{r_1}^{r_2} \log \left(1 + \frac{r_1\eta}{2|t-|a||} \right) dt.$$

Розглянемо спочатку випадок $|a| \in [r_1, r_2]$. Тоді

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{r_1} \int_{r_1}^{r_2} \log \left(1 + \frac{r_1\eta}{2|t-|a||} \right) dt = \frac{\pi\sqrt{2}}{r_1} \left(\int_0^{|a|-r_1} \log \left(1 + \frac{r_1\eta}{2x} \right) dx + \int_0^{r_2-|a|} \log \left(1 + \frac{r_1\eta}{2x} \right) dx \right).$$

Позначимо $k = \min\{|a| - r_1, r_2 - |a|\}$, $K = \max\{|a| - r_1, r_2 - |a|\}$. Зауважимо, що $k + K = r_2 - r_1$. Звідси $K = r_2 - r_1 - k = \frac{r_2-r_1}{2} + \frac{r_2-r_1}{2} - k$ і, тому,

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{r_1} \int_{r_1}^{r_2} \log \left(1 + \frac{r_1\eta}{2|t-|a||} \right) dt = \frac{\pi\sqrt{2}}{r_1} \left(2 \int_0^k \log \left(1 + \frac{r_1\eta}{2x} \right) dx + \int_k^K \log \left(1 + \frac{r_1\eta}{2x} \right) dx \right) =$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{r_1} \left(2 \int_0^k \log \left(1 + \frac{r_1\eta}{2x} \right) dx + \int_k^{\frac{r_2-r_1}{2}} \log \left(1 + \frac{r_1\eta}{2x} \right) dx + \int_{\frac{r_2-r_1}{2}}^K \log \left(1 + \frac{r_1\eta}{2x} \right) dx \right).$$

Оскільки функція $\log(1 + \frac{r_1\eta}{2x})$ монотонно спадає на $(0, +\infty)$, а $K - \frac{r_2-r_1}{2} = \frac{r_2-r_1}{2} - k$, то

$$\int_{\frac{r_2-r_1}{2}}^K \log \left(1 + \frac{r_1\eta}{2x} \right) dx \leq \int_k^{\frac{r_2-r_1}{2}} \log \left(1 + \frac{r_1\eta}{2x} \right) dx.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{\pi\sqrt{2}}{r_1} \int_{r_1}^{r_2} \log \left(1 + \frac{r_1\eta}{2|t-|a||} \right) dt &\leq \frac{\pi\sqrt{2}}{r_1} \left(2 \int_0^k \log \left(1 + \frac{r_1\eta}{2x} \right) dx + \right. \\ &\left. + 2 \int_k^{\frac{r_2-r_1}{2}} \log \left(1 + \frac{r_1\eta}{2x} \right) dx \right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{r_1} \int_{r_1}^{r_2} \log \left(1 + \frac{r_1\eta}{2|t-\frac{r_2+r_1}{2}|} \right) dt. \end{aligned}$$

Для випадку, коли $|a| \notin [r_1, r_2]$ можна провести аналогічні міркування. Застосовуючи знову лему 7.2 з [19], отримуємо

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2} dt \int_0^{\eta/2} \frac{d\phi}{|te^{i\phi} - |a||} &\leq \frac{2\sqrt{2}\pi}{r_1} \int_0^{(r_2-r_1)/2} \log \left(1 + \frac{r_1\eta}{2t} \right) dt = \\ &= \sqrt{2}\pi \left(\frac{r_2-r_1}{r_1} \log \left(1 + \frac{r_1\eta}{r_2-r_1} \right) + \eta \log \left(1 + \frac{r_2-r_1}{r_1\eta} \right) \right) = \sqrt{2}\pi \psi(r_1, r_2; \eta). \end{aligned} \quad (13)$$

З (12) і (13) випливає, що

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2} dt \int_{E(t)} |q(te^{i\theta})| d\theta &\leq \frac{4(r_2-r_1)\eta RT(R, u)}{(R-r_2)^2} + 2\sqrt{2}\pi\psi(r_1, r_2; \eta) n(R, u) \leq \\ &\leq \frac{4(r_2-r_1)\eta RT(R, u)}{(R-r_2)^2} + \frac{4\sqrt{2}\pi\sigma T(\sigma R, u)}{\sigma-1} \psi(r_1, r_2; \eta) \leq \\ &\leq 4 \left(\frac{(r_2-r_1)\eta R}{(R-r_2)^2} + \frac{\sqrt{2}\pi\sigma}{\sigma-1} \psi(r_1, r_2; \eta) \right) T(\sigma R, u), \end{aligned}$$

звідки одразу випливає (11). $\square$

3. Основні результати.

Теорема 1. Нехай u – субгармонійна в $\overline{\mathbb{D}}_{4r}$ функція, $u(0) = 0$, $0 < r < +\infty$, $\gamma(r) = 1 + \varepsilon(r)$, $0 < \varepsilon(r) \leq 1$, $\varepsilon(r)$ – незростаюча функція на $(0, +\infty)$, $\varepsilon(0) = 1$. Тоді для всіх $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$|c_k(r, \mathcal{F})| \leq 4T(\gamma^2(r)r, u) \left(\frac{1}{\gamma^{|k|}(r)} + \frac{1 - \gamma^{-|k|}(r)}{|k|\varepsilon(r)} \right). \quad (14)$$

Доведення. Зіставляючи (8) та (5), одержимо

$$c_k(r, \mathcal{F}) = 2c_k(r, u) - \int_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^k \frac{n_k(t, u)}{t} dt.$$

Звідси

$$\begin{aligned} |c_k(r, \mathcal{F})| &\leq |2c_k(r, u)| + \int_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^k \frac{n_k(t, u)}{t} dt \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})| d\theta + N(r, u) = \\ &= 4T(r, u) - 2N(r, u) + N(r, u) = 4T(r, u) - N(r, u) \leq 4T(r, u). \end{aligned} \quad (15)$$

З урахуванням співвідношень

$$\begin{aligned} c_k(r, \mathcal{F}) - \frac{c_k(\gamma(r)r, \mathcal{F})}{\gamma^k(r)} &= \gamma_k r^k + \int_0^r \left(\frac{r}{t}\right)^k \frac{n_k(t, u)}{t} dt - \frac{\gamma_k}{\gamma^k(r)} \cdot \gamma^k(r) - \\ &- \frac{1}{\gamma^k(r)} \int_0^{\gamma(r)r} \left(\frac{\gamma(r)r}{t}\right)^k \frac{n_k(t, u)}{t} dt = \int_r^{\gamma(r)r} \left(\frac{r}{t}\right)^k \frac{n_k(t, u)}{t} dt \end{aligned}$$

та нерівностей (15) і $N(r, u) \leq T(r, u)$, одержимо

$$\begin{aligned} |c_k(r, \mathcal{F})| &\leq \left| \frac{c_k(\gamma(r)r, \mathcal{F})}{\gamma^k(r)} \right| + \left| \int_r^{\gamma(r)r} \left(\frac{r}{t}\right)^k \frac{n_k(t, u)}{t} dt \right| \leq \frac{4T(\gamma^2(r)r, u)}{\gamma^k(r)} + \\ &+ n(\gamma(r)r, u) r^k \int_r^{\gamma(r)r} \frac{dt}{t^{k+1}} = \frac{4T(\gamma^2(r)r, u)}{\gamma^k(r)} + \frac{n(\gamma(r)r, u)}{k} (1 - \gamma^{-k}(r)). \end{aligned}$$

Оскільки

$$\frac{\varepsilon(r)n(\gamma(r)r, u)}{\gamma(r)} \leq n(\gamma(r)r, u) \log \gamma(r) \leq N(\gamma^2(r)r, u) \leq T(\gamma^2(r)r, u),$$

то остання нерівність набуде вигляду

$$\begin{aligned} |c_k(r, \mathcal{F})| &\leq \frac{4T(\gamma^2(r)r, u)}{\gamma^k(r)} + (1 - \gamma^{-k}(r)) \frac{2T(\gamma^2(r)r, u)}{k \varepsilon(r)} \leq \\ &\leq 4T(\gamma^2(r)r, u) \left(\frac{1}{\gamma^k(r)} + \frac{1 - \gamma^{-k}(r)}{k \varepsilon(r)} \right). \end{aligned}$$

Нехай тепер $k \leq -1$. З огляду на співвідношення (9) отримаємо

$$|c_k(r, \mathcal{F})| = \left| \int_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^{|k|} \frac{n_k(t, u)}{t} dt \right| \leq \int_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^{|k|} \frac{n_k(t, u)}{t} dt \leq N(r, u).$$

Враховуючи співвідношення

$$c_k(r, \mathcal{F}) - \gamma^{-|k|}(r) c_k(r/\gamma(r), \mathcal{F}) = \int_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^{|k|} \frac{n_k(t, u)}{t} dt -$$

$$-\frac{1}{\gamma^{|k|}(r)} \int_0^{r/\gamma(r)} \left(\frac{\gamma(r)t}{r}\right)^{|k|} \frac{n_k(t, u)}{t} dt = \int_{r/\gamma(r)}^r \left(\frac{t}{r}\right)^{|k|} \frac{n_k(t, u)}{t} dt,$$

аналогічно, як і в попередньому випадку, одержуємо

$$\begin{aligned} |c_k(r, \mathcal{F})| &\leq \left| \frac{c_k\left(\frac{r}{\gamma(r)}, \mathcal{F}\right)}{\gamma^{|k|}(r)} \right| + \left| \int_{r/\gamma(r)}^r \left(\frac{t}{r}\right)^{|k|} \frac{n_k(t, u)}{t} dt \right| \leq \frac{N\left(\frac{r}{\gamma(r)}, u\right)}{\gamma^{|k|}(r)} + \\ &+ \frac{n(r, u)}{r^{|k|}} \int_{r/\gamma(r)}^r t^{|k|-1} dt \leq \frac{N\left(\frac{r}{\gamma(r)}, u\right)}{\gamma^{|k|}(r)} + \frac{n(r, u)}{|k|} \left(1 - \frac{1}{\gamma^{|k|}(r)}\right) \leq \\ &\leq 2N(\gamma(r)r, u) \left(\frac{1}{\gamma^{|k|}(r)} + \frac{1 - \gamma^{-|k|}(r)}{|k|\varepsilon(r)}\right) \leq 4T(\gamma^2(r)r, u) \left(\frac{1}{\gamma^{|k|}(r)} + \frac{1 - \gamma^{-|k|}(r)}{|k|\varepsilon(r)}\right). \end{aligned}$$

Теорему 1 доведено. $\square$

Теорема 2. Нехай $0 < r < +\infty$, $0 < \varepsilon(r) \leq 1$, $\varepsilon(r)$ — незростаюча на $(0, +\infty)$ функція, $\varepsilon(0) = 1$, $\gamma(r) = 1 + \varepsilon(r)$, u — субгармонійна в $\overline{\mathbb{D}}_{4r}$ функція, $u(0) = 0$. Тоді

$$m_q(r, \mathcal{F}) \leq A(q) \frac{T(\gamma^2(r)r, u)}{\sqrt[q]{\varepsilon(r)}}, \quad 1 \leq q \leq 2,$$

$$m_q(r, \mathcal{F}) \leq A(q) \frac{\sqrt[q]{\varepsilon(r)} T(\gamma^2(r)r, u)}{\varepsilon(r)}, \quad 2 \leq q < +\infty;$$

де $A(q) = 17 \cdot 2^{1-1/q}$ при $1 \leq q \leq 2$ і $A(q) = 17q^{1-1/q}$ при $2 \leq q < +\infty$.

Доведення. Спочатку розглянемо випадок $q = 1$. Оскільки

$$\frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} = \frac{2z}{Re^{i\theta} - z} + 1,$$

то з узагальненої формули Шварца (3) отримаємо

$$\mathcal{F}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta}) \frac{2z}{Re^{i\theta} - z} d\theta + \int_{|a| \leq R} \log \frac{R^2(a - z)}{a(R^2 - \bar{a}z)} d\mu_a[u],$$

звідси при $R = \gamma(r)r$

$$\begin{aligned} m_1(r, \mathcal{F}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\mathcal{F}(re^{i\varphi})| d\varphi \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(Re^{i\theta})| \left| \frac{2re^{i\varphi}}{Re^{i\theta} - re^{i\varphi}} \right| d\theta \right) d\varphi + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \int_{|a| \leq R} \log \frac{R^2(a - re^{i\varphi})}{a(R^2 - \bar{a}re^{i\varphi})} d\mu_a[u] \right| d\varphi \leq \frac{4r}{R - r} T(R, u) + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \int_{|a| \leq R} \log \frac{R^2(a - re^{i\varphi})}{a(R^2 - \bar{a}re^{i\varphi})} d\mu_a[u] \right| d\varphi \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{4T(\gamma(r)r, u)}{\varepsilon(r)} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \int_{|a| \leq R} \log \frac{R^2(a - re^{i\varphi})}{a(R^2 - \bar{a}re^{i\varphi})} d\mu_a[u] \right| d\varphi. \quad (16)$$

Оцінімо тепер

$$\int_0^{2\pi} \left| \int_{|a| \leq R} \log \frac{R^2(a - re^{i\varphi})}{a(R^2 - \bar{a}re^{i\varphi})} d\mu_a[u] \right| \frac{d\varphi}{2\pi} \leq \int_{|a| \leq R} d\mu_a[u] \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \int_0^r \frac{(R^2 - |a|^2) dt}{|te^{i\varphi} - |a|| (R^2 - r|a|)}.$$

У статті [12] (див. доведення теореми 2, с.13) доведено, що

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \frac{dt}{|te^{i\varphi} - |a||} \leq \log \frac{r}{|a|} + \log(2e^2) \quad (|a| \leq r), \quad (17)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \frac{dt}{|te^{i\varphi} - |a||} \leq \log(2e^2) \quad (r < |a|). \quad (18)$$

Далі, враховуючи (17) та (18), одержимо

$$\begin{aligned} & \int_{|a| \leq R} d\mu_a[u] \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \int_0^r \frac{(R^2 - |a|^2) dt}{|te^{i\varphi} - |a|| (R^2 - r|a|)} \leq \\ & \leq \int_0^r \frac{R^2 - x^2}{R^2 - rx} \left(\log \frac{r}{x} + \log(2e^2) \right) dn(x, u) + \log(2e^2) \int_r^R \frac{R^2 - x^2}{R^2 - rx} dn(x, u) \leq \\ & \leq 2 \int_0^r \log \left(\frac{r}{x} \right) dn(x, u) + \log(2e^2) \int_0^R \frac{R^2 - x^2}{R^2 - rx} dn(x, u) \leq 2N(r, u) + \\ & + \log(2e^2) \left(\left. \frac{R^2 - x^2}{R^2 - rx} n(x, u) \right|_0^R + \int_0^R \frac{2R^2x - rR^2 - rx^2}{(R^2 - rx)^2} n(x, u) dx \right) \leq 2N(r, u) + \\ & + 2\log(2e^2) \frac{R}{R-r} \int_0^R \frac{n(x, u)}{x} dx \leq 2N(r, u) + 4\log(2e^2) \frac{N(\gamma^2(r)r, u)}{\varepsilon(r)}. \end{aligned}$$

Підставивши цю нерівність в (16) та врахувавши, що $N(\gamma^2(r)r, u) \leq T(\gamma^2(r)r, u)$, одержимо

$$m_1(r, \mathcal{F}) \leq \frac{17T(\gamma^2(r)r, u)}{\varepsilon(r)}. \quad (19)$$

Нехай тепер $q \in [2, +\infty)$. Прийнемо $p = q/(q-1)$. Застосувавши нерівності Хаусдорфа-Юнга та Мінковського, одержуємо

$$m_q(r, \mathcal{F}) \leq \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(r, \mathcal{F})|^p \right)^{1/p} \leq |c_0(r, \mathcal{F})| +$$

$$+ \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |c_k(r, \mathcal{F})|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=-\infty}^{-1} |c_k(r, \mathcal{F})|^p \right)^{1/p}. \quad (20)$$

Маємо

$$c_0(r, \mathcal{F}) = N(r, u) \leq T(r, u) \leq T(\gamma^2(r)r, u). \quad (21)$$

Далі з урахуванням (14) та нерівності Мінковського одержимо

$$\left(\sum_{k=1}^{+\infty} |c_k(r, \mathcal{F})|^p \right)^{1/p} \leq 4T(\gamma^2(r)r, u) \left(\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \gamma^{-pk}(r) \right)^{1/p} + \frac{1}{\varepsilon(r)} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1 - \gamma^{-k}(r)}{k} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \right).$$

Оскільки

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \gamma^{-pk}(r) = \frac{1}{\gamma^p(r) - 1} \leq \frac{1}{p\varepsilon(r)} \leq \frac{q}{\varepsilon(r)},$$

а також

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1 - \gamma^{-k}(r)}{k} \right)^p &\leq \int_1^{+\infty} \left(\frac{1 - e^{-t \log \gamma(r)}}{t} \right)^p dt = (\log \gamma(r))^{p-1} \times \\ &\times \int_{\log \gamma(r)}^{+\infty} \left(\frac{1 - e^{-x}}{x} \right)^p dx \leq \varepsilon^{p-1}(r) \int_0^1 \left(\frac{1 - e^{-x}}{x} \right)^p dx + \\ &+ \varepsilon^{p-1}(r) \int_1^{+\infty} \left(\frac{1 - e^{-x}}{x} \right)^p dx \leq q \varepsilon^{p-1}(r), \end{aligned}$$

то отримаємо нерівність

$$\left(\sum_{k=1}^{+\infty} |c_k(r, \mathcal{F})|^p \right)^{1/p} \leq \frac{8 q^{1-1/q} T(\gamma^2(r)r, u)}{(\varepsilon(r))^{1-1/q}}. \quad (22)$$

Враховуючи (14), як і у попередньому випадку, одержимо

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} |c_k(r, \mathcal{F})|^p \right)^{1/p} \leq \frac{8 q^{1-1/q} T(\gamma^2(r)r, u)}{(\varepsilon(r))^{1-1/q}}. \quad (23)$$

Підставивши (21)-(23) в (20), отримуємо

$$m_q(r, \mathcal{F}) \leq 17 \left(\frac{q}{\varepsilon(r)} \right)^{1-1/q} T(\gamma^2(r)r, u), \quad 2 \leq q < +\infty. \quad (24)$$

Зрештою, нехай $1 \leq q \leq 2$. Тоді твердження теореми 10.12 з [20]

$$m_q(r, \mathcal{F}) \leq \left(m_1(r, \mathcal{F}) \right)^{(2-q)/q} \left(m_2(r, \mathcal{F}) \right)^{2(1-1/q)}$$

і нерівності (19) та (24) негайно приводять нас до потрібного результату. $\square$

Лема 4. Нехай $0 < r_1 < +\infty$, $r_2 = \gamma(r_1)r_1$, $R = \gamma(r_2)r_2$, де $\gamma(t) = 1 + \varepsilon(t)$, $0 < \varepsilon(t) \leq 1$, $\varepsilon(t)$ – незростаюча функція на $(0, +\infty)$, $\varepsilon(0) = 1$. Нехай u – субгармонійна функція в $\mathbb{D}_{8r_1}$, $u(0) = 0$. Тоді для довільного $k \neq 0$

$$\left| c_k(r_2, \mathcal{F}) - c_k(r_1, \mathcal{F}) \right| \leq \left(1 - \gamma^{-|k|}(r_1) \right) \frac{7 T(\gamma(r_1)\gamma^2(r_2)r_1, u)}{|k| \varepsilon(r_2)},$$

$$\left| c_0(r_2, \mathcal{F}) - c_0(r_1, \mathcal{F}) \right| \leq \frac{\varepsilon(r_1) T(\gamma(r_1)\gamma^2(r_2)r_1, u)}{\varepsilon(r_2)}.$$

Доведення. Нехай $k \in \mathbb{N}$. Зі співвідношень (8) одержуємо

$$\begin{aligned} c_k(r_2, \mathcal{F}) - c_k(r_1, \mathcal{F}) &= \gamma_k r_2^k + \int_0^{r_2} \left(\frac{r_2}{t} \right)^k \frac{n_k(t, u)}{t} dt - \gamma_k r_1^k - \int_0^{r_1} \left(\frac{r_1}{t} \right)^k \frac{n_k(t, u)}{t} dt = \\ &= \gamma_k r_2^k (1 - \gamma^{-k}(r_1)) + (1 - \gamma^{-k}(r_1)) \int_0^{r_2} \left(\frac{r_2}{t} \right)^k \frac{n_k(t, u)}{t} dt + \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{r_1}{t} \right)^k \frac{n_k(t, u)}{t} dt, \end{aligned}$$

тому

$$\begin{aligned} \left| c_k(r_2, \mathcal{F}) - c_k(r_1, \mathcal{F}) \right| &\leq (1 - \gamma^{-k}(r_1)) |c_k(r_2, \mathcal{F})| + \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{r_1}{t} \right)^k \frac{n(t, u)}{t} dt \leq \\ &\leq (1 - \gamma^{-k}(r_1)) |c_k(r_2, \mathcal{F})| + (1 - \gamma^{-k}(r_1)) \frac{n(r_2, u)}{k} = \\ &= (1 - \gamma^{-k}(r_1)) \left(|c_k(r_2, \mathcal{F})| + \frac{n(r_2, u)}{k} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

З урахуванням нерівностей

$$\frac{2\varepsilon(r_2)n(r_2, u)}{\gamma(r_2)} \leq 2n(r_2, u) \log \gamma(r_2) \leq N(\gamma^2(r_2)r_2, u) \leq T(\gamma(r_1)\gamma^2(r_2)r_1, u),$$

також співвідношень (14) та (25), маємо

$$\begin{aligned} |c_k(r_2, \mathcal{F}) - c_k(r_1, \mathcal{F})| &\leq \left(1 - \gamma^{-|k|}(r_1) \right) \left(\frac{6 T(\gamma(r_1)\gamma^2(r_2)r_1, u)}{k \varepsilon(r_2)} + \right. \\ &\left. + \frac{T(\gamma(r_1)\gamma^2(r_2)r_1, u)}{k \varepsilon(r_2)} \right) = \left(1 - \gamma^{-|k|}(r_1) \right) \frac{7 T(\gamma(r_1)\gamma^2(r_2)r_1, u)}{k \varepsilon(r_2)}. \end{aligned}$$

Для $k \leq -1$ зі співвідношень (9) одержуємо

$$\begin{aligned} c_k(r_2, \mathcal{F}) - c_k(r_1, \mathcal{F}) &= c_k(r_2, \mathcal{F}) - \gamma^k(r_1) c_k(r_1, \mathcal{F}) - \\ &- (1 - \gamma^k(r_1)) c_k(r_1, \mathcal{F}) = \int_0^{r_2} \left(\frac{t}{r_2} \right)^{|k|} \frac{n_k(t, u)}{t} dt - \int_0^{r_1} \left(\frac{t}{r_2} \right)^{|k|} \frac{n_k(t, u)}{t} dt - \\ &- (1 - \gamma^k(r_1)) c_k(r_1, \mathcal{F}) = \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{t}{r_2} \right)^{|k|} \frac{n_k(t, u)}{t} dt - (1 - \gamma^k(r_1)) c_k(r_1, \mathcal{F}), \end{aligned}$$

тому

$$\begin{aligned} |c_k(r_2, \mathcal{F}) - c_k(r_1, \mathcal{F})| &\leq (1 - \gamma^k(r_1)) \left(\frac{n(r_2, u)}{|k|} + |c_k(r_2, \mathcal{F})| \right) \leq \\ &\leq (1 - \gamma^k(r_1)) T(\gamma(r_1) \gamma^2(r_2) r_1, u) \left(\frac{1}{|k| \varepsilon(r_2)} + \frac{3}{|k| \varepsilon(r_2)} \right) \leq \\ &\leq (1 - \gamma^k(r_1)) \frac{4 T(\gamma(r_1) \gamma^2(r_2) r_1, u)}{|k| \varepsilon(r_2)}. \end{aligned}$$

Нехай $k = 0$. Тоді

$$\begin{aligned} |c_0(r_2, \mathcal{F}) - c_0(r_1, \mathcal{F})| &= \int_{r_1}^{r_2} \frac{n(t, u)}{t} dt \leq n(r_2, u) \log \gamma(r_1) \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon(r_1) \gamma(r_2)}{2 \varepsilon(r_2)} N(\gamma^2(r_2) r_2, u) \leq \frac{\varepsilon(r_1) T(\gamma(r_1) \gamma^2(r_2) r_1, u)}{\varepsilon(r_2)}. \end{aligned}$$

□

Теорема 3. Нехай $0 < r_1 < +\infty$, $r_2 = \gamma(r_1) r_1$, де $\gamma(t) = 1 + \varepsilon(t)$, $0 < \varepsilon(t) \leq 1$, $\varepsilon(t)$ – неспадна на $(0, +\infty)$ функція; u – субгармонійна в $\mathbb{D}_{8r_1}$; $u(0) = 0$. Тоді

$$|m_q(r_2, \mathcal{F}) - m_q(r_1, \mathcal{F})| \leq B(q) \sqrt[q]{\frac{\varepsilon(r_1)}{\varepsilon^2(r_2)}} T(\gamma(r_1) \gamma^2(r_2) r_1, u), \quad 1 \leq q \leq 2;$$

$$|m_q(r_2, \mathcal{F}) - m_q(r_1, \mathcal{F})| \leq B(q) \frac{\sqrt[q]{\varepsilon(r_1)}}{\varepsilon(r_2)} T(\gamma(r_1) \gamma^2(r_2) r_1, u), \quad 2 \leq q < +\infty;$$

де $B(q) = 16 \sqrt[q]{9}/3$ при $1 \leq q \leq 2$ і $B(q) = 8(2q)^{1-1/q}$ при $2 \leq q < +\infty$.

Доведення. З нерівності трикутника випливає, що для $p \in [1, +\infty)$

$$|m_p(r_2, \mathcal{F}) - m_p(r_1, \mathcal{F})| \leq \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\mathcal{F}(r_2 e^{i\theta}) - \mathcal{F}(r_1 e^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{1/p}. \quad (26)$$

Нехай $p = 1$. Тоді, з огляду на (11), одержимо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\mathcal{F}(r_1 e^{i\theta}) - \mathcal{F}(r_2 e^{i\theta})| d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial \mathcal{F}(te^{i\theta})}{\partial t} dt \right| d\theta \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} |q(te^{i\theta})| d\theta dt. \end{aligned} \quad (27)$$

Застосуємо до оцінки останнього інтеграла лему 3 з $E(t) = [0, 2\pi]$ ($t \in [r_1, r_2]$), $r_2 = \gamma(r_1) r_1$, $R = \gamma(r_1) \gamma(r_2) r_1$ і $\sigma = \gamma(r_2)$. Тоді співвідношення (27) набуде вигляду

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\mathcal{F}(r_1 e^{i\theta}) - \mathcal{F}(r_2 e^{i\theta})| d\theta \leq$$

$$\leq 4 \frac{\varepsilon(r_1)}{\varepsilon(r_2)} \left(\frac{\gamma(r_2)}{\gamma(r_1)\varepsilon(r_2)} + \frac{\gamma(r_2)}{\sqrt{2}\varepsilon(r_1)} \left(\varepsilon(r_1) \log \left(1 + \frac{2\pi}{\varepsilon(r_1)} \right) + 2\pi \log \left(1 + \frac{\varepsilon(r_1)}{2\pi} \right) \right) \right) \times \\ \times T(\gamma(r_1)\gamma^2(r_2)r_1, u) \leq 48 \frac{\varepsilon(r_1)}{\varepsilon^2(r_2)} T(\gamma(r_1)\gamma^2(r_2)r_1, u). \quad (28)$$

Нехай $p \geq 2$, $q = p/(p-1)$. Тоді з урахуванням леми 4 і нерівностей Хаусдорфа-Юнга та Мінковського, одержимо

$$\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\mathcal{F}(r_2 e^{i\theta}) - \mathcal{F}(r_1 e^{i\theta})|^q d\theta \right\}^{1/q} \leq |c_0(r_2, \mathcal{F}) - c_0(r_1, \mathcal{F})| + \\ + \left\{ 2 \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k(r_2, \mathcal{F}) - c_k(r_1, \mathcal{F})|^p \right\}^{1/p} \leq \frac{\varepsilon(r_1) T(\gamma(r_1)\gamma^2(r_1)r_1, u)}{\varepsilon(r_2)} + \\ + \frac{7 \sqrt[3]{2} T(\gamma(r_1)\gamma^2(r_2)r_1, u)}{\varepsilon(r_2)} \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1 - \gamma^{-k}(r_1)}{k} \right)^p \right\}^{1/p}. \quad (29)$$

Маємо

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1 - \gamma^{-k}(r_1)}{k} \right)^p \leq \int_1^{+\infty} \left(\frac{1 - e^{-t \log \gamma(r_1)}}{t} \right)^p dt = \\ = (\log \gamma(r_1))^{p-1} \int_{\log(\gamma(r_1))}^{+\infty} \left(\frac{1 - e^{-x}}{x} \right)^p dx \leq (\log \gamma(r_1))^{p-1} \int_0^1 \left(\frac{1 - e^{-x}}{x} \right)^p dx + \\ + (\log \gamma(r_1))^{p-1} \int_1^{+\infty} \left(\frac{1 - e^{-x}}{x} \right)^p dx \leq q (\log \gamma(r_1))^{p-1}.$$

Підставивши цю нерівність в (29), одержуємо

$$\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\mathcal{F}(r_2 e^{i\theta}) - \mathcal{F}(r_1 e^{i\theta})|^q d\theta \right\}^{1/q} \leq \left(\frac{\varepsilon(r_1)}{\varepsilon(r_2)} + \frac{7(2q)^{1-1/q} (\log \gamma(r_1))^{1/q}}{\varepsilon(r_2)} \right) \times \\ \times T(\gamma(r_1)\gamma^2(r_2)r_1, u) \leq 8(2q)^{1-1/q} \frac{\sqrt[q]{\varepsilon(r_1)}}{\varepsilon(r_2)} T(\gamma(r_1)\gamma^2(r_2)r_1, u). \quad (30)$$

Зрештою, для $1 \leq q \leq 2$ необхідна нерівність випливає з нерівностей (28), (30), та нерівності (див. теорему 10.12 з [20])

$$\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\mathcal{F}(r_2 e^{i\theta}) - \mathcal{F}(r_1 e^{i\theta})|^q d\theta \right\}^{1/q} \leq \\ \leq \left\{ \int_0^{2\pi} |\mathcal{F}(r_2 e^{i\theta}) - \mathcal{F}(r_1 e^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} \right\}^{(2-q)/q} \left\{ \left[\int_0^{2\pi} |\mathcal{F}(r_2 e^{i\theta}) - \mathcal{F}(r_1 e^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \right]^{1/2} \right\}^{2(1-1/q)}.$$

□

Зауваження 1. Нагадаємо, що множина $E \subset [1, +\infty)$ називається множиною скінченної логарифмічної міри, якщо інтеграл $\int_E d(\log t)$ збігається. Під час доведення леми 2 з [12] доведено таке твердження.

Лема 5. *Нехай $\varphi(t)$ – неперервна, додатна функція, задана на $[t_0, +\infty)$, неспадна, $\varphi(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, причому $\int_{t_0}^{+\infty} dt/\varphi(t) < +\infty$. Тоді для всіх $r \geq r_0^*$, крім, можливо, множини скінченної логарифмічної міри*

$$T((1 + 1/\varphi(\log(T(r, u))))r, u) < eT(r, u).$$

Із леми 5 та теореми 2 випливає такий наслідок.

Наслідок 1. *Нехай функція $\varphi(r)$ така, як в лемі 5. Нехай також виконуються умови теореми 2. Тоді для всіх $r \geq r_0^*$, крім, можливо, множини скінченної логарифмічної міри при $r \rightarrow +\infty$*

$$m_q(r, \mathcal{F}) = o(T(r, u)\varphi^{1-\alpha}(\log T(r, u))), \quad 0 \leq \alpha < 1 - 1/q, \quad 1 \leq q \leq 2,$$

$$m_q(r, \mathcal{F}) = o(T(r, u)\varphi^{1-\alpha}(\log T(r, u))), \quad 0 \leq \alpha < 1/q, \quad 2 \leq q < +\infty.$$

Доведення. За теоремою 2

$$m_q(r, \mathcal{F}) \leq 17 \cdot 2^{1-1/q} \frac{T(\gamma^2(r)r, u)}{\sqrt[q]{\varepsilon(r)}}, \quad 1 \leq q \leq 2;$$

$$m_q(r, \mathcal{F}) \leq 17 q^{1-1/q} \frac{\sqrt[q]{\varepsilon(r)} T(\gamma^2(r)r, u)}{\varepsilon(r)}, \quad 2 \leq q < +\infty.$$

Для завершення доведення цього наслідку достатньо застосувати лему 5 з $\gamma^2(r) = (1 + 1/\varphi(\log(T(r, u))))$, звідси $\varepsilon(r) = \sqrt{1 + 1/\varphi(\log T(r, u))} - 1$, і врахувати асимптотичну рівність $\log(1 + \varepsilon(r)) \sim 1/(2\varphi(\log(T(r, u))))$, $r \rightarrow +\infty$. $\square$

Автори висловлюють щирю подяку проф. О. Б. Скасківу за низку суттєвих зауважень і пропозицій, які допомогли усунути наявні в попередньому варіанті цієї статті недоліки і зробити викладення результатів логічнішими та послідовнішими.

-
1. Rubel L.A. A Fourier series method for meromorphic and entire functions / Rubel L.A., Taylor B.A. // Bull. Soc. Math. France. – 1968. – Vol. 96. – P. 53-96.
 2. Rubel L.A. Entire and meromorphic functions / Rubel L.A. – New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1996.
 3. Кондратьюк А.А. Ряды Фурье и мероморфные функции / Кондратьюк А.А. – Львов, 1988.
 4. Miles J.B. On the growth of meromorphic functions having at least one deficient value / Miles J.B., Shea D.F. // Duke. Math. J. – 1976. – Vol. 43, №1. – P. 171-186.
 5. Sons L.R. Zeros distribution of functions with slow or moderate growth in the unit disc / Sons L.R. // Pacific. J. Math. – 1982. – Vol. 99. – P. 473-481.
 6. Хейман У. Мероморфные функции / Хейман У. – М., 1966.
 7. Chuang C.T. Sur la croissance des fonctions / Chuang C.T. // Kexue Tongbao. – 1981. – Vol. 26. – P. 677-684.

8. *Марченко И.И.* Возрастание целых функций / *Марченко И.И., Щерба А.И.* // Сиб. мат. журн. – 1984. – Т. 25. – С. 598-605.
9. *Dai C.J.* On the growth of entire and meromorphic functions of infinite order / *Dai C.J., Drasin D., Li B.Q.* // J. Analyse Math. – 1990. – Vol. 55. – P. 217-228.
10. *Тарасюк С.І.* Інтегральні середні δ -субгармонійних в $\mathbb{R}^n$ функцій і класи цілком регулярного зростання / *Тарасюк С.І.* // Укр. мат. журн. – 1992. – Т. 44, №3. – С. 408-416.
11. *Кондратюк А.А.* Порівняння лебегових середніх і неванліннівської характеристики субгармонійних функцій / *Кондратюк А.А., Тарасюк С.І.* // Мат. студії. – 1992. – Т. 1. – С. 74-80.
12. *Васильків Я.В.* Асимптотична поведінка логарифмічних похідних та логарифмів мероморфних функцій цілком регулярного зростання в $L^p[0, 2\pi]$ -метриці. Ч. 1 / *Васильків Я.В.* // Мат. студії. – 1999. – Т. 12, №1. – С. 37-58.
13. *Kondratyuk A.A.* Conjugate of subharmonic function / *Kondratyuk A.A., Vasylykiv Ya.V.* // Mat. Stud. – 2000. – Vol. 13, №2. – P. 173-180.
14. *Drasin D.* Polya peaks and oscilation of positive functions / *Drasin D., Shea D. F.* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1972. – Vol. 34, №2. – P. 403-411.
15. *Хейман У.* Субгармонические функции / *Хейман У., Кеннеди П.* – М., 1980.
16. *Кондратюк А.А.* О методе сферических гармоник для субгармонических функций / *Кондратюк А.А.* // Матем. сб. – 1981. – Т. 116, №2. – С. 147-165.
17. *Содин М.Л.* Об асимптотической регулярности роста субгармонических функций конечного порядка / *Содин М.Л.* // Укр. мат. журн. – 1984. – Т. 36, №5. – С. 646-650.
18. *Гольдберг А.А.* Асимптотическое поведение мероморфных функций вполне регулярно роста и их логарифмических производных / *Гольдберг А.А., Строчик Н.Н.* // Сиб. мат. журн. – 1985. – Т. 26, №6. – С. 29-38.
19. *Гольдберг А.А.* Распределение значений мероморфных функций / *Гольдберг А.А., Островский И.В.* – М., 1970.
20. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: в 2 т. / *Зигмунд А.* – М., 1965.

INTEGRAL MEANS OF FUNCTIONS CONJUGATE TO SUBHARMONIC FUNCTIONS

Yaroslav VASYLKIV, Lyubomyr POLITYLO

*Ivan Franko National University of L'viv,
79000 L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: YaVVasylikiv@gmail.com, Ljupol7@gmail.com*

For the pair of functions $\mathcal{F}(z) := u(z) + i\check{u}(z)$, where $u(z)$ – subharmonic in $\mathbb{C}$ function, harmonic in some neighbourhood of $z = 0$, $u(0) = 0$, and $\check{u}(z)$ – conjugate to $u(z)$, it is obtained estimation of modulus of Fourier coefficients $|c_k(r, \mathcal{F})|$, $0 < r < +\infty$, $k \in \mathbb{Z}$, in the terms of Nevanlinna characteristic $T(r, u)$; established unimprovable estimates of q -th Lebesgue integral means $m_q(r, \mathcal{F})$, $0 < r < +\infty$, $1 \leq q < +\infty$; evaluated the q -th integral modulus of continuity for function $\mathcal{F}$.

Key words: subharmonic function, function conjugate to subharmonic function, Fourier series method, Fourier coefficients, Lebesgue integral means.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СРЕДНИЕ ФУНКЦИЙ, СОПРЯЖЕННЫХ К СУБГАРМОНИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ

Ярослав ВАСИЛЬКИВ, Любомир ПОЛИТЫЛО

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000 Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: YaVVasylikiv@gmail.com, Ljupol7@gmail.com*

Для пары функций $\mathcal{F}(z) := u(z) + i\check{u}(z)$, где $u(z)$ – субгармоническая в $\mathbb{C}$ функция, гармоническая в некоторой окрестности точки $z = 0$, $u(0) = 0$, и $\check{u}(z)$ – сопряженная функция к $u(z)$, получены оценки модулей коэффициентов Фурье $|c_k(r, \mathcal{F})|$, $0 < r < +\infty$, $k \in \mathbb{Z}$ в терминах неванлинновской характеристики $T(r, u)$; установлены наилучшие оценки q -х лебеговских интегральных средних $m_q(r, \mathcal{F})$, $0 < r < +\infty$, $1 \leq q < +\infty$; оценены q -е интегральные модули непрерывности функции $\mathcal{F}$.

Ключевые слова: субгармоническая функция, функция сопряженная к субгармонической функции, метод рядов Фурье, коэффициенты Фурье, лебеговские интегральные средние.

Стаття надійшла до редколегії 25.03.2010

Прийнята до друку 22.12.2010

УДК 517.928:517.927

ПРО ЗАДАЧУ ШТУРМА-ЛІУВІЛЛЯ НА ЗІРКОВИХ ГРАФАХ З “ВАЖКИМИ” ВУЗЛАМИ

Юрій ГОЛОВАТИЙ, Геннадій ГРАБЧАК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000 Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: yu_holovaty@franko.lviv.ua, h_hrabchak@franko.lviv.ua

Вивчено спектральні властивості граничної задачі для сингулярно збуреної задачі на зірковому графі, яка моделює власні коливання в'язки струн із збуренням густини в околі точки їхнього з'єднання. Розглянуто випадок сили збурення, за якого гранична задача може бути несамоспряженою. З'ясовано структури її спектра і кореневих підпросторів, побудовано системи власних і приєднаних функцій, досліджено питання про геометричну й алгебричну кратності власних значень.

Ключові слова: диференціальні рівняння на графах, сингулярне збурення, приєднана маса, спектр, власне значення, власний вектор, приєднаний вектор, асимптотика.

Вступ. Природними геометричними моделями фізичних процесів у системах одновимірних континуумів, які взаємодіють через кінці, є асоційовані з цими системами геометричні граfi, а математичними моделями – крайові задачі для диференціальних рівнянь на них. Такі задачі виникають під час моделювання різноманітних фізичних явищ: деформацій і коливань пружних мережоподібних конструкцій (струнних і стержневих сіток), опис процесів у мережах хвильоводів, дифузійних процесів у мережах, розрахунків електричних і гідравлічних мереж, коливань складних молекул, поширення сигналів в нейронах, процесів росту рослин тощо. Це призвело до значної активізації протягом останніх трьох десятиріч розвитку теорії диференціальних рівнянь на геометричних графах і відповідно до появи численних публікацій.

На граfi переносили результати якісної теорії звичайних диференціальних рівнянь, вивчали спектральні властивості та їхній зв'язок з геометрією графів. З'ясувалось, що деякі результати класичної теорії переносяться на граfi нетривіально (наприклад, додатність функції Гріна), в інших же аспектах результати досліджень

задач на графах суттєво відрізняються від класичних, зокрема, що стосується кратності спектра та питання самоспряженості операторів (див. [1] та огляд [2] з бібліографією).

Серед перших досліджень сингулярно збурених крайових задач на графах з використанням асимптотичного аналізу на таких геометричних об'єктах, є праця [3]. В ній для випадку графа загальної структури узагальнено модель, запропоновану О. А. Олейнік [4] для коливних систем з сильно нерівномірним розподілом маси. Хоча вивчення властивостей коливних континуумів з приєднаними та зосередженими масами відбувалося ще у XVIII ст, розвиток новітніх технологій, пов'язаних із створенням матеріалів з новими властивостями, зокрема – композитних матеріалів, призвів до значного зацікавлення дослідників математичними задачами теорії сильно неоднорідних середовищ і у підсумку до побудови нових математичних моделей з більш агресивною зміною характеристик. Ці моделі допомогли описати багато відомих з експериментів ефектів, наприклад, відомий у механіці ефект локалізації реакції – наявність локальних коливань в околі зони збурення маси.

Вивченню асимптотичних властивостей одновимірних коливних систем із сингулярно збуреною густиною присвячено праці [4]–[8]. В них з'ясовано і ефект локальних коливань. У [4]–[5] досліджено спектральні властивості струни з нерівномірним розподілом маси. В праці [6] побудовано повні асимптотичні розвинення власних значень і власних функцій цієї задачі. Подібні результати для диференціальних операторів четвертого порядку (модель стержня) одержано в [7]. Багатовимірні задачі з різними збуреннями густини маси розглянуто в [9]–[11]. Доволі детальний огляд праць, присвячених таким задачам, наведено в [12].

Ця праця є логічним продовженням дослідження сформульованої у [3] задачі, коли локальні збурення густини набувають величини, за якої на колювання всієї системи помітно починають впливати процеси на областях збурення. Взаємодія збуреної і незбуреної частин системи породжує ситуацію, коли гранична задача є несамопряженою. Таку ситуацію з несамопряженою граничною задачею розглянуто в [13]. Це зумовлює, порівняно з [3], суттєві зміни в підходах до вивчення збуреної задачі і в техніці її асимптотичного аналізу. Ми використовуємо концепцію дослідження, запропоновану в [13]. Важливим моментом аналізу є вивчення спектральних властивостей граничної задачі, дослідженню яких присвячено нашу працю.

У пункті 1 наведено основні поняття теорії диференціальних рівнянь на геометричних графах і деякі позначення.

В пункті 2 сформульовано збурену спектральну задачу для рівняння Штурма-Ліувілья на геометричному графі, яка є математичним описом фізичної задачі про колювання струнної сітки зі збуренням густини в околі незакріплених вузлів. Ми обмежились формулюванням модельної задачі для зіркового графа, якій в механічній інтерпретації відповідає в'язка струн, з'єднаних в одному незакріпленому вузлі та з закріпленими кінцевими точками. Збурену частину механічної системи назовемо важким кріпленням. Малим параметром ε в задачі є відношення характерних лінійних розмірів важкого кріплення та довжини струн. Коли ε прямує до нуля, в околі точки кріплення струн концентрується велика маса, причому вважаємо, що

відношення усереднених густин струн і кріплення має порядок ε^{-2} (в [3] цей порядок дорівнює ε^{κ} з $\kappa < 2$). Перше власне значення такої задачі є простим і безмежно малим при $\varepsilon \rightarrow 0$ [3].

У пункті 3 з'ясовано граничну спектральну задачу на головні члени асимптотик решти власних значень і відповідних власних функцій; побудовано у відповідному гільбертовому просторі асоційований з граничною задачею оператор T і спряжений до нього оператор T^* . Хоча збурена задача при кожному фіксованому значенні $\varepsilon > 0$ є самоспряженою, для граничної задачі можлива ситуація, за якої оператори T і T^* не збігаються в жодному гільбертовому просторі, тобто гранична задача є несамо-спряженою. Ми не обґрунтовуємо збіжності при $\varepsilon \rightarrow 0$ збуреної задачі до граничної, а зосередимося на вивченні її спектральних властивостей.

В пункті 4 з'ясовано структуру спектра $\sigma(T)$ граничної задачі: він є об'єднанням точок спектрів $\sigma(\hat{T}_1)$ і $\sigma(T_2)$ відповідно незбуреної задачі на графі з закріпленими вершинами та задачі Неймана на зірковому підграфі, який відповідає області збурення густини (тут $\hat{T}_1$ і T_2 – асоційовані з цими задачами самоспряжені оператори). Цей факт доводимо, явно побудувавши резольвенту оператора T .

Пункт 5 присвячено дослідженню алгебричної та геометричної кратностей власних значень $\lambda \in \sigma(T)$ граничного оператора і з'ясуванню структури відповідних кореневих підпросторів. Якщо $\lambda \notin \sigma(\hat{T}_1) \cap \sigma(T_2)$, то згадані кратності збігаються і дорівнюють кратності λ як точки спектра $\sigma(\hat{T}_1)$, (якщо $\lambda \in \sigma(\hat{T}_1)$) чи $\sigma(T_2)$ (якщо $\lambda \in \sigma(T_2)$). Несамоспряженість оператора T виявляється у випадку, коли $\sigma(\hat{T}_1) \cap \sigma(T_2) \neq \emptyset$: якщо $\lambda \in \sigma(\hat{T}_1) \cap \sigma(T_2)$, то загалом алгебрична і геометрична кратності λ не збігаються і, крім власних, оператор T має приєднані вектори. Для цього випадку з'ясовано формулу для геометричної кратності λ (теорема 3) і показано, що алгебрична кратність λ є сумою алгебричних кратностей λ як точок спектрів $\sigma(\hat{T}_1)$ і $\sigma(T_2)$ (теорема 4). Побудовано системи власних і приєднаних векторів, показано, що в жордановій структурі кореневих підпросторів оператора T ланцюгів довжини більшої, ніж 2 не існує.

1. Диференціальні рівняння на графах. Основні поняття. Нехай $V = \{a_1, \dots, a_k\}$ – скінченна множина точок в $\mathbb{R}^3$, деякі з яких з'єднано гладкими неперетинними кривими. Елементи V називатимемо *вершинами*, а криві – *ребрами*. Множину ребер позначимо через E . Ребро, яке з'єднує точки a_i і a_j , позначимо через g_{ij} або (a_i, a_j) . Просторовий *геометричний граф* $G = G(V, E)$ – це сукупність вершин і ребер. Ребро і довільну з двох вершин, які воно з'єднує, назовемо *інцидентними*. Надалі $I(a)$ – множина всіх ребер, інцидентних до вершини a . *Степенем* $\deg(a)$ вершини a назовемо потужність $I(a)$.

Відображення $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ називатимемо *функцією на графі*, а через f_g позначатимемо її *звуження на ребро* g . Функція f є *неперервною на графі*, якщо вона неперервна на кожному ребрі і в кожній вершині. *Неперервність* f у вершині $a \in V$ означає, що $\lim_{x \rightarrow a} f_g(x) = f(a)$ для всіх $g \in I(a)$. Тобто, *граничні значення* $f_g(a)$ функції f на кінцях прилеглих до вершини a ребер збігаються з її значенням у цій вершині.

Нехай $C(G)$ – простір неперервних на G функцій, а $C\{G\}$ – простір функцій на G , рівномірно неперервних на ребрах, але значення яких у вершинах не зовсім

збігаються з граничними значеннями на кінцях прилеглих до цих вершин відповідних ребер. Уведемо також простір $C^n(G) = \{f \in C(G) : f_g \in C^n(\bar{g}) \text{ для всіх } g \in E\}$. Зауважимо, що похідні функцій на графі не визначені у вершинах – говоримо лише про граничні значення цих похідних вздовж ребер у їхніх кінцевих точках. Диференціювання на ребрі g проводимо за натуральним параметром цієї кривої. На кожному ребрі є дві натуральні параметризації, тому домовимося під $\frac{df}{dg}(a)$ розуміти *граничне значення похідної на прилеглому до вершини a кінці ребра g , взятої вздовж g у напрямі від вершини*. Похідні парного порядку від напрямку параметризації не залежать, тому писатимемо просто f'' . Це саме стосується добутків $f'g'$.

Інтеграл функції f на графі є сумою інтегралів по всіх його ребрах

$$\int_G f dG = \sum_{g \in E} \int_g f dg.$$

Нехай $L_2(G)$ – простір Лебега зі скалярним добутком $(u, v) = \int_G u \bar{v} dG$ і нормою $\|u\| = (u, u)^{1/2}$. Введемо простори Соболева

$$W_2^k\{G\} = \{f \in L_2(G) : f_g \in W_2^k(g) \text{ для всіх } g \in E\},$$

$$W_2^k(G) = \{f \in C(G) : f_g \in W_2^k(g) \text{ для всіх } g \in E\},$$

із скалярним добутком $(u, v)_k = \sum_{i=0}^k \int_G u^{(i)} \bar{v}^{(i)} dG$ та відповідною нормою

$$\|u\|_k = (u, u)_k^{1/2}.$$

Нехай Q – функція класу $C\{G\}$. *Крайовою задачею* для диференціального рівняння другого порядку $u'' + Qu = f$ на графі G називаємо сукупність диференціальних рівнянь $u_g'' + Q_g u_g = f_g$ на ребрах $g \in E$ графа і деяких умов у його вершинах. Розіб'ємо множину вершин графа на дві підмножини $V = V_0 \cup V_1$. У точках першої з них значення розв'язку u вважаємо відомими: $u(a) = \varphi(a)$ для всіх $a \in V_0$. У решті вершин вимагаємо, щоб

- функція u була неперервною

$$u_{g_1}(a) = u_{g_2}(a) = \dots = u_{g_r}(a), \quad (1)$$

де $g_1, \dots, g_r$ – ребра, інцидентні вершині a , $r = \deg(a)$;

- виконувалася умова

$$\sum_{g \in I(a)} \frac{du}{dg}(a) + q(a)u(a) = 0. \quad (2)$$

Якщо $q(a) = 0$, то (2) є класичною умовою Кірхгофа балансу струмів, теплових потоків, сил натягу і т. п. Доданок $q(a)u(a)$ у фізичних моделях означає наявність зосередженого у вершині a фактора – точкового заряду, точкового джерела тепла, зосередженої маси. Множину V_0 , в точках якої задаємо умови Діріхле, назвемо *межею графа*. Позначатимемо її надалі через ∂G . Вершини з множини V_1 назвемо *внутрішніми*. Зауважимо, що поділ вершин на граничні і внутрішні визначено типом заданих у них крайових умов, а не топологією графа. Розв'язок u крайової задачі шукаємо в класі $C^2(G)$.

Зауваження 1. Якщо внутрішня вершина є кінцевою, тобто $\deg(a) = 1$, то умови (1), (2) вироджуються у крайову умову $\frac{du}{dg}(a) + q(a)u(a) = 0$, де g – єдине ребро, інцидентне до a . Отже, кінцеві вершини, в яких задано третю крайову умову чи умову Неймана, вважаємо внутрішніми.

Нехай $\dot{G} = G \setminus V$ – теоретико-множинне об'єднання ребер. Трактуючи геометричний граф як стратифікований многовид, зручно використовувати “стратифікований” диференціальний оператор [1]

$$\left(\frac{d}{dG}u' + qu\right)(x) = \begin{cases} u''(x) + q(x)u(x), & x \in \dot{G}, \\ \sum_{g \in I(x)} \frac{du}{dg}(x) + q(x)u(x), & x \in V \setminus \partial G, \end{cases} \quad (3)$$

який діє на функції класу $C^2(G)$ і об'єднує диференціальні оператори другого порядку на ребрах та оператори першого порядку у внутрішніх вершинах. Надалі, формулюючи крайові задачі, ми опускатимемо умови неперервності (1), бо вони входять в означення простору $C^2(G)$.

Для кожної пари функцій u, v з класу $C^2\{G\}$ справджується формула

$$\int_G u''v dG = \sum_{a \in V} \sum_{g \in I(a)} \left(u_g(a) \frac{dv}{dg}(a) - \frac{du}{dg}(a) v_g(a) \right) + \int_G u v'' dG \quad (4)$$

– аналог формули Лагранжа на графі.

2. Формулювання задачі. Нехай $V = \{a, a_1, \dots, a_l\}$ і $E = \{(a, a_1), \dots, (a, a_l)\}$. Тоді $\Gamma = \Gamma(V, E)$ – зірковий граф і можна вважати, що всі його ребра $\gamma_j = (a, a_j)$, які з'єднують центр a зірки з вершинами a_j , $j = 1, \dots, l$, є прямолінійними відрізками. Нехай $b_1^\varepsilon, \dots, b_l^\varepsilon$ – точки перетину ребер графа Γ із сферою радіуса ε і центром в точці a . Якщо ε достатньо мале додатне число, то сфера перетинає усі ребра. Через Γ_ε позначимо підрозбиття графа Γ , яке містить нові вершини b_j^ε , $j = 1, \dots, l$, а через S_ε – граф, вирізаний сферою з Γ (див. рис. 1). Зрозуміло, що S_ε – зірковий підграф Γ_ε з вершинами $a, b_1^\varepsilon, \dots, b_l^\varepsilon$ та ребрами $(a, b_1^\varepsilon), \dots, (a, b_l^\varepsilon)$.

Розглядаючи граф Γ як геометричну модель пучка струн, скріплених в одній точці, введемо лінійну густину ρ струн. Функція ρ належить класу $C\{\Gamma\}$ і є додатною на ребрах. Цю густину збуємо на підграфі S_ε , моделюючи стосунково важке кріплення струн. Нехай функція $q_\varepsilon \in C^\infty\{\Gamma\}$ додатна на ребрах графа S_ε і дорівнює нулеві в решті точок Γ_ε . У фізичній моделі не передбачено приєднаних мас у вершинах, тому припускаємо, що ρ і q_ε дорівнюють нулеві у всіх вершинах Γ_ε . Для кожного $\varepsilon > 0$ уведемо збурену густину системи

$$\rho_\varepsilon(x) = \rho(x) + \varepsilon^{-2} q_\varepsilon(x), \quad x \in \Gamma_\varepsilon.$$

Параметр ε є відношенням характерних лінійних розмірів кріплення та довжини струн і вважається достатньо малим. Коли ε прямує до нуля, в околі вершини a концентрується велика маса, причому відношення усереднених густин струн та кріплення має порядок ε^{-2} .

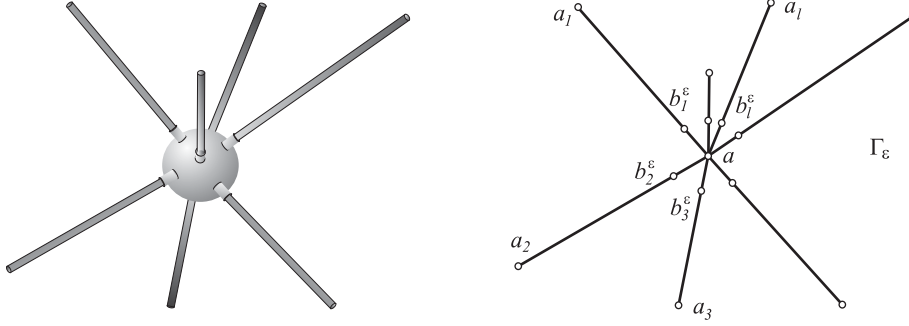


Рис. 1. Приклад струнної конструкції (фізичної моделі) та її реалізації за допомогою геометричного графа (геометричної моделі)

Ми вивчатимемо поведінку при $\varepsilon \rightarrow 0$ власних значень і власних підпросторів спектральної задачі

$$\frac{d}{d\Gamma_\varepsilon} u'_\varepsilon + \lambda^\varepsilon \rho_\varepsilon u_\varepsilon = 0 \quad \text{на } \Gamma_\varepsilon, \quad u_\varepsilon = 0 \quad \text{на } \partial\Gamma_\varepsilon, \quad (5)$$

де λ^ε – спектральний параметр; u_ε – власна функція. Вважаємо, що u_ε належить до класу $C^2(\Gamma_\varepsilon)$. Тут $\partial\Gamma_\varepsilon = \{a_1, \dots, a_l\}$ – множина кінцевих точок графа Γ_ε .

Конкретизуємо залежність збурення q_ε від малого параметра. Нехай S – образ в $\mathbb{R}_\xi^3$ графа S_ε при афінному відображенні $\xi = (x - a)/\varepsilon$. Граф S є зірковим і його реалізація не залежить від ε : образом вершини a є початок координат O простору $\mathbb{R}_\xi^3$, а вершини b_j^ε відображаються у фіксовані точки b_j . Введемо позначення $\zeta_j = (O, b_j)$ для ребер графа S . Нехай q – функція класу $C\{S\}$, додатна на ребрах і з нульовими значеннями у вершинах. Приймемо

$$q_\varepsilon(x) = \begin{cases} q(\frac{x-a}{\varepsilon}), & \text{коли } x \in S_\varepsilon, \\ 0, & \text{коли } x \in \Gamma_\varepsilon \setminus S_\varepsilon, \end{cases}$$

для всіх додатних ε .

Спектр задачі (5) дискретний і додатний для кожного $\varepsilon > 0$. З основами спектральної теорії для диференціальних операторів другого порядку на компактних геометричних графах можна ознайомитися в монографії [1]. Нехай

$$\lambda_1^\varepsilon \leq \lambda_2^\varepsilon \leq \dots \leq \lambda_k^\varepsilon \leq \dots$$

– власні значення задачі (5), занумеровані з врахуванням кратності, скінченної для кожного власного значення. Відповідні власні функції позначатимемо через $u_{\varepsilon,k}$. В [3] доведено, що перше власне значення λ_1^ε прямує до нуля і має асимптотику

$$\lambda_1^\varepsilon = \varepsilon \left(\int_S q dS \right)^{-1} \sum_{j=1}^l \frac{1}{|\gamma_j|} + O(\varepsilon^{3/2}), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

де $|\gamma_j|$ – довжина ребра γ_j . Решта власних значень відокремлені від нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$ [3, лема 5]. Асимптотика саме цих власних значень є предметом дослідження нашої статті.

3. Асимптотика спектра та граничний оператор. Позначимо через λ^ε одне з власних значень λ_k^ε , $k > 1$, яке не прямує до нуля, а через u_ε – відповідну власну функцію. Шукатимемо їхні асимптотики у вигляді

$$\lambda^\varepsilon \sim \lambda + \varepsilon\lambda_1 + \dots, \quad u_\varepsilon \sim \begin{cases} u(x) + \varepsilon u_1(x) + \dots, & x \in \Gamma_\varepsilon \setminus S_\varepsilon, \\ v(\varepsilon^{-1}(x-a)) + \varepsilon v_1(\varepsilon^{-1}(x-a)) + \dots, & x \in S_\varepsilon. \end{cases} \quad (6)$$

Підставимо ці ряди в задачу (5). Оскільки $\rho_\varepsilon = \rho$ на множині $\Gamma_\varepsilon \setminus S_\varepsilon$, то функція u буде розв'язком рівняння

$$u'' + \lambda\rho(x)u = 0, \quad x \in \dot{\Gamma},$$

і задовольнятиме крайові умови

$$u = 0, \quad x \in \partial\Gamma.$$

Умови, яким функція u підпорядкована у вершині a , з'ясуємо нижче.

Рівняння (5) на ребрах графа $S \subset \mathbb{R}_\varepsilon^3$ набуває вигляду

$$\varepsilon^{-2} \frac{d^2 u_\varepsilon}{d\xi^2} + \lambda^\varepsilon (\rho(a + \varepsilon\xi) + \varepsilon^{-2} q(\xi)) u_\varepsilon = 0, \quad \xi \in \dot{S}.$$

Сингулярні доданки порядку ε^{-2} диктують рівняння для головного члена асимптотики на S_ε

$$v'' + \lambda q(\xi)v = 0, \quad \xi \in \dot{S}. \quad (7)$$

Крім того, функція v є неперервною у вершині O зірки S і задовольняє умови Кірхгофа

$$v_{\zeta_1}(O) = v_{\zeta_2}(O) = \dots = v_{\zeta_l}(O), \quad \sum_{j=1}^l \frac{dv}{d\zeta_j}(O) = 0. \quad (8)$$

Власна функція u_ε неперервно диференційовна в класичному сенсі у вершинах b_j^ε степеня 2, тому

$$u_{\gamma_j}(b_j^\varepsilon) + \varepsilon u_{1,\gamma_j}(b_j^\varepsilon) + \dots \sim v_{\zeta_j}(b_j) + \varepsilon v_{1,\zeta_j}(b_j) + \dots, \\ \left(\varepsilon^{-1} \frac{dv}{d\zeta_j}(b_j) + \frac{dv_1}{d\zeta_j}(b_j) + \dots \right) + \left(\frac{du}{d\gamma_j}(b_j^\varepsilon) + \varepsilon \frac{du_1}{d\gamma_j}(b_j^\varepsilon) + \dots \right) \sim 0$$

Звідси для всіх $j = 1, \dots, l$ одержуємо

$$u_{\gamma_j}(a) = v_{\zeta_j}(b_j), \quad (9)$$

$$\frac{dv}{d\zeta_j}(b_j) = 0, \quad (10)$$

бо $b_j^\varepsilon \rightarrow a$ в метриці простору $\mathbb{R}^3$. Скориставшись позначенням (3), рівності (7), (8) та (10) можна зінтегрувати в одне рівняння

$$\frac{d}{dS} v' + \lambda q v = 0$$

на графі S “без межі” ($\partial S = \emptyset$). У цьому записі враховано, що густина q дорівнює нулю у всіх вершинах S .

Введемо відображення $\ell_a: C(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}^l$ та $\ell^b: C(S) \rightarrow \mathbb{C}^l$ за формулами

$$\ell_a(f) = (f_{\gamma_1}(a), \dots, f_{\gamma_l}(a)), \quad \ell^b(f) = (f_{\zeta_1}(b_1), \dots, f_{\zeta_l}(b_l)).$$

Тоді умови (9) можна записати як $\ell_a(u) = \ell^b(v)$, а задача на головні члени рядів (6) набуває вигляду

$$\begin{cases} u'' + \lambda \rho(x)u = 0, & x \in \dot{\Gamma}, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Gamma, \\ \frac{d}{dS}v' + \lambda q(\xi)v = 0, & \xi \in S, \\ \ell_a(u) = \ell^b(v). \end{cases} \quad (11)$$

Цю задачу називатимемо *граничною*.

Побудуємо оператор, асоційований із задачею (11). Нехай $L^2(\rho, \Gamma)$ і $L^2(q, S)$ – вагові простори Лебега. Введемо в цих просторах оператори

$$T_1 = -\frac{1}{\rho} \frac{d^2}{dx^2}, \quad D(T_1) = \{u \in W_2^2(\Gamma) : u = 0 \text{ на } \partial\Gamma\};$$

$$T_2 = -\frac{1}{q} \frac{d^2}{d\xi^2}, \quad D(T_2) = \left\{v \in W_2^2(S) : \sum_{k=1}^l \frac{dv}{d\zeta_k}(O) = 0, \frac{dv}{d\zeta_j}(b_j) = 0, j = 1, \dots, l\right\},$$

відповідно. В просторі $\mathcal{L} = L^2(\rho, \Gamma) \oplus L^2(q, S)$ розглянемо матричний оператор

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}, \quad D(T) = \{(f_1, f_2) \in D(T_1) \oplus D(T_2) : \ell_a(f_1) = \ell^b(f_2)\}.$$

Тоді задача (11) еквівалентна операторному рівнянню $Tw = \lambda w$, де $w = (u(x), v(\xi))$.

Побудуємо спряжений оператор T^* . Нехай $w \in D(T)$ і $z \in W_2^2(\Gamma) \oplus W_2^2(S)$, причому $w = (u, v)$ і $z = (\varphi, \psi)$. Скориставшись формулою (4), отримаємо

$$\begin{aligned} (Tw, z)_{\mathcal{L}} &= \int_{\Gamma} u'' \overline{\varphi} d\Gamma + \int_S v'' \overline{\psi} dS = \sum_{k=1}^l \left(u_{\gamma_k}(a_k) \overline{\frac{d\varphi}{d\gamma_k}}(a_k) - \frac{du}{d\gamma_k}(a_k) \overline{\varphi_{\gamma_k}}(a_k) + \right. \\ &+ u_{\gamma_k}(a) \overline{\frac{d\varphi}{d\gamma_k}}(a) - \frac{du}{d\gamma_k}(a) \overline{\varphi_{\gamma_k}}(a) \Big) + \sum_{k=1}^l \left(v_{\zeta_k}(b_k) \overline{\frac{d\psi}{d\zeta_k}}(b_k) - \frac{dv}{d\zeta_k}(b_k) \overline{\psi_{\zeta_k}}(b_k) + \right. \\ &\left. + v_{\zeta_k}(O) \overline{\frac{d\psi}{d\zeta_k}}(O) - \frac{dv}{d\zeta_k}(O) \overline{\psi_{\zeta_k}}(O) \right) + \int_{\Gamma} u \overline{\varphi''} d\Gamma + \int_S v \overline{\psi''} dS. \end{aligned}$$

Тепер врахуємо умови, накладені на вектор w , зокрема, залежність між похідними

$$\frac{dv}{d\zeta_l}(O) = - \sum_{k=1}^{l-1} \frac{dv}{d\zeta_k}(O). \text{ Тоді остання рівність набуде вигляду}$$

$$\begin{aligned} (Tw, z)_{\mathcal{L}} &= - \sum_{k=1}^l \left(\frac{du}{d\gamma_k}(a_k) \overline{\varphi_{\gamma_k}}(a_k) + \frac{du}{d\gamma_k}(a) \overline{\varphi_{\gamma_k}}(a) \right) + \sum_{k=1}^l u_{\gamma_k}(a) \left(\overline{\frac{d\varphi}{d\gamma_k}}(a) + \overline{\frac{d\psi}{d\zeta_k}}(b_k) \right) - \\ &- \sum_{k=1}^{l-1} \frac{dv}{d\zeta_k}(O) (\overline{\psi_{\zeta_k}}(O) - \overline{\psi_{\zeta_l}}(O)) + v(O) \sum_{k=1}^l \overline{\frac{d\psi}{d\zeta_k}}(O) + \int_{\Gamma} u \overline{\varphi''} d\Gamma + \int_S v \overline{\psi''} dS. \end{aligned}$$

Отже, позаінтегральні доданки зникають при всіх $w \in D(T)$ тоді і лише тоді, коли

$$\varphi_{\gamma_k}(a_k) = 0, \quad \varphi_{\gamma_k}(a) = 0, \quad \frac{d\varphi}{d\gamma_k}(a) + \frac{d\psi}{d\zeta_k}(b_k) = 0$$

для всіх $k = 1, \dots, l$, а також

$$\psi_{\zeta_1}(O) = \psi_{\zeta_2}(O) = \dots = \psi_{\zeta_l}(O), \quad \sum_{k=1}^l \frac{d\psi}{d\zeta_k}(O) = 0.$$

Ці умови характеризують область визначення спряженого оператора. А саме

$$T^* = \begin{pmatrix} \hat{T}_1 & 0 \\ 0 & \hat{T}_2 \end{pmatrix},$$

$$D(T^*) = \{z = (\varphi, \psi) \in D(\hat{T}_1) \oplus D(\hat{T}_2) : \frac{d\varphi}{d\gamma_k}(a) + \frac{d\psi}{d\zeta_k}(b_k) = 0, k = 1, \dots, l\},$$

де $\hat{T}_1$ – звуження оператора T_1 на $D(\hat{T}_1) = \{u \in D(T_1) \cap C(\Gamma) : u(a) = 0\}$, а $\hat{T}_2$ – розширення оператора T_2 на $D(\hat{T}_2) = \{v \in W_2^2(S) : \sum_{k=1}^l \frac{dv}{d\zeta_k}(O) = 0\}$.

Отже, ми довели, що в просторі $\mathcal{L}$ оператор T несамопряжений. Далі доведемо, що цей оператор може мати приєднані вектори. В цьому випадку в будь-якому іншому гільбертовому просторі гранична задача теж буде асоційована з несамопряженим оператором.

4. Спектр граничного оператора. Через $\sigma(B)$ і $\rho(B)$ позначатимемо відповідно спектр і резольвентну множину оператора B , а через $R_\mu(B) = (B - \mu E)^{-1}$ – резольвенту цього оператора. Опишемо структуру спектра граничного оператора.

Теорема 1. *Спектр оператора T дійсний, дискретний і збігається з множиною $\sigma(\hat{T}_1) \cup \sigma(T_2)$.*

Доведення. Спершу зауважимо, що оператори $\hat{T}_1$ і T_2 є самоспряженими в просторах $L^2(\rho, \Gamma)$ і $L^2(q, S)$ відповідно, а їхні резольвенти $R_\lambda(\hat{T}_1)$ і $R_\lambda(T_2)$ компактні.

Побудуємо резольвенту оператора T . Розглянемо рівняння

$$(T - \lambda E)w = f \tag{12}$$

для довільного $f \in \mathcal{L}$, або ж розгорнуто

$$\begin{cases} (T_1 - \lambda E)w_1 = f_1, \\ (T_2 - \lambda E)w_2 = f_2, \\ \ell_a(w_1) = \ell^b(w_2), \end{cases}$$

де $w = (w_1, w_2)$ і $f = (f_1, f_2)$.

Припустимо, що λ належить резольвентній множині $\rho(T_2)$. Тоді $w_2 = R_\lambda(T_2)f_2$. Функцію w_1 шукатимемо у вигляді суми $w_1 = y + z$, де

$$(\hat{T}_1 - \lambda E)y = f_1, \quad \begin{cases} (T_1 - \lambda E)z = 0, \\ \ell_a(z) = \ell^b(w_2). \end{cases}$$

Якщо λ лежить поза спектром оператора $\hat{T}_1$, то $y = R_\lambda(\hat{T}_1)f_1$. Крім того, тоді коректно визначений оператор $H_\lambda : W_2^2(S) \rightarrow W_2^2\{\Gamma\}$, що діє за таким правилом. Кожній функції $v \in W_2^2(S)$ поставимо у відповідність вектор $\ell^b(v) = (v(b_1), \dots, v(b_l))$. Далі знайдемо розв'язок u крайової задачі

$l - 1$ рівняння стосовно l невідомих $\beta_1, \dots, \beta_l$ завжди має ненульовий розв'язок. Оскільки у вершинах $b_1, \dots, b_{l-1}$ функція v задовольняє також умови (10), то вона дорівнює нулеві на всіх ребрах графа S , за винятком, можливо, ребра ζ_l . Справді, на кожному з цих ребер функція v є розв'язком задачі Коші для рівняння (7) з нульовими умовами Коші. Далі, з умов (8) одержуємо, що $v_{\zeta_l}(O) = 0$, $\frac{dv}{d\zeta_l}(O) = 0$. Тому функція v є нульовою також на ребрі ζ_l і, отже, на всьому графі Γ . Отож, $\beta_1 v_1 + \dots + \beta_l v_l = 0$ на S і не всі сталі β_k нульові, а це суперечить лінійній незалежності власних функцій $v_1, v_2, \dots, v_l$.

На прикладі рівняння зі сталими коефіцієнтами переконуємося, що доведена нерівність є точною (див. приклад зірки з чотирма ребрами, описаний в [1, с. 34]). $\square$

Теорема 2. Якщо $\lambda \in \sigma(T) \setminus (\sigma(\hat{T}_1) \cap \sigma(T_2))$, то

$$k_a(\lambda, T) = k_g(\lambda, T) = \max\{k_a(\lambda, \hat{T}_1), k_a(\lambda, T_2)\}.$$

Доведення. Нехай $n = k_a(\lambda, \hat{T}_1)$ і $m = k_a(\lambda, T_2)$. Одне з цих чисел дорівнює нулю, бо $\lambda \notin \sigma(\hat{T}_1) \cap \sigma(T_2)$. У випадку $m = 0$ всі власні вектори оператора T у векторному просторі $\mathcal{L}$ мають вигляд $(u, 0)$. Тому

$$(u_1, 0), \dots, (u_n, 0) \quad (14)$$

є максимальною системою лінійно незалежних власних векторів оператора T , де $\{u_k\}_{k=1}^n$ – база власного підпростору $V_\lambda(\hat{T}_1)$. Отже, $k_a(\lambda, \hat{T}_1) = n$.

Коли ж $n = 0$, то обидві координати власного вектора (u, v) оператора T повинні бути відмінними від нуля, в чому легко переконатися. Тоді друга координата v є власним вектором оператора T_2 . База у власному підпросторі $V_\lambda(T)$ має вигляд

$$(H_\lambda v_1, v_1), \dots, (H_\lambda v_m, v_m), \quad (15)$$

де $v_1, \dots, v_m$ – база власного підпростору $V_\lambda(T_2)$, а H_λ – оператор, введений у доведенні теореми 1. Отже, ми довели рівність $k_g(\lambda, T) = \max\{n, m\}$.

Покажемо, що $k_a(\lambda, T) = k_g(\lambda, T)$, тобто, що за умов теореми оператор T не має приєднаних векторів. Доводячи це від протилежного, припустимо, що існує вектор $(\hat{u}, \hat{v}) \in \ker(T - \lambda E)^2$, який є приєднаним до (ненульового) власного вектора (u, v) , тобто

$$(T_1 - \lambda E)\hat{u} = u, \quad (T_2 - \lambda E)\hat{v} = v, \quad \ell_a(\hat{u}) = \ell^b(\hat{v}); \quad (16)$$

$$(T_1 - \lambda E)u = 0, \quad (T_2 - \lambda E)v = 0, \quad \ell_a(u) = \ell^b(v). \quad (17)$$

Якщо $\lambda \in \sigma(\hat{T}_1) \setminus \sigma(T_2)$, то з (17) випливає, що $v = 0$, тому $\hat{v} = 0$ і $u \neq 0$. Отож, ненульові вектори u і $\hat{u}$ задовольняють рівності $\ell_a(u) = \ell_a(\hat{u}) = 0$, тобто u і $\hat{u}$ утворюють ланцюжок із власного та приєданого векторів оператора $\hat{T}_1$, що є неможливим з огляду на його самоспряженість. Отже, $\lambda \in \sigma(T_2) \setminus \sigma(\hat{T}_1)$. Якщо у цьому разі $v \neq 0$, то v і $\hat{v}$ утворювали б ланцюжок для самоспряженого оператора T_2 , що є неможливим. Тому $v = 0$; тоді вектор u належить до області визначення оператора $\hat{T}_1$ і $(\hat{T}_1 - \lambda E)u = 0$, що є можливим лише за $u = 0$. Це суперечить припущенню про те, що (u, v) – власний вектор оператора T і доводить відсутність приєднаних векторів оператора T . $\square$

Зауваження 2. Зрозуміло, що вектори (14) залишаються власними векторами оператора T і тоді, коли $\lambda \in \sigma(\hat{T}_1) \cap \sigma(T_2)$. Для власних векторів вигляду (15) це не завжди так. Річ у тім, що задача (13), яку розв'язує оператор H_λ , може не мати розв'язку при $\lambda \in \sigma(T_2)$.

Розглянемо тепер ситуацію, коли $\lambda \in \sigma(\hat{T}_1) \cap \sigma(T_2)$. Вона характерна тим, що загалом $\ker(T - \lambda E) \neq \ker(T - \lambda E)^2$, тобто існують приєднані вектори оператора T . Нехай, як і вище, $k_a(\lambda, \hat{T}_1) = n$, $k_a(\lambda, T_2) = m$. Оскільки $\hat{T}_1$ є прямою сумою $B_1 \oplus \dots \oplus B_l$ операторів з простим спектром, то λ є власним значенням деяких n операторів $B_{j_1}, \dots, B_{j_n}$, а для решти є точкою резольвентної множини. Введемо множину $J_\lambda = \{j: \lambda \in \sigma(B_j)\}$ індексів тих операторів B_j , для яких λ є власним значенням. За лемою 1 множина J_λ може містити від нуля до l елементів. Введемо також підпростір $W_\lambda(T_2) = \{v \in V_\lambda(T_2): v(b_j) = 0 \text{ для всіх } j \in J_\lambda\}$. З доведення леми 2 випливає, що власні функції з підпростору $W_\lambda(T_2)$ дорівнюють нулю на всіх ребрах ζ_j з номерами $j \in J_\lambda$.

Теорема 3. *Нехай $\lambda \in \sigma(\hat{T}_1) \cap \sigma(T_2)$. Тоді геометрична кратність власного значення λ оператора T обчислюється за формулою*

$$k_g(\lambda, T) = k_a(\lambda, \hat{T}_1) + \dim W_\lambda(T_2).$$

Крім того,

$$k_g(\lambda, T) \geq \max\{k_a(\lambda, \hat{T}_1), k_a(\lambda, T_2)\}. \quad (18)$$

Доведення. Нехай $k_a(\lambda, \hat{T}_1) = n$, $k_a(\lambda, T_2) = m$ та $\dim W_\lambda(T_2) = s$. Нам треба підрахувати кількість лінійно незалежних власних векторів оператора T , що відповідають власному значенню λ . Згідно з зауваженням 2 оператор T і в цьому випадку має n лінійно незалежних власних векторів вигляду (14).

З доведення теорем 1, 2 легко зробити висновок, що оператор T може ще мати власні вектори (u, v) з ненульовою другою компонентою, де v – власний вектор оператора T_2 ; u – відповідний розв'язок задачі (13). Ця задача рівносильна системі l крайових задач на ребрах

$$u''_{\gamma_j} + \lambda \rho u_{\gamma_j} = 0 \text{ на } \gamma_j, \quad u_{\gamma_j}(a_j) = 0, \quad u_{\gamma_j}(a) = v(b_j),$$

де $j = 1, \dots, l$. Кожна з них має розв'язок у випадках, коли $\lambda \notin \sigma(B_j)$, або ж коли $\lambda \in \sigma(B_j)$, але $v(b_j) = 0$. Тому задача (13) має розв'язок для таких і лише таких v , для яких $v(b_j) = 0$ при всіх $j \in J_\lambda$, тобто для векторів з підпростору $W_\lambda(T_2)$. Тому оператор T має ще s власних векторів вигляду

$$(\tilde{u}_1, v_1), \quad \dots, \quad (\tilde{u}_s, v_s),$$

де $v_1, \dots, v_s$ – база в $W_\lambda(T_2)$; $\tilde{u}_k$ – розв'язок задачі (13) при $v = v_k$. Очевидно, що вони лінійно незалежні з векторами (14) і разом з ними формують базу

$$(u_1, 0), \quad \dots, \quad (u_n, 0), \quad (\tilde{u}_1, v_1), \quad \dots, \quad (\tilde{u}_s, v_s)$$

у власному підпросторі $\ker(T - \lambda E)$.

Доведемо нерівність (18), яку можна записати так: $k_g(\lambda, T) \geq \max\{n, m\}$. Якщо $n \geq m$, то нерівність справджується, бо існує принаймні n власних векторів вигляду

(14). Нехай тепер $t > n$. Тоді лінійна система n рівнянь

$$\beta_1 v_1(b_j) + \dots + \beta_m v_m(b_j) = 0, \quad j \in J_\lambda \quad (19)$$

стосовно m невідомих $\beta_1, \dots, \beta_m$ має принаймні $m - n$ лінійно незалежних розв'язків. Тут $v_1, \dots, v_m$ – база власного підпростору $V_\lambda(T_2)$. Для кожного розв'язку $(\beta_1, \dots, \beta_m)$ системи (19) власний вектор $v = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_m v_m$ належить підпростору $W_\lambda(T_2)$, тому $\dim W_\lambda(T_2) \geq m - n$. Отже, $k_g(\lambda, T) = n + \dim W_\lambda(T_2) \geq n + m - n = m$. $\square$

Теорема 4. $k_a(\lambda, T) = k_a(\lambda, \hat{T}_1) + k_a(\lambda, T_2)$.

Доведення. Для випадку $\lambda \notin \sigma(\hat{T}_1) \cap \sigma(T_2)$ цю формулу доведено вище (див. теорему 2). Нехай $k_a(\lambda, \hat{T}_1) = n$, $k_a(\lambda, T_2) = m$, $k_g(\lambda, T) = n + s$, де $n \geq 1$, $m \geq 1$ та $0 \leq s \leq m$. Доведемо, що $\dim \ker(T - \lambda E)^2 = n + m$ і $\ker(T - \lambda E)^2 = \ker(T - \lambda E)^3$.

Простий аналіз системи (16), проведений у доведенні теореми 2, свідчить про те, що приєднані вектори $(\hat{u}, \hat{v}) \in \ker(T - \lambda E)^2$ можуть існувати лише для власних векторів вигляду $(u, 0)$. Припустимо, що $J_\lambda = \{1, 2, \dots, n\}$. Це не обмежує загальності, бо в іншому випадку можна перенумерувати ребра і вершини графа. В підпросторі $V_\lambda(\hat{T}_1)$ можна вибрати таку ортонормовану базу $u_1, \dots, u_n$, щоб кожна власна функція u_k була відмінною від нуля лише на ребрі γ_k . Зауважимо, що тоді елементи бази мають ще й таку властивість:

$$\frac{du_k}{d\gamma_k}(a) \neq 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (20)$$

Запишемо систему (16) у вигляді

$$(T_1 - \lambda E)\hat{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i, \quad (T_2 - \lambda E)\hat{v} = 0, \quad \ell_a(\hat{u}) = \ell^b(\hat{v}), \quad (21)$$

де $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – довільні сталі, *серед яких обов'язково є ненульові*. Щоб підрахувати кількість лінійно незалежних приєднаних векторів, достатньо підрахувати кількість лінійно незалежних векторів $\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$, для яких система (21) є сумісною.

Очевидно, що $\hat{v} \in V_\lambda(T_2)$. Щоб знайти першу компоненту приєднаного вектора, треба розв'язати l крайових задач

[illegible]

Для перших n з них число λ є власним значенням. Тому за альтернативою Фредгольма всі вони водночас матимуть розв'язки тоді і лише тоді, коли

$$\alpha_1 = \hat{v}(b_1) \frac{du_1}{d\gamma_1}(a), \quad \dots, \quad \alpha_n = \hat{v}(b_n) \frac{du_n}{d\gamma_n}(a). \quad (22)$$

Ці умови здобудемо домноженням кожного диференціального рівняння на відповідну власну функцію та інтегруванням частинами одержаної рівності. Решта $l - n$ задач мають єдиний розв'язок без будь-яких додаткових умов.

Нехай $V_\lambda(T_2) = W_\lambda(T_2) \oplus \mathcal{M}$. Якщо функція $\hat{v}$ належить підпростору $W_\lambda(T_2)$, то $\hat{v}(b_1) = \dots = \hat{v}(b_n) = 0$ і з умов (22) маємо $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, що суперечить припущенню. Для кожної ж власної функції $\hat{v}$ з $\mathcal{M}$ система (21) має розв'язок за сталих $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, визначених рівностями (22). Уведемо лінійне відображення $\pi: \mathcal{M} \rightarrow V_\lambda(\hat{T}_1)$, яке діє за правилом

$$\pi(\hat{v}) = \hat{v}(b_1) \frac{du_1}{d\gamma_1}(a) u_1 + \dots + \hat{v}(b_n) \frac{du_n}{d\gamma_n}(a) u_n.$$

З (20) безпосередньо одержуємо, що $\ker \pi = 0$. Крім того, $\dim \mathcal{M} \leq \dim V_\lambda(\hat{T}_1)$. Справді, за припущенням $\dim \mathcal{M} = m - s$ і $\dim V_\lambda(\hat{T}_1) = n$. З нерівності (18) маємо $n + s \geq \max\{n, m\} \geq m$, тому $m - s \leq n$. З ін'єктивності відображення π випливає існування $m - s$ лінійно незалежних власних функцій $(U_1, 0), \dots, (U_{m-s}, 0)$ оператора T , яким відповідають приєднані вектори $(\hat{u}_1, \hat{v}_1), \dots, (\hat{u}_{m-s}, \hat{v}_{m-s})$. Отже, $\dim \ker(T - \lambda E)^2 = k_g(\lambda, T) + m - s = n + s + m - s = n + m$.

Залишилось зауважити, що ланцюгів довжини 3 в жордановій структурі кореневих просторів оператора T немає. Кожна з систем

$$(T_1 - \lambda E)u = \hat{u}_k, \quad (T_2 - \lambda E)v = \hat{v}_k, \quad \ell_a(u) = \ell^b(v),$$

де $k = 1, \dots, m - s$, є несумісною. Причиною несумісності є друге рівняння, в правій частині якого є власний вектор $\hat{v}_k$ оператора T_2 . $\square$

З лем 1, 2 випливає твердження

Наслідок 1. Алгебрична кратність власного значення λ оператора T не перевищує $2l - 1$, де l – кількість ребер графа Γ .

-
1. Покорный Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. – М., 2004.
 2. Kuchment P. Graphs models of wave propagation in thin structures / Kuchment P. // Waves in Random Media. – 2002. – Vol. 12, №4. – P. 1-24.
 3. Головатий Ю.Д. Асимптотика спектра задачі Штурма-Ліувілля на геометричному графі із збуренням густини в околі вузлів / Головатий Ю.Д., Грабчак Г.Є. // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2007. – Вип.67. – С. 66-83.
 4. Oleinik O.A. Homogenization problems in elasticity. Spectrum of singularly perturbed operators / Oleinik O.A. // Non-classical continuum mechanics. – 1987. – Lecture Notes series, 122. Cambridge University Press. – P. 188-205.
 5. Олейник О.А. О собственных колебаниях тел с концентрированными массами / Олейник О.А. // Современные проблемы прикладной мат. и мат. физики. – 1988. – С. 101-128.
 6. Головатий Ю.Д. О собственных колебаниях струны с присоединенной массой / Головатий Ю.Д., Назаров С.А., Олейник О.А., Соболева Т.С. // Сиб. мат. журн. – 1988. – Т. 29, №5. – С. 71-91.
 7. Головатий Ю.Д. Спектральные свойства колебательных систем с присоединенными массами / Головатий Ю.Д. // Труды Моск. мат. об-ва. – 1992. – Т. 54. – С. 29-72.

8. *Mercier D.* Spectrum of a network of beams with interior point masses / *Mercier D., Régnier V.* – Prepublications. Laboratoire de Math. et de leurs Appl., 2006. (www.univ-valenciennes.fr/lamav/preprints/lamav-06.13.pdf)
9. Головатий Ю.Д. Асимптотическое разложение собственных значений и собственных функций задач о колебаниях среды с концентрированными возмущениями / Головатий Ю.Д., Назаров С.А., Олейник О.А. // Труды Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. – 1990. – Т. 192. – С. 42-60.
10. *Mel'nyk T.A.* Vibrations of a thick periodic junction with concentrated masses / *Mel'nyk T.A.* // Math. Models Meth. Appl. Sci. – 2001. – Vol. 11, №6. – P. 1001–1029.
11. Грабчак Г.Є. Спектральна задача Неймана для системи рівнянь лінійної теорії пружності із сингулярним збуренням густини / Грабчак Г.Є. // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1996. – Вип.45. – С. 124-140.
12. *Lobo M.* Local problems for vibrating systems with concentrated masses: a review / *Lobo M., Pérez M.E.* // C. R. Mecanique. – 2003. – Vol. 331. – P. 303-317.
13. *Babych N.* Asymptotic analysis of a vibrating system containing stiff-heavy and flexible-light parts / *Babych N., Golovaty Yu.* // Нелинейные граничные задачи. – 2008. – Т. 18. – С. 194-217.

ON STURM-LIOUVILLE PROBLEM ON STARLIKE GRAPHS WITH “HEAVY” NODES

Yurij GOLOVATY, Hennadij HRABCHAK

*Ivan Franko National University of L'viv,
79000 L'viv, Universytets'ka Str., 1*

e-mail: yu_holovaty@franko.lviv.ua, h_hrabchak@franko.lviv.ua

We consider a singular perturbed spectral problem for a second order differential operator on a starlike geometrical graph. It models eigenoscillations of a bundle of flexible strings connecting by heavy node. We study the spectral properties of the corresponding limit problem. The case of the mass density perturbation such that this problem may be nonself-adjoint is considered. The structures of the spectrum and of the root spaces of the limit problem are investigated. The systems of its eigenfunctions and of its adjointed functions are constructed. The geometrical and algebraic multiplicity of eigenvalues is analyzed.

Key words: differential equations on graphs, singular perturbation, adjoint mass, spectrum, eigenvalue, eigenvector, adjointed vector, asymptotic expansion.

О ЗАДАЧЕ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ НА ЗВЕЗДНЫХ ГРАФАХ С “ТЯЖЕЛЫМИ” УЗЛАМИ

Юрий ГОЛОВАТИЙ, Геннадий ГРАБЧАК

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000 Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: yu_holovaty@franko.lviv.ua, h_hrabchak@franko.lviv.ua*

Изучены спектральные свойства предельной задачи для сингулярно возмущенной задачи на звездном графе, моделирующей собственные колебания пучка струн с возмущением плотности в окрестности точки их соединения. Рассмотрен случай силы возмущения, при котором предельная задача может быть несамоспряженной. Изучены структуры ее спектра и корневых подпространств, построены системы собственных и присоединенных функций, исследованы вопросы геометрической и алгебраической кратностей собственных значений.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения на графах, сингулярное возмущение, присоединенная масса, спектр, собственное значение, собственный вектор, присоединенный вектор, асимптотика.

Стаття надійшла до редколегії 18.11.2009

Після остаточної правки 01.07.2010

Прийнята до друку 22.12.2010

УДК 517.938

ПОБУДОВА ФУНКЦІЙ ЛЯПУНОВА ДЕЯКИХ ЛІНІЙНИХ РОЗШИРЕНЬ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Іван ГРОД¹, Віктор КУЛИК²

¹Тернопільський державний педагогічний університет ім. Б. Гнатюка,
46027 Тернопіль, вул. Винниченка, 10, Україна
e-mail: grod@tnpu.edu.ua,

²Сілезький технічний університет,
44100 Глівіце, вул. Кашубська, 23, Польща,
e-mail: Viktor.Kulyk@polsl.pl

Досліджено питання побудови функцій Ляпунова для деяких лінійних розширень динамічних систем.

Ключові слова: лінійне розширення динамічної системи, функція Гріна, регулярні лінійні розширення, квадратична форма, похідна згідно з системою, додатно визначена матриця.

1. Вступ. Ключовим питанням в теорії збурення інваріантних многовидів динамічних систем є питання існування функції Гріна [1]. Ця функція дає змогу записувати інваріантні многовиди в явному інтегральному вигляді, що допомагає досліджувати гладкості інваріантних многовидів, а також їхню неперервну залежність від параметрів. Питання існування функції Гріна тісно пов'язано з питанням існування узагальненої функції Ляпунова, яку розглядають у вигляді квадратичних форм [2]. Такі форми можуть змінювати знак і вироджуватись у деяких точках, а їхня похідна згідно з системою рівнянь є знаковизначеною. Досить часто виникає задача побудови функції Ляпунова [3]. Знання конкретного вигляду функції Ляпунова дає змогу оцінити величину збурення динамічних систем, за яких зберігаються обмежені інваріантні многовиди. Незважаючи на глибокі теоретичні дослідження інваріантних тороїдальних многовидів [4, 5], питання побудови функції Гріна і функції Ляпунова для деяких лінійних розширень динамічних систем на торі залишається відкритим. Дослідженню задачі побудови функцій Ляпунова для деяких лінійних розширень динамічних систем присвячена ця стаття.

2. Формування і обґрунтування основних тверджень. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad \frac{dy}{dt} = A(x)y, \quad (1)$$

де $x \in R^m$, $y \in R^n$, $f(x)$ – вектор-функція, визначена і неперервна на R^m , яка локально задовольняє умову Ліпшиця. Матриця $A(x) \in n \times n$ -мірною. Її елементами є дійсні функції, визначені неперервні й обмежені на R^m . Додатково припускаємо, що кожний розв’язок $x(t; x_0)$ задачі Коші $\frac{dx}{dt} = f(x)$, $x|_{t=0} = x_0$ визначений при всіх $t \in R$. Для цього достатньо припускати, що вектор-функція $f(x)$ задовольняє оцінку $\|f(x)\| \leq \alpha_1 \|x\| + \alpha_2$ з деякими невід’ємними сталими α_1, α_2 .

Далі використовуватимемо такі позначення: $C^0(R^m)$ – простір дійсних функцій, неперервних і обмежених на R^m , $\langle y, \bar{y} \rangle = \sum_{j=1}^n y_j \bar{y}_j$ – скалярний добуток в R^n , $\|y\| = \sqrt{\langle y, y \rangle}$ – норма вектора. Нехай $C'(R^m; f)$ – підпростір простору $C^0(R^m)$ таких функцій $F(x)$, що суперпозиція $F(x(t; x_0))$ як функція змінної t є неперервно диференційовною, і за означенням: $\frac{d}{dt}F(x(t; x_0))|_{t=0} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{F}(x) \in C^0(R^m)$. Норму $n \times n$ -мірної матриці G будемо розуміти як операторну норму: $\|G\| = \max_{\|y\|=1} \|Gy\|$. Нехай $\Omega_\tau^t(x_0)$ – фундаментальна матриця розв’язків лінійної системи

$$\frac{dy}{dt} = A(x(t; x_0))y, \quad (2)$$

нормована в точці $t = \tau$: $\Omega_\tau^t(x_0)|_{t=\tau} = I_n$, де I_n – одинична матриця.

Поряд з системою (1) розглядатимемо неоднорідну систему

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad \frac{dy}{dt} = A(x)y + h(x), \quad (3)$$

де $h(x) \in C^0(R^m)$.

Означення 1. Говоритимемо, що система (3) має обмежений інваріантний многовид, визначений рівністю

$$y = u(x), \quad (4)$$

якщо функція $u(x) \in C'(R^m; f)$ і виконується тотожність

$$\dot{u}(x) \equiv A(x)u(x) + h(x) \quad \text{для всіх } x \in R^m. \quad (5)$$

Зауваження 1. У випадку, коли функція (4) є неперервно диференційовною, тотожність (5) записується у вигляді

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} f_j(x) \equiv A(x)u(x) + h(x).$$

Означення 2. Нехай існує $n \times n$ -мірна матриця $C(x) \in C^0(R^m)$ така, що для функції вигляду

$$G_0(\tau, x) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(x)C(x(\tau; x)), & \tau \leq 0, \\ \Omega_\tau^0(x)[C(x(\tau; x)) - I_n], & \tau > 0, \end{cases} \quad (6)$$

виконується оцінка

$$\|G_0(\tau, x)\| \leq K \exp\{-\gamma|\tau|\} \quad (7)$$

з деякими додатними сталими K, γ . Тоді функцію (6) називають функцією Гріна задачі про обмежені інваріантні многовиди системи (3).

Існування функції Гріна (6) дає змогу стверджувати, що система (3) має обмежений інваріантний многовид (4) при кожній функції $h(x) \in C^0(R^m)$ і його можна записати в інтегральному вигляді

$$y = u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(\tau, x) \cdot h(x(\tau; x)) d\tau.$$

Зауваження 2. Виконання оцінки (7) для функції Гріна (6) еквівалентне виконанню

$$\|G_t(0, x)\| \leq K \exp\{-\gamma|t|\} \quad (8)$$

для допоміжної функції

$$G_t(0, x) = \begin{cases} \Omega_0^t(x)C(x), & t \geq 0, \\ \Omega_0^t(x)[C(x) - I_n], & t < 0. \end{cases} \quad (9)$$

Із вигляду функції Гріна (6) випливає таке: якщо існують дві різні такі функції

$$\begin{aligned} \bar{G}_0(\tau, x) &= \begin{cases} \Omega_\tau^0(x)\bar{C}(x(\tau; x)), & \tau \leq 0 \\ \Omega_\tau^0(x)[\bar{C}(x(\tau; x)) - I_n], & \tau > 0, \end{cases} \\ \tilde{G}_0(\tau, x) &= \begin{cases} \Omega_\tau^0(x)\tilde{C}(x(\tau; x)), & \tau \leq 0 \\ \Omega_\tau^0(x)[\tilde{C}(x(\tau; x)) - I_n], & \tau > 0, \end{cases} \end{aligned}$$

то їх існує безліч. Серед них, наприклад, можна розглядати такі:

$$G_0(\tau, x) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(x) \left\{ \bar{C}(x(\tau; x)) + p \left[\bar{C}(x(\tau; x)) - \tilde{C}(x(\tau; x)) \right] \right\}, & \tau \leq 0 \\ \Omega_\tau^0(x) \left\{ \bar{C}(x(\tau; x)) + p \left[\bar{C}(x(\tau; x)) - \tilde{C}(x(\tau; x)) \right] - I_n \right\}, & \tau > 0, \end{cases}$$

де p – будь-яке дійсне число.

Систему рівнянь (1), яка має єдину функцію Гріна (6), прийнято називати регулярною; якщо ж система (1) має безліч різних функцій Гріна (6), то цю систему називають строго слабо регулярною.

Простим прикладом регулярної системи є

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = (1 + 2009 \cos x)y,$$

а прикладом строго слабо регулярної системи є

$$\frac{dx}{dt} = \sin x, \quad \frac{dy}{dt} = 2009(\cos x)y.$$

Варто наголосити, що у випадку, коли матриця $A(x) \equiv A$ є сталою, система (1) може бути тільки регулярною і буде регулярною тоді і тільки тоді, коли $\operatorname{Re} \lambda_j \neq 0$ для всіх власних чисел λ_j матриці A . Звідси випливає таке: якщо визначник сталої матриці A дорівнює нулю, то система (1) не може бути регулярною. Виявляється, для змінної матриці $A(x)$ може виконуватись тотожність $\det A(x) \equiv 0$, $x \in R^m$, а сама система (1) буде регулярною. Наведемо простий приклад такої системи:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1, \\ \frac{dy_1}{dt} = y_1 \cos 2x + y_2 (\sin 2x - 1), \\ \frac{dy_2}{dt} = y_1 (\sin 2x + 1) - y_2 \cos 2x. \end{cases} \quad (10)$$

У наведеній системі визначник матриці $A(x) = \begin{pmatrix} \cos 2x & \sin 2x - 1 \\ \sin 2x + 1 & -\cos 2x \end{pmatrix}$ тотожно дорівнює нулеві. У цьому разі система (10) заміною змінних

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & -\cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

зводиться до регулярної системи зі сталими коефіцієнтами $\frac{dx}{dt} = 1$, $\frac{dz_i}{dt} = (-1)^{i+1} z_i$, тому система (10) має єдину функцію Гріна, тобто є регулярною.

Зауваження 3. Якщо система (1) є регулярною, то відповідна (2) неоднорідна система

$$\frac{dy}{dt} = A(x(t; x_0))y + f(t) \quad (11)$$

при кожній неперервній і обмеженій на R функції $f(t)$ матиме обмежений на R розв'язок і цей розв'язок можна записати в інтегральному вигляді $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_t(\tau, x_0) f(\tau) d\tau$, де $G_t(\tau, x)$ – функція Гріна задачі про обмежені розв'язки для лінійної системи (2)

$$G_t(\tau, x_0) = \begin{cases} \Omega_\tau^t(x_0) C(x(\tau; x_0)), & \tau \leq t \\ \Omega_\tau^t(x_0) [C(x(\tau; x_0)) - I_n], & \tau > t. \end{cases}$$

Звідси випливає такий висновок: якщо неоднорідна система (11) при деякому фіксованому значенні $x_0 \in R^m$ і при деякій неперервній і обмеженій на R функції $f(t)$ не має обмеженого на R розв'язку, то функції Гріна (6) система (1) не має.

Наведемо приклад такої системи (1), яка не має функції Гріна (6)

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \cos x_1 \cos x_2 \cos x_3, \\ \frac{dx_2}{dt} = \cos x_1 \cos x_2 \sin x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} = \cos x_1 \sin x_2, \\ \frac{dy}{dt} = [\lambda_1(x) \sin x_1 \sin x_2 \sin x_3 + \lambda_2(x) \sin x_1 \cos x_2 \cos x_3 + \lambda_3(x) \cos x_1 \sin x_2 \sin x_3]y, \end{cases}$$

де $\lambda_j(x) = \lambda_j(x_1, x_2, x_3)$, $j = 1, 2, 3$, будь-які функції неперервні й обмежені на R^3 . Вибираючи стаціонарний розв'язок перших трьох рівнянь $x_1 \equiv \frac{\pi}{2}$, $x_2 \equiv \frac{\pi}{2}$, $x_3 \equiv \pi$ і підставляючи в останнє рівняння, отримуємо $\frac{dy}{dt} = 0 \cdot y$. Відповідне неоднорідне рівняння $\frac{dy}{dt} = 0 \cdot y + 1$ не має обмежених розв'язків, а з цього випливає, що наведена вище система не має функції Гріна.

Ефективним методом дослідження властивості регулярності систем (1) є метод функцій Ляпунова. Такі функції розглядають у вигляді квадратичних форм. На

відміну від традиційної функції Ляпунова квадратична форма може змінювати знак чи навіть вироджуватись у деяких точках.

Відомо [1] таке: якщо існує квадратична форма $V = \langle S(x)y, y \rangle$ з симетричною матрицею коефіцієнтів $S(x) \in C'(R^m; f)$, похідна якої згідно з системою (1) додатно визначена

$$\dot{V} = \left\langle \left[\dot{S}(x) + S(x)A(x) + A^T(x)S(x) \right] y, y \right\rangle \geq \|y\|^2 \quad (12)$$

і у цьому разі

$$\det S(x) \neq 0, \quad \forall x \in R^n, \quad (13)$$

то система (1) матиме єдину функцію Гріна (6). Наприклад, для системи (10) можна вибрати функцію Ляпунова у такому вигляді $V = y_1^2 \cos 2x + 2y_1 y_2 \sin 2x - y_2^2 \cos 2x$. У цьому разі похідна цієї функції згідно з системою (10) додатно визначена

$$\dot{V} = 2(y_1^2 + y_2^2).$$

З іншого боку, відомо [1] таке: якщо система (1) регулярна, то існує множина різних симетричних матриць $S(x) \in C'(R^m; f)$, для яких виконується нерівність (12). У випадку, коли вдається записати функцію Гріна (6) і вона є єдиною, деякі з матриць $S(x)$, що задовольняють нерівності (12), можна записати у вигляді різниці інтегралів

$$\begin{aligned} S(x) = & 2 \int_{-\infty}^0 [C(x) - I_n]^T [\Omega_0^z(x)]^T [\Omega_0^z(x)] [C(x) - I_n] dz - \\ & - 2 \int_0^{+\infty} [C(x)]^T [\Omega_0^z(x)]^T [\Omega_0^z(x)] [C(x)] dz. \end{aligned} \quad (14)$$

Конкретний запис функції Ляпунова дає змогу оцінити величину зміни правої частини системи (1), за яких ця система залишається регулярною. Знаходження функції Ляпунова $V = \langle S(x)y, y \rangle$, яка задовольняє умову (12), іноді є досить складним завданням і не завжди таку функцію можна відшукати.

Зображення матриці (14) можна узагальнити так:

$$\begin{aligned} S(x) = & \int_{-\infty}^0 [C(x) - I_n]^T [\Omega_0^z(x)]^T H_1(x(z; x)) [\Omega_0^z(x)] [C(x) - I_n] dz - \\ & - \int_0^{+\infty} [C(x)]^T [\Omega_0^z(x)]^T H_2(x(z; x)) [\Omega_0^z(x)] [C(x)] dz = S(x; H_1, H_2), \end{aligned} \quad (15)$$

де $H_i(x) \in C^0(R^m)$, $i = 1, 2$, – довільні симетричні матриці, які задовольняють умову додатної визначеності: $\langle H_i(x)y, y \rangle \geq 2\|y\|^2$. Множина матриць (15) при змінах двох незалежних додатно визначених матриць $H_i(x) \in C^0(R^m)$ збігається з множиною матриць $S(x; H, H)$ при змінах тільки однієї додатно визначеної матриці $H(x) \in C^0(R^m)$. Достатньо вибрати матрицю $H(x) \in C^0(R^m)$ в такому вигляді:

$$H(x) = (C(x) - I_n)^T H_1(x) (C(x) - I_n) + C^T(x) H_2(x) C(x)$$

і врахувати дві тотожності $C^2(x) \equiv C(x)$, $C(x(z; x)) \equiv \Omega_0^z(x)C(x)\Omega_z^0(x)$.

Зауваження 4. У випадку, коли система (1) є регулярною, кожна з симетричних матриць $S(x) \in C'(R^m; f)$, для яких виконується нерівність (12), невироджена і, крім того, обернена $S^{-1}(x)$ є обмеженою на R^m .

Зауваження 5. Якщо деяка невідроджена матриця $S(x) \in C'(R^m; f)$ задовольняє нерівність (12), то для матриці $-S^{-1}(x) = \bar{S}(x) \in C'(R^m; f)$ виконується нерівність

$$\left\langle \left[\dot{S}(x) - \bar{S}(x)A^T(x) - A(x)\bar{S}(x) \right] z, z \right\rangle \geq \gamma \|z\|^2, \quad (16)$$

де $\gamma = \frac{1}{\|S\|_0^2}$. Це означає, що похідна невідродженої квадратичної форми $\langle \bar{S}(x)z, z \rangle$ згідно з системою спряженої за нормальними змінними до системи (1)

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad \frac{dz}{dt} = -A^T(x)z \quad (17)$$

є додатно визначеною.

Відомо [1-3] таке: якщо існує квадратична форма

$$W = \langle \Theta(x)z, z \rangle \quad (18)$$

з обмеженою симетричною матрицею коефіцієнтів $\Theta(x) \in C'(R^m; f)$, похідна якої згідно зі спряженою системою (17) додатно визначена

$$\dot{W} = \left\langle \left[\dot{\Theta}(x) - \Theta(x)A^T(x) - A(x)\Theta(x) \right] z, z \right\rangle \geq \|z\|^2, \quad (19)$$

то система рівнянь (1) має функцію Гріна (6). Якщо додатково припустити, що $\det \Theta(x_0) = 0$ при деякому значенні $x_0 \in R^m$, то система (1) має безліч різних функцій Гріна (6), а система (17) не має жодної функції Гріна. Інакше $\det \Theta(x) \neq 0$, $\forall x \in R^m$ і системи (1), (17) будуть регулярними.

Розглянемо такий приклад:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \omega, \\ \frac{dy}{dt} = -y \cdot th \langle \lambda, x \rangle, \end{cases} \quad (20)$$

де $x \in R^m$, $y \in R$, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ – деякі сталі вектори з R^m , $\langle \lambda, x \rangle = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m$ – скалярний добуток.

Переконаємось: якщо виконується нерівність

$$\langle \lambda, \omega \rangle = \sum_{j=1}^m \lambda_j \omega_j > 0, \quad (21)$$

то система рівнянь (20) має безліч різних функцій Гріна $G_0(\tau, x)$ задачі про обмежені інваріантні многовиди. З цією метою розглянемо спряжену до (20) систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \omega, \\ \frac{dz}{dt} = z \cdot th \langle \lambda, x \rangle, \end{cases} \quad (22)$$

і запишемо похідну скалярної функції

$$V = z^2 th \langle \lambda, x \rangle \quad (23)$$

згідно з системою (22). Маємо

$$\dot{V} = 2z\dot{z} \cdot th \langle \lambda, x \rangle + z^2 \frac{1}{ch^2 \langle \lambda, x \rangle} \langle \lambda, \omega \rangle = \left(2th^2 \langle \lambda, x \rangle + \frac{\langle \lambda, \omega \rangle}{ch^2 \langle \lambda, x \rangle} \right) z^2. \quad (24)$$

Знаходимо найменше значення функції

$$f(\sigma) = 2th^2\sigma + \frac{p}{ch^2\sigma}$$

при $\sigma \in R$ і додатних значеннях параметра p . Отримуємо

$$\min_{\sigma \in R} f(\sigma) = \begin{cases} p, & 0 < p \leq 2, \\ 2(\sqrt{2p} - 1), & 2 \leq p. \end{cases}$$

Отже, з рівності (24) випливає додатна визначеність похідної функції (23) згідно з системою (22)

$$\dot{V} \geq z^2 \cdot \min \{ \langle \lambda, \omega \rangle, 2 \}.$$

Оскільки функція (23) набуває нульового значення при $\langle \lambda, x \rangle = 0$, то система (20) має безліч різних функцій Гріна.

Щоб знайти хоча б одну з функцій Гріна, загальні розв'язки перших m рівнянь системи (20) $x(t; x) = \omega t + x$ підставимо в останнє рівняння

$$\frac{dy}{dt} = -yth(\langle \lambda, \omega \rangle t + \langle \lambda, x \rangle)$$

і запишемо скалярну функцію $\Omega_\tau^t(x)$

$$\begin{aligned} \Omega_\tau^t(x) &= \exp \left\{ - \int_\tau^t th(\langle \lambda, \omega \rangle \sigma + \langle \lambda, x \rangle) d\sigma \right\} = \\ &= \left[\frac{\exp \{ \langle \lambda, \omega \rangle \tau + \langle \lambda, x \rangle \} + \exp \{ - \langle \lambda, \omega \rangle \tau - \langle \lambda, x \rangle \}}{\exp \{ \langle \lambda, \omega \rangle t + \langle \lambda, x \rangle \} + \exp \{ - \langle \lambda, \omega \rangle t - \langle \lambda, x \rangle \}} \right]^{\frac{1}{\langle \lambda, \omega \rangle}}. \end{aligned}$$

Далі, ввівши позначення

$$k = \langle \lambda, \omega \rangle, \quad z = \langle \lambda, x \rangle \quad (25)$$

і записавши функцію $\Omega_\tau^t(x)$

$$\Omega_\tau^t(x) = \left[\frac{\exp \{ k\tau + z \} + \exp \{ -k\tau - z \}}{\exp \{ kt + z \} + \exp \{ -kt - z \}} \right]^{\frac{1}{k}}, \quad (26)$$

шукаємо скалярні функції $C(z)$, для яких виконуються такі дві оцінки:

$$\begin{cases} |\Omega_0^t(x)C(z)| \leq K \exp \{ -\gamma t \}, & t \geq 0, \\ |\Omega_0^t(x)[C(z) - 1]| \leq K \exp \{ \gamma t \}, & t \leq 0 \end{cases} \quad (27)$$

з деякими додатними сталими K, γ . Взявши $\gamma = 1$ і враховуючи (26), оцінки (27) запишемо у вигляді

$$\begin{cases} |C(z)| \leq K \left[\frac{\exp \{ z \} + \exp \{ -2kt - z \}}{\exp \{ z \} + \exp \{ -z \}} \right]^{\frac{1}{k}}, & t \geq 0, \\ |C(z) - 1| \leq K \left[\frac{\exp \{ 2kt + z \} + \exp \{ -z \}}{\exp \{ z \} + \exp \{ -z \}} \right]^{\frac{1}{k}}, & t \leq 0. \end{cases} \quad (28)$$

У нерівностях (28) перейдемо до границі при $t \rightarrow +\infty$ і $t \rightarrow -\infty$, відповідно. Одержуємо

$$\begin{cases} |C(z)| \leq K \left[\frac{\exp \{ z \}}{\exp \{ z \} + \exp \{ -z \}} \right]^{\frac{1}{k}}, \\ |C(z) - 1| \leq K \left[\frac{\exp \{ -z \}}{\exp \{ z \} + \exp \{ -z \}} \right]^{\frac{1}{k}}. \end{cases} \quad (29)$$

Розглянемо спочатку випадок $\langle \lambda, \omega \rangle = k \geq 1$. Очевидно, що в цьому випадку виконується нерівність

$$\frac{\exp\{z\}}{\exp\{z\} + \exp\{-z\}} \leq \left[\frac{\exp\{z\}}{\exp\{z\} + \exp\{-z\}} \right]^{\frac{1}{k}},$$

з якої випливає, що кожна функція $C(z)$, яка задовольняє нерівності

$$\begin{cases} |C(z)| \leq K \left[\frac{\exp\{z\}}{\exp\{z\} + \exp\{-z\}} \right], \\ |C(z) - 1| \leq K \left[\frac{\exp\{-z\}}{\exp\{z\} + \exp\{-z\}} \right]. \end{cases} \quad (30)$$

також задовольнятиме і нерівності (29). За функцію $C(z)$, яка задовольняє нерівності (30), можна вибрати таку:

$$C(z) = \frac{\exp\{z\}}{\exp\{z\} + \exp\{-z\}}. \quad (31)$$

За інші функції $C(z)$, які також задовольняють оцінки (30), можна взяти

$$C_n(z) = \left[\frac{\exp\{z\}}{\exp\{z\} + \exp\{-z\}} \right]^n, \quad n = 2, 3, \dots \quad (32)$$

Якщо виконується нерівність $\langle \lambda, \omega \rangle \geq 1$, то випишемо деякі функції Гріна системи (20)

$$G_0(\tau, x) = \begin{cases} \left[\frac{\exp\{k\tau + z\} + \exp\{-k\tau - z\}}{\exp\{z\} + \exp\{-z\}} \right]^{\frac{1}{k}} \left[\frac{\exp\{k\tau + z\}}{\exp\{k\tau + z\} + \exp\{-k\tau - z\}} \right]^n, & \tau \leq 0, \\ \left[\frac{\exp\{k\tau + z\} + \exp\{-k\tau - z\}}{\exp\{z\} + \exp\{-z\}} \right]^{\frac{1}{k}} \left\{ \left[\frac{\exp\{k\tau + z\}}{\exp\{k\tau + z\} + \exp\{-k\tau - z\}} \right]^n - 1 \right\}, & \tau > 0, \end{cases} \quad (33)$$

де $k = \langle \lambda, \omega \rangle = \sum_{j=1}^m \lambda_j \omega_j \geq 1$, $z = \langle \lambda, x \rangle$, n – довільне фіксоване натуральне число. Далі припустимо, що виконується нерівність

$$0 < \langle \lambda, \omega \rangle < 1. \quad (34)$$

Позначимо $p = \frac{1}{\langle \lambda, \omega \rangle} = \frac{1}{k}$ і запишемо нерівності (29)

$$\begin{cases} |C(z)| \leq K \left[\frac{\exp\{z\}}{\exp\{z\} + \exp\{-z\}} \right]^p, \\ |C(z) - 1| \leq K \left[\frac{\exp\{-z\}}{\exp\{z\} + \exp\{-z\}} \right]^p, \quad p > 1. \end{cases} \quad (35)$$

Якщо, наприклад, $p \in (0, 2]$, то кожна функція $C(z)$, яка задовольняє нерівності

$$\begin{cases} |C(z)| \leq K \left[\frac{\exp\{z\}}{\exp\{z\} + \exp\{-z\}} \right]^2, \\ |C(z) - 1| \leq K \left[\frac{\exp\{-z\}}{\exp\{z\} + \exp\{-z\}} \right]^2 \end{cases} \quad (36)$$

також задовольнятиме і нерівності (35). Після певних міркувань вдається знайти функцію, яка задовольняє нерівності (36), а саме

$$\begin{aligned} C(z) &= -2 \left[\frac{\exp\{z\}}{\exp\{z\} + \exp\{-z\}} \right]^3 + 3 \left[\frac{\exp\{z\}}{\exp\{z\} + \exp\{-z\}} \right]^2 \equiv \\ &\equiv 2 \left[\frac{\exp\{-z\}}{\exp\{z\} + \exp\{-z\}} \right]^3 - 3 \left[\frac{\exp\{-z\}}{\exp\{z\} + \exp\{-z\}} \right]^2 + 1. \end{aligned}$$

Аналогічно, при $p = 3$ можна знайти

$$\begin{aligned} C(z) = & 6 \left[\frac{\exp\{z\}}{\exp\{z\} + \exp\{-z\}} \right]^5 - 15 \left[\frac{\exp\{z\}}{\exp\{z\} + \exp\{-z\}} \right]^4 + \\ & + 10 \left[\frac{\exp\{z\}}{\exp\{z\} + \exp\{-z\}} \right]^3 \equiv -6 \left[\frac{\exp\{-z\}}{\exp\{z\} + \exp\{-z\}} \right]^5 + \\ & + 15 \left[\frac{\exp\{-z\}}{\exp\{z\} + \exp\{-z\}} \right]^4 - 10 \left[\frac{\exp\{-z\}}{\exp\{z\} + \exp\{-z\}} \right]^3 + 1. \end{aligned}$$

У загальному випадку, коли p – натуральне число, $p \geq 2$, функцію $C(z)$, яка задовольняє нерівності (35), можна записати у вигляді

$$C(z) = \Theta \left(\left[\frac{\exp\{z\}}{\exp\{z\} + \exp\{-z\}} \right] \right), \quad (37)$$

де поліном $\Theta(q)$ визначений рівністю

$$\Theta(q) = \frac{\int_0^q \sigma^{p-1} (1-\sigma)^{p-1} d\sigma}{\int_0^1 \sigma^{p-1} (1-\sigma)^{p-1} d\sigma}. \quad (38)$$

Отже, якщо виконується нерівність (34), то функцію Гріна системи (20) можна записати у вигляді

$$G_0(\tau, x) = \begin{cases} \left[\frac{\exp\{k\tau+z\} + \exp\{-k\tau-z\}}{\exp\{z\} + \exp\{-z\}} \right]^{\frac{1}{k}} \Theta \left(\frac{\exp\{k\tau+z\}}{\exp\{k\tau+z\} + \exp\{-k\tau-z\}} \right), & \tau \leq 0, \\ \left[\frac{\exp\{k\tau+z\} + \exp\{-k\tau-z\}}{\exp\{z\} + \exp\{-z\}} \right]^{\frac{1}{k}} \left\{ \Theta \left(\frac{\exp\{k\tau+z\}}{\exp\{k\tau+z\} + \exp\{-k\tau-z\}} \right) - 1 \right\}, & \tau > 0, \end{cases} \quad (39)$$

де $\Theta(q)$ – поліном вигляду (38), в якому натуральне число p вибрано так: якщо $\frac{1}{k} = \frac{1}{\langle \lambda, \omega \rangle}$ набуває натурального значення не менше 2, то вибираємо $p = \frac{1}{\langle \lambda, \omega \rangle}$, якщо ж $\frac{1}{\langle \lambda, \omega \rangle} > 1$ не є натуральним числом, то вибираємо $p = \left[\frac{1}{\langle \lambda, \omega \rangle} \right] + 1$, де $\left[\frac{1}{\langle \lambda, \omega \rangle} \right]$ – ціла частина числа $\frac{1}{\langle \lambda, \omega \rangle}$.

Зауваження 6. Якщо виконується нерівність (35), то система (20), крім функції Гріна вигляду (39), має ще безліч різних функцій Гріна, наприклад, такі:

$$G_0(\tau, x) = \begin{cases} \left[\frac{\exp\{k\tau+z\} + \exp\{-k\tau-z\}}{\exp\{z\} + \exp\{-z\}} \right]^{\frac{1}{k}} \Theta^n \left(\frac{\exp\{k\tau+z\}}{\exp\{k\tau+z\} + \exp\{-k\tau-z\}} \right), & \tau \leq 0, \\ \left[\frac{\exp\{k\tau+z\} + \exp\{-k\tau-z\}}{\exp\{z\} + \exp\{-z\}} \right]^{\frac{1}{k}} \left\{ \Theta^n \left(\frac{\exp\{k\tau+z\}}{\exp\{k\tau+z\} + \exp\{-k\tau-z\}} \right) - 1 \right\}, & \tau > 0, \end{cases}$$

де $n = 2, 3, \dots$, $z = \langle \lambda, x \rangle$.

Зауваження 7. Нехай $\alpha(x) = \alpha(x_1, \dots, x_m)$ – деяка дійсна неперервна скалярна функція, визначена на R^m і задовольняє нерівності $0 \leq \alpha(x) \leq 1$ для всіх $x \in R^m$, тоді невідому функцію $C(x)$, яка задовольняє одночасно дві оцінки

$$\begin{cases} |C(x)| \leq K [\alpha(x)]^n, \\ |C(x) - 1| \leq K [1 - \alpha(x)]^n, \end{cases}$$

де $n \geq 2$ – натуральне число; K – деяка постійна незалежна від $x \in R^m$, можна виразити так:

$$C(x) = \frac{\int_0^{\alpha(x)} \sigma^{n-1} (1-\sigma)^{n-1} d\sigma}{\int_0^1 \sigma^{n-1} (1-\sigma)^{n-1} d\sigma}.$$

Наприклад, якщо треба знайти функцію $C(x)$, яка задовольняє оцінки

$$\begin{cases} |C(x)| \leq K [\sin^2 x_1 \sin^4 x_2 \cdot \dots \cdot \sin^{2m} x_m]^{2010}, \\ |C(x) - 1| \leq K [1 - \sin^2 x_1 \sin^4 x_2 \cdot \dots \cdot \sin^{2m} x_m]^{2010}, \end{cases}$$

то отримуємо, що

$$C(x) = \frac{\int_0^{[\sin^2 x_1 \sin^4 x_2 \cdot \dots \cdot \sin^{2m} x_m]} \sigma^{2009} (1-\sigma)^{2009} d\sigma}{\int_0^1 \sigma^{2009} (1-\sigma)^{2009} d\sigma}.$$

Повертаючись до розгляду функції Ляпунова (18), зауважимо таке: якщо система (1) має безліч різних функцій Гріна й одну з таких функцій (6) вдалося безпосередньо записати, то матрицю коефіцієнтів $\Theta(x) \in C'(R^m; f)$ функції Ляпунова (18) можна подати у вигляді різниці інтегралів

$$\begin{aligned} \Theta(x) = & \int_{-\infty}^0 [\Omega_\tau^0(x) C(x(\tau; x))] \cdot H_1(x(\tau; x)) \cdot [\Omega_\tau^0(x) C(x(\tau; x))]^T d\tau - \\ & - \int_0^{+\infty} \{\Omega_\tau^0(x) [C(x(\tau; x)) - I_n]\} \cdot H_2(x(\tau; x)) \cdot \{\Omega_\tau^0(x) [C(x(\tau; x)) - I_n]\}^T d\tau, \end{aligned} \quad (40)$$

де $H_1(x), H_2(x) \in C^0(R^m)$ – довільні симетричні матриці, які додатно визначені: $\langle H_j(x)z, z \rangle \geq 2\|z\|^2$, $j = 1, 2$. Тут вже немає можливості вибору однієї матриці $H(x)$ як у формулі (15). У цьому разі систему (1) завжди можна доповнити новими рівняннями до регулярної системи. Це можна зробити, наприклад, так:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad \frac{dy}{dt} = A(x)y, \quad \frac{dz}{dt} = y - A^T(x)z. \quad (41)$$

Похідна невідродженої квадратичної форми

$$2p \langle y, z \rangle + \langle \Theta(x)z, z \rangle \quad (42)$$

згідно з системою (41) при достатньо великих значеннях параметра $p > 0$ буде додатно визначеною. Достатньо вибрати $p > 0,5 \|\Theta(x)\|^2$.

Зауваження 8. Функція Гріна системи (41) є $2n \times 2n$ -мірною матрицею вигляду

$$\bar{G}_0(\tau, x) = \begin{pmatrix} \bar{G}_0^{11}(\tau, x) & \bar{G}_0^{12}(\tau, x) \\ \bar{G}_0^{21}(\tau, x) & \bar{G}_0^{22}(\tau, x) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{cases} \begin{pmatrix} \Omega_\tau^0(x) & 0 \\ \omega(0, \tau, x) & [\Omega_0^\tau(x)]^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_{11}(x(\tau; x)) & C_{12}(x(\tau; x)) \\ C_{21}(x(\tau; x)) & C_{22}(x(\tau; x)) \end{pmatrix}, & \tau \leq 0, \\ \begin{pmatrix} \Omega_\tau^0(x) & 0 \\ \omega(0, \tau, x) & [\Omega_0^\tau(x)]^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_{11}(x(\tau; x)) - I_n & C_{12}(x(\tau; x)) \\ C_{21}(x(\tau; x)) & C_{22}(x(\tau; x)) - I_n \end{pmatrix}, & \tau > 0, \end{cases} \quad (43)$$

де $\omega(0, \tau, x) = \int_\tau^0 [\Omega_0^\sigma(x)]^T \Omega_\tau^\sigma(x) d\sigma$. Блок $\bar{G}_0^{11}(\tau, x)$ матриці задає функцію Гріна системи (1): $\bar{G}_0^{11}(\tau, x) = G_0(\tau, x)$.

Зауваження 9. Систему (41) можна узагальнити так:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad \frac{dy}{dt} = A(x)y + B_2(x)z, \quad \frac{dz}{dt} = B_1(x)y - A^T(x)z, \quad (44)$$

де $n \times n$ -мірні матриці $B_1(x), B_2(x) \in C^0(R^m)$ задовольняють умови

$$\langle B_1(x)y, y \rangle \geq \beta_1 \|y\|^2, \quad \beta_1 = \text{const} > 0, \quad (45)$$

$$\langle B_2(x)y, y \rangle \geq 0. \quad (46)$$

У цьому разі похідна квадратичної форми (42) згідно з системою (44) також буде додатно визначеною при достатньо великих значеннях параметра $p > 0$.

Зауваження 10. Якщо у системі (44) для матриць $B_1(x), B_2(x) \in C^0(R^m)$ припустити виконання умови (45), а замість (46) – сильнішої умови

$$\langle B_2(x)y, y \rangle \geq \beta_2 \|y\|^2, \quad \beta_2 = \text{const} > 0, \quad (47)$$

то система (44) буде регулярною за будь-якої матриці $A(x) \in C^0(R^m)$.

Оскільки похідна невиродженої квадратичної форми $V = \langle y, z \rangle$ згідно з системою (44)

$$\dot{V} = \langle B_1 y, y \rangle + \langle B_2 z, z \rangle \quad (48)$$

додатно визначена, то система (44) є регулярною. Систему (44) можна записати у такому вигляді:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x), \\ \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} B_1(x) & 0 \\ 0 & B_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -A^T(x) \\ A(x) & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (49)$$

Похідна квадратичної форми $V = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle$ згідно з системою дорівнює

$$\dot{V} = 2 \left\langle \begin{pmatrix} B_1(x) & 0 \\ 0 & B_2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle. \quad (50)$$

Отже, якщо матриця $B(x) = \text{diag}\{B_1(x), B_2(x)\}$ додатно визначена або від'ємно визначена, то система (49) буде регулярною за будь-якої матриці $A(x) \in C^0(R^m)$. Ввівши позначення $y \rightarrow y_1, z \rightarrow y_2$, систему (49) узагальнимо

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad S \frac{dy}{dt} = [B(x) + M(x)]y, \quad (51)$$

де S – постійна симетрична невироджена матриця; $M(x) \in C^0(R^m)$ – кососиметрична матриця

$$M^T(x) \equiv -M(x), \quad (52)$$

а матрицю $B(x) \in C^0(R^m)$ можна вважати симетричною, бо завжди можна записати $B(x) = \frac{1}{2}(B(x) + B^T(x)) + \frac{1}{2}(B(x) - B^T(x))$. Легко бачити, що похідна квадратичної форми $V = \langle Sy, y \rangle$ згідно з системою (51) має вигляд

$$\dot{V} = 2 \langle B(x)y, y \rangle. \quad (53)$$

Зауваження 11. Якщо в системі (49) невідроджена симетрична матриця $S = S(x) \in C'(R^m; f)$ залежна від x , тобто є змінною, то для похідної згідно з цією системою квадратичної форми $V = \langle S(x)y, y \rangle$ не буде виконуватись рівність (53). Для того, щоб ця рівність виконувалась, треба систему (49) узагальнити так:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad S(x) \frac{dy}{dt} = \left[B(x) + M(x) - \frac{1}{2} \dot{S}(x) \right] y. \quad (54)$$

До системи (54) можна прийти, проводячи такі міркування. Нехай існує квадратична форма $V = \langle S(x)y, y \rangle$ з симетричною матрицею коефіцієнтів $S(x) \in C'(R^m; f)$, похідна якої згідно з системою (1) додатно визначена, тобто виконується нерівність (12) і у цьому разі $\det S(x) \neq 0$ для всіх $x \in R^n$. Очевидно, що систему (1) можна записати у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad S(x) \frac{dy}{dt} = S(x)A(x)y,$$

а далі отримуємо еквівалентну систему

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad S(x) \frac{dy}{dt} + \frac{1}{2} \dot{S}(x)y = \left[S(x)A(x) + \frac{1}{2} \dot{S}(x) \right] y. \quad (55)$$

Тепер в отриманій системі матрицю

$$\bar{A}(x) = S(x)A(x) + \frac{1}{2} \dot{S}(x)$$

симетризуємо

$$\begin{aligned} \bar{A}(x) &= \frac{1}{2} (\bar{A}(x) + \bar{A}^T(x)) + \frac{1}{2} (\bar{A}(x) - \bar{A}^T(x)) = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left[S(x)A(x) + \frac{1}{2} \dot{S}(x) \right] + \left[S(x)A(x) + \frac{1}{2} \dot{S}(x) \right]^T \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \left[S(x)A(x) + \frac{1}{2} \dot{S}(x) \right] - \left[S(x)A(x) + \frac{1}{2} \dot{S}(x) \right]^T \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ S(x)A(x) + A^T(x)S(x) + \dot{S}(x) \right\} + \frac{1}{2} \left\{ S(x)A(x) - A^T(x)S(x) \right\}. \end{aligned}$$

Позначивши

$$B(x) = \frac{1}{2} \left\{ S(x)A(x) + A^T(x)S(x) + \dot{S}(x) \right\}, \quad (56)$$

$$M(x) = \frac{1}{2} \left\{ S(x)A(x) - A^T(x)S(x) \right\}, \quad (57)$$

бачимо, що систему (55) можна записати у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad S(x) \frac{dy}{dt} + \frac{1}{2} \dot{S}(x)y = [B(x) + M(x)] y, \quad (58)$$

де матриця $B(x)$, визначена рівністю (56), симетрична і додатно визначена, а матриця $M(x)$ вигляду (57) – кососиметрична. Переносячи в системі (58) доданок $\frac{1}{2} \dot{S}(x)y$ у правий бік, приходимо до системи (54).

Тепер систему (54) будемо розглядати як самостійну, з деякою симетричною матрицею $S(x) \in C'(R^m; f)$, яка задовольняє умови

$$\det S(x) \neq 0 \quad \forall x \in R^m, \quad \|S^{-1}(x)\| \leq c < \infty. \quad (59)$$

Якщо в системі (54) симетрична матриця $B(x)$ додатно визначена, тобто $\langle B(x)y, y \rangle \geq \beta \|y\|^2$, $\beta = \text{const} > 0$, або від'ємно визначена $\langle B(x)y, y \rangle \leq -\beta \|y\|^2$, $\beta = \text{const} > 0$, то система (54) буде регулярною.

Розглядаючи систему (54) як самостійну, $x \in R^m$, $y \in R^n$ з вектор-функцією $f(x) \in C_{Lip}(R^m)$, $\|f(x)\| \leq \alpha_1 \|x\| + \alpha_2$, $\alpha_i = \text{const} \geq 0$ і з деякими матрицями $B(x), M(x) \in C^0(R^m)$, $S(x) \in C'(R^m; f)$, що задовольняють умови (52), (59), сформулюємо таке твердження.

Теорема 1. *Нехай система (54) при нульовій матриці $B(x) \equiv 0$ має хоча б одну функцію Гріна (6). Тоді кількість змінних y є парною і система (54) буде регулярною за будь-якої невід'ємної ($\langle B(x)y, y \rangle \geq 0$) симетричної матриці $B(x) \in C^0(R^m)$.*

Запропонуємо схему доведення цієї теореми. Якщо система (54) при нульовій матриці $B(x) \in C^0(R^m)$

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad \frac{dy}{dt} = S^{-1}(x) \left[M(x) - \frac{1}{2} \dot{S}(x) \right] y \quad (60)$$

має хоча б одну функцію Гріна (6), то існує деяка квадратична форма $W = \langle \Theta(x)z, z \rangle$, похідна якої згідно зі спряженою системою

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad \frac{dz}{dt} = \left[M(x) + \frac{1}{2} \dot{S}(x) \right] S^{-1}(x) z \quad (61)$$

додатно визначена. Оскільки між системами (60) і (61) існує зв'язок

$$z = S(x)y, \quad (62)$$

то похідна квадратичної форми $V = \langle S(x)\Theta(x)S(x)y, y \rangle$ згідно з системою (60) також буде додатно визначеною. Звідси випливає, що ці форми будуть невід'ємними, а це означає, що системи (60) і (61) будуть регулярними. Зі зв'язку (62) видно, що кількість лінійно незалежних розв'язків системи

$$\frac{dy}{dt} = S^{-1}(x(t; x_0)) \left[M(x(t; x_0)) - \frac{1}{2} \dot{S}(x(t; x_0)) \right] y,$$

які прямують до нуля на $+\infty$, така сама як кількість таких розв'язків спряженої системи

$$\frac{dz}{dt} = \left[M(x(t; x_0)) + \frac{1}{2} \dot{S}(x(t; x_0)) \right] S^{-1}(x(t; x_0)) z.$$

Звідси випливає, що кількість змінних $y \in R^n$ є парним числом $n = 2n_1$.

Повертаючись до системи (54) з симетричною невід'ємною матрицею $B(x) \in C^0(R^m)$, пропонуємо функцію Ляпунова V вибирати у вигляді квадратичної форми з додатним параметром $V = p \langle S(x)y, y \rangle + \langle S(x)\Theta(x)S(x)y, y \rangle$. При досить великих значеннях параметра $p > 0$ похідна цієї форми згідно з системою (54) буде додатно визначеною. Це означає, що згадана система є регулярною.

Зауваження 12. Якщо матриця $B(x) \in C^0(R^m)$ в системі (54) не є симетричною, а виконується тільки нерівність $\langle B(x)y, y \rangle \geq 0$, то ця система може і не бути регулярною.

На завершення розглянемо систему з двома дійсними параметрами p_1, p_2

$$\frac{dx}{dt} = p_1 - \sin 2x, \quad \frac{dy}{dt} = [p_2 + \cos 2x] y. \quad (63)$$

Детальні дослідження цієї системи засвідчують, що вона буде регулярною при виконанні нерівностей

$$p_1^2 + p_2^2 > 1, \quad p_2 \neq 0. \quad (64)$$

Крім того, якщо для параметрів p_1, p_2 не виконуються нерівності (64), то система (63) не має жодної функції Гріна.

При значеннях параметрів p_1, p_2 , які задовольняють нерівності (64), запишемо невідроджену функцію Ляпунова $V = s(x)y^2$.

I. $|p_2| > 1$. $V = y^2$.

II. $|p_1| > 1$, $p_2 \neq 0$. $V = (p_1 - \sin 2x) y^2$.

III. $p_1^2 \leq 1$, $p_2^2 < 1$, $p_1^2 + p_2^2 > 1$. $V = (\lambda - \sin 2x) y^2$,

$$\begin{cases} \lambda = \sqrt{\frac{p_1^2 + p_2^2}{1 - p_2^2}}, & p_1 \in (0, 1], \\ \lambda = -\sqrt{\frac{p_1^2 + p_2^2}{1 - p_2^2}}, & p_1 \in [-1, 0). \end{cases}$$

IV. $0 < |p_1| < 1$, $p_2^2 = 1$. $V = (\lambda - \sin 2x) y^2$, $\begin{cases} \lambda > \frac{p_1^2 + 1}{2p_1}, & p_1 \in (0, 1), \\ \lambda < \frac{p_1^2 + 1}{2p_1}, & p_1 \in (-1, 0). \end{cases}$

3. Висновки. У статті запропоновано знаходити функції Ляпунова у вигляді квадратичних форм для деяких класів лінійних розширень динамічних систем. Досліджено властивість регулярності певних лінійних розширень динамічних систем з параметрами. Отримані результати можуть бути джерелом нових задач в теорії інваріантних многовидів динамічних систем.

-
1. Митропольский Ю.А. Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова / Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Кулик В.Л. – К., 1990.
 2. Mitropolsky Yu.A. Dichotomies and Stability in Nonautonomous Linear Systems / Mitropolsky Yu.A., Samoilenko A.M., Kulik V.L. – London: Taylor & Francis Inc, 2003.
 3. Кулик В. Л. Знакомінні функції Ляпунова в теорії лінійних розширень динамічних систем на торі / Кулик В.Л., Степаненко Н.В. // Укр. мат. журн. – 2007. – Т. 46, №4. – С. 488-500.
 4. Самойленко А. М. К вопросу существования единственной функции Грина линейного расширения динамической системы на торе / Самойленко А. М. // Укр. мат. журн. – 2001. – Т. 53, №4. – С. 513-521.
 5. Бойчук А.А. Условие существования единственной функции Грина-Самойленко задачи об инвариантном торе / Бойчук А.А. // Укр. мат. журн. – 2001. – Т. 53, №4. – С. 556-559.

CONSTRUCTION OF LYAPUNOV FUNCTIONS OF SOME LINEAR EXPANSIONS OF DYNAMIC SYSTEMS

Ivan GROD¹, Viktor KULIK²

¹*Ternopil state pedagogical university,
46027 Ternopil, Vynnychenka Str., 10, Ukraine
e-mail: grod@tnpu.edu.ua,*

²*Silesian University of Technology,
44100 Gliwice, Kashubs'ka Str., 23, Poland
e-mail: Viktor.Kulik@polsl.pl*

We study the construction of Lyapunov functions for some linear expansions of dynamical systems.

Key words: linear expansion of the dynamic systems, Green function, regular linear expansions, quadratic form, derivative by virtue of the system, positively certain matrix.

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ РАСШИРЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Иван ГРОД¹, Виктор КУЛИК²

¹*Тернопольский государственный педагогический университет,
46027 Тернополь, ул. Винниченка, 10, Украина
e-mail: grod@tnpu.edu.ua,*

²*Силезский технический университет,
44100 Гливице, ул. Кашубская, 23, Польша,
e-mail: Viktor.Kulik@polsl.pl*

Исследован вопрос о конструировании функций Ляпунова для некоторых линейных расширений динамических систем.

Ключевые слова: линейное расширение динамической системы, функция Грина, регулярные линейные расширения, квадратичная форма, производная в силу системы, положительно определенная матрица.

Стаття надійшла до редколегії 16.04.2010

Прийнята до друку 22.12.2010

УДК 512.536

ПРО НАПІВТОПОЛОГІЧНІ СИМЕТРИЧНІ ІНВЕРСНІ ПІВГРУПИ ОБМЕЖЕНОГО СКІНЧЕННОГО РАНГУ

Олег ГУТІК, Андрій РЕЙТЕР

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000 Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: o_gutik@franko.lviv.ua, reiter_andriy@yahoo.com

Доведено, що симетрична інверсна півгрупа обмеженого скінченного рангу $\mathcal{S}_\lambda^n$ є алгебрично h -замкненою в класі напівтопологічних інверсних півгруп з неперервною інверсією. Описано усі компактні та зліченно компактні топології τ на півгрупі $\mathcal{S}_\lambda^n$ такі, що $(\mathcal{S}_\lambda^n, \tau)$ – гаусдорфова напівтопологічна півгрупа.

Ключові слова: симетрична інверсна півгрупа обмеженого скінченного рангу, напівтопологічна півгрупа, конгруенція.

1. Вступ. У роботі всі простори вважаються гаусдорфовими. Надалі ми будемо користуватися термінологією та позначеннями з [4, 5, 6, 7, 8, 15, 16].

Півгрупою називається непорожня підмножина з заданою на ній бінарною асоціативною операцією. Півгрупа S називається *інверсною*, якщо для довільного її елемента x існує єдиний елемент y з S такий, що $x = xux$ і $y = yxy$. У цьому випадку будемо говорити, що елемент y є *інверсним* до x та позначатимемо його через x^{-1} . Відображення, яке ставить кожному елементові інверсної півгрупи інверсний до нього елемент, називається *інверсією*.

Відношення еквівалентності $\mathfrak{A}$ на півгрупі S називається *конгруенцією*, якщо з того, що $a\mathfrak{A}b$, для $a, b \in S$, випливає $ac\mathfrak{A}bc$ і $da\mathfrak{A}db$, для довільних $c, d \in S$. На кожній півгрупі S існують такі конгруенції: *одинична* (*діагональ*) $\Delta = \{(s, s) \mid s \in S\}$ та *універсальна* $\Omega = S \times S$. Одиничну та універсальну конгруенції часто називають *тривіальними* конгруенціями.

Елемент e півгрупи S називається *ідемпотентом*, якщо $ee = e$. Підмножину *ідемпотентів* (в'язку) півгрупи S позначатимемо через $E(S)$.

Нехай $\alpha: X \rightarrow X$ – часткове відображення (часткове перетворення) множини X . Через $\text{dom } \alpha$ і $\text{ran } \alpha$ позначатимемо область визначення та область значень, відповідно, часткового перетворення α . Якщо α – часткове бієктивне перетворення, то

потужність множини $\text{dom } \alpha$ будемо називати *рангом* часткового відображення α , і позначатимемо $\text{rank } \alpha$.

Нехай X – множина потужності $\lambda \geq 1$. Через $\mathcal{I}_\lambda$ позначимо множину усіх часткових взаємно однозначних перетворень множини X з півгруповою операцією $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$, якщо $x \in \text{dom}(\alpha\beta) = \{y \in \text{dom } \alpha \mid y\alpha \in \text{dom } \beta\}$, для $\alpha, \beta \in \mathcal{I}_\lambda$.

Півгрупа $\mathcal{I}_\lambda$ називається *симетричною інверсною півгрупою* над множиною X (див. [6]). Симетричну інверсну півгрупу вперше ввів Вагнер у [1, 2] і вона відіграє важливу роль у теорії півгруп.

Позначимо $\mathcal{I}_\lambda^n = \{\alpha \in \mathcal{I}_\lambda \mid \text{rank } \alpha \leq n\}$, для $n = 1, 2, 3, \dots$. Очевидно, що $\mathcal{I}_\lambda^n$ – інверсна півгрупа, яка є ідеалом в $\mathcal{I}_\lambda$ для всіх $n = 1, 2, 3, \dots$. Надалі називатимемо півгрупу $\mathcal{I}_\lambda^n$ *симетричною інверсною півгрупою скінченних перетворень рангу n множини потужності λ* . Елементи півгрупи $\mathcal{I}_\lambda^n$ називаються *скінченними взаємно однозначними перетвореннями (частковими бієкціями)* множини X . Через

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$$

позначатимемо часткове взаємно однозначне перетворення, яке відображає елемент x_1 в y_1 , x_2 в y_2 , ... та x_n в y_n , а через $\mathbf{0}$ – порожнє перетворення. Очевидно, у цьому випадку маємо $x_i \neq x_j$ і $y_i \neq y_j$ для $i \neq j$ ($i, j = 1, 2, 3, \dots, n$). Також зауважимо, що симетрична інверсна півгрупа $\mathcal{I}_\lambda^1$ скінченних перетворень рангу 1 множини потужності λ ізоморфна півгрупі $\lambda \times \lambda$ -матричних одиниць B_λ .

Нагадаємо означення відношень Гріна на півгрупі S (див. [9] і [6, § 2.1]):

$a\mathcal{L}b$ тоді і лише тільки тоді, коли $\{a\} \cup Sa = \{b\} \cup Sb$, $a, b \in S$;

$a\mathcal{R}b$ тоді і лише тільки тоді, коли $\{a\} \cup aS = \{b\} \cup bS$, $a, b \in S$;

$\mathcal{D} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$;

$\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$.

Безпосередньо з означень відношень Гріна випливає твердження.

Твердження 1. Для $\alpha, \beta \in \mathcal{I}_\lambda^n$ виконуються такі умови:

- (i) $\alpha\mathcal{L}\beta$ тоді і лише тільки тоді, коли $\text{ran } \alpha = \text{ran } \beta$;
- (ii) $\alpha\mathcal{R}\beta$ тоді і лише тільки тоді, коли $\text{dom } \alpha = \text{dom } \beta$;
- (iii) $\alpha\mathcal{D}\beta$ тоді і лише тільки тоді, коли $\text{rank } \alpha = \text{rank } \beta$;
- (iv) $\alpha\mathcal{H}\beta$ тоді і лише тільки тоді, коли $\text{ran } \alpha = \text{ran } \beta$ і $\text{dom } \alpha = \text{dom } \beta$.

Напівтопологічна (топологічна) півгрупа – це гаусдорфовий топологічний простір із заданою на ньому нарізно неперервною (сукупно неперервною) напівгруповою операцією. Якщо в інверсній топологічній півгрупі інверсія неперервна, то така півгрупа називається *топологічною інверсною півгрупою*.

Симетричну інверсну півгрупу обмеженого скінченного рангу $\mathcal{I}_\lambda^n$ як топологічну та напівтопологічну вперше вивчали у [10], де доведено, що вона є напівгрупою зі шільними ідеальними рядами, і у підсумку півгрупа $\mathcal{I}_\lambda^n$ алгебрично замкнена в класі напівтопологічних інверсних півгруп з неперервною інверсією. У [14] доведено, що півгрупа $\mathcal{I}_\lambda^n$ алгебрично h -замкнена в класі топологічних інверсних півгруп, а також описана Борівська компактифікація нескінченної півгрупи $\mathcal{I}_\lambda^n$ у класі топологічних півгруп. У [13] подано достатні умови для того, щоб півгрупа $\mathcal{I}_\lambda^n$ була H -замкненою

чи абсолютно H -замкнутою в класі топологічних півгруп. Також в [10] доведено, що на симетричній інверсній півгрупі скінченного рангу $\mathcal{S}_\lambda^\infty = \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{S}_\lambda^n$ не існує компактної топології, стосовно якої вона була б напівтопологічною півгрупою. Водночас в [12] описано усі компактні та зліченно компактні топології на півгрупі $\mathcal{S}_\lambda^1$, за яких вона є напівтопологічною півгрупою.

Ми описуємо усі нетривіальні конгруенції на півгрупі $\mathcal{S}_\lambda^n$, доводимо, що довільний гомоморфний образ півгрупи $\mathcal{S}_\lambda^n$ є півгрупою зі щільними ідеальними рядами, а отже, півгрупа $\mathcal{S}_\lambda^n$ є алгебрично h -замкнутою півгрупою в класі напівтопологічних інверсних півгруп з неперервною інверсією. Ми також описуємо усі компактні та зліченно компактні топології τ на півгрупі $\mathcal{S}_\lambda^n$ такі, що $(\mathcal{S}_\lambda^n, \tau)$ є напівтопологічною півгрупою.

2. Про конгруенції на півгрупі $\mathcal{S}_\lambda^n$ та її алгебричну повноту.

З означення півгрупи $\mathcal{S}_\lambda^n$ випливає твердження.

Твердження 2. Для довільних натуральних $m \leq n$, підпівгрупа $\mathcal{S}_\lambda^m$ є (двостороннім) ідеалом півгрупи $\mathcal{S}_\lambda^n$.

Твердження 3. Для довільних $\alpha, \beta \in \mathcal{S}_\lambda^n$ таких, що $\text{rank } \alpha \leq \text{rank } \beta$, існують $\gamma, \delta \in \mathcal{S}_\lambda^n$ такі, що $\alpha = \gamma\beta\delta$ і $\text{rank } \alpha \leq \text{rank } \gamma = \text{rank } \delta \leq \text{rank } \beta$.

Доведення. Нехай $\alpha = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_k \\ y_1 & \cdots & y_k \end{pmatrix}$ і $\beta = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_l \\ b_1 & \cdots & b_l \end{pmatrix}$, де $k \leq l \leq n$. Означимо $\gamma = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_k & a_{k+1} & \cdots & a_l \\ a_1 & \cdots & a_k & a_{k+1} & \cdots & a_l \end{pmatrix}$ і $\delta = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_k & b_{k+1} & \cdots & b_l \\ y_1 & \cdots & y_k & b_{k+1} & \cdots & b_l \end{pmatrix}$. Тоді очевидно, що $\alpha = \gamma\beta\delta$. $\square$

Лема 1. Нехай $\mathfrak{R}$ – конгруенція на півгрупі $\mathcal{S}_\lambda^n$. Якщо $\alpha\mathfrak{R}\mathbf{0}$ для деякого елемента α півгрупи $\mathcal{S}_\lambda^n$, то $\beta\mathfrak{R}\mathbf{0}$ для всіх $\beta \in \mathcal{S}_\lambda^n$ таких, що $\text{rank } \beta \leq \text{rank } \alpha$.

Доведення. За твердженням 3 існують $\gamma, \delta \in \mathcal{S}_\lambda^n$ такі, що $\beta = \gamma\alpha\delta$ і $\text{rank } \beta \leq \text{rank } \gamma = \text{rank } \delta \leq \text{rank } \alpha$. Нехай $\pi_{\mathfrak{R}}: \mathcal{S}_\lambda^n \rightarrow \mathcal{S}_\lambda^n/\mathfrak{R}$ – природний гомоморфізм, породжений конгруенцією $\mathfrak{R}$. Тоді

$(\beta)\pi_{\mathfrak{R}} = (\gamma\alpha\delta)\pi_{\mathfrak{R}} = (\gamma)\pi_{\mathfrak{R}} \cdot (\alpha)\pi_{\mathfrak{R}} \cdot (\delta)\pi_{\mathfrak{R}} = (\gamma)\pi_{\mathfrak{R}} \cdot (\mathbf{0})\pi_{\mathfrak{R}} \cdot (\delta)\pi_{\mathfrak{R}} = (\gamma\mathbf{0}\delta)\pi_{\mathfrak{R}} = (\mathbf{0})\pi_{\mathfrak{R}}$, а отже, $\beta\mathfrak{R}\mathbf{0}$. $\square$

Лема 2. Нехай $\mathfrak{R}$ – конгруенція на інверсній півгрупі S і $a, b \in S$. Якщо $a\mathfrak{R}b$, то виконуються такі твердження:

- (i) $a^{-1}\mathfrak{R}b^{-1}$, $(aa^{-1})\mathfrak{R}(bb^{-1})$ і $(a^{-1}a)\mathfrak{R}(b^{-1}b)$;
- (ii) елементи $a, b, aa^{-1}b, ba^{-1}a, bb^{-1}a$ і $ab^{-1}b$ є $\mathfrak{R}$ -еквівалентними;
- (iii) ідемпотенти aa^{-1} , bb^{-1} і $aa^{-1}bb^{-1}$ є $\mathfrak{R}$ -еквівалентними;
- (iv) ідемпотенти $a^{-1}a$, $b^{-1}b$ і $a^{-1}ab^{-1}b$ є $\mathfrak{R}$ -еквівалентними.

Доведення. Твердження (i) випливає з леми III.1.1 [15] та означення конгруенції. Твердження (ii) – (iv) випливають з твердження (i) та леми I.4.7 [15]. $\square$

Теорема 1. Нехай $\mathfrak{R}$ – конгруенція на півгрупі $\mathcal{S}_\lambda^n$ і $\alpha, \beta \in \mathcal{S}_\lambda^n$ така, що $\text{rank } \alpha < \text{rank } \beta$. Якщо $\alpha\mathfrak{R}\beta$, то $\beta\mathfrak{R}\gamma$ для всіх $\gamma \in \mathcal{S}_\lambda^n$ таких, що $\text{rank } \gamma \leq \text{rank } \beta$.

Доведення. Розглянемо можливі випадки:

- 1) $\text{dom } \alpha \cap \text{dom } \beta = \emptyset$;
- 2) $\text{ran } \alpha \cap \text{ran } \beta = \emptyset$;
- 3) $\text{dom } \alpha \subset \text{dom } \beta$;
- 4) $\text{ran } \alpha \subset \text{ran } \beta$;
- 5) $\text{dom } \alpha \cap \text{dom } \beta \neq \emptyset$ і $\text{dom } \alpha \not\subset \text{dom } \beta$;
- 6) $\text{ran } \alpha \cap \text{ran } \beta \neq \emptyset$ і $\text{ran } \alpha \not\subset \text{ran } \beta$.

Покажемо, що у всіх цих випадках виконуються умови леми 1.

Припустимо, що виконується випадок 1. Тоді $(\beta\beta^{-1}\alpha)\mathfrak{R}(\beta\beta^{-1}\beta)$, але $\beta = \beta\beta^{-1}\beta$ і $\beta\beta^{-1}\alpha = \mathbf{0}$, а отже, $\beta\mathfrak{R}\mathbf{0}$.

У випадку 2 міркування аналогічні.

Припустимо, що виконується випадок 3. Нехай $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_k \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k & x_{k+1} & \cdots & x_l \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_k & y_{k+1} & \cdots & y_l \end{pmatrix}$, $\varepsilon_\alpha = \alpha\alpha^{-1}$ і $\varepsilon_\beta = \beta\beta^{-1}$. Тоді за лемою 2 маємо $\varepsilon_\alpha\mathfrak{R}\varepsilon_\beta$. Нехай ε — ідемпотент півгрупи $\mathcal{S}_\lambda^n$ такий, що $\varepsilon_\alpha \leq \varepsilon \leq \varepsilon_\beta$. Тоді $\varepsilon = \varepsilon \cdot \varepsilon_\beta$ і $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha \cdot \varepsilon$, і з того, що $\varepsilon_\alpha\mathfrak{R}\varepsilon_\beta$, випливає, що $(\varepsilon \cdot \varepsilon_\alpha)\mathfrak{R}(\varepsilon \cdot \varepsilon_\beta)$, а отже, $\varepsilon_\alpha\mathfrak{R}\varepsilon$ і $\varepsilon_\beta\mathfrak{R}\varepsilon$.

Нехай

$$\uparrow^l \varepsilon_\alpha = \{\gamma \in \mathcal{S}_\lambda^n \mid \gamma \cdot \varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha \cdot \gamma = \varepsilon_\alpha \text{ і } \text{rank } \gamma \leq l\}.$$

Тоді, очевидно, що $\uparrow^l \varepsilon_\alpha$ — інверсна підпівгрупа півгрупи $\mathcal{S}_\lambda^n$ і ε_α — нуль в $\uparrow^l \varepsilon_\alpha$. Отож, для довільного елемента χ півгрупи $\uparrow^l \varepsilon_\alpha$ маємо $\chi\chi^{-1}\chi = \chi$ і $\chi\chi^{-1}\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha$, а отже, $\chi\mathfrak{R}\varepsilon_\alpha$.

Нехай $\tilde{\varepsilon}_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k & x_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_k & x_1 \end{pmatrix}$, де $x_1 \notin \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Тоді, очевидно, що $\tilde{\varepsilon}_1 \in \uparrow^l \varepsilon_\alpha$. Означимо $\gamma_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k & x_1 \\ x_1 & a_2 & \cdots & a_k & a_1 \end{pmatrix}$. Тоді $\gamma_1\gamma_1^{-1} = \tilde{\varepsilon}_1$ і $\gamma_1\tilde{\varepsilon}_1\gamma_1^{-1} = \tilde{\varepsilon}_1$, а отже, $\tilde{\varepsilon}_1\mathfrak{R}(\gamma_1\varepsilon_\alpha\gamma_1^{-1})$, $\varepsilon_\alpha\mathfrak{R}(\gamma_1\varepsilon_\alpha\gamma_1^{-1})$ і $\varepsilon_\beta\mathfrak{R}(\gamma_1\varepsilon_\alpha\gamma_1^{-1})$. Очевидно, що $\text{rank}(\gamma_1\varepsilon_\alpha\gamma_1^{-1}) = k$. Позначимо $\varepsilon_1 = \gamma_1\varepsilon_\alpha\gamma_1^{-1}$. За індукцією побудуємо сім'ю ідемпотентів $\{\varepsilon_i \mid i = 2, \dots, k\}$ так. Нехай

$$\tilde{\varepsilon}_i = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k & x_i \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_k & x_i \end{pmatrix},$$

де $x_1 \notin \{a_1, a_2, \dots, a_k, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_l\}$ і позначимо

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_{i-1} & a_i & a_{i+1} & \cdots & a_k & x_i \\ a_1 & \cdots & a_{i-1} & x_i & a_{i+1} & \cdots & a_k & a_i \end{pmatrix}.$$

Тоді, очевидно, що $\tilde{\varepsilon}_i \in \uparrow^l \varepsilon_\alpha$, $\gamma_i\gamma_i^{-1} = \tilde{\varepsilon}_i$ і $\gamma_i\tilde{\varepsilon}_i\gamma_i^{-1} = \tilde{\varepsilon}_i$, а отже, $\tilde{\varepsilon}_i\mathfrak{R}(\gamma_i\varepsilon_\alpha\gamma_i^{-1})$, $\varepsilon_\alpha\mathfrak{R}(\gamma_i\varepsilon_\alpha\gamma_i^{-1})$ і $\varepsilon_\beta\mathfrak{R}(\gamma_i\varepsilon_\alpha\gamma_i^{-1})$. Позначимо $\varepsilon_i = \gamma_i\varepsilon_\alpha\gamma_i^{-1}$. Очевидно, що $\text{rank } \varepsilon_i = k$.

Отже, маємо $\varepsilon_i\mathfrak{R}\varepsilon_\alpha$ для всіх $i = 1, 2, \dots, k$, а отже, $\varepsilon_i\mathfrak{R}\varepsilon_j$ для всіх $i, j = 1, 2, \dots, k$. Тоді $\varepsilon_i\mathfrak{R}(\varepsilon_i)^k$, а отже, $\varepsilon_i\mathfrak{R}(\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_k)$. Але $\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_k = \mathbf{0}$, а отже $\varepsilon_\alpha\mathfrak{R}\mathbf{0}$. Оскільки $\beta = \varepsilon_\beta\beta$ і $\alpha = \varepsilon_\alpha\alpha$, то

$$\begin{aligned} (\beta)\pi_{\mathfrak{R}} &= (\varepsilon_\beta\beta)\pi_{\mathfrak{R}} = (\varepsilon_\beta)\pi_{\mathfrak{R}} \cdot (\beta)\pi_{\mathfrak{R}} = (\varepsilon_\alpha)\pi_{\mathfrak{R}} \cdot (\beta)\pi_{\mathfrak{R}} = (\mathbf{0})\pi_{\mathfrak{R}} \cdot (\beta)\pi_{\mathfrak{R}} = (\mathbf{0} \cdot \beta)\pi_{\mathfrak{R}} = \\ &= (\mathbf{0})\pi_{\mathfrak{R}}, \end{aligned}$$

а отже, $\beta\mathfrak{R}\mathbf{0}$.

У випадку 4 міркування аналогічні.

У випадку 5 для $\varepsilon_\alpha = \alpha\alpha^{-1}$ і $\varepsilon_\beta = \beta\beta^{-1}$ маємо $\varepsilon_\beta \cdot \varepsilon_\alpha < \varepsilon_\beta$. Якщо $\varepsilon_\beta \cdot \varepsilon_\alpha = \mathbf{0}$, то твердження теореми випливає з леми 1. Якщо ж $\varepsilon_\beta \cdot \varepsilon_\alpha \neq \mathbf{0}$, то виконується випадок 3: $\varepsilon = \varepsilon_\beta \cdot \varepsilon_\alpha < \varepsilon_\beta$.

У випадку 6 міркування аналогічні. $\square$

З леми 1 та теореми 1 випливає наслідок.

Наслідок 1. Нехай $\mathfrak{R}$ – конгруенція на півгрупі $\mathcal{I}_\lambda^n$ та елементи α і β півгрупи $\mathcal{I}_\lambda^n$ є $\mathfrak{R}$ -еквівалентними і не є $\mathfrak{R}$ -еквівалентними до порожнього часткового відображення $\mathbf{0}$. Тоді $\text{rank } \alpha = \text{rank } \beta$.

Твердження 4. Нехай $\mathfrak{R}$ – конгруенція на півгрупі $\mathcal{I}_\lambda^n$ та елементи α і β півгрупи $\mathcal{I}_\lambda^n$ є $\mathfrak{R}$ -еквівалентними і не є $\mathfrak{R}$ -еквівалентними до порожнього часткового відображення $\mathbf{0}$. Тоді $\text{dom } \alpha = \text{dom } \beta$ і $\text{ran } \alpha = \text{ran } \beta$, а отже, $\alpha \mathcal{H} \beta$.

Доведення. За наслідком 1 маємо $\text{rank } \alpha = \text{rank } \beta$. Припустимо, що хоча б одна з умов $\text{dom } \alpha = \text{dom } \beta$ чи $\text{ran } \alpha = \text{ran } \beta$ не виконується. Нехай $\text{dom } \alpha \neq \text{dom } \beta$. Оскільки $\alpha \mathfrak{R} \beta$, то $\alpha = \alpha\alpha^{-1}\alpha$ і $(\alpha\alpha^{-1}\alpha)\mathfrak{R}(\alpha\alpha^{-1}\beta)$, а отже, $\alpha \mathfrak{R}(\alpha\alpha^{-1}\beta)$. Позаяк $\text{dom } \alpha \neq \text{dom } \beta$, то $\text{rank } \alpha > \text{rank } (\alpha\alpha^{-1}\beta)$. Отже, виконуються умови теореми 1, а отже, $\alpha \mathfrak{R} \mathbf{0}$, що суперечить припущенню. У випадку $\text{ran } \alpha \neq \text{ran } \beta$ міркування аналогічні. $\square$

Теорема 2. Нехай $\mathfrak{R}$ – конгруенція на півгрупі $\mathcal{I}_\lambda^n$ та елементи α, β півгрупи $\mathcal{I}_\lambda^n$ належать різним $\mathcal{H}$ -класам. Якщо $\alpha \mathfrak{R} \beta$, то $\beta \mathfrak{R} \gamma$ для всіх $\gamma \in \mathcal{I}_\lambda^n$, що задовольняють умову $\text{rank } \gamma \leq \max\{\text{rank } \alpha, \text{rank } \beta\}$.

Доведення. У випадку, коли $\text{rank } \alpha \neq \text{rank } \beta$, твердження теореми випливає з теореми 1, тому вважатимемо, що $\text{rank } \alpha = \text{rank } \beta$. Тоді з означення півгрупи $\mathcal{I}_\lambda^n$ випливає, що для ідемпотентів $\varepsilon_\alpha = \alpha\alpha^{-1}$, $\varepsilon_\alpha^- = \alpha^{-1}\alpha$, $\varepsilon_\beta = \beta\beta^{-1}$ і $\varepsilon_\beta^- = \beta^{-1}\beta$ виконується хоча б одна з умов: $\varepsilon_\alpha \neq \varepsilon_\beta$ або $\varepsilon_\alpha^- \neq \varepsilon_\beta^-$. Припустимо, що $\varepsilon_\alpha \neq \varepsilon_\beta$. У випадку $\varepsilon_\alpha^- \neq \varepsilon_\beta^-$ міркування аналогічні.

Оскільки $\text{rank } \alpha = \text{rank } \beta$, то $\text{rank } \varepsilon_\alpha = \text{rank } \varepsilon_\beta$, а з умови $\varepsilon_\alpha \neq \varepsilon_\beta$ отримуємо, що ідемпотенти ε_α і ε_β є непорівняльними. Нехай $\varepsilon_0 = \varepsilon_\alpha \cdot \varepsilon_\beta$. Тоді $\varepsilon_\alpha \mathfrak{R} \varepsilon_\beta$, а отже, $(\varepsilon_\alpha \cdot \varepsilon_\beta) \mathfrak{R}(\varepsilon_\beta \cdot \varepsilon_\beta)$ і $\varepsilon_0 \mathfrak{R} \varepsilon_\beta$. Отож, виконуються умови теореми 1. $\square$

Теорема 3. Нехай $\mathfrak{R}$ – конгруенція на півгрупі $\mathcal{I}_\lambda^n$ та α і β – різні елементи напівгрупи $\mathcal{I}_\lambda^n$. Якщо $\alpha \mathfrak{R} \beta$ та елемент β не є $\mathfrak{R}$ -еквівалентними до порожнього перетворення $\mathbf{0}$, то усі елементи півгрупи $\mathcal{I}_\lambda^n$, ранг яких менший за $\text{rank } \alpha$, є $\mathfrak{R}$ -еквівалентними, а усі елементи півгрупи $\mathcal{I}_\lambda^n$, ранг яких більший за $\text{rank } \alpha$, є $\mathfrak{R}$ -еквівалентними лише самим собі.

Доведення. За твердженням 4 маємо $\text{dom } \alpha = \text{dom } \beta$ і $\text{ran } \alpha = \text{ran } \beta$. Оскільки $\alpha \neq \beta$, то існує елемент x множини $\text{dom } \alpha$ такий, що $(x)\alpha \neq (x)\beta$. Позначимо $A = \text{dom } \alpha \setminus \{x\}$. Тоді $(x)\alpha \notin (A)\alpha$. Оскільки $((x)\alpha)\beta^{-1} \neq x$, то $((x)\alpha)\beta^{-1})\beta \in (A)\beta$, тому $(A)\beta \neq (A)\alpha$. Нехай ε_A – тотожне часткове перетворення множини A і $\varepsilon_{(A)\alpha}$ – тотожне часткове перетворення множини $(A)\alpha$. Тоді з $\alpha \mathfrak{R} \beta$ випливає, що $(\varepsilon_A \cdot \alpha \cdot \varepsilon_{(A)\alpha}) \mathfrak{R}(\varepsilon_A \cdot \beta \cdot \varepsilon_{(A)\alpha})$. Позаяк $\text{rank } (\varepsilon_A \cdot \alpha \cdot \varepsilon_{(A)\alpha}) > \text{rank } (\varepsilon_A \cdot \beta \cdot \varepsilon_{(A)\alpha})$, то за теоремою 1 усі часткові перетворення рангу $i \leq \text{rank } (\varepsilon_A \cdot \alpha \cdot \varepsilon_{(A)\alpha})$ є $\mathfrak{R}$ -еквівалентними.

Доведемо друге твердження теореми. Нехай γ і δ – $\mathfrak{R}$ -еквівалентні елементи напівгрупи $\mathcal{S}_\lambda^n$, причому $\text{rank } \gamma > \text{rank } \alpha$ і $\text{rank } \delta > \text{rank } \alpha$. Покажемо, що тоді $\gamma = \delta$. Припустимо, що $\gamma \neq \delta$. Тоді з твердження 4 і теореми 2 випливає, що $\text{dom } \gamma = \text{dom } \delta$ і $\text{ran } \gamma = \text{ran } \delta$. Нехай $\text{rank } \alpha = k$. Тоді існує підмножина $\{x_1, \dots, x_k\}$ в $\text{dom } \gamma$ така, що $(\{x_1, \dots, x_k\})\gamma \neq (\{x_1, \dots, x_k\})\delta$. Нехай $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_k \\ x_1 & \cdots & x_k \end{pmatrix}$ і $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} (x_1)\gamma & \cdots & (x_k)\gamma \\ (x_1)\gamma & \cdots & (x_k)\gamma \end{pmatrix}$. Тоді з $\gamma \mathfrak{R} \delta$ випливає, що $(\varepsilon_1 \cdot \gamma \cdot \varepsilon_2) \mathfrak{R} (\varepsilon_1 \cdot \delta \cdot \varepsilon_2)$. Але $\text{rank } (\varepsilon_1 \cdot \gamma \cdot \varepsilon_2) = k > \text{rank } (\varepsilon_1 \cdot \delta \cdot \varepsilon_2)$, і за теоремою 1 елементи α і $\beta \in \mathfrak{R}$ -еквівалентними до порожнього перетворення $\mathbf{0}$, що суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає друге твердження теореми. $\square$

Означення 1 ([10]). Підмножина D півгрупи S називається ω -нестійкою, якщо D – нескінченна і $aB \cup Ba \not\subseteq D$ для довільних елементів a з D та нескінченної підмножини B в D .

Для довільного нескінченного кардинала λ та натурального $k \leq n$ множина $D = \mathcal{S}_\lambda^k \setminus \mathcal{S}_\lambda^{k-1}$ є ω -нестійкою [10].

З теорем 2 і 3 випливає теорема 4.

Теорема 4. Нехай S – півгрупа і $h: \mathcal{S}_\lambda^n \rightarrow S$ – сюр'єктивний неанулюючий гомоморфізм. Тоді для довільного нескінченного кардинала λ та натурального $k \leq n$, якщо $(\mathcal{S}_\lambda^k)h \neq (\mathcal{S}_\lambda^{k-1})h$, то множина $(\mathcal{S}_\lambda^k)h \setminus (\mathcal{S}_\lambda^{k-1})h$ є ω -нестійкою.

Ідеальним рядом півгрупи S називається ланцюг ідеалів $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \dots \subseteq I_m = S$ [6].

Означення 2 ([10]). Ідеальний ряд $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \dots \subseteq I_m = S$ півгрупи S називається щільним, якщо I_0 – скінченна множина і $I_k \setminus I_{k-1}$ є ω -нестійкою множиною для всіх $k = 1, \dots, m$.

Півгрупи зі щільними ідеальними рядами зберігаються скінченними прямими добутками та гомоморфізмами, для яких кожен елемент з образу має скінченний прообраз [10]. Зауважимо також, що півгрупа $\mathcal{S}_\lambda^n$ має щільний ідеальний ряд $\{0\} \subseteq \mathcal{S}_\lambda^1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{S}_\lambda^n$.

З теореми 4 випливає теорема 5.

Теорема 5. Довільний нетривіальний гомоморфний образ півгрупи $\mathcal{S}_\lambda^n$ є півгрупою зі щільним ідеальним рядом.

Якщо напівтопологічна інверсна півгрупа S з неперервною інверсією містить інверсну підпівгрупу T , що є півгрупою зі щільним ідеальним рядом, то T – замкнена підпівгрупа в S [10, твердження 10].

Нехай $\mathcal{S}$ – клас напівтопологічних півгруп.

Означення 3 ([3, 11, 17, 18]). Напівтопологічна півгрупа $S \in \mathcal{S}$ називається:

- H -замкненою в класі $\mathcal{S}$, якщо вона є замкненою підпівгрупою у кожній напівтопологічній півгрупі $T \in \mathcal{S}$, що містить S як підпівгрупу;
- абсолютно H -замкненою в класі $\mathcal{S}$, якщо довільний неперервний гомоморфний образ півгрупи S у півгрупу $T \in \mathcal{S}$ є H -замкненою півгрупою в класі $\mathcal{S}$;

- алгебрично h -замкнутою в класі $\mathcal{S}$, якщо підгрупа S з дискретною топологією $\mathfrak{d}$ є абсолютно H -замкнутою в класі $\mathcal{S}$ і $(S, \mathfrak{d}) \in \mathcal{S}$.

З теореми 5 випливає теорема 6.

Теорема 6. Підгрупа $\mathcal{S}_\lambda^n$ є алгебрично h -замкнутою в класі напівтопологічних інверсних підгруп з неперервною інверсією.

3. Топологізація підгрупи $\mathcal{S}_\lambda^n$.

Для довільного елемента α підгрупи $\mathcal{S}_\lambda^n$ позначимо

$$\uparrow_l \alpha = \{\gamma \in \mathcal{S}_\lambda^n \mid \alpha \alpha^{-1} \gamma = \alpha\} \quad \text{і} \quad \uparrow_r \alpha = \{\gamma \in \mathcal{S}_\lambda^n \mid \gamma \alpha^{-1} \alpha = \alpha\}.$$

Твердження 5. Для довільного елемента α підгрупи $\mathcal{S}_\lambda^n$ виконується рівність $\uparrow_l \alpha = \uparrow_r \alpha$.

Доведення. Нехай $\gamma \in \uparrow_l \alpha$. Тоді для довільного $x \in \text{dom } \alpha$ маємо $(x)\alpha \alpha^{-1} \gamma = (x)\alpha$, але $(x)\alpha \alpha^{-1} = x$, а отже, $(x)\gamma = (x)\alpha$. Тоді $(x)\gamma \alpha^{-1} \alpha = (x)\alpha \alpha^{-1} \alpha = (x)\alpha$ і маємо $\gamma \in \uparrow_r \alpha$. Отже, $\uparrow_l \alpha \subseteq \uparrow_r \alpha$. Доведення включення $\uparrow_r \alpha \subseteq \uparrow_l \alpha$ аналогічне. $\square$

Для довільного елемента α підгрупи $\mathcal{S}_\lambda^n$ означимо

$$\uparrow \alpha = \uparrow_l \alpha = \uparrow_r \alpha.$$

Твердження 6. Кожна гаусдорфова топологія τ на підгрупі $\mathcal{S}_\lambda^n$ така, що $(\mathcal{S}_\lambda^n, \tau)$ – напівтопологічна підгрупа є цілком регулярною.

Доведення. З наслідку 8 [10] отримуємо, що для довільного елемента α напівгрупи $\mathcal{S}_\lambda^n$ з $\text{rank } \alpha = k$ точка α є ізольованою в $\mathcal{S}_\lambda^k$, оскільки зсуви у підгрупі $\mathcal{S}_\lambda^n$ є неперервними відображеннями, то $\uparrow \alpha$ – відкрито-замкнена підмножина в $(\mathcal{S}_\lambda^n, \tau)$.

Нехай α і β – довільні різні елементи підгрупи $\mathcal{S}_\lambda^n$. Тоді виконується хоча б одна з умов: $\alpha \notin \uparrow \beta$ або $\beta \notin \uparrow \alpha$. Припустимо, що $\alpha \notin \uparrow \beta$. Означимо відображення $f: \mathcal{S}_\lambda^n \rightarrow [0, 1]$ за формулою

$$(\chi)f = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \chi \in \uparrow \beta; \\ 0, & \text{якщо } \chi \notin \uparrow \beta. \end{cases}$$

Оскільки підмножина $\uparrow \beta$ відкрито-замкнена в $(\mathcal{S}_\lambda^n, \tau)$, то так визначене відображення f є неперервним. У випадку $\beta \notin \uparrow \alpha$ відображення $f: \mathcal{S}_\lambda^n \rightarrow [0, 1]$ визначається аналогічно. Отже, $(\mathcal{S}_\lambda^n, \tau)$ – цілком регулярний топологічний простір. $\square$

Топологічний простір X називається *колективно нормальним*, якщо X є T_1 -простором і для довільної дискретної сім'ї $\{F_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ замкнених підмножин в X існує дискретна сім'я $\{U_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ відкритих підмножин в X така, що $F_s \subseteq U_s$ для всіх $s \in \mathcal{S}$ [8].

Твердження 7. Для довільного $\lambda \geq 1$ простір гаусдорфової напівтопологічної підгрупи $(\mathcal{S}_\lambda^1, \tau)$ є колективно нормальним, а отже, нормальним.

Доведення. Якщо $\lambda < \omega$, то твердження очевидне, тому вважатимемо, що $\lambda \geq \omega$. Нехай $\mathcal{F} = \{F_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ – дискретна сім'я замкнених підмножин в $(\mathcal{S}_\lambda^1, \tau)$. За лемою 2 [12] кожен ненульовий елемент підгрупи $\mathcal{S}_\lambda^1$ є ізольованою точкою у просторі $(\mathcal{S}_\lambda^1, \tau)$. Якщо жоден елемент сім'ї $\mathcal{F}$ не містить нуля $\mathbf{0}$ підгрупи $\mathcal{S}_\lambda^1$, то твердження випливає з теореми 5.1.17 [8]. Припустимо, що $\mathbf{0} \in F_{s_0}$ для деякого $s_0 \in \mathcal{S}$. Нехай $U(\mathbf{0})$ –

відкритий окіл нуля $\mathbf{0}$ півгрупи $\mathcal{S}_\lambda^1$, що перетинає не більше, ніж один елемент сім'ї $\mathcal{F}$. Прийmemo $U_{s_0} = U(\mathbf{0}) \cup F_{s_0}$ і $U_s = F_s$ для всіх $s \in \mathcal{S} \setminus \{s_0\}$. Тоді $U_s \cap U_t = \emptyset$ для всіх $s \neq t$, $s, t \in \mathcal{S}$ і за теоремою 5.1.17 [8] топологічний простір $(\mathcal{S}_\lambda^1, \tau)$ колективно нормальний. $\square$

Зауваження 1. Для довільного незліченного кардинала λ на півгрупі $\mathcal{S}_\lambda^1$ існує півгрупова (інверсна) топологія τ_{mv} (τ_{mi}) така, що топологічний простір $(\mathcal{S}_\lambda^1, \tau_{mv})$ ($(\mathcal{S}_\lambda^1, \tau_{mh})$) не є досконало нормальним [12].

Зауваження 2. Нехай $V(\aleph_0)$ – зліченне віяло Фреше-Урисона (див. [8, 3.12.8(e)]). Означимо топологію τ на зліченній півгрупі $\mathcal{S}_{\aleph_0}^1$ так: усі ненульові елементи напівгрупи $\mathcal{S}_{\aleph_0}^1$ є ізольованими точками, в'язка $E(\mathcal{S}_{\aleph_0}^1)$ – відкрита підмножина в $\mathcal{S}_{\aleph_0}^1$ і отожднюється з $V(\aleph_0)$ так, щоб нуль півгрупи $\mathcal{S}_{\aleph_0}^1$ був неізольованою точкою в $V(\aleph_0)$. Легко бачити, що $(\mathcal{S}_{\aleph_0}^1, \tau)$ – топологічна інверсна півгрупа, яка не має зліченної бази в нулі.

Топологічний простір X називається *розрідженим*, якщо він не містить непорожню щільну в собі власну підмножину [8]. Очевидно, що топологічний простір X є розрідженим, якщо кожна непорожня підмножина A в X містить ізольовану точку в A .

Твердження 8. Для довільних натурального n і $\lambda \geq 1$ простір гаусдорфової напівтопологічної півгрупи $(\mathcal{S}_\lambda^n, \tau)$ є розрідженим.

Доведення. Якщо $\lambda < \omega$, то твердження очевидне, тому вважатимемо, що $\lambda \geq \omega$. Покажемо, що кожна замкнена підмножина в $(\mathcal{S}_\lambda^n, \tau)$ містить ізольовану в собі точку. Нехай A – замкнена підмножина в $(\mathcal{S}_\lambda^n, \tau)$. Тоді з означення півгрупи $\mathcal{S}_\lambda^n$ випливає, що існує елемент α півгрупи $\mathcal{S}_\lambda^n$ такий, що $\alpha \in A$ і $\text{rank } \beta \leq \text{rank } \alpha = k$ для всіх $\beta \in A$. За наслідком 8 [10], $\{\alpha\}$ – відкрита підмножина в підпросторі $\mathcal{S}_\lambda^k$, а отже, α – ізольована точка в A . $\square$

Топологічний простір X називається *нульвимірним*, якщо в X існує база топології, що складається з відкрито-замкнених підмножин [8].

Зауваження 3. З леми 2 [12] випливає, що для довільного кардинала $\lambda \geq 1$ простір напівтопологічної півгрупи $\mathcal{S}_\lambda^1$ є нульвимірним.

Твердження 9. Для довільних натурального n і $\lambda \geq 1$ простір гаусдорфової локально компактної напівтопологічної півгрупи $(\mathcal{S}_\lambda^n, \tau)$ є нульвимірним.

Доведення. Зафіксуємо довільний елемент α півгрупи $\mathcal{S}_\lambda^n$. Оскільки зсуви в півгрупі $(\mathcal{S}_\lambda^n, \tau)$ є неперервними відображеннями, то з наслідку 8 [10] отримуємо, що $\uparrow\alpha$ – відкрито-замкнена підмножина в $(\mathcal{S}_\lambda^n, \tau)$. Нехай $U(\alpha)$ – відкритий окіл точки α в $(\mathcal{S}_\lambda^n, \tau)$ з компактним замиканням $\overline{U(\alpha)}$. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $\overline{U(\alpha)} \subseteq \uparrow\alpha$. Тоді $\overline{U(\alpha)} \setminus U(\alpha)$ – компактна підмножина в $(\mathcal{S}_\lambda^n, \tau)$, $\alpha \notin \overline{U(\alpha)} \setminus U(\alpha)$ і $\Gamma = \{\uparrow\beta \mid \beta \in \overline{U(\alpha)} \setminus U(\alpha)\}$ – відкрите покриття множини $\overline{U(\alpha)} \setminus U(\alpha)$. Нехай $\Gamma_0 = \{\uparrow\beta_i \mid i = 1, 2, \dots, k\} \subseteq \Gamma$ – скінченне підпокриття множини $\overline{U(\alpha)} \setminus U(\alpha)$. Тоді $V(\alpha) = U(\alpha) \setminus \bigcup_{i=1}^k \uparrow\beta_i$ – відкрито-замкнений окіл точки α і $V(\alpha) \subseteq U(\alpha)$. $\square$

Означимо топологію τ_c на півгрупі $\mathcal{J}_\lambda^n$ так: сім'я

$$\mathcal{B} = \{U_\alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \uparrow\alpha \setminus (\uparrow\alpha_1 \cup \dots \cup \uparrow\alpha_k) \mid \alpha_i \in \uparrow\alpha \setminus \{\alpha\}, \alpha, \alpha_i \in \mathcal{J}_\lambda^n, i = 1, \dots, k\}$$

є базою топології τ_c на $\mathcal{J}_\lambda^n$.

Твердження 10. Для довільних $\lambda \geq 1$ і натурального n , $(\mathcal{J}_\lambda^n, \tau_c)$ – гаусдорфова компактна напівтопологічна півгрупа з неперервною інверсією.

Доведення. Оскільки для довільних $\alpha, \beta \in \mathcal{J}_\lambda^n$ виконується хоча б одна з умов $\alpha \notin \uparrow\beta$ або $\beta \notin \uparrow\alpha$, то простір $(\mathcal{J}_\lambda^n, \tau_c)$ є гаусдорфовим. Очевидно, що простір $(\mathcal{J}_\lambda^n, \tau_c)$ компактний.

Покажемо, що у півгрупі $(\mathcal{J}_\lambda^n, \tau_c)$ зсуви є неперервними відображеннями. Для цього розглянемо можливі випадки.

(i) $\mathbf{0} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Тоді для довільного відкритого околу $U_0(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ нуля $\mathbf{0}$ півгрупи $\mathcal{J}_\lambda^n$ маємо

$$U_0(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot U_0(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \{\mathbf{0}\} \subseteq U_0(\alpha_1, \dots, \alpha_k).$$

(ii) $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Тоді для довільного відкритого околу $U_0(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ нуля $\mathbf{0}$ маємо

$$U_\alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \cdot \mathbf{0} = \{\mathbf{0}\} \subseteq U_0(\alpha_1, \dots, \alpha_k).$$

Нехай $U_0(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ – довільний окіл нуля $\mathbf{0}$ півгрупи $\mathcal{J}_\lambda^n$. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $\text{rank } \alpha_1, \dots, \text{rank } \alpha_k \leq \text{rank } \alpha$. Означимо

$$B = \{\gamma \in \mathcal{J}_\lambda^n \mid \text{rank } \gamma = 1, \text{dom } \gamma \subseteq \text{dom } \alpha \text{ і } \text{ran } \gamma \subseteq \text{ran } \alpha_1 \cup \dots \cup \text{ran } \alpha_k\}.$$

Тоді B – скінченна підмножина в $\mathcal{J}_\lambda^n$ і $\alpha \cdot U_0(B) \subseteq U_0(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$.

(iii) $\mathbf{0} \cdot \alpha = \mathbf{0}$. Тоді для довільного відкритого околу $U_0(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ нуля $\mathbf{0}$ маємо

$$\mathbf{0} \cdot U_\alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \{\mathbf{0}\} \subseteq U_0(\alpha_1, \dots, \alpha_k).$$

Нехай $U_0(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ – довільний окіл нуля $\mathbf{0}$ напівгрупи $\mathcal{J}_\lambda^n$. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $\text{rank } \alpha_1, \dots, \text{rank } \alpha_k \leq \text{rank } \alpha$. Означимо

$$B = \{\gamma \in \mathcal{J}_\lambda^n \mid \text{rank } \gamma = 1, \text{dom } \gamma \subseteq \text{dom } \alpha_1 \cup \dots \cup \text{dom } \alpha_k \text{ і } \text{ran } \gamma \subseteq \text{ran } \alpha\}.$$

Тоді B – скінченна підмножина в $\mathcal{J}_\lambda^n$ і $U_0(B) \cdot \alpha \subseteq U_0(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$.

(iv) $\alpha \cdot \beta = \gamma \neq \mathbf{0}$ і $\text{rank } \alpha = \text{rank } \beta = \text{rank } \gamma$, тобто $\text{ran } \alpha = \text{dom } \beta$. Тоді для довільних околів $U_\alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, $U_\beta(\beta_1, \dots, \beta_n)$, $U_\gamma(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ елементів α, β і γ , відповідно, маємо

$$U_\alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \cdot \beta = \alpha \cdot U_\beta(\beta_1, \dots, \beta_n) = \{\gamma\} \subseteq U_\gamma(\gamma_1, \dots, \gamma_m).$$

(v) $\alpha \cdot \beta = \gamma \neq \mathbf{0}$ і $\text{rank } \alpha = \text{rank } \gamma < \text{rank } \beta$, тобто $\text{ran } \alpha \subsetneq \text{dom } \beta$. Тоді для довільних околів $U_\beta(\beta_1, \dots, \beta_n)$ і $U_\gamma(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ елементів β і γ , відповідно, маємо

$$\alpha \cdot U_\beta(\beta_1, \dots, \beta_n) = \{\gamma\} \subseteq U_\gamma(\gamma_1, \dots, \gamma_m).$$

Якщо $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_i \\ b_1 & \dots & b_i \end{pmatrix}$ і $\beta = \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_i & b_{i+1} & \dots & b_{i+j} \\ c_1 & \dots & c_i & c_{i+1} & \dots & c_{i+j} \end{pmatrix}$, де $i + j \leq n$, то $\gamma = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_i \\ c_1 & \dots & c_i \end{pmatrix}$. Нехай $U_\gamma(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ – довільний відкритий окіл елемента γ і

$\gamma_l = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i & a_{i+1}^l & \cdots & a_{i+s_l}^l \\ c_1 & \cdots & c_i & c_{i+1}^l & \cdots & c_{i+s_l}^l \end{pmatrix}$, де $l = 1, \dots, k$. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $s \leq j$. Нехай $X = \{c_{i+1}, \dots, c_{i+j}\} \cap \bigcup_{l=1}^k \{c_{i+1}^l, \dots, c_{i+s_l}^l\}$ і

$$X_\alpha = \{(a, b) \mid a \in \text{dom } \gamma_1 \cup \dots \cup \text{dom } \gamma_k, b \in X\}.$$

Якщо $X_\alpha = \emptyset$, то для довільного околу $U_\alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ елемента α одержуємо

$$U_\alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \cdot \beta = \{\gamma\} \subseteq U_\gamma(\gamma_1, \dots, \gamma_k).$$

Якщо ж $X_\alpha \neq \emptyset$, то множина X_α – скінченна й означимо

$$A_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i & a \\ b_1 & \cdots & b_i & b \end{pmatrix} \mid (a, b) \in X_\alpha \right\}.$$

Тоді множина A_α – скінченна, $A_\alpha \subseteq \uparrow \alpha$ і виконується включення

$$U_\alpha(A_\alpha) \cdot \beta \subseteq U_\gamma(\gamma_1, \dots, \gamma_k).$$

(vi) $\alpha \cdot \beta = \gamma \neq \mathbf{0}$ і $\text{rank } \beta = \text{rank } \gamma < \text{rank } \alpha$, тобто $\text{dom } \beta \subsetneq \text{ran } \alpha$. У цьому випадку міркування аналогічні до випадку (v) з точністю до дуальності.

(vii) $\alpha \cdot \beta = \gamma \neq \mathbf{0}$ і $\text{rank } \gamma < \max\{\text{rank } \alpha, \text{rank } \beta\}$. Нехай

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i & a_{i+1} & \cdots & a_{i+k} \\ b_1 & \cdots & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_{i+k} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_i & x_{i+1} & \cdots & x_{i+j} \\ c_1 & \cdots & c_i & y_{i+1} & \cdots & y_{i+j} \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ c_1 & \cdots & c_i \end{pmatrix}, \quad \text{де } i+k, i+j \leq n.$$

Нехай $\gamma_1 = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i & p_1 \\ c_1 & \cdots & c_i & q_1 \end{pmatrix}, \dots, \gamma_m = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i & p_m \\ c_1 & \cdots & c_i & q_m \end{pmatrix}$. Якщо $q_1, \dots, q_{m_1} \in \text{ran } \beta$, $m_1 \leq m$, то $U_\alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_{m_1}) \cdot \beta \subseteq U_\gamma(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$, де

$$\alpha_t = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i & a_{i+1} & \cdots & a_{i+k} & p_t \\ b_1 & \cdots & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_{i+k} & x \end{pmatrix}, \quad t = 1, \dots, m_1 \text{ і } (x)\beta \in \{q_1, \dots, q_{m_1}\}.$$

Якщо $p_1, \dots, p_{m_2} \in \text{dom } \alpha$, $m_2 \leq m$, то $\alpha \cdot U_\beta(\beta_1, \dots, \beta_{m_2}) \subseteq U_\gamma(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$, де

$$\beta_t = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_i & x_{i+1} & \cdots & x_{i+j} & y \\ c_1 & \cdots & c_i & y_{i+1} & \cdots & y_{i+j} & q_t \end{pmatrix}, \quad t = 1, \dots, m_2, \text{ і } (y)\alpha^{-1} \in \{p_1, \dots, p_{m_2}\}.$$

Отож, зсуви у $(\mathcal{J}_\lambda^n, \tau_c)$ є неперервними. Інверсія неперервна в $(\mathcal{J}_\lambda^n, \tau_c)$, оскільки для довільних $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_i \in \mathcal{J}_\lambda^n$, де $\alpha_1, \dots, \alpha_i \in \uparrow \alpha \setminus \{\alpha\}$, $i = 1, 2, \dots$, виконується рівність $(U_\alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_i))^{-1} = U_{\alpha^{-1}}(\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_i^{-1})$. $\square$

Зауваження 4. З означення топології τ_c на півгрупі $\mathcal{J}_\lambda^n$ випливає, що для довільної топології τ на $\mathcal{J}_\lambda^n$ такої, що $(\mathcal{J}_\lambda^n, \tau)$ – гаусдорфова напівтопологічна півгрупа, виконується включення $\tau_c \subseteq \tau$.

Теорема 7. Нехай $\lambda \geq \omega$, $n = 1, 2, \dots$ і τ – гаусдорфова топологія на півгрупі $\mathcal{J}_\lambda^n$. Тоді такі умови еквівалентні:

- (i) $(\mathcal{J}_\lambda^n, \tau)$ – компактна напівтопологічна півгрупа;
- (ii) $(\mathcal{J}_\lambda^n, \tau)$ – топологічно ізоморфна до півгрупи $(\mathcal{J}_\lambda^n, \tau_c)$;
- (iii) $(\mathcal{J}_\lambda^n, \tau)$ – компактна напівтопологічна півгрупа з неперечною інверсією;
- (iv) $(\mathcal{J}_\lambda^n, \tau)$ – зліченно компактна напівтопологічна півгрупа.

Доведення. Імплікації $(ii) \Rightarrow (i)$, $(ii) \Rightarrow (iii)$, $(iii) \Rightarrow (i)$, $(i) \Rightarrow (iv)$, $(ii) \Rightarrow (iv)$ і $(iii) \Rightarrow (iv)$ є очевидними.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Із зауваження 4 отримуємо, що $\tau_c \subseteq \tau$, оскільки τ – компактна топологія на півгрупі $\mathcal{S}_\lambda^n$, то за наслідком 3.1.14 [8] одержуємо $\tau = \tau_c$.

$(iv) \Rightarrow (i)$. Нехай τ – топологія на $\mathcal{S}_\lambda^n$ така, що $(\mathcal{S}_\lambda^n, \tau)$ – зліченно компактна напівтопологічна півгрупа. Доведення будемо проводити індукцією по n . За теоремою 2 [12] для $n = 1$ напівтопологічна півгрупа $(\mathcal{S}_\lambda^n, \tau)$ є компактною. Доведемо, що з того, що для довільного $k < n$ напівтопологічна півгрупа $(\mathcal{S}_\lambda^k, \tau)$ є компактною, випливає, що півгрупа $(\mathcal{S}_\lambda^k, \tau)$ є компактною для $k = n$.

З припущення індукції та теореми 3.10.4 [8] отримуємо, що півгрупа $\mathcal{S}_\lambda^{n-1}$ з індукованою з $(\mathcal{S}_\lambda^n, \tau)$ топологією, є компактною, оскільки $\mathcal{S}_\lambda^{n-1}$ – замкнений підпростір в $(\mathcal{S}_\lambda^n, \tau)$. Припустимо, що τ – некомпактна топологія на $\mathcal{S}_\lambda^n$. Тоді існує відкрите покриття $\Gamma = \{U_i\}_{i \in \mathcal{A}}$ півгрупи $\mathcal{S}_\lambda^n$, що не містить скінченне підпокриття. Оскільки $\mathcal{S}_\lambda^{n-1}$ – компактна підпівгрупа в $(\mathcal{S}_\lambda^n, \tau)$, то існує скінченна підсім'я $\Gamma_{n-1} = \{U_1, \dots, U_m\}$ в $\Gamma = \{U_i\}_{i \in \mathcal{A}}$ така, що $\mathcal{S}_\lambda^{n-1} \subseteq \bigcup_{i=1}^m U_i$. Оскільки простір $(\mathcal{S}_\lambda^n, \tau)$ не є компактним, то існує елемент U покриття Γ такий, що $\bigcup \Gamma_{n-1} \neq \bigcup \Gamma_{n-1} \cup U$. За індукцією побудуємо зліченну підсім'ю $\Gamma^* = \{U_j \mid j = 1, 2, 3, \dots\}$ сім'ї Γ таку, що $\bigcup \Gamma_{n-1} \neq \bigcup \Gamma_{n-1} \cup U_1$ і

$$\bigcup \Gamma_{n-1} \cup U_1 \cup \dots \cup U_j \neq \bigcup \Gamma_{n-1} \cup U_1 \cup \dots \cup U_j \cup U_{j+1},$$

для довільного натурального j . Зауважимо, що зі зліченної компактності простору $(\mathcal{S}_\lambda^n, \tau)$ випливає, що $\bigcup \Gamma_{n-1} \cup \bigcup \{U_j \mid j = 1, 2, 3, \dots\} \neq \mathcal{S}_\lambda^n$, оскільки за припущенням $(\mathcal{S}_\lambda^n, \tau)$ – некомпактний простір. За наслідком 8 [10] множина

$$V = \mathcal{S}_\lambda^n \setminus \left(\bigcup \Gamma_{n-1} \cup \bigcup \{U_j \mid j = 1, 2, 3, \dots\} \right)$$

містить лише ізольовані точки в $(\mathcal{S}_\lambda^n, \tau)$, а отже, $\tilde{\Gamma} = \Gamma_{n-1} \cup \{V\} \cup \{U_j \mid j = 1, 2, 3, \dots\}$ – відкрите зліченне покриття простору $(\mathcal{S}_\lambda^n, \tau)$, що не містить скінченне підпокриття, а це суперечить зліченній компактності простору $(\mathcal{S}_\lambda^n, \tau)$. З отриманої суперечності випливає компактність простору $(\mathcal{S}_\lambda^n, \tau)$. $\square$

-
1. Вагнер В.В. К теории частичных преобразований / Вагнер В.В. // ДАН СССР. – 1952. – Т. 84, №5. – С. 653-656.
 2. Вагнер В.В. Обобщённые группы / Вагнер В.В. // ДАН СССР. – 1952. – Т. 84, №5. – С. 1119-1122.
 3. Гутік О.В. Н-замкнені топологічні півгрупи та λ -розширення Брандта / Гутік О.В., Павлик К.П. // Мат. методи фіз.-мех. поля. – 2001. – Т. 44, №3. – С. 20-28.
 4. Carruth J.H. The Theory of Topological Semigroups, Vol. I / Carruth J.H., Hildebrandt J.A., Koch R.J. – New York and Basel: Marcel Dekker Inc., 1983.
 5. Carruth J.H. The Theory of Topological Semigroups, Vol. II / Carruth J.H., Hildebrandt J.A., Koch R.J. – New York and Basel: Marcel Dekker Inc., 1986.
 6. Clifford A.H. The Algebraic Theory of Semigroups, Vol. I / Clifford A.H., Preston G.B. – Amer. Math. Soc. Surveys 7, Providence, R.I., 1961.
 7. Clifford A.H. The Algebraic Theory of Semigroups, Vol. II / Clifford A.H., Preston G.B. – Amer. Math. Soc. Surveys 7, Providence, R.I., 1967.
 8. Engelking R. General Topology, 2nd ed. / Engelking R. – Berlin, 1989.

9. *Green J.A.* On the structure of semigroups / *Green J.A.* // Ann. of Math. – 1955. – Vol. 84. – P. 163-172.
10. *Gutik O.* Semigroup closures of finite rank symmetric inverse semigroups / *Gutik O., Lawson J., Repovš D.* // Semigroup Forum. – 2009. – Vol. 78, №2. – P. 326-336.
11. *Gutik O.* Topological Brandt λ -extensions of absolutely H -closed topological inverse semigroups / *Gutik O., Pavlyk K.* // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2003. – Вип. 61. – №2. – С. 98-105.
12. *Gutik O.* Topological semigroups of matrix units / *Gutik O., Pavlyk K.* // Algebra Discrete Math. – 2005. – №. 3. – С. 1-17.
13. *Gutik O.V.* Topological semigroups of matrix units and countably compact Brandt λ^0 -extensions / *Gutik O.V., Pavlyk K.P., Reiter A.R.* // Мат. студії. – 2009. – Т. 32, №2. – С. 115-131.
14. *Gutik O.V.* Symmetric inverse topological semigroups of finite rank $\leq n$ / *Gutik O.V., Reiter A.R.* // Мат. методи фіз.-мех. поля. – 2009. – Т. 52, №3. – С. 7-14.
15. *Petrich M.* Inverse Semigroups / *Petrich M.* – New York: John Wiley & Sons, 1984.
16. *Ruppert W.* Compact Semitopological Semigroups: An Intrinsic Theory / *Ruppert W.* – Lecture Notes in Mathematics. – Vol. 1079 – Berlin, 1984.
17. *Stepp J.W.* A note on maximal locally compact semigroups / *Stepp J.W.* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – Vol. 20, №. 1 – P. 251-253.
18. *Stepp J.W.* Algebraic maximal semilattices / *Stepp J.W.* // Pacific J. Math. – 1975. – Vol. 58, №. 1 – P. 243-248.

ON SEMITOPOLOGICAL SYMMETRIC INVERSE SEMIGROUPS OF A BOUNDED FINITE RANK

Oleg GUTIK, Andriy REITER

*Ivan Franko National University of L'viv,
79000 L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: o_gutik@franko.lviv.ua, reiter_andriy@yahoo.com*

We prove that the symmetric inverse semigroup of a bounded finite rank $\mathcal{S}_\lambda^n$ is algebraically h -closed in the class of semitopological inverse semigroups with continuous inversion. Also we describe all compact and countably compact topologies τ on $\mathcal{S}_\lambda^n$ such that $(\mathcal{S}_\lambda^n, \tau)$ is a Hausdorff semitopological semigroup.

Key words: symmetric inverse semigroup of a bounded finite rank, semitopological semigroup, congruence.

О ПОЛУТОПОЛОГИЧЕСКИХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ИНВЕРСНЫХ ПОЛУГРУППАХ ОГРАНИЧЕННОГО КОНЕЧНОГО РАНГА

Олег ГУТИК, Андрей РЕЙТЕР

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000 Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: o_gutik@franko.lviv.ua, reiter_andriy@yahoo.com*

Доказано, что симметрическая инверсная полугруппа ограниченного конечного ранга $\mathcal{S}_\lambda^n$ алгебраически h -замкнута в классе полутопологических инверсных полугрупп с непрерывной инверсией. Описаны все компактные и счётно компактные топологии τ на полугруппе $\mathcal{S}_\lambda^n$ такие, что $(\mathcal{S}_\lambda^n, \tau)$ – хаусдорфова полутопологическая полугруппа.

Ключевые слова: симметрическая инверсная полугруппа ограниченного конечного ранга, полутопологическая полугруппа, конгруэнция.

Стаття надійшла до редколегії 06.05.2010

Прийнята до друку 22.12.2010

УДК 517.9

ІНТЕГРОВНІ ПОТЕНЦІАЛИ СИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ ЧОТИРЬОХ ТА П'ЯТИ ПОПАРНО ВЗАЄМОДІЮЧИХ ЧАСТИНОК НА ПРЯМІЙ

Богдан ДОВГАНЬ, Андрій ВУС

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000 Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: bohdan_dovhanj@ukr.net, andrij_vus@ukr.net

Досліджено редуковані системи чотирьох і п'яти попарно взаємодіючих частинок на прямій. Розглянуто властивості потенціалів взаємодії в припущенні, що ця система володіє першим інтегралом, поліноміальний за імпульсами. Отримано функціональні рівняння на потенціали й описано деякі їхні розв'язки.

Ключові слова: гамільтонова система, перший інтеграл, дужка Пуассона, теорема додавання.

1. Вступ. Одним з важливих напрямів дослідження інтегровності динамічних систем є розгляд системи взаємодіючих n частинок на прямій, яка описується гамільтоніаном

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i^2 + \sum_{i \leq i < j \leq n} V(x_i - x_j), \quad (1)$$

де $V(t)$ – потенціал попарної взаємодії частинок. Вперше таку задачу для випадку трьох частинок з потенціалом взаємодії $V(t) = a/t^2$ дослідив Якобі [6], який показав, що вона є інтегровною. Згодом Ф. Калоджеро, Б. Сазерленд та Дж. Мозер [8–13] довели інтегровність системи n взаємодіючих частинок з потенціалом у вигляді ϕ -функції Вейерштрасса. Загальний вигляд перших інтегралів та їхній зв'язок з квантовими системами описав С.І. Підкуйко [4–5]. Висока симетрія таких систем була об'єктом тривалих досліджень М.А. Ольшанецького та А.М. Переломова [1–3, 15–18]. Значний внесок в дослідження проблеми інтегровності деформованих систем взаємодіючих частинок внесли М. Адлер, П. ван Мербеке, В.І. Іноземцев [7, 14]. Часто розглядаються системи на прямій, в яких частинки, що їх утворюють,

взаємодіють тільки з найближчими сусідами (одновимірні ланцюжки). Динаміка “замкненого” (періодичного) ланцюжка описується гамільтоніаном

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i^2 + \sum_{i=1}^n V(x_i - x_{i+1}), \quad x_{n+1} = x_1 \quad (2)$$

а “розірваного” (неперіодичного) – гамільтоніаном

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} V(x_i - x_{i+1}). \quad (3)$$

У цих випадках потенціал V не завжди вважається парним.

1.1. Формулювання задачі. Основними припущеннями щодо досліджуваних систем n взаємодіючих частинок на прямій є їхня повна інтегровність за Ліувіллем, тобто існування повного набору перших інтегралів $\{F_k, k = \overline{1, n}\}$, $F_1 = H$, поліноміальних за імпульсами і функціонально незалежних між собою.

Розглянемо проблему інтегровності за Ліувіллем гамільтонової системи взаємодії чотирьох і п'яти точкових мас на прямій з гамільтоніаном (1), де $n \in \{4, 5\}$, $x_i, p_i, i = \overline{1, n}$ – відповідно координати та імпульси частинок (точкових мас), функцію V тут і надалі будемо називати *потенціалом*.

Ми розглядаємо перші інтеграли, що поліноміальні за імпульсами, тому в загальному випадку перший інтеграл можна записати у вигляді

$$F = F_{2N} + F_{2N-2} + \dots + F_0, \quad (4)$$

де $F_r = \sum_{i_1 + \dots + i_k = r} E^{i_1, i_2, \dots, i_k}(x) p_1^{i_1} \dots p_k^{i_k}$ – однорідний поліном порядку r за імпульсами з коефіцієнтами $E^{i_1, i_2, \dots, i_k}(x)$, які є $C^{(1)}$ -гладкими функціями координат.

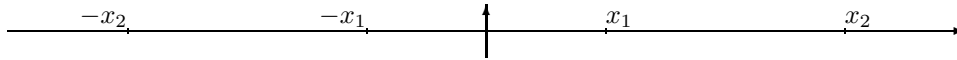
Якщо $k = 2$, то $F_r = \sum_{i=0}^r E^{r-i, i}(x) p_1^{r-i} p_2^i$. Для випадку $k = 2$, $2N = 4$, $r = 4$ позначатимемо $A_i = E^{4-i, i}$, $i = \overline{0, 4}$. Якщо $F(x, p)$ – перший інтеграл гамільтонової системи з гамільтоніаном (1), то будемо говорити, що потенціал V *допускає* перший інтеграл F .

Розглядатимемо надалі лише потенціали $V(t)$, що задовольняють такі умови.

1. Нуль є особливою точкою для потенціалу $V(t)$ (поліус або істотна особлива точка).

2. $V(t)$ – парна.

1.2. Редукція задач чотирьох і п'яти частинок на прямій із попарною взаємодією до системи з 2 ступенями вільності. Нехай на прямій розміщені чотири частинки, що розташовані симетрично стосовно початку координат



Вибравши початкові умови $x_i(0), \dot{x}_i(0), i = \overline{1, 4}$, у симетричному вигляді, одержимо для еволюції в часі

$$\begin{cases} x_3(t) &= -x_2(t), \\ x_4(t) &= -x_1(t). \end{cases}$$

Внаслідок симетричності еволюції системи стосовно початку координат гамільтоніан (1) може бути зведений до вигляду

$$H^* = p_1^2 + p_2^2 + 2V(x_2 - x_1) + V(2x_1) + 2V(x_1 + x_2) + V(2x_2),$$

який зручно звести до вигляду $H^* = 2\tilde{H}$, де

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + V(x_2 - x_1) + \frac{1}{2}V(2x_1) + V(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}V(2x_2).$$

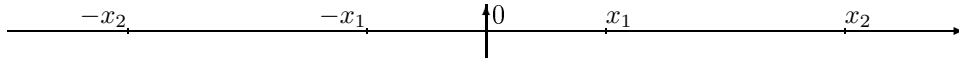
Надалі $\tilde{H}$ для зручності позначатимемо знову через H

$$H = T + W, \quad (5)$$

де кінетична енергія $T = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2)$, а

$$W = V(x_1 + x_2) + V(x_2 - x_1) + \frac{1}{2}V(2x_1) + \frac{1}{2}V(2x_2). \quad (6)$$

Ми описали вигляд H і W у випадку редукованої системи чотирьох частинок на прямій з попарною взаємодією. Зауважимо, що наведений вище алгоритм редукції застосовний і до випадку $n = 5$. Справді, нехай на прямій розміщено п'ять частинок, що розташовані симетрично стосовно початку координат.



Вибравши початкові умови $x_i(0), \dot{x}_i(0), i = \overline{1, 5}$ у відповідному вигляді, внаслідок симетричності еволюції системи стосовно початку координат, одержимо

$$\begin{cases} x_3(t) &= 0, \\ x_4(t) &= -x_2(t), \\ x_5(t) &= -x_1(t). \end{cases}$$

Аналогічно до (6) одержимо

$$H = T + W,$$

де кінетична енергія $T = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2)$, а

$$W = V(x_1 + x_2) + V(x_2 - x_1) + V(x_1) + \frac{1}{2}V(2x_1) + V(x_2) + \frac{1}{2}V(2x_2). \quad (7)$$

Надалі гамільтоніани для випадку редукованої системи чотирьох і п'яти частинок на прямій записуватимемо у вигляді (5), де для випадку чотирьох частинок потенціальна енергія W має вигляд (6), а для випадку п'яти частинок – вигляд (7).

2. Симетрії задач чотирьох і п'яти частинок. Позначимо через X множину функцій $f(x, p) : \mathbb{R}^{2N} \mapsto \mathbb{R}$, які залежать від координат та імпульсів.

Нагадаємо, що канонічне перетворення – це заміна узагальнених координат та узагальнених імпульсів класичної механічної системи на інші, при якій зберігається вигляд основних рівнянь гамільтонової механіки – рівнянь Гамільтона

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (8)$$

Означення 1. Оператор $S : \mathbb{R}^{2N} \mapsto \mathbb{R}^{2N}$, який описує канонічну заміну узагальнених координат та узагальнених імпульсів класичної механічної системи на інші, при якій зберігається вигляд функції Гамільтона $H : H(S(x, p)) \equiv H(x, p)$, називаємо симетрією.

Означення 2. Будемо говорити, що функція $f(x, p) \in X$ задовольняє симетрію $S : \mathbb{R}^{2N} \mapsto \mathbb{R}^{2N}$ (або ж, що функція f володіє симетрією S), якщо $f(S(x, p)) \equiv f(x, p)$.

2.1. Опис симетрій. Опишемо симетрії, якими володіють гамільтоніани (5), (6) і (5), (7).

Тотожна симетрія $I : \forall f \in X \quad If = f$.

Симетрія $S_0 : S_0(x_1, x_2, p_1, p_2) \equiv (x_2, x_1, p_2, p_1)$.

Симетрія $S : S(x_1, x_2, p_1, p_2) \equiv (-x_2, x_1, -p_2, p_1)$.

Симетрія $S_1 : S_1(x_1, x_2, p_1, p_2) \equiv (-x_1, x_2, -p_1, p_2)$.

Симетрія $S_2 : S_2(x_1, x_2, p_1, p_2) \equiv (x_1, -x_2, p_1, -p_2)$.

Симетрія $S_{12} = S_1 S_2 : S_{12}(x_1, x_2, p_1, p_2) \equiv (-x_1, -x_2, -p_1, -p_2)$.

Симетрія $S_{012} = S_0 S_{12} : S_{012}(x_1, x_2, p_1, p_2) \equiv (-x_2, -x_1, -p_2, -p_1)$.

Симетрії S_0, S_1, S_2, S_{12} і S_{012} – другого порядку, а симетрія S – четвертого порядку: $S_0^2 = S_1^2 = S_2^2 = S_{12}^2 = S_{012}^2 = S^4 = I$.

$S^2 : S^2(x_1, x_2, p_1, p_2) = (-x_1, -x_2, -p_1, -p_2); \quad S^2 = S_{12}$.

$S^3 : S^3(x_1, x_2, p_1, p_2) = (x_2, -x_1, p_2, -p_1) = S^{-1}$.

Зауважимо, що $S_1 S_0 = S_0 S_2 = S$ і $S_2 S_0 = S_0 S_1 = S^{-1}$. Нас буде цікавити група симетрій $\{I, S_1, S_0\} \cong D_8$. Випишемо усі елементи цієї групи симетрій: $\{I, S_1, S_0\} = (I, S_0, S_1, S_2, S, S_{12}, S^{-1} \text{ і } S_{012})$. Ми отримали відому дієдральну групу D_8 , всі властивості якої описані в [19].

Покажемо таке: якщо оператор S – симетрія другого порядку для гамільтоніана $H(x, p)$ (тобто $S^2 = I$), то існує перший інтеграл $G(x, p)$, що задовольняє симетрію S , тобто для якого $GS(x, p) \equiv G(x, p)$. Справді, нехай для гамільтоніана $H(x, p)$ існує деякий перший інтеграл $F(x, p)$ такий, що $SF \neq F$. Розглянемо два перші інтеграли

$$\begin{cases} G_1 = F + FS, \\ G_2 = (F - FS)^2. \end{cases}$$

Вони обидва задовольняють симетрію S

$$\begin{cases} G_1 S = G_1 : G_1 S = FS + FS^2 = FS + FI = F + FS = G_1; \\ G_2 S = G_2 : G_2 S = (F - FS)^2 S = ((F - FS)S)^2 = (FS - F)^2 = (F - FS)^2 = G_2. \end{cases}$$

Хоча б один з них буде нетривіальним (функціонально незалежним з гамільтоніаном H). Отже, доведено таку лему.

Лема 1. Нехай оператор S – симетрія другого порядку для гамільтоніана $H(x, p)$, тобто $S^2 = I$. Тоді існує перший інтеграл $G(x, p)$, що задовольняє симетрію S ($GS(x, p) \equiv G(x, p)$).

Далі вважатимемо, що перший інтеграл задовольняє усі ті симетрії другого порядку, які задовольняє відповідний гамільтоніан H . Крім того, гамільтоніани (5), (6) і (5), (7) володіють симетрією четвертого порядку S , яка виражається через дві симетрії другого порядку $S = S_1 S_0$. Очевидно таке: якщо перший інтеграл задовольняє дві симетрії, то він задовольняє і їхню композицію

$$fS_1(x, p) \equiv f(x, p) \wedge fS_2(x, p) \equiv f(x, p) \Rightarrow fS_1S_2(x, p) \equiv f(x, p).$$

Тому надалі будемо вважати, що перший інтеграл задовольняє також усі симетрії вищого порядку, що можуть бути подані як композиції симетрій другого порядку.

2.2. Множина допустимих перетворень.

Лема 2. *Нехай деяка гамільтонова система взаємодіючих частинок на прямій з гамільтоніаном (5) має перший інтеграл вигляду (4), тоді гамільтонова система взаємодіючих частинок на прямій з гамільтоніаном $H = T + \alpha W$, де α – сталий множник, має перший інтеграл вигляду $F_{2N} + \alpha F_{2N-2} + \dots + \alpha^{N-k} F_{2k} + \dots + \alpha^N F_0$.*

Очевидно, що система (5) має нетривіальний поліноміальний за імпульсами перший інтеграл (4) одночасно з системою

$$H = T + \alpha W. \quad (9)$$

Справді, якщо (4) – перший інтеграл системи з гамільтоніаном (5), і F_{2k} – його однорідні $2k$ степеня за імпульсами компоненти, то вираз $F_{2N} + \alpha F_{2N-2} + \dots + \alpha^{N-k} F_{2k} + \dots + \alpha^N F_0$ є першим інтегралом для системи з гамільтоніаном (9).

Означення 3. Допустимими перетвореннями координат будемо називати комбінації перетворень двох таких типів:

1) $(x, p_x) \mapsto (y, p_y)$: $y = Ax$, $p_x = A^T p_y$ – розширення точкового перетворення конфігураційних змінних до канонічного;

2) $(x, p) \mapsto (x, \frac{1}{\beta} p)$: $\beta \neq 0$ – у цьому разі гамільтоніан $H = T + W$ переходить у гамільтоніан $H = \frac{1}{\beta^2} T + W$, який еквівалентний гамільтоніану $H = T + \beta^2 W$. Відповідно, за лемою 2 якщо $F = F_{2N} + F_{2N-2} + \dots + F_0$ – перший інтеграл для $H = T + W$, то $F_{2N} + \beta^2 F_{2N-2} + \dots + \beta^{2N-2k} F_{2k} + \dots + \beta^{2N} F_0$ – перший інтеграл для $H = T + \beta^2 W$ і зберігається умова $\{F, H\} = 0$ завдяки поліноміальності за імпульсами.

Згідно з лемою 2 старша компонента першого інтеграла за допустимих перетворень координат не змінюється.

Лема 3. *Нехай деяка гамільтонова система взаємодіючих частинок на прямій з гамільтоніаном (5) має перший інтеграл вигляду (4). Тоді за допустимих перетворень координат диференціально-функціональні співвідношення вигляду*

$$[\{F_{2N}, W\}] = 0$$

зберігаються з точністю до сталого множника.

Оскільки ми розглядаємо систему з поліноміальним за імпульсами першим інтегралом, то поняття допустимого перетворення є певним розширенням поняття канонічного перетворення для цих гамільтонових систем.

3. Функціональні рівняння на потенціали взаємодії. Умова

$$\{F, H\} = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) = 0$$

записується для випадку поліноміального за імпульсами першого інтеграла $2N$ степеня у вигляді системи рівнянь

$$\begin{cases} 0 & = & p_1 \partial_{x_1} F_{2N} + p_2 \partial_{x_2} F_{2N}; \\ \partial_{p_1} F_{2N} \cdot W_1 + \partial_{p_2} F_{2N} \cdot W_2 & = & p_1 \partial_{x_1} F_{2N-2} + p_2 \partial_{x_2} F_{2N-2}; \\ & \vdots & \\ \partial_{p_1} F_2 \cdot W_1 + \partial_{p_2} F_2 \cdot W_2 & = & p_1 \partial_{x_1} F_0 + p_2 \partial_{x_2} F_0, \end{cases} \quad (10)$$

де $\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\partial_{p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i}$, $W_i = \partial_{x_i} W$ – позначення, які використовуватимемо надалі.

Права частина кожного з рівнянь (10) є однорідним поліномом за імпульсами. Тому коефіцієнти при відповідних мономах $p_1^{2N-i+1} p_2^i$ дорівнюють нулю.

Означення 4. Нехай $R_k(x_1, x_2, p_1, p_2) = \sum_{i=0}^k f_i(x_1, x_2) p_1^{k-i} p_2^i$ – деякий однорідний степеня k поліном за імпульсами. Введемо диференціальний оператор

$$[R_k] = R_k(x_1, x_2, \partial_{x_2}, -\partial_{x_1}) = \sum_{i=0}^k \partial_{x_2}^{k-i} (-\partial_{x_1})^i f_i(x_1, x_2). \quad (11)$$

Зауважимо, що при дії на праву частину рівнянь (10) оператором (11), отримаємо очевидно нулі. Тоді з рівнянь (10) одержимо

$$P_i(V) = 0, \quad (12)$$

де $P_i(V) = [\partial_{p_1} F_{2N+2-2i} \cdot W_1 + \partial_{p_2} F_{2N+2-2i} \cdot W_2]$.

Якщо існує функція V з розглядуваного класу функцій, яка не задовольняє рівняння (12), то співвідношення (12) називатимемо *нетривіальним*.

Означення 5. Нетривіальні співвідношення (12) будемо називати теоремами додавання.

Надалі нас цікавитиме перша теорема додавання як функціональне рівняння на невідомий потенціал взаємодії V .

Одержимо можливий вигляд теореми додавання. Для цього розпишемо перше з рівнянь (10) покомпонентно, прирівнюючи до нуля коефіцієнти при відповідних мономах $p_1^{2N-i+1} p_2^i$

$$\begin{cases} E_1^{2N,0} & = & 0, \\ E_1^{2N-1,1} + E_2^{2N,0} & = & 0, \\ & \vdots & \\ E_1^{2N-i,i} + E_2^{2N-i+1,i-1} & = & 0, \\ & \vdots & \\ E_2^{0,2N} & = & 0. \end{cases} \quad (13)$$

Послідовно інтегруючи рівняння (13), одержимо

$$\begin{aligned}
 E^{2N,0} &= \varphi_{2N}, \\
 E^{2N-1,1} &= \varphi_{2N-1} - x_1 \varphi'_{2N}, \\
 E^{2N-2,2} &= \varphi_{2N-2} - x_1 \varphi'_{2N-1} + \frac{x_1^2}{2} \varphi''_{2N}, \\
 &\vdots \\
 E^{2N-i,i} &= \sum_{j=0}^i (-1)^j \frac{x_1^j}{j!} \varphi_{2N-(i-j)}^{(j)}, \\
 &\vdots \\
 E^{0,2N} &= \sum_{j=0}^{2N} (-1)^j \frac{x_1^j}{j!} \varphi_j^{(j)} = \varphi_0 - x_1 \varphi'_1 + \dots + \frac{x_1^{2N}}{(2N)!} \varphi_{2N}^{(2N)},
 \end{aligned}$$

де $\varphi_k = \varphi_k(x_2)$, $k = \overline{1, 2N}$ — деякі функції. Оскільки $E_2^{0,2N} = 0$, то всі φ_k є поліномами степеня не вище k .

Якщо F задовольняє симетрію S_1 , то для всіх $k \in \overline{1, N}$ $\varphi_{2k-1} = 0$

$$\begin{aligned}
 E^{2N,0} &= \varphi_{2N}, \\
 E^{2N-1,1} &= -x_1 \varphi'_{2N}, \\
 E^{2N-2,2} &= \varphi_{2N-2} + \frac{x_1^2}{2} \varphi''_{2N}, \\
 &\vdots \\
 E^{2N-i,i} &= \sum_{j=0}^{[i/2]} \frac{x_1^{2j}}{(2j)!} \varphi_{2N-(i-2j)}^{(2j)}, \\
 &\vdots \\
 E^{0,2N} &= \sum_{j=0}^N \frac{x_1^{2j}}{(2j)!} \varphi_{2j}^{(2j)} = \varphi_0 + \frac{x_1^2}{2} \varphi''_2 + \dots + \frac{x_1^{2N}}{(2N)!} \varphi_{2N}^{(2N)}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Множину всіх розглядуваних перших інтегралів поділимо на три групи за критерієм, який ґрунтується на вигляді коефіцієнтів старшої однорідної за імпульсами компоненти

$$F_{2N} = \sum_{i=0}^{2N} E^{2N-i,i}(x_1, x_2) p_1^{2N-i} p_2^i \tag{15}$$

першого інтеграла (4).

Означення 6. Будемо називати перший інтеграл F інтегралом I типу, якщо всі $E^{2N-i,i}$ є константами, до того ж старша однорідна за імпульсами компонента F_{2N} не є степенем полінома $p_1^2 + p_2^2$ (умова незалежності F з інтегралом енергії). У випадку, якщо принаймні один з коефіцієнтів $E^{2N-i,i}$ не є константою і $E^{1,2N-1} \neq 0$, то називатимемо F інтегралом II типу. Якщо хоч один з коефіцієнтів $E^{2N-i,i}$ не є константою і $E^{1,2N-1} = 0$, то називатимемо F інтегралом III типу.

4. Перший інтеграл четвертого порядку I типу. Для систем з гамільтоніанами (5), (6) та (5), (7) шукаємо найпростіший розв'язок — перший інтеграл четвертого порядку $2N = 4$. Розглядаємо випадок інтеграла I типу ($A_i = \text{const}$).

Враховуючи групу симетрій гамільтоніана і першого інтеграла $\{I, S_1, S_0\} \cong D_8$ та функціональну незалежність з H , можна вважати, що

$$F_4 = \frac{p_1^2 p_2^2}{2}. \quad (16)$$

4.1. Загальний вигляд теореми додавання для першого інтеграла четвертого порядку. Умову (10) рівності нулю дужки Пуассона $\{F, H\}$, розписану за степенями імпульсів, для випадку $2N = 4$ запишемо у вигляді

$$\begin{cases} 0 & = p_1 \partial_{x_1} F_4 + p_2 \partial_{x_2} F_4; \\ \partial_{p_1} F_4 \cdot W_1 + \partial_{p_2} F_4 \cdot W_2 & = p_1 \partial_{x_1} F_2 + p_2 \partial_{x_2} F_2; \\ \partial_{p_1} F_2 \cdot W_1 + \partial_{p_2} F_2 \cdot W_2 & = p_1 \partial_{x_1} F_0 + p_2 \partial_{x_2} F_0, \end{cases} \quad (17)$$

де $F_2 = ap_1^2 + bp_1 p_2 + cp_2^2$.

Запишемо потенціальну частину W гамільтоніана в загальному вигляді

$$W = V_1(x) + V_2(y) + V_3(y - x) + V_4(x + y). \quad (18)$$

Справді, ми це можемо зробити, бо при $n = 4$

$$\begin{cases} V_1(x) & = \frac{1}{2}V(2x), \\ V_2(y) & = \frac{1}{2}V(2y), \\ V_3(y - x) & = V(y - x), \\ V_4(x + y) & = V(x + y), \end{cases} \quad (19)$$

а при $n = 5$

$$\begin{cases} V_1(x) & = \frac{1}{2}V(2x) + V(x), \\ V_2(y) & = \frac{1}{2}V(2y) + V(y), \\ V_3(y - x) & = V(y - x), \\ V_4(x + y) & = V(x + y). \end{cases} \quad (20)$$

Розв'яжемо друге рівняння системи (17), підставивши замість F_4 найпростіший поліном 4 степеня за імпульсами (16). У підсумку отримаємо умови на компоненти полінома 2 степеня за імпульсами

$$F_2 = (V_2(y) + \frac{Ay^2}{2})p_1^2 + (V_4(x + y) - V_3(y - x) - Axy)p_1 p_2 + (V_1(x) + \frac{Ax^2}{2})p_2^2. \quad (21)$$

Подіавши оператором (11) на третє рівняння системи (17), отримаємо

$$\left[\frac{\partial}{\partial p_1} F_2 W_1 + \frac{\partial}{\partial p_2} F_2 W_2 \right] = 0. \quad (22)$$

Підставивши знайдений вигляд для F_2 (21) в отримане рівняння (22), одержимо

$$\begin{aligned} & (V_4'(x + y) - V_3'(y - x) - 2V_1'(x) - 3Ax) (V_3'(y - x) + V_4'(x + y) + V_2'(y)) + \\ & + (2V_2'(y) + 3Ay - V_4'(x + y) - V_3'(y - x)) (V_4'(x + y) - V_3'(y - x) + V_1'(x)) + \\ & + (V_4(x + y) - V_3(y - x) - Axy) (V_2''(y) - V_1''(x)) + \\ & + 2 \left(V_2(y) + \frac{Ay^2}{2} - V_1(x) - \frac{Ax^2}{2} \right) (V_4''(x + y) - V_3''(y - x)) = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Скорочено диференціально-функціональне рівняння (23) можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} & (V_4 - V_3 - Axy) (V_2'' - V_1'') + 2 \left(V_2 + \frac{Ay^2}{2} - V_1 - \frac{Ax^2}{2} \right) (V_4'' - V_3'') - \\ & - 3 (Ax + V_1') (V_4' + V_3' + V_2') + 3 (Ay + V_2') (V_4' - V_3' + V_1') = 0. \end{aligned}$$

Прийнявши в диференціально-функціональному рівнянні $A = 0$, одержимо

$$(V_4 - V_3)(V_2'' - V_1'') + 2(V_2 - V_1) \cdot (V_4'' - V_3'') - 3V_1'(V_4' + V_3') + 3V_2'(V_4' - V_3') = 0. \quad (24)$$

Позначимо

$$\rho := (V_4 - V_3)(V_2'' - V_1'') + 2(V_2 - V_1) \cdot (V_4'' - V_3'') - 3V_1'(V_4' + V_3') + 3V_2'(V_4' - V_3'), \quad (25)$$

тоді (24) запишемо у вигляді

$$\rho \equiv 0.$$

Використаємо такий результат.

Теорема 1 (єдиності). [20] Нехай $Lf(x_1, x_2) = 0$, причому:

1) диференціальний оператор $L = a\partial_{x_1}^2 + b\partial_{x_1}\partial_{x_2} + c\partial_{x_2}^2$, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$;

2) f – голоморфна функція в $\mathbb{R}^2$ така, що $\lim_{x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \infty} f(x_1, x_2) = 0$.

Тоді $f(x_1, x_2) \equiv 0$ в $\mathbb{R}^2$.

Наслідок 1. Нехай $Lf(x_1, x_2) = 0$, причому:

1) диференціальний оператор $L = \sum_{i=0}^n a_i \partial_{x_2}^i (-\partial_{x_1})^{n-i}$, $\sum_{i=0}^n a_i^2 \neq 0$;

2) f – голоморфна функція в $\mathbb{R}^2$ така, що $\lim_{x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \infty} f(x_1, x_2) = 0$.

Тоді $f(x_1, x_2) \equiv 0$ в $\mathbb{R}^2$.

Доведення. Оскільки кожен однорідний поліном можна подати у вигляді добутку поліномів 1 і 2 степеня над полем дійсних чисел, то оператор L можна подати у вигляді композиції диференціальних операторів 1 і 2 порядку. $\square$

Використовуючи поведінку V на безмежності, покажемо, що в (23) $A = 0$. Справді, безпосередньою перевіркою можна переконатися у тому, що, застосовувавши оператор диференціювання

$$L_8 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \quad (26)$$

до виразу у лівій частині рівняння (23), можна отримати вираз, в якому не буде константи інтегрування A , якщо потім його знову проінтегрувати з застосуванням наслідку 1 із теореми єдиності, то отримаємо вираз (24).

4.2. Теорема додавання редукованих задач чотирьох та п'яти частинок. Розглядаємо два випадки: випадок $W^{(4p)}$ – редуковану систему з чотирьох частинок із попарною взаємодією, що описується гамільтоніаном, заданим системою (5), (6) та $W^{(5p)}$ – редуковану систему з п'яти частинок із попарною взаємодією, що описується системою (5), (7).

Розглянемо випадок $W^{(4p)}$ – редуковану систему з чотирьох частинок із попарною взаємодією, що описується системою (5), (6), і підставимо функції (19) у рівняння (24)

$$\begin{aligned} & 2(V(x+y) - V(y-x))(V''(2y) - V''(2x)) + \\ & + (V(2y) - V(2x))(V''(x+y) - V''(y-x)) - \\ & - 3V'(2x)(V'(x+y) + V'(y-x)) + 3V'(2y)(V'(x+y) - V'(y-x)) = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Введемо позначення

$$\begin{aligned} \xi = & 2(V(x+y) - V(y-x))(V''(2y) - V''(2x)) + \\ & + (V(2y) - V(2x))(V''(x+y) - V''(y-x)) - \\ & - 3V'(2x)(V'(x+y) + V'(y-x)) + 3V'(2y)(V'(x+y) - V'(y-x)), \end{aligned} \quad (28)$$

тоді (27) перепишемо в компактному вигляді

$$\xi = 0. \quad (29)$$

Легко переконатися, що вираз ξ кососиметричний щодо симетрій S_0 та S_1 . Отже, рівняння (29) задовольняє групу симетрій $\{I, S_1, S_0\} \cong D_8$.

Зауважимо, що у виразі (28) зручно зробити заміну $x + y = v$, $y - x = u$, $2y = u + v$, $2x = v - u$. Позначимо

$$\begin{aligned} \eta(u, v) = & 2(V(v) - V(u))(V''(u+v) - V''(v-u)) + \\ & + (V(u+v) - V(v-u))(V''(v) - V''(u)) - \\ & - 3V'(v-u)(V'(v) + V'(u)) + 3V'(u+v)(V'(v) - V'(u)). \end{aligned} \quad (30)$$

Відповідно, диференціально-функціональне рівняння (27) зведено до вигляду

$$\eta = 0, \quad (31)$$

який є досить зручним і будемо використовувати надалі.

Якщо підставити $V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = V$, де

$$\begin{cases} V_1(x) &= V(x), \\ V_2(y) &= V(y), \\ V_3(y-x) &= V(y-x), \\ V_4(x+y) &= V(x+y), \end{cases}$$

в (24), то отримаємо рівняння $\eta(x, y) = 0$, еквівалентне до $\xi(x, y) = 0$.

Для випадку $W^{(5p)}$ редукованої системи з п'яти частинок із попарною взаємодією, що описується системою (5), (7), підставимо функції (20) у рівняння (24)

$$\begin{aligned} & (V(x+y) - V(y-x))(2V''(2y) - 2V''(2x) + V''(y) - V''(x)) + \\ & + (V(2y) - V(2x) + 2V(y) - 2V(x))(V''(x+y) - V''(y-x)) - \\ & - 3(V'(2x) + V'(x))(V'(x+y) + V'(y-x)) + \\ & + 3(V'(2y) + V'(y))(V'(x+y) - V'(y-x)) = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Легко переконатися, що вираз у лівій частині (32) є сумою $\xi(x, y)$ та $\eta(x, y)$. Оскільки рівняння (29) та (31) еквівалентні, то якщо потенціал V задовольняє рівняння (29), то він задовольняє також і рівняння (32).

Отже, правильна така теорема.

Теорема 2. *Якщо V – інтегровний потенціал в задачі $W^{(4p)}$, що допускає перший інтеграл 4 порядку за імпульсами зі сталими коефіцієнтами, то цей самий V інтегровний в задачі $W^{(5p)}$ у тому ж сенсі, тобто, V – інтегровний потенціал у задачі $W^{(5p)}$, що допускає перший інтеграл 4 порядку за імпульсами зі сталими коефіцієнтами.*

Твердження 1. *Рівняння (24) і (32) є теоремами додавання.*

Доведення. Безпосередньою підстановкою можна переконатися, що потенціал

$V(t) = \frac{1}{t^4}$ не задовольняє рівняння (24) і (32). $\square$

5. Розв'язки теорем додавання у різних функціональних класах. У цьому розділі ми покажемо, що гамільтоніан (5), (6) (для випадку $W^{(4p)}$) може мати перший інтеграл вигляду $F_4 = \frac{p_1^2 p_2^2}{2} + F_2 + F_0$ лише для потенціалу, який має в нулі полюс другого порядку.

Лема 4. *Нехай система з гамільтоніаном (5), (6) допускає додатковий поліноміальний за імпульсами перший інтеграл. Тоді потенціал $V(z)$ не може мати в околі нуля істотної особливості точки.*

Доведення. Припустимо, що розвинення в ряд Лорана в околі нуля потенціалу $V(z)$ має нескінченну кількість доданків у головній частині. Тоді можна вважати, що

$$V(z) = \sum_{n=-\infty}^N c_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \dots + c_N z^N + c_0 + c_1 z + \dots \quad (33)$$

причому серед коефіцієнтів $c_k, k < 0$ є нескінченна кількість ненульових.

Розвиваючи $\rho(V)$ в ряд Лорана, на підставі (33) отримаємо, що коефіцієнт розвинення

$$\begin{aligned} & 2 \left(V''(-2y) - \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n n(n-1) \cdot 2^{n-2} x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) \cdot 2^{n-2} x^{n-2} \right) \times \\ & \times \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{V^{(m)}(y)}{m!} x^m - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{V^{(m)}(y)}{m!} (-1)^m x^m \right) - 3 \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{V^{(m+1)}(y)}{m!} x^m + \right. \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{V^{(m+1)}(y)}{m!} (-1)^m x^m \left. \right) \cdot \left(\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n n 2^{n-1} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n n 2^{n-1} x^{n-1} \right) + \\ & + \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{V^{(m+2)}(y)}{m!} x^m - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{V^{(m+2)}(y)}{m!} (-1)^m x^m \right) \cdot \left(V(-2y) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n 2^n x^n \right) + \\ & + 3 \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{V^{(m+1)}(y)}{m!} x^m - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{V^{(m+1)}(y)}{m!} (-1)^m x^m \right) \cdot V'(-2y) = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

при x^k дорівнює $V'(y)c_{k+1}(2^{k-1} + 2^k) + \{\text{вищі похідні від } V\}$.

Зокрема, прирівняємо до нуля коефіцієнт розвинення (34) при x^{N-1}

$$V'(y)c_N(2^{N-2} + 2^{N-1}) + \sum_{s=2}^{\infty} \Phi_s V^{(s)}(y) = 0, \quad (35)$$

де Φ_s – деякі константи, що виражаються через $c_k, k < 0$.

Розвинувши в ряд Лорана вираз у лівій частині рівняння (35) за степенями y і прирівнявши коефіцієнт при y^N до нуля, одержимо $c_N^2 N(2^{N-2} + 2^{N-1}) = 0$, що суперечить умові $c_N \neq 0$. $\square$

Лема 5. *Теорема додавання (24) не має нетривіальних розв'язків, регулярних в нулі.*

Зауваження 1. Тривіальними вважатимемо поліноми не більше 2 степеня, бо для таких потенціалів система рівнянь Гамільтона (8) є лінійною системою диференціальних рівнянь, яка елементарно інтегрована в квадратурах.

Доведення лем. Нехай $t = 0$ – регулярна точка для $V(t)$.

Розвинувши вираз (30) в ряд Тейлора за змінною v і прирівнявши до нуля коефіцієнт при v^1 , отримаємо рівняння

$$(8V''(u) - 16b)V'(u) + (-4a + 4V(u))V'''(u) = 0,$$

звідки $2(V'' - 2b)V' = -(V - a)V'''$.

Виконавши заміну $f = V - a$, одержимо $2f'(f'' - 2b) = -ff'''$.

Розділяючи змінні, послідовно отримаємо

$$\frac{2f'}{f} = -\frac{f'''}{f'' - 2b}; \quad 2 \ln f = -\ln(f'' - 2b) + \ln C; \quad f^2 = C(f'' - 2b)^{-1}; \quad f^2(f'' - 2b) = C.$$

Але $f(0) = 0$, тому $C = 0$. Оскільки $f \neq 0$, то з рівняння $f^2(f'' - 2b) = 0$ одержимо $f'' - 2b = 0$, а отже, $f(t) = bt^2 + C_1t + C_2$, тобто f є поліномом не вище 2-го степеня.

Зауважимо, що безпосередня підстановка цього розв'язку в рівняння (24) дає $b = 0$. Отже, враховуючи парність потенціалу, в класі регулярних функцій розв'язками цього рівняння є лише константи. $\square$

Теорема 3. Гамільтоніан з $W^{(4p)}$ має перший інтеграл вигляду $F_4 = \frac{p_1^2 p_2^2}{2} + F_2 + F_0$ лише для потенціалу, який має в нулі полюс другого порядку.

Доведення. Розвинувши вираз у лівій частині рівняння (24) в ряд за змінною x , отримаємо

$$\begin{aligned} & 2(2V'(y)x + V'''(y)\frac{x^3}{6} + V^{(V)}(y)\frac{x^5}{5!} + O(x^7))(V''(2y) - (\frac{\alpha(\alpha+1)}{(2x)^{\alpha+2}} + \dots)) + \\ & + (V(2y) - (\frac{1}{(2x)^\alpha} + \dots))(2(V'''(y)x + V^{(V)}(y)\frac{x^3}{6} + V^{(VII)}(y)\frac{x^5}{5!} + O(x^7)) - \\ & - 3(-\frac{\alpha}{(2x)^{\alpha+1}} + \dots)(2(V'(y) + V'''(y)\frac{x^2}{2} + V^{(V)}(y)\frac{x^4}{4!} + O(x^7)) + \\ & + 3V'(2y)(2V''(y)x + O(x^3))) = 0. \end{aligned}$$

Коефіцієнт при мономі $\frac{1}{x^{\alpha+1}}$ дорівнює

$$-4V'(y)\frac{\alpha(\alpha+1)}{2^{\alpha+2}} + 6V'(y)\frac{\alpha}{2^{\alpha+1}} = -\frac{\alpha}{2^\alpha}V'(y)(\alpha-2) = 0.$$

Отже, $\alpha = 2$. Отож, серед усіх потенціалів, які мають полюс, рівняння (24) задовольняє лише потенціал з полюсом другого порядку. Крім того, за лемами 4 і 5 рівняння (24) не задовольняють ні потенціали, що мають істотну особливу точку, ані нетривіальні регулярні потенціали. Тому гамільтоніан з $W^{(4p)}$ має перший інтеграл вигляду $F_4 = \frac{p_1^2 p_2^2}{2} + F_2 + F_0$ лише для потенціалу, який має в нулі полюс другого порядку. $\square$

Теорема 4. Лише $V = \wp + \text{const}$ є розв'язком теореми додавання $\eta = 0$.

Доведення. Згідно з теоремою 3 теорема додавання (27), а отже, і її еквівалентний запис (31), може мати розв'язки лише з полюсом другого порядку в нулі. Нехай $t = 0$ – полюс другого порядку для $V(t)$. Розвинувши вираз (28) за степенями x і прирівнявши до нуля коефіцієнт при x^1 , отримаємо рівняння

$$\frac{1}{30}V^{(V)}(y) - 4V'(y)(V''(2y) - 8b) - 2V'''(y)(V(2y) - a) - 6V'(2y)V''(y) = 0. \quad (36)$$

Розвинувши вираз (30) за v , і прирівнявши до нуля коефіцієнт при v^1 , отримаємо рівняння

$$\frac{4}{15}V^{(V)}(u) - 4V'''(u)(V(u) - a) - 8V'(u)(V''(u) - 2b) = 0. \quad (37)$$

Розвинувши потенціал $V(t)$ в ряд Лорана в околі точки $t = 0$, отримаємо зображення

$$V(t) = t^{-2} + \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^{2i}. \quad (38)$$

Підставивши зображення (38) потенціалу V у диференціальне рівняння (37), отримаємо рекурентну формулу для коефіцієнтів розвинення (38)

$$a_i = 15 \sum_{j=2}^{i-2} \frac{a_{i-1-j} a_j j (4j(i-2) - 2i + 3 - 2j^2 + 3j)}{(i-2)(i-3)(2i+3)(4(i-2)^2 + 10i - 11)}, \quad i \geq 4. \quad (39)$$

Згідно з отриманою рекурентною формулою (39) лише 4 параметри a_0, a_1, a_2, a_3 довільні, а решта виражаються через них однозначно.

Якщо підставити зображення (38) потенціалу V у диференціальне рівняння (37) та диференціально-функціональне рівняння (36), та порівняти коефіцієнти одержаних розвинень рівнянь (37) і (36), то одержимо рівняння

$$\frac{35}{1243} a_1^2 a_2 + \frac{11}{113} a_2 a_3 = \frac{350}{11341} a_1^2 a_2 + \frac{92}{1031} a_2 a_3,$$

розв'язавши яке стосовно a_3 , отримаємо, що $a_3 = \frac{1}{3} a_1^2$.

Залишилося 3 незалежні параметри a_0, a_1, a_2 , якими шуканий потенціал V визначається однозначно.

Оскільки $\wp$ -функція Вейерштрасса задовольняє теорему додавання

$$\begin{vmatrix} \wp(u) & \wp'(u) & 1 \\ \wp(v) & \wp'(v) & 1 \\ \wp(w) & \wp'(w) & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

де $u + v + w = 0$ [21], і

$$\eta = - \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \begin{vmatrix} V(x) & V'(x) & 1 \\ V(y) & V'(y) & 1 \\ V(-x-y) & V'(-x-y) & 1 \end{vmatrix} -$$

$$- \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right) \begin{vmatrix} V(x) & V'(x) & 1 \\ V(y-x) & V'(y-x) & 1 \\ V(-y) & V'(-y) & 1 \end{vmatrix},$$

то $V = \wp$ є розв'язком $\eta = 0$.

Але $\wp$ -функція Вейерштрасса однозначно визначається трьома параметрами $a_0 = 0, a_1, a_2$ розвинення в ряд Лорана в околі нуля [21], тому шуканий потенціал V і є $\wp$ -функцією Вейерштрасса з точністю до константи. $\square$

6. Випадок першого інтеграла довільного степеня II типу. Запишемо співвідношення (12) при $i = 1$

$$[\partial_{p_1} F_{2N} \cdot W_1 + \partial_{p_2} F_{2N} \cdot W_2] = 0. \quad (40)$$

Лема 6. Якщо F є інтегралом II типу, то рівняння (40) має вигляд

$$x_2(p_1(x_1)U(x_1))^{(2N+1)} + (x_1 + x_2)(p_3(x_1 - x_2)U(x_2 - x_1))^{(2N+1)} + \\ + x_1(p_2(x_2)U(x_2))^{(2N+1)} + (x_2 - x_1)(p_4(x_1 + x_2)U(x_2 + x_1))^{(2N+1)} = 0, \quad (41)$$

де $p_i(\cdot), i = \overline{1, 4}$ – поліноми, які не всі дорівнюють нулю.

Доведення. Розпишемо рівняння (40), враховуючи вигляд (15)

$$\left[\sum_{i=0}^{2N-1} (2N-i)E^{2N-i,i}(x_1, x_2)p_1^{2N-i-1}p_2^i \cdot W_1 + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{2N} iE^{2N-i,i}(x_1, x_2)p_1^{2N-i}p_2^{i-1} \cdot W_2 \right] = 0,$$

звідки

$$\sum_{i=0}^{2N-1} \partial_{x_2}^{2N-i-1}(-\partial_{x_1})^i((2N-i)E^{2N-i,i}(x_1, x_2)W_1 + \\ + (i+1)E^{2N-i-1,i+1}(x_1, x_2)W_2) = 0. \quad (42)$$

Враховуючи вигляд (18) потенціальної частини гамільтоніана W , співвідношення (42) можна записати у вигляді

$$[\Phi_1]V'_1 + [\Phi_2]V'_2 + [\Phi_3]V'_3 + [\Phi_4]V'_4 = 0, \quad (43)$$

де $[\Phi_1], [\Phi_2], [\Phi_3], [\Phi_4]$ – наступні лінійні диференціальні оператори $2N$ -го порядку

$$[\Phi_1]V'_1 = \sum_{i=0}^{2N-1} \partial_{x_2}^{2N-i-1}(-\partial_{x_1})^i(2N-i)E^{2N-i,i}V'_1, \\ [\Phi_2]V'_2 = \sum_{i=0}^{2N-1} \partial_{x_2}^{2N-i-1}(-\partial_{x_1})^i(i+1)E^{2N-i-1,i+1}V'_2, \\ [\Phi_3]V'_3 = [\Phi_2 - \Phi_1]V'_3 = \sum_{i=0}^{2N-1} \partial_{x_2}^{2N-i-1}(-\partial_{x_1})^i((i+1)E^{2N-i-1,i+1} - \\ - (2N-i)E^{2N-i,i})V'_3, \\ [\Phi_4]V'_4 = [\Phi_2 + \Phi_1]V'_4 = \sum_{i=0}^{2N-1} \partial_{x_2}^{2N-i-1}(-\partial_{x_1})^i((i+1)E^{2N-i-1,i+1} + \\ + (2N-i)E^{2N-i,i})V'_4.$$

Щоб спростити вирази $[\Phi_i]V'_i$, перепишемо коефіцієнти (14) у вигляді

$$\begin{aligned} E^{0,2N} &= P_{2N}(x_1), \\ E^{1,2N-1} &= -x_2 P'_{2N}(x_1), \\ E^{2,2N-2} &= P_{2N-2}(x_1) + \frac{x_2^2}{2} P''_{2N}(x_1), \\ &\vdots \\ E^{i,2N-i} &= \sum_{j=0}^{[i/2]} \frac{x_2^{2j}}{(2j)!} P_{2N-(i-2j)}^{(2j)}(x_1), \\ &\vdots \\ E^{2N,0} &= \sum_{j=0}^N \frac{x_2^{2j}}{(2j)!} P_{2j}^{(2j)} = P_0 + \frac{x_2^2}{2} P''_2 + \dots + \frac{x_2^{2N}}{(2N)!} P_{2N}^{(2N)}. \end{aligned}$$

Позначимо через U довільну первісну потенціалу взаємодії V_1 .

Тоді, враховуючи очевидну комбінаторну тотожність $\sum_{i=j}^{2N-1} (2N-i)C_i^j = C_{2N+1}^{j+2}$,
отримуємо

$$\begin{aligned} [\Phi_1]V'_1 &= x_2 \sum_{i=0}^{2N-1} (2N-i) \left(P_{2N}^{(2N-i)} V' \right)^{(i)} = x_2 (2N P_{2N}^{(2N)} V' + \\ &+ (2N-1) (P_{2N}^{(2N-1)} V')' + \dots + 1 \cdot (P_{2N}' V')^{(2N-1)}) = \\ &= x_2 \sum_{i=0}^{2N-1} (2N-i) \sum_{j=0}^i C_i^j P_{2N}^{(2N-i+j)} V^{(j+1)} = \\ &= x_2 \sum_{i=0}^{2N-1} \sum_{j=0}^i (2N-i) C_i^j P_{2N}^{(2N-i+j)} V^{(j+1)} = x_2 \sum_{j=0}^{2N-1} P_{2N}^{(2N-j)} V^{(j+1)} \sum_{i=j}^{2N-1} (2N-i) C_i^j = \\ &= x_2 \sum_{j=0}^{2N-1} P_{2N}^{(2N-j)} V^{(j+1)} C_{2N+1}^{j+2} = [k=j+2] = x_2 \sum_{k=2}^{2N+1} P_{2N}^{(2N+2-k)} U^{(k)} C_{2N+1}^k = \\ &= x_2 \left((P_{2N}'(x_1) U(x_1))^{(2N+1)} - P_{2N}^{(2N+2)} U(x_1) C_{2N+1}^0 - P_{2N}^{(2N+1)} U'(x_1) C_{2N+1}^1 \right) = \\ &= x_2 \left((P_{2N}'(x_1) U(x_1))^{(2N+1)} - P_{2N}^{(2N+2)} U(x_1) - (2N+1) P_{2N}^{(2N+1)} U'(x_1) \right). \end{aligned}$$

Оскільки $P_{2N}(x_1)$ — поліном від x_1 степеня не вище за $2N$, то

$$P_{2N}^{(2N+1)} = P_{2N}^{(2N+2)} = 0 \text{ і } [\Phi_1]V'_1 = x_2 (P_{2N}' U(x_1))^{(2N+1)}.$$

Перепозначимо $p_1(x_1) := P_{2N}'(x_1)$. З умов теореми випливає, що $p_1(x_1) \neq 0$.
Тоді

$$[\Phi_1]V'_1 = x_2 (p_1(x_1) U(x_1))^{(2N+1)}. \quad (44)$$

Виконуючи відповідні допустимі перетворення так, щоб аргументи функцій V_2, V_3 і V_4 ставали новою першою конфігураційною змінною, одержимо $[\Phi_i]V'_i$, $i = \overline{2, 4}$ у вигляді, аналогічному до (44). Отож, (43) має вигляд (41). $\square$

Теорема 5. Якщо F є інтегралом II типу, то рівняння (41) є нетривіальним, тобто, теоремою додавання.

Доведення. Нетривіальність цього співвідношення випливає з того, що для функції $U(x_1) = \frac{1}{x_1 p_1(x_1)}$ рівняння (41) не справджується. $\square$

Теорема 6. Якщо система з гамільтоніаном (5), (6) допускає додатковий інтеграл II типу, то потенціал взаємодії V є раціональною функцією.

Доведення. Застосуємо до виразу у лівій частині рівняння (41) оператор

$$\begin{aligned} L &= \partial x_1^2 \partial x_2 (\partial x_1 + \partial x_2)^2 (\partial x_2 - \partial x_1)^2. \text{ Оскільки} \\ \partial x_1 ((p(x_2) U(x_2))^{(2N+1)}) &= \partial x_2 ((p(x_1) U(x_1))^{(2N+1)}) = \\ &= (\partial x_1 + \partial x_2) ((p(x_1 - x_2) U(x_2 - x_1))^{(2N+1)}) = \\ &= (\partial x_2 - \partial x_1) ((p(x_1 + x_2) U(x_2 + x_1))^{(2N+1)}) = 0, \\ \text{то } \partial x_1^2 (\partial x_1 + \partial x_2)^2 (\partial x_2 - \partial x_1)^2 ((p(x_1) U(x_1))^{(2N+1)}) &= 0, \end{aligned}$$

звідки одержимо

$$L[\Phi_1]V'_1 = L(x_2 (P_{2N}' U(x_1))^{(2N+1)}) = (P_{2N}' U(x_1))^{(2N+7)} = 0,$$

то $P_{2N}' U(x_1) = Q_{2N+6}$. Оскільки p є поліномом не більше, ніж $2N-1$ степеня, то довільний розв'язок цього рівняння має вигляд $V = U' = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{Q_{2N+6}(x_1)}{p(x_1)}$, де Q_{2N+6} — деякий поліном $2N+6$ степеня від x_1 . $\square$

7. Випадок першого інтеграла довільного степеня I типу. У загальному випадку умови поведінки потенціалу V на безмежності накладати не будемо. Знову розглянемо два випадки: випадок $W^{(4p)}$ – редуковану систему з чотирьох частинок із попарною взаємодією, що описується системою (5), (6) і випадок $W^{(5p)}$ – редуковану систему з п'яти частинок із попарною взаємодією, що описується системою (5), (7).

У цьому розділі ми будемо досліджувати перший інтеграл у вигляді полінома довільного степеня.

В загальному випадку однорідний поліном $2N$ степеня за імпульсами F_{2N} можна записати у вигляді

$$F_{2N} = GT^N, \quad (45)$$

де $G(p_1, p_2) = F_{2N}(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ і де $\tilde{p}_1 = \frac{p_1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}$ і $\tilde{p}_2 = \frac{p_2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}$.

Лема 7. Нехай гамільтоніан H володіє групою симетрій $\{I, S_1, S_0\} \cong D_8$. Тоді поліном G в зображенні (45) має вигляд $G = g(\tilde{p}_1^2 \tilde{p}_2^2)$, де g – деякий поліном.

Доведення. Прийmemo $\tilde{p}_1 = \frac{p_1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}} = \cos \varphi$ і $\tilde{p}_2 = \frac{p_2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}} = \sin \varphi$. Така заміна буде коректною, бо $|\frac{p_1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}| \leq 1$ і $|\frac{p_2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}| \leq 1$, а також $\tilde{p}_1^2 + \tilde{p}_2^2 = 1$.

Позначимо $f(\varphi) = G(\cos \varphi, \sin \varphi)$. Це тригонометричний поліном. Із симетрій S_1, S_2 та S_0 випливає, відповідно, що $f(\varphi) = f(\pi - \varphi)$, $f(\varphi) = f(-\varphi)$ та $f(\varphi) = f(\frac{\pi}{2} - \varphi)$.

Отже, функція $f \in \frac{\pi}{2}$ -періодичною, парною, тому вона розкладається в ряд Фур'є за косинусами чотирикратного аргументу

$$f(\varphi) = P_1(\cos 4\varphi) = P\left(\frac{1}{4} \sin^2(2\varphi)\right) = P(\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi) = P(\tilde{p}_1^2 \tilde{p}_2^2).$$

Отже, $G(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = f(\varphi) = P(\tilde{p}_1^2 \tilde{p}_2^2)$. □

Отже, старша однорідна компонента F_{2N} симетризованого першого інтеграла має вигляд

$$F_{2N} = G(p_1^2 + p_2^2, p_1^2 p_2^2) = G(T, J), \quad (46)$$

де G – відповідний поліном від двох змінних, а $J = p_1^2 p_2^2$.

Позначимо $G_J = \frac{\partial}{\partial J} G(T, J)$.

Для поліноміального за імпульсами першого інтеграла $2N$ степеня (4) його старша однорідна компонента набуде вигляду

$$F_{2N} = \alpha_0 T^N + \alpha_2 T^{N-2} J + \alpha_4 T^{N-4} J^2 + \dots$$

Запишемо гамільтоніан H у загальному вигляді (18), де при $n = 4$ функції V_i , $i = \overline{1, 4}$ мають вигляд (19), а при $n = 5$ – (20). Подівавши оператором (11) на третє рівняння системи (10), отримаємо

$$[\partial_{p_1} F_{2N-2} \cdot W_1 + \partial_{p_2} F_{2N-2} \cdot W_2] = 0. \quad (47)$$

Позначимо Q вираз у лівій частині отриманого рівняння (47)

$$Q = [\partial_{p_1} F_{2N-2} \cdot W_1 + \partial_{p_2} F_{2N-2} \cdot W_2]. \quad (48)$$

Теорема 7. Диференціально-функціональне співвідношення (47) на потенціал взаємодії для поліноміального за імпульсами першого інтеграла $2N$ степеня зі старшою однорідною компонентою F_{2N} у вигляді (46) має вигляд $L\rho = 0$, де $L = [G_J]$ – однорідний диференціальний оператор, ρ задано формулою (25).

Доведення. Враховуючи вигляд (18) потенціальної частини гамільтоніана W , будемо шукати F_{2N-2} у вигляді

$$F_{2N-2} = AV_1(x) + BV_2(y) + CV_3(y-x) + DV_4(x+y), \quad (49)$$

де A, B, C, D — поліноми $2N-2$ степеня за імпульсами.

Безпосередньою підстановкою (18) і (49) в друге рівняння системи (10) отримаємо, що

$$A = \frac{1}{p_1} \frac{\partial F_{2N}}{\partial p_1}, \quad B = \frac{1}{p_2} \frac{\partial F_{2N}}{\partial p_2}, \quad C = \frac{1}{p_2 - p_1} \left(\frac{\partial F_{2N}}{\partial p_2} - \frac{\partial F_{2N}}{\partial p_1} \right), \quad D = \frac{1}{p_2 + p_1} \left(\frac{\partial F_{2N}}{\partial p_2} + \frac{\partial F_{2N}}{\partial p_1} \right). \quad (50)$$

Підставивши вигляд (46) для F_{2N} у (50), отримаємо

$$A = 2(G_1 + G_2 p_2^2), \quad B = 2(G_1 + G_2 p_1^2), \quad C = 2(G_1 - G_2 p_1 p_2), \quad D = 2(G_1 + G_2 p_1 p_2). \quad (51)$$

Підставивши отриманий вигляд (49), (51) для F_{2N-2} у рівняння (47), одержимо

$$\begin{aligned} & [2(2(G_{11}p_1 + 2G_{12}p_1p_2^2 + G_{22}p_1p_2^4)V_1(x) + 2(G_{11}p_1 + G_{12}p_1(p_1^2 + p_2^2) + \\ & + G_{22}p_1^3p_2^2 + G_2p_1)V_2(y) + (2G_{11}p_1 + 2G_{12}p_1p_2(p_2 - p_1) - 2G_{22}p_1^2p_2^3 - \\ & - G_2p_2)V_3(y-x) + (2G_{11}p_1 + 2G_{12}p_1p_2(p_2 + p_1) + 2G_{22}p_1^2p_2^3 + \\ & + G_2p_2)V_4(x+y))(V_1'(x) - V_3'(y-x) + V_4'(x+y)) + 2(2(G_{11}p_2 + \\ & + G_{12}p_2(p_1^2 + p_2^2) + G_{22}p_2^3p_1^2 + G_2p_2)V_1(x) + 2(G_{11}p_2 + 2G_{12}p_2p_1^2 + \\ & + G_{22}p_2p_1^4)V_2(y) + (2G_{11}p_2 - 2G_{12}p_1p_2(p_2 - p_1) - 2G_{22}p_2^2p_1^3 - \\ & - G_2p_1)V_3(y-x) + (2G_{11}p_2 + 2G_{12}p_1p_2(p_2 + p_1) + 2G_{22}p_2^2p_1^3 + \\ & + G_2p_1)V_4(x+y))(V_2'(y) + V_3'(y-x) + V_4'(x+y))] = 0. \end{aligned} \quad (52)$$

Після спрощення виразу (52) отримаємо

$$Q = [P_{13}V_1V_3' + P_{14} \cdot V_1V_4' + P_{23} \cdot V_2V_3' + P_{24} \cdot V_2V_4' + \\ + P_{31} \cdot V_3V_1' + P_{32} \cdot V_3V_2' + P_{41} \cdot V_4V_1' + P_{42} \cdot V_4V_2'], \quad (53)$$

де

$$\begin{aligned} P_{13} &= 2p_2(G_{11} + G_2 + G_{12}(p_1^2 + p_2^2) + G_{22}p_1^2p_2^2) - 2p_1(G_{11} + 2G_{12}p_2^2 + G_{22}p_2^4); \\ P_{14} &= 2p_2(G_{11} + G_2 + G_{12}(p_1^2 + p_2^2) + G_{22}p_1^2p_2^2) + 2p_1(G_{11} + 2G_{12}p_2^2 + G_{22}p_2^4); \\ P_{23} &= 2p_2(G_{11} + 2G_{12}p_1^2 + G_{22}p_1^4) - 2p_1(G_{11} + G_2 + G_{12}(p_1^2 + p_2^2) + G_{22}p_1^2p_2^2); \\ P_{24} &= 2p_2(G_{11} + 2G_{12}p_1^2 + G_{22}p_1^4) + 2p_1(G_{11} + G_2 + G_{12}(p_1^2 + p_2^2) + G_{22}p_1^2p_2^2); \\ P_{31} &= (2G_{11}p_1 + 2G_{12}p_1p_2(p_2 - p_1) - 2G_{22}p_1^2p_2^3 - G_2p_2); \\ P_{32} &= (2G_{11}p_2 - 2G_{12}p_1p_2(p_2 - p_1) - 2G_{22}p_2^2p_1^3 - G_2p_1); \\ P_{41} &= (2G_{11}p_1 + 2G_{12}p_1p_2(p_2 + p_1) + 2G_{22}p_1^2p_2^3 + G_2p_2); \\ P_{42} &= (2G_{11}p_2 + 2G_{12}p_1p_2(p_2 + p_1) + 2G_{22}p_2^2p_1^3 + G_2p_1). \end{aligned} \quad (54)$$

Записавши Q у вигляді $G_{11}Y_{11} + G_2Y_2 + G_{12}Y_{12} + G_{22}Y_{22}$, безпосередньою підстановкою (54) у (53) переконаємося в тому, що $Y_{11} = Y_{12} = Y_{22} = 0$, а $Y_2 = \rho$. Теорему 7 доведено. $\square$

Наслідок 2. В умовах теореми 7 за додаткової умови $V(\infty) = 0$ одержимо рівняння $\rho = 0$, яке має своїм розв'язком частинні випадки $\wp$ -функції Вейерштрасса, які задовольняють умову на безмежності $V(t) \in \{\frac{1}{t^2}, \frac{c^2}{sh^2(ct)}\}$.

7.1. Теореми додавання для першого інтеграла I типу та їхні розв'язки. Перепишемо друге рівняння системи (10) у вигляді

$$p_1 \partial_{x_1} F_{2N-2} + p_2 \partial_{x_2} F_{2N-2} = \partial_{p_1} F_{2N} \cdot V_1' + \partial_{p_2} F_{2N} \cdot V_2' + \\ + (\partial_{p_1} + \partial_{p_2}) F_{2N} \cdot V_3' + (\partial_{p_2} - \partial_{p_1}) F_{2N} \cdot V_4'. \quad (55)$$

Легко перевірити, що F_{2N-2} у вигляді (49), (50), задовольняє рівняння (55). Тому в загальному випадку розв'язок другого рівняння системи (10) має вигляд

$$F_{2N-2} = AV_1(x) + BV_2(y) + CV_3(y-x) + DV_4(x+y) + \omega, \quad (56)$$

де A, B, C, D визначаються системою (50), а ω – деякий поліном $2N-2$ степеня за імпульсами, такий що $[\omega] = 0$.

Підставивши (56) у друге рівняння системи (10), одержимо

$$[G_J(p_1, p_2)\rho(V) + \varphi] = 0, \quad (57)$$

де $\varphi = [\partial_{p_1}\omega \cdot W_1 + \partial_{p_2}\omega \cdot W_2]$.

Оскільки в умовах леми 6 для довільного F_{2N} оператор (26) перетворює ліву частину рівняння 41 в тотожний нуль, то, підставивши ω замість F_{2N} , одержимо $L_8\varphi = 0$, тому

$$[M]\rho(V) = 0,$$

де $M(p_1, p_2) = L_8G_J(p_1, p_2)$.

Отже, доведено теорему.

Теорема 8. *Якщо система з гамільтоніаном (5), (6) допускає додатковий інтеграл I типу, то співвідношення (12) є нетривіальне при $i = 2$, і потенціал V задовольняє диференціально-функціональне рівняння $[M]\rho(V) = 0$.*

Наслідок 3. *За додаткової умови $V(\infty) = 0$ отримуємо $\rho(V) = 0$.*

Доведення. Правильність наслідку 3 випливає з наслідку 1. □

Враховуючи, що теорема додавання $\rho(V) = 0$ в розглядуваному класі потенціалів має розв'язки лише $\varphi + const$, тому проблема опису інтегровних потенціалів для першого інтеграла першого типу повністю розв'язана.

Використовуючи теорему 2, одержимо, що симетрична задача п'яти частинок має ті самі розв'язки, що і симетрична задача чотирьох частинок.

8. Висновок. У праці розглянуто теореми додавання для інтеграла довільного степеня в симетричній задачі чотирьох і п'яти частинок. У §6, 7 отримано потенціали взаємодії як розв'язки цих теорем додавання у відповідних функціональних класах.

-
1. *Ольшанецкий М.А.* Геодезические потоки на симметрическом пространстве нулевой кривизны и явные решения обобщенной модели Калоджеро для классического случая / *Ольшанецкий М.А., Переломов А.М.* // Функ. анализ и его прил. – 1976. – Т. 10, №3. – С. 86-87.
 2. *Ольшанецкий М.А.* Квантовые системы, связанные с системами корней и радиальные части операторов Лапласа / *Ольшанецкий М.А., Переломов А.М.* // Функ. анализ и его прил. – 1978. – Т. 12, №2. – С. 57-65.
 3. *Ольшанецкий М.А.* Явные решения некоторых вполне интегрируемых гамильтоновых систем / *Ольшанецкий М.А., Переломов А.М.* // Функ. анализ и его прил. – 1977. – Т. 11, №1. – С. 75-76.
 4. *Пиджуйко С.И.* Полиномиальные интегралы гамильтоновых систем / *Пиджуйко С.И., Степин А.М.* // Док. АН СССР. – 1978. – Т. 239, №1. – С. 50-53.

5. Піджуйко С.І. Повна інтегровність квантової системи n тіл на прямій / Піджуйко С.І. // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1983. – №17. – С. 98-101.
6. Якоби К. Лекції по динаміке / Якоби К. – М.; Л., 1936.
7. Adler M. Completely integrable systems, Euclidean Lie algebras and curves / Adler M., van Moerbeke P. // Adv. Math. – 1980. – Vol.38. – P. 267-317.
8. Calogero F. Solution of the one-dimensional N -body problem with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials / Calogero F. // Jour. Math. Phys. – 1971. – Vol. 12. – P. 419-436.
9. Calogero F. Exactly solvable one-dimensional many body problems / Calogero F. // Letters al Nuovo Cim. – 1975. – Vol. 13. – P. 411-416.
10. Calogero F. Exact solution of one-dimensional three-body scattering problem with two-body and/or three-body inverse square potential / Calogero F., Marchioro C. // Jour. Math. Phys. – 1974. – Vol. 15. – P. 1425-1430.
11. Calogero F. Exact solution of the classical and quantal one-dimensional many body problems with the two-body potential $V_a(x) = g^2 a^2 / \sinh^2(ax)$ / Calogero F., Marchioro C., Ragnisco O. // Letters al Nuovo Cim. – 1975. – Vol. 13. – P. 383-387.
12. Mozer J. Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations / Mozer J. // Adv. Math. – 1975. – Vol. 16. – P. 197-220.
13. Sutherland B. Exact results for a quantum many-body problems in one dimension I, II / Sutherland B. // Phys. Rev. – 1971. – Vol. A4. – P. 2019-2021; 1972. – Vol. A5. – P. 1372-1376.
14. Inosemzev V. I. New completely integrable multiparticle dynamical systems / Inosemzev V. I. // Phys. Scripta. – 1984. – Vol. 29. – P. 518-520.
15. Olshanetsky M.A. Completely integrable Hamiltonian systems connected with semisimple Lie algebras / Olshanetsky M.A., Perelomov A.M. // Invent. Math. – 1976. – Vol. 37. – P. 93-108.
16. Olshanetsky M.A. Explicit solutions of some completely integrable systems / Olshanetsky M.A., Perelomov A.M. // Letters al Nuovo Cim. – 1976. – Vol. 17. – P. 97-101.
17. Olshanetsky M.A. Classical integrable finitedimensional systems related to Lie algebras / Olshanetsky M.A., Perelomov A.M. // Phys. Reports. – 1981. – Vol. 71. – P. 313-400.
18. Perelomov A.M. Algebraical approach to the solution of onedimensional model of N interacting particles / Perelomov A.M. // Theor. Math. Phys. – 1971. – Vol. 6. – P. 263-283.
19. http://groupprops.subwiki.org/wiki/Subgroup_structure_of_dihedral_group:D8
20. Vus A.Ya. On integrable three-body problems of the line / Vus A.Ya. // Matematychni Studii – 1998. – Vol. 10. – P. 97-102.
21. Abramowitz M. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables / Abramowitz M., Stegun I. – New York: Dover Publications, 1972.

INTEGRABLE POTENTIALS OF SYMMETRIC PROBLEMS OF FOURTH AND FIFTH PAIRWISE INTERACTING PARTICLES ON LINE

Bohdan DOVHAN', Andrij VUS

*Ivan Franko National University of L'viv,
79000 L'viv, Universytets'ka Str., 1*

e-mail: bohdan_dovhanj@ukr.net, andrij_vus@ukr.net

The reduced systems of four and five pairwise interacting particles on the line are investigated. The properties of interactive potentials are considered under assumption that the given system has the first integral polynomial of prescribed degree in the momenta. The functional equations for those potentials are obtained. Some such potentials are described.

Key words: hamiltonian system, first integral, Poisson brackets, addition theorem.

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ СИММЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ЧЕТЫРЁХ И ПЯТИ ПОПАРНО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ НА ПРЯМОЙ

Богдан ДОВГАНЬ, Андрей ВУС

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000 Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: bohdan_dovhanj@ukr.net, andrij_vus@ukr.net*

Исследовано редуцированные системы четырех и пяти попарно взаимодействующих частиц на прямой. Рассмотрены свойства потенциалов взаимодействия в предположении, что данная система обладает первым интегралом, полиномиальным по импульсам. Получены функциональные уравнения на потенциалы и описаны некоторые их решения.

Ключевые слова: гамильтонова система, первый интеграл, скобка Пуассона, теорема сложения.

Стаття надійшла до редколегії 20.09.2010

Прийнята до друку 22.12.2010

УДК 519.2:519.7

СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ БАГАТОФАКТОРНИХ ЕКОНОМЕТРИЧНИХ МОДЕЛЕЙ У ВИПАДКОВОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Ярослав ЄЛЕЙКО, Катерина КОСАРЕВИЧ

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000 Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: katia_kosarevych@mail.ru*

Розглянуто проблему формалізації економічного процесу в умовах невизначеності. Відомі на сьогодні праці уникають питання побудови методу оптимального вибору факторів економетричної моделі, який був би ефективним в умовах невизначеності. Наша мета – вирішити цю проблему. Побудовано узагальнений метод Хелвіга для відбору визначального набору факторів у випадковому середовищі та відповідну динамічну модель. Визначено параметри багатофакторних економетричних моделей, які залежать від еволюції зовнішніх чинників, що описується процесом Маркова.

Ключові слова: динамічна факторна модель, домінуючий фактор, метод Хелвіга, стохастична факторна регресія, процес Маркова.

1. Вступ. При дослідженні динаміки різноманітних економічних явищ застосовують прогнозні розрахунки й оптимізаційні моделі. Математичні методи, які використовують, потребують попередньої побудови описових моделей, а це супроводжується визначенням та аналізом факторів, які беруть участь у формуванні значень результативної змінної [1, 5]. Інформаційною базою для таких досліджень є статистична звітність, яка дає змогу простежити динаміку показників протягом визначеного періоду. Звичайно, для різних економічних об'єктів існує своя система факторів, причому кількість таких чинників може бути довільною.

Наприклад, такий підхід застосовують у сучасній теорії портфеля [5]. Її мета – розробити методи, за допомогою яких інвестор може вибрати оптимальний для нього портфель з нескінченної кількості можливих. Для вирішення питання про включення кожного розглядуваного цінного паперу в портфель інвестору треба оцінити його очікувану дохідність і стандартне відхилення разом з усіма коваріаціями

між цими цінними паперами. Однак на практиці обсяг розрахунків при визначенні коваріацій цінних паперів збільшується зі збільшенням їхньої кількості, багаторазові аналітичні обчислення стають громіздкими. Така задача може бути сильно спрощена за допомогою побудови моделі процесу формування дохідності за цінним папером, тобто статистичної моделі, яка даватиме необхідний рівень абстрактності. З огляду на це виникає потреба відповісти на такі питання:

- 1) як оптимально вибрати з множини змінних (факторів) ті, які зазначатимуть структуру факторної моделі, аби уникнути громіздких моделей на виході?
- 2) як знайти кількість і номери факторів, які будуть входити в модель?
- 3) наскільки вагомий кожен фактор у формуванні значення залежної змінної?

Пошук відповідей спонукає до виконання першого і надзвичайно важливого кроку фінансового аналізу – відбору домінуючих чинників. Фактично, це той етап, виконання якого потребує аналіз будь-якого економічного явища (наприклад, дослідження впливу цін на паливо, електроенергію, оборотні засоби на величину доходу деякого транспортного підприємства).

Польський економетрист Хелвіг запропонував метод [6] такого відбору, однак функціонування будь-якої економічної системи (в тім числі діючого підприємства) відбувається в умовах складної взаємодії комплексу не лише внутрішніх, а й зовнішніх факторів. Справді, чинники, на підставі яких ми будемо моделювати певне явище, набувають різних значень в різні моменти часу, і ці значення очевидно складаються під впливом зовнішнього середовища. Зокрема, йдеться про деякі події макрорівня, які визначають стан економіки в цілому, та відповідно кожного конкретного підприємства. Наш світ не є стабільним, економіка теж не є монолітною, тому зміни в очікуваннях стосовно її майбутнього стану зумовлюють динаміку більшості економічних систем. Отже, виникає потреба в новому підході до вибору визначальних факторів, який би був достатньо ефективним в умовах невизначеності на відміну від згаданого.

Відомі сучасній науці моделі економічних явищ [2, 6] опускають дослідження розглянутих проблем. Мета нашої праці – пошук узагальненого механізму вибору визначального набору факторів як нового підходу до вирішення актуальної проблеми формалізації економічного процесу в умовах невизначеності. А також побудова на основі вибраних згідно з цим механізмом домінуючих факторів динамічної факторної моделі, дослідження наявності стабільності цієї регресії та знаходження параметрів моделі.

2. Основні результати. Припустимо, що досліджуване економічне явище формується на підставі впливу випадкових змінних $X_1, X_2, \dots, X_n$ з випадковою похибкою спостереження ε

$$Y = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n + \varepsilon,$$

параметри $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – чутливості залежної змінної до відповідних факторів (в загальному випадку невідомі, оцінюються на підставі статистичних даних).

Нехай деякі $A_1, A_2, \dots, A_k$ – повна група попарно несумісних подій

$$\bigcup_{i \in \overline{1, k}} A_i = \Omega; \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad i \in \overline{1, k}, \quad j \in \overline{1, k},$$

таких, що $P(A_1) = p_1, P(A_2) = p_2, \dots, P(A_k) = p_k$.

Вважатимемо, що кожна подія $A_1, A_2, \dots, A_k$, яка може відбутись в зовнішньому середовищі, спонукає до того, що в економіці складається одна з ситуацій $A_1, A_2, \dots, A_k$, в якій фактори впливатимуть на деяке економічне явище з різною силою. Тобто кожній події ставиться у відповідність деякий набір значень факторних змінних. У цьому разі невідомо, яка саме подія настане, адже насправді не можна точно передбачити розвиток подій. Події зовнішнього середовища, від яких залежить досліджувана економічна система, мають стохастичний характер, тобто впливають на неї випадково [3, 4].

Якщо n – кількість чинників, m – кількість експериментів, $n < m$, то статистичні дані для кожної можливої ситуації A_k в економіці запишемо в матричній формі

$$X = \begin{pmatrix} x_{11}^{A_k} & x_{12}^{A_k} & \dots & x_{1n}^{A_k} \\ x_{21}^{A_k} & x_{22}^{A_k} & \dots & x_{2n}^{A_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}^{A_k} & x_{n2}^{A_k} & \dots & x_{nn}^{A_k} \end{pmatrix}.$$

Зробимо кілька припущень: факторні змінні стохастично залежні, тобто X_i і X_j – корельовані, $r(X_i, X_j) = r_{ij}$, та визначають результат, $r(X_i, Y) = r_i$, $i, j \in \overline{1, n}$. Відповідні матриці кореляцій $R^{A_1} = (r_{ij}^{A_1})_{i,j=1}^n$, $R^{A_1} \neq I$ та $R_0^{A_1} = (r_i^{A_1})_{i=1}^n$, причому $R \cdot A = R_0$ при $A = (a_1, \dots, a_n)$; $a_j = \hat{\alpha}_j$.

У кожній ситуації A_l знаходимо набір домінуючих факторів за допомогою відомого алгоритму Хелвіга відбору визначальних чинників [6].

1. Знаходимо всі можливі комбінації факторів, тобто будуємо всі підмножини факторних змінних $\{X_1\}, \{X_2\}, \dots, \{X_1, X_2\}, \{X_1, X_3\}, \dots, \{X_1, \dots, X_n\}$. Позначимо їх, відповідно, C_i , $i \in \overline{1, 2^n - 1}$. Індекси чинників у кожній конкретній C_i занумеруємо в множину $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, $k \leq n$.

2. Виділяємо один визначальний фактор для кожної окремої множини факторів. Силу впливу кожного фактора X_p , $p \in I$ в комбінації C_i назвемо індивідуальною інформаційною об'ємністю. Одержуємо

$$h_{i,i_1} = \frac{r_{i_1}^2}{\sum_{p \in I_i} |r_{pi_1}|}, \quad h_{i,i_2} = \frac{r_{i_2}^2}{\sum_{p \in I_i} |r_{pi_2}|}, \quad \dots, \quad h_{i,i_k} = \frac{r_{i_k}^2}{\sum_{p \in I_i} |r_{pi_k}|}.$$

Максимальне значення серед всіх h_{i,i_j} , $j = \overline{1, k}$, свідчить про домінуючий фактор у кожній з можливих комбінацій C_i , $i \in \overline{1, 2^n - 1}$.

3. Знаходимо форму лінійної регресії, яка найліпше описує поведінку залежної змінної, тобто оптимальну комбінацію факторів, що є визначальною для економічного явища.

Сукупний вплив всіх факторів, наявних в множині C_i , називатимемо інтегральною (колективною) інформаційною об'ємністю $H_i = \sum_{i_s \in I} h_{i,i_s}$, $s \in \overline{1, k}$. Шукану домінуючу підмножину вибираємо серед усіх C_i шляхом максимізації наближених значень інтегральної інформаційної об'ємності.

Зауважимо, що нас цікавлять не тільки конкретні фактори, які формують комбінацію з найбільшою інтегральною інформаційною об'ємністю, а й виявлення факту

наявності чи відсутності в моделі “схожих” комбінацій, адже очевидно, що значення H_i для різних C_i можуть бути близькими.

Наступним кроком введення в модель невизначеності є порівняння вибраних у кожній ситуації наборів домінуючих факторів. Можливі такі три випадки.

Перший випадок. $\forall j, p: \{X_{i_1}^{A_j}, \dots, X_{i_s}^{A_j}\} = \{X_{i_1}^{A_p}, \dots, X_{i_s}^{A_p}\}$ – у кожній ситуації A_l отримуємо той самий набір. Тоді вважаємо, що цей набір факторів є визначальним під час формування економічного явища.

Другий випадок. $\exists q_1, q_2 \in I_i \forall j, p: X_{q_1}^{A_j} = X_{q_2}^{A_p}$ – в наборах, отриманих для кожної ситуації A_l , є один або більше спільних факторів. Цей випадок також є тривіальним. Результат очевидний – саме ці фактори є визначальними для економічного явища, а всі інші – вилучаємо з моделі.

Третій випадок. $\forall j, p \forall q_1, q_2 \in I_i: X_{q_1}^{A_j} \neq X_{q_2}^{A_p}$ – в наборах у різних ситуаціях A_l немає спільних факторів.

У такому випадку пропонують будувати узагальнені матриці вигляду

$$R = \sum_{l=1}^k p(A_l) R^{A_l} \quad \text{та} \quad R_0 = \sum_{l=1}^k p(A_l) R_0^{A_l}.$$

Застосування до узагальнених матриць такого вигляду відомої вже методики дає змогу ввести в модель невизначеність і уникнути несуттєвих елементів.

Після того, як факторну регресійну модель було побудовано, перейдемо до аналізу та оцінки її параметрів.

3. Дослідження в стохастичному середовищі. Варто звернути увагу на еволюцію зовнішніх чинників у часі. Звісно, було б зручно, коли б ні фактори, ні їхні значення не змінювались від періоду до періоду. Тоді б, наприклад, для оцінювання дохідності цінних паперів за великий період часу можна було б застосувати механічні процедури й отримати факторну модель з усіма необхідними величинами. Така факторна модель, ефективна для одного часового проміжку, була б ефективною для наступного періоду. Однак вона не враховує дію зовнішнього середовища. Насправді ж треба, щоб побудована модель враховувала динамічну природу економічного середовища, в такому випадку сила впливу факторів не може бути однозначно визначена. Тому при постійних випадкових зовнішніх впливах, незалежних і неоднакових у різні моменти часу, дослідження потребує вже система, задана за допомогою динамічної факторної регресії. Іншими словами, треба побудувати модель, яка б “добре” описувала деяку економічну систему під впливом зовнішнього середовища протягом достатньо довгого періоду часу. Отож, постає питання про існування рівноважного значення результативної змінної.

Вплив зовнішнього середовища в кожен момент часу задається регресією $Y_t = a_1(t)X_1 + a_2(t)X_2 + \dots + a_n(t)X_n$, де a_i – коефіцієнти, які виражають силу впливу відповідних коефіцієнтів, $\sum a_i = 1$, $i = 1, \dots, n$.

За умови стабільності економіки з m можливих ситуацій (таких як спад, застій, підйом тощо) відбувалася б лише деяка ситуація i , тому факторна модель спростилась би до $Y(i) = a_1(i)X_1 + a_2(i)X_2 + \dots + a_n(i)X_n$.

Позаяк економіка – явище динамічне і постійно змінюється, то треба розглядати еволюцію такої регресії в часі, тобто досліджувати динамічну факторну модель

$$Y(\xi(t)) = a_1(\xi(t))X_1 + a_2(\xi(t))X_2 + \dots + a_n(\xi(t))X_n.$$

Постає питання – як, враховуючи ці безперервні зміни, задані $\xi(t)$, спрогнозувати результат Y_t для деякого досить великого t ? Іншими словами, ми хочемо дослідити побудовану модель на стабільність.

Вважатимемо, що зміну станів навколишнього середовища можна змодельовати однорідним ланцюгом Маркова $\xi(t)$ з дискретним (неперервним) часом і скінченною множиною станів X [4].

Розглянемо функцію $a_k(\xi)$, $k = \overline{1, n}$, визначену на множині станів X ланцюга Маркова $\xi(t)$. Щоб отримати очікуваний при $t \rightarrow \infty$ результат, треба наблизити кожен з функцій $a_k(\xi)$. Для цього використовуємо усереднені характеристики, тобто середнє значення цих функцій вздовж траєкторії процесу $\xi(t)$ вигляду $\frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} a(\xi(t))$ в дискретному та $\frac{1}{T} \int_0^T a(\xi(t))dt$ неперервному випадку. Існування границі таких середніх при $T \rightarrow \infty$ визначає ергодична теорема [4].

Сформулюємо умови ергодичної теореми в нашому випадку.

Теорема 1 (дискретний випадок). *Нехай ξ – ланцюг Маркова зі скінченною множиною станів X ; $\{q_x\}$ – стаціонарний розподіл, а функція $a_k(\xi)$ задовольняє умову $\sum_x q_x |a_k(\xi)| < \infty$.*

Тоді з ймовірністю 1 справджується рівність $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} a_k(\xi(t)) = \sum_y q_y f(y)$.

Теорема 2 (неперервний випадок). *Нехай виконуються умови:*

- 1) π_j , $j \in X$ – стаціонарні ймовірності для станів вкладеного ланцюга Маркова;
- 2) коефіцієнти q_j задовольняють умову $\sum \pi_j q_j^{-2} < \infty$, $j \in X$;
- 3) функція $a(\xi)$ на станах ланцюга така, що $\sum a^2(i) \pi_i q_i^{-2} < \infty$, $i, j \in X$.

Тоді з ймовірністю 1

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T a(\xi(t))dt = \frac{\sum a(i) \pi_i q_i^{-1}}{\sum \pi_i q_i^{-1}},$$

де $\pi_j = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t)$, $\sum \pi_i = 1$, $i \in X$ – стаціонарний розподіл.

Застосовавши цю теорему в неперервному випадку, отримуємо шукані наближення для залежної змінної

$$\frac{1}{T} \int_0^T Y(\xi(t))dt \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \theta_1 X_1 + \dots + \theta_n X_n,$$

де ваги факторів $\theta_1 = \frac{\sum a_1(i) \pi_i q_i^{-1}}{\sum \pi_i q_i^{-1}}$, $\dots$, $\theta_n = \frac{\sum a_n(i) \pi_i q_i^{-1}}{\sum \pi_i q_i^{-1}}$, функції $a_k(i)$ – чутливості результувальної змінної до фактора X_k при $\xi(t) = i$.

Зауваження 1. Легко бачити, що твердження сформульованих вище теорем 1 та 2 отримують у разі використання відповідних ергодичних теорем Скорохода [4]. Справді, оскільки в нашому випадку множина станів X процесу $\xi(t)$ скінченна, то для ергодичності достатньо, щоб стани X утворювали один клас станів, які сполучаються, а отже, деякі умови ергодичних теорем виконуються автоматично.

Оскільки функції $a_k(\cdot)$, $k = \overline{1, n}$ визначені на множині станів X ланцюга Маркова $\xi(t)$, то ми одержали наближене усереднене значення результувальної змінної, що відповідає за стан економічного явища в майбутньому. Тобто знайдено значення параметрів факторної регресії і показано, що для динамічної системи, яка зазнає постійних зовнішніх впливів, незалежних у різні моменти часу, все таки простежується певна стабільність регресії, задана коефіцієнтами $\theta_1, \dots, \theta_n$ (у неперервному випадку). Отже, ймовірніше узагальнення динамічної системи за допомогою ланцюгів Маркова дає змогу змодельовати (спрогнозувати) майбутній стан економічного явища з урахуванням впливу на нього зовнішнього середовища у вигляді факторів $X_1, X_2, \dots, X_n$, що діють з відповідними “коефіцієнтами стабільності”.

4. Висновки. Отже, побудовано згідно з розробленим узагальненим механізмом вибору визначального набору факторів динамічну багатфакторну модель і спрощено її до звичайної факторної регресії. Спроба ввести невизначеність у метод Хелвіга виявилась успішною. Отримані результати можуть стати невід’ємною частиною теорії функціонування економічної системи в умовах невизначеності.

-
1. *Грін В.Г.* Економетричний аналіз / *Грін В.Г.* – К., 2005.
 2. *Леоненко М.М.* Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці / *Леоненко М.М., Мішура Ю.С., Пархоменко В.М., Ядренко М.Й.* – К., 1985.
 3. *Лысенко Ю.Г.* Модели управления проектами в нестабильной экономической среде / *Лысенко Ю.Г., Левичкий С.И.* – Донецк, 2003.
 4. *Скорозод А.В.* Элементы теории вероятностей и случайных процессов / *Скорозод А.В.* – К., 1975.
 5. *Шарп У.* Инвестиции / *Шарп У., Александер Г., Бейли Д.* – М., 1997.
 6. *Hellwig Z.* On the optimal Choice of Predictors, Study VI / *Hellwig Z.* – Paris: United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization, 1968.

SYSTEMS ANALYSIS OF MULTIFACTOR ECONOMETRIC MODELS IN STOCHASTIC ENVIRONMENT

Yaroslav YELEJKO, Kateryna KOSAREVYCH

*Ivan Franko National University of L'viv,
79000 L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: katia_kosarevych@mail.ru*

The article focuses on economic process's formalization under uncertainty. Famous studies are silent on the problem of construction the method for the optimal choice of predictors of multifactor econometric model that would be effective under uncertainty. This study intends to fill in the gaps above. Generalized Hellwig's method of selection of the optimal set of dominant factors in stochastic environment is proposed, dynamic factor model is

constructed. Parameters of multifactor regression described by Markov process and depended on evolution of outer environment are determined.

Key words: dynamic factor model, dominant factor, Hellwig's method, stochastic factor regression, Markov process.

СИСТЕМНИЙ АНАЛИЗ МНОГОФАКТОРНЫХ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ

Ярослав ЕЛЕЙКО, Екатерина КОСАРЕВИЧ

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000 Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: katia_kosarevych@mail.ru*

Рассмотрено проблему формализации экономического процесса в условиях неопределенности. Известные на сегодня работы избегают вопроса построения метода оптимального выбора факторов эконометрической модели, который был бы эффективным в условиях неопределенности. Наша цель – решить эту проблему. Построен обобщенный метод Хелвига для отбора определяющего набора факторов в случайной среде и соответствующая динамическая модель. Определены параметры многофакторных эконометрических моделей, зависящих от эволюции внешних факторов, которую можно смоделировать как процесс Маркова.

Ключевые слова: динамическая факторная модель, доминирующий фактор, метод Хелвига, стохастическая факторная регрессия, процесс Маркова.

Стаття надійшла до редколегії 12.04.2010

Після остаточної правки 09.11.2010

Прийнята до друку 22.12.2010

УДК 519.21

**ОПТИМІЗАЦІЯ СЕРЕДНЬОГО ЧАСУ ОЧІКУВАННЯ
ДЛЯ СИСТЕМ ТИПУ М/М/1/м
З БЛОКУВАННЯМ ВХІДНОГО ПОТОКУ ТА
ПЕРЕМИКАННЯМ РЕЖИМІВ ОБСЛУГОВУВАННЯ**

Костянтин ЖЕРНОВИЙ

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000 Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: k_zhernovyi@yahoo.com*

Вивчено системи обслуговування М/М/1/м з пороговим блокуванням вхідного потоку та з відновлюючим рівнем потоку замовлень, в яких на час блокування змінюється інтенсивність обслуговування. Для кожної з систем розв'язано задачі оптимізації середнього часу очікування за параметрами $\gamma = \mu_1/\mu_2$, h і m , де μ_1 , μ_2 – інтенсивності обслуговування в звичайному режимі та в режимі блокування, відповідно, h – поріг блокування.

Ключові слова: система М/М/1/м, блокування вхідного потоку, перемикання режимів обслуговування, оптимізація середнього часу очікування.

1. Вступ. У [1] вивчено систему обслуговування М/М/1/м, в якій у момент початку обслуговування чергового замовлення за умови перевищення кількості замовлень у системі заданого порогового рівня h починається блокування потоку замовлень, що триває аж до зменшення кількості замовлень до числа $n \leq h$ і припиняється в момент початку обслуговування чергового замовлення. В момент початку блокування вхідного потоку змінюється інтенсивність обслуговування. Якщо інтенсивність збільшується, то кажуть, що система переходить на “швидке” обслуговування. З припиненням блокування вхідного потоку відбувається перехід на звичну інтенсивність обслуговування.

Для описаної системи обслуговування в [1] розв'язано задачі мінімізації вартісних функціоналів, які характеризують ефективність функціонування системи. Далі ми розглянемо оптимізаційні задачі для однієї з найважливіших стаціонарних характеристик систем обслуговування з чергою – середнього часу очікування $\bar{t}_r$, які

належать до класу задач оптимального синтезу систем з заданими характеристиками [2].

Сформулюємо одну з таких задач, яку назвемо **задачею “h”**: *зафіксувавши всі інші параметри, від яких залежить середній час очікування, вибрати значення параметра h таким, щоб у стаціонарному режимі середній час очікування $\bar{t}_r$ не перевищував задане число τ .*

Якщо зможемо з’ясувати, що функція $\bar{t}_r(h)$ є, наприклад, зростаючою, то алгоритм для визначення найбільшого значення параметра h , яке б гарантувало потрібне значення середнього часу очікування, виглядатиме так:

$$h_{\max} = \max \{ h \in \mathbb{N} : \bar{t}_r(h) \leq \tau \}.$$

Отже, з’ясування умов монотонності $\bar{t}_r$ як функції шуканого параметра системи відкриває шлях до розв’язання задачі оптимізації. Тому далі ми дослідимо на монотонність функції $\bar{t}_r(h)$ та $\bar{t}_r(m)$, де m – максимальна дозволена довжина черги.

У [3, 4] вивчали системи типу $M/G/1/m$ та $M/M/n/m$ з відновлювальним рівнем вхідного потоку. Якщо довжина черги досягає числа m , то надходження замовлень у таку систему блокується і відновлюється в момент початку обслуговування того замовлення, для якого кількість замовлень у системі не перевищує заданий пороговий рівень $h \in [1; m-1]$.

Далі ми розглянемо систему $M/M/1/m$ з відновлювальним рівнем вхідного потоку, в якій на час блокування потоку замовлень змінюється інтенсивність обслуговування. Для такої системи дослідимо задачі оптимізації середнього часу очікування.

2. Середній час очікування для системи з пороговим блокуванням вхідного потоку. Розглянемо одноканальну систему обслуговування, для якої довжина черги не може перевищувати число m . Замовлення в систему надходять по одному, а проміжки часу між моментами надходження замовлень – незалежні випадкові величини, розподілені за показниковим законом з параметром λ .

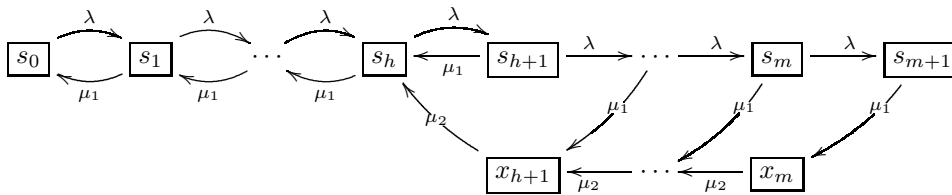


Рис. 1

Обслуговування замовлень може відбуватись у двох режимах. Час обслуговування в кожному з них розподілений за показниковим законом з параметрами μ_1 і μ_2 , відповідно. Якщо $\mu_1 < \mu_2$, то перший режим “повільний”, а другий “швидкий”. Обслуговування з інтенсивністю μ_2 відбувається за умови, що в момент t початку обслуговування чергового замовлення $n(t) > h$, де $n(t)$ – кількість замовлень у системі, $h = \overline{1, m-1}$. Під час роботи системи у режимі з інтенсивністю μ_2 відбувається блокування вхідного потоку замовлень, тобто жодне замовлення не допускається в чергу. Якщо в момент t початку обслуговування чергового замовлення $n(t) \leq h$, то

блокування вхідного потоку припиняється і відновлюється режим обслуговування з інтенсивністю μ_1 .

Введемо нумерацію станів системи (див. рис.1): s_0 – система вільна; s_k ($k = \overline{1, m+1}$) – в системі є k замовлень, використовується режим обслуговування з інтенсивністю μ_1 ; x_k ($k = \overline{h+1, m}$) – в системі є k замовлень, обслуговування відбувається з інтенсивністю μ_2 , вхідний потік заблокований.

Нехай $p_k(t)$ ($q_k(t)$) – імовірність того, що система в момент часу t перебуває у стані s_k (x_k). Очевидно [1], що існують границі $p_k = \lim_{t \rightarrow \infty} p_k(t)$, $q_k = \lim_{t \rightarrow \infty} q_k(t)$. Стаціонарні ймовірності p_k , q_k і стаціонарні характеристики системи знайдено в [1]. Введемо позначення: $\beta = 1/\alpha$, $\gamma = \mu_1/\mu_2$, $\tilde{\beta} = 1 + \beta$, $\tilde{\alpha} = 1 - \alpha$, де $\alpha = \lambda/\mu_1$ – коефіцієнт завантаження системи у режимі обслуговування з інтенсивністю μ_1 .

Запишемо формули для середнього часу очікування в черзі [1]

$$\bar{t}_r = T(m, h, \beta, \gamma, \lambda) = \frac{T_1(m, h, \beta, \gamma)}{\lambda \beta^2 (\beta - 1) ((\beta^{h+2} - 1) \tilde{\beta}^{m-h} + 1 - \beta)}, \quad \beta \neq 1; \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \bar{t}_r = T(m, h, 1, \gamma, \lambda) &= \frac{m}{2\lambda} + \\ &+ \frac{(h^2 + h + 2 - mh - 2m + 2\gamma(h+1))2^m + (m - 2 - 2\gamma(m+1))2^h}{2\lambda((h+2)2^m - 2^h)}, \quad \beta = 1; \end{aligned} \quad (2)$$

де $T_1(m, h, \beta, \gamma) = \beta(\beta^{h+2} - h\beta^2 + h\beta - 2\beta + 1)\tilde{\beta}^{m-h} - \beta(\beta - 1)^2 + \gamma(\beta - 1)^2((h\beta + 1)\tilde{\beta}^{m-h} - m\beta - 1)$.

Перехід у співвідношеннях (1) і (2) до границі при $m \rightarrow \infty$ дає відповідні формули для системи без обмежень на довжину черги

$$\begin{aligned} \bar{t}_r = T(\infty, h, \beta, \gamma, \lambda) &= \\ &= \frac{\beta(\beta^{h+2} - \beta(\beta - 1)h - 2\beta + 1) + \gamma(\beta - 1)^2(h\beta + 1)}{\lambda \beta^2 (\beta - 1) (\beta^{h+2} - 1)}, \quad \beta \neq 1; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\bar{t}_r = T(\infty, h, 1, \gamma, \lambda) = \frac{h^2 + h + 2 + 2\gamma(h+1)}{2\lambda(h+2)}, \quad \beta = 1. \quad (4)$$

З формул (1)–(4) одержуємо такі граничні співвідношення:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} T(\infty, h, \beta, \gamma, \lambda) = \infty, \quad \beta \leq 1; \quad \lim_{h \rightarrow \infty} T(\infty, h, \beta, \gamma, \lambda) = \frac{1}{\lambda \beta (\beta - 1)}, \quad \beta > 1; \quad (5)$$

$$\lim_{h \rightarrow m} T(m, h, \beta, \gamma, \lambda) = \frac{\beta^{m+1} - \beta - m(\beta - 1)}{\lambda \beta (\beta - 1) (\beta^{m+1} - 1)}, \quad \beta \neq 1; \quad \lim_{h \rightarrow m} T(m, h, 1, \gamma, \lambda) = \frac{m}{2\lambda}. \quad (6)$$

Якщо $h = m$, то маємо класичну систему обслуговування з обмеженою чергою.

3. Задача оптимізації за параметром γ . Для систем обслуговування з обмеженою ($m < \infty$) та необмеженою чергою ($m = \infty$) розглянемо задачу оптимізації, яку називатимемо **задачею “ γ ”**: *зафіксувавши всі інші параметри, вибрати параметр γ так, щоб середній час очікування $\bar{t}_r$ не перевищував задане число τ .*

Розв’язок задачі “ γ ” визначає така теорема.

Теорема 1. 1. Якщо $m < \infty$, $\beta \neq 1$ і виконується умова

$$\tau > \frac{a_1}{c_1}, \quad (7)$$

то розв'язок задачі “ γ ” визначається нерівністю

$$\gamma \leq \frac{c_1\tau - a_1}{b_1}, \quad (8)$$

де $a_1 = \beta(\beta^{h+2} + \beta(h-2) - h\beta^2 + 1)\tilde{\beta}^{m-h} - \beta(\beta-1)^2$;
 $b_1 = (\beta-1)^2((h\beta+1)\tilde{\beta}^{m-h} - m\beta - 1)$; $c_1 = \lambda\beta^2(\beta-1)((\beta^{h+2}-1)\tilde{\beta}^{m-h} - \beta+1)$.

2. Якщо $m < \infty$, $\beta = 1$ і виконується умова

$$\tau > \frac{a_2}{c_2}, \quad (9)$$

то розв'язок задачі “ γ ” визначається нерівністю

$$\gamma \leq \frac{c_2\tau - a_2}{b_2}, \quad (10)$$

де $a_2 = (h^2 + h + 2)2^{m-h-1} - 1$; $b_2 = (h+1)2^{m-h} - m - 1$; $c_2 = \lambda((h+2)2^{m-h} - 1)$.

3. Якщо $m = \infty$, $\beta \neq 1$ і виконується умова

$$\tau > \frac{a_3}{c_3}, \quad (11)$$

то розв'язок задачі “ γ ” визначається нерівністю

$$\gamma \leq \frac{c_3\tau - a_3}{b_3}, \quad (12)$$

де $a_3 = \beta^{h+2} - \beta(\beta-1)h - 2\beta + 1$; $b_3 = (\beta-1)^2(h\beta+1)$; $c_3 = \lambda\beta(\beta-1)(\beta^{h+2}-1)$.

4. Якщо $m = \infty$, $\beta = 1$ і виконується умова

$$\tau > \frac{a_4}{c_4}, \quad (13)$$

то розв'язок задачі “ γ ” визначається нерівністю

$$\gamma \leq \frac{c_4\tau - a_4}{b_4}, \quad (14)$$

де $a_4 = h^2 + h + 2$; $b_4 = 2(h+1)$; $c_4 = 2\lambda(h+2)$.

Доведення. Для одержання співвідношень (8), (10), (12) і (14) у кожному з чотирьох випадків розв'язуємо щодо γ нерівність $\bar{t}_\tau \leq \tau$, яка набуває вигляду

$$\frac{a_i + b_i\gamma}{c_i} \leq \tau.$$

Треба лише довести, що $b_i > 0$ і $c_i > 0$. Для $i = 3; 4$ ці нерівності очевидні. Доведемо їх для $i = 1; 2$. Оскільки

$$(h\beta+1)(1+\beta)^{m-h} - m\beta - 1 > (h\beta+1)(1+m\beta-h\beta) - m\beta - 1 = h\beta^2(m-h) > 0,$$

то $b_1 > 0$.

Для $\beta > 1$ очевидно, що $c_1 > 0$. Якщо ж $\beta < 1$, то одержуємо

$$\begin{aligned} (\beta^{h+2}-1)(1+\beta)^{m-h} + 1 - \beta &< (\beta^{h+2}-1)(1+m\beta-h\beta) + 1 - \beta = \\ &= (\beta^{h+2}-\beta) + (m-h)(\beta^{h+3}-\beta) < 0, \end{aligned}$$

тому $c_1 > 0$.

Нерівність $c_2 > 0$ очевидна. Для b_2 одержуємо

$$b_2 = (h+1)2^{m-h} - m - 1 > (h+1)(1+m-h) - m - 1 = h(m-h) > 0.$$

Умови (7), (9), (11) і (13) одержуємо, вимагаючи, щоб праві частини нерівностей (8), (10), (12) і (14) були додатними, інакше з них отримаємо, що $\gamma \leq 0$. Теорему доведено. $\square$

4. Задача оптимізації за параметром h . Розглянемо задачу “ h ”, сформульовану в п. 1. Якщо $m = \infty$ і $\beta = 1$, то розв’язок задачі “ h ” можна знайти в явному вигляді.

Теорема 2. Якщо $m = \infty$, $\beta = 1$ і виконується умова

$$\tau \geq \frac{2(1+\gamma)}{3\lambda}, \quad (15)$$

то розв’язок задачі “ h ” визначається нерівністю

$$h \leq \frac{1}{2}(2\lambda\tau - 1 - 2\gamma + \sqrt{(2\lambda\tau - 1 - 2\gamma)^2 + 8(2\lambda\tau - 1 - \gamma)}). \quad (16)$$

Доведення. Нерівність $\bar{t}_r \leq \tau$ еквівалентна такій

$$h^2 - (2\lambda\tau - 1 - 2\gamma)h - 2(2\lambda\tau - 1 - \gamma) \leq 0. \quad (17)$$

Оскільки

$$\frac{\partial T(\infty, h, 1, \gamma, \lambda)}{\partial h} = \frac{h^2 + 4h + 2\gamma}{2\lambda(h+2)^2} > 0,$$

то функція $T(\infty, h, 1, \gamma, \lambda)$ зростаюча за змінною h , тому

$$\bar{t}_r \geq T(\infty, 1, 1, \gamma, \lambda) = \frac{2(1+\gamma)}{3\lambda}.$$

Отже, нерівність $\bar{t}_r \leq \tau$ має розв’язок лише для таких τ , які задовольняють умову (15). Якщо ця умова виконується, то нерівність (17) має розв’язки, які визначаються формулою (16). Теорему доведено. $\square$

Якщо $m = \infty$, $\beta \neq 1$, то найбільший розв’язок задачі “ h ” за деяких умов можна знайти за алгоритмом

$$h_{\max} = \max \{ h \in \mathbb{N} : T(\infty, h, \beta, \gamma, \lambda) \leq \tau \}. \quad (18)$$

Теорема 3. Якщо $m = \infty$, $\beta \neq 1$ і виконуються умови

$$\frac{\tilde{\beta}(\beta + \gamma)}{\lambda\beta^2(\beta^2 + \beta + 1)} \leq \tau < \frac{1}{\lambda\beta(\beta - 1)}; \quad 0 < \gamma \leq 1; \quad (19)$$

для $\beta > 1$, і

$$\tau \geq \frac{\tilde{\beta}(\beta + \gamma)}{\lambda\beta^2(\beta^2 + \tilde{\beta})}; \quad \gamma > 0; \quad (20)$$

для $\beta < 1$, то найбільший розв’язок задачі “ h ” можна знайти за допомогою рівності (18).

Доведення. За допомогою (3) для $\beta \neq 1$ і натуральних h одержимо

$$T(\infty, h+1, \beta, \gamma, \lambda) - T(\infty, h, \beta, \gamma, \lambda) = \frac{(\beta-1)^2 F(h, \beta, \gamma)}{\lambda \beta (\beta^{h+2} - 1)(\beta^{h+3} - 1)},$$

де

$$\begin{aligned} F(h, \beta, \gamma) &= (1-\gamma)h\beta^{h+2} + (h+1)\beta^{h+1} + \sum_{k=0}^h (\gamma+k)\beta^k = \\ &= h\beta^{h+2} + (h+1)\beta^{h+1} + \sum_{k=1}^h k\beta^k + \gamma - \gamma\beta(\beta-1) \left(h\beta^h + \sum_{k=0}^{h-1} (k+1)\beta^k \right). \end{aligned}$$

Отже, якщо $0 < \gamma \leq 1$ і $\beta \in (1; \infty)$ або $\gamma > 0$ і $\beta \in (0; 1)$, то $T(\infty, h+1, \beta, \gamma, \lambda) - T(\infty, h, \beta, \gamma, \lambda) > 0$, тобто середній час очікування $\bar{t}_r$ є монотонно зростаючою функцією від h , тому найбільший розв'язок задачі “ h ” визначається з (18). Перша з нерівностей (19) і перша умова (20) впливають з того, що задача “ h ” не має розв'язку, якщо $\tau < T(\infty, 1, \beta, \gamma, \lambda)$. Друга з нерівностей (19) еквівалентна умові $\tau < T(\infty, \infty, \beta, \gamma, \lambda)$ і є необхідною для забезпечення єдиності розв'язку $h_{\max}$ задачі “ h ” за алгоритмом (18). Адже згідно з (5) $T(\infty, \infty, \beta, \gamma, \lambda) = 1/(\lambda\beta(\beta-1))$ для $\beta > 1$, і якщо $\tau \geq T(\infty, \infty, \beta, \gamma, \lambda)$, то з (18) одержимо, що $h_{\max} = \infty$. Теорему доведено. $\square$

Таблиця 1. Розв'язування задачі “ h ” для різних τ

τ	h^*	$h_{\max}$	$\bar{t}_r(h_{\max})$	$\bar{t}_r(h_{\max})$ (GPSS World)
2	1,542	1	1,714	1,712
3	3,145	3	2,903	2,904
4	4,583	4	3,587	3,601
5	5,963	5	4,299	4,305
6	7,317	7	5,765	5,774
7	8,659	8	6,508	6,510
8	9,997	9	7,255	7,262
9	11,332	11	8,751	8,759
10	12,666	12	9,501	9,504

Зауваження 1. Якщо умови теореми 3 виконуються, то для реалізації алгоритму (18) достатньо знайти єдиний додатний розв'язок $h = h^*$ рівняння $T(\infty, h, \beta, \gamma, \lambda) = \tau$ (для фіксованих β, γ і λ). Тоді $h_{\max} = \max_{h \in \mathbb{N}} \{h \leq h^*\}$. Результати реалізації цього алгоритму наведено в табл. 1 для $\lambda = 2; \mu_1 = 1; \mu_2 = 2; \beta = \gamma = 0,5$. Для таких значень параметрів з (20) отримуємо обмеження на τ : $\tau \geq 1,714$. В останньому стовпці таблиці для порівняння записано значення середнього часу очікування $\bar{t}_r(h_{\max})$, отримані для значення часу моделювання $t = 10^6$ за допомогою системи імітаційного моделювання GPSS World [5, 6].

Якщо $m < \infty, \beta = 1$, то найбільший розв'язок задачі “ h ” за деяких умов можна знайти за алгоритмом

$$h_{\max} = \max \{h \in \mathbb{N} : T(m, h, 1, \gamma, \lambda) \leq \tau\}. \quad (21)$$

Теорема 4. Якщо $3 \leq m < \infty$, $\beta = 1$ і виконуються умови

$$0 < \gamma < \frac{5m^2 - 3m - 8}{2(m^2 - m - 3)}; \quad (22)$$

$$\tau \geq \frac{m}{2\lambda} - \frac{(3m - 4\gamma - 4)2^{m-1} - m + 2 + 2\gamma(m + 1)}{2\lambda(3 \cdot 2^{m-1} - 1)}, \quad (23)$$

то найбільший розв'язок задачі “ h ” можна знайти за допомогою алгоритму (21).

Доведення. За допомогою (2) для натуральних $h < m - 1$ ($h + 1 \leq m - 1$) одержимо

$$T(m, h + 1, 1, \gamma, \lambda) - T(m, h, 1, \gamma, \lambda) = \frac{2^{m-1} f_h(m, h, \gamma)}{\lambda((h + 2)2^m - 2^h)((h + 3)2^m - 2^{h+1})},$$

де $f_h(m, h, \gamma) = 2^h((h^2 + 5h + 2\gamma + 2)2^{m-h} + h^2 - 3h - 2\gamma mh - 2\gamma(m + 1) - 2)$.

З'ясуємо, для яких значень γ виконується нерівність $f_h(m, h, \gamma) > 0$ для всіх $h \geq 1$, $m \geq 3$. Нерівність $f_h(m, h, \gamma) > 0$ еквівалентна такій

$$(mh + m + 1 - 2^{m-h})\gamma < (h^2 + 5h + 2)2^{m-h} + h^2 - 3h - 2. \quad (24)$$

Нерівність (24) виконується для всіх $\gamma > 0$, якщо $mh + m + 1 - 2^{m-h} \leq 0$. Якщо ж m і h такі, що $mh + m + 1 - 2^{m-h} > 0$, то з (24) одержимо обмеження на γ

$$\gamma < \frac{(h^2 + 5h + 2)2^{m-h} + h^2 - 3h - 2}{2(mh + m + 1 - 2^{m-h})}.$$

Прийнявши в цій нерівності $m - h = k \geq 2$, одержимо нерівність $\gamma < \Phi(m, k)$, де $\Phi(m, k) = \Phi_1(m, k)/\Phi_2(m, k)$,

$$\Phi_1(m, k) = (2^k + 1)(m - k)^2 + (5 \cdot 2^k - 3)(m - k) + 2(2^k - 1);$$

$$\Phi_2(m, k) = 2(m^2 - (k - 1)m - 2^k + 1).$$

Оскільки

$$\frac{\partial \Phi_1(m, k)}{\partial k} = 2^k \ln 2 \cdot (m - k)^2 + ((5 \ln 2 - 2)2^k - 2)(m - k) + (2 \ln 2 - 5)2^k + 3 > 0$$

для $k \geq 2$, $m - k = h \geq 2$, а $\Phi_2(m, k)$ — спадна функція від k , то функція $\Phi(m, k)$ зростає за змінною k для $k \geq 2$, $m - k \geq 2$. Отже, якщо

$$\gamma < \Phi(m, 2) = \frac{5m^2 - 3m - 8}{2(m^2 - m - 3)}, \quad m \geq 4,$$

то нерівність $\gamma < \Phi(m, k)$ виконується для $m - k = h \geq 2$, $m \geq 4$, $k \geq 2$.

Якщо $h = 1$, то $mh + m + 1 - 2^{m-h} > 0$ для $m = 3$ і $m = 4$, а для $m \geq 5$ маємо $mh + m + 1 - 2^{m-h} < 0$. Для $h = 1$, $m = 3$ множини розв'язків γ нерівностей (24) і $\gamma < \Phi(m, 2)$ збігаються, а для $h = 1$, $m = 4$ множина розв'язків нерівності $\gamma < \Phi(m, 2)$ є підмножиною множини розв'язків нерівності (24). Отже, умова (22) забезпечує виконання нерівності $f_h(m, h, \gamma) > 0$ для всіх $h \geq 1$, $m \geq 3$, а це означає, що $T(m, h + 1, 1, \gamma, \lambda) - T(m, h, 1, \gamma, \lambda) > 0$, тобто середній час очікування $\bar{t}_r$ є монотонно зростаючою функцією від h , тому найбільший розв'язок задачі “ h ” визначається з (21). Задача “ h ” не має розв'язку, якщо $\tau < T(m, 1, 1, \gamma, \lambda)$, тому ставиться умова $\tau \geq T(m, 1, 1, \gamma, \lambda)$, яка має вигляд (23). Теорему доведено. $\square$

Зауваження 2. Згідно з (6) $T(m, m, 1, \gamma, \lambda) = m/(2\lambda)$, тому при $\tau \geq m/(2\lambda)$ задача “ h ” має тривіальний розв’язок $h_{\max} = m - 1$.

5. Задача оптимізації за параметром m . Для системи обслуговування з обмеженою чергою ($m < \infty$) розглянемо задачу “ m ”: *зафіксувавши всі інші параметри, вибрати параметр m так, щоб середній час очікування $\bar{t}_r$ не перевищував задане число τ* . Визначимо умови, за яких найбільший розв’язок задачі “ m ” можна знайти за алгоритмом

$$m_{\max} = \max \{ m \in \mathbb{N} : T(m, h, \beta, \gamma, \lambda) \leq \tau \}. \quad (25)$$

Теорема 5. *Якщо $2 \leq m < \infty$ і виконуються умови*

$$\gamma > \max \left\{ 0; \frac{h^2 - h - 2}{2h^2 + 4h + 3} \right\}; \quad (26)$$

$$\frac{h^2 + h + 1 + \gamma h}{\lambda(2h + 3)} \leq \tau < \frac{h^2 + h + 2 + 2\gamma(h + 1)}{2\lambda(h + 2)} \quad (27)$$

для $\beta = 1$ і умови

$$\gamma > \max \left\{ 0; \frac{\beta^2 \tilde{\beta} (2\beta^{h+1} - \beta^{h+2} - h(\beta - 1) - 1)}{(\beta - 1)((h + 1)\beta^{h+3} - 2\beta - h\beta^2 + 1)\tilde{\beta} + \beta - 1} \right\}; \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(\beta^{h+2} - h\beta^2 + h\beta - 2\beta + 1)\tilde{\beta} - \beta(\beta - 1) + \gamma h\beta(\beta - 1)^2}{\lambda\beta^2(\beta - 1)(\beta^{h+1}\tilde{\beta} - 2)} \leq \tau < \\ & < \frac{\beta(\beta^{h+2} - \beta(\beta - 1)h - 2\beta + 1) + \gamma(\beta - 1)^2(h\beta + 1)}{\lambda\beta^2(\beta - 1)(\beta^{h+2} - 1)} \end{aligned} \quad (29)$$

для $\beta \neq 1$, то найбільший розв’язок задачі “ m ” можна знайти за допомогою рівності (25).

Доведення. За допомогою (2) для натуральних $m > h$ ($m \geq 2$) одержимо

$$T(m + 1, h, 1, \gamma, \lambda) - T(m, h, 1, \gamma, \lambda) = \frac{2^{-(m+1-h)} f_m(m, h, \gamma)}{2\lambda(h + 2 - 2^{-(m-h)})(h + 2 - 2^{-(m+1-h)})},$$

де $f_m(m, h, \gamma) = h + 2 - h^2 + 2\gamma f(m, h)$, $f(m, h) = (m - 1)(h + 2) + 1 + 2^{-(m-h)}$.

Функція $f(m, h)$ додатна і зростає за змінною m для $m \geq h + 1$. Для $h = 1$ і $h = 2$ $f_m(m, h, \gamma) > 0$ для всіх $\gamma > 0$. Для $h > 2$ $f_m(m, h, \gamma) > 0$, якщо

$$\gamma > \frac{h^2 - h - 2}{2f(h + 1, h)} > \frac{h^2 - h - 2}{2f(m, h)}.$$

Оскільки $2f(h + 1, h) = 2h^2 + 4h + 3$, то умова (26) забезпечує виконання нерівності $T(m + 1, h, 1, \gamma, \lambda) - T(m, h, 1, \gamma, \lambda) > 0$, яка означає, що середній час очікування $\bar{t}_r$ є монотонно зростаючою функцією від m . Нерівності (27) одержані з умов

$$T(h + 1, h, 1, \gamma, \lambda) \leq \tau < T(\infty, h, 1, \gamma, \lambda)$$

і забезпечують існування єдиного розв’язку $m_{\max}$ задачі “ m ” при $\beta = 1$, який можна знайти за алгоритмом (25).

У випадку $\beta \neq 1$ за допомогою (1) для натуральних $m > h$ ($m \geq 2$) одержуємо

$$\begin{aligned} T(m+1, h, \beta, \gamma, \lambda) - T(m, h, \beta, \gamma, \lambda) &= \\ &= \frac{\tilde{\beta}^{m+h} \varphi_m(m, h, \beta, \gamma)}{\lambda \beta ((\beta^{h+2} - 1) \tilde{\beta}^m - (\beta - 1) \tilde{\beta}^h) ((\beta^{h+2} - 1) \tilde{\beta}^{m+1} - (\beta - 1) \tilde{\beta}^h)}, \end{aligned}$$

де $\varphi_m(m, h, \beta, \gamma) = \beta^2 (\beta^{h+2} - 2\beta^{h+1} + h(\beta - 1) + 1) + \gamma f_{h\beta}(m)$,

$$f_{h\beta}(m) = (\beta - 1)(m\beta(\beta^{h+2} - 1) - (\beta - 1)(h\beta + 1 - \tilde{\beta}^{-(m-h)})).$$

Оскільки $\ln(1 + \beta) < \beta$, то для $m \geq h$ і $\beta \neq 1$ похідна

$$f'_{h\beta}(m) = \beta(\beta - 1)(\beta^{h+2} - 1) - (\beta - 1)^2 \tilde{\beta}^{-(m-h)} \ln(1 + \beta) > 0,$$

тому

$$f_{h\beta}(m) \geq f_{h\beta}(h) = h\beta^2(\beta - 1)(\beta^{h+1} - 1) > 0.$$

Якщо $\beta^{h+2} - 2\beta^{h+1} + h(\beta - 1) + 1 \geq 0$, то $\varphi_m(m, h, \beta, \gamma) > 0$ для всіх $\gamma > 0$. У протилежному випадку $\varphi_m(m, h, \beta, \gamma) > 0$ лише за умови, що

$$\gamma > \frac{\beta^2(2\beta^{h+1} - \beta^{h+2} - h(\beta - 1) - 1)}{f_{h\beta}(h+1)} \geq \frac{\beta^2(2\beta^{h+1} - \beta^{h+2} - h(\beta - 1) - 1)}{f_{h\beta}(m)},$$

де $f_{h\beta}(h+1) = \frac{\beta-1}{\beta+1} (((h+1)\beta^{h+3} - 2\beta - h\beta^2 + 1)\tilde{\beta} + \beta - 1)$.

Отже, умова (28) забезпечує виконання нерівності

$$T(m+1, h, \beta, \gamma, \lambda) - T(m, h, \beta, \gamma, \lambda) > 0.$$

Нерівності (29) одержані з умов $T(h+1, h, \beta, \gamma, \lambda) \leq \tau < T(\infty, h, \beta, \gamma, \lambda)$ і забезпечують існування єдиного розв'язку $m_{\max}$ задачі "m" при $\beta \neq 1$, який можна знайти за алгоритмом (25). Теорему доведено. $\square$

6. Система з відновлювальним рівнем вхідного потоку. Розглянемо систему обслуговування з відновлювальним рівнем вхідного потоку, описану в п. 1, обслуговування в якій може відбуватись у двох режимах. Час обслуговування в кожному з них розподілений за показниковим законом з параметрами μ_1 і μ_2 , відповідно. Перемикання на обслуговування з інтенсивністю μ_2 відбувається в момент початку обслуговування першого замовлення після того, як розпочалося блокування вхідного потоку.

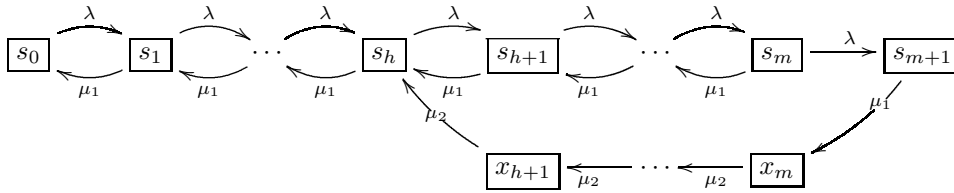


Рис. 2

Зберігши позначення, введені в п. 2, користуючись графом станів системи (рис. 2), запишемо рівняння для визначення стаціонарних імовірностей p_k і q_k

$$\begin{aligned}
\mu_1 p_1 - \lambda p_0 &= 0; & \lambda p_{m-1} - (\lambda + \mu_1) p_m &= 0; \\
\lambda p_{k-1} + \mu_1 p_{k+1} - (\lambda + \mu_1) p_k &= 0 \quad (k = \overline{1, h-1}; k = \overline{h+1, m-1}); \\
\lambda p_{h-1} + \mu_1 p_{h+1} + \mu_2 q_{h+1} - (\lambda + \mu_1) p_h &= 0; & \lambda p_m - \mu_1 p_{m+1} &= 0; \\
\mu_1 p_{m+1} - \mu_2 q_m &= 0; & q_m &= q_k \quad (k = \overline{h+1, m-1}); \\
\sum_{k=0}^{m+1} p_k + \sum_{k=h+1}^m q_k &= 1.
\end{aligned} \tag{30}$$

Розв'язки системи рівнянь (30) зручно шукати, виражаючи всі невідомі через p_0 . Припускаючи, що $\alpha \neq 1$, отримаємо такий результат:

$$\begin{aligned}
p_k &= \alpha^k p_0 \quad (k = \overline{1, h}); & p_k &= \left(\alpha^k - \frac{\alpha^{m+1}(1 - \alpha^{k-h})}{1 - \alpha^{m-h+1}} \right) p_0 \quad (k = \overline{h+1, m}); \\
p_{m+1} &= \frac{\alpha^{m+1} \tilde{\alpha} p_0}{1 - \alpha^{m-h+1}}; & q_k &= \gamma p_{m+1} \quad (k = \overline{h+1, m}); \\
p_0 &= \frac{\tilde{\alpha}(1 - \alpha^{m-h+1})}{1 - \alpha^{m-h+1} - \alpha^{m+1} \tilde{\alpha} (\alpha - (m-h)(\tilde{\alpha}\gamma - 1))}.
\end{aligned} \tag{31}$$

Окремо запишемо формули для стаціонарних імовірностей у випадку, коли $\alpha = 1$,

$$\begin{aligned}
p_k &= p_0 \quad (k = \overline{1, h}); & p_k &= \frac{(m+1-k)p_0}{m+1+h-k} \quad (k = \overline{h+1, m}); \\
p_{m+1} &= \frac{p_0}{m+1+h-k}; & q_k &= \frac{\gamma p_0}{m+1+h-k} \quad (k = \overline{h+1, m}); \\
p_0 &= \frac{2(m-h+1)}{(m-h+1)(m+h+2) + 2\gamma(m-h) + 2}.
\end{aligned} \tag{32}$$

Використовуючи співвідношення (31) і (32), за формулами Літтла одержимо формули для середнього часу очікування в черзі

$$\begin{aligned}
\bar{t}_r &= \tilde{T}(m, h, \alpha, \gamma, \lambda) = \frac{T_1(m, h, \alpha, \gamma)}{2\lambda T_2(m, h, \alpha)}, & \alpha &\neq 1; \\
\bar{t}_r &= \tilde{T}(m, h, 1, \gamma, \lambda) = \frac{T_{11}(m, h, \gamma)}{3\lambda(m-h+1)(m+h+2)}, & \alpha &= 1,
\end{aligned} \tag{33}$$

де

$$\begin{aligned}
T_1(m, h, \alpha, \gamma) &= \alpha^2 \left(2 \left(\sum_{k=0}^{m-h} \alpha^k - m\alpha^{m-1} + (h-1)\alpha^m \right) + \right. \\
&\quad \left. + \tilde{\alpha}\alpha^{m-1}((m-h)(m+h-1)(\gamma\tilde{\alpha} - 1) + 2m\tilde{\alpha}) \right); \\
T_2(m, h, \alpha) &= (1 - \alpha^{m+1})(1 - \alpha^{m-h+1}) - \alpha^{m+1}((m-h)\tilde{\alpha} - \alpha(1 - \alpha^{m-h})); \\
T_{11}(m, h, \gamma) &= 3h(h-1)(m-h+1) + 3(m+\gamma)(m+h-1)(m-h) + \\
&\quad + 6m + h(h-1)(2h-1) - m(m-1)(2m-1).
\end{aligned}$$

Якщо $h = m$, то матимемо класичну систему обслуговування з обмеженою чергою, для якої з (33) отримаємо

$$\begin{aligned}\bar{t}_r &= \tilde{T}(m, m, \alpha, \gamma, \lambda) = \frac{\alpha^2(1 - (m+1)\alpha^m + m\alpha^{m+1})}{\lambda\tilde{\alpha}(1 - \alpha^{m+1})}, \quad \alpha \neq 1; \\ \bar{t}_r &= \tilde{T}(m, m, 1, \gamma, \lambda) = \frac{m}{2\lambda}, \quad \alpha = 1.\end{aligned}\quad (34)$$

Зауважимо, що праві частини співвідношень (34) і (6) збігаються.

7. Задача “ γ ” для системи з відновлювальним рівнем вхідного потоку.

Теорема 6. 1. Якщо $\alpha \neq 1$ і виконується умова

$$\tau > \frac{T_1(m, h, \alpha, 0)}{2\lambda T_2(m, h, \alpha)}, \quad (35)$$

то розв’язок задачі “ γ ” визначається нерівністю

$$\gamma \leq \frac{2\lambda\tau T_2(m, h, \alpha) - T_1(m, h, \alpha, 0)}{(m-h)(m+h-1)\tilde{\alpha}^2\alpha^{m+1}}. \quad (36)$$

2. Якщо $\alpha = 1$ і виконується умова

$$\tau > \frac{T_{11}(m, h, 0)}{3\lambda(m-h+1)(m+h+2)}, \quad (37)$$

то розв’язок задачі “ γ ” визначається нерівністю

$$\gamma \leq \frac{3\lambda\tau(m-h+1)(m+h+2) - T_{11}(m, h, 0)}{3(m-h)(m+h-1)}. \quad (38)$$

Доведення. Співвідношення (36) і (38) одержані як розв’язки нерівностей $\bar{t}_r \leq \tau$ щодо γ . Умови (35) і (37) забезпечують додатність правих частин нерівностей (36) і (38). Теорему доведено. $\square$

8. Задача “ h ” для системи з відновлювальним рівнем вхідного потоку.

Теорема 7. Якщо $\alpha = 1$, $0 < \gamma < 2,5$ і для фіксованого $m \geq 2$ виконується умова

$$\tau \geq \frac{(m-1)(m+1+3\gamma)+6}{3\lambda(m+3)}, \quad (39)$$

то найбільший розв’язок задачі “ h ” можна знайти за алгоритмом

$$h_{\max} = \max \{ h \in \mathbb{N} : \tilde{T}(m, h, 1, \gamma, \lambda) \leq \tau \}. \quad (40)$$

Доведення. За допомогою другого співвідношення (33) для натуральних $h \leq m-2$ одержимо

$$\tilde{T}(m, h+1, 1, \gamma, \lambda) - \tilde{T}(m, h, 1, \gamma, \lambda) = \frac{g(m, h, \gamma)}{3\lambda(m-h+1)(m+h+2)(m-h)(m+h+3)},$$

де

$$\begin{aligned}g(m, h, \gamma) &= 6\gamma((m-h)^2 - 2mh - m - h) + h(h-1)(h^2 + 5h - 2) - \\ &\quad - 3mh(h-1)(m+3) + 2m(m^2 + 5)(h+1).\end{aligned}$$

Доведемо методом математичної індукції, що $g(m, h, \gamma) > 0$ для $1 \leq h \leq m - 2$, де $m \geq 2$. Якщо $h = m - 2$, то

$$g(m, m - 2, \gamma) = 6(5m^2 - 3m - 8 - 2\gamma(m^2 - m - 3)).$$

Для $m = 2$ нерівність $g(m, m - 2, \gamma) > 0$ виконується для всіх $\gamma > 0$. Розв'язуючи нерівність $g(m, m - 2, \gamma) > 0$ для $m \geq 3$, одержимо обмеження на γ

$$\gamma < \frac{5m^2 - 3m - 8}{2(m^2 - m - 3)}.$$

Для всіх $m \geq 3$ виконується нерівність

$$\frac{5m^2 - 3m - 8}{2(m^2 - m - 3)} \geq \frac{5}{2},$$

тому для $\gamma \in (0; 2, 5)$ $g(m, m - 2, \gamma) > 0$.

Припустимо, що $g(m, \tilde{h}, \gamma) > 0$, де $1 < \tilde{h} \leq m - 2$. Доведемо, що $g(m, h, \gamma) > 0$ для $h = \tilde{h} - 1$.

Одержуємо

$$\begin{aligned} g(m, \tilde{h} - 1, \gamma) &= g(m, \tilde{h}, \gamma) + 12\gamma(2m - \tilde{h} + 1) + \\ &+ 2(m^3 + 5m - \tilde{h}^3 - \tilde{h}^2 + 2\tilde{h}) + 2(\tilde{h} - 1)(3m^2 + 9m - \tilde{h}^2 - 3\tilde{h} + 6) > 0, \end{aligned}$$

тому що для всіх $m \geq 2$, $1 < \tilde{h} \leq m - 2$

$$\begin{aligned} m^3 + 5m - \tilde{h}^3 - \tilde{h}^2 + 2\tilde{h} &\geq m^3 + 5m - (m - 1)^3 - (m - 1)^2 + 2(m - 1) = \\ &= 2(m^2 + 3m - 1) > 0. \end{aligned}$$

Отже, $g(m, h, \gamma) > 0$ для $1 \leq h \leq m - 2$, $m \geq 2$, тому

$$\tilde{T}(m, h + 1, 1, \gamma, \lambda) - \tilde{T}(m, h, 1, \gamma, \lambda) > 0.$$

Це означає, що середній час очікування $\bar{t}_r$ є монотонно зростаючою функцією від h , тому розв'язок $h_{\max}$ задачі “ h ” визначається за алгоритмом (40). Задача “ h ” не має розв'язку, якщо $\tau < \tilde{T}(m, 1, 1, \gamma, \lambda)$, тому ставиться умова $\tau \geq \tilde{T}(m, 1, 1, \gamma, \lambda)$, яка має вигляд (39). Теорему доведено. $\square$

9. Задача “ m ” для системи з відновлювальним рівнем вхідного потоку.

Теорема 8. Якщо $\alpha = 1$ і для фіксованого $h \geq 1$ виконується умова

$$\tau \geq \frac{h(h - 1)(2h + 5) + 6h(\gamma + h + 1) - (h + 1)(2h^2 + h - 6)}{6\lambda(2h + 3)}, \quad (41)$$

то найбільший розв'язок задачі “ m ” можна знайти за алгоритмом

$$m_{\max} = \max \{ m \in \mathbb{N} : \tilde{T}(m, h, 1, \gamma, \lambda) \leq \tau \}. \quad (42)$$

Доведення. За допомогою другого співвідношення (33) для натуральних $m \geq h + 1$ одержимо

$$\begin{aligned} \tilde{T}(m+1, h, 1, \gamma, \lambda) - \tilde{T}(m, h, 1, \gamma, \lambda) = \\ = \frac{G(m, h) + 6\gamma((m-h)^2 + m^2 + h^2 + 2(2m-h))}{3\lambda(m-h+1)(m+h+2)(m-h+2)(m+h+3)}, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} G(m, h) = 3(m-h+1)(m+h+2)(m^2+m+2) + 2(m+2)h(h-1)(h-2) - \\ - 2m(m+2)(m^2+5). \end{aligned}$$

Доведемо методом математичної індукції, що $G(m, h) > 0$ для $1 \leq h \leq m-1$, де $m \geq 2$. Якщо $h = m-1$, то $G(m, m-1) = 6(m^2 + 7m - 2) > 0$ для всіх $m \geq 2$. Припустимо, що $G(m, \tilde{h}) > 0$, де $1 < \tilde{h} \leq m-1$. Доведемо, що $G(m, h) > 0$ для $h = \tilde{h}-1$.

Одержуємо

$$\begin{aligned} G(m, \tilde{h}-1) &= G(m, \tilde{h}) + 6h(m^2 + m + 2) - 6(h-1)(h-2)(m+2) > \\ &> G(m, \tilde{h}) + 6h(m^2 + m + 2 - (m-3)(m+2)) = G(m, \tilde{h}) + 12h(m+4) > 0. \end{aligned}$$

Отже, $G(m, h) > 0$ для $1 \leq h \leq m-1$, $m \geq 2$, тому

$$\tilde{T}(m+1, h, 1, \gamma, \lambda) - \tilde{T}(m, h, 1, \gamma, \lambda) > 0.$$

Це означає, що середній час очікування $\bar{t}_r$ є монотонно зростаючою функцією від m , тому розв'язок $m_{\max}$ задачі “ m ” визначається за алгоритмом (42). Задача “ m ” не має розв'язку, якщо $\tau < \tilde{T}(h+1, h, \gamma, \lambda)$, тому накладається умова $\tau \geq \tilde{T}(h+1, h, \gamma, \lambda)$, яка має вигляд (41). Теорему доведено. $\square$

Таблиця 2. Розв'язування задачі “ m ” для різних τ

τ	m^*	$m_{\max}$	$\bar{t}_r(m_{\max})$	$\bar{t}_r(m_{\max})$ (GPSS World)
2	11,463	11	1,933	1,934
2,5	14,794	14	2,379	2,374
3	18,027	18	2,996	2,998
3,5	21,199	21	3,468	3,465
4	24,332	24	3,947	3,942
4,5	27,440	27	4,429	4,435
5	30,529	30	4,914	4,873
5,5	33,603	33	5,402	5,380
6	36,667	36	5,891	5,909

Зауваження 3. Якщо умови теореми 8 виконуються, то для реалізації алгоритму (42) достатньо знайти єдиний додатний розв'язок $m = m^*$ рівняння $\tilde{T}(m, h, 1, \gamma, \lambda) = \tau$ (для фіксованих h, γ і λ). Тоді $m_{\max} = \max_{m \in \mathbb{N}, m \geq h+1} \{m \leq m^*\}$. Результати реалізації цього алгоритму наведено в табл. 2 для $\lambda = \mu_1 = 2$; $\mu_2 = 4$; $\gamma = 0,5$; $h = 5$. Для таких значень параметрів з (41) отримуємо обмеження на τ : $\tau \geq 1,288$. В останньому стовпці таблиці для порівняння записано значення середнього часу очікування

$\bar{t}_r(m_{\max})$, отримані для значення часу моделювання $t = 2 \cdot 10^6$ за допомогою системи імітаційного моделювання GPSS World.

1. Жерновий К. Оптимізація режимів обслуговування для систем М/М/1/м та М/М/1 з блокуванням вхідного потоку / Жерновий К. // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2009. – Вип. 71. – С. 92-101.
2. Дудин А.Н. Расчёт необходимого числа каналов в современных телекоммуникационных сетях / Дудин А.Н., Клименок В.И. // Информатизация образования. – 2005. – №4. – С. 56-68.
3. Братійчук А.М. Граничні теореми для системи типу М^θ/G/1/b з відновлюючим рівнем вхідного потоку / Братійчук А.М. // Укр. мат. журн. – 2007. – Т. 59, №7. – С. 884-889.
4. Єлейко Я. Універсальні формули для системи обслуговування М/М/п/м з блокуванням вхідного потоку / Єлейко Я., Жерновий Ю. // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформатика. – 2009. – Вип. 15. – С. 234-239.
5. Боев В.Д. Моделирование систем. Инструментальные средства GPSS World / Боев В.Д. – Санкт-Петербург, 2004.
6. Жерновий Ю.В. Імітаційне моделювання систем масового обслуговування / Жерновий Ю.В. – Львів, 2007.

OPTIMIZATION OF THE AVERAGE WAITING TIME FOR THE M/M/1/m QUEUES WITH BLOCKING OF AN INPUT FLOW AND SWITCHING OF MODES OF SERVICE

Kostyantyn ZHERNOVYI

*Ivan Franko National University of L'viv,
79000 L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: k_zhernovyi@yahoo.com*

The M/M/1/m queues with threshold blocking of an input flow and with regenerative level of an input flow in which on the blocking period changes intensity of service are studied. For each of queues the problems of optimization of an average waiting time on parameters $\gamma = \mu_1/\mu_2$, h and m , where μ_1 and μ_2 are intensities of service in a usual mode and in a blocking mode accordingly, h is a blocking threshold, are solved.

Key words: the M/M/1/m queues, blocking of an input flow, switching of modes of service, optimization of an average waiting time.

ОПТИМИЗАЦИЯ СРЕДНЕГО ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ ТИПА М/М/1/м С БЛОКИРОВКОЙ ВХОДНОГО ПОТОКА И ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕМ РЕЖИМОВ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Константин ЖЕРНОВИЙ

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000 Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: k_zhernovyi@yahoo.com*

Изучено системы обслуживания $M/M/1/m$ с пороговой блокировкой входного потока и с восстановительным уровнем потока заявок, в которых на период блокировки изменяется интенсивность обслуживания. Для каждой из систем решены задачи оптимизации среднего времени ожидания по параметрам $\gamma = \mu_1/\mu_2$, h и m , где μ_1 , μ_2 – интенсивности обслуживания в обычном режиме и в режиме блокировки, соответственно, h – порог блокировки.

Ключевые слова: система $M/M/1/m$, блокировка входного потока, переключение режимов обслуживания, оптимизация среднего времени ожидания.

Стаття надійшла до редколегії 08.09.2010

Прийнята до друку 22.12.2010

УДК 517.95

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОВИМІРНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЗАГАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

Микола ІВАНЧОВ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000 Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: ivanchov@franko.lviv.ua

Розглянуто обернену задачу визначення залежного від часу невідомого множника старшого коефіцієнта лінійного параболічного рівняння загального вигляду. Знайдено умови існування та єдиності класичного розв'язку. В доведенні використано знайдені в праці оцінки функції Гріна, що залежать від невідомого коефіцієнта.

Ключові слова: обернена задача, параболічне рівняння загального вигляду, функція Гріна.

Розглянуто задачу визначення невідомої функції $a_0 = a_0(t)$ у параболічному рівнянні

$$u_t = a_0(t)a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \quad (1)$$

де $Q_T \equiv \{(x,t) : 0 < x < h, 0 < t < T\}$. У випадку $a(x,t) \equiv 1$ аналогічна обернена задача достатньо повно вивчена як для локальних, так і нелокальних крайових умов [1], [2]. Метод, застосований у цих працях, ґрунтувався на побудові в явному вигляді функції Гріна для рівняння теплопровідності

$$u_t = a_0(t)u_{xx} + f(x,t).$$

У дослідженні оберненої задачі в цій праці використовують функцію Гріна для рівняння (1) та її оцінки.

1. Формулювання задачі. Розглянемо обернену задачу визначення коефіцієнта $a_0(t) > 0, t \in [0, T]$ в рівнянні (1), коли задані початкова умова

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0, h], \quad (2)$$

крайові умови

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(h,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0, T] \quad (3)$$

та додаткова умова

$$a_0(t)u_x(0, t) = \mu_3(t), \quad t \in [0, T]. \quad (4)$$

Розв'язок задачі (1)-(4) розумітимемо у класичному сенсі, вважаючи, що функції $(a_0(t), u(x, t))$ належать до класу $C([0, T]) \times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$, $a_0(t) > 0$, $t \in [0, T]$.

Надалі вважатимемо, що справджуються такі припущення:

(A1): $\varphi \in C^2([0, h])$, $\mu_i \in C^1([0, T])$, $i = 1, 2$, $\mu_3 \in C([0, T])$, функції b , c , f належать до класу $C(\overline{Q}_T)$ і за змінною x задовольняють умову Гельдера з показником β , $0 < \beta < 1$, $a \in H^{\beta, \beta/2}(\overline{Q}_T)$;

(A2): $a(x, t) > 0$, $(x, t) \in \overline{Q}_T$, $\varphi'(0) > 0$, $\mu_3(t) > 0$, $t \in [0, T]$;

(A3): $\varphi(0) = \mu_1(0)$, $\varphi(h) = \mu_2(0)$, $\mu_1'(0) = \frac{\mu_3(0)}{\varphi'(0)}a(0, 0)\varphi''(0) + b(0, 0)\varphi'(0) +$
 $+ c(0, 0)\varphi(0)$, $\mu_2'(0) = \frac{\mu_3(0)}{\varphi'(0)}a(h, 0)\varphi''(h) + b(h, 0)\varphi'(h) + c(h, 0)\varphi(h)$.

2. Зведення задачі (1)-(4) до еквівалентного рівняння. Для побудови розв'язку прямої задачі (1)-(3) зробимо заміну невідомої функції

$$u(x, t) = v(x, t) + \varphi(x) + \mu_1(t) - \mu_1(0) + \frac{x}{h}(\mu_2(t) - \mu_2(0) - \mu_1(t) + \mu_1(0)).$$

Для функції $v = v(x, t)$ отримаємо задачу

$$v_t = a_0(t)a(x, t)v_{xx} + b(x, t)v_x + c(x, t)v + f(x, t) - \mu_1'(t) - \frac{x}{h}(\mu_2'(t) - \mu_1'(t)) +$$

$$+ a_0(t)a(x, t)\varphi''(x) + b(x, t)\left(\varphi'(x) + \frac{1}{h}(\mu_2(t) - \mu_2(0) - \mu_1(t) + \mu_1(0))\right) +$$

$$+ c(x, t)\left(\varphi(x) + \mu_1(t) - \mu_1(0) + \frac{x}{h}(\mu_2(t) - \mu_2(0) - \mu_1(t) + \mu_1(0))\right), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (5)$$

$$v(x, 0) = 0, \quad x \in [0, h], \quad (6)$$

$$v(0, t) = v(h, t) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (7)$$

Вважаючи тимчасово функцію $a_0(t) > 0$, $t \in [0, T]$ відомою, позначимо через $G(x, t, \xi, \tau)$ функцію Гріна задачі (5)-(7) [1]. Розв'язуючи задачу (5)-(7) за допомогою функції Гріна і повертаючись до функції $u(x, t)$, отримуємо розв'язок задачі (1)-(3)

$$u(x, t) = \varphi(x) + \mu_1(t) - \mu_1(0) + \frac{x}{h}(\mu_2(t) - \mu_2(0) - \mu_1(t) + \mu_1(0)) +$$

$$+ \int_0^t \int_0^h G(x, t, \xi, \tau) \left(f(\xi, \tau) - \mu_1'(\tau) - \frac{\xi}{h}(\mu_2'(\tau) - \mu_1'(\tau)) + a_0(\tau)a(\xi, \tau)\varphi''(\xi) + \right.$$

$$+ b(\xi, \tau)\left(\varphi'(\xi) + \frac{1}{h}(\mu_2(\tau) - \mu_2(0) - \mu_1(\tau) + \mu_1(0))\right) + c(\xi, \tau)\left(\varphi(\xi) + \mu_1(\tau) - \right.$$

$$\left. - \mu_1(0) + \frac{\xi}{h}(\mu_2(\tau) - \mu_2(0) - \mu_1(\tau) + \mu_1(0))\right) \Big) d\xi d\tau, \quad (x, t) \in \overline{Q}_T. \quad (8)$$

Звідси знаходимо

$$u_x(0, t) = \varphi'(0) + \frac{1}{h}(\mu_2(t) - \mu_2(0) - \mu_1(t) + \mu_1(0)) +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t \int_0^h G_x(0, t, \xi, \tau) \left(f(\xi, \tau) - \mu'_1(\tau) - \frac{\xi}{h}(\mu'_2(\tau) - \mu'_1(\tau)) + a_0(\tau)a(\xi, \tau)\varphi''(\xi) + \right. \\
& + b(\xi, \tau) \left(\varphi'(\xi) + \frac{1}{h}(\mu_2(\tau) - \mu_2(0) - \mu_1(\tau) + \mu_1(0)) \right) + c(\xi, \tau) \left(\varphi(\xi) + \mu_1(\tau) - \right. \\
& \left. \left. - \mu_1(0) + \frac{\xi}{h}(\mu_2(\tau) - \mu_2(0) - \mu_1(\tau) + \mu_1(0)) \right) \right) d\xi d\tau, \quad (x, t) \in \overline{Q}_T. \quad (9)
\end{aligned}$$

З (9) випливає існування деякого числа t_0 , $0 < t_0 < T$, такого, що на проміжку $[0, t_0]$ будемо мати

$$u_x(0, t) \geq \frac{1}{2} \varphi'(0). \quad (10)$$

Тоді задача (1)-(4) зводиться до рівняння

$$\begin{aligned}
a_0(t) = & \mu_3(t) \left(\varphi'(0) + \frac{1}{h}(\mu_2(t) - \mu_2(0) - \mu_1(t) + \mu_1(0)) + \right. \\
& + \int_0^t \int_0^h G_x(0, t, \xi, \tau) \left(f(\xi, \tau) - \mu'_1(\tau) - \frac{\xi}{h}(\mu'_2(\tau) - \mu'_1(\tau)) + a_0(\tau)a(\xi, \tau)\varphi''(\xi) + \right. \\
& + b(\xi, \tau) \left(\varphi'(\xi) + \frac{1}{h}(\mu_2(\tau) - \mu_2(0) - \mu_1(\tau) + \mu_1(0)) \right) + c(\xi, \tau) \left(\varphi(\xi) + \mu_1(\tau) - \right. \\
& \left. \left. - \mu_1(0) + \frac{\xi}{h}(\mu_2(\tau) - \mu_2(0) - \mu_1(\tau) + \mu_1(0)) \right) \right) d\xi d\tau \Big)^{-1}, \quad t \in [0, t_0]. \quad (11)
\end{aligned}$$

Для дослідження існування розв'язку рівняння (11) використаємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора, застосування якої передбачає наявність апіорних оцінок розв'язків рівняння (11). Їх отримання пов'язане з оцінками функції Гріна.

3. Побудова й оцінки функції Гріна задачі (1)-(3) та її похідної. Відомо [1], що при зроблених припущеннях і відомій функції $a_0 \in C[0, T]$, $a(t) > 0$, $t \in [0, T]$, функція Гріна задачі (1)-(3) існує і може бути побудована методом параметрикса. Проте для отримання оцінок функції Гріна, які б містили залежність від невідомого коефіцієнта $a_0(t)$, проведемо її побудову у два етапи.

Позначимо через $G_0(x, t, \xi, \tau)$ функцію Гріна для рівняння

$$u_t = a_0(t)a(x, t)u_{xx}, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (12)$$

з умовами (2), (3). Після заміни часової змінної $\sigma = \theta(t)$, де $\theta(t) \equiv \int_0^t a_0(\tau)d\tau$, рівняння (12) набуде вигляду

$$v_\sigma = \tilde{a}(x, \sigma)v_{xx}, \quad (13)$$

в якому $v = v(x, \sigma)$ – нова невідома функція, а $\tilde{a}(x, \theta(t)) \equiv a(x, t)$. Для першої похідної функції Гріна $\tilde{G}_0(x, \sigma, \xi, s)$ першої крайової задачі для рівняння (13) справджується оцінка [3, с. 469]

$$\left| \tilde{G}_{0x}(x, \sigma, \xi, s) \right| \leq \frac{C_1}{\sigma - s} \exp \left(-\frac{(x - \xi)^2}{C_2(\sigma - s)} \right).$$

Звідси, повертаючись до старих змінних, отримуємо

$$|G_{0x}(x, t, \xi, \tau)| \leq \frac{C_1}{\theta(t) - \theta(\tau)} \exp\left(-\frac{(x - \xi)^2}{C_2(\theta(t) - \theta(\tau))}\right), \quad (14)$$

де $\theta(t) = \int_0^t a_0(y)dy$.

Функцію Гріна $G(x, t, \xi, \tau)$ першої крайової задачі для рівняння (1) будемо шукати у вигляді

$$G(x, t, \xi, \tau) = G_0(x, t, \xi, \tau) + \int_{\tau}^t \int_0^h G_0(x, t, \eta, \sigma) \Phi(\eta, \sigma, \xi, \tau) d\eta d\sigma, \quad (15)$$

де $\Phi(x, t, \xi, \tau)$ – невідома функція, для знаходження якої отримуємо рівняння [1]

$$\Phi(x, t, \xi, \tau) = -LG_0(x, t, \xi, \tau) - \int_{\tau}^t \int_0^h LG_0(x, t, \eta, \sigma) \Phi(\eta, \sigma, \xi, \tau) d\eta d\sigma, \quad (16)$$

в якому

$$L \equiv \frac{\partial}{\partial t} - a_0(t)a(x, t)\frac{\partial^2}{\partial x^2} - b(x, t)\frac{\partial}{\partial x} - c(x, t).$$

З означення функції $G_0(x, t, \xi, \tau)$ випливає, що

$$LG_0(x, t, \xi, \tau) = -b(x, t)G_{0x}(x, t, \xi, \tau) - c(x, t)G_0(x, t, \xi, \tau).$$

Вважаючи відомою оцінку

$$a_0(t) \leq A_1 < \infty, \quad t \in [0, T],$$

з (14) отримуємо

$$|LG_0(x, t, \xi, \tau)| \leq \frac{C_3}{\theta(t) - \theta(\tau)} \exp\left(-\frac{(x - \xi)^2}{C_2(\theta(t) - \theta(\tau))}\right). \quad (17)$$

Введемо позначення

$$a_{\min}(t) \equiv \min_{0 \leq \tau \leq t} a_0(\tau).$$

Тоді оцінка (17) набуде вигляду

$$|LG_0(x, t, \xi, \tau)| \leq \frac{C_3}{a_{\min}(t)(t - \tau)} \exp\left(-\frac{(x - \xi)^2}{C_4(t - \tau)}\right). \quad (18)$$

Застосуємо до рівняння (16) метод послідовних наближень. Тоді його розв'язок набуде вигляду

$$\Phi(x, t, \xi, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} (LG_0(x, t, \xi, \tau))_n, \quad (19)$$

де повторні ядра визначаються так:

$$(LG_0(x, t, \xi, \tau))_0 = -LG_0(x, t, \xi, \tau),$$

$$(LG_0(x, t, \xi, \tau))_n = - \int_{\tau}^t \int_0^h LG_0(x, t, \eta, \sigma) (LG_0(\eta, \sigma, \xi, \tau))_{n-1} d\eta d\sigma, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для оцінки повторних ядер застосуємо таку лему.

Лема 3 [4, с. 69]. Якщо $-\infty < \alpha < \frac{n}{2}$, $-\infty < \beta < \frac{n}{2}$, то

$$\begin{aligned} & \int_{\sigma}^t \int_{\mathbb{R}^n} (t-\tau)^{-\alpha} \exp \left[-\frac{h|x-\xi|^2}{4(t-\tau)} \right] (\tau-\sigma)^{-\beta} \exp \left[-\frac{h|\xi-y|^2}{4(\tau-\sigma)} \right] d\xi d\tau = \\ & = \left(\frac{4\pi}{h} \right)^{\frac{n}{2}} B \left(\frac{n}{2} - \alpha + 1, \frac{n}{2} - \beta + 1 \right) (t-\sigma)^{\frac{n}{2}+1-\alpha-\beta} \exp \left[-\frac{h|x-y|^2}{4(t-\sigma)} \right]. \end{aligned}$$

Використовуючи лему 3, отримуємо

$$\begin{aligned} |(LG_0(x, t, \xi, \tau))_1| & \leq \frac{C_3^2 C_5}{a_{\min}^2(t) \sqrt{t-\tau}} \left(\Gamma \left(\frac{1}{2} \right) \right)^2 \exp \left(-\frac{|x-\xi|^2}{C_4(t-\tau)} \right), \\ |(LG_0(x, t, \xi, \tau))_2| & \leq \frac{C_3^3 C_5^2}{a_{\min}^3(t) \Gamma \left(\frac{3}{2} \right)} \left(\Gamma \left(\frac{1}{2} \right) \right)^3 \exp \left(-\frac{|x-\xi|^2}{C_4(t-\tau)} \right), \\ |(LG_0(x, t, \xi, \tau))_n| & \leq \frac{C_3^{n+1} C_5^n (t-\tau)^{n/2-1}}{a_{\min}^{n+1}(t) \Gamma \left(\frac{n+1}{2} \right)} \left(\Gamma \left(\frac{1}{2} \right) \right)^{n+1} \exp \left(-\frac{|x-\xi|^2}{C_4(t-\tau)} \right), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Звідси випливає оцінка

$$\begin{aligned} & |\Phi(x, t, \xi, \tau)| \leq \\ & \leq \frac{C_3 \Gamma \left(\frac{1}{2} \right)}{a_{\min}(t)(t-\tau)} \exp \left(-\frac{|x-\xi|^2}{C_4(t-\tau)} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{C_3 C_5 \Gamma \left(\frac{1}{2} \right) \sqrt{t-\tau}}{a_{\min}(t)} \right)^n \frac{1}{\Gamma \left(\frac{n+1}{2} \right)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Зважаючи на те, що при $n = 2k$ одержуємо

$$\Gamma \left(\frac{n+1}{2} \right) = \Gamma \left(k + \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^k} (2k-1)!!,$$

а при $n = 2k+1$

$$\Gamma \left(\frac{n+1}{2} \right) = \Gamma(k+1) = k!,$$

знаходимо

$$|\Phi(x, t, \xi, \tau)| \leq \frac{C_6}{a_{\min}^2(t)(t-\tau)} \exp \left(-\frac{(x-\xi)^2}{C_4(t-\tau)} + \frac{C_7}{a_{\min}^2(t)} \right). \quad (21)$$

Використовуючи оцінку (21) та застосовуючи наведену лему 3 [4], з (16) отримуємо оцінку функції Гріна першої крайової задачі для рівняння (1)

$$G(x, t, \xi, \tau) \leq \left(\frac{C_8}{\sqrt{a_{\min}(t)(t-\tau)}} + \frac{C_9}{a_{\min}^{5/2}(t)} \exp \left(\frac{C_7}{a_{\min}^2(t)} \right) \right) \exp \left(-\frac{(x-\xi)^2}{C_4(t-\tau)} \right). \quad (22)$$

Аналогічно оцінюємо похідну функції Гріна

$$\begin{aligned} & |G_x(x, t, \xi, \tau)| \leq \\ & \leq \left(\frac{C_{10}}{a_{\min}(t)(t-\tau)} + \frac{C_{11}}{a_{\min}^3(t) \sqrt{t-\tau}} \exp \left(\frac{C_7}{a_{\min}^2(t)} \right) \right) \exp \left(-\frac{(x-\xi)^2}{C_4(t-\tau)} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

4. Існування розв'язку задачі (1)-(4). Знайдемо апріорні оцінки розв'язків рівняння (11). Враховуючи (10), з рівняння (11) отримуємо

$$a_0(t) \leq A_1 < \infty, \quad t \in [0, t_0], \quad (24)$$

де число A_1 визначається заданими величинами.

Використовуючи оцінку похідної функції Гріна (23), з рівняння (11) знаходимо

$$a_{\min}(t) \geq C_{12} \left(C_{13} + \int_0^t \int_0^h \left(\frac{C_{14}}{a_{\min}(t)(t-\tau)} + \frac{C_{15}}{a_{\min}^2(t)\sqrt{t-\tau}} \exp\left(\frac{C_7}{a_{\min}^2(t)}\right) \right) \times \right. \\ \left. \times \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{C_4(t-\tau)}\right) d\xi d\tau \right)^{-1}, \quad t \in [0, t_0].$$

Звідси з врахуванням оцінки

$$\frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \int_0^h \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{C_4(t-\tau)}\right) d\xi \leq C_{16}$$

впливає нерівність

$$C_{13}a_{\min}(t) + C_{17}\sqrt{t} + \frac{C_{18}t}{a_{\min}(t)} \exp\left(\frac{C_7}{a_{\min}^2(t)}\right) - C_{12} \geq 0, \quad t \in [0, t_0]. \quad (25)$$

Нехай число t_1 , $0 < t_1 \leq T$, таке, що виконується нерівність

$$C_{17}\sqrt{t} + \frac{C_{18}t}{a_{\min}(t)} \exp\left(\frac{C_7}{a_{\min}^2(t)}\right) \leq \frac{1}{2}C_{12}, \quad t \in [0, t_1]. \quad (26)$$

Тоді з (25) отримуємо оцінку

$$a_{\min}(t) \geq A_0 > 0, \quad t \in [0, t_1],$$

або

$$a(t) \geq A_0 > 0, \quad t \in [0, t_1], \quad (27)$$

де число A_0 визначається відомими величинами.

Для застосування теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора до рівняння (11) розглянемо множину $\mathcal{N} \equiv \{a \in C[0, T_0] : A_0 \leq a(t) \leq A_1\}$, де $T_0 = \min\{t_0, t_1\}$, і подамо рівняння (11) у вигляді

$$a(t) = Pa(t). \quad (28)$$

Внаслідок оцінок (24), (27) оператор P переводить опуклу й замкнену множину $\mathcal{N}$ в себе. Те, що оператор P є цілком неперервним на множині $\mathcal{N}$, доведено в [5]. Тому існує принаймні одна нерухома точка оператора P , що належить множині $\mathcal{N}$. Це означає, що існує розв'язок $(a(t), u(x, t))$ задачі (1)-(4), визначений при $x \in [0, h]$, $t \in [0, T_0]$. Отже, доведено таку теорему.

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються умови (A1)-(A3). Тоді існує розв'язок $(a(t), u(x, t))$ задачі (1)-(4), що належить до класу $C([0, T_0]) \times C^{2,1}(\overline{Q}_{T_0})$.*

Теорема 1 доводить існування розв'язку задачі (1)-(4), локального за часом. Умови існування глобального за часом розв'язку задачі (1)-(4) дає така теорема.

Теорема 2. Припустимо, що, крім умов (A1), (A3), виконується умова

(A4): $\varphi''(x) \geq 0$, $x \in [0, h]$; $\mu_3(t) > 0$, $b(0, t) < 0$, $b(h, t) > 0$, $\varphi'(0) + \frac{1}{h}(\mu_2(t) - \mu_2(0) - \mu_1(t) + \mu_1(0)) > 0$, $\mu'_1(t) - c(0, t)\mu_1(t) - f(0, t) < 0$, $\mu'_2(t) - c(h, t)\mu_2(t) - f(h, t) > 0$, $t \in [0, T]$; $a(x, t) > 0$, $f(x, t) - \mu'_1(t) - \frac{x}{h}(\mu'_2(t) - \mu'_1(t)) + b(x, t)(\varphi'(x) + \frac{1}{h}(\mu_2(t) - \mu_2(0) - \mu_1(t) + \mu_1(0))) + c(x, t)(\varphi(x) + \mu_1(t) - \mu_1(0) + \frac{x}{h}(\mu_2(t) - \mu_2(0) - \mu_1(t) + \mu_1(0))) \geq 0$, $(x, t) \in \overline{Q}_T$.

Тоді існує розв'язок $(a(t), u(x, t))$ задачі (1)-(4), що належить до класу $C([0, T]) \times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$.

Доведення. З того, що $G(0, t, \xi, \tau) = 0$ та $G(x, t, \xi, \tau) > 0$, $x \in (0, h)$, $\xi \in (0, h)$, $0 < \tau < t < T$, отримуємо $G_x(0, t, \xi, \tau) \geq 0$, $\xi \in (0, h)$, $0 < \tau < t < T$. Тому з припущень (A4) та рівності (9) випливає оцінка

$$u_x(0, t) \geq M_1 > 0, \quad t \in [0, T], \quad (29)$$

де стала M_1 визначається вихідними даними.

Для того, щоб оцінити $u_x(x, t)$ зверху, утворимо задачу стосовно функції $v(x, t) \equiv u_x(x, t)$. Для цього продиференціюємо за змінною x рівняння (1) та початкову умову (2). Крайові умови для функції $v(x, t)$ знайдемо з рівняння (1) та крайових умов (3). Внаслідок цього отримуємо таку задачу стосовно $v(x, t)$:

$$v_t = a_0(t)a(x, t)v_{xx} + (b(x, t) + a_0(t)a_x(x, t))v_x + (c(x, t) + b_x(x, t))v + c_x(x, t)u + f_x(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (30)$$

$$v(x, 0) = \varphi'(x), \quad x \in [0, h], \quad (31)$$

$$a_0(t)a(0, t)v_x(0, t) + b(0, t)v(0, t) = \mu'_1(t) - c(0, t)\mu_1(t) - f(0, t), \quad t \in [0, T], \quad (32)$$

$$a_0(t)a(h, t)v_x(h, t) + b(h, t)v(h, t) = \mu'_2(t) - c(h, t)\mu_2(t) - f(h, t), \quad t \in [0, T]. \quad (33)$$

Застосовуючи принцип максимуму [4] спочатку до задачі (1)-(3), а потім до (30)-(33), доводимо оцінку

$$u_x(0, t) \leq M_2 < \infty, \quad t \in [0, T], \quad (34)$$

в якій стала M_2 визначається вихідними даними. Після отримання оцінок (29), (34) для доведення теореми 2 достатньо повторити міркування, наведені в доведенні теореми 1. $\square$

5. Єдиність розв'язку задачі (1)-(4).

Теорема 3. Припустимо, що виконується умова $\mu_3(t) \neq 0$, $t \in [0, T]$. Тоді задача (1)-(4) не може мати більше одного розв'язку $(a_0(t), u(x, t))$ з класу $C([0, T]) \times C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$ такого, що $a_0(t) > 0$, $t \in [0, T]$.

Доведення. Припустимо, що задача (1)-(4) має два розв'язки $(a_{0,k}(t), u_k(x, t))$, $k = 1, 2$, з класу $C([0, T]) \times C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$. Позначимо $a_0(t) \equiv a_{0,1}(t) - a_{0,2}(t)$, $u(x, t) \equiv u_1(x, t) - u_2(x, t)$. З (1)-(4) випливає, що пара функцій $(a_0(t), u(x, t))$ є

розв'язком такої задачі:

$$u_t = a_{0,1}(t)a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + a_0(t)u_{2_{xx}}(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \quad (35)$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in [0,h], \quad (36)$$

$$u(0,t) = u(h,t) = 0, \quad t \in [0,T], \quad (37)$$

$$a_{0,1}(t)u_x(0,t) = -a_0(t)u_{2_x}(0,t), \quad t \in [0,T]. \quad (38)$$

Позначимо через $G^*(x,t,\xi,\tau)$ функцію Гріна задачі (35)-(37). Тоді розв'язок задачі (35)-(37) набуде вигляду

$$u(x,t) = \int_0^t \int_0^h G^*(x,t,\xi,\tau) a_0(\tau) a(\xi,\tau) u_{2_{\xi\xi}}(\xi,\tau) d\xi d\tau, \quad (x,t) \in \overline{Q}_T. \quad (39)$$

Підставимо його в умову (38)

$$a_0(t)u_{2_x}(0,t) = -a_{0,1}(t) \int_0^t \int_0^h G_x^*(0,t,\xi,\tau) a_0(\tau) a(\xi,\tau) u_{2_{\xi\xi}}(\xi,\tau) d\xi d\tau, \quad (x,t) \in \overline{Q}_T. \quad (40)$$

З умови теореми випливає, що $u_{2_x}(0,t) \neq 0$, $t \in [0,T]$. Тому (40) є однорідним інтегральним рівнянням Вольтерра другого роду, яке має єдиний тривіальний розв'язок $a_0(t) \equiv 0$, $t \in [0,T]$. Підставляючи його в рівняння (35), отримуємо однорідне рівняння з однорідними умовами (36), (37). Отже, $u(x,t) \equiv 0$, $(x,t) \in \overline{Q}_T$. Теорему доведено. $\square$

-
1. *Ivancho M.* Inverse problems for equations of parabolic type / *Ivancho M.* – Lviv, 2003.
 2. *Березницька І.Б.* Обернена задача для параболічного рівняння з нелокальною умовою перевизначення / *Березницька І.Б.* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – Т. 44, №1. – С. 54-62.
 3. *Ладыженская О.А.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / *Ладыженская О.А., Уралъцева Н.Н., Солонников В.А.* – М., 1967.
 4. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа / *Фридман А.* – М., 1968.
 5. *Снітко Г.А.* Обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею / *Снітко Г.А.* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – Т. 50, №4. – С. 7-18.

AN INVERSE PROBLEM FOR A GENERAL ONE-DIMENSIONAL PARABOLIC EQUATION

Mykola IVANCHOV

*Ivan Franko National University of L'viv,
79000 L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: ivancho@franko.lviv.ua*

In the paper we consider an inverse problem for determining a time-dependent unknown multiplier of the major coefficient of a general linear parabolic equation. The conditions for existence and uniqueness of the classical solution are found. In the proof the estimates of the Green function which depend on the unknown coefficient and which are established in this work, are applied.

Key words: inverse problem, general parabolic equation, Green function.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ОБЩЕГО ВИДА

Николай ИВАНЧОВ

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000 Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: ivanchov@franko.lviv.ua*

Рассмотрено обратную задачу определения зависящего от времени неизвестного множителя старшего коэффициента линейного параболического уравнения общего вида. Найдено условия существования и единственности классического решения. В доказательстве использованы установленные в работе оценки функции Грина, зависящие от неизвестного коэффициента.

Ключевые слова: обратная задача, параболическое уравнение общего вида, функция Грина.

Стаття надійшла до редколегії 13.04.2010

Прийнята до друку 22.12.2010

УДК 517.53

ПРО БАГАТОЧЛЕННУ СТЕПЕНЕВУ АСИМПТОТИКУ
ЛОГАРИФМА МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА
ЦІЛОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ

Любомира ЛУГОВА¹, Мирослав ШЕРЕМЕТА²

¹Інститут підприємництва та перспективних технологій,
79044 Львів, вул. Горбачевського, 18
e-mail: Lyubomyrka@ukr.net

²Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000 Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: M_M_Sheremeta@list.ru

Для цілого ряду Діріхле $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}$ ($s = \sigma + it$) досліджено умови на a_n і λ_n , за яких логарифм його максимального члена має асимптотику $\ln \mu(\sigma) = \sum_{j=1}^m T_j \sigma^{p_j} + (1 + o(1))\tau \sigma^p$, $\sigma \rightarrow +\infty$, де $T_1 > 0$, $p_1 > 1$, $p > 2p_2 - p_1$, $T_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ і $0 < p < p_m < \dots < p_2 < p_1$.

Ключові слова: ряд Діріхле, максимальний член ряду, багаточленна асимптотика.

1. Вступ. Нехай (λ_n) – зростаюча до $+\infty$ послідовність невід’ємних чисел, ряд Діріхле $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}$ ($s = \sigma + it$) має абсцису абсолютної збіжності $\sigma_a = +\infty$, а $\mu(\sigma) = \max\{|a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} : n \geq 0\}$ – його максимальний член.

Зв’язок між зростанням функції $\mu(\sigma)$ і спаданням послідовності a_n у тій чи іншій шкалі зростання вивчали багато математиків. У термінах двочленних степеневих та показникової асимптотик такий зв’язок отримано в [1] – [2]. Тричленну степеневу асимптотику логарифма максимального члена цілого ряду Діріхле досліджено в [3], де, зокрема, доведено таке твердження.

Теорема А. Нехай $T_1 > 0$, $T_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $p_1 > 1$, $0 < p < p_2 < p_1$, і $p > 2p_2 - p_1$. Тоді для того, щоб

$$\ln \mu(\sigma) = T_1 \sigma^{p_1} + T_2 \sigma^{p_2} + (1 + o(1))\tau \sigma^p, \quad \sigma \rightarrow +\infty,$$

необхідно і достатньо, щоб для кожного $\varepsilon > 0$:

1) існувало $n_0 = n_0(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n \geq n_0$

$$\ln |a_n| \leq -T_1(p_1 - 1) \left(\frac{\lambda_n}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_1}{p_1-1}} + T_2 \left(\frac{\lambda_n}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_2}{p_1-1}} + (\tau + \varepsilon) \left(\frac{\lambda_n}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p}{p_1-1}};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$$\ln |a_{n_k}| \geq -T_1(p_1 - 1) \left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_1}{p_1-1}} + T_2 \left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_2}{p_1-1}} + (\tau - \varepsilon) \left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p}{p_1-1}}$$

i

$$\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o \left(\lambda_{n_k}^{\frac{p_1+p-2}{2(p_1-1)}} \right), \quad k \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Мета нашої праці – дослідити умови на a_n і λ_n , за яких

$$\ln \mu(\sigma) = \sum_{j=1}^m T_j \sigma^{p_j} + (1 + o(1)) \tau \sigma^p, \quad \sigma \rightarrow +\infty, \quad (2)$$

де, як вище, $T_1 > 0$, $p_1 > 1$, $p > 2p_2 - p_1$, $T_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, і $0 < p < p_m < \dots < p_2 < p_1$. Зауважимо, що подібну задачу у термінах багаточленної показникової асимптотики розв'язано в [4].

2. Основна лема. Для дослідження умов, за яких правильне співвідношення (2), нам будуть потрібні деякі результати з праць [5]–[7].

Нехай $\Omega(+\infty)$ – клас додатних на $(-\infty, +\infty)$ функцій Φ таких, що похідні Φ' неперервно диференційовні, додатні і зростають до $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$. Через φ позначатимемо функцію, обернену до Φ' , і нехай $\Psi(\sigma) = \sigma - \Phi(\sigma)/\Phi'(\sigma)$ – функція, асоційована з Φ за Ньютоном.

Лема 1 ([5], [6]). Нехай $\Phi \in \Omega(+\infty)$. Для того, щоб $\ln \mu(\sigma, F) \leq \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \geq \sigma_0$ необхідно і достатньо, щоб $\ln |a_n| \leq -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всіх $n \geq n_0$.

Для $\Phi \in \Omega(+\infty)$ і $0 < a < b < +\infty$ приймемо

$$G_1(a, b, \Phi) = \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{\Phi(\varphi(t))}{t^2} dt, \quad G_2(a, b, \Phi) = \Phi \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(t) dt \right).$$

Лема 2 ([6], [7]). $G_1(a, b, \Phi) < G_2(a, b, \Phi)$.

Лема 3 ([6]). Нехай $\Phi \in \Omega(+\infty)$ і $\ln |a_{n_k}| \geq -\lambda_{n_k} \Psi(\varphi(\lambda_{n_k}))$ для деякої зростаючої послідовності (n_k) натуральних чисел. Тоді для всіх $\sigma \in [\varphi(\lambda_{n_k}), \varphi(\lambda_{n_{k+1}})]$ і всіх $k \geq k_0$ правильна нерівність

$$\ln \mu(\sigma, F) \geq \Phi(\sigma) - (G_2(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi) - G_1(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi)). \quad (3)$$

Лема 4 ([6]). Нехай $\Phi_1 \in \Omega(+\infty)$, $\Phi_2 \in \Omega(+\infty)$ і для всіх $\sigma \geq \sigma_0$

$$\Phi_1(\sigma) \leq \ln \mu(\sigma, F) \leq \Phi_2(\sigma). \quad (4)$$

Тоді

$$\ln |a_n| \leq -\lambda_n \Psi_2(\varphi_2(\lambda_n)), \quad n \geq n_0, \quad (5)$$

та існує зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$$\ln |a_{n_k}| \geq -\lambda_{n_k} \Psi_1(\varphi_1(\lambda_{n_k})) \quad (6)$$

i

$$G_1(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi_2) \geq \Phi_1 \left(\frac{1}{\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}} \int_{\lambda_{n_k}}^{\lambda_{n_{k+1}}} \varphi_2(t) dt \right), \quad (7)$$

де Ψ_j і φ_j побудовані відповідно для Φ_j .

Як видно з наведених вище результатів, важливою для наших досліджень є така (основна) лема.

Лема 5. Нехай функція $\Phi \in \Omega(+\infty)$ така, що

$$\Phi(\sigma) = T_1 \sigma^{p_1} + \sum_{j=2}^m T_j \sigma^{p_j} + \tau \sigma^p \quad (\sigma \geq \sigma_0), \quad (8)$$

де $T_1 > 0$, $p_1 > 1$, $p > p_2 > \dots > p_m > p > \max\{0, 2p_2 - p_1\}$, $T_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, для $2 \leq j \leq m$ і $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тоді при $x \rightarrow +\infty$

$$\varphi(x) = \left(\frac{x}{T_1 p_1} \right)^{\frac{1}{p_1-1}} - \sum_{j=2}^m \frac{T_j p_j}{T_1 p_1 (p_1 - 1)} \left(\frac{x}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_j - p_1 + 1}{p_1 - 1}} - \frac{(1 + o(1)) \tau p}{T_1 p_1 (p_1 - 1)} \left(\frac{x}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p - p_1 + 1}{p_1 - 1}}. \quad (9)$$

Доведення. Оскільки функція $\varphi(x)$ є оберненою до Φ' , то для її знаходження треба знайти розв'язок рівняння

$$T_1 p_1 \sigma^{p_1-1} + \sum_{j=2}^m T_j p_j \sigma_j^{p_j-1} + \tau p \sigma^p = x. \quad (10)$$

Легко побачити, що розв'язок цього рівняння треба шукати у вигляді

$$\varphi(x) = \left(\frac{x}{T_1 p_1} \right)^{\frac{1}{p_1-1}} - \alpha, \quad (11)$$

де $\alpha = \alpha(x) = o\left(x^{\frac{1}{p_1-1}}\right)$, $x \rightarrow +\infty$. Підставляючи (11) у (10), отримуємо

$$\begin{aligned} & \left(1 - \alpha \left(\frac{T_1 p_1}{x} \right)^{\frac{1}{p_1-1}} \right)^{p_1-1} + \sum_{j=2}^m \frac{T_j p_j}{T_1 p_1} \left(\frac{x}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_j - p_1}{p_1 - 1}} \left(1 - \alpha \left(\frac{T_1 p_1}{x} \right)^{\frac{1}{p_1-1}} \right)^{p_j-1} + \\ & + \frac{\tau p}{T_1 p_1} \left(\frac{x}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p - p_1}{p_1 - 1}} \left(1 - \alpha \left(\frac{T_1 p_1}{x} \right)^{\frac{1}{p_1-1}} \right)^{p-1} = 1. \end{aligned} \quad (12)$$

Оскільки $\alpha(x) = o\left(x^{\frac{1}{p_1-1}}\right)$, $x \rightarrow +\infty$, то з (12) випливає, що

$$1 - (p_1 - 1) \alpha \left(\frac{T_1 p_1}{x} \right)^{\frac{1}{p_1-1}} (1 + o(1)) + \frac{T_2 p_2}{T_1 p_1} \left(\frac{x}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_2 - p_1}{p_1 - 1}} (1 + o(1)) = 1,$$

тобто

$$\alpha(x) = \frac{T_2 p_2}{T_1 p_1 (p_1 - 1)} \left(\frac{x}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_2 - p_1 + 1}{p_1 - 1}} + \beta(x), \quad (13)$$

де $\beta(x) = o\left(x^{\frac{p_2 - p_1 + 1}{p_1 - 1}}\right)$, $x \rightarrow +\infty$. Підставляючи (13) в (12), одержуємо

$$1 - (p_1 - 1) \frac{T_2 p_2}{T_1 p_1 (p_1 - 1)} \left(\frac{x}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_2 - p_1 + 1}{p_1 - 1}} - (p_1 - 1) \beta(x) \left(\frac{T_1 p_1}{x} \right)^{\frac{1}{p_1 - 1}} + O \left(x^{\frac{2(p_2 - p_1)}{p_1 - 1}} \right) +$$

$$+ \frac{T_2 p_2}{T_1 p_1} \left(\frac{x}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_2 - p_1 + 1}{p_1 - 1}} + O \left(x^{\frac{2(p_2 - p_1)}{p_1 - 1}} \right) + \sum_{j=3}^m \frac{T_j p_j}{T_1 p_1} \left(\frac{x}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_j - p_1}{p_1 - 1}} + \frac{\tau p}{T_1 p_1} \left(\frac{x}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p - p_1}{p_1 - 1}} = 1$$

і, оскільки $2(p_2 - p_1) < p - p_1$, то

$$\beta(x) = \sum_{j=3}^m \frac{T_j p_j}{T_1 p_1 (p_1 - 1)} \left(\frac{x}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_j - p_1 + 1}{p_1 - 1}} + \frac{(1 + o(1)) \tau p}{T_1 p_1 (p_1 - 1)} \left(\frac{x}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p - p_1 + 1}{p_1 - 1}}, \quad x \rightarrow +\infty,$$

тобто з (11) і (13) випливає (9). Лему 5 доведено. $\square$

Оскільки $(x\Psi(\varphi(x)))' = \varphi(x)$, то $x\Psi(\varphi(x)) = \int_{x_0}^x \varphi(t)dt + const$. Тому з (9) маємо

$$x\Psi(\varphi(x)) = T_1(p_1 - 1) \left(\frac{x}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_1}{p_1 - 1}} - \sum_{j=2}^m T_j \left(\frac{x}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_j}{p_1 - 1}} -$$

$$-(1 + o(1)) \tau \left(\frac{x}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p}{p_1 - 1}}, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (14)$$

3. Асимптотичне поведження $G_1(t_k, t_{k+1}, \Phi)$ і $G_2(t_k, t_{k+1}, \Phi)$. Легко перевірити, що $\Phi(\varphi(x)) = x\varphi(x) - x\Psi(\varphi(x)) = x\varphi(x) - \int_{x_0}^x \varphi(t)dt + const$, і з (9) випливає, що

$$\Phi(\varphi(x)) = T_1 \left(\frac{x}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_1}{p_1 - 1}} - \sum_{j=2}^m \frac{T_j(p_j - p_1 + 1)}{p_1 - 1} \left(\frac{x}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_j}{p_1 - 1}} -$$

$$-(1 + o(1)) \frac{\tau(p - p_1 + 1)}{p_1 - 1} \left(\frac{x}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p}{p_1 - 1}}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Тому, якщо $t_k \uparrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$) і $t_{k+1} = (1 + \theta_n)t_k$, то

$$G_1(t_k, (1 + \theta_k)t_k, \Phi) = T_1(p_1 - 1) \left(\frac{t_k}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_1}{p_1 - 1}} \frac{1 + \theta_k}{\theta_k} \left((1 + \theta_k)^{\frac{1}{p_1 - 1}} - 1 \right) -$$

$$- \sum_{j=2}^m T_j \left(\frac{t_k}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_j}{p_1 - 1}} \frac{1 + \theta_k}{\theta_k} \left((1 + \theta_k)^{\frac{p_j - p_1 + 1}{p_1 - 1}} - 1 \right) -$$

$$-(1 + o(1)) \tau \left(\frac{t_k}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p}{p_1 - 1}} \frac{1 + \theta_k}{\theta_k} \left((1 + \theta_k)^{\frac{p - p_1 + 1}{p_1 - 1}} - 1 \right), \quad k \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Якщо $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \theta_k = +\infty$, то для відповідної послідовності (k_j) з (15) одержуємо

$$G_1(t_{k_j}, (1 + \theta_{k_j})t_{k_j}, \Phi) = (1 + o(1)) T_1(p_1 - 1) \left(\frac{t_{k_j}}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_1}{p_1 - 1}} \theta_{k_j}^{\frac{1}{p_1 - 1}}, \quad j \rightarrow \infty, \quad (16)$$

якщо $\overline{\lim_{k \rightarrow \infty}} \theta_k = \theta \in (0, +\infty)$, то для відповідної послідовності (k_j) при $j \rightarrow \infty$

$$G_1(t_{k_j}, (1+\theta_{k_j})t_{k_j}, \Phi) = (1+o(1))T_1(p_1-1) \left(\frac{t_{k_j}}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_1}{p_1-1}} \frac{1+\theta}{\theta} \left((1+\theta)^{\frac{1}{p_1-1}} - 1 \right). \quad (17)$$

Якщо ж $\theta_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$), то з (15) отримуємо

$$\begin{aligned} G_1(t_k, (1+\theta_k)t_k, \Phi) &= T_1(p_1-1) \left(\frac{t_k}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_1}{p_1-1}} \frac{1+\theta_k}{\theta_k} \left(1 + \frac{1}{p_1-1} \theta_k + \frac{2-p_1}{2(p_1-1)^2} \theta_k^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(2-p_1)(3-2p_1)}{6(p_1-1)^3} \theta_k^3 + O(\theta_k^4) - 1 \right) - \\ &- \sum_{j=2}^m T_j \left(\frac{t_k}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_j}{p_1-1}} \frac{1+\theta_k}{\theta_k} \left(1 + \frac{p_j-p_1+1}{p_1-1} \theta_k + \frac{p_j-2p_1+2}{2(p_1-1)^2} \theta_k^2 + O(\theta_k^3) - 1 \right) - \\ &- (1+o(1)) \tau \left(\frac{t_k}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p}{p_1-1}} \frac{1+\theta_k}{\theta_k} \left(1 + \frac{p-p_1+1}{p_1-1} \theta_k + O(\theta_k^2) - 1 \right) = \\ &= T_1 \left(\frac{t_k}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_1}{p_1-1}} + \frac{T_1 p_1}{2(p_1-1)} \theta_k \left(\frac{t_k}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_1}{p_1-1}} + \frac{T_1 p_1 (2-p_1)}{6(p_1-1)^2} \theta_k^2 \left(\frac{t_k}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_1}{p_1-1}} - \\ &- \sum_{j=2}^m \frac{T_j (p_j-p_1+1)}{p_1-1} \left(\frac{t_k}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_j}{p_1-1}} - \sum_{j=2}^m \frac{T_j p_j (p_j-p_1+1)}{2(p_1-1)^2} \theta_k \left(\frac{t_k}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_j}{p_1-1}} - \\ &- (1+o(1)) \frac{\tau(p-p_1+1)}{p_1-1} \left(\frac{t_k}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p}{p_1-1}} + O \left(\theta_k^3 t_k^{\frac{p_1}{p_1-1}} \right) + O \left(\theta_k^2 t_k^{\frac{p_1}{p_1-1}} \right), \quad k \rightarrow \infty. \quad (18) \end{aligned}$$

Перейдемо до $G_2(t_k, t_{k+1}, \Phi)$. Позначимо

$$\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi) = \frac{1}{t_{k+1} - t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi(t) dt.$$

Тоді, використовуючи лему 1, при $k \rightarrow \infty$ одержуємо

$$\begin{aligned} \varkappa(t_k, (1+\theta_k)t_k, \Phi) &= \frac{p_1-1}{p_1} \left(\frac{t_k}{T_1 p_1} \right)^{\frac{1}{p_1-1}} \frac{(1+\theta_k)^{\frac{p_1}{p_1-1}} - 1}{\theta_k} - \sum_{j=2}^m \frac{T_j}{T_1 p_1} \times \\ &\times \left(\frac{t_k}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_j-p_1+1}{p_1-1}} \frac{(1+\theta_k)^{\frac{p_j}{p_1-1}} - 1}{\theta_k} - \frac{(1+o(1))\tau}{T_1 p_1} \left(\frac{t_k}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p-p_1+1}{p_1-1}} \frac{(1+\theta_k)^{\frac{p}{p_1-1}} - 1}{\theta_k}, \quad (19) \end{aligned}$$

і, оскільки $G_2(t_k, t_{k+1}, \Phi) = \Phi(\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi)) = (1+o(1))T_1 \varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi)^{p_1}$, $k \rightarrow \infty$, то, якщо $\overline{\lim_{k \rightarrow \infty}} \theta_k = +\infty$, то для відповідної послідовності (k_j) отримаємо

$$G_2(t_{k_j}, (1+\theta_{k_j})t_{k_j}, \Phi) = (1+o(1)) \left(\frac{p_1-1}{p_1} \right)^{p_1} \left(\frac{t_{k_j}}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_1}{p_1-1}} \theta_{k_j}^{\frac{p_1}{p_1-1}}, \quad j \rightarrow \infty, \quad (20)$$

якщо $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \theta_k = \theta \in (0, +\infty)$, то для відповідної послідовності (k_j) з (19) отримуємо

$$G_2(t_{k_j}, (1 + \theta_{k_j})t_{k_j}, \Phi) = (1 + o(1)) \left(\frac{p_1 - 1}{p_1} \right)^{p_1} \left(\frac{t_{k_j}}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_1}{p_1 - 1}} \left(\frac{(1 + \theta)^{\frac{p_1}{p_1 - 1}} - 1}{\theta} \right)^{p_1}, \quad (21)$$

$j \rightarrow \infty$. Якщо ж $\theta_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$), то з (19), як звичайно, одержуємо

$$\begin{aligned} \varkappa(t_k, (1 + \theta_k)t_k, \Phi) &= \left(\frac{t_k}{T_1 p_1} \right)^{\frac{1}{p_1 - 1}} \left\{ 1 + \frac{\theta_k}{2(p_1 - 1)} + \frac{2 - p_1}{6(p_1 - 1)^2} \theta_k^2 + O(\theta_k^3) - \right. \\ &- \sum_{j=2}^m \frac{T_j p_j}{T_1 p_1 (p_1 - 1)} \left(\frac{t_k}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_j - p_1}{p_1 - 1}} - \sum_{j=2}^m \frac{T_j p_j (p_j - p_1 + 1)}{2 T_1 p_1 (p_1 - 1)^2} \theta_k \left(\frac{t_k}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_j - p_1}{p_1 - 1}} + \\ &\left. + O\left(\theta_k^2 t_k^{\frac{p_2 - p_1}{p_1 - 1}} \right) - \frac{(1 + o(1)) \tau p}{T_1 p_1 (p_1 - 1)} \left(\frac{t_k}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p - p_1}{p_1 - 1}} \right\}, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (22)$$

Тому з огляду на умову $2(p_2 - p_1) < p - p_1$, маємо

$$\begin{aligned} T_1 \varkappa(t_k, (1 + \theta_k)t_k, \Phi)^{p_1} &= T_1 \left(\frac{t_k}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_1}{p_1 - 1}} \left\{ 1 + \frac{p_1 \theta_k}{2(p_1 - 1)} + \frac{p_1(2 - p_1)}{6(p_1 - 1)^2} \theta_k^2 - \right. \\ &- \sum_{j=2}^m \frac{T_j p_j}{T_1 (p_1 - 1)} \left(\frac{t_k}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_j - p_1}{p_1 - 1}} - \sum_{j=2}^m \frac{T_j p_j (p_j - p_1 + 1)}{2 T_1 (p_1 - 1)^2} \theta_k \left(\frac{t_k}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_j - p_1}{p_1 - 1}} - \\ &- \frac{(1 + o(1)) \tau p}{T_1 (p_1 - 1)} \left(\frac{t_k}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p - p_1}{p_1 - 1}} + O(\theta_k^3) + O\left(\theta_k^2 t_k^{\frac{p_2 - p_1}{p_1 - 1}} \right) + \\ &\left. + \frac{p_1 \theta_k^2}{8(p_1 - 1)} - \sum_{j=2}^m \frac{T_j p_j}{2 T_1 (p_1 - 1)} \theta_k \left(\frac{t_k}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_j - p_1}{p_1 - 1}} + O\left(t_k^{\frac{2(p_2 - p_1)}{p_1 - 1}} \right) \right\} = \\ &= T_1 \left(\frac{t_k}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_1}{p_1 - 1}} + \frac{T_1 p_1}{2(p_1 - 1)} \theta_k \left(\frac{t_k}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_1}{p_1 - 1}} + \frac{T_1 p_1 (5 - p_1)}{24(p_1 - 1)^2} \theta_k^2 \left(\frac{t_k}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_1}{p_1 - 1}} - \\ &- \sum_{j=2}^m \frac{T_j p_j}{p_1 - 1} \left(\frac{t_k}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_j}{p_1 - 1}} - \sum_{j=2}^m \frac{T_j p_j^2}{2(p_1 - 1)^2} \theta_k \left(\frac{t_k}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_j}{p_1 - 1}} - \\ &- \frac{(1 + o(1)) \tau p}{p_1 - 1} \left(\frac{t_k}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p}{p_1 - 1}} + O\left(\theta_k^3 t_k^{\frac{p_1}{p_1 - 1}} \right) + O\left(\theta_k^2 t_k^{\frac{p_2}{p_1 - 1}} \right), \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (23)$$

Для $j = 2, \dots, m$ з (19) отримуємо

$$\begin{aligned} T_j \varkappa(t_k, (1 + \theta_k)t_k, \Phi)^{p_j} &= T_j \left(\frac{t_k}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_j}{p_1 - 1}} \left\{ 1 + \frac{p_j \theta_k}{2(p_1 - 1)} + O(\theta_k^2) + O\left(t_k^{\frac{p_2 - p_1}{p_1 - 1}} \right) \right\} = \\ &= T_j \left(\frac{t_k}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_j}{p_1 - 1}} + \frac{T_j p_j}{2(p_1 - 1)} \theta_k \left(\frac{t_k}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_j}{p_1 - 1}} + O\left(\theta_k^2 t_k^{\frac{p_2}{p_1 - 1}} \right) + O\left(t_k^{\frac{2p_2 - p_1}{p_1 - 1}} \right), \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

і, подібно,

$$\tau \varkappa(t_k, (1 + \theta_k)t_k, \Phi)^p = \tau \left(\frac{t_k}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p}{p_1-1}} (1 + o(1)), \quad k \rightarrow \infty. \quad (24)$$

Об'єднуючи (21)–(24), отримуємо

$$\begin{aligned} G_2(t_k, (1 + \theta_k)t_k, \Phi) &= T_1 \left(\frac{t_k}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_1}{p_1-1}} + \\ &+ \frac{T_1 p_1}{2(p_1 - 1)} \theta_k \left(\frac{t_k}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_1}{p_1-1}} + \frac{T_1 p_1 (5 - p_1)}{24(p_1 - 1)^2} \theta_k^2 \left(\frac{t_k}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_1}{p_1-1}} - \\ &- \sum_{j=2}^m \frac{T_j (p_j - p_1 + 1)}{p_1 - 1} \left(\frac{t_k}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_j}{p_1-1}} - \sum_{j=2}^m \frac{T_j p_j (p_j - p_1 + 1)}{2(p_1 - 1)^2} \theta_k \left(\frac{t_k}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_j}{p_1-1}} - \\ &- (1 + o(1)) \frac{\tau(p - p_1 + 1)}{p_1 - 1} \left(\frac{t_k}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p}{p_1-1}} + O(\theta_k^3) + O\left(\theta_k^2 t_k^{\frac{p_2}{p_1-1}}\right), \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (25)$$

З (18) і (25) випливає, що

$$\begin{aligned} G_2(t_k, (1 + \theta_k)t_k, \Phi) - G_1(t_k, (1 + \theta_k)t_k, \Phi) &= \frac{T_1 p_1}{8(p_1 - 1)} \theta_k^2 \left(\frac{t_k}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_1}{p_1-1}} + o\left(t_k^{\frac{p}{p_1-1}}\right) + \\ &+ O\left(\theta_k^3 t_k^{\frac{p_1}{p_1-1}}\right) + O\left(\theta_k^2 t_k^{\frac{p_2}{p_1-1}}\right), \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (26)$$

Нехай тепер $\varepsilon \in (0, |\tau|)$ і

$$\begin{aligned} \Phi_1(\sigma) &= T_1 \sigma^{p_1} + \sum_{j=2}^m T_j \sigma^{p_j} + (\tau - \varepsilon) \sigma^p \quad (\sigma \geq \sigma_0) \\ \Phi_2(\sigma) &= T_1 \sigma^{p_1} + \sum_{j=2}^m T_j \sigma^{p_j} + (\tau + \varepsilon) \sigma^p \quad (\sigma \geq \sigma_0). \end{aligned} \quad (27)$$

Припустимо, що $t_{k+1} = (1 + \theta_k)t_k$ і для всіх $k \geq 1$

$$G_1(t_k, t_{k+1}, \Phi_1) \geq \Phi_1(\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi_2)). \quad (28)$$

Тоді $\Phi_1(\sigma) = \Phi_2(\sigma) - 2\varepsilon \sigma^p$, $\Phi_2(\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi_2)) = G_2(t_k, t_{k+1}, \Phi_2)$ і, отже,

$$G_1(t_k, t_{k+1}, \Phi_1) \geq G_2(t_k, t_{k+1}, \Phi_2) - 2\varepsilon \varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi_2)^p. \quad (29)$$

Тому, якщо $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \theta_k = +\infty$, то з (16) і (19) для відповідної послідовності (k_j) маємо

$$(p_1 - 1) \theta_{k_j}^{\frac{1}{p_1-1}} \geq (1 + o(1)) \left(\frac{p_1 - 1}{p_1} \right)^{p_1} \theta_{k_j}^{\frac{p}{p_1-1}}, \quad j \rightarrow \infty,$$

що неможливо, якщо $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \theta_k = \theta \in (0, +\infty)$, то для відповідної послідовності (k_j) з (17) і (20) отримуємо

$$(p_1 - 1) \frac{1 + \theta}{\theta} \left((1 + \theta)^{\frac{1}{p_1-1}} - 1 \right) \geq \left(\frac{p_1 - 1}{p_1} \right)^{p_1} \left(\frac{(1 + \theta)^{\frac{p_1}{p_1-1}} - 1}{\theta} \right)^{p-1},$$

і, як показано в [3], ця нерівність також неможлива.

Отже, $\theta_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow +\infty$), а в цьому випадку з (29), (18), (25) і (21) отримуємо

$$\theta_k^2 \leq \frac{2p\varepsilon}{T_1 p_1} (1 + o(1)) \left(\frac{t_k}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p-p_1}{p_1-1}}, \quad k \rightarrow \infty. \quad (30)$$

4. Узагальнення теореми А. Правильна така теорема.

Теорема. Для того, щоб для логарифма максимального члена цілого ряду Діріхле виконувалось співвідношення (2), необхідно і достатньо, щоб для кожного $\varepsilon > 0$:

1) існувало $n = n_0(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n \geq n_0$

$$\ln |a_n| \leq -T_1(p_1 - 1) \left(\frac{\lambda_n}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_1}{p_1-1}} + \sum_{j=2}^m T_j \left(\frac{\lambda_n}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_j}{p_1-1}} + (\tau + \varepsilon) \left(\frac{\lambda_n}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p}{p_1-1}}; \quad (31)$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$$\ln |a_{n_k}| \geq -T_1(p_1 - 1) \left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_1}{p_1-1}} + \sum_{j=2}^m T_j \left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p_j}{p_1-1}} + (\tau - \varepsilon) \left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1 p_1} \right)^{\frac{p}{p_1-1}} \quad (32)$$

і виконувалось співвідношення (1).

Доведення. Почнемо з необхідності. З (2) випливає (4), де Φ_1 і Φ_2 визначені як у (27). Тому за лемою 4 правильні співвідношення (5)–(7). З (5) і (6) з огляду на (14) випливають асимптотичні нерівності (31) і (32). Нарешті, з (7), тобто з (28) з огляду на рівність $\theta_k = \frac{\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}}{\lambda_{n_k}}$ неважко отримати (1).

Доведемо достатність умов (31), (32) і (1). За лемою 1 з огляду на (4) з (31), завдяки довільної $\varepsilon > 0$ легко отримуємо асимптотичну нерівність

$$\ln \mu(\sigma) \leq T_1 \sigma^{p_1} + \sum_{j=2}^m T_j \sigma^{p_j} + (\tau + o(1)) \sigma^p, \quad \sigma \rightarrow \infty. \quad (33)$$

Далі, за лемою 3 з огляду на (26) і (1) для всіх $\sigma \in [\varphi_1(\lambda_{n_k}), \varphi_1(\lambda_{n_{k+1}})]$ і $k \geq k_0$ одержуємо

$$\begin{aligned} \ln \mu(\sigma) &\geq \Phi_1(\sigma) - \frac{T_1 p_1 \theta_k^2}{8(p_1 - 1)} \left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1 p_1} \right) + O \left(\theta_k^3 \lambda_{n_k}^{\frac{p_1}{p_1-1}} \right) + O \left(\theta_k^2 \lambda_{n_k}^{\frac{p_2}{p_1-1}} \right) + o \left(\lambda_{n_k}^{\frac{p}{p_1-1}} \right) = \\ &= \Phi_1(\sigma) + o \left(\lambda_{n_k}^{\frac{p}{p_1-1}} \right), \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Але $\lambda_{n_k} \leq \Phi_1'(\sigma) \leq \lambda_{n_{k+1}}$ і, отже,

$$\ln \mu(\sigma) \geq \Phi_1(\sigma) + o \left(\Phi_1'(\sigma)^{\frac{p}{p_1-1}} \right) = \Phi_1(\sigma) + o(\sigma^p), \quad \sigma \rightarrow +\infty.$$

Тому з огляду на довільність ε отримуємо протилежну до (33) асимптотичну нерівність. Теорему повністю доведено. $\square$

-
1. Шеремета М.Н. Двучленная асимптотика целых рядов Дирихле / Шеремета М.Н. // Теория функций, функ. анализ и их прилож. – 1990. – №54. – С. 16-25.
 2. Тарасюк Р.І. Про двочленну асимптотику цілих функцій, представлених степеневими рядами / Тарасюк Р.І. // Волинський мат. вісн. – 1995. – №2. – С. 162-164.

3. Шеремета М.М. Тричленна степенева асимптотика логарифма максимального члена цілого ряду Діріхле / Шеремета М.М., Лугова Л.Л. // Мат. студії. – 2006. – Т. 25, №2. – С. 149-168.
4. Sumyk O.M. On n -member asymptotics for logarithm of maximal term of entire Dirichlet series / Sumyk O.M. // Мат. студії. – 2001. – Т. 15, №2. – С. 200-208.
5. Шеремета М.Н. О производной ряда Дирихле / Шеремета М.Н., Федыняк С.И. // Сиб. мат. журн. – 1998. – Т. 39, №1. – С. 206-223.
6. Шеремета М.М. Зв'язок між зростанням спряжених за Юнгом функцій / Шеремета М.М., Сумик О.М. // Мат. студії. – 1999. – Т. 11, №1. – С. 41-47.
7. Заболоцький М.В. Узагальнення теореми Ліндельофа / Заболоцький М.В., Шеремета М.М. // Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50, №9. – С. 1177-1192.

ON POLYTERMED POWER ASYMPTOTIC OF THE LOGARITHM OF MAXIMAL TERM FOR ENTIRE DIRICHLET SERIES

Lyubomyra LUHOVA¹, Myroslav SHEREMETA²

¹*Institute of Entrepreneurship and Technology Policy
79044 L'viv, Horbachevsky Str., 18
e-mail: Lyubomyrka@ukr.net*

²*Ivan Franko National University of L'viv,
79000 L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: M_M_Sheremeta@list.ru*

For an entire Dirichlet series $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}$ ($s = \sigma + it$) it is investigated condition on a_n and λ_n , under which the logarithm of its maximal term has the asymptotic $\ln \mu(\sigma) = \sum_{j=1}^m T_j \sigma^{p_j} + (1 + o(1))\tau \sigma^p$, $\sigma \rightarrow +\infty$, where $T_1 > 0$, $p_1 > 1$, $p > 2p_2 - p_1$, $T_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ and $0 < p < p_m < \dots < p_2 < p_1$.

Key words: Dirichlet series, maximal term, polytermed asymptotic.

О МНОГОЧЛЕННОЙ СТЕПЕННОЙ АСИМПТОТИКЕ ЛОГАРИФМА МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА ЦЕЛОГО РЯДА ДИРИХЛЕ

Любомира ЛУГОВАЯ¹, Мирослав ШЕРЕМЕТА²

¹*Институт предпринимательства и перспективных технологий,
79044 Львов, ул. Горбачевского, 18
e-mail: Lyubomyrka@ukr.net*

²Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000 Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: M_M_Sheremeta@list.ru

Для целого ряда Дирихле $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}$ ($s = \sigma + it$) исследованы условия на a_n и λ_n , при выполнении которых его максимальный член обладал асимптотикой $\ln \mu(\sigma) = \sum_{j=1}^m T_j \sigma^{p_j} + (1 + o(1))\tau \sigma^p$, $\sigma \rightarrow +\infty$, где $T_1 > 0$, $p_1 > 1$, $p > 2p_2 - p_1$, $T_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $0 < p < p_m < \dots < p_2 < p_1$.

Ключевые слова: ряд Дирихле, максимальный член, многочленная асимптотика.

Стаття надійшла до редколегії 22.01.2010

Прийнята до друку 22.12.2010

УДК 517.4

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ОПЕРАТОРИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ З УЗАГАЛЬНЕНИМИ ФУНКЦІЯМИ В КОЕФІЦІЄНТАХ

Степан МАНЬКО

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000 Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: s_manko@franko.lviv.ua*

В [1] автори дали відповідь на питання про трактування оператора Шредінгера з $\alpha\delta'(x)$ -потенціалом, де $\delta(x)$ – функція Дірака. У цій праці результати [1] перенесено на випадок диференціального оператора четвертого порядку з коефіцієнтом $\alpha\delta'''(x)$. Досліджено асимптотичну поведінку сім'ї операторів з гладкими коефіцієнтами, що апроксимують сингулярний доданок. Отримано граничний оператор. Його вибір обумовлений асимптотикою спектра та власних просторів операторів, які регуляризують диференціальний оператор з коефіцієнтом-розподілом. Проблема трактування оператора з узагальненими функціями в коефіцієнтах має приховані параметри, тому її розв'язок залежить від способу апроксимації похідної функції Дірака та числового множника α при цій похідній.

Ключові слова: диференціальний оператор, асимптотика, спектр, резонансна множина.

1. Вступ та формулювання задачі. У багатьох галузях природознавства, зокрема в атомній фізиці, акустиці, фізиці твердих станів, аеродинаміці, механіці рідин, аероакустиці [2]–[6], виникають диференціальні оператори з негладкими коефіцієнтами. Важливе завдання теорії диференціальних рівнянь – визначити мінімальну гладкість коефіцієнтів рівняння, при якій існують розв'язки. Часто можна натрапити на моделі, де з'являються рівняння з узагальненими функціями в коефіцієнтах. Проте немає лінійної теорії диференціальних рівнянь з коефіцієнтами-розподілами, позаяк простір узагальнених функцій $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ не є алгеброю: у цьому просторі не можна ввести множення, яке б успадковувало основні властивості поточкового множення неперервних функцій.

Хоча деякі диференціальні рівняння з узагальненими функціями в коефіцієнтах можна розв'язати в просторі узагальнених функцій, проте більшість з них не

мають розв'язків у жодному сенсі. Щоб надати зміст таким моделям, можна регуляризувати коефіцієнти диференціального оператора, отримавши у цьому разі сім'ю диференціальних рівнянь з гладкими коефіцієнтами та сім'ю відповідних гладких розв'язків. Далі вивчають граничну поведінку цих сімей при різних регуляризаціях, коли параметр регуляризації прямує до нуля. Залежно від порядку сингулярності коефіцієнтів оператора можливі, наприклад, такі ситуації: послідовності розв'язків збігаються в просторі розподілів до однієї границі при всіх регуляризаціях; послідовності розв'язків збігаються в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, проте границя залежить від способу регуляризації коефіцієнтів. Саме така ситуація, в якій гранична модель залежить від способу регуляризації, виникає в цій роботі.

Багато моделей природознавства передбачають “самоспряженість”: оператори, що їх описують, повинні бути самоспряженими в деяких гільбертових просторах. Нехай диференціальний оператор S , який відповідає такій моделі, містить узагальнені функції в коефіцієнтах із носіями, зосередженими в одній точці $x = 0$. Для надання змісту формальному оператору S можна застосувати метод регуляризації, проте можливий інший спосіб. Спочатку отримують симетричний оператор S_0 шляхом звуження оператора S на множину функцій, що занулюються в початку координат разом зі своїми похідними. Далі розглядають всі самоспряжені розширення оператора S_0 й одне з них приймають за означення оператора S . Цей підхід вперше застосували Ф. Березін та Л. Фадеєв [7] для моделей квантової механіки. Якщо оператор S_0 має індекси дефекту (k, k) , то сім'я всіх самоспряжених розширень цього оператора є k^2 -параметричною. Виникає питання про вибір одного з розширень, яке адекватно описує модель. В таких випадках треба застосовувати метод регуляризації та асимптотичні методи.

1.1. Формулювання задачі. Ми розглянемо проблему надання строгого змісту диференціальному оператору четвертого порядку, що містить третю похідну від функції Дірака та перенесемо на цей випадок результати праць [1], [8]. У цих працях досліджено питання про надання строгого сенсу формальному оператору $H_\alpha = -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha\delta'(x)$, де $\delta(x)$ – функція Дірака, $\alpha \in \mathbb{R}$, та показано, що на нього немає однозначної відповіді. Причиною є прихований параметр моделі – профіль потенціалу локальної дії. Проте можна відповісти на запитання, яка з точних моделей адекватно описує рух квантово-механічної частинки в регуляризованому потенціалі $\alpha\varepsilon^{-2}\Psi(\varepsilon^{-1}x)$, який апроксимує потенціал $\alpha\delta'(x)$. Для сім'ї самоспряжених операторів $\mathcal{H}_\varepsilon(\alpha, \Psi) = -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha\varepsilon^{-2}\Psi(\varepsilon^{-1}x)$ доведено, що майже для всіх *сталих зв'язку* $\alpha \in \mathbb{R}$ граничний оператор $\mathcal{H}(\alpha, \Psi)$ є прямою сумою операторів другого диференціювання з умовами Діріхле в нулі. Коли ж α належить до дискретної *резонансної множини* Σ_Ψ , яка є спектром задачі зі знакозмінною ваговою функцією Ψ , то $\mathcal{H}(\alpha, \Psi)$ є оператором другого диференціювання на всій числовій осі з нетривіальними умовами спряження в початку координат, і ці умови визначають за допомогою профіля збурення. Вперше ефект резонансу для різних кусково-сталих профілів Ψ виявили в працях О. В. Золотарюка та ін. [9], [10].

Ми розглядаємо питання про трактування формального оператора

$$S_\alpha = \frac{d^4}{dx^4} + V(x) + \alpha\delta'''(x),$$

де $V \in C^\infty(a, b)$, a, b – числа різних знаків. Нехай функція g гладка, тоді добуток $g(x)\delta'''(x)$ можна визначити за формулою

$$g(x)\delta'''(x) = \sum_{i=0}^3 (-1)^i C_3^i g^{(i)}(0) \delta^{(3-i)}(x),$$

де C_3^i – біноміальні коефіцієнти. Справді, для фінітних φ матимемо

$$\begin{aligned} \langle g(x)\delta'''(x), \varphi(x) \rangle &= -\langle \delta(x), (g(x)\varphi(x))''' \rangle = -\left\langle \delta(x), \sum_{i=0}^3 C_3^i g^{(i)}(x) \varphi^{(3-i)}(x) \right\rangle = \\ &= -\sum_{i=0}^3 C_3^i g^{(i)}(0) \varphi^{(3-i)}(0) = \left\langle \sum_{i=0}^3 (-1)^i C_3^i g^{(i)}(0) \delta^{(3-i)}(x), \varphi(x) \right\rangle. \end{aligned}$$

Звідси видно, що добуток $g(x)\delta'''(x)$ коректно визначений у просторі розподілів для функцій, які є тричі неперервно диференційовані в нулі. Тому розв'язок рівняння $S_\alpha u = \lambda u$ шукатимемо в $C^3(a, b)$. Перепишемо рівняння у вигляді

$$u'''' - \lambda u = -u(0)\delta'''(x) + 3u'(0)\delta''(x) - 3u''(0)\delta'(x) + u'''(0)\delta(x).$$

Зважаючи на те, що ліва частина цієї рівності є регулярною узагальненою функцією, отримуємо $u(0) = u'(0) = u''(0) = u'''(0) = 0$. Отже, рівняння $S_\alpha u = \lambda u$ має лише нульовий розв'язок у просторі розподілів при $\alpha \neq 0$.

Спершу введемо сім'ю операторів з гладкими коефіцієнтами, які апроксимують сингулярний доданок $\alpha\delta'''(x)$, далі вивчатимемо асимптотичну поведінку спектра та власних функцій цієї сім'ї. Введемо множину $\mathcal{M} = \{f \in C_0^\infty(\mathbb{R}) : \text{supp } f = [-1, 1]\}$ та розглянемо сім'ю операторів

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\varepsilon(\alpha, \Psi) &= \frac{d^4}{dx^4} + V(x) + \alpha\varepsilon^{-4}\Psi(\varepsilon^{-1}x), \\ \mathcal{D}(\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha, \Psi)) &= \{f \in W_2^4(a, b) : f(a) = f'(a) = 0, f(b) = f'(b) = 0\}. \end{aligned}$$

Тут ε – малий додатний параметр, та Ψ – нетривіальна функція з множини $\mathcal{M}$. Функцію Ψ називатимемо *профілем* локального збурення. Для деяких профілів з $\mathcal{M}$ послідовність $\varepsilon^{-4}\Psi(\varepsilon^{-1}x)$ збігається до $\delta'''(x)$ в топології розподілів.

Ми кожній парі $(\alpha, \Psi) \in \mathbb{R} \times \mathcal{M}$ поставили у відповідність граничний оператор $\mathcal{S}(\alpha, \Psi)$, що залежить від профіля локального збурення Ψ та *сталой зв'язки* α . Вибір $\mathcal{S}(\alpha, \Psi)$ ґрунтуємо на близькості його власних значень та власних функцій до власних значень і власних функцій операторів $\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha, \Psi)$ при малих значеннях параметра ε . Крім того, ми доводимо збіжність власних значень і власних функцій операторів $\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha, \Psi)$ до власних значень і власних функцій граничного оператора $\mathcal{S}(\alpha, \Psi)$.

1.2. Структура статті. У розділі 2 досліджено поведінку спектра сім'ї збурених операторів $\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha, \Psi)$. Доведено, що всі власні значення є неперервними та обмеженими зверху функціями малого параметра ε . Спектр цієї сім'ї операторів, загалом, необмежений знизу. Для багатьох профілів Ψ та достатньо великих $|\alpha|$ існує скінченна кількість власних значень, які прямують до $-\infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Множину власних значень $\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha, \Psi)$, які при $\varepsilon \rightarrow 0$ залишаються обмеженими знизу, ми називатимемо *скінченним спектром* сім'ї операторів $\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha, \Psi)$.

У розділі 3 побудовано головні члени асимптотичних розвинень власних значень скінченного спектра та відповідних власних функцій. На формальному рівні отримано граничні оператори $\mathcal{S}(\alpha, \Psi)$. Введено спектральну характеристику профіля Ψ , а саме, резонансну множину Σ_Ψ , яка є спектром задачі

$$w^{(4)} + \alpha \Psi w = 0, \quad \xi \in (-1, 1), \quad w''(-1) = w'''(-1) = 0, \quad w''(1) = w'''(1) = 0$$

стосовно спектрального параметра α . Якщо α не належить до резонансної множини, то називатимемо α нерезонансною сталою зв'язку (*випадок відсутності резонансу*), в протилежному випадку – резонансною (*випадок резонансу*). Якщо стала зв'язку α є простим власним значенням цієї задачі, а відповідна власна функція задовольняє умови $w'_\alpha(-1) \neq 0$ та $w'_\alpha(1) \neq 0$, то таку ситуацію називатимемо *випадком не виродженого резонансу*. У випадку невиродженого резонансу вводять відношення $\theta_\Psi(\alpha) = w'_\alpha(1)/w'_\alpha(-1)$. Якщо стала зв'язку α – нерезонансна, то $\mathcal{S}(\alpha, \Psi)$ є прямою сумою операторів Діріхле на інтервалах $(a, 0)$ та $(0, b)$, відповідно. У випадку невиродженого резонансу $\mathcal{S}(\alpha, \Psi)$ є оператором $\frac{d^4}{dx^4} + V(x)$ з областю визначення

$$\mathcal{D}(\mathcal{S}(\alpha, \Psi)) = \{f \in W_2^4((a, b) \setminus 0) : f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0, f(0) = 0, f'(+0) - \theta_\Psi(\alpha)f'(-0) = 0, \theta_\Psi(\alpha)f''(+0) - f''(-0) = 0\}.$$

У розділі 4 побудовано коректори асимптотичних розвинень власних значень і власних функцій операторів $\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha, \Psi)$, бо головних членів недостатньо, щоб обґрунтувати формальні асимптотики. Тут розглянуто лише два випадки: $\alpha \notin \Sigma_\Psi$ та випадок загального положення. Саме для цих випадків будуть доведені апроксимаційні теореми.

Розділ 5 містить головний результат статті. Тут доведено збіжність власних значень скінченного спектра операторів $\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha, \Psi)$ до власних значень оператора $\mathcal{S}(\alpha, \Psi)$, а також збіжність в $L_2(a, b)$ відповідних власних підпросторів.

У розділі 6 виписано граничний оператор у випадку виродженого резонансу.

2. Спектральні властивості операторів $\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha, \Psi)$. Елемент Ψ множини $\mathcal{M}$ називатимемо $\delta^{(n)}$ -подібним профілем, якщо

$$\varepsilon^{-(n+1)}\Psi(\varepsilon^{-1}x) \rightarrow \delta^{(n)}(x) \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

в топології $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Введемо моменти функції $\langle f \rangle_k = (k!)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^k f(\xi) d\xi$.

Лема 1. *Послідовність $\varepsilon^{-(n+1)}\Psi(\varepsilon^{-1}x)$, де $\Psi \in \mathcal{M}$, збігається при $\varepsilon \rightarrow 0$ до $\delta^{(n)}(x)$ в топології $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ тоді й лише тоді, коли $\langle \Psi \rangle_j = 0$ при $j = 0, \dots, n-1$ та $\langle \Psi \rangle_n = (-1)^n$.*

Доведення. Для всіх $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ матимемо

$$\begin{aligned} (\varepsilon^{-(n+1)}\Psi(\varepsilon^{-1}x), \varphi) &= \varepsilon^{-(n+1)} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Psi(\varepsilon^{-1}x) \varphi(x) dx = \varepsilon^{-n} \int_{-1}^1 \Psi(\xi) \varphi(\varepsilon\xi) d\xi = \\ &= \varepsilon^{-n} \int_{-1}^1 \Psi(\xi) (\varphi(0) + \varepsilon\xi\varphi'(0) + \dots + (n!)^{-1}\varepsilon^n \xi^n \varphi^{(n)}(0) + O(\varepsilon^{n+1})) d\xi = \\ &= \varepsilon^{-n} \langle \Psi \rangle_0 \varphi(0) + \varepsilon^{-n+1} \langle \Psi \rangle_1 \varphi'(0) + \dots + \langle \Psi \rangle_n \varphi^{(n)}(0) + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Отже, послідовність функціоналів $(\varepsilon^{-(n+1)}\Psi(\varepsilon^{-1}x), \cdot)$ має скінченну границю $(\Psi_0, \cdot)$ тоді й лише тоді, коли $\langle \Psi \rangle_j = 0$ для $j = 0, \dots, n-1$. Зауважимо, що в цьому випадку граничний функціонал $\Psi_0 = (-1)^n \langle \Psi \rangle_n \delta^{(n)}(x)$ є нетривіальним при $\langle \Psi \rangle_n \neq 0$. $\square$

Як наслідок цієї леми, одержимо опис множини всіх δ''' -подібних профілів локального збурення

$$\mathcal{M}_0 = \{\Psi \in \mathcal{M} : \langle \Psi \rangle_j = 0, \quad j = 0, 1, 2, \quad \langle \Psi \rangle_3 = -1\}.$$

Умова $\langle \Psi \rangle_0 = 0$ вимагає знакозмінності потенціалу Ψ . Зауважимо, що жоден профіль з $\mathcal{M}_0$ не може бути парним, бо тоді $\xi^3 \Psi$ є непарною функцією, отже, $\langle \Psi \rangle_3 = 0$.

Перейдемо до опису спектральних властивостей сім'ї збурених операторів. Для кожного $\varepsilon > 0$ спектр оператора $\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha, \Psi)$ є дійсним і дискретним. Це є наслідком самоспряженості оператора та компактності його резольвенти. Нехай $\{\lambda_k^\varepsilon(\alpha, \Psi)\}_{k=1}^\infty$ – власні значення $\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha, \Psi)$, перенумеровані за зростанням із врахуванням кратності, а $\{u_\varepsilon^k(x; \alpha, \Psi)\}_{k=1}^\infty$ – ортонормована в $L_2(a, b)$ система власних функцій.

Теорема 1. *Для кожного набору $(\alpha, \Psi) \in \mathbb{R} \times \mathcal{M}$ власні значення $\lambda_k^\varepsilon = \lambda_k^\varepsilon(\alpha, \Psi)$ є неперервними функціями параметра $\varepsilon \in (0, 1)$, обмеженими зверху при $\varepsilon \rightarrow 0$. Якщо Ψ – знакозмінна функція, а величина $|\alpha|$ достатньо велика, то спектр $\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha, \Psi)$ є необмеженим знизу, зокрема, $\lambda_1^\varepsilon \leq -c\varepsilon^{-4}$ для деякої додатної сталої c . Існує не більше, ніж скінченна кількість $N(\alpha, \Psi)$ власних значень, які збігаються до $-\infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Доведення. Зафіксуємо пару $(\alpha, \Psi) \in \mathbb{R} \times \mathcal{M}$ і прийнемо $\Psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-4}\Psi(\varepsilon^{-1}x)$. Тоді квадратична форма

$$a_\varepsilon[u] = \int_a^b (|u''|^2 + V(x)|u|^2 + \alpha \Psi_\varepsilon(x)|u|^2) dx, \quad u \in C_0^\infty(a, b),$$

утворює сім'ю одностайно неперервних стосовно $u \in \{v \in L_2(a, b) : \|v\| = 1\}$ функцій змінної ε на $(0, 1)$. За принципом мінімаксу [11, с. 343]

$$\lambda_k^\varepsilon = \inf_{E_k} \sup_{u \in E_k, \|u\|=1} a_\varepsilon[u],$$

де E_k – лінійний підпростір $C_0^\infty(a, b)$ вимірності k , а $\|\cdot\|$ – норма в $L_2(a, b)$. Отже, всі λ_k^ε теж неперервно залежать від ε .

Виберемо k -вимірний підпростір E_k^* такий, що носії всіх його елементів не містять початку координат. Тоді

$$\lambda_k^\varepsilon \leq \sup_{u \in E_k^*, \|u\|=1} a_\varepsilon[u].$$

При достатньо малих ε звуження a_ε на E_k^* не залежатиме від ε , бо носії функцій Ψ_ε та $u \in E_k^*$ не перетинаються. Звідси отримуємо обмеженість власних значень зверху при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Якщо функція Ψ є знакозмінною, то виберемо нормовану в $L_2(a, b)$ функцію $u \in C_0^\infty(a, b)$ таку, що $\text{supp } u = [c, d]$ зосереджений в зоні, де Ψ від'ємна. Розглянемо

послідовність $u_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1/2}u(\varepsilon^{-1}x)$, $\|u_\varepsilon\| = 1$, а також припустимо, що $\alpha > 0$. Тоді

$$\begin{aligned}\lambda_1(\varepsilon, \alpha) &= \inf_{u \in C_0^\infty(a,b), \|u\|=1} a_\varepsilon[u] \leq a_\varepsilon[u_\varepsilon] = \int_{c\varepsilon}^{d\varepsilon} \left(|u_\varepsilon''|^2 + V(x)|u_\varepsilon|^2 + \alpha \Psi_\varepsilon(x)|u_\varepsilon|^2 \right) dx = \\ &= \varepsilon^{-4} \int_c^d \left(|u''(\xi)|^2 - \alpha |\Psi(\xi)||u(\xi)|^2 \right) d\xi + \int_c^d V(\varepsilon\xi)|u(\xi)|^2 d\xi.\end{aligned}$$

Зрозуміло, що інтеграл, який містить V , обмежений. Прийнемо

$$r = \int_c^d |u''(\xi)|^2 d\xi \cdot \left(\int_c^d |\Psi(\xi)||u(\xi)|^2 d\xi \right)^{-1}.$$

Тоді для $\alpha > r$ і деякого $c > 0$ виконується нерівність $\lambda_1(\varepsilon, \alpha) \leq -c\varepsilon^{-4}$. У випадку, коли $\alpha < 0$, у доведенні треба взяти функцію u з носієм, зосередженим на зоні, де функція Ψ є додатною.

Нехай $N_\varepsilon^-(\alpha, \Psi)$ – число від'ємних власних значень оператора $\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha, \Psi)$ для фіксованого ε . Очевидно, що $N(\alpha, \Psi) \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} N_\varepsilon^-(\alpha, \Psi)$. У випадку неперервного потенціалу виконується нерівність [12]

$$N_\varepsilon^-(\alpha, \Psi) \leq m + C|\alpha| \int_a^b |x|^3 |\Psi_\varepsilon(x)| dx, \quad (1)$$

де m та C – деякі сталі. Носій $\Psi_\varepsilon(\cdot)$ міститься в інтервалі $[-\varepsilon, \varepsilon]$, тому

$$\int_a^b |x|^3 |\Psi_\varepsilon(x)| dx = \varepsilon^{-4} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |x|^3 |\Psi(\varepsilon^{-1}x)| dx = \int_{-1}^1 |\xi|^3 |\Psi(\xi)| d\xi \leq c(\Psi).$$

Отже, число $N(\alpha, \Psi)$ є скінченним $N(\alpha, \Psi) \leq m + c(\Psi)|\alpha|$. $\square$

Отже, спектр $\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha, \Psi)$ розпадається на дві частини: множини власних значень, які прямують до $-\infty$, та множини обмежених при $\varepsilon \rightarrow 0$ власних значень.

3. Асимптотика скінченного спектра: головні члени. Диференціальний вираз $\frac{d^4}{dx^4} + V(x)$ надалі позначатимемо через L . Розглянемо спектральну задачу

$$\begin{cases} Lu_\varepsilon + \alpha \varepsilon^{-4} \Psi(\varepsilon^{-1}x) u_\varepsilon = \lambda^\varepsilon u_\varepsilon, & x \in (a, b), \\ u_\varepsilon(a) = u'_\varepsilon(a) = 0, & u_\varepsilon(b) = u'_\varepsilon(b) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Нехай $\lambda_k^\varepsilon(\alpha, \Psi)$ – обмежене при $\varepsilon \rightarrow 0$ власне значення задачі (2), яке ми позначатимемо через λ^ε , а відповідну йому власну функцію – через u_ε . Асимптотику будуватимемо у вигляді

$$\lambda^\varepsilon \sim \lambda + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2 + \dots, \quad (3)$$

$$u_\varepsilon(x) \sim v(x) + \varepsilon v_1(x) + \varepsilon^2 v_2(x) + \dots \quad \text{при } x \in (a, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, b), \quad (4)$$

$$u_\varepsilon(x) \sim \varepsilon w(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon^2 w_1(\varepsilon^{-1}x) + \dots \quad \text{при } x \in (-\varepsilon, \varepsilon). \quad (5)$$

Тут всі функції v, v_i визначені на $(a, b) \setminus \{0\}$, а функції w, w_i — на $(-1, 1)$. Припускати-
мемо також, що $v \in$ відмінною від нуля. У точках $x = \pm \varepsilon$ ряди (4), (5) задовольняють
умови спряження

$$\left[u_\varepsilon^{(j)} \right]_{x=-\varepsilon} = 0, \quad \left[u_\varepsilon^{(j)} \right]_{x=\varepsilon} = 0, \quad j = 0, \dots, 3. \quad (6)$$

Тут $[g]_{x=c} = g(c+0) - g(c-0)$ — стрибок функції g в точці c .

Підставимо ряди (3)-(4) в рівняння (2). Звідси, зокрема, отримаємо

$$Lv = \lambda v, \quad x \in (a, b) \setminus \{0\}, \quad (7)$$

$$Lv_1 = \lambda v_1 + \lambda_1 v, \quad x \in (a, b) \setminus \{0\}. \quad (8)$$

Проведемо заміну $\xi = \varepsilon^{-1}x$ в рівнянні (2). Тоді воно набуде вигляду

$$\frac{1}{\varepsilon^4} \frac{d^4 u_\varepsilon}{d\xi^4}(\varepsilon\xi) + V(\varepsilon\xi)u_\varepsilon(\varepsilon\xi) + \frac{\alpha}{\varepsilon^4} \Psi(\xi)u_\varepsilon(\varepsilon\xi) = \lambda^\varepsilon u_\varepsilon(\varepsilon\xi).$$

Підставляючи ряди (3), (5) в нових змінних у рівняння (2), отримуємо, що перші
три функції в розвиненні (5), тобто w, w_1 та w_2 , є розв'язками однорідного рівняння

$$y^{(4)} + \alpha \Psi(\xi)y = 0, \quad \xi \in (-1, 1). \quad (9)$$

Після підстановки асимптотичних розвинень для власної функції в умови спряження
(6), одержимо

$$\begin{aligned} v(\pm\varepsilon) + \varepsilon v_1(\pm\varepsilon) + \dots &\sim \varepsilon w(\pm 1) + \varepsilon^2 w_1(\pm 1) + \dots, \\ v'(\pm\varepsilon) + \varepsilon v'_1(\pm\varepsilon) + \dots &\sim w'(\pm 1) + \varepsilon w'_1(\pm 1) + \varepsilon^2 w'_2(\pm 1) + \dots, \\ v''(\pm\varepsilon) + \varepsilon v''_1(\pm\varepsilon) + \dots &\sim \varepsilon^{-1} w''(\pm 1) + w''_1(\pm 1) + \varepsilon w''_2(\pm 1) + \dots, \\ v'''(\pm\varepsilon) + \varepsilon v'''_1(\pm\varepsilon) + \dots &\sim \varepsilon^{-2} w'''(\pm 1) + \varepsilon^{-1} w'''_1(\pm 1) + w'''_2(\pm 1) + \dots. \end{aligned}$$

Розвиваючи величини вигляду $v_j^{(k)}(\pm\varepsilon)$ в асимптотичні ряди Маклорена, отримаємо

$$v(-0) = 0, \quad v(+0) = 0, \quad (10)$$

$$w''(\pm 1) = 0, \quad w'''(\pm 1) = 0, \quad (11)$$

$$v'(-0) = w'(-1), \quad v'(+0) = w'(1), \quad (12)$$

$$v_1(\pm 0) \pm v'(\pm 0) = w(\pm 1), \quad v'_1(\pm 0) \pm v''(\pm 0) = w'_1(\pm 1), \quad (13)$$

$$w''_1(\pm 1) = v''(\pm 0), \quad w'''_1(\pm 1) = 0, \quad (14)$$

$$w''_2(\pm 1) = v''_1(\pm 0) \pm v'''(\pm 0), \quad w'''_2(\pm 1) = v'''(\pm 0). \quad (15)$$

Отже, функція v на кожному з інтервалів $(a, 0)$ та $(0, b)$ є розв'язком рівняння (7) та
задовольняє умову $v(0) = 0$, що впливає з (10). Функція ж w є розв'язком крайової
задачі

$$w^{(4)} + \alpha \Psi w = 0, \quad \xi \in (-1, 1), \quad w''(\pm 1) = 0, \quad w'''(\pm 1) = 0. \quad (16)$$

Крім того, обидві функції пов'язані умовами спряження (12). Побудова асимптотики
залежатиме від того, чи має задача (16) нетривіальні розв'язки.

3.1. Резонансна множина. Задачу (16) можна трактувати як спектральну зада-
чу з вагою Ψ стосовно спектрального параметра α . Загалом функція Ψ знакозмінна.

У цьому розділі вивчатимемо спектр цієї задачі та введемо дві спектральні характеристики профіля Ψ .

Теорема 2. *Для кожної функції $\Psi \in \mathcal{M}$ спектр задачі (16) є дійсним і дискретним, і, загалом, необмеженим в обидва боки.*

Доведення. Зважаючи на знакозмінність Ψ , спектр задачі (16) зручно досліджувати в просторах Крейна. Нехай $L^2_{|\Psi|}(-1, 1)$ – ваговий простір зі скалярним добутком $(f, g) = \int_{-1}^1 |\Psi| f \bar{g} d\xi$. Розглянемо в цьому просторі індефінітне множення $[f, g] = \int_{-1}^1 \Psi f \bar{g} d\xi$. Пара $\mathcal{K} = \{L^2_{|\Psi|}(-1, 1), [\cdot, \cdot]\}$ утворює простір Крейна [13, розд. 1].

У просторі $\mathcal{K}$ введемо оператор $\mathcal{T}_\Psi = \frac{1}{\Psi(\xi)} \frac{d^4}{d\xi^4}$ з областю визначення

$$\mathcal{D}(\mathcal{T}_\Psi) = \{f \in \mathcal{K}: \Psi^{-1} f^{(4)} \in L^2_{|\Psi|}(-1, 1), \quad f''(\pm 1) = 0, \quad f'''(\pm 1) = 0\}.$$

Задача (16) еквівалентна спектральному рівнянню $\mathcal{T}_\Psi w = -\alpha w$.

Кожен простір Крейна має канонічну симетрію, зокрема, простір $\mathcal{K}$ має канонічну симетрію $Jf = \text{sgn} \Psi \cdot f$. З цією симетрією пов'язані означення J -самоспряжених і J -невід'ємних операторів. Оператор T називається J -самоспряженим, якщо оператор JT самоспряжений в $L^2_{|\Psi|}(-1, 1)$, та J -невід'ємний, коли $[Tf, f] \geq 0$ для всіх f з області визначення T .

Доведемо, що для кожної функції $\Psi \in \mathcal{M}$ оператор $\mathcal{T}_\Psi \in J$ -самоспряженим та J -невід'ємним. Справді,

$$\begin{aligned} (J\mathcal{T}_\Psi f, g) &= \int_{-1}^1 f^{(4)} \bar{g} d\xi = f'(1) \overline{g''(1)} - f'(-1) \overline{g''(-1)} - \\ &\quad - f(1) \overline{g'''(1)} + f(-1) \overline{g'''(-1)} + \int_{-1}^1 f \overline{g^{(4)}} d\xi. \end{aligned}$$

для кожного $f \in \mathcal{D}(\mathcal{T}_\Psi)$. Рівність $(J\mathcal{T}_\Psi f, g) = (f, J\mathcal{T}_\Psi g)$ виконується тоді й лише тоді, коли $g \in \mathcal{D}(\mathcal{T}_\Psi)$, що й означає самоспряженість оператора $J\mathcal{T}_\Psi$. Тому оператор $\mathcal{T}_\Psi \in J$ -самоспряженим. З іншого боку, для всіх $f \in \mathcal{D}(\mathcal{T}_\Psi)$ правильна нерівність

$$[\mathcal{T}_\Psi f, f] = \int_{-1}^1 f^{(4)} \bar{f} d\xi = \int_{-1}^1 |f''|^2 d\xi \geq 0.$$

Отже, оператор $\mathcal{T}_\Psi$ J -невід'ємний. Якщо функція Ψ знакостала, то оператор $\mathcal{T}_\Psi$ самоспряжений в $L^2_{|\Psi|}(-1, 1)$, тому його спектр дійсний. Нехай Ψ знакозмінна. Відомо, що кожен J -самоспряжений J -невід'ємний оператор з непорожньою резольвентною множиною має дійсний спектр [13, с. 138]. Покажемо, що резольвентна множина оператора $\mathcal{T}_\Psi$ непорожня. Однорідна задача

$$g^{(4)} + i\Psi g = 0, \quad \xi \in (-1, 1), \quad g''(\pm 1) = 0, \quad g'''(\pm 1) = 0 \quad (17)$$

має лише тривіальний розв'язок. Справді, кожен її розв'язок задовольняє рівність

$$\int_{-1}^1 |g''|^2 d\xi + i \int_{-1}^1 \Psi |g|^2 d\xi = 0.$$

Очевидно, що g є лінійною, бо Ψ дійсна. Проте з усіх лінійних функцій лише нульова є розв'язком рівняння (17). Тоді неоднорідна задача $g^{(4)} + i\Psi g = \Psi f$, $g''(\pm 1) = 0$, $g'''(\pm 1) = 0$ має єдиний розв'язок для кожної $f \in \mathcal{K}$ [14, с. 39], тобто число $-i$ належить до резольвентної множини оператора $\mathcal{T}_\Psi$. Тому $\sigma(\mathcal{T}_\Psi) \subset \mathbb{R}$.

Доведемо, що резольвента $\mathcal{R}(\mu)$ оператора $\mathcal{T}_\Psi$ компактна. Оператор $\mathcal{R}(\mu)$ діє з простору $\mathcal{K}$ в $\mathcal{D}(\mathcal{T}_\Psi)$ й кожному $f \in \mathcal{K}$ ставить у відповідність розв'язок рівняння $\mathcal{T}_\Psi g - \mu g = f$, яке можна переписати у вигляді

$$g^{(4)} - \mu \Psi g = \Psi f, \quad g \in \mathcal{D}(\mathcal{T}_\Psi).$$

Права частина Ψf належить до $L_2(-1, 1)$, бо $\|\Psi f\|_{L_2(-1, 1)} \leq \max_{\mathbb{R}} |\Psi|^{1/2} \cdot \|f\|_{\mathcal{K}}$. Отже, розв'язок g є елементом простору $W_2^4(-1, 1)$, що випливає з теорем про регулярність розв'язків еліптичної задачі. Компактність резольвенти випливає з ланцюжка вклядень

$$\mathcal{D}(\mathcal{T}_\Psi) \subset W_2^4(-1, 1) \hookrightarrow L_2(-1, 1) \subset \mathcal{K},$$

середнє з яких компактне. Отож, $\sigma(\mathcal{T}_\Psi) = \sigma_p(\mathcal{T}_\Psi)$. Необмеженість спектра в обидва боки є наслідком знакозмінності профіля [15]. $\square$

Спектр задачі (16) називатимемо *резонансною множиною* профіля Ψ та позначатимемо через Σ_Ψ . Очевидно, що $\Sigma_\Psi = \{\alpha \in \mathbb{R} : -\alpha \in \sigma(\mathcal{T}_\Psi)\}$. Розглянемо підмножину резонансної множини, що складається з тих власних значень α задачі (16), для яких виконуються умови

$$\alpha - \text{просте власне значення задачі (16),} \quad w'_\alpha(-1)w'_\alpha(1) \neq 0, \quad (18)$$

де w_α – власна функція, що відповідає α . Надалі ситуацію, коли $\alpha \in \Sigma_\Psi$ і задовольняє умови (18), називатимемо випадком *невиродженого резонансу*. Якщо ж $\alpha \in \Sigma_\Psi$ й не задовольняє хоча б одну з умов (18), то цей випадок називатимемо *виродженням резонансу*.

3.2. Граничний оператор $\mathcal{S}(\alpha, \Psi)$. Спочатку припустимо, що α не належить до резонансної множини. Тоді задача (16) має лише тривіальний розв'язок $w = 0$. З умов спряження (12) отримуємо $v'(0) = 0$. Отже, задача для головних членів рядів (3), (4) набуває вигляду

$$\begin{cases} Lv = \lambda v, & x \in (a, 0) \cup (0, b), \\ v(a) = v'(a) = 0, & v(0) = v'(0) = 0, \quad v(b) = v'(b) = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Надалі цю задачу називатимемо граничною. Асоційований з нею оператор є прямою сумою $S_- \oplus S_+$, де S_- та S_+ задані рівностями $S_\pm u = Lu$ на

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(S_-) &= \{f \in W_2^4(a, 0) : f(a) = f'(a) = 0, \quad f(0) = f'(0) = 0\}, \\ \mathcal{D}(S_+) &= \{f \in W_2^4(0, b) : f(0) = f'(0) = 0, \quad f(b) = f'(b) = 0\}. \end{aligned}$$

Отже, у випадку $\alpha \notin \Sigma_\Psi$ приймемо $\mathcal{S}(\alpha, \Psi) = S_- \oplus S_+$.

Нехай тепер $\alpha \in \Sigma_\Psi$ та виконуються умови (18). Введемо величину

$$\theta_\Psi(\alpha) = \frac{w'_\alpha(1)}{w'_\alpha(-1)}. \quad (20)$$

У випадку невідродженого резонансу це відношення визначене коректно й не залежить від вибору власної функції. Зрозуміло, що $w = cw_\alpha(\xi)$ для деякої сталої c , тоді умови (12) набувають вигляду $v'(-0) = cw'_\alpha(-1)$, $v'(0) = cw'_\alpha(1)$, звідки

$$w'_\alpha(-1)v'(0) = w'_\alpha(1)v'(-0). \quad (21)$$

Скориставшись (9) та (14), отримаємо неоднорідну задачу на спектрі

$$w_1^{(4)} + \alpha\Psi w_1 = 0, \quad \xi \in (-1, 1), \quad w_1''(\pm 1) = v''(\pm 0), \quad w_1'''(1) = 0. \quad (22)$$

для коректора w_1 . Згідно з альтернативою Фредгольма ця задача має розв'язок тоді й лише тоді, коли

$$w'_\alpha(1)v''(+0) - w'_\alpha(-1)v''(-0) = 0. \quad (23)$$

Врахувавши (20), (21), (23), одержимо граничну задачу

$$Lv = \lambda v, \quad x \in (a, 0) \cup (0, b), \quad v(a) = v'(a) = 0, \quad v(b) = v'(b) = 0, \quad (24)$$

$$v(0) = 0, \quad v'(+0) - \theta_\Psi(\alpha)v'(-0) = 0, \quad \theta_\Psi(\alpha)v''(+0) - v''(-0) = 0 \quad (25)$$

та асоційований з нею оператор, що заданий рівністю $\mathcal{S}(\alpha, \Psi)u = Lu$ на області

$$\mathcal{D}(\mathcal{S}(\alpha, \Psi)) = \{f \in W_2^4((a, b) \setminus \{0\}) : f(a) = f'(a) = 0, \quad f(b) = f'(b) = 0, \\ f(0) = 0, \quad f'(+0) - \theta_\Psi(\alpha)f'(-0) = 0, \quad \theta_\Psi(\alpha)f''(+0) - f''(-0) = 0\}.$$

Нехай λ та v – власне значення й власна функція оператора $\mathcal{S}(\alpha, \Psi)$. Тоді сталу c у зображенні w знаходять за формулою $c = \frac{v'(-0)}{w'_\alpha(-1)} = \frac{v'(+0)}{w'_\alpha(1)}$.

4. Асимптотика скінченного спектра: поправки. Далі ми знайдемо декілька інших коефіцієнтів рядів (3)-(5) за відсутності резонансу ($\alpha \notin \Sigma_\Psi$), а також для невідродженого резонансу ($\alpha \in \Sigma_\Psi$). Зважаючи на обмежений обсяг статті, асимптотика буде побудована у припущенні, що λ просте власне значення граничного оператора $\mathcal{S}(\alpha, \Psi)$.

4.1. Асимптотика за відсутності резонансу. Нагадаємо таке: коли α не належить до резонансної множини, то $w = 0$. З (9), (14) отримуємо задачу

$$w_1^{(4)} + \alpha\Psi w_1 = 0, \quad \xi \in (-1, 1), \quad w_1''(\pm 1) = v''(\pm 0), \quad w_1'''(\pm 1) = 0,$$

яка має єдиний розв'язок, позаяк α не є власним значенням задачі (16). Нехай λ та v – власне значення та власна функція оператора $S_- \oplus S_+$, нормована в $L_2(a, b)$. Тобто, λ є власним значенням одного з операторів S_- або S_+ , й не обмежуючи загальності, припустимо, що S_+ . Зрозуміло, що тоді v дорівнює нулю на $(a, 0)$. Згідно з (8), (13) функцію v_1 можна знайти, розв'язавши задачі на $(a, 0)$ та $(0, b)$, відповідно

$$\begin{cases} Lv_1 = \lambda v_1, & x \in (a, 0), \\ v(a) = v'(a) = 0, \\ v_1(-0) = 0, & v'_1(-0) = w'_1(-1), \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases} Lv_1 = \lambda v_1 + \lambda_1 v, & x \in (0, b), \\ v_1(+0) = -v'(+0), & v'_1(+0) = w'_1(+1) - v''(+0), \\ v(b) = v'(b) = 0. \end{cases}$$

Перша з них має єдиний розв'язок, бо $\lambda \notin \sigma(S_-)$, а друга – це неоднорідна задача на спектрі. Згідно з альтернативою Фредгольма її розв'язок існує тоді й лише тоді, коли

$$\lambda_1 = v''(+0)(v''(+0) - w'_1(1)) - v'(+0)v'''(+0).$$

Остання умова є одночасно формулою для знаходження поправки λ_1 в асимптотиці власного значення. Зважаючи на те, що розв'язок визначений з точністю до ядра однорідної задачі, підпорядкуємо його додатковій умові $\int_0^b v v_1 dx = 0$. З рівностей (9), (15) отримуємо задачу

$$\begin{aligned} w_2^{(4)} + \alpha \Psi w_2 &= 0, & \xi \in (-1, 1), \\ w_2''(\pm 1) &= v_1''(\pm 0) \pm v'''(\pm 0), & w_2'''(\pm 1) = v'''(\pm 0), \end{aligned} \quad (27)$$

з якої знаходимо функцію w_2 .

Отже, ми побудували такі наближення власного значення та власної функції:

$$\Lambda_\varepsilon = \lambda + \varepsilon \lambda_1, \quad U_\varepsilon(x) = \begin{cases} v(x) + \varepsilon v_1(x), & |x| > \varepsilon, \\ \varepsilon^2 w_1(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon^3 w_2(\varepsilon^{-1}x), & |x| < \varepsilon. \end{cases} \quad (28)$$

Таку ж асимптотику можна побудувати й у випадку, коли $\lambda \in \sigma(S_-) \setminus \sigma(S_+)$.

4.2. Асимптотика у випадку резонансу. Нехай $\alpha \in \Sigma_\Psi$. Число λ тепер є простим власним значенням задачі (24), а v – відповідною нормованою в $L_2(a, b)$ власною функцією. У випадку невиродженого резонансу з умови (12) матимемо $w = \frac{v'(-0)}{w'_\alpha(-1)} w_\alpha$, де w_α – власна функція задачі (16). Друга умова (12) теж правильна, бо $w'(1) = v'(-0)\theta_\Psi(\alpha) = v'(+0)$.

Розв'язок w_1 задачі (22) існує, що гарантує умова (23). Він має зображення $w_1 = w_1^* + c_1 w_\alpha$, де w_1^* – частковий розв'язок задачі такий, що $\frac{dw_1^*}{d\xi}(-1) = 0$, а c_1 – довільна стала. Функція v_1 задовольняє (8) поза нулем, причому з (14) маємо

$$v'_1(+0) - \theta_\Psi(\alpha)v'_1(-0) = G_1,$$

де $G_1 = w'_1(1) - \theta_\Psi(\alpha)w'_1(-1) - v''(+0) - \theta_\Psi(\alpha)v''(-0)$. Варто зауважити, що G_1 не залежить від вибору розв'язку w_1 , позаяк

$$\begin{aligned} w'_1(1) - \theta_\Psi(\alpha)w'_1(-1) &= \left(\frac{dw_1^*}{d\xi}(1) - \theta_\Psi(\alpha)\frac{dw_1^*}{d\xi}(-1) \right) + \\ &+ c_1(w'_\alpha(1) - \theta_\Psi(\alpha)w'_\alpha(-1)) = \frac{dw_1^*}{d\xi}(1). \end{aligned}$$

З умов (13) отримаємо $v_1(\pm 0) = w(\pm 1) \mp v'(\pm 0)$. З (9) та (15) знаходимо

$$\begin{cases} w_2^{(4)} + \alpha \Psi w_2 = 0, & \xi \in (-1, 1), \\ w_2''(\pm 1) = v_1''(\pm 0) \pm v'''(\pm 0), \\ w_2'''(\pm 1) = v'''(\pm 0). \end{cases} \quad (29)$$

Умову існування розв'язку цієї задачі можна записати у вигляді

$$\theta_\Psi(\alpha)v''_1(+0) - v''_1(-0) = H_1, \quad (30)$$

де $H_1 = v'''(-0) - \theta_\Psi(\alpha)v'''(+0) + w_\alpha(1)v'''(+0) - w_\alpha(-1)v'''(-0)$. Отже, функція v_1 є розв'язком задачі

$$\begin{cases} v_1^{(4)} = \lambda v_1 + \lambda_1 v, & x \in (a, b) \setminus \{0\}, \\ v_1(a) = v_1'(a) = 0, & v_1(b) = v_1'(b) = 0, \\ v_1(\pm 0) = w(\pm 1) \mp v'(\pm 0), \\ v_1'(+0) - \theta_\Psi(\alpha)v_1'(-0) = G_1, \\ \theta_\Psi(\alpha)v_1''(+0) - v_1''(-0) = H_1. \end{cases} \quad (31)$$

Першу поправку λ_1 в асимптотиці власного значення знаходимо з умови існування розв'язку цієї задачі. Згідно з альтернативою Фредгольма матимемо

$$\lambda_1 = v'(-0)H_1 - v''(+0)G_1 - (w(-1) + v'(-0))v'''(-0) + (w(1) - v'(+0))v'''(+0).$$

Розв'язок v_1 підпорядковуємо додатковій умові $\int_a^b v v_1 dx = 0$. З першої умови (13) матимемо $c_1 = (v_1'(-0) - v''(-0) - \frac{dw_1^*}{d\xi}(-1))$. Безпосередньо переконаємося, що друга умова (13) теж виконується.

Отже, в цьому випадку маємо таке наближення власного значення та власної функції збуреної задачі

$$\Lambda_\varepsilon = \lambda + \varepsilon \lambda_1, \quad U_\varepsilon(x) = \begin{cases} v(x) + \varepsilon v_1(x), & |x| > \varepsilon, \\ \varepsilon w(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon^2 w_1(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon^3 w_2(\varepsilon^{-1}x), & |x| < \varepsilon. \end{cases} \quad (32)$$

Тут w_2 – деякий розв'язок задачі (29). Вибір сталої c_2 у зображенні $w_2 = w_2^* + c_2 w_\alpha$ не є принциповим, бо ми не шукаємо поправку v_2 .

5. Обґрунтування асимптотик.

5.1. Теорема про збіжність. Нехай λ_ε – обмежене власне значення оператора $\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha, \Psi)$, а u_ε – відповідна нормована в $L_2(a, b)$ власна функція. Тоді існують такі підпоследовності $\lambda_{\varepsilon'}$ та $u_{\varepsilon'}$, що $\lambda_{\varepsilon'} \rightarrow \lambda$ та $u_{\varepsilon'} \rightarrow u$ слабо в $L_2(a, b)$ при $\varepsilon' \rightarrow 0$. Надалі такі збіжні підпоследовності позначатимемо через λ_ε та u_ε , вважаючи, що ε належить до множини $\mathcal{I} \subset (0, 1)$, у якій нуль є точкою скупчення.

Теорема 3. Якщо $\lambda_\varepsilon \rightarrow \lambda$ та $u_\varepsilon \rightarrow u$ слабо в $L_2(a, b)$ при $\mathcal{I} \ni \varepsilon \rightarrow 0$, то λ є власним значенням оператора $\mathcal{S}(\alpha, \Psi)$, а u – відповідна йому власна функція. Крім того, u_ε збігається до u в нормі $L_2(a, b)$.

Розіб'ємо доведення цієї теореми на кілька лем. Спершу дослідимо поведінку власної функції поза ε -околом початку координат.

Лема 2. Нехай $\lambda_\varepsilon \rightarrow \lambda$ та $u_\varepsilon \rightarrow u$ слабо в $L_2(a, b)$ при $\mathcal{I} \ni \varepsilon \rightarrow 0$. Тоді для кожного $\gamma > 0$ послідовність u_ε збігається до u слабо в $W_2^4((a, b) \setminus (-\gamma, \gamma))$ та в нормі простору $C^3([a, b] \setminus (-\gamma, \gamma))$. Крім того, u є розв'язком рівняння

$$Lu = \lambda u, \quad x \in (a, b) \setminus 0. \quad (33)$$

Доведення. Нехай $\mathcal{M}_\gamma$ – множина пробних функцій $\varphi \in C_0^\infty(a, b)$ таких, що $\varphi(x) = 0$ при $x \in (-\gamma, \gamma)$. Тоді з рівняння (2) для всіх $\varphi \in \mathcal{M}_\gamma$ та $\varepsilon < \gamma$ отримуємо

$$\int_a^b Lu_\varepsilon \varphi dx = \lambda_\varepsilon \int_a^b u_\varepsilon \varphi dx, \quad (34)$$

бо $\text{supp} \Psi_\varepsilon \subset (-\gamma, \gamma)$. Права частина (34) має границю при $\varepsilon \rightarrow 0$, тому інтеграл зліва теж збігається для всіх $\varphi \in \mathcal{M}_\gamma$. Отже, $u_\varepsilon \rightarrow u$ слабо в $W_2^4((a, b) \setminus (-\gamma, \gamma))$ і

$$\int_a^b Lu \varphi dx = \lambda \int_a^b u \varphi dx, \quad \varphi \in \mathcal{M}_\gamma.$$

З цієї тотожності випливає, що u є розв'язком рівняння (33) на множині $(a, b) \setminus (-\gamma, \gamma)$, а на підставі довільності γ – на кожному з інтервалів $(a, 0)$ та $(0, b)$. Збіжність u_ε в просторі $C^3((a, b) \setminus (-\gamma, \gamma))$ є наслідком теореми вкладення. $\square$

Тепер досліджуватимемо поведінку власної функції u_ε та її похідних у точках $-\varepsilon$ та ε .

Лема 3. Нехай $\lambda_\varepsilon \rightarrow \lambda$ та $u_\varepsilon \rightarrow u$ слабо в $L_2(a, b)$ при $\mathcal{I} \ni \varepsilon \rightarrow 0$. Тоді $u_\varepsilon^{(j)}(\pm\varepsilon) \rightarrow u^{(j)}(\pm 0)$, $j = 0, \dots, 3$ при $\mathcal{I} \ni \varepsilon \rightarrow 0$.

Доведення. Нехай ζ_k гладкі поза нулем функції з носієм на $[a, b]$ такі, що $\zeta_k(x) = 0$ при $x < 0$, а також $\zeta_k(x) = \frac{x^k}{k!}$ при $x \in (0, \frac{b}{2})$. Нехай χ_K – характеристична функція множини K . Введемо послідовності $\zeta_k^\varepsilon(x) = \chi_{(\varepsilon, b)}(x)\zeta_k(x)$. Зауважимо, що $\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\zeta_k^\varepsilon(x) = 0$ при $x \in (\varepsilon, \frac{b}{2})$.

З попередньої леми отримуємо, що u є розв'язком рівняння (33) та задовольняє умови Діріхле в точках a і b . Домножимо кожне з рівнянь (2), (33) на ζ_0^ε та зінтегруємо один раз частинами. Врахувавши крайові умови, отримаємо

$$u_\varepsilon'''(\varepsilon) = - \int_{\frac{b}{2}}^b u_\varepsilon''' \zeta_0' dx + \int_\varepsilon^b u_\varepsilon \zeta_0 (V - \lambda_\varepsilon) dx,$$

$$u'''(\varepsilon) = - \int_{\frac{b}{2}}^b u''' \zeta_0' dx + \int_\varepsilon^b u \zeta_0 (V - \lambda) dx.$$

За лемою 2 праві частини рівностей мають ту саму границю при $\varepsilon \rightarrow 0$, тобто $u_\varepsilon'''(\varepsilon) \rightarrow u'''(+0)$. Аналогічно можна довести, що $u_\varepsilon'''(-\varepsilon) \rightarrow u'''(-0)$.

Тепер домножимо (2), (33) на ζ_1^ε та зінтегруємо двічі частинами

$$u_\varepsilon''(\varepsilon) = u_\varepsilon'''(\varepsilon)\varepsilon - \int_{\frac{b}{2}}^b u_\varepsilon'' \zeta_1'' dx + \int_\varepsilon^b u_\varepsilon \zeta_1 (\lambda_\varepsilon - V) dx,$$

$$u''(\varepsilon) = u'''(\varepsilon)\varepsilon - \int_{\frac{b}{2}}^b u'' \zeta_1'' dx + \int_\varepsilon^b u \zeta_1 (\lambda - V) dx.$$

З леми 2 та доведеного вище отримуємо, що $u_\varepsilon''(\varepsilon) \rightarrow u''(+0)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Аналогічно покажемо збіжність для u_ε та u'_ε в точках $\pm\varepsilon$. $\square$

Вивчатимемо збіжність власної функції в ε -околі початку координат. Нехай функції g_k , де $k = 1, 2, 3$, є розв'язками задач Коші на відрізку $[-1, 1]$

$$\begin{aligned} g_k^{(4)} + \alpha \Psi(\xi) g_k &= 0, & \xi \in (-1, 1), \\ g_k(-1) &= \delta_{1,k}, & g'_k(-1) = \delta_{2,k}, & g''_k(-1) = \delta_{3,k}, & g'''_k(-1) = 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Тут $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера.

Лема 4. Якщо $\lambda_\varepsilon \rightarrow \lambda$ та $u_\varepsilon \rightarrow u$ слабо в $L_2(a, b)$ при $\mathcal{I} \ni \varepsilon \rightarrow 0$, то

$$\|\varepsilon^{-2} u_\varepsilon(\varepsilon \xi) - \varepsilon^{-2} u_\varepsilon(-\varepsilon) g_1(\xi) - \varepsilon^{-1} u'_\varepsilon(-\varepsilon) g_2(\xi) - u''(-0) g_3(\xi)\|_{C^3([-1, 1])} \rightarrow 0. \quad (36)$$

Доведення. Введемо позначення

$$w_\varepsilon(\xi) = \varepsilon^{-2} u_\varepsilon(\varepsilon \xi) - \varepsilon^{-2} u_\varepsilon(-\varepsilon) g_1(\xi) - \varepsilon^{-1} u'_\varepsilon(-\varepsilon) g_2(\xi) - u''(-0) g_3(\xi).$$

За побудовою з урахуванням (35) функція w_ε на відрізку $[-1, 1]$ є розв'язком задачі

$$\begin{cases} w_\varepsilon^{(4)} + \alpha \Psi(\xi) w_\varepsilon = f_\varepsilon(\xi), & \xi \in (-1, 1), \\ w_\varepsilon(-1) = 0, & w'_\varepsilon(-1) = 0, & w''_\varepsilon = u''_\varepsilon(-\varepsilon) - u''(-0), & w'''_\varepsilon(-1) = \varepsilon u'''_\varepsilon(-\varepsilon) \end{cases} \quad (37)$$

де $f_\varepsilon(\xi) = \varepsilon^2 \lambda_\varepsilon u_\varepsilon(\varepsilon \xi)$. Для кожної функції $f_\varepsilon \in L_2(-1, 1)$ існує єдиний розв'язок w_ε з класу $W_2^4(-1, 1)$ і виконується оцінка

$$\|w_\varepsilon\|_{W_2^4(-1, 1)} \leq C (\|f_\varepsilon\|_{L_2(-1, 1)} + |u''_\varepsilon(-\varepsilon) - u''(-0)|) \quad (38)$$

з незалежною від ε сталою C . Зрозуміло, що

$$\int_{-1}^1 f_\varepsilon^2(\xi) d\xi = \varepsilon^4 \lambda_\varepsilon^2 \int_{-1}^1 u_\varepsilon^2(\varepsilon \xi) d\xi = \varepsilon^3 \lambda_\varepsilon^2 \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u_\varepsilon^2(x) dx \leq \varepsilon^3 \lambda_\varepsilon^2 \|u_\varepsilon\|_{L_2(a, b)}^2 \leq C \varepsilon^3.$$

Отже, згідно з лемою 3 права частина нерівності (38) прямує до нуля. Теорема вкладення $W_2^4(-1, 1) \subset C^3(-1, 1)$ завершує доведення збіжності (36). $\square$

З формули (36) для $\xi = 1$ отримаємо

$$\varepsilon^{-2} [u_\varepsilon(\varepsilon) - u_\varepsilon(-\varepsilon) g_1(1) - \varepsilon u'_\varepsilon(-\varepsilon) g_2(1)] \rightarrow u''(-0) g_3(1), \quad (39)$$

$$\varepsilon^{-1} [u'_\varepsilon(\varepsilon) - \varepsilon^{-1} u_\varepsilon(-\varepsilon) g'_1(1) - u'_\varepsilon(-\varepsilon) g'_2(1)] \rightarrow u''(-0) g'_3(1), \quad (40)$$

$$u''_\varepsilon(\varepsilon) - \varepsilon^{-2} u_\varepsilon(-\varepsilon) g''_1(1) - \varepsilon^{-1} u'_\varepsilon(-\varepsilon) g''_2(1) \rightarrow u''(-0) g''_3(1), \quad (41)$$

$$\varepsilon u'''_\varepsilon(\varepsilon) - \varepsilon^{-2} u_\varepsilon(-\varepsilon) g'''_1(1) - \varepsilon^{-1} u'_\varepsilon(-\varepsilon) g'''_2(1) \rightarrow u''(-0) g'''_3(1), \quad (42)$$

коли $\mathcal{I} \ni \varepsilon \rightarrow 0$. Звідси випливає оцінка

$$|u_\varepsilon(-\varepsilon)| + |u_\varepsilon(\varepsilon)| \leq c\varepsilon. \quad (43)$$

Справді, з (41)–(42) відразу отримаємо

$$u_\varepsilon(-\varepsilon) g_1^{(k)}(1) = O(\varepsilon) \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{для} \quad k = 2, 3.$$

Якщо хоча б одне з чисел $g''_1(1)$ або $g'''_1(1)$ відмінне від нуля, то $u_\varepsilon(-\varepsilon) = O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Якщо ж це не так, тобто $g''_1(1) = g'''_1(1) = 0$, то з (35) одержимо, що g_1 – власна функція задачі (16), що відповідає власному значенню $\alpha \in \Sigma_\Psi$. Крім того, $g'_1(-1) = 0$, що суперечить припущенням (18). Далі з (39), врахувавши поведінку u_ε в точці $-\varepsilon$, отримаємо $u_\varepsilon(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Лема 5. Якщо $\lambda_\varepsilon \rightarrow \lambda$, а $u_\varepsilon \rightarrow u$ слабо в $L_2(a, b)$, тоді u_ε збігається до u в $L_2(a, b)$.

Доведення. Покажемо, що послідовність u_ε рівномірно обмежена на $[a, b]$. Спочатку зауважимо

$$|u_\varepsilon(\varepsilon\xi)| \leq c\varepsilon^2 + |u_\varepsilon(-\varepsilon)g_1(\xi)| + \varepsilon|u'_\varepsilon(-\varepsilon)g_2(\xi)| + \varepsilon^2|u''(-0)g_3(\xi)| \leq c_1\varepsilon. \quad (44)$$

Нехай $\Omega_\varepsilon = (a, b) \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)$. Домножимо рівняння (2) на функцію $\chi_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon$ та зінтегруємо частинами

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon''^2 dx &= \int_{\Omega_\varepsilon} (\lambda_\varepsilon - V) u_\varepsilon^2 dx - u_\varepsilon'''(-\varepsilon)u_\varepsilon(-\varepsilon) + u_\varepsilon'''(\varepsilon)u_\varepsilon(\varepsilon) + \\ &\quad + u_\varepsilon''(-\varepsilon)u'_\varepsilon(-\varepsilon) - u_\varepsilon''(\varepsilon)u'_\varepsilon(\varepsilon) \leq C. \end{aligned} \quad (45)$$

Отже, послідовність $\|u_\varepsilon\|_{W_2^2(\Omega_\varepsilon)}$ обмежена. З теореми вкладення випливає обмеженість послідовності $\max_{x \in (a, b)} |u_\varepsilon(x)|$. Звідси та з (44) одержуємо, що $\max_{x \in (a, b)} |u_\varepsilon(x)| \leq c$, де c не залежить від ε .

Зафіксуємо $\gamma > 0$. Згідно з лемою 2 для достатньо малих ε норма різниці $u_\varepsilon - u$ в просторі $L_2(\Omega_\gamma)$ не перевищуватиме γ . Тоді

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - u\|_{L_2(a, b)} &\leq \|u_\varepsilon - u\|_{L_2(\Omega_\gamma)} + \|u_\varepsilon - u\|_{L_2(-\gamma, \gamma)} \leq \\ &\leq \gamma(1 + 2 \max_{x \in (a, b)} |u_\varepsilon(x) - u(x)|) \leq C\gamma \end{aligned}$$

зі сталою C , незалежною від ε . Залишилося зауважити, що число γ можна взяти як завгодно малим. $\square$

Доведення теореми 3. Як впливає з лем 2–5 гранична функція u є розв'язком рівняння

$$Lu = \lambda u, \quad x \in (a, b) \setminus \{0\},$$

задовольняє умови $u(a) = u'(a) = 0$, $u(b) = u'(b) = 0$ і має одиничну норму в $L_2(a, b)$. Крім того, в початку координат вона задовольняє умову $u(0) = 0$. Залишилось перевірити, що u задовольняє умови спряження (19) у разі відсутності резонансу або умови (25) у випадку резонансу.

Згідно з (43) та лемою 3 послідовності $u'_\varepsilon(-\varepsilon)$ та $\varepsilon^{-1}u_\varepsilon(-\varepsilon)$ мають скінченні границі при $\mathcal{I} \ni \varepsilon \rightarrow 0$. Відомо, що перша з цих границь дорівнює $u'(-0)$, а другу позначатимемо через s . Функція $q_\varepsilon = \varepsilon^{-1}u_\varepsilon(-\varepsilon)g_1 + u'_\varepsilon(-\varepsilon)g_2$ прямує в $C^3(-1, 1)$ до $q = sg_1 + u'(-0)g_2$ при $\mathcal{I} \ni \varepsilon \rightarrow 0$. З (41), (42) легко бачити, що послідовності $\varepsilon^{-1}q''_\varepsilon(1)$ і $\varepsilon^{-1}q'''_\varepsilon(1)$ обмежені при $\mathcal{I} \ni \varepsilon \rightarrow 0$. Звідси маємо, що

$$q''(1) = 0, \quad q'''(1) = 0. \quad (46)$$

З (35), (40) одержимо

$$q'(-1) = u'(-0), \quad q'(1) = u'(+0). \quad (47)$$

Пам'ятаючи, що функції g_1 та g_2 є розв'язками задач (35), отримаємо, що функція q є розв'язком такої задачі Коші:

$$\begin{cases} q^{(4)} + \alpha\Psi q = 0, & \xi \in (-1, 1), \\ q(-1) = s, \quad q'(-1) = u'(-0), \quad q''(-1) = q'''(-1) = 0. \end{cases} \quad (48)$$

Умови спряження граничної задачі залежатимуть від того, чи має задача (48) нетривіальний розв'язок. Припустимо спершу, що $q = 0$, тоді з (47) одержуємо повний набір умов спряження (19).

Тепер розглянемо випадок, коли (48) має нетривіальний розв'язок. Тоді з (46) отримуємо, що $q \in$ власною функцією задачі (16), тобто $\alpha \in \Sigma(\Psi)$. З (47), як наслідок, отримуємо рівність

$$q'(1)u'(-0) - q'(-1)u'(0) = 0,$$

яка у випадку загального положення еквівалентна до $\theta_\Psi(\alpha)u'(-0) - u'(0) = 0$.

Для кожного $\varepsilon > 0$ справджується рівність Лагранжа

$$q_\varepsilon'''(1)q(1) - q_\varepsilon''(1)q'(1) = 0. \quad (49)$$

Поділивши останню рівність на ε і перейшовши до границі при $\mathcal{I} \ni \varepsilon \rightarrow 0$, одержимо

$$u''(-0)g_3'''(1)q(1) + (u''(+0) - u''(-0)g_3''(1))q'(1) = 0. \quad (50)$$

Тут було враховано, що послідовності $\varepsilon^{-1}q_\varepsilon''(1)$ і $\varepsilon^{-1}q_\varepsilon'''(1)$ при $\mathcal{I} \ni \varepsilon \rightarrow 0$ збігаються до $u''(+0) - u''(-0)g_3''(1)$ та $-u''(-0)g_3'''(1)$, відповідно. Це випливає з (41), (42).

Функція $z = u''(-0)g_3$ є розв'язком крайової задачі

$$\begin{cases} z^{(4)} + \alpha \Psi z = 0, & \xi \in (-1, 1), \\ z''(-1) = u''(-0), \quad z'''(-1) = 0, \quad z'(1) = u''(-0)g_3''(1), \quad z'''(1) = u''(-0)g_3'''(1). \end{cases}$$

Запишемо умову існування розв'язку цієї задачі

$$u''(-0)g_3'''(1)q(1) - u''(-0)g_3''(1)q'(1) + u''(-0)q'(-1) = 0.$$

Врахувавши (50), перепишемо її так:

$$\begin{aligned} \{u''(-0)g_3'''(1)q(1) + (u''(+0) - u''(-0)g_3''(1))q'(1)\} + u''(-0)q'(-1) - \\ - u''(+0)q'(1) = u''(-0)q'(-1) - u''(+0)q'(1) = 0. \end{aligned}$$

У випадку загального положення останню умову можна подати у вигляді: $u''(-0) - \theta_\Psi(\alpha)u''(+0) = 0$. Ми отримали умови спряження (25). Отже, гранична функція u є власною функцією оператора $\mathcal{S}(\alpha, \Psi)$, що відповідає власному значенню λ . $\square$

Наслідок 1. Кожне власне значення $\lambda_k^\varepsilon(\alpha, \Psi)$ оператора $\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha, \Psi)$, обмежене знизу при $\varepsilon \rightarrow 0$, має границю, що є точкою спектра оператора $\mathcal{S}(\alpha, \Psi)$.

Доведення. Нагадаємо, що $\lambda_k^\varepsilon(\alpha, \Psi)$ є неперервною функцією параметра $\varepsilon \in (0, 1)$. Нехай власне значення не має границі, тоді виконується нерівність

$$\mu_* = \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda^\varepsilon < \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda^\varepsilon = \mu^*.$$

Числа μ_* , μ^* є скінченними, бо $\lambda_k^\varepsilon(\alpha, \Psi)$ – обмежена функція. Тоді для кожного $\lambda \in [\mu_*, \mu^*]$ існує збіжна до нього послідовність власних значень λ_ε . З теореми 3 випливає, що число λ буде власним значенням оператора $\mathcal{S}(\alpha, \Psi)$. Зважаючи на те, що λ – довільне число з $[\mu_*, \mu^*]$, отримуємо, що цей відрізок міститься в $\sigma(\mathcal{S}(\alpha, \Psi))$. Але це можливо лише тоді, коли $\mu_* = \mu^*$. $\square$

Наслідок 2. До простого власного значення λ оператора $\mathcal{S}(\alpha, \Psi)$ може збігатися не більше одного власного значення $\lambda_k^\varepsilon(\alpha, \Psi)$ оператора $\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha, \Psi)$.

Доведення. Припустимо, що $\lambda_k^\varepsilon(\alpha, \Psi) \rightarrow \lambda$ та $\lambda_{k+1}^\varepsilon(\alpha, \Psi) \rightarrow \lambda$. Тоді існують дві послідовності $\{y_k^\varepsilon(x; \alpha, \Psi)\}_{\varepsilon \in \mathcal{I}}$, $\{y_{k+1}^\varepsilon(x; \alpha, \Psi)\}_{\varepsilon \in \mathcal{I}}$ власних функцій, кожна з яких в $L_2(a, b)$ збігається до одного з векторів $e^{i\varphi}u$. Це неможливо, бо елементи цих послідовностей при кожному $\varepsilon \in \mathcal{I}$ ортогональні в $L_2(a, b)$. $\square$

5.2. Апроксимаційна теорема. Покажемо, що кожна точка спектра $\mathcal{S}(\alpha, \Psi)$ є граничною точкою власних значень операторів $\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha, \Psi)$.

Нехай B – самоспряжений оператор у гільбертовому просторі H з областю визначення $\mathcal{D}(B)$. Пару $(\mu, u) \in \mathbb{R} \times \mathcal{D}(B)$, де $\|u\|_H = 1$, називатимемо *квазімодою* оператора B із нев'язкою $\rho > 0$, якщо $\|Bu - \mu u\|_H \leq \rho$.

Лема 6 ([16]). *Нехай спектр оператора B дискретний. Якщо (μ, u) – квазімода оператора B із нев'язкою $\rho > 0$, то інтервал $[\mu - \rho, \mu + \rho]$ містить власне значення λ оператора B . Крім того, якщо в інтервалі $[\mu - \tau, \mu + \tau]$ немає інших власних значень оператора B , окрім λ , то $\|u - v\|_H \leq 2\tau^{-1}\rho$, де v – нормований власний вектор, що відповідає λ .*

Побудуємо квазімоди операторів $\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha, \Psi)$. Нехай λ – просте власне значення оператора $\mathcal{S}(\alpha, \Psi)$ з власною функцією v , $\|v\| = 1$. Тут і далі $\|\cdot\|$ – норма в $L_2(a, b)$. Для кожного λ та v ми отримали формальні асимптотики Λ_ε , U_ε , які задаються формулами (28) чи (32) залежно від α та Ψ . Під час обґрунтування два різні випадки асимптотик не розрізнятимемо. За побудовою

$$\begin{aligned} LU_\varepsilon - \Lambda_\varepsilon U_\varepsilon &= \varepsilon^2 R_1(\varepsilon, x), & |x| > \varepsilon, \\ LU_\varepsilon + (\alpha \varepsilon^{-2} \Psi(\varepsilon^{-1}x) - \Lambda_\varepsilon) U_\varepsilon &= \varepsilon R_2(\varepsilon, x), & |x| < \varepsilon, \\ [U_\varepsilon]_{x=\pm\varepsilon} &= \varepsilon^2 r_0^\pm(\varepsilon), & [U'_\varepsilon]_{x=\pm\varepsilon} &= \varepsilon^2 r_1^\pm(\varepsilon), \\ [U''_\varepsilon]_{x=\pm\varepsilon} &= \varepsilon^2 r_2^\pm(\varepsilon), & [U'''_\varepsilon]_{x=\pm\varepsilon} &= \varepsilon r_3^\pm(\varepsilon), \end{aligned} \quad (51)$$

де всі залишки R_j , $r_j^\pm$ рівномірно обмежені за своїми аргументами.

Функція U_ε не належить до області визначення оператора $\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha, \Psi)$, бо має розриви в точках $x = \pm\varepsilon$. Однак конструктивно будемо функцію-коректор ζ_ε з такими властивостями:

- ζ_ε – гладка поза точками $x = \pm\varepsilon$ та відмінна від нуля лише при $\varepsilon < |x| < 1$;
- $[\zeta_\varepsilon^{(j)}]_{x=\pm\varepsilon} = -\varepsilon r_j^\pm(\varepsilon)$, $j = 0, 1, 2$, $[\zeta_\varepsilon''']_{x=\pm\varepsilon} = -r_3^\pm(\varepsilon)$;
- існує стала c , яка не залежить від ε , що $\max_{\varepsilon < |x| < 1} \sum_{j=0}^4 |\zeta_\varepsilon^{(j)}(x)| \leq c$.

Тоді функція $U_\varepsilon + \varepsilon \zeta_\varepsilon$ вже тричі неперервно диференційовна в точках $x = \pm\varepsilon$ і належить до $\mathcal{D}(\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha, \Psi))$. Нехай $\mathcal{U}_\varepsilon = \|U_\varepsilon + \varepsilon \zeta_\varepsilon\|^{-1}(U_\varepsilon + \varepsilon \zeta_\varepsilon)$. Якщо у формулах (51) замінити U_ε на $\mathcal{U}_\varepsilon$, то порядок малості залишків у правих частинах не зміниться, бо $\|U_\varepsilon\| \rightarrow 1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Звідси випливає, що пара $(\Lambda_\varepsilon, \mathcal{U}_\varepsilon)$ є квазімодою оператора $\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha, \Psi)$ з нев'язкою порядку ε .

Сформулюємо основний результат.

Теорема 4. *Нехай $(\alpha, \Psi) \in \mathbb{R} \times \mathcal{M}$ і λ – просте власне значення оператора $\mathcal{S}(\alpha, \Psi)$ з власною функцією v , де $\|v\| = 1$. Тоді існує просте власне значення λ_ε оператора*

$\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha, \Psi)$ з нормованою власною функцією u_ε , для яких

$$|\lambda_\varepsilon - \lambda| \leq c_1 \varepsilon, \quad \|u_\varepsilon - v\| \leq c_2 \varepsilon, \quad (52)$$

де сталі c_1, c_2 не залежать від ε .

Доведення. Нехай $(\Lambda_\varepsilon, \mathcal{U}_\varepsilon)$ – квазімода оператора $\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha, \Psi)$, побудована для λ і v . Згідно з лемою 6 існує таке λ_ε , що $|\lambda_\varepsilon - \Lambda_\varepsilon| \leq c_1 \varepsilon$, звідки випливає

$$|\lambda_\varepsilon - \lambda| \leq c_1 \varepsilon.$$

За наслідком 2 до λ збігається лише власне значення λ_ε . Якщо τ менше, ніж відстань від λ до решти спектра оператора $\mathcal{S}(\alpha, \Psi)$, то відрізок $[\lambda - \tau, \lambda + \tau]$ при достатньо малих ε містить лише одне власне значення λ_ε . Тоді $\|u_\varepsilon - \mathcal{U}_\varepsilon\| \leq 2\tau^{-1}c_1\varepsilon$, звідки отримуємо

$$\|u_\varepsilon - v\| \leq c_2 \varepsilon. \quad (53)$$

Тут u_ε, v – відповідні нормовані власні функції. $\square$

6. Граничний оператор у випадку виродженого резонансу. Нагадаємо таке: коли α не належить до резонансної множини, то граничний оператор є прямою сумою операторів Діріхле. У випадку резонансного α граничний оператор $\mathcal{S}(\alpha, \Psi)$ був побудований лише для невинродженого резонансу. Тобто, ми розглянули лише ті прості власні значення задачі (16), для яких відповідні власні функції задовольняють умову $w'_\alpha(-1)w'_\alpha(1) \neq 0$.

Розглянемо випадок виродженого резонансу. Розрізнятимемо два випадки: A) існує власна функція w_α , що задовольняє умови $w'_\alpha(-1)w'_\alpha(1) = 0$ і $w''_\alpha(-1) + w''_\alpha(1) \neq 0$; B) існує така власна функція, що $w'_\alpha(-1) = 0$ та $w'_\alpha(1) = 0$.

У випадку A з (23) випливає $v''(-0)v''(+0) = 0$. Тому природно ввести оператори $T_\pm$, які визначені рівностями $T_\pm u = Lu$ на областях

$$\mathcal{D}(T_-) = \{f \in W_2^4(a, 0) : f(a) = f'(a) = 0, f(0) = f''(0) = 0\},$$

$$\mathcal{D}(T_+) = \{f \in W_2^4(0, b) : f(0) = f''(0) = 0, f(b) = f'(b) = 0\}.$$

У випадку простого α з (21) випливає, що одне з чисел $v'(-0)$ або $v'(+0)$ є нулем. Граничним оператором буде $\mathcal{S}(\alpha, \Psi) = S_- \oplus T_+$, коли $w'_\alpha(-1) = 0$ та $w'_\alpha(1) \neq 0$, і $\mathcal{S}(\alpha, \Psi) = T_- \oplus S_+$, якщо $w'_\alpha(-1) \neq 0$, $w'_\alpha(1) = 0$. Для двократного власного значення замість умови (23) отримуємо систему

$$\begin{cases} w'_{\alpha,1}(1)v''(+0) - w'_{\alpha,1}(-1)v''(-0) = 0, \\ w'_{\alpha,2}(1)v''(+0) - w'_{\alpha,2}(-1)v''(-0) = 0. \end{cases}$$

Базу $w_{\alpha,1}, w_{\alpha,2}$ у власному підпросторі вибрано так, що $w'_{\alpha,1}(-1)w'_{\alpha,1}(1) = 0$. Легко переконатися, що визначник цієї системи відмінний від нуля, звідки випливає, що обидва числа $v''(-0)$ та $v''(+0)$ дорівнюють нулю, а граничний оператор $\mathcal{S}(\alpha, \Psi) = T_- \oplus T_+$.

У випадку B асимптотичне розвинення власної функції на $(-\varepsilon, \varepsilon)$ відрізняється від (5), а саме

$$u_\varepsilon(x) \sim w(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon w_1(\varepsilon^{-1}x) + \dots$$

Далі всі міркування аналогічні до випадку невідродженого резонансу. Очевидно, що $\mathcal{S}(\alpha, \Psi)$ на своїй області визначення заданий рівністю $\mathcal{S}(\alpha, \Psi)u = Lu$, тому випишемо лише область визначення цього оператора. Зокрема,

$$\mathcal{D}(\mathcal{S}(\alpha, \Psi)) = \{f \in W_2^4((a, b) \setminus \{0\}) : f(a) = f(b) = 0, f'(a) = f'(b) = 0, \\ f(+0) - \vartheta_\Psi(\alpha)f(-0) = 0, f'(0) = 0, \vartheta_\Psi(\alpha)f'''(+0) - f'''(-0) = 0\}$$

для простого α . Тут $\vartheta_\Psi(\alpha) = w_\alpha(1)/w_\alpha(-1)$. Для двократного α матимемо

$$\mathcal{D}(\mathcal{S}(\alpha, \Psi)) = \{f \in W_2^4((a, b) \setminus \{0\}) : f(a) = f(b) = 0, f'(a) = f'(b) = 0, \\ f(+0) - \vartheta_1(\alpha)f(-0) = 0, f'(+0) - \vartheta_2(\alpha)f'(-0) = 0, \\ \vartheta_2(\alpha)f''(+0) - f''(-0) = 0, \vartheta_1(\alpha)f'''(+0) - f'''(-0) = 0\}.$$

Тут $\vartheta_1(\alpha) = \frac{w_{\alpha,1}(1)}{w_{\alpha,1}(-1)}$, $\vartheta_2(\alpha) = \frac{w'_{\alpha,2}(1)}{w'_{\alpha,2}(-1)}$, де база $w_{\alpha,1}$, $w_{\alpha,2}$ власного підпростору вибрана так, що $w'_{\alpha,1}(-1) = w'_{\alpha,1}(1) = 0$.

Автор висловлює подяку Ю. Д. Головатому за формулювання задачі. Автор вдячний Р. О. Гриніву за цінні поради під час написання статті, а також рецензенту за коментарі та зауваження, які допомогли вдосконалити текст статті.

1. Головатий Ю.Д. Точні моделі для операторів Шредінгера з δ' -подібними потенціалами / Головатий Ю.Д., Манько С.С. // Укр. матем. вісник. – 2009. – Т. 6, №2. – С. 173-207.
2. Albeverio S. Solvable models in quantum mechanics. With an appendix by Pavel Exner / Albeverio S., Gesztesy F., Høegh-Krohn R., Holden H. – AMS Chelsea Publishing, 2005.
3. Albeverio S. Singular perturbations of differential operators and solvable Schrödinger type operators / Albeverio S., Kurasov P. – Cambridge, 2000.
4. Демков Ю.Н. Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике / Демков Ю.Н., Островский В.Н. – Ленинград, 1975.
5. Yablonski A. Differential equations with generalized coefficients / Yablonski A. // Nonlinear Anal.: Theory, Methods, Appl. – 2005. – Vol. 63, №2. – P. 171-197.
6. Zavalishchin S.T. Dynamic impulse systems: theory and applications / Zavalishchin S.T., Seseikin A.N. – Dordrecht, 1997.
7. Березин Ф.А. Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом / Березин Ф.А., Фаддеев Л.Д. // Докл. АН СССР. – 1961. – Т. 137. – С. 1011-1015.
8. Головатий Ю.Д. Оператор Шредінгера з δ' -потенціалом / Головатий Ю.Д., Манько С.С. // Доп. НАНУ. – 2009. – №5. – С. 16-21.
9. Christiansen P.L. On the existence of resonances in the transmission probability for interactions arising from derivatives of Dirac's delta function / Christiansen P.L., Arnbak H.C., Zolotaryuk A.V., Ermakov V.N., Gaididei Y.B. // J. Phys. A. – 2003. – Vol. 36. – P. 7589-7600.
10. Zolotaryuk A.V. Two-parametric resonant tunneling across the $\delta'(x)$ potential / Zolotaryuk A.V. // Adv. Sci. Lett. – 2008. – Vol. 1. – P. 187-191.
11. Березин Ф.А. Уравнение Шредингера / Березин Ф.А., Шубин М.А. – М., 1983.
12. Birman M.Sh. Estimates for the number of negative eigenvalues of the Schrödinger operator and its generalization / Birman M.Sh., Solomyak M.Z. // Adv. Sov. Math. – 1991. – №7. – P. 1-55.
13. Азизов Т.Я. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой / Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. – М., 1986.

14. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы / *Наймарк М.А.* – М., 1969.
15. *Ćurgus B.* A Krein space approach to symmetric ordinary differential operators with an indefinite weight function / *Ćurgus B., Langer H.* // J. Diff. Eq. – 1989. – Vol. 79, №1 – P. 31-61.
16. *Вишик М.И.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром / *Вишик М.И., Люстерник А.А.* // Успехи мат. наук. – 1957. – Т. 12, №5. – С. 3-122.

FOURTH ORDER DIFFERENTIAL OPERATORS WITH DISTRIBUTIONS IN COEFFICIENTS

Stepan MAN'KO

*Ivan Franko National University of L'viv,
79000 L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: s_manko@franko.lviv.ua*

In [1] the question on interpretation of the Schrödinger operator with the $\alpha\delta'$ -potential was considered. Here $\delta(x)$ is the Dirac delta-function. In the present paper the results of [1] are generalized for the case of the fourth order differential operator with a potential $\alpha\delta'''(x)$. The asymptotic behavior of the family of operators with smooth coefficients approximating the singular potential is investigated. The limit operator is constructed. In order to get the limit operator the asymptotics of spectra and eigenspaces of the regularizing operators are constructed. The limit operator depends on the type of approximation of the derivative of Dirac's function and constant factor α .

Key words: differential operator, asymptotic, spectrum, resonant set.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ОБОБЩЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ В КОЭФФИЦИЕНТАХ

Степан МАНЬКО

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000 Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: s_manko@franko.lviv.ua*

В [1] дан ответ на вопрос, как понимать оператор Шрёдингера с $\alpha\delta'$ -потенциалом, где $\delta(x)$ – функция Дирака. В данной работе результаты [1] переносятся на случай дифференциального оператора четвертого порядка с потенциалом $\alpha\delta'''(x)$. Изучается асимптотическое поведение семьи

операторов с гладкими коэффициентами, аппроксимирующими сингулярный потенциал. Построен граничный оператор, выбор которого обусловлен асимптотикой спектра и собственных пространств регуляризирующих операторов. Проблема интерпретации дифференциального оператора четвертого порядка с обобщенным коэффициентом обладает скрытыми параметрами, поэтому ее решение зависит от способа аппроксимации третьей производной функции Дирака и числового множителя α .

Ключевые слова: дифференциальный оператор, асимптотика, спектр, резонансное множество.

Стаття надійшла до редколегії 10.12.2010

Прийнята до друку 22.12.2010

УДК 517.53

ПРО ПОВОДЖЕННЯ НУЛІВ ЧАСТКОВИХ СУМ СТЕПЕНЕВОГО РОЗВИНЕННЯ ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ В ТЕРМІНАХ КЛАСІВ ЗБІЖНОСТІ

Оксана МУЛЯВА¹, Мирослав ШЕРЕМЕТА²

¹Київський національний університет харчових технологій,
01004 Київ, вул. Володимирівська, 68
e-mail: info@nift.edu.ua

²Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000 Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: M_M_Sheremeta@list.ru

Для цілої функції $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$ з нулем a кратності m нехай (z_n) – послідовність нулів часткових сум $S_n(z) = \sum_{k=0}^n f_k z^k$, яка прямує до a . У термінах класів збіжності описано швидкість прямування $|z_n - a|$ до 0.

Ключові слова: ціла функція, часткова сума, нулі, клас збіжності.

1. Вступ. Нехай

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k \quad (1)$$

– ціла трансцендентна функція, $a \neq 0$ – її нуль кратності m , а (z_n) – збіжна до a послідовність нулів часткових сум $S_n(z) = \sum_{k=0}^n f_k z^k$, тобто $S_n(z_n) = 0$ і $z_n \rightarrow a$ ($n \rightarrow \infty$).

Є. Нечюшкіте і Ш. Стреліц [1] довели таке: якщо f – ціла функція скінченного порядку $\rho[f]$, то $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n}{-\ln |z_n - a|} = m\rho[f]$.

У термінах узагальнених порядків поведінки $|z_n - a|$ вивчали Л.Я. Микитюк та М.М. Шеремета [2]. Щоб сформулювати їхній результат, через L позначимо клас додатних неперервних зростаючих до $+\infty$ на $[x_0, +\infty)$ функцій α (вважатимемо, що $\alpha(x) = \alpha(x_0)$ на $(-\infty, x_0]$) і говоритимемо, що $\alpha \in L^0$, якщо $\alpha \in L$ і $\alpha((1+o(1))x) = (1+o(1))\alpha(x)$ при $x \rightarrow +\infty$. Нарешті, $\alpha \in L_{pz}$, якщо $\alpha \in L$ і $\alpha(cx) \sim \alpha(x)$ при

$x \rightarrow +\infty$ для кожного $c \in (0, +\infty)$, тобто α – повільно зростаюча функція. Зрозуміло, що $L_{pz} \subset L^0 \subset L$. Нехай $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, $\alpha \in L$ і $\beta \in L$. Узагальненим порядком цілої функції f називається [3] величина $\rho_{\alpha\beta}[f] = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\ln M_f(r))}{\beta(\ln r)}$. В [2] доведено таку теорему.

Теорема 0. Нехай $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ – неперервно диференційовні функції, $B(x; c) = \beta^{-1}(c\alpha(x))$, $0 < c < +\infty$. Припустимо, що виконується одна з умов:

- а) $\alpha \in L^0$, $\beta(\ln x) \in L^0$ і $xB'(x; c) \rightarrow \frac{1}{\rho}$ ($x \rightarrow +\infty$) для кожного $c \in (0, +\infty)$;
 б) $\alpha \in L_{pz}$, $\beta(\ln x) \in L_{pz}$ і $xB'(x; c) = O(1)$ ($x \rightarrow +\infty$) для кожного $c \in (0, +\infty)$.

Тоді

$$\rho_{\alpha\beta}(f) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha(n/\rho)}{\beta\left(\frac{1}{\rho} + \ln|a| + \frac{m}{n} \ln \frac{1}{|z_{n+m-1} - a|}\right)}.$$

Якщо $\alpha(x) \equiv \ln x$ і $\beta(x) \equiv x$ для $x \geq e$, то з теореми 0 отримаємо формулу, доведену в [1], якщо виберемо $\alpha(x) \equiv x$ ($x > 0$), $\beta(x) = e^{\rho x}$, то для величини типу $\sigma[f]$ функції f з цієї ж теореми одержимо рівність $\sigma[f] = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e\rho|a|^\rho} |z_{n+m-1} - a|^{m\rho/n}$. Зрештою, в [4] поведження $|z_n - a|$ вивчено у термінах логарифмічних порядку $\rho_l[f]$ і типу $\tau_l[f]$, які означаються формулами $\rho_l[f] = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln \ln r}$ і $\tau_l[f] = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M_f(r)}{(\ln r)^{\rho_l}}$. За умови $1 < \rho_l[f] < +\infty$ доведено, що

$$\rho_l[f] = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln\left(\frac{1}{n} \ln \frac{1}{|z_n - a|}\right)} + 1$$

і $\tau_l[f] = (\rho_l - 1)^{\rho_l - 1} \rho_l^{\rho_l} m^{1 - \rho_l} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^{\rho_l} (\ln(1/|z_n - a|))^{1 - \rho_l}$.

Мета нашої праці – дослідити поведження $|z_n - a|$ у термінах того чи іншого класу збіжності.

2. Валіронів клас збіжності. За Ж. Валіроном [5] ціла функція порядку $\rho[f] = \rho \in (0, \infty)$ належить до класу збіжності, якщо $\int_1^\infty \frac{\ln M_f(r)}{r^{\rho+1}} dr < +\infty$. Правильна така теорема.

Теорема 1. Якщо ціла функція f належить до валіронового класу збіжності, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_{n+m-1} - a|^{m\rho/n} < +\infty. \quad (2)$$

Для доведення цієї теореми нам потрібні такі дві леми.

Лема 1. [5] Якщо ціла функція (1) належить до валіронового класу збіжності, то $\sum_{n=1}^{\infty} |f_k|^{\rho/k} < +\infty$.

Лема 2. Нехай ціла функція f задана рядом (1), $(c_k^{(j)})_{k=1}^{\infty}$ – обмежені послідовності комплексних чисел, $1 \leq j \leq m$, а

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k \quad (g_k = f_k + c_k^{(1)} f_{k+1} + \dots + c_k^{(m)} f_{k+m}).$$

Тоді g – ціла функція і належить до валіронового класу збіжності, якщо і тільки якщо f належить до цього класу.

Справді, нехай $\mu_f(r) = \max\{|f_k| r^k : k \geq 0\}$ – максимальний член степеневому ряду (1). Тоді з огляду на нерівність Коші для будь-якого $\varepsilon > 0$ і всіх $r > 0$

$$\mu_f(r) \leq M_f(r) \leq \sum_{k=0}^{\infty} |f_k| r^k = \sum_{k=0}^{\infty} |f_k| ((1+\varepsilon)r)^k (1+\varepsilon)^{-k} \leq \mu_f((1+\varepsilon)r) \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}. \quad (3)$$

Звідси випливає, що f належить до валіронового класу збіжності тоді і тільки тоді, коли $\int_1^{\infty} \frac{\ln \mu_f(r)}{r^{\rho+1}} dr < +\infty$. З іншого боку, оскільки $|c_k^{(j)}| \leq K < +\infty$ для всіх $k \geq 1$ і $1 \leq j \leq m$, то (див. [2], [4]) для всіх $r > 1$

$$\mu_f(r) \left(1 - \frac{K}{r-1}\right) \leq \mu_g(r) \leq \mu_f(r) \left(1 + \frac{K}{r-1}\right), \quad (4)$$

тобто $\ln \mu_g(r) = \ln \mu_f(r) + o(1)$, $r \rightarrow \infty$, і отже, функції g і f належать чи не належать до валіронового класу збіжності одночасно.

Доведення теореми 1. Оскільки f має нуль a кратності m , то $f(z) = (z-a)^m \varphi(z)$, де $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k z^k$ – ціла трансцендентна функція і $\varphi(a) \neq 0$. Легко побачити, що $\ln M_f(r) = \ln M_{\varphi}(r) + O(\ln r)$, $r \rightarrow +\infty$. Тому функції f і φ належать чи не належать до валіронового класу збіжності одночасно.

Як і в [2] та [4], неважко перевірити, що

$$\begin{aligned} S_n(z) &= (z-a)^m \sum_{k=0}^n \varphi_k z^k - \varphi_n z^{n+m} - \varphi_{n-1} z^{n+m-1} - \dots - \varphi_{n-m+1} z^{n+1} + \\ &+ \varphi_n C_m^1 a z^{n+m-1} + \varphi_{n-1} C_m^1 a z^{n+m-2} + \dots + \varphi_{n-m+2} C_m^1 a z^{n+1} + \dots + \\ &+ (-1)^m C_m^{m-1} \varphi_n z^{n+1} a^{m-1} = (z-a)^m \sum_{k=0}^n \varphi_k z^k - \varphi_{n-m+1} z^{n+1} + \\ &+ \varphi_{n-m+2} (C_m^1 a z^{n+1} - z^{n+2}) + \dots + \varphi_n ((-1)^m C_m^{m-1} z^{n+1} a^{m-1} + \dots + C_m^1 a z^{n+m-1} - z^{n+m}) \end{aligned}$$

і, оскільки $S_n(z_n) = 0$, то

$$\begin{aligned} (z_n - a)^m \sum_{k=0}^n \varphi_k z_n^k &= z_n^{n+1} (\varphi_{n-m+1} + (-C_m^1 a + z_n) \varphi_{n-m+2} + \\ &+ ((-1)^{m+1} C_m^{m-1} a^{m-1} + \dots + (-1) C_m^1 a z_n^{m-2} + z_n^{m-1}) \varphi_n), \end{aligned}$$

тобто

$$(z_{n+m-1} - a)^m \sum_{k=0}^{n+m-1} \varphi_k z_{n+m-1}^k = z_{n+m-1}^{n+m} g_n, \quad (5)$$

де

$$g_n = \varphi_n + (-C_m^1 a + z_{n+m-1})\varphi_{n+1} + \dots + \\ + ((-1)^{m+1} C_m^{m-1} a^{m-1} + \dots + (-1) C_m^1 a z_{n+m-1}^{m-2} + z_{n+m-1}^{m-1})\varphi_{n+m-1}.$$

За лемою 2 з φ_n замість f_n ціла функція з коефіцієнтами g_n належить до валіронового класу збіжності тоді і тільки тоді, коли до цього класу належить функція φ і, отже, функція f . Тому за лемою 1 $\sum_{n=1}^{\infty} |g_n|^{\rho/n} < +\infty$.

Оскільки $z_n \rightarrow a$ і $\sum_{k=0}^n \varphi_k z_n^k \rightarrow \varphi(a) \neq 0$ при $n \rightarrow \infty$, то з (5) маємо

$$|g_n| = |z_{n+m-1}|^{-(n+m)} |z_{n+m-1} - a|^m \left| \sum_{k=0}^{n+m-1} \alpha_k z_{n+m-1}^k \right| = \frac{1+o(1)}{|a|^{n+m}} |z_{n+m-1} - a|^m,$$

$n \rightarrow \infty$, тобто $|g_n|^{1/n} = \frac{1+o(1)}{|a|} |z_{n+m-1} - a|^{m/n}$, $n \rightarrow \infty$, і отже, правильне співвідношення (2). Теорему 1 доведено. $\square$

3. Узагальнений клас збіжності. Для $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ будемо говорити, що ціла функція f належить до (узагальненого) $\alpha\beta$ -класу збіжності, якщо $\int_{r_0}^{\infty} \frac{\alpha(\ln M_f(r))}{r\beta(\ln r)} dr < +\infty$. З теореми 2 зі статті [6] випливає така лема.

Лема 3. Нехай α – зв’язана на $[x_0, +\infty)$ функція і $\alpha(e^x) \in L^0$, а функція $\beta \in L^0$ задовольняє умови $\frac{x\beta'(x)}{\beta(x)} \geq h > 0$ ($x \geq x_0$) і $\int_{x_0}^{\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} dx < +\infty$. Якщо ціла функція f належить до $\alpha\beta$ -класу збіжності, то $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha(n) - \alpha(n-1))B\left(\frac{1}{n} \ln \frac{1}{|f_n|}\right) < +\infty$.

Використовуючи цю лему і наведені вище міркування, неважко довести таку теорему.

Теорема 2. Нехай функції α і β такі, як у лемі 3. Якщо ціла функція f належить до $\alpha\beta$ -класу збіжності, то $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha(n) - \alpha(n-1))B\left(\frac{m}{n} \ln \frac{1}{|z_{n+m-1} - a|}\right) < +\infty$.

Доведення. З (3) за умов $\alpha \in L^0$ і $\beta \in L^0$ легко випливає, що f належить до $\alpha\beta$ -класу збіжності тоді і тільки тоді, коли $\int_{r_0}^{\infty} \frac{\alpha(\ln \mu_f(r))}{r\beta(\ln r)} dr < +\infty$, тому з (4) отримуємо, що f і функція g з лемі 2 належать чи не належать до $\alpha\beta$ -класу збіжності одночасно. Оскільки $\ln r = o(\ln M_f(r))$ і $\ln M_f(r) = \ln M_\varphi(r) + O(\ln r)$ при $r \rightarrow +\infty$, то функції φ і f належать чи не належать до $\alpha\beta$ -класу збіжності одночасно. Звідси, як у доведенні теореми 1, випливає, що функція g з коефіцієнтами g_n , які визначаються рівністю (5), належить до $\alpha\beta$ -класу збіжності і, отже, за лемою 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha(n) - \alpha(n-1))B\left(\frac{1}{n} \ln \frac{1}{|g_n|}\right) < +\infty. \quad (6)$$

Проте з (5), як у доведенні теореми 1, випливає, що

$$\frac{1}{n} \ln \frac{1}{|g_n|} = \frac{m}{n} \ln \frac{1}{|z_{n+m-1} - a|} + \ln |a| + o(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Неважко показати, що з умови $\beta \in L^0$ випливає, що $B((1+o(1))x) = (1+o(1))B(x)$ при $x \rightarrow +\infty$. Тому з (6) і (7) отримуємо потрібне співвідношення. Теорему 2 доведено. $\square$

Для цілих функцій скінченного логарифмічного порядку $p[f] = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln \ln r}$ логарифмічний клас збіжності вводиться [6] за допомогою умови $\int_e^\infty \frac{\ln M_f(r)}{r^{\ln p + 1}} dr < +\infty$, $p > 1$. Функції $\alpha(x) \equiv x$ і $\beta(x) \equiv x^{p+1}$ не задовольняють умови теореми 2, тобто застосувати цю теорему не можна. Проте правильний такий результат.

Теорема 3. *Якщо ціла функція f належить до логарифмічного класу збіжності, то $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} \ln \frac{1}{|z_n - a|})^{1-p} < +\infty$.*

Доведення цієї теореми таке ж, як і теорем 1 та 2, і ґрунтується на такому: якщо ціла функція f належить до логарифмічного класу збіжності, то за теоремою 4 із [6] $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} \ln \frac{1}{|f_n|})^{1-p} < +\infty$.

1. Нечюшките Э. О скорости стремления к пределу нулей частных сум ряда Тейлора целой функции / Нечюшките Э., Стрелиц Ш. // Литовск. матем. сб. – 1961. – Т. 1-2. – С. 181-185.
2. Микитюк Л.Я. Про нулі часткових сум тейлорового розвинення цілої функції / Микитюк Л.Я., Шеремета М.М. // Доп. НАН України. – 2003. – №6. – С. 16-20.
3. Шеремета М.М. О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов её степенного разложения / Шеремета М.М. // Изв. вузов. Матем. – 1961. – №2. – С. 100-108.
4. Микитюк Л.Я. Про нулі часткових сум тейлорового розвинення цілої функції скінченного логарифмічного порядку / Микитюк Л.Я. // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2003. – Вип. 62. – С. 85-88.
5. Valiron G. General theory of integral functions / Valiron G. Toulouse, 1923.
6. Мулява О.М. Класи збіжності в теорії рядів Діріхле / Мулява О.М. // Доп. НАН України. – 1999. – №3. – С. 35-39.

ON THE BEHAVIOUR OF PARTIAL SUMS ZEROS OF THE POWER DEVELOPMENT OF AN ENTIRE FUNCTION IN THE TERMS OF CONVERGENCE CLASSES

Oksana MULYAVA¹, Myroslav SHEREMETA²

¹Kyiv National University of Food Technology,
01004 Kyiv, Volodymyrska Str., 68
e-mail: info@nuft.edu.ua

²Ivan Franko National University of L'viv,
79000 L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: M_M_Sheremeta@list.ru

For an entire function $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$ with a zero a of a multiplicity m let (z_n) be a sequence tending to a of zeros of partial sums $S_n(z) = \sum_{k=0}^n f_k z^k$. Rate of the tendency $|z_n - a|$ to 0 is described in the terms of convergence classes.

Key words: entire function, partial sum, zeros, convergence class.

О ПОВЕДЕНИИ НУЛЕЙ ЧАСТИЧНЫХ СУММ СТЕПЕННОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ В ТЕРМИНАХ КЛАССОВ СХОДИМОСТИ

Оксана МУЛЯВА¹, Мирослав ШЕРЕМЕТА²

¹ *Киевский национальный университет пищевых технологий,
01004 Киев, ул. Владимирская, 68
e-mail: info@nuft.edu.ua*

² *Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000 Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: M_M_Sheremeta@list.ru*

Для целой функции $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$ с нулем a кратности m пусть (z_n) – стремящаяся к a последовательность нулей частичных сумм $S_n(z) = \sum_{k=0}^n f_k z^k$. В терминах классов сходимости описана скорость стремления $|z_n - a|$ к 0.

Ключевые слова: целая функция, частичная сумма, нули, класс сходимости.

Стаття надійшла до редколегії 22.01.2010

Прийнята до друку 22.12.2010

УДК 513.6

ПРО НЕВИРОДЖЕНІСТЬ ДОБУТКУ ТЕЙТА ДЛЯ КРИВИХ НАД ПСЕВДОСКІНЧЕННИМИ ПОЛЯМИ

Володимир НЕСТЕРУК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000 Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: volodymyr-nesteruk@rambler.ru

Доведено невідродженість добутку Тейта для кривих над псевдоскінченними полями.

Ключові слова: добуток Тейта, проєктивна крива, яковіан кривої, псевдоскінченне поле.

1. Вступ. Дж. Тейт [9] та І. Р. Шафаревич [4] визначили добуток

$$H^0(G, A) \times H^1(G, \hat{A}) \rightarrow \text{Br}K,$$

де A – абелевий многовид над полем K ; $\hat{A}$ – двоїстий многовид; $\overline{K}$ – сепарабельне замикання поля K ; $G = \text{Gal}(\overline{K}/K)$ – абсолютна група Галуа поля K ; $H^0(G, A)$ і $H^1(G, \hat{A})$ – когомології Галуа; $\text{Br}K$ – група Брауера поля K , і довели його невідродженість для випадку локального поля K .

Відтоді дослідженням властивостей добутку Тейта займалися багато відомих математиків, зокрема О. М. Введенський, Ф. Гесс, М. Пап'янін. О. М. Введенський в [2] явно обчислив цей добуток в еліптичних кривих над локальними полями для простих циклічних розширень. Ф. Гесс у [7] навів елементарне доведення невідродженості добутку для випадку кривих, визначених над скінченним полем. Зокрема, М. Пап'янін подав у [8] елементарне доведення невідродженості добутку для випадку кривих, визначених над повним дискретно нормованим полем зі скінченним полем лишків.

Мета нашої праці – дослідити невідродженості добутку Тейта для кривих над псевдоскінченними полями.

Псевдоскінченні поля ввів Дж. Акс у 1968 р. у праці [5]. Поле k називають *псевдоскінченним* [6], якщо k досконале, k має єдине розширення степеня n для кожного натурального числа n і кожний непорожній абсолютно незвідний многовид, визначений над полем k , має k -раціональну точку. Прикладами псевдоскінченних полів є неголовні ультрадобутки скінченних полів і нескінченні алгебричні розширення

скінченних полів, які мають скінченний p -примарний степінь для кожного простого числа p .

Добуток Тейта є білінійним відображенням. Одне з означень цього добутку можна знайти у Ф. Гесса в [7], де наведено елементарне доведення невідродженості добутку Тейта між групою m -кручення якобіана $J(C_K)$ кривої C та m -групою Морделла – Вейля $J(C_K)/mJ(C_K)$ для випадку кривих, визначених над скінченним полем K , яке містить корені степеня m з 1, $(m, \text{char}(K)) = 1$.

Використовуючи метод, запропонований Ф. Гессом, ми доведемо невідродженість добутку Тейта для кривих над псевдоскінченними полями.

2. Криві над псевдоскінченними полями. Нехай C – абсолютно незвідна, неособлива проєктивна крива, визначена над псевдоскінченним полем k , K – алгебричне розширення поля k , $K(C)$ – поле функцій на кривій C . $\bar{k}$ (відповідно $\bar{K}$) означає сепарабельне замикання поля k (відповідно K). Далі m означає натуральне число таке, що $(m, \text{char}(k)) = 1$. Позначимо через $J(C_K)$ якобіан кривої C , $J(C_K)_m$ – підгрупу точок в $J(C_K)$, порядок яких ділить m . Для класів дивізорів $x \in J(C_K)_m$ та $y \in J(C_K)/mJ(C_K)$ існують взаємно прості дивізори D і R такі, що $x = [D]$ і $y = [R] + mJ(C_K)$. Нехай $f \in K(C)$ функція з дивізором $(f) = mD$.

Означення 1. Білінійне відображення

$$t_m: J(C_K)_m \times J(C_K)/mJ(C_K) \longrightarrow K^*/K^{*m},$$

для якого $t_m(x, y) = f(R)$ називають добутком Тейта.

Для доведення невідродженості добутку Тейта для кривих, визначених над псевдоскінченними полями, нам будуть потрібні декілька лем про псевдоскінченні поля та абелеві многовиди над ними, одна загальна лема про білінійні добутки скінченних абелевих груп та аналог теореми щільності Чеботарьова.

Лема 1. Нехай k – псевдоскінченне поле. Припустимо, що група μ_m коренів степеня m з 1 міститься в k . Тоді $k^*/k^{*m} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Доведення. З точної послідовності

$$0 \rightarrow \mu_m(\bar{k}) \rightarrow \bar{k}^* \xrightarrow{m} \bar{k}^* \rightarrow 0$$

отримуємо точну послідовність груп когомологій

$$0 \rightarrow \mu_m(k) \rightarrow k^* \xrightarrow{m} k^* \rightarrow H^1(k, \mu_m(\bar{k})) \rightarrow H^1(k, \bar{k}^*).$$

За теоремою Гільберта $H^1(k, \bar{k}^*) = 0$, тому маємо точну послідовність

$$0 \rightarrow \mu_m(k) \rightarrow k^* \xrightarrow{m} k^* \rightarrow H^1(k, \mu_m(\bar{k})) \rightarrow 0.$$

Враховуючи, що абсолютна група Галуа поля k ізоморфна $\widehat{\mathbb{Z}}$, $\widehat{\mathbb{Z}}$ – вільна топологічна група з однією твірною і $\mu_m(\bar{k}) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, одержуємо, що

$$k^*/k^{*m} \cong H^1(k, \mu_m(\bar{k})) \cong \text{Hom}(\widehat{\mathbb{Z}}, \mu_m(\bar{k})) \cong \text{Hom}(\widehat{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

□

Означення 2. Під абелевим многовидом розуміють алгебричний многовид, що наділений структурою абелевої групи і у цьому разі групова операція задана морфізмами над k : $A \times A \longrightarrow A$ $((x, y) \mapsto x + y)$ і $A \longrightarrow A$ $(x \mapsto -x)$.

Лема 2. Нехай A – абелевий многовид, визначений над псевдоскінченним полем k . Тоді $H^1(k, A(\bar{k})) = 0$.

Елементи групи $H^1(k, A(\bar{k}))$ інтерпретують як головні однорідні простори для многовиду A . Оскільки псевдоскінченне поле k є псевдоалгебрично замкненим, то кожний многовид визначений над k має k -раціональну точку і звідси випливає, що група головних однорідних просторів тривіальна.

Лема 3. Нехай A – абелевий многовид над псевдоскінченним полем k . Тоді групи $A(k)/mA(k)$ та $A(k)_m$ скінченні і мають однаковий порядок.

Доведення. З точної послідовності

$$0 \rightarrow A(\bar{k})_m \rightarrow A(\bar{k}) \xrightarrow{m} A(\bar{k}) \rightarrow 0$$

отримуємо точну послідовність груп когомологій

$$0 \rightarrow A(k) \xrightarrow{m} A(k) \rightarrow H^1(k, A(\bar{k})_m) \rightarrow H^1(k, A(\bar{k})).$$

Враховуючи, що $H^1(k, A(\bar{k})) = 0$ за попередньою лемою 2 і $H^1(k, A(\bar{k})_m) \cong H^1(\bar{\mathbb{Z}}, A(\bar{k})_m) \cong A(k)_m$, одержуємо $A(k)/mA(k) \cong A(k)_m$. $\square$

Означення 3. Білінійний добуток $t: A \times B \rightarrow Z$ абелевих груп A, B і Z невідроджений, якщо відповідні гомоморфізми $A \rightarrow \text{Hom}(B, Z)$ і $B \rightarrow \text{Hom}(A, Z)$ ін'єктивні.

Лема 4. Нехай A, B – скінченні абелеві групи з показником m і $|A| = |B|$. Білінійний добуток $t: A \times B \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ невідроджений тоді і тільки тоді, коли відповідний гомоморфізм $A \rightarrow \text{Hom}(B, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ ін'єктивний.

Доведення можна знайти у [7]. Для зручності читача нагадаємо доведення леми.

Доведення. Добуток t невідроджений за означенням, якщо відповідні гомоморфізми $A \rightarrow \text{Hom}(B, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ і $B \rightarrow \text{Hom}(A, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ ін'єктивні.

Якщо $A \xrightarrow{t} \text{Hom}(B, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ ін'єктивне, то воно також сюр'єктивне, оскільки $|A| = |B| = |\text{Hom}(B, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})|$. Нехай $b \in B$ і $c \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ елементи однакового порядку d , а $h \in \text{Hom}(B, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ такий, що $h(b) = c$. Із сюр'єктивності t випливає існування елемента $a \in A$, що $h = t(a, \cdot)$ і $t(a, b) = c$. Це означає, що $t(\cdot, b)$ має як мінімум порядок d і, отже, гомоморфізм $B \rightarrow \text{Hom}(A, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ ін'єктивний. $\square$

Введемо такі позначення. Нехай $L/K(C)$ – скінченне розширення Галуа поля $K(C)$ з групою Галуа $\mathfrak{g}$, $\tau \in \mathfrak{g}$ і n – натуральне число.

Означення 4. Групою розвинення точки P поля L у полі L називають підгрупу $\mathfrak{g}_P$ групи $\mathfrak{g}$, яка складається з тих елементів σ групи $\mathfrak{g}$, для яких $\sigma P = P$.

Розглянемо множину $M(L)$ всіх точок поля L та її підмножини $D_n(L, \tau) = \{P \in M(L) \mid \mathfrak{g}_P \text{ ізоморфна циклічній групі, породженій елементом } \tau, \deg(P) = n\}$. Для кожного τ знайдеться n таке, що множина $D_n(L, \tau)$ буде нескінченною [1].

Теорема 1. (Аналог теореми щільності Чеботарьова [1]). Нехай $L/K(C)$ – скінченне розширення Галуа поля $K(C)$, $\mathfrak{g} = \text{Gal}(L/K(C))$ і $\tau \in \mathfrak{g}$. Існує нескінченна множина різних точок поля L , що мають своєю групою розвинення циклічну підгрупу, породжену елементом τ .

3. Добуток Тейта для кривих над псевдоскінченними полями. В цьому параграфі доведено невідомість добутку Тейта для кривих над псевдоскінченними полями.

Теорема 2. *Добуток Тейта t_m – невідомий у випадку кривих, визначених над псевдоскінченним полем K , що містить корені степеня m з одиниці.*

Доведення. Доведення теореми ґрунтується на лемах з попереднього параграфа і використовує метод, запропонований Ф. Гессом [7] для кривих над скінченним полем. Нехай $x = [D]$ – довільний клас дивізора D в $J(C_K)_m$ порядку s і $f \in K(C)$ функція з дивізором $(f) = sD$, де $s \mid m$. Поліном $T^s - f$ незвідний в $K(C)[T]$, визначає розширення Куммера поля $K(C)$, група Галуа $\mathfrak{g}$ якого є циклічною.

За аналогом теореми щільності Чеботарьова (теорема 1) для $d \mid s$ існує точка P степеня d , тобто $K(P)/K$ – скінченне розширення, $[K(P) : K] = d$, така що $T^s - f(P)$ розкладається на незвідні множники степеня s/d в $K(P)[\sqrt[d]{f}]$. Запишемо розвинування полінома $T^s - f(P)$ так:

$$T^s - f(P) = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot \dots \cdot g_d. \quad (1)$$

Для $d = 1$ і $d = s$ існують точки P і Q однакового порядку, які не належать носію дивізора D . Перепишемо (1), прийнявши $d = 1$, $T^s - f(P) = g_1$. Далі при $d = s$ маємо, що $T^s - f(Q) = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot \dots \cdot g_s$. Приймаючи, $E := P - Q$ і $y := [E] + mJ(C_K)$, одержуємо, що $t_m(x, y) \notin K^{*m}$.

Позначимо через μ_s групу коренів степеня s з 1 в K . Розглянемо точну послідовність

$$1 \rightarrow \mu_s(\overline{K}) \rightarrow \overline{K}^* \xrightarrow{s} \overline{K}^* \rightarrow 1,$$

з якої отримуємо точну послідовність груп когомологій

$$K^* \xrightarrow{s} K^* \rightarrow H^1(K, \mu_s(\overline{K})) \rightarrow H^1(K, \overline{K}^*).$$

За теоремою Гільберта $H^1(K, \overline{K}^*) = 0$ і $K^*/K^{*s} \cong H^1(K, \mu_s(\overline{K}))$. Так само з точної послідовності

$$1 \rightarrow \mu_s(\overline{K(P)}) \rightarrow \overline{K(P)}^* \xrightarrow{s} \overline{K(P)}^* \rightarrow 1,$$

випливає, що $K(P)^*/K(P)^{*s} \cong H^1(K(P), \mu_s(\overline{K(P)}))$. За попередніми міркуваннями отримуємо, що $K(P)^*/K(P)^{*s} \cong K^*/K^{*s}$.

Покажемо, що норменний гомоморфізм $NK(P)/K$ сюр'єктивний. Для цього використовуємо той факт, що $\hat{H}^0(\mathfrak{g}, K(P)^*) \cong H^2(\mathfrak{g}, K(P)^*)$, де $\hat{H}^0(\mathfrak{g}, K(P)^*)$ – когомології Тейта. З одного боку, $\hat{H}^0(\mathfrak{g}, K(P)^*) = K(P)^{*g}/N_{K(P)/K}(K(P)) = K^*/N_{K(P)/K}(K(P))$, з іншого – $H^2(\mathfrak{g}, K(P)^*) = 0$, оскільки когомологічна розмірність псевдоскінченного (навіть квазіскінченного) поля дорівнює 1 [10]. Звідси випливає, що $N_{K(P)/K}(K(P)^*) = K^*$. Отже, норма $N_{K(P)/K}$ – сюр'єктивна та індукує епіморфізм $K(P)^*/K(P)^{*s} \rightarrow K^*/K^{*s}$.

Далі потрібно показати, що $J(C_K)_m \cong J(C_K)/mJ(C_K)$ і $K^*/K^{*m} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Те, що $K^*/K^{*m} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ випливає з леми 1. Ізоморфізм груп $J(C_K)_m$ та $J(C_K)/mJ(C_K)$ випливає з леми 3, оскільки $J(C_K)$ має структуру абелевого многовиду над псевдоскінченним полем.

Ми вже знаємо, що гомоморфізм $J(C_K)_m \xrightarrow{\tau} \text{Hom}(J(C_K)/mJ(C_K), \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$, індукований добутком Тейта ін'єктивний, оскільки $|J(C_K)_m| = |J(C_K)/mJ(C_K)| =$

$= |\text{Hom}(J(C_K)/mJ(C_K), \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})|$, то гомоморфізм τ сюр'єктивний. Враховуючи лемму 4 про білінійні добутки скінченних абелевих груп, одержуємо невідродженість добутку Тейта. $\square$

-
1. *Андрійчук В.І.* Аналог теорема шільності Чеботарьова для псевдоглобальних полів / *Андрійчук В.І.* // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2000. – №4. – С. 11-16.
 2. *Введенский О.Н.* О локальных “полях классов” эллиптических кривых / *Введенский О.Н.* // Изв. АН СССР. – 1973. – Т. 37. – С. 20-88.
 3. *Касселс Джс.* Алгебраическая теория чисел / *Касселс Джс., Фрёллих А.* – М., 1969.
 4. *Шафаревич И.Р.* Группа главных однородных алгебраических многообразий / *Шафаревич И.Р.* // Докл. АН СССР. – 1959. – Т. 124, №1. – С. 42-43.
 5. *Ax J.* The elementary theory of finite fields / *Ax J.* // Ann. Math. – 1968. – Vol. 88, №2. – P. 239-271.
 6. *Fried M.* Field arithmetic / *Fried M., Jarden M.* – New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005.
 7. *Hess F.* A Note on the Tate Pairing of Curves over Finite Fields / *Hess F.* // Computer Science Department, Woodland Road, University of Bristol, preprint.
 8. *Papikian M.* On Tate Local Duality / *Papikian M.* // preprint.
 9. *Tate J.* WC-group over p-adic fields / *Tate J.* // Sem. Bourbaki. – 1956. – №156.
 10. *Серр Ж.-П.* Когомологии Галуа / *Серр Ж.-П.* – М., 1968.

ON NONDEGENERACY OF TATE PRODUCT FOR CURVES OVER PSEUDOFINITE FIELDS

Volodymyr NESTERUK

*Ivan Franko National University of L'viv,
79000 L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: volodymyr-nesteruk@rambler.ru*

A proof of nondegeneracy of the Tate product on curves over pseudofinite fields is given.

Key words: Tate pairing, projective curve, Jacobian of curve, pseudofinite field.

О НЕВЫРОЖДЕННОСТИ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ТЭЙТА ДЛЯ КРИВЫХ НАД ПСЕВДОКОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ

Владимир НЕСТЕРУК

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000 Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: volodymyr-nesteruk@rambler.ru*

Доказано невырожденность произведения Тэйта для кривых над псевдоконечными полями.

Ключевые слова: произведение Тэйта, проективная кривая, якобиан кривой, псевдоконечное поле.

Стаття надійшла до редколегії 09.02.2010

Прийнята до друку 22.12.2010

УДК 517.95

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ СИЛЬНО НЕЛІНІЙНОЇ ЕВОЛЮЦІЙНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ У НЕОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ

Максим НЕЧЕПУРЕНКО, Галина ТОРГАН

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000 Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: m.nechepurenko@nasta.com.ua, torgan_g@yahoo.com

Розглянуто нелінійну зв'язну еволюційну систему в необмеженій області. Отримано достатні умови існування та єдиності розв'язку цієї системи без обмежень на нескінченності.

Ключові слова: нелінійна система, мішана задача.

1. Вступ. Задачі для лінійних і нелінійних систем гіперболо-параболічних рівнянь з частинними похідними першого та другого порядку за часовою змінною в необмежених областях розглядали у багатьох працях (див., наприклад, [4]–[15]). Деякі результати існування єдиного їхнього розв'язку у цих працях отримані в припущенні якісної поведінки розв'язку, початкових даних і правої частини рівняння (системи) на нескінченності, інші результати (для певних класів нелінійних рівнянь) без таких припущень. Кларк в [6] розглядав подібну систему зі сталими коефіцієнтами й однорідними умовами на межі в обмеженій області. Він довів існування сильного та слабого розв'язку за методом Фаєдо-Гальоркіна, використовуючи спеціальну “базу” в просторі $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, введеному Медеросом [9], також дослідив асимптотичну поведінку слабого розв'язку, використовуючи метод Коморніка-Зузи [8]. В [14] одержано умови існування та єдиності узагальненого розв'язку для нелінійної еволюційної гіперболо-параболічної системи в необмеженій за просторовими змінними області.

Ми розглянули мішану задачу для нелінійної еволюційної системи, яка узагальнює певні математичні моделі термодинаміки. Праця розвиває та узагальнює результати [11]. Зазначимо, що ця система містить, зокрема, як частковий випадок, деякі системи гіперболо-параболічних рівнянь термопружності.

2. Формулювання задачі. Нехай $\Omega \in \mathbb{R}^n$ – необмежена область з межею $\partial\Omega \in C^1$ регулярною в сенсі Кальдерона [1, с. 44], $Q_\tau = (0, \tau) \times \Omega$, $\Omega_\tau = \{\tau\} \times \Omega$, $S_\tau = (0, \tau) \times \partial\Omega$, $\tau \in (0, T)$, $0 < T < +\infty$.

В області Q_T розглянемо мішану задачу для системи

$$A_1(u, \theta) \equiv u_{tt} - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(t, x) u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(t, x) u_{x_i} + \sum_{i=1}^n b_i(t, x) \theta_{x_i} + \\ + \alpha_0(t, x) u + \alpha_1(t, x) \theta + \gamma_0(t, x) |u|^{r-2} u + \gamma_1(t, x) |u_t|^{p-2} u_t = f_1(t, x), \quad (1)$$

$$A_2(u, \theta) \equiv \theta_t - \sum_{i,j=1}^n (c_{ij}(t, x) \theta_{x_i})_{x_j} - \sum_{i=1}^n (\mu_i(t, x) |\theta_{x_i}|^{s-2} \theta_{x_i})_{x_i} + \\ + \sum_{i=1}^n (b_i(t, x) u_t)_{x_i} + \sum_{i=1}^n d_i(t, x) u_{x_i} + \sum_{i=1}^n e_i(t, x) \theta_{x_i} + \beta_0(t, x) u + \\ + \beta_1(t, x) \theta + \gamma_2(t, x) |\theta|^{q-2} \theta = f_2(t, x) \quad (2)$$

з крайовими

$$u(t, x) = 0, \quad \theta(t, x) = 0 \quad \text{на} \quad S_T, \quad (3)$$

та початковими

$$u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x), \quad \theta(0, x) = \theta_0(x) \quad \text{на} \quad \Omega \quad (4)$$

умовами. Тут $p, r, s, q \in (2, +\infty)$.

Припустимо, що $\Omega_R = \Omega \cap \mathcal{B}_R$ є областю для $\forall R \geq 1$, регулярною в сенсі Кальдерона [1, с. 44], $\mathcal{B}_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$. Позначимо $Q_{T,R} = (0, T) \times \Omega_R$.

Будемо використовувати тут такі простори: $C([0, T]; B)$ ([1], с. 148), $L^r(0, T; B)$ ([1], с. 154, 157), де $r \in [1, +\infty)$, а B – деякий банахів простір; $H^k(\Omega)$, $H_0^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ ([1], с. 44) ([1], с. 44).

Також

$$L_{loc}^r(\overline{\Omega}) = \{v : v \in L^r(\Omega_R), \forall R \geq 1\}; \\ H_{0,loc}^1(\overline{\Omega}) = \{v : v \in H^1(\Omega_R), u|_{\partial\Omega \cap \mathcal{B}_R} = 0, \forall R \geq 1\}; \\ H_{loc}^2(\overline{\Omega}) = \{v : v \in H^2(\Omega_R), \forall R \geq 1\}, \\ W^{1,\infty}(\Omega) = \{v : v, v_{x_i} \in L^\infty(\Omega), i \in \{1, \dots, n\}\}; \\ W_{0,loc}^{1,s}(\overline{\Omega}) = \{v : v, v_{x_i} \in L_{loc}^s(\overline{\Omega}), u|_{\partial\Omega \cap \mathcal{B}_R} = 0, \forall R \geq 1, i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Вважатимемо, що для коефіцієнтів системи (1)-(2), правих частин і початкових умов виконуються такі припущення:

$(\mathbf{H}_1) : a_{ij}, a_{ijt} \in L^\infty(Q_T)$, $a_{ij} = a_{ji}$, $a_{ij}(\cdot, 0) \in W^{1,\infty}(\Omega)$ для всіх $i, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$a_0 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j \leq a^0 |\xi|^2$$

майже для всіх $(t, x) \in Q_T$ і для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$, де a_0, a^0 – додатні сталі;

(H₂) : $c_{ij}, c_{ijt} \in L^\infty(Q_T)$, $c_{ij} = c_{ji}$, $c_{ij}(\cdot, 0) \in W^{1,\infty}(\Omega)$ для всіх $i, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$c_0|\eta|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n c_{ij}(t, x)\eta_i\eta_j \leq c^0|\eta|^2$$

майже для всіх $(t, x) \in Q_T$ і для всіх $\eta \in \mathbb{R}^n$, де c_0 та c^0 – додатні сталі;

(H₃) : $\mu_i, \mu_{it} \in L^\infty(Q_T)$, $\mu_i(\cdot, 0) \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $\mu^0 \geq \mu_i(t, x) \geq \mu_0 > 0$ майже для всіх $(t, x) \in Q_T$ і для всіх $i \in \{1, \dots, n\}$;

(H₄) : $a_i, a_{it}, b_i, b_{it}, d_i, d_{it}, e_i, e_{it} \in L^\infty(Q_T)$, $i \in \{1, \dots, n\}$;

(H₅) : $\alpha_0, \alpha_{0t}, \alpha_1, \alpha_{1t}, \beta_0, \beta_{0t}, \beta_1, \beta_{1t} \in L^\infty(Q_T)$, $\beta_1(t, x) \geq \nu_{\beta_1} > 0$ майже для всіх $(t, x) \in Q_T$;

(H₆) : $\gamma_0, \gamma_{0t}, \gamma_1, \gamma_{1t}, \gamma_2, \gamma_{2t} \in L^\infty(Q_T)$; $\hat{\gamma}_0 \geq \gamma_0(t, x) \geq \tilde{\gamma}_0 > 0$, $\gamma_1(t, x) \geq \tilde{\gamma}_1 > 0$, $\gamma_2(t, x) \geq \tilde{\gamma}_2 > 0$ майже для всіх $(t, x) \in Q_T$;

(H₇) : $f_1, f_2, f_{1t}, f_{2t} \in L^2(0, T; L^2_{loc}(\bar{\Omega}))$, $u_0 \in H^2_{loc}(\bar{\Omega}) \cap H^1_{0,loc}(\bar{\Omega}) \cap L^{2(r-1)}_{loc}(\bar{\Omega})$, $u_1 \in H^1_{0,loc}(\bar{\Omega}) \cap L^{2(p-1)}_{loc}(\bar{\Omega})$, $\theta_0 \in W^{1,2(s-1)}_{0,loc}(\bar{\Omega}) \cap H^2_{loc}(\bar{\Omega}) \cap H^1_{0,loc}(\bar{\Omega}) \cap L^{2(q-1)}_{loc}(\bar{\Omega})$.

Для компактності записів введемо позначення:

$$V_1 = L^2(0, T; H^2_{loc}(\bar{\Omega}) \cap H^1_{0,loc}(\bar{\Omega})) \cap L^r(0, T; L^r_{loc}(\bar{\Omega})) \cap C([0, T]; L^2_{loc}(\bar{\Omega})),$$

$$V_2 = L^2(0, T; H^1_{0,loc}(\bar{\Omega})) \cap L^p(0, T; L^p_{loc}(\bar{\Omega})) \cap C([0, T]; L^2_{loc}(\bar{\Omega})),$$

$$V_3 = L^2(0, T; W^{1,s}_{0,loc}(\bar{\Omega}) \cap H^2_{loc}(\bar{\Omega}) \cap H^1_{0,loc}(\bar{\Omega})) \cap L^r(0, T; L^r_{loc}(\bar{\Omega})) \cap C([0, T]; L^2_{loc}(\bar{\Omega})).$$

Означення 1. Узагальненим розв'язком задачі (1) – (4) назвемо пару функцій $\{u, \theta\}$, які задовольняють включення $u \in V_1$, $u_t \in V_2$, $\theta \in V_3$ і є границями послідовностей $\{u^k\}$, $\{\theta^k\}$ таких, що $u^k \in V_1$, $u^k_t \in V_2$, $u^k_{tt} \in L^2(0, T; L^2_{loc}(\bar{\Omega}))$, $\theta^k \in V_3$, $\theta^k_t \in L^2(0, T; L^2_{loc}(\bar{\Omega}))$ і

$$u^k \rightarrow u \quad \text{в } V_1, \quad u^k_t \rightarrow u_t \quad \text{в } V_2, \quad \theta^k \rightarrow \theta \quad \text{в } V_3$$

і пари $\{u^k, \theta^k\}$ задовольняють початкові умови (4) та інтегральну систему рівностей

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\tau} u^k_t v \, dx - \int_{\Omega_0} u^k_1(x) v \, dx + \int_{Q_\tau} \left[-u^k_t v_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) u^k_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(t, x) u^k_{x_i} v + \right. \\ & + \sum_{i=1}^n b_i(t, x) \theta^k_{x_i} v + \alpha_0(t, x) u^k v + \alpha_1(t, x) \theta^k v + \gamma_0(t, x) |u^k|^{r-2} u^k v + \\ & \left. + \gamma_1(t, x) |u^k|^{p-2} u^k v \right] dx \, dt = \int_{Q_\tau} f^k_1(t, x) v \, dx \, dt, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\tau} \theta^k_t w \, dx - \int_{\Omega_0} \theta^k_0(x) w \, dx + \int_{Q_\tau} \left[-\theta^k_t w + \sum_{i,j=1}^n c_{ij}(t, x) \theta_{x_i} w_{x_j} + \sum_{i=1}^n \mu_i(t, x) |\theta_{x_i}|^{s-2} \theta_{x_i} w_{x_i} - \right. \\ & \left. - \sum_{i=1}^n b_i(t, x) u^k_t w_{x_i} + \sum_{i=1}^n d_i(t, x) u^k_{x_i} w + \sum_{i=1}^n e_i(t, x) \theta^k_{x_i} w + \beta_0(t, x) u^k w + \right. \end{aligned}$$

$$+ \beta_1(t, x)\theta^k w + \gamma_2(t, x)|\theta^k|^{q-2}\theta^k w] dx dt = \int_{Q_\tau} f_2^k(t, x)w dx dt \quad (6)$$

для всіх $\tau \in (0, T]$, для довільних $k \in \mathbb{N}$ і для всіх $v, w \in C^\infty(0, T; C_0^\infty(\Omega))$, таких що $\text{supp } v \in Q_{T,k}$ та $\text{supp } w \in Q_{T,k}$ для всіх $\tau \in [0, T]$. Функції f_j^k , f_{jt}^k ($j = 1, 2$), u_0^k , u_1^k , θ_0^k задовольняють припущення **(H7)** та

$$\begin{aligned} f_j^k &\rightarrow f_j \quad \text{в } L^2(0, T; L_{loc}^2(\overline{\Omega})), \quad j = 1, 2, \quad u_0^k \rightarrow u_0 \quad \text{в } H_{0,loc}^1(\overline{\Omega}), \\ u_1^k &\rightarrow u_1 \quad \text{в } L_{loc}^2(\overline{\Omega}), \quad \theta_0^k \rightarrow \theta_0 \quad \text{в } W_{0,loc}^{1,s}(\overline{\Omega}), \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (7)$$

3. Існування та єдиність розв'язку. Розглянемо спершу задачу (1)-(4) в області $Q_T = (0, T) \times \Omega$, де Ω обмежена область з межею $\partial\Omega \in C^1$, регулярною в сенсі Кальдерона.

Означення 2. Узагальненим розв'язком задачі (1)-(4) в обмеженій області Q_T назовемо пару функцій (u, θ) , які задовольняють вclusions $u \in L^2(0, T; V_1(\Omega)) \cap L^r(Q_T)$, $u_t \in C(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^p(Q_T)$, $u_{tt} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, $\theta \in C(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; V_2(\Omega)) \cap L^q(Q_T)$, $\theta_t \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ та інтегральну систему рівностей

$$\begin{aligned} \int_{Q_\tau} &\left[u_{tt}v + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x)u_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(t, x)u_{x_i}v + \sum_{i=1}^n b_i(t, x)\theta_{x_i}v + \right. \\ &+ \alpha_0(t, x)uv + \alpha_1(t, x)\theta v + \gamma_0(x)|u|^{r-2}uv + \\ &+ \gamma_1(t, x)|u_t|^{p-2}u_tv \Big] dx dt = \int_{Q_\tau} f_1(t, x)v dx dt, \\ \int_{Q_\tau} &\left[\theta_t w + \sum_{i,j=1}^n c_{ij}(t, x)\theta_{x_i}w_{x_j} + \sum_{i=1}^n \mu_i(t, x)|\theta_{x_i}|^{s-2}\theta_{x_i}w_{x_i} + \sum_{i=1}^n c_i(t, x)u_t w_{x_i} + \right. \\ &- \sum_{i=1}^n b_i(t, x)u_t w_{x_i} + \sum_{i=1}^n d_i(t, x)u_{x_i}w + \sum_{i=1}^n e_i(t, x)\theta_{x_i}w + \beta_0(t, x)uw + \\ &+ \beta_1(t, x)\theta w + \gamma_2(t, x)|\theta|^{q-2}\theta w \Big] dx dt = \int_{Q_\tau} f_2(t, x)w dx dt \end{aligned}$$

для всіх $\tau \in (0, T)$ і для всіх $v, w \in C^1(0, T; C_0^1(\Omega))$, та початкові умови $u(0, x) = u_0(x)$, $u_t(0, x) = u_1(x)$, $\theta(0, x) = \theta_0(x)$.

Нам знадобиться теорема існування узагальненого розв'язку задачі (1)-(4) для обмеженої області, отримана в [15].

Теорема 1. Нехай виконуються умови **(H1)**–**(H7)** та $a_{ijtt}, c_{ijtt} \in L^\infty(Q_T)$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Якщо r таке, що $r < \frac{2(n-1)}{n-2}$ для $n > 2$ та $r > 2$ для $n \in \{1, 2\}$, то існує узагальнений розв'язок задачі (1)-(4) в обмеженій області Q_T .

Доведемо існування та єдиність узагальненого розв'язку задачі (1)-(4) у випадку необмеженої області.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови (H₁)–(H₇) та $u_0 \in H_{0,loc}^1(\overline{\Omega})$, $u_1 \in L_{loc}^2(\overline{\Omega})$, $\theta_0 \in W_{0,loc}^{1,s}(\overline{\Omega})$, $f_i \in L^2(0, T; L_{loc}^2(\overline{\Omega}))$ ($i = 1, 2$). Якщо r таке, що $r < \frac{2(n-1)}{n-2}$ для $n > 2$ та $r > 2$ для $n \in \{1, 2\}$, $n(r-2) < p$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{p} < 1$, $q > s$, тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1)–(4).*

Доведення. Існування. Нехай послідовності $\{f_i^k\}$, $\{u_0^k\}$, $\{u_1^k\}$ та $\{\theta_0^k\}$ задовольняють припущення (H₇) та умову (7).

Розглянемо в обмеженій області $Q_{T,k}$, $k \in \mathbb{N}$ допоміжну задачу

$$\begin{aligned} A_1(u, \theta) &= f_1^{k,k}, \\ A_2(u, \theta) &= f_2^{k,k}, \quad (t, x) \in Q_{T,k}, \end{aligned} \quad (8)$$

з крайовими

$$u|_{S_{T,k}} = 0, \quad \theta|_{S_{T,k}} = 0, \quad S_{T,k} = (0, T) \times \partial\Omega_k, \quad (9)$$

та початковими

$$u(0, x) = u_0^{k,k}(x), \quad u_t(0, x) = u_1^{k,k}(x), \quad \theta(0, x) = \theta_0^{k,k}(x), \quad x \in \Omega_k \quad (10)$$

умовами.

Тут початкові умови та праві частини мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} f_j^{k,k}(t, x) &= \begin{cases} f_j^k(t, x), & (t, x) \in Q_{T,k}, \\ 0, & (t, x) \in Q_T \setminus Q_{T,k}, \end{cases} \quad j \in \{1, 2\}, \\ u_i^{k,k}(x) &= u_i^k(x) \xi_k(x), \quad i \in \{0, 1\}, \\ \theta_0^{k,k}(x) &= \theta_0^k(x) \xi_k(x), \end{aligned}$$

де $\xi_k \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \xi_k(x) \leq 1$ для $x \in \overline{\Omega}$, $\xi_k(x) = 1$ для $|x| \leq k-1$ та $\xi_k(x) = 0$ для $|x| \geq k$.

Оскільки виконуються умови теореми 1 з [15], то існує узагальнений розв'язок $\{u^k, \theta^k\}$ задачі (8)–(10) в області $Q_{T,k}$ для кожного фіксованого k такий, що $u_{tt}^k, \theta_t^k \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_{T,k}))$. Продовжимо $\{u^k\}$ та $\{\theta^k\}$ нулем на $Q_T \setminus Q_{T,k}$ та збережемо за цими функціями ті самі позначення.

Розглянемо (u^k, θ^k) розв'язок задачі (8)–(10) для довільного фіксованого $k \in \mathbb{N}$. Відповідно до означення узагальненого розв'язку одержуємо

$$\begin{aligned} \int_{Q_\tau} \left[u_{tt}^k v_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) u_{x_i}^k v_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(t, x) u_{x_i}^k v + \sum_{i=1}^n b_i(t, x) \theta_{x_i}^k v + \right. \\ \left. + \alpha_0(t, x) u^k v + \alpha_1(t, x) \theta^k v + \gamma_0(t, x) |u^k|^{r-2} u^k v + \right. \\ \left. + \gamma_1(t, x) |u_t^k|^{p-2} u_t^k v \right] dx dt = \int_{Q_\tau} f_1^{k,k}(t, x) v dx dt, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \int_{Q_\tau} \left[\theta_t^k w + \sum_{i,j=1}^n c_{ij}(t, x) \theta_{x_i} w_{x_j} + \sum_{i=1}^n \mu_i(t, x) |\theta_{x_i}|^{s-2} \theta_{x_i} w_{x_i} - \sum_{i=1}^n b_i(t, x) u_t^k w_{x_i} + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^n d_i(t, x) u_{x_i}^k w + \sum_{i=1}^n e_i(t, x) \theta_{x_i}^k w + \beta_0(t, x) u^k w + \beta_1(t, x) \theta^k w + \right. \end{aligned}$$

$$+ \gamma_2(t, x) |\theta^k|^{q-2} \theta^k w] dx dt = \int_{Q_\tau} f_2^{k,k}(t, x) w dx dt, \quad \tau \in (0, T). \quad (12)$$

Приймаємо в (11)-(12) $v = u_t^k \psi_R(x) e^{-\lambda t}$, $w = \theta^k \psi_R(x) e^{-\lambda t}$, де $\lambda > 0$, $\psi_R(x) = [h_R(x)]^\alpha$,

$$h_R(x) = \begin{cases} \frac{1}{R}(R^2 - |x|^2), & 0 \leq |x| \leq R, \\ 0, & |x| > R, \end{cases}$$

$\alpha > 1$, $k > R + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Отримаємо систему рівностей

$$\begin{aligned} \int_{Q_\tau} & \left[u_{tt}^k u_t^k \psi_R(x) + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) u_{x_i}^k (u_{tx_j}^k \psi_R(x) + u_t^k (\psi_R(x))_{x_j}) + \right. \\ & + \sum_{i=1}^n a_i(t, x) u_{x_i}^k u_t^k \psi_R(x) + \sum_{i=1}^n b_i(t, x) \theta_{x_i}^k u_t^k \psi_R(x) + \alpha_0(t, x) u^k u_t^k \psi_R(x) + \\ & + \alpha_1(t, x) \theta^k u_t^k \psi_R(x) + \gamma_0(t, x) |u^k|^{r-2} u^k u_t^k \psi_R(x) + \\ & \left. + \gamma_1(t, x) |u_t^k|^p \psi_R(x) \right] e^{-\lambda t} dx dt = \int_{Q_\tau} f_1^{k,k}(t, x) u_t^k \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \int_{Q_\tau} & \left[\theta_t^k \theta^k \psi_R(x) + \sum_{i,j=1}^n c_{ij}(t, x) \theta_{x_i}^k (\theta_{x_j}^k \psi_R(x) + \theta^k (\psi_R(x))_{x_j}) + \right. \\ & + \sum_{i=1}^n \mu_i(t, x) |\theta_{x_i}^k|^{s-2} \theta_{x_i}^k (\theta_{x_i}^k \psi_R(x) + \theta^k (\psi_R(x))_{x_i}) - \\ & - \sum_{i=1}^n b_i(t, x) u_t^k (\theta_{x_i}^k \psi_R(x) + \theta^k (\psi_R(x))_{x_i}) + \sum_{i=1}^n d_i(t, x) u_{x_i}^k \theta^k \psi_R(x) + \\ & + \sum_{i=1}^n e_i(t, x) \theta_{x_i}^k \theta^k \psi_R(x) + \beta_0(t, x) u^k \theta^k \psi_R(x) + \beta_1(t, x) |\theta^k|^2 \psi_R(x) + \\ & \left. + \gamma_2(t, x) |\theta^k|^q \psi_R(x) \right] e^{-\lambda t} dx dt = \int_{Q_\tau} f_2^{k,k}(t, x) \theta^k \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt. \end{aligned} \quad (14)$$

Додамо (13) і (14) та оцінимо всі доданки отриманої рівності. Очевидно

$$\begin{aligned} I_1^a &= \int_{Q_\tau} u_{tt}^k u_t^k \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\tau} |u_t^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda \tau} dx + \\ & + \frac{\lambda}{2} \int_{Q_\tau} |u_t^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt - \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} |u_1^{k,k}|^2 \psi_R(x) dx. \end{aligned}$$

На підставі умови $(\mathbf{H}_1)$ одержимо

$$\begin{aligned} I_2^a &= \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) u_{x_i}^k u_{x_j}^k \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt \geq \frac{a_0}{2} \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt - \\ &\quad - \frac{a_1}{2} \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt + \frac{\lambda a_0}{2} \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt - \\ &\quad - \frac{a^0}{2} \int_{\Omega_0} \sum_{i=1}^n |u_{0x_i}^{k,k}|^2 \psi_R(x) dx, \end{aligned}$$

де $a_1 = \operatorname{ess\,sup}_{Q_T} \sum_{i,j} |a_{ij}(t, x)|^2$;

$$\begin{aligned} I_3^a &= \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) u_{x_i}^k u_t^k (\psi_R(x))_{x_j} e^{-\lambda t} dx dt \geq -\frac{A_0 \delta_0^a}{2} \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt - \\ &\quad - \frac{\delta_0^a n^2}{p} \int_{Q_\tau} |u_t^k|^p \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt - \mu_1(\delta_0^a, p) \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n \left| \frac{(\psi_R(x))_{x_i}}{\psi_R(x)^{1/2+1/p}} \right|^{\frac{2p}{p-2}} e^{-\lambda t} dx dt. \end{aligned}$$

Тут $A_0 = \operatorname{ess\,sup}_{Q_T} \sum_{i,j} |a_{ij}(t, x)|^2$, $\delta_0^a > 0$, $\mu_1(\delta_0^a, p) > 0$.

З умови $(\mathbf{H}_4)$ отримаємо

$$\begin{aligned} I_4^a &= \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n a_i(t, x) u_{x_i}^k u_t^k \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt \geq -\frac{A_1}{2} \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt - \\ &\quad - \frac{n}{2} \int_{Q_\tau} |u_t^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt, \end{aligned}$$

де $A_1 = \operatorname{ess\,sup}_{Q_T} \sum_{i=1}^n |a_i(t, x)|^2$. З огляду на умову $(\mathbf{H}_5)$ одержимо

$$\begin{aligned} I_5^a &= \int_{Q_\tau} \alpha_0(t, x) u^k u_t^k \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt \geq -\frac{\nu_{\alpha_0}}{2} \int_{Q_\tau} |u^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{Q_\tau} |u_t^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt. \end{aligned}$$

Тут $\nu_{\alpha_0} = \operatorname{ess\,sup}_{Q_T} |\alpha_0(t, x)|^2$. Враховуючи нерівність

$$\begin{aligned} \int_{Q_\tau} |u^k(t, x)|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt &\leq 2T \int_{\Omega_0} |u_0^{k,k}(x)|^2 \psi_R(x) dx + \\ &\quad + T^2 \int_{Q_\tau} |u_t^k(t, x)|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt, \end{aligned} \tag{15}$$

отримаємо таку оцінку:

$$\begin{aligned} I_5^a &= \int_{Q_\tau} \alpha_0(t, x) u^k u_t^k \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt \geq -T \nu_{\alpha_0} \int_{\Omega_0} |u_0^{k,k}|^2 \psi_R(x) dx - \\ &\quad - \frac{2T^2 \nu_{\alpha_0} + 1}{2} \int_{Q_\tau} |u_t^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt. \end{aligned}$$

Крім того,

$$\begin{aligned} I_6^a &= \int_{Q_\tau} \alpha_1(t, x) \theta^k u_t^k \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt \geq -\frac{\nu_{\alpha_1}}{2} \int_{Q_\tau} |\theta^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{Q_\tau} |u_t^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt, \end{aligned}$$

де $\nu_{\alpha_1} = \text{ess sup}_{Q_T} |\alpha_1(t, x)|^2$. З умови **(H₆)** одержуємо такі оцінки:

$$\begin{aligned} I_7^a &= \int_{Q_\tau} \gamma_0(t, x) |u^k|^{r-2} u^k u_t^k \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt \geq \frac{\tilde{\gamma}_0}{r} \int_{\Omega_\tau} |u^k|^r \psi_R(x) e^{-\lambda \tau} dx - \\ &\quad - \frac{\hat{\gamma}_0}{r} \int_{\Omega_0} |u_0^{k,k}|^r \psi_R(x) dx + \frac{\tilde{\gamma}_0 \lambda}{r} \int_{Q_\tau} |u^k|^r \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt - \\ &\quad - \frac{G_0}{r} \int_{Q_\tau} |u^k|^r \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt, \\ I_8^a &= \int_{Q_\tau} \gamma_1(t, x) |u_t^k|^p \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt \geq \tilde{\gamma}_1 \int_{Q_\tau} |u_t^k|^p \psi_R(x) dx dt. \end{aligned}$$

де $G_0 = \text{ess sup}_{Q_T} |\gamma_{0t}(t, x)|^2$. Легко отримати таку оцінку:

$$\begin{aligned} I_9^a &= \int_{Q_\tau} f_1^{k,k} u_t^k \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt \leq \frac{1}{2} \int_{Q_\tau} |f_1^{k,k}|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{Q_\tau} |u_t^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt. \end{aligned}$$

Далі

$$\begin{aligned} I_1^c &= \int_{Q_\tau} \theta_t^k \theta^k \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\tau} |\theta^k|^2 e^{-\lambda \tau} \psi_R(x) dx + \\ &\quad + \frac{\lambda}{2} \int_{Q_\tau} |\theta^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt - \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} |\theta_0^{k,k}|^2 \psi_R(x) dx. \end{aligned}$$

Відповідно до $(\mathbf{H}_2)$ отримаємо

$$\begin{aligned} I_2^c &= \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^n c_{ij}(t, x) |\theta_{x_i}^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt \geq c_0 \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |\theta_{x_i}^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt, \\ I_3^c &= \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^n c_{ij}(t, x) \theta_{x_i}^k \theta^k \psi_R(x)_{x_i} e^{-\lambda t} dx dt \geq \\ &\geq -\frac{\delta_0^c}{s} \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |\theta_{x_i}^k|^s \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt - \frac{C_0 \delta_0^c}{2} \int_{Q_\tau} |\theta^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt - \\ &- \mu_2(\delta_0^c, s) \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\psi_R(x)_{x_i}}{\psi_R(x)^{1/2+1/s}} \right|^{\frac{2s}{s-2}} e^{-\lambda t} dx dt, \end{aligned}$$

де $C_0 = \text{ess sup}_{Q_\tau} \sum_{i,j} |c_{ij}(t, x)|^2$, δ_0^c , $\mu_2(\delta_0^c, s)$ – додатні сталі; $q > s$. З умови $(\mathbf{H}_3)$ одержимо

$$\begin{aligned} I_4^c &= \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n \mu_i(t, x) |\theta_{x_i}^k|^s \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt \geq \mu_0 \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |\theta_{x_i}^k|^s \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt, \\ I_5^c &= \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n \mu_i(t, x) |\theta_{x_i}^k|^{s-2} \theta_{x_i}^k \theta^k \psi_R(x)_{x_i} e^{-\lambda t} dx dt \geq \\ &\geq -\frac{\mu_0 \delta_1^c n}{q} \int_{Q_\tau} |\theta^k|^q \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt - \frac{\mu_0 \delta_1^c (s-1)}{s} \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |\theta_{x_i}^k|^s \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt - \\ &- \mu_3(\delta_1^c, s, q) \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\psi_R(x)_{x_i}}{\psi_R(x)^{1/q+1/s}} \right|^{\frac{qs}{q-s}} e^{-\lambda t} dx dt. \end{aligned}$$

Тут δ_1^c , $\mu_3(\delta_1^c, s, q)$ – додатні сталі; $q > s$. З умови $(\mathbf{H}_4)$ отримаємо

$$\begin{aligned} I_6^c &= - \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n b_i(t, x) u_t^k \theta^k (\psi_R(x))_{x_i} e^{-\lambda t} dx dt \geq \\ &\geq -\frac{\delta_1^c n}{p} \int_{Q_\tau} |u_t^k|^p \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt - \frac{B_1 \delta_1^c}{2} \int_{Q_\tau} |\theta^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt - \\ &- \mu_4(\delta_1^c, p) \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n \left| \frac{(\psi_R(x))_{x_i}}{\psi_R(x)^{1/2+1/p}} \right|^{\frac{2p}{p-2}} e^{-\lambda t} dx dt, \end{aligned}$$

де $B_1 = \text{ess sup}_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |b_i(t, x)|^2$; δ_1^c , $\mu_4(\delta_1^c, p)$ – додатні сталі.

Крім того,

$$\begin{aligned}
 I_7^c &= \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n d_i(t, x) u_{x_i}^k \theta^k \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt \geq -\frac{D_1}{2} \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt - \\
 &\quad - \frac{n}{2} \int_{Q_\tau} |\theta^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt, \quad D_1 = \operatorname{ess\,sup}_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |d_i(t, x)|^2; \\
 I_8^c &= \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n e_i(t, x) \theta_{x_i}^k \theta^k \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt \geq -\frac{E_1 \delta_2^c}{2} \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |\theta_{x_i}^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt - \\
 &\quad - \frac{n}{2} \int_{Q_\tau} |\theta^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt;
 \end{aligned}$$

зважаючи на нерівність (15) та умову **(H₅)**, одержимо

$$\begin{aligned}
 I_9^c &= \int_{Q_\tau} \beta_0(t, x) u^k \theta^k \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt \geq -\frac{\nu_{\beta_0}}{2} \int_{Q_\tau} |\theta^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt - \\
 &\quad - T \nu_{\beta_0} \int_{\Omega_0} |u_0^{k,k}|^2 \psi_R(x) dt - \frac{T^2 \nu_{\beta_0}}{2} \int_{Q_\tau} |u_t^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt,
 \end{aligned}$$

де $E_1 = \operatorname{ess\,sup}_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |e_i(t, x)|^2$, $\delta_2^c > 0$, $\nu_{\beta_0} = \operatorname{ess\,sup}_{Q_\tau} |\beta_0(t, x)|^2$. Також

$$I_{10}^c = \int_{Q_\tau} \beta_1(t, x) |\theta^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt \geq \nu_{\beta_1} \int_{Q_\tau} |\theta^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt.$$

З умови **(H₆)** одержимо таку оцінку:

$$I_{11}^c = \int_{Q_\tau} \gamma_2(t, x) |\theta^k|^q \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt \geq \tilde{\gamma}_2 \int_{Q_\tau} |\theta^k|^q \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt.$$

Нескладно отримати

$$\begin{aligned}
 I_{12}^c &= \int_{Q_\tau} f_2^{k,k} \theta^k \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt \leq \frac{1}{2} \int_{Q_\tau} |f_2^{k,k}|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_{Q_\tau} |\theta^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt.
 \end{aligned}$$

Використовуючи отримані оцінки, з системи рівностей (13)-(14) одержимо

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_\tau} \left[|u_t^k|^2 + a_0 \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^k|^2 + \frac{2\tilde{\gamma}_0}{r} |u^k|^r + |\theta^k|^2 \right] e^{-\lambda \tau} \psi_R(x) dx + \int_{Q_\tau} \left[(\lambda - T^2(2\nu_{\alpha_0} + \nu_{\beta_0}) - \right. \\
 \left. - n - 3) |u_t^k|^2 + \left(\frac{2\tilde{\gamma}_0 \lambda}{r} - \frac{2G_0}{r} \right) |u^k|^r + (\lambda a_0 - a_1 - A_0 \delta_0^a - A_1 - D_1) \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^k|^2 + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (\lambda - C_0 \delta_0^c - \nu_{\alpha_1} - B_1 \delta_1^c - \nu_{\beta_0} - 2\nu_{\beta_1} - 2n - 1) |\theta^k|^2 + (2c_0 - E_1 \delta_2^c) \sum_{i=1}^n |\theta_{x_i}|^2 + \\
 & + \left(2\tilde{\gamma}_1 - \frac{2(\delta_0^a n^2 + \delta_1^c n)}{p} \right) |u_t^k|^p + \left(2\tilde{\gamma}_2 - \frac{2\mu_0 \delta_1^c n}{q} \right) |\theta^k|^q + \\
 & + \left(2\mu_0 - \frac{2\delta_0^c}{s} - \frac{2\mu_0 \delta_1^c (s-1)}{s} \right) \sum_{i=1}^n |\theta_{x_i}^k|^s \left] \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt \leq \int_{\Omega_0} \left[|u_1^{k,k}|^2 + \right. \\
 & + a^0 \sum_{i=1}^n |u_{0x_i}^{k,k}|^2 + |\theta_0^{k,k}|^2 + \frac{2\tilde{\gamma}_0}{r} |u_0^{k,k}|^r + 2T(\nu_{\alpha_0} + \nu_{\beta_0}) |u_0^{k,k}|^2 \left. \right] \psi_R(x) dx + \\
 & + \int_{Q_\tau} \left[|f_1^{k,k}|^2 + |f_2^{k,k}|^2 \right] \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt + \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n \left[(\mu_1 + \mu_4) \left| \frac{\psi_R(x)_{x_i}}{\psi_R(x)^{1/2+1/p}} \right|^{\frac{2p}{p-2}} + \right. \\
 & + \mu_2 \left| \frac{\psi_R(x)_{x_i}}{\psi_R(x)^{1/2+1/s}} \right|^{\frac{2s}{s-2}} + \mu_3 \left| \frac{\psi_R(x)_{x_i}}{\psi_R(x)^{1/q+1/s}} \right|^{\frac{qs}{q-s}} \left. \right] e^{-\lambda t} dx dt \quad (16)
 \end{aligned}$$

для $\tau \in (0, T)$.

Прийmemo $\lambda = \max\{2T^2\nu_{\alpha_0} + T^2\nu_{\beta_0} + n + 3, \frac{a_1 + A_0\delta_0^a + A_1 + D_1}{a_0}, \frac{G_0}{\gamma_0}, C_0\delta_0^c + \nu_{\alpha_1} + B_1\delta_1^c + \nu_{\beta_0} + 2\nu_{\beta_1} + 2n + 1\}$ і нехай $\delta_0^a, \delta_0^c, \delta_1^c, \delta_2^c$ – довільні малі додатні сталі, які задовольняють такі умови: $\delta_0^a = \frac{\delta_1^c}{n} < \frac{\tilde{\gamma}_1 p}{2n^2}$, $\delta_0^c = \delta_1^c(s-1) < \frac{s\mu_0}{(1-\mu_0)}$, $\delta_1^c < \frac{\tilde{\gamma}_2 q}{\mu_0 n}$, $\delta_2^c < \frac{2c_0}{E_1}$. Тоді підінтегральний вираз правої частини останньої нерівності додатний, а ліва частина обмежена додатною сталою.

Нехай $R_0 \in (0, R)$ довільне фіксоване число. Тоді матимемо

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_{T, R_0}} \left[|u_t^k|^2 + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^k|^2 + |u^k|^r + |\theta^k|^2 \right] dx + \int_{Q_{T, R_0}} \left[|u_t^k|^2 + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^k|^2 + |u^k|^r + \right. \\
 & + \sum_{i=1}^n |\theta_{x_i}^k|^2 + |\theta^k|^2 \left. \right] dx dt + \int_{Q_{T, R_0}} \left[|u_t^k|^p + |\theta^k|^q + \sum_{i=1}^n |\theta_{x_i}^k|^s \right] dx dt \leq \\
 & \leq \frac{e^{\lambda T}}{\lambda(R - R_0)^\alpha} \times \left[\int_{\Omega_0} \left[|u_1^{k,k}|^2 + \sum_{i=1}^n |u_{0x_i}^{k,k}|^2 + |\theta_0^{k,k}|^2 + |u_0^{k,k}|^r + |u_0^{k,k}|^2 \right] \psi_R(x) dx + \right. \\
 & + \int_{Q_\tau} \left[|f_1^{k,k}|^2 + |f_2^{k,k}|^2 \right] \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt + \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n \left[(\mu_1 + \mu_4) \left| \frac{\psi_R(x)_{x_i}}{\psi_R(x)^{1/2+1/p}} \right|^{\frac{2p}{p-2}} + \right. \\
 & + \mu_2 \left| \frac{\psi_R(x)_{x_i}}{\psi_R(x)^{1/2+1/s}} \right|^{\frac{2s}{s-2}} + \mu_3 \left| \frac{\psi_R(x)_{x_i}}{\psi_R(x)^{1/q+1/s}} \right|^{\frac{qs}{q-s}} \left. \right] e^{-\lambda t} dx dt \left. \right], \quad \tau \in (0, T).
 \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} \|u^k\|_{L^\infty(0,T;L^r(\Omega_{T,R_0})\cap H_0^1(\Omega_{T,R_0}))} &\leq \text{const}, \\ \|u_t^k\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_{T,R_0}))\cap L^p(0,T;L^p(\Omega_{T,R_0}))} &\leq \text{const}, \\ \|\theta^k\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_{T,R_0}))\cap L^s(0,T;W_0^{1,s}(\Omega_{T,R_0}))\cap L^q(0,T;L^q(\Omega_{T,R_0}))} &\leq \text{const}. \end{aligned} \quad (17)$$

На підставі (17), з послідовностей $\{u^k\}$, $\{\theta^k\}$ можна вибрати такі підпослідовності $\{u^{k_l}\}$, $\{\theta^{k_l}\}$ що

$$\begin{aligned} u^{k_l} &\rightarrow u \quad \text{*}-\text{слабко в } L^\infty(0,T;L^r(\Omega_{R_0})\cap H_0^1(\Omega_{R_0})); \\ u_t^{k_l} &\rightarrow u_t \quad \text{*}-\text{слабко в } L^\infty(0,T;L^2(\Omega_{R_0})) \text{ і слабко в } L^p(0,T;L^p(\Omega_{R_0})); \\ \theta^{k_l} &\rightarrow \theta \quad \text{*}-\text{слабко в } L^\infty(0,T;L^2(\Omega_{R_0})) \text{ і слабко в } \\ &\quad L^s(0,T;W_0^{1,s}(\Omega_{R_0}))\cap L^q(0,T;L^q(\Omega_{R_0}))\cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega_{R_0})) \end{aligned} \quad (18)$$

при $k_l \rightarrow \infty$.

З рівняння (1) випливає, що $u_{tt}^k \in L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Omega_{R_0}))$, з (18) одержуємо, що $u_t^k \in L^2(0,T;L^2(\Omega_{R_0}))\cap L^p(0,T;L^p(\Omega_{R_0}))$, але $L^p(\Omega_{R_0}) \subset L^r(\Omega_{R_0})$ при $p > r$ причому $L^p(\Omega_{R_0}) \subset L^r(\Omega_{R_0})$ компактно, тому з послідовності $\{u^k\}$ можна вибрати таку підпослідовність $\{u^{k_l}\}$, що $u_t^{k_l} \rightarrow u_t$ сильно в $L^r(\Omega_{R_0})$. Аналогічно, з рівняння (2) випливає, що $\theta_t^k \in L^{s'}(0,T;W^{-1,s'}(\Omega_{R_0}))$, з (18) маємо, що $\theta^k \in L^s(0,T;W_0^{1,s}(\Omega_{R_0}))\cap L^q(0,T;L^q(\Omega_{R_0}))\cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega_{R_0}))$, але $W_0^{1,s}(\Omega_{R_0}) \subset L^s(\Omega_{R_0}) \subset W^{-1,s'}(\Omega_{R_0})$ компактно, тому з послідовності $\{\theta^k\}$ можна вибрати таку підпослідовність $\{\theta^{k_l}\}$, що $\theta^{k_l} \rightarrow \theta$ сильно в $L^s(\Omega_{R_0})$.

Розглянемо систему рівностей (8)-(10) для довільних фіксованих k, m , де $k > m > R_0 + 1$; $k, m \in \mathbb{N}$ та приймемо $v = (u_t^k - u_t^m)\psi_R(x)e^{-\lambda t}$, $w = (\theta^k - \theta^m)\psi_R(x)e^{-\lambda t}$. Позначимо $u^{k,m} = u^k - u^m$, $\theta^{k,m} = \theta^k - \theta^m$. Тоді з (8)-(10) отримаємо

$$\begin{aligned} &\int_{Q_\tau} \left[u_{tt}^{k,m} u_t^{k,m} \psi_R(x) + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x) u_{x_i}^{k,m} (u_{tx_j}^{k,m} \psi_R(x) + u_t^{k,m} \psi_R(x)_{x_j}) + \right. \\ &+ \sum_{i=1}^n a_i(t,x) u_{x_i}^{k,m} u_t^{k,m} \psi_R(x) + \sum_{i=1}^n b_i(t,x) \theta_{x_i}^{k,m} u_t^{k,m} \psi_R(x) + \alpha_0(t,x) u^{k,m} u_t^{k,m} \psi_R(x) + \\ &+ \alpha_1(t,x) \theta^{k,m} u_t^{k,m} \psi_R(x) + \gamma_0(t,x) (|u^k|^{r-2} u^k - |u^m|^{r-2} u^m) (u_t^k - u_t^m) \psi_R(x) + \\ &+ \gamma_1(t,x) (|u_t^k|^{p-2} u_t^k - |u_t^m|^{p-2} u_t^m) (u_t^k - u_t^m) \psi_R(x) \Big] e^{-\lambda t} dx dt = \\ &= \int_{Q_\tau} (f_1^{k,k}(t,x) - f_1^{m,m}(t,x)) u_t^{k,m} \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt, \quad (19) \\ &\int_{Q_\tau} \left[\theta_t^{k,m} \theta^{k,m} \psi_R(x) + \sum_{i,j=1}^n c_{ij}(t,x) \theta_{x_i}^{k,m} (\theta_{x_j}^{k,m} \psi_R(x) + \theta^{k,m} (\psi_R(x))_{x_j}) + \right. \\ &+ \sum_{i=1}^n \mu_i(t,x) (|\theta_{x_i}^k|^{s-2} \theta_{x_i}^k - |\theta_{x_i}^m|^{s-2} \theta_{x_i}^m) (\theta_{x_i}^{k,m} \psi_R(x) + \theta^{k,m} \psi_R(x)_{x_i}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=1}^n c_i(t, x) u_t^{k,m} (\theta_{x_i}^{k,m} \psi_R(x) + \theta^{k,m} \psi_R(x)_{x_i}) + \sum_{i=1}^n d_i(t, x) u_{x_i}^{k,m} \theta^{k,m} \psi_R(x) + \\
 & + \sum_{i=1}^n e_i(t, x) \theta_{x_i}^{k,m} \theta^{k,m} \psi_R(x) + \beta_0(t, x) u^{k,m} \theta^{k,m} \psi_R(x) + \beta_1(t, x) |\theta^{k,m}|^2 \psi_R(x) + \\
 & + \gamma_2(t, x) (|\theta^k|^{q-2} \theta^k - |\theta^m|^{q-2} \theta^m) (\theta^k - \theta^m) \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt = \\
 & = \int_{Q_\tau} (f_2^{k,k}(t, x) - f_2^{m,m}(t, x)) \theta^{k,m} \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt, \quad \tau \in (0, T). \quad (20)
 \end{aligned}$$

Оцінимо доданки системи рівностей (19)-(20). Одержимо

$$\begin{aligned}
 I_1^{k,m} &= \int_{Q_\tau} \gamma_0(t, x) (|u^k|^{r-2} u^k - |u^m|^{r-2} u^m) (u_t^k - u_t^m) \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt \leq \\
 &\leq \tilde{\gamma}_0 \left(\int_{Q_\tau} (|u^k|^{r-2} u^k - |u^m|^{r-2} u^m)^{r'} \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt \right)^{1/r'} \times \\
 &\times \left(\int_{Q_\tau} |u_t^{k,m}|^r \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt \right)^{1/r} = I_{1,1}^{k,m} \times I_{1,2}^{k,m}, \quad r < p. \\
 I_2^{k,m} &= \int_{Q_\tau} \gamma_1(t, x) (|u_t^k|^{p-2} u_t^k - |u_t^m|^{p-2} u_t^m) (u_t^k - u_t^m) \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt \geq \\
 &\geq 2^{2-p} \int_{Q_\tau} \gamma_1(t, x) |u_t^{k,m}|^p \psi_R(x) dx dt \geq 2^{2-p} \tilde{\gamma}_1 \int_{Q_\tau} |u_t^{k,m}|^p \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt; \\
 I_3^{k,m} &= \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n \mu_i(t, x) (|\theta_{x_i}^k|^{s-2} \theta_{x_i}^k - |\theta_{x_i}^m|^{s-2} \theta_{x_i}^m) \theta_{x_i}^{k,m} \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt \geq \\
 &\geq 2^{2-s} \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n \mu_i(t, x) |\theta_{x_i}^{k,m}|^s \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt \geq 2^{2-s} \mu_0 \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |\theta_{x_i}^{k,m}|^s \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt; \\
 I_4^{k,m} &= \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n \mu_i(t, x) (|\theta_{x_i}^k|^{s-2} \theta_{x_i}^k - |\theta_{x_i}^m|^{s-2} \theta_{x_i}^m) \theta_{x_i}^{k,m} \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt \leq \\
 &\leq \mu^0 \left(\int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n (|\theta_{x_i}^k|^{s-2} \theta_{x_i}^k - |\theta_{x_i}^m|^{s-2} \theta_{x_i}^m) \left| \frac{\psi_R(x)_{x_i}}{\psi_R(x)^{1/s}} \right|^s e^{-\lambda t} dx dt \right)^{1/s'} \times \\
 &\times \left(\int_{Q_\tau} |\theta^{k,m}|^s \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt \right)^{1/s} = I_{4,1}^{k,m} I_{4,2}^{k,m}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_5^{k,m} &= \int_{Q_\tau} \gamma_2(t, x) (|\theta^k|^{q-2} \theta^k - |\theta^m|^{q-2} \theta^m) (\theta^k - \theta^m) \psi_R(x) \Big] e^{-\lambda t} dx dt \geq \\
&\geq 2^{2-q} \int_{Q_\tau} \gamma_2(t, x) |\theta^{k,m}|^q \psi_R(x) dx dt \geq 2^{2-q} \tilde{\gamma}_2 \int_{Q_\tau} |\theta^{k,m}|^q \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt;
\end{aligned}$$

Підставимо отримані оцінки інтегралів $I_1^a - I_9^a$, $I_1^c - I_{12}^c$, $I_1^{k,m} - I_5^{k,m}$ в (19)-(20), отримаємо

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_\tau} \left[|u_t^{k,m}|^2 + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^{k,m}|^2 + |\theta^{k,m}|^2 \right] \psi_R(x) e^{-\lambda \tau} dx + \\
&+ \int_{Q_\tau} \left[|u_t^{k,m}|^2 + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^{k,m}|^2 + \sum_{i=1}^n |\theta_{x_i}^{k,m}|^2 + |\theta^{k,m}|^2 \right] \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt + \\
&+ \int_{Q_\tau} \left[|u_t^{k,m}|^p + |\theta^{k,m}|^q + \sum_{i=1}^n |\theta_{x_i}^{k,m}|^s \right] \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt \leq \\
&\leq \mu_6 \int_{\Omega_0} \left[|u_1^{k,m}|^2 + \sum_{i=1}^n |u_{0x_i}^{k,m}|^2 + |\theta_0^{k,m}|^2 + |u_0^{k,m}|^2 \right] \psi_R(x) dx + \int_{Q_\tau} \left[|f_1^{k,k} - f_1^{m,m}|^2 + \right. \\
&+ \left. |f_2^{k,k} - f_2^{m,m}|^2 \right] \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt + I_{1,1}^{k,m} \times I_{1,2}^{k,m} + I_{4,1}^{k,m} \times I_{4,2}^{k,m} + \\
&+ \int_{Q_\tau} \left[(\mu_1 + \mu_4) \sum_{i=1}^n \left| \frac{\psi_R(x)_{x_i}}{\psi_R(x)^{1/2+1/p}} \right|^{\frac{2p}{p-2}} + \mu_2 \sum_{i=1}^n \left| \frac{\psi_R(x)_{x_i}}{\psi_R(x)^{1/2+1/s}} \right|^{\frac{2s}{s-2}} \right] e^{-\lambda t} dx dt + \\
&+ \mu_3 \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\psi_R(x)_{x_i}}{\psi_R(x)^{1/q+1/s}} \right|^{\frac{qs}{q-s}} e^{-\lambda t} dx dt, \tag{21}
\end{aligned}$$

де μ_6 – додатна стала.

Існує таке $R_1 > 0$, що для довільного $R_0 < R_1$, $R_0 > 0$ виконуються такі оцінки:

$$\begin{aligned}
(R_1 - R_0)^\alpha &\leq \varphi_R(x) \leq (2R_1)^\alpha, & \left| \frac{(\varphi_R(x))_{x_i}}{(\varphi_R(x))^{1/2+1/p}} \right|^{\frac{2p}{p-2}} &\leq (2R_1)^{\alpha - \frac{2p}{p-2}}, \\
\left| \frac{(\varphi_R(x))_{x_i}}{(\varphi_R(x))^{1/2+1/s}} \right|^{\frac{2s}{s-2}} &\leq (2R_1)^{\alpha - \frac{2s}{s-2}}, & \left| \frac{(\psi_R(x))_{x_i}}{(\psi_R(x))^{1/q+1/s}} \right|^{\frac{qs}{q-s}} &\leq (2R_1)^{\alpha - \frac{qs}{q-s}}. \tag{22}
\end{aligned}$$

На підставі вибору послідовностей $\{f_i^k\}$ ($i = 1, 2$), $\{u_0^k\}$, $\{u_1^k\}$, $\{\theta_0^k\}$, одержуємо

$$\begin{aligned}
f_i^{k,k} &\rightarrow f_i \text{ в } L^2(0, T; L_{loc}^2(\overline{\Omega})), \quad i = 1, 2; & u_0^{k,k} &\rightarrow u_0 \text{ в } H_{0,loc}^1(\overline{\Omega}), \\
u_1^{k,k} &\rightarrow u_1 \text{ в } L_{loc}^2(\overline{\Omega}), & \theta_0^{k,k} &\rightarrow \theta_0 \text{ в } W_{0,loc}^{1,s}(\overline{\Omega})
\end{aligned}$$

при $k \rightarrow \infty$.

Оскільки $|f_i^{k,k} - f_i^{m,m}| \leq |f_i^{k,k} - f_i| + |f_i - f_i^{m,m}|$, то маємо $|f_i^{k,k} - f_i^{m,m}|^2 \leq 2(|f_i^{k,k} - f_i|^2 + |f_i - f_i^{m,m}|^2)$ відповідно для довільного як завгодно малого $\varepsilon > 0$,

існують такі $k_0 > k$, $m_0 > m$, що

$$\begin{aligned} J &= \int_{Q_{T,R_1}} |f_i^{k_0,k_0} - f_i^{m_0,m_0}|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt \leq \\ &\leq 2 \int_{Q_{T,R_1}} \left[|f_i^{k_0,k_0} - f_i|^2 + |f_i - f_i^{m_0,m_0}|^2 \right] \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt < \frac{\varepsilon}{10}, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Аналогічно,

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_{0,R_1}} (u_1^{k_0,k_0} - u_1^{m_0,m_0}) \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt < \frac{\varepsilon}{10}, \\ &\int_{\Omega_{0,R_1}} (\theta_0^{k_0,k_0} - \theta_0^{m_0,m_0}) \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt < \frac{\varepsilon}{10}, \\ &\int_{\Omega_{0,R_1}} (u_0^{k_0,k_0} - u_0^{m_0,m_0}) \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt < \frac{\varepsilon}{10}, \\ &\int_{\Omega_{0,R_1}} \left(\sum_{i=1}^n |u_{0x_i}^{k_0,k_0}|^2 - \sum_{i=1}^n |u_{0x_i}^{m_0,m_0}|^2 \right) \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt < \frac{\varepsilon}{10}, \end{aligned}$$

при $k_0 > k$, $m_0 > m$, для $R_0 \in (0, R_1)$.

Тоді з (21) для $R_0 \in (0, R_1)$ існують такі $k_0 > k$, $m_0 > m$, що

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_{T,R_0}} \left[|u_t^{k_0,m_0}|^2 + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^{k_0,m_0}|^2 + |\theta^{k_0,m_0}|^2 \right] dx + \int_{Q_{T,R_0}} \left[|u_t^{k_0,m_0}|^2 + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^{k_0,m_0}|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^n |\theta_{x_i}^{k_0,m_0}|^2 + |\theta^{k_0,m_0}|^2 \right] dx dt + \int_{Q_{T,R_0}} \left[|u_t^{k_0,m_0}|^p + |\theta^{k_0,m_0}|^q + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^n |\theta_{x_i}^{k_0,m_0}|^s \right] dx dt \mu_6 \frac{2\varepsilon}{5} + I_{1,1}^{k,m} \times I_{1,2}^{k,m} + I_{4,1}^{k,m} \times I_{4,2}^{k,m} + \mu_7 \left(\frac{R_1}{R_1 - R_0} \right)^\alpha \times \\ &\quad \times \left(R_1^{n-\frac{2p}{p-2}} + R_1^{n-\frac{2s}{s-2}} + R_1^{n-\frac{qs}{q-s}} \right), \quad \mu_7 > 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Для $n < \max\{\frac{2p}{p-2}, \frac{2s}{s-2}, \frac{qs}{q-s}\}$ і для довільного як завгодно малого $\varepsilon > 0$

$$\left(\frac{R_1}{R_1 - R_0} \right)^\alpha \left[R_1^{n-\frac{2p}{p-2}} + R_1^{n-\frac{2s}{s-2}} + R_1^{n-\frac{qs}{q-s}} \right] < \frac{\varepsilon}{10} \quad \text{при } R_1 \rightarrow \infty.$$

Інтеграл $I_{1,1}^{k,m}$ — обмежений при фіксованому R_1 ; оскільки $u_t^k \rightarrow u_t$ сильно в $L^r(Q_{T,R_1})$, то $I_{1,2}^{k,m} \rightarrow 0$ при $k, m \rightarrow \infty$, тому для довільного як завгодно малого $\varepsilon > 0$ існують такі $k_0 > k$, $m_0 > m$, що $I_1^{k_0,m_0} < \frac{\varepsilon}{10}$. Інтеграл $I_{4,1}^{k,m}$ — обмежений при фіксованому R_1 ; оскільки $\theta^{k_l} \rightarrow \theta$ сильно в $L^s(Q_{T,R_1})$, то $I_4^{k_0,m_0} < \frac{\varepsilon}{10}$, для $k_0 > k$, $m_0 > m$.

Тоді з останньої нерівності отримаємо

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{T,R_0}} \left[|u_t^{k_0,m_0}|^2 + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^{k_0,m_0}|^2 + |\theta^{k_0,m_0}|^2 \right] dx &< \bar{\varepsilon}, \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon \left(\frac{2\mu_6}{5} + \frac{\mu_7}{10} + \frac{2}{5} \right), \\ \int_{Q_{T,R_0}} \left[|u_t^k|^2 + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^{k_0,m_0}|^2 + \sum_{i=1}^n |\theta_{x_i}^{k_0,m_0}|^2 + |\theta^{k_0,m_0}|^2 \right] dx dt &< \bar{\varepsilon}, \\ \int_{Q_{T,R_0}} |u_t^{k_0,m_0}|^p dx dt &< \bar{\varepsilon}, \quad \int_{Q_{T,R_0}} |\theta^{k_0,m_0}|^q dx dt < \bar{\varepsilon}, \quad \int_{Q_{T,R_0}} \sum_{i=1}^n |\theta_{x_i}^{k_0,m_0}|^s dx dt < \bar{\varepsilon}, \end{aligned}$$

Враховуючи довільність ε , одержуємо, що для будь-якої обмеженої області $G \subset \Omega$ послідовності $\{u^k\}$, $\{\theta^k\}$ фундаментальні в просторах $L^2(0, T; H_0^1(G))$, та $L^2(0, T; W_0^{1,s}(G)) \cap L^q(0, T; L^q(G))$ відповідно. В цьому сенсі розумітимемо, що $\{u^k\}$, $\{\theta^k\}$ фундаментальні відповідно в $L^2(0, T; H_{0,loc}^1(\bar{\Omega}))$, та $L^2(0, T; W_{0,loc}^{1,s}(\bar{\Omega})) \cap L^q(0, T; L_{loc}^q(\bar{\Omega}))$, а отже, ці послідовності і сильно збіжні у відповідних просторах.

Ми отримали, що послідовність $\{u_t^k\}$ фундаментальна в просторі $C([0, T]; L_{loc}^2(\bar{\Omega})) \cap L^p(0, T; L_{loc}^p(\bar{\Omega}))$.

Отже, $u^k \rightarrow u$ в $C([0, T]; H_{0,loc}^1(\bar{\Omega})) \cap L_{loc}^2(\bar{\Omega})$, $\theta^k \rightarrow \theta$ в $C([0, T]; L_{loc}^2(\bar{\Omega}))$. Тоді $u^k(0) \rightarrow u(0)$, $u_t^k \rightarrow u_t(0)$, $\theta^k(0) \rightarrow \theta(0)$ в $L_{loc}^2(\bar{\Omega})$, тобто $u(0) = u_0$, $u_t(0) = u_1$, $\theta(0) = \theta_0$.

Перейшовши до границі в системі рівностей (11)-(12) за вибраними послідовностями при $k \rightarrow \infty$, з фундаментальності послідовностей $\{u^k\}$, $\{\theta^k\}$, отримаємо систему інтегральних рівностей (5)-(6) для довільних $v, w \in C^\infty([0, T]; C_0^\infty(\Omega))$. Отже, (u, θ) розв'язок задачі (1)-(4).

(Єдиність.) Нехай існують два розв'язки (u^1, θ^1) , (u^2, θ^2) задачі (1)-(4) з початковими умовами u_0^i, u_1^i, θ_0^i та початковими функціями $f_1^i, f_2^i, i \in \{1, 2\}$. Згідно з означенням узагальненого розв'язку існують послідовності $\{f_j^{i,k}\}$, $\{u_0^{i,k}\}$, $\{u_1^{i,k}\}$, $\{\theta_0^{i,k}\}$, $i, j = 1, 2$ збіжні до функцій f_j, u_0, u_1, θ_0 відповідно у просторах $L^2(0, T; L_{loc}^2(\bar{\Omega}))$, $H_{0,loc}^1(\bar{\Omega})$, $L_{loc}^2(\bar{\Omega})$, $W_{0,loc}^{1,s}(\bar{\Omega})$. Також існують послідовності $\{u^{i,k}\}$, $\{\theta^{i,k}\}$, $i = 1, 2$, які є розв'язками задачі

$$\begin{aligned} A_1(u^i, \theta^i) &= f_1^{i,k}, \\ A_2(u^i, \theta^i) &= f_2^{i,k}, \quad (t, x) \in Q_T, \\ u^{i,k}|_{S_T} &= 0, \quad u^{i,k}(0, x) = u_0^{i,k}(x), \quad u_t^{i,k}(0, x) = u_1^{i,k}(x), \\ \theta^{i,k}|_{S_T} &= 0, \quad \theta^k(0, x) = \theta_0^k(x), \quad x \in \Omega, \end{aligned}$$

$i = 1, 2$, $k > R_0 + 1$, $k \in \mathbb{N}$, $\{u^{i,k}\}$ збігається до u^i та $\{\theta^{i,k}\}$ збігається до θ^i в просторах V_1, V_3 відповідно, при $k \rightarrow \infty$.

Розглянемо систему рівностей (5) - (6) для $\{u^{1,k}, \theta^{1,k}\}$ та $\{u^{2,k}, \theta^{2,k}\}$. Позначимо $u^{k,m} = u^{1,k} - u^{2,m}$, $\theta^{k,m} = \theta^{1,k} - \theta^{2,m}$. Отримаємо подібну до (19)-(20) систему

$$\begin{aligned}
 & \int_{Q_\tau} \left[u_{tt}^{k,m} u_t^{k,m} \psi_R(x) + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x) u_{x_i}^{k,m} (u_{tx_j}^{k,m} \psi_R(x) + u_t^{k,m} \psi_R(x)_{x_j}) + \right. \\
 & + \sum_{i=1}^n a_i(t,x) u_{x_i}^{k,m} u_t^{k,m} \psi_R(x) + \sum_{i=1}^n b_i(t,x) \theta_{x_i}^{k,m} u_t^{k,m} \psi_R(x) + \\
 & + \alpha_0(t,x) u^{k,m} u_t^{k,m} \psi_R(x) + \alpha_1(t,x) \theta^{k,m} u_t^{k,m} \psi_R(x) + \gamma_0(t,x) (|u^{1,k}|^{r-2} u^{1,k} - \\
 & - |u^{2,m}|^{r-2} u^{2,m}) (u_t^{1,k} - u_t^{2,m}) \psi_R(x) + \gamma_1(t,x) (|u_t^{1,k}|^{p-2} u_t^{1,k} - \\
 & - |u_t^{2,m}|^{p-2} u_t^{2,m}) (u_t^{1,k} - u_t^{2,m}) \psi_R(x) \Big] e^{-\lambda t} dx dt = \\
 & = \int_{Q_\tau} (f_1^{1,k}(t,x) - f_1^{2,m}(t,x)) u_t^{k,m} \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt, \tag{24}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{Q_\tau} \left[\theta_t^{k,m} \theta^{k,m} \psi_R(x) + \sum_{i,j=1}^n c_{ij}(t,x) \theta_{x_i}^{k,m} (\theta_{x_j}^{k,m} \psi_R(x) + \theta^{k,m} (\psi_R(x))_{x_j}) + \right. \\
 & + \sum_{i=1}^n \mu_i(t,x) (|\theta_{x_i}^{1,k}|^{s-2} \theta_{x_i}^{1,k} - |\theta_{x_i}^{2,m}|^{s-2} \theta_{x_i}^{2,m}) (\theta_{x_i}^{k,m} \psi_R(x) + \theta^{k,m} \psi_R(x)_{x_i}) + \\
 & + \sum_{i=1}^n c_i(t,x) u_t^{k,m} (\theta_{x_i}^{k,m} \psi_R(x) + \theta^{k,m} \psi_R(x)_{x_i}) + \sum_{i=1}^n d_i(t,x) u_{x_i}^{k,m} \theta^{k,m} \psi_R(x) + \\
 & + \sum_{i=1}^n e_i(t,x) \theta_{x_i}^{k,m} \theta^{k,m} \psi_R(x) + \beta_0(t,x) u^{k,m} \theta^{k,m} \psi_R(x) + \beta_1(t,x) |\theta^{k,m}|^2 \psi_R(x) + \\
 & + \gamma_2(t,x) (|\theta^{1,k}|^{q-2} \theta^{1,k} - |\theta^{2,m}|^{q-2} \theta^{2,m}) (\theta^{1,k} - \theta^{2,m}) \psi_R(x) \Big] e^{-\lambda t} dx dt = \\
 & = \int_{Q_\tau} (f_2^{1,k}(t,x) - f_2^{2,m}(t,x)) \theta^{k,m} \psi_R(x) e^{-\lambda t} dx dt, \quad \tau \in (0, T). \tag{25}
 \end{aligned}$$

Аналогічно, як і під час доведення існування розв'язку, існує таке $R_2 > 0$, що для довільного $R_1 < R_2$, $R_1 > 0$ існують такі $k_1, m_1 \in \mathbb{N}$, $k_1 > k$, $m_1 > m$, що

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_{T,R_1}} \left[|u_t^{k_1,m_1}|^2 + |\theta^{k_1,m_1}|^2 \right] dx + \int_{Q_{T,R_1}} \left[|u_t^{k_1,m_1}|^2 + |\theta^{k_1,m_1}|^2 \right] dx dt \leq \\
 & \leq \mu_8 \int_{\Omega_{0,R_2}} \left[|u_1^{k_1,m_1}|^2 + \sum_{i=1}^n |u_{0x_i}^{k_1,m_1}|^2 + |\theta_0^{k_1,m_1}|^2 + |u_0^{k_1,m_1}|^2 \right] dx + \\
 & + \mu_9 \left(\frac{R_2}{R_2 - R_1} \right)^\alpha \left(R_2^{n-\frac{2p}{p-2}} + R_2^{n-\frac{2s}{s-2}} + R_2^{n-\frac{qs}{q-s}} \right), \tag{26}
 \end{aligned}$$

де μ_8, μ_9 – додатні сталі, які не залежать від k_1, m_1 та R_2 ; $R_1 \in (0, R_2)$.

Згідно з означенням узагальненого розв'язку, отримуємо

$$\mu_{11} \int_{\Omega_{0,R_2}} \left[|u_1^{k_1,m_1}|^2 + \sum_{i=1}^n |u_{0x_i}^{k_1,m_1}|^2 + |\theta_0^{k_1,m_1}|^2 + |u_0^{k_1,m_1}|^2 \right] dx < \frac{\varepsilon_1}{2} \quad (27)$$

для довільного малого $\varepsilon_1 > 0$.

Нескладно показати, що для $n < \max\{\frac{2p}{p-2}, \frac{2s}{s-2}, \frac{qs}{q-s}\}$, для довільного як завгодно малого $\varepsilon_1 > 0$

$$\left(\frac{R_2}{R_2 - R_1} \right)^\alpha \left(R_2^{n-\frac{2p}{p-2}} + R_2^{n-\frac{2s}{s-2}} + R_2^{n-\frac{qs}{q-s}} \right) < \frac{\varepsilon_1}{2} \quad \text{при } R_2 \rightarrow \infty.$$

Оскільки послідовності $\{u^{i,k}\}$, $i = 1, 2$, фундаментальні в просторі V_1 , а послідовності $\{\theta^{i,k}\}$, $i = 1, 2$ фундаментальні в просторі V_3 , то існують такі $k_2, m_2 \in \mathbb{N}$, що

$$\int_{Q_{T,R_1}} |u^{2,m_2} - u^{1,k_2}| dx dt < \varepsilon, \quad \int_{Q_{T,R_1}} |\theta^{2,m_2} - \theta^{1,k_2}| dx dt < \varepsilon$$

для $k_2 > k_1 > k$, $m_2 > m_1 > m$; $R_1 \in (0, R_2)$.

Очевидно

$$\begin{aligned} \|u^2 - u^1\|_{L^2(Q_{T,R_1})} &\leq \|u^{2,m} - u^2\|_{L^2(Q_{T,R_1})} + \\ &+ \|u^{2,m} - u^{1,k}\|_{L^2(Q_{T,R_1})} + \|u^{1,k} - u^1\|_{L^2(Q_{T,R_1})}. \end{aligned}$$

Враховуючи те, що послідовність $\{u^{i,k}\}$ збігається до u^i в просторі V_1 , існують такі $k_2, m_2 \in \mathbb{N}$, $k_2 > k_2$, $m_2 > m_2$, що

$$\|u^{1,k_2} - u^1\|_{L^2(Q_{T,R_1})} < \varepsilon_1, \quad \|u^{2,m_2} - u^2\|_{L^2(Q_{T,R_1})} < \varepsilon_1.$$

Відповідно,

$$\|u^2 - u^1\|_{L^2(Q_{T,R_1})} < 3\varepsilon_1.$$

Аналогічно, оскільки $\{\theta^{i,k}\}$ збігається до θ^i в просторі V_3 , одержуємо

$$\|\theta^2 - \theta^1\|_{L^2(Q_{T,R_1})} < 3\varepsilon_1.$$

Враховуючи довільність ε_1 , ми отримуємо, що $u^1(t, x) = u^2(t, x)$ та $\theta^1(t, x) = \theta^2(t, x)$ майже всюди в Q_T . Теорема доведена. $\square$

-
1. Гаевский Х. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Гаевский Х., Греггер К., Захариас К. Д. – М., 1978.
 2. Коддингтон Э.А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Коддингтон Э.А., Левинсон Н. – М., 1958.
 3. Лионс Ж.Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Лионс Ж.Л. – М., 1972.
 4. Aassila M. Nonlinear boundary stabilization of an inhomogeneous and anisotropic thermoelasticity system / Aassila M. // Applied Math Letters. – 2000. – Vol. 13. – P. 71-76.
 5. Apolaya R.F. On a nonlinear coupled system with internal damping / Apolaya R.F., Clark H.R., Feitosa A.J. // Electronic Journal of Differential Equations. – 2000. – Vol. 2000, №. 64. – P. 1-17.

6. *Clark H.R.* On a mixed problem for a linear coupled system with variable coefficients / *Clark H.R., San Gil Jutuca L.P., Milla Miranda M.* // Electronic Journal of Differential Equations. – 1998. – Vol. 1998, №. 04. – P. 1-20.
7. *Clark M.R.* On a mixed problem for a coupled nonlinear system / *Clark M.R., Lima O.A.* // Electronic Journal of Differential Equations. – 1997. – Vol. 1997, №. 06. – P. 1-11.
8. *Komornik V.* A direct method for boundary stabilization of the wave equation / *Komornik V., Zuazua E.* // J. Math. Pure et Appl. – 1990. – №. 69. – P. 33-54.
9. *Medeiros L.A.* On a boundary value problem for wave equations: existence, uniqueness-asymptotic behavior / *Medeiros L.A., Milla Miranda M.* // Revista de Matematicas Aplicadas, Universidade de Chile. – 1996. – №17. – P. 47-73.
10. *Munoz Rivera J.E.* Stability in inhomogeneous and anisotropic thermoelasticity / *Munoz Rivera J.E., Oliveira M.L.* // Bellotino U. M. I. – 1997. – Vol. 7, №11-A. – P. 115-127.
11. *Nechepurenko M.O.* The mixed problem for a nonlinear coupled evolution system in a bounded domain / *Nechepurenko M.O.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2007. – Вип. 67. – С. 207-223.
12. *Nechepurenko M.O.* Mixed problem for a nonlinear coupled system in unbounded domains / *Nechepurenko M. O.* // Mat. studii. – 2009. – Vol. 32, №1. – P. 33-44.
13. *Нечепуренко М.О.* О существовании обобщенного решения нелинейной эволюционной системы уравнений в неограниченной по времени области / *Нечепуренко М.О., Торган Г.Р.* // Укр. мат. вісн. – 2010. – Т. 7, №1. – С. 49-72.
14. *Нечепуренко М.О.* Мішана задача для нелінійної гіперболічно-параболічної системи рівнянь в необмеженій області / *Нечепуренко М.О.* // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2009. – Вип. 71. – С.156-174.
15. *Nechepurenko M.O.* On a boundary value problem for nonlinear evolution system with variable coefficients in a bounded domain / *Nechepurenko M.O.* // Вісник Одеського ун-ту. – 2010 (прийнято до друку).
16. *Pohozaev S.I.* On a class of quasilinear hyperbolic equations / *Pohozaev S.I.* // Мат. сборник. – 1975. – Т. 96, №138. – С. 152-166.

MIXED PROBLEM FOR A STRONG NONLINEAR EVOLUTION SYSTEM IN AN UNBOUNDED DOMAIN

Maksym NECHEPURENKO, Halyna TORHAN

*Ivan Franko National University of L'viv,
79000 L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: m.nechepurenko@nasta.com.ua, torgan_g@yahoo.com*

A nonlinear coupled evolutions system in an unbounded domain is considered. Sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution of the system were obtained without any restriction on the infinity.

Key words: nonlinear system, mixed problem.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНОЙ ЭВОЛЮЦИОННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Максим НЕЧЕПУРЕНКО, Галина ТОРГАН

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000 Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: m.nechepurenko@nasta.com.ua, torgan_g@yahoo.com*

Рассмотрено нелинейную связную эволюционную систему в неограниченной области. Получены достаточные условия существования и единственности решения этой системы без ограничений на бесконечности.

Ключевые слова: нелинейная система, смешанная задача.

Стаття надійшла до редколегії 16.04.2010

Прийнята до друку 22.12.2010

УДК 512.582, 515.142.2

CONJUGATE MEASURES ON SEMILATTICES

Oleh NYKYFORCHYN, Oksana MYKYTSEY

*Vasyl' Stefanyk Precarpathian National University,
76025 Ivano-Frankivsk, Shevchenka Str., 57
e-mail: oleh.nyk@gmail.com*

As a generalization of conjugate lattice-valued capacities on a compactum, a relation of conjugacy for Scott continuous maps from continuous semilattices with 0 to complete continuous lattices is introduced and investigated.

Key words: conjugate capacity, continuous semilattice, Lawson lattice, duality of categories.

Introduction. A proper domain for a real-valued additive measure is a ring or an algebra of sets. If a measure is σ -additive, then the closedness of the domain under countable unions and intersections is usually also required. For a capacity, i.e. a regular non-additive measure, on a compactum, it is sufficient to know only values for closed non-empty subsets [4]. These subsets, ordered by reverse inclusion, form a complete continuous meet semilattice, hence it makes sense to consider capacities with domains which are continuous semilattices, and with values in complete continuous lattices. We suggest a definition for such capacities and discuss a generalization of a notion of conjugate capacities, which proved to be fruitful for set functions. It is shown that conjugacy is related to self-dualities of categories of continuous semigroups and of complete lattices, and is naturally described in terms of Galois connections.

1. Preliminaries. We adopt the following definitions and notation, which are consistent with [1]. All statements in this section are also numbered accordingly to the latter citation. From now on, *semilattice* means *meet semilattice*, if otherwise is not specified. If a poset contains a bottom (a top) element, then it is denoted by 0 (resp. by 1). A top element in a semilattice is also called a *unit*.

For a partial order $\leq$ on a set X , the relation $\tilde{\leq}$, defined as $x \tilde{\leq} y \iff y \leq x$, for $x, y \in X$, is a partial order called *opposite* to $\leq$, and $(X, \leq)^{op}$ denotes the poset $(X, \tilde{\leq})$. If the original order $\leq$ is obvious, we write simply X^{op} for the *reversed* poset. We also apply $(\tilde{})$ to all notation to denote passing to the opposite order, i.e. write $\tilde{X} = X^{op}$, $\tilde{\sup} = \inf$, $\tilde{0} = 1$ etc. For a morphism $f : (X, \leq) \rightarrow (Y, \leq)$ in a category [3] $\mathcal{P}\text{oset}$ of posets and isotone (order preserving) mappings, let f^{op} be the same mapping, but

regarded as $(X, \lesssim) \rightarrow (Y, \lesssim)$. It is obvious that f^{op} is isotone as well, thus a functor $(-)^{op} : \mathcal{Poset} \rightarrow \mathcal{Poset}$ is obtained.

For a subset A of a poset $(X, \leq)$, we denote

$$A\uparrow = \{x \in X \mid a \leq x \text{ for some } a \in A\}, \quad A\downarrow = \{x \in X \mid x \leq a \text{ for some } a \in A\}.$$

If $A = A\uparrow$ ($A = A\downarrow$), then a set A is called *upper* (resp. *lower*).

The *subgraph* (or *hypograph*) of a mapping f from a set T to a poset L is the set

$$\text{sub } f = \{(t, \alpha) \in T \times L \mid \alpha \leq f(t)\}.$$

Its *epigraph* is the set

$$\text{epi } f = \{(t, \alpha) \in T \times L \mid f(t) \leq \alpha\}.$$

For a poset L , we denote by $L^\top$ a poset $L \cup \{\top\}$, where $\top \notin L$ becomes a new top element. Observe that $L^\top$ is a complete lattice if and only if L is a complete semilattice.

A *topological meet* (or *join*) *semilattice* is a semilattice L carrying a topology such that the mapping $\wedge : L \times L \rightarrow L$ (resp. $\vee : L \times L \rightarrow L$) is continuous. A lattice L with a topology such that both $\wedge : L \times L \rightarrow L$ and $\vee : L \times L \rightarrow L$ are continuous is called a *topological lattice*.

A set A in a poset $(X, \leq)$ is *directed* (*filtered*) if, for all $x, y \in A$, there is $z \in A$ such that $x \leq z, y \leq z$ (resp. $z \leq x, z \leq y$). A poset is called *directed complete* (*dcpo* for short) if it has lowest upper bounds for all its directed subsets.

For a topology τ on X define a preorder $\leq_\tau$ on X by

$$x \leq_\tau y \Leftrightarrow x \in U \text{ implies } y \in U \text{ for all } x \in \tau.$$

A poset $(X, \leq)$ is called *bounded complete* if each bounded from above non-empty subset $A \subset X$ has a least upper bound.

The preorder $\leq_\tau$ is called the *specialization order* on X with respect to τ . It is a partial order if and only if τ is T_0 -topology.

Fix a partial order $\leq$ on a set X . Among the topologies τ on X with specialization order $\leq$ those with the property that every $\leq$ -directed set with a least upper bound in $U \in \tau$ is eventually in U are called order-consistent. The finest such topology is the *Scott topology* $\sigma(X)$. It consists of all those $U \subseteq X$ that satisfy $x \in U \Leftrightarrow U \cap D \neq \emptyset$ for every $\leq$ -directed $D \subseteq X$ with a least upper bound x . Note that “ $\Leftarrow$ ” above implies $U = U \uparrow$.

A mapping f between dcpo's X and Y is *Scott continuous*, i.e. continuous w.r.t. $\sigma(X)$ and $\sigma(Y)$, if and only if it preserves suprema of directed sets (cf. Proposition II.2-1).

The *lower topology* $\omega(X)$ on a poset $(X, \leq)$ is the least topology such that all sets of the form $\{x\}\downarrow$ are closed. The join of (i.e. the least topology that contains) $\sigma(X)$ and $\omega(X)$ is called the *Lawson topology* on X and denoted by $\lambda(X)$. The space $(X, \lambda(X))$ is denoted by ΛX .

In a dcpo X , a lower set is Lawson closed iff it is Scott closed iff it is closed under suprema of directed subsets.

Let L be a poset. We say that x is *way below* y and write $x \ll y$ iff, for all directed subsets $D \subseteq L$ such that $\sup D$ exists, the relation $y \leq \sup D$ implies the existence of $d \in D$ such that $x \leq d$. “Way-below” relation is transitive and antisymmetric. An element satisfying $x \ll x$ is said to be *compact* or *isolated from below*, and in this case the set $\{x\}\uparrow$ is Scott open (hence Lawson open).

Observe that $\top$ is isolated from below in $L^\top$ if and only if each directed set $D \subset L$ has an upper bound in L .

A poset L is called *continuous* if each element $y \in L$ is a least upper bound a direct set of all $x \in L$ such that $x \ll y$. A *domain* is a continuous dcpo. If domain is a semilattice (a lattice), it is called a *continuous semilattice* (resp. a continuous lattice). Obviously a continuous lattice with a bottom element is a complete lattice, and a semilattice S is continuous if and only if $S^\top$ is a continuous semilattice with $\top$ isolated from below.

By Theorem III.1-9 the Lawson topology on a complete semilattice L is a compact T_0 -topology. Theorem III.1-10 asserts that, for a domain, the Lawson topology is Hausdorff. Hence the Lawson topology on a complete continuous semilattice is compact Hausdorff, and by Theorems II.1-14, III-2.28 the mapping $\wedge : \Lambda L \times \Lambda L \rightarrow \Lambda L$ is continuous, i.e. $(L, \lambda(L))$ is a topological semilattice.

Theorem II.1-14 and Proposition III.2-6 imply that, for a dcpo S and a domain L , the topologies $\lambda(S \times L)$ and $\lambda(S) \times \lambda(L)$ on $S \times L$ are equal.

A topological semilattice is called a *Lawson semilattice* or said to have *small semilattices* if, in each point, it possesses a local base consisting of subsemilattices. A *distributive* topological lattice L is called a *Lawson lattice* if, in each point, it has a local base consisting of sublattices, or, equivalently, if L and L^{op} are Lawson semilattices.

By the Fundamental Theorem on Compact Semilattices (Theorem VI.3-4), each complete continuous semilattice with the Lawson topology is a compact Hausdorff Lawson semilattice, and each compact Hausdorff Lawson semilattice is a complete continuous semilattice such that the given topology agrees with the Lawson topology.

Similarly, by Proposition VII.2-10, a complete distributive lattice L admits a compact Hausdorff topology making it a Lawson lattice if and only if both L and L^{op} are continuous semilattices and the Lawson topologies on L and L^{op} agree (and provide a unique such topology). In this case the Lawson topology on L coincides with the lower topology on L^{op} , and vice versa, hence the topology in question on L is the *interval topology*, i.e. the join of the lower topologies on L and L^{op} .

We regard each subset $P \subset X \times Y$ as a binary relation and write xPy for $(x, y) \in P$. We also denote $xP = \{y \in Y \mid xPy\}$, $Py = \{x \in X \mid xPy\}$ for all $x \in X$, $y \in Y$. The characteristic mapping of a relation will be denoted by the same letter:

$$P(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in P, \\ 0, & (x, y) \notin P, \end{cases} \quad x \in X, y \in Y.$$

Let also $\bar{P}$ be the complement $(X \times Y) \setminus P$.

2. Notion of capacity on semilattice. Lawson duals and conjugacy. From now L is a compact Hausdorff Lawson lattice. For a continuous semilattice S , Lemma II.2-5 and Theorem II.2-12 [1] imply that the set $[S \rightarrow L]$ all Scott-continuous (hence isotone) mappings from S to L is a complete continuous lattice w.r.t. a natural order: $f \leq g$ if $f(s) \leq g(s)$ in L for all $s \in S$. Pairwise meets and joins in $[S \rightarrow L]$ are calculated argumentwise: $f \wedge g(s) = f(s) \wedge g(s)$, $f \vee g(s) = f(s) \vee g(s)$. Thus $[S \rightarrow T]$ with the Lawson topology is a compact Hausdorff Lawson lattice.

It is widely known (cf. Exercise VI.3-18 [1]) that the *Vietoris topology* on the set $\exp X$ of all non-empty closed subsets of a compact Hausdorff space X is the Lawson topology on $(\exp X)^{op}$, i.e. on $\exp X$ ordered by *reverse* inclusion, which we denote by

$\exp_{\sup} X$, and $\exp_{\sup} X$ with this topology is compact Hausdorff Lawson semilattice, hence is a complete continuous (meet) semilattice. Therefore an element $f \in [\exp_{\sup} X \rightarrow L]$ is an isotone mapping $f : \exp X \rightarrow L^{op}$ which preserves infima of filtered collections of sets, i.e. $f(\bigcap \mathcal{A}) = \inf\{f(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ for any filtered collection $\mathcal{A}$ of closed non-empty subsets of X . It is nothing but a τ -smooth (i.e. upper semicontinuous) L^{op} -valued capacity on X [4].

Thus we suggest the following definition which generalizes the notion of capacity on a compactum in the same manner as σ -additive measure on a complete Boolean algebra is a generalization of σ -additive measure defined on a σ -algebra of sets.

Recall that L is a complete continuous semilattice if and only if L is a compact Hausdorff Lawson meet semilattice with the topology $\lambda(L)$.

Definition 1. Let S be a join semilattice such that S^{op} is a continuous semilattice, L a compact Hausdorff Lawson lattice. An L -valued capacity (or L -capacity for brevity) on S is a mapping $c : S \rightarrow L$ which preserves infima of filtered sets (and hence is isotone).

Observe that this is equivalent to being an element of $[S^{op} \rightarrow L^{op}]$. We denote the set of all L -capacities on S by $\underline{M}_{[L]}S$ and consider it with the natural order, thus $\underline{M}_{[L]}S = [S^{op}, L^{op}]^{op}$.

Definition 2. A capacity $c : S \rightarrow L$ is normalized if S has a unit and c takes it to the unit of L .

The least normalized capacity $c_0 : S \rightarrow L$ is the following one:

$$c_0(s) = \begin{cases} 1, & s = 1, \\ 0, & s \neq 1, \end{cases} \quad s \in S.$$

A capacity $c \in \underline{M}_{[L]}S$ is normalized iff $c_0 \leq c$, therefore the set $M_{[L]}S$ of all normalized L -capacities on S is equal to $\{c_0\} \uparrow$ in $\underline{M}_{[L]}S$.

Then the following statement is immediate:

Proposition 1. The posets $\underline{M}_{[L]}S$ and $M_{[L]}S$ are compact Hausdorff Lawson lattices with the respective Lawson topologies.

A filter in a poset is a filtered upper set. For a poset X , by X^{Δ} we denote by X^{Δ} denote the Lawson dual of X which consists of the non-empty Scott open filters in X ordered by inclusion.

A category which consists of all continuous semilattices with units (top elements) and semilattice morphisms that preserve units and directed suprema (i.e. are Scott continuous) is denoted by $\mathcal{CSem}$. Duality Theorem on Continuous Semilattices [1, Theorem IV-2.16] asserts that, for a continuous semilattice S with a unit, the poset S^{Δ} is a continuous semilattice with a unit as well, and, for a morphism $f : S \rightarrow S'$ in $\mathcal{CSem}$, the formula $f^{\Delta}(F) = f^{-1}(F)$, $F \in S'^{\Delta}$, defines a morphism $f^{\Delta} : S'^{\Delta} \rightarrow S^{\Delta}$ in $\mathcal{CSem}$. Thus a functor $(-)^{\Delta} : \mathcal{CSem} \rightarrow \mathcal{CSem}^{op}$ is obtained, and $(-)^{\Delta} \circ (-)^{\Delta}$ is isomorphic to the identity functor $\mathbf{1}_{\mathcal{CSem}}$. An isomorphism $\mathcal{U} : \mathbf{1}_{\mathcal{CSem}} \rightarrow (-)^{\Delta} \circ (-)^{\Delta}$ consists of all mappings $\mathcal{U}_S : S \rightarrow S^{\Delta\Delta}$ that send each $s \in S$ to the set $\{F \in S^{\Delta} \mid s \in F\}$. Hence by the latter theorem the category $\mathcal{CSem}$ is self-dual under the contravariant functor $(-)^{\Delta}$. It is obvious that $\max S^{\Delta} = S$.

Let $\mathcal{CSem}_0$ be the category that consists of all continuous semilattices with *bottom* elements, and all Scott continuous semilattice morphisms which preserve the bottom elements. For each object S of $\mathcal{CSem}_0$, the poset $S^\top$ is an object of $\mathcal{CSem}$ such that its top element is isolated from below. For a morphism $f : S \rightarrow S'$ in $\mathcal{CSem}_0$, let $f^\top : S^\top \rightarrow S'^\top$ take each $s \in S$ to $f(s) \in S'$, and $\top$ to $\top$. Note that $f^\top$ is a morphism in $\mathcal{CSem}$, and $(-)^{\top} : \mathcal{CSem}_0 \rightarrow \mathcal{CSem}$ is a functor which is an embedding of categories.

Then (cf. Exercise IV.2-21 [1]) the Lawson dual $(S^\top)^\Delta$ is a continuous semilattice with the top element $S^\top$ isolated from below, and with the bottom element $\{\top\}$. Hence a poset

$$S^\Delta = (S^\top)^\Delta \setminus \{S^\top\}.$$

is an object of $\mathcal{CSem}_0$ as well. This assignment extends to a contravariant functor $(-)^{\Delta} : \mathcal{CSem}_0 \rightarrow \mathcal{CSem}_0$ as follows: Each $F \in (S'^\top)^\Delta$, $F \neq S'^\top$, does not contain a bottom element $0' \in S'$, therefore the mapping $(f^\top)^\Delta : (S'^\top)^\Delta \rightarrow (S^\top)^\Delta$ takes such F to the open filter $(f^\top)^{-1}(F)$ which does not contain a bottom element $0 \in S$, hence $(f^\top)^\Delta(F) \neq S^\top$. On the other hand, $(f^\top)^\Delta(S'^\top) = S^\top$. Thus we define the mapping $f^\Delta : S'^\Delta \rightarrow S^\Delta$ as a restriction of $(f^\top)^\Delta$. By the above the assignment $s \mapsto \{F \in S^\Delta \mid s \in F\}$ is an isomorphism $u_S : S \rightarrow S^{\Delta\Delta}$ which is a component of a natural transformation $u : \mathbf{1}_{\mathcal{CSem}_0} \rightarrow (-)^{\Delta\Delta}$. Thus $\mathcal{CSem}_0$ is self-dual under the contravariant functor $(-)^{\Delta}$. By the above we consider this self-duality as a restriction of the self-duality for $\mathcal{CSem}$ via $(-)^{\Delta}$ to the subcategory $\mathcal{CSem}_0 \rightarrow \mathcal{CSem}$.

Definition 3. A binary relation $P \subset S \times S'$ is called a separating polarity if:

- (1) for all $x_1, x_2 \in S$, $x_1 \not\leq x_2$ iff there is $y \in S'$ such that $\neg x_1 P y$, $x_2 P y$;
- (1') for all $y_1, y_2 \in S'$, $y_1 \not\leq y_2$ iff there is $x \in S$ such that $\neg x P y_1$, $x P y_2$;
- (2) for all $x_1, x_2 \in S$ and $y \in S'$, $(x_1 \wedge x_2) P y$ iff $x_1 P y$ or $x_2 P y$;
- (2') for all $x \in S$ and $y_1, y_2 \in S'$, $x P (y_1 \wedge y_2)$ iff $x P y_1$ or $x P y_2$;
- (3) for all $x \in S$ and $y \in S'$, the sets $xP \subset S'$ and $Py \subset S$ are non-empty and closed under directed suprema.

It is easy to see that an equivalent definition can be given using characteristic functions.

Definition 4. A binary relation $P \subset S \times S'$ is called a separating polarity if the characteristic mapping $\bar{P} : S \times S' \rightarrow \{0, 1\}$ of its complement satisfies the following:

- (1) $\bar{P}$ is distributive w.r.t. $\wedge$ in the both variables, and $\bar{P}(0, y) = \bar{P}(x, 0') = 0$ for all $x \in S$, $y \in S'$;
- (2) $\bar{P}$ separates elements of S and of S' , i.e.:
 - (2a) for each $x_1, x_2 \in S$, if $\bar{P}(x_1, y) = \bar{P}(x_2, y)$ for all $y \in S'$, then $x_1 = x_2$;
 - (2b) for each $y_1, y_2 \in S'$, if $\bar{P}(x, y_1) = \bar{P}(x, y_2)$ for all $x \in S$, then $y_1 = y_2$;
- (3) $\bar{P}$ is Scott continuous.

Proposition 2. Let S, S' be continuous meet semilattices with bottom elements $0, 0'$ resp. If $P \subset S \times S'$ is a separating polarity, then the mapping i that takes each $x \in S$ to $x\bar{P} \cup \{\top\}$ is an isomorphism $S \rightarrow S'^\Delta$. Conversely, each isomorphism $i : S \rightarrow S'^\Delta$ is determined by the above formula for a unique separating polarity $P \subset S \times S'$.

Proof. ($\implies$) Recall that by Lemma II.2-8 [1] the joint Scott continuity of $\bar{P}$ is equivalent to its Scott continuity in each variable separately. Due to (1), (3) $x\bar{P}$ and $\bar{P}y$ are Scott open

filters (although not necessarily non-empty), which are distinct from S' and S resp. Then $i(x) = x\bar{P} \cup \{\top\} \in S'^\wedge$ for all $x \in S$. We similarly define i' as follows: $y \mapsto \bar{P}y \cup \{\top\}$ for all $y \in S'$. Then i and i' are meet-preserving injective mappings $S \rightarrow S'^\wedge$ and $S' \rightarrow S^\wedge$, respectively. From (1),(3) we also infer that i preserves directed suprema and a bottom element, hence is Scott continuous, and therefore is a morphism in the category $\mathcal{CSem}_0$. We can apply to i the contravariant functor $(-)^{\wedge}$. The mapping $i^{\wedge} : S'^{\wedge\wedge} \rightarrow S^{\wedge}$ takes each non-empty Scott open filter $F \subsetneq (S'^{\top})^{\Delta}$ to $i^{-1}(F) \cup \{\top\}$. Then $i^{\wedge} \circ u_{S'} : S' \rightarrow S^{\wedge}$ sends all y to

$$\{x \in S^{\top} \mid x = \top \text{ or } i(x) \ni y\} = \{x \in S^{\top} \mid x = \top \text{ or } y \in x\bar{P}\} = \bar{P}y \cup \{\top\} = i'(y).$$

Since $u_{S'}$ is an isomorphism and i' is injective by (2), the mapping $i^{\wedge}$ is injective as well, hence i is surjective. Taking into account that i is meet-preserving, we arrive at conclusion that i is an order isomorphism.

Observe that similarly $i'^{\wedge} \circ u_S : S \rightarrow S'^{\wedge}$ coincides with i , hence i' is an isomorphism as well.

($\Leftarrow$) Let $i : S \rightarrow S'^{\wedge}$ be an isomorphism. It is straightforward to verify that the relation $P = \{(x, y) \in S \times S' \mid y \notin i(x)\}$ satisfies the properties (1)–(3) and determines i in the above manner.

By the above in the sequel, if such S' and P exist, we may assume that S' is equal to $S^{\wedge}$, and $P = \{(s, F) \in S \times S^{\wedge} \mid s \notin F\}$. It is important that, for $S = \exp_{\supset} X$, we may put $S' = S$. A required $P \subset \exp_{\supset} X \times \exp_{\supset} X$ is the following: $(F, G) \in P$ iff $F \cap G \neq \emptyset$.

We are interested in cases when both S and $S^{\wedge}$ are compact Hausdorff w.r.t. the Lawson topologies. A continuous semilattice S is called *stably continuous* if $x \ll y, z$ implies $x \ll y \wedge z$ for any $x, y, z \in S$. By Exercise IV-2.23 [1] a continuous semilattice L is a continuous lattice if and only if L^{Δ} is stably continuous with a top element isolated from below. Therefore:

Lemma 1. *For a continuous semilattice S with a bottom element, the poset $(S^{\top})^{\Delta}$ is a continuous lattice (i.e. $S^{\wedge}$ is a complete semilattice) iff S is stably continuous.*

Corollary 1. *For a continuous semilattice S with a bottom element, the Lawson topologies on S and $S^{\wedge}$ are compact and Hausdorff if and only if S is complete and stably continuous.*

Hence the full subcategory $\mathcal{CSCSem}_0$ of $\mathcal{CSem}_0$ with complete stably continuous semilattices with 0 as objects is self-dual under a restriction of the functor $(-)^{\wedge}$.

Note that, for a compactum X , the semilattice $\exp_{\supset} X$ is complete, stably continuous, and contains a bottom element.

Lemma II.2-9 [1] implies that, for a morphism $f : S_1 \rightarrow S_2$ in $\mathcal{CSem}_0$, a mapping $[f \rightarrow L] : [S_2 \rightarrow L] \rightarrow [S_1 \rightarrow L]$, $[f \rightarrow L](c) = c \circ f$ for $c \in [S_2, L]$, is a Scott continuous lattice morphism. Thus a contravariant functor $[- \rightarrow L]$ from $\mathcal{CSem}_0$ to the category $\mathcal{Sup}$ of complete lattices and mappings that preserve all suprema is obtained. For each object S of $\mathcal{CSem}_0$, the subset $[S \rightarrow L]_0 = \{c \in [S \rightarrow L] \mid c(0) = 0\}$ is closed under arbitrary meets and joins, hence is an object of $\mathcal{Sup}$ as well. The inclusion $[S \rightarrow L]_0 \hookrightarrow [S \rightarrow L]$ is a morphism in $\mathcal{Sup}$, and $[f \rightarrow L]([S_2 \rightarrow L]_0) \subset [S_1 \rightarrow L]$ for $f : S_1 \rightarrow S_2$ above. Therefore we define a mapping $[f \rightarrow L]_0 : [S_2 \rightarrow L]_0 \rightarrow [S_1 \rightarrow L]_0$ as a restriction of $[f \rightarrow L]$ and obtain a contravariant functor $[- \rightarrow L]_0 : \mathcal{CSem}_0 \rightarrow \mathcal{Sup}$. Recall that

$[S \rightarrow L]$ is identified with the opposite to the poset $\underline{M}_{[L^{op}]}S^{op}$ of L^{op} -capacities on S^{op} . It is easy to see that $[S \rightarrow L]_0$ is opposite to the poset $M_{[L^{op}]}S^{op}$ of *normalized* L^{op} -capacities on S^{op} .

Let continuous semilattices with bottom elements S, S' and a separating polarity $P \subset S \times S'$ be fixed. For a Scott continuous function $c : S \rightarrow L$ (i.e. for an L^{op} -capacity $c : S^{op} \rightarrow L^{op}$), we define a function $\tilde{c} : S' \rightarrow \tilde{L}$ by the equality

$$\tilde{c}(s') = \inf\{c(s) \mid s \in S, (s, s') \notin P\} \text{ in } L, s' \in S'.$$

For a particular “canonical” case $S' = S^\wedge$, $P = \{(s, F) \in S \times S^\wedge \mid s \in F\}$, the function $\tilde{c} \in [S' \rightarrow \tilde{L}]$ is of the form

$$\tilde{c}(F) = \inf\{c(s) \mid s \in F, s \neq \top\} \text{ in } L, F \in S^\wedge.$$

Proposition 3. *The function $\tilde{c}$ is Scott continuous, takes a bottom element to a bottom element, and its epigraph is equal to*

$$\widetilde{\text{epi}} \tilde{c} = \{(s', \alpha') \in S' \times \tilde{L} \mid (s, s') \notin P \text{ or } \alpha' \leq \alpha \text{ for all } (s, \alpha) \in \text{epi } c\}.$$

If for S' the same S, P are fixed in the above sense, then

$$\tilde{\tilde{c}}(s) = \begin{cases} c(s), s \neq 0, \\ 0, s = 0, \end{cases} \quad s \in S.$$

Remark 1. This statement can be equivalently formulated in terms of capacities: under the conditions of the latter proposition, if $c : S^{op} \rightarrow L$ is an L -capacity, then the function $\tilde{c} : S'^{op} \rightarrow \tilde{L}$ defined as

$$\tilde{c}(s') = \sup\{c(s) \mid s \in S, (s, s') \in P\} \text{ in } L, s' \in S',$$

is a normalized $\tilde{L}$ -capacity with a subgraph determined by the formula

$$\widetilde{\text{sub}} \tilde{c} = \{(s', \alpha') \in S' \times \tilde{L} \mid (s, s') \notin P \text{ or } \alpha \leq \alpha' \text{ for all } (s, \alpha) \in \text{sub } c\},$$

and $\tilde{\tilde{c}} = c \vee c_0$, where c_0 is the least normalized capacity taking 0 $\in S$ (i.e. a top element of S^{op}) to 1 $\in L$ and all other elements of S to 0.

To prove the latter statement and to clarify the nature of the relationship between c and $\tilde{c}$, we need a notion of Galois connection.

Definition 5. [1] *If S, S' are posets and $p : S \rightarrow S'$ and $q : S' \rightarrow S$ are functions such that for all $s \in S$ and $s' \in S'$*

$$s \leq_S q(s') \text{ iff } p(s) \leq_{S'} s',$$

then p is called a lower adjoint to q , q is an upper adjoint to p , and the quadruple (S, p, q, S') is called a Galois connection (or a Galois correspondence).

Clearly such p, q are isotone mappings, and each mapping of the adjoint pair (p, q) is uniquely determined by the other one.

If $p_1 : S \rightarrow S'^{op}$ and $p_2 : S'^{op} \rightarrow S$ are such that (S, p_1, p_2, S'^{op}) is a Galois connection, then the quadruple (S, p_1, p_2, S') is called a *contravariant Galois connection*. An equivalent definition is the following:

Definition 6. If S, S' are posets and $p : S \rightarrow S'$ and $q : S' \rightarrow S$ are functions such that for all $s \in S$ and $s' \in S'$

$$s \leq_S q(s') \text{ iff } s' \leq_{S'} p(s),$$

then the quadruple (S, p, q, S') is called a contravariant Galois connection.

Such p, q are antitone, and the latter definition is symmetric, i.e. (S', q, p, S) is a contravariant Galois connection as well.

For a fixed separating polarity $P \subset S \times S'$ and a mapping $f \in [S \rightarrow L]$, we define a mapping $p(f) : S' \rightarrow \tilde{L}$ by the formula

$$p(f)(s') = \widetilde{\sup}\{f(s) \tilde{\wedge} P(s, s') \mid s \in S\}, s' \in S'.$$

For $f' \in [S' \rightarrow \tilde{L}]$, a mapping $q(f') : S \rightarrow L$ is defined similarly:

$$q(f')(s) = \sup\{f'(s') \wedge \bar{P}(s, s') \mid s' \in S'\}, s \in S.$$

For all $s \in S$, the function $S' \rightarrow \tilde{L}$ that takes each s' to $f(s) \tilde{\wedge} P(s, s')$ is Scott continuous, therefore the pointwise supremum of all such functions is Scott continuous as well. It is obvious that $p(f)(0) = 1 = \tilde{0}$, hence $p(f) \in [S' \rightarrow \tilde{L}]_0$, and similarly $q(f')$ is in $[S \rightarrow L]_0$. Observe that, for all $f \in [S \rightarrow L]$ and $f' \in [S' \rightarrow \tilde{L}]$, the both inequalities $p(f) \leq f'$ and $q(f') \leq f$ are equivalent to

$$f(s) \geq f'(s') \text{ for all } s \in S, s' \in S' \text{ such that } s \bar{P} s'.$$

Thus $([S \rightarrow L]^{op}, p, q, [S' \rightarrow \tilde{L}]^{op})$ is a contravariant Galois connection. Separation of points of S and S' by $\bar{P}$ implies that the restriction $p_0 : [S \rightarrow L]_0 \rightarrow [S' \rightarrow \tilde{L}]_0$ of p is injective, as well as the restriction $q_0 : [S' \rightarrow \tilde{L}]_0 \rightarrow [S \rightarrow L]_0$ of q , therefore p_0 and q_0 are mutually inverse order antiisomorphisms.

Now by observing that $p(f) = \tilde{f}$, $q(f') = \tilde{f}'$, the Proposition 3 is at hand. If $S' = S^\wedge$, and $P = \{(s, F) \in S \times S^\wedge \mid s \notin F\}$, then the constructed antiisomorphism $p_0 : [S \rightarrow L]_0 \rightarrow [S^\wedge \rightarrow \tilde{L}]_0$ is denoted by $\varkappa_{[L]}S$.

If $S = S' = \exp_\sup X$, $P = \{(F, G) \in (\exp_\sup X)^2 \mid F \cap G = \emptyset\}$, $c \in \underline{M}_{[L]}S$, then

$$\tilde{c}(F) = \sup\{c(G) \mid F \cap G = \emptyset, F \in \exp_\sup X\},$$

which is precisely a definition of a *conjugate $\tilde{L}$ -capacity* to an L -capacity c on a compactum X , cf. [4]. Hence we also call the just defined $\tilde{c} : S' \rightarrow \tilde{L}$ a *conjugate mapping* to $c : S \rightarrow L$, and $\tilde{c} : S'^{op} \rightarrow \tilde{L}$ is called a *conjugate capacity* to $c : S^{op} \rightarrow L$.

From the above we obtain also:

Proposition 4. For a compact Hausdorff Lawson lattice L and a continuous semilattice S with a bottom element, the posets $[S \rightarrow L]_0$ and $[S^\wedge \rightarrow \tilde{L}]_0$ are order antiisomorphic.

The posets $M_{[L]}S^{op}$ and $M_{[\tilde{L}]}(S^\wedge)^{op}$ are also order antiisomorphic.

Let $P_1 \subset S_1 \times S_1^\wedge$, $P_2 \subset S_2 \times S_2^\wedge$ be “standard” separating polarities, i.e. $P_i = \{(s, F) \in S_i \times S_i^\wedge \mid s \notin F\}$, $i = 1, 2$, and contravariant Galois connections $([S_i \rightarrow L]_0^{op}, p_i, q_i, [S_i^\wedge \rightarrow \tilde{L}]_0^{op})$, $i = 1, 2$, are as described above.

Consider the following diagram:

$$\begin{array}{ccc}
 [S_1 \rightarrow L]_0 & \xrightleftharpoons[q_1]{p_1} & [S_1^\wedge \rightarrow \tilde{L}]_0 \\
 \uparrow [f \rightarrow L]_0 & & \downarrow [f^\wedge \rightarrow \tilde{L}]_0 \\
 [S_2 \rightarrow L]_0 & \xrightleftharpoons[q_2]{p_2} & [S_2^\wedge \rightarrow \tilde{L}]_0
 \end{array}$$

Lemma 2. *The quadruple $([S_1 \rightarrow L]_0^{op}, [f^\wedge \rightarrow \tilde{L}]_0 \circ p_1, [f \rightarrow L]_0 \circ q_2, [S_2^\wedge \rightarrow \tilde{L}]_0^{op})$ is a contravariant Galois connection.*

Proof. Observe that, for all $\varphi \in [S_1 \rightarrow L]_0$, $\psi \in [S_2^\wedge \rightarrow \tilde{L}]_0$, the inequality $\tilde{\varphi} \circ f^\wedge \leq \psi$ is equivalent to

$$\psi(y) \leq \varphi(x) \text{ for all } x \in S_1, y \in S_2^\wedge \text{ such that } (x, f^\wedge(y)) \notin P_1,$$

and the inequality $\tilde{\psi} \circ f \leq \varphi$ is equivalent to

$$\psi(y) \leq \varphi(x) \text{ for all } x \in S_1, y \in S_2^\wedge \text{ such that } (f(x), y) \notin P_2.$$

Since $(x, f^\wedge(y)) \notin P_1$ if and only if $(f(x), y) \notin P_2$, we arrive at the required conclusion.

Corollary 2. *The mapping $q_2 \circ [f^\wedge \rightarrow \tilde{L}]_0 \circ p_1 : [S_1 \rightarrow L]_0 \rightarrow [S_2 \rightarrow L]_0$ is an upper adjoint to the mapping $[f \rightarrow L]_0 : [S_2 \rightarrow L]_0 \rightarrow [S_1 \rightarrow L]_0$.*

For a mapping of complete lattices $\varphi : L \rightarrow L'$, we denote by φ^* its *lower inverse*, i.e. the mapping $L' \rightarrow L$ that is defined by the equality

$$\varphi^*(y) = \sup\{x \in L \mid \varphi(x) \leq y\}, \quad y \in L'.$$

Recall that by the adjoint theorem for order structures [2] any mapping of complete lattices $\varphi : L \rightarrow L'$ which preserves arbitrary suprema is a lower adjoint of a unique Galois connection between these lattices, and the upper adjoint is equal to φ^* .

Theorem IV.1-3 [1] implies that the category $\mathcal{S}up$ of complete lattices and mappings that preserve all suprema is self-dual under the contravariant functor $\tilde{D}$ that sends each lattice L to L^{op} and each morphism $f : L_1 \rightarrow L_2$ to $(f^*)^{op} : L_2^{op} \rightarrow L_1^{op}$.

The diagram

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{S}up & \xrightarrow{\tilde{D}} & \mathcal{S}up \\
 \uparrow [-\rightarrow L]_0 & & \uparrow [-\rightarrow \tilde{L}]_0 \\
 \mathcal{CSem}_0 & \xrightarrow{(-)^\wedge} & \mathcal{CSem}_0
 \end{array}$$

generally is not commutative, but the two pairwise compositions are isomorphic [3] (observe that all functors are contravariant).

Putting the previous propositions together, we obtain the main result of this work.

Theorem 1. *The collection $\varkappa_{[L]}$ of all isomorphisms $\varkappa_{[L]}S : [S \rightarrow L]_0^{op} \rightarrow [S^\wedge \rightarrow \tilde{L}]_0$, for all objects of $\mathcal{CSem}_0$, is an isomorphism of functors $\tilde{D} \circ [- \rightarrow L]_0 \rightarrow [- \rightarrow \tilde{L}]_0 \circ (-)^\wedge$.*

Thus the constructions of lattices of normalized L -capacities and of normalized $\tilde{L}$ -capacities on continuous semigroups with zero are functorial and linked via two classic dualities and a functor isomorphism. The components of the latter send each capacity to its conjugate.

-
1. *Gierz G.* Continuous Lattices and Domains. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 93 / *Gierz G., Hofmann K. H., Keimel K., Lawson J. D., Mislove M., Scott D. S.* – Cambridge University Press, 2003.
 2. *Johnstone P. T.* Stone spaces. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 3 / *Johnstone P. T.* – New York: Cambridge University Press, 1983.
 3. *Mac Lane S.* Categories for the Working Mathematician. 2nd ed. / *Mac Lane S.* – N.Y.: Springer, 1998.
 4. *Nykyforchyn O. R.* Capacities with values in compact Hausdorff lattices / *Nykyforchyn O. R.* // Applied Categorical Structures. – 2008. – Vol. 15, № 3. – P. 243-257.

СПРЯЖЕНІ МІРИ НА НАПІВГРATКАХ

Олег НИКИФОРЧИН, Оксана МИКИЦЕЙ

*Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
76025 Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57
e-mail: oleh.nyk@gmail.com*

Як узагальнення спряжених ґраткозначних ємностей на компактi, запроваджено відношення спряженості неперервних за Скоттом відображень з неперервних напівґраток з нулем у повні неперервні ґратки.

Ключові слова: спряжена ємність, неперервна напівґратка, двоїстість категорій.

СОПРЯЖЕННЫЕ МЕРЫ НА ПОЛУРЕШЁТКАХ

Олег НИКИФОРЧИН, Оксана МИКИЦЕЙ

*Прикарпатский национальный университет имени Василия Стефаника,
76025 Ивано-Франковск, ул. Шевченко, 57
e-mail: oleh.nyk@gmail.com*

Как обобщение сопряженных решёткозначных ёмкостей на компакте, определено отношение сопряженности непрерывных за Скоттом отображений с непрерывных полурешёток с нулём в полные непрерывные решётки.

Ключевые слова: сопряженная ёмкость, непрерывные полурешётки, двоичность категорий.

Стаття надійшла до редколегії 04.11.2010

Прийнята до друку 22.12.2010

УДК 517.53

ТЕОРЕМА ТИПУ БОРЕЛЯ ДЛЯ ЦІЛИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ З НЕМОНОТОННИМИ ПОКАЗНИКАМИ

Ігор ОВЧАР¹, Олег СКАСКІВ²

¹ Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу,
76000 Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15

² Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000 Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: matstud@franko.lviv.ua

Для цілого ряду Діріхле $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, де послідовність показників така, що $\{\lambda_n : n \geq 0\} \subset \mathbb{R}_+$, знайдено умови, за яких $\ln M(x, F) \sim \ln \mu(x, F)$ при $x \rightarrow +\infty$ ($x \notin E$, $\int_E d\ln x < +\infty$), де $M(x, F) = \sup\{|F(x+iy)| : y \in \mathbb{R}\}$, $\mu(x, F) = \max\{|a_n|e^{x\lambda_n} : n \geq 0\}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Ключові слова: ряд Діріхле, максимальний член, логарифмічна міра, співвідношення Бореля.

Через S_a позначатимемо клас абсолютно збіжних у півплощині $\{z : \operatorname{Re} z < a\}$, $a \leq +\infty$, рядів Діріхле вигляду

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

де $\{\lambda_n : n \geq 0\} \subset [0, +\infty)$; $S \stackrel{\text{def}}{=} S_{+\infty}$ – клас цілих рядів Діріхле.

Через $S^+(\lambda)$ та $S_0^+(\lambda)$ позначатимемо підкласи відповідно класів S та S_0 , у які входять ряди Діріхле вигляду (1) з фіксованою послідовністю показників $\lambda = (\lambda_n)$ такою, що $\lambda_n \uparrow +\infty$ ($1 \leq n \uparrow +\infty$). Для $F \in S_a$, $a \leq +\infty$ та $x < a$ позначимо

$$M(x, F) = \sup\{|F(x+iy)| : y \in \mathbb{R}\}, \quad \mu(x, F) = \max\{|a_n|e^{x\lambda_n} : n \geq 0\}.$$

Відомо ([1]) таке: для того, щоб для кожної функції $F \in S^+(\lambda)$ співвідношення Бореля

$$\ln M(x, F) = (1 + o(1)) \ln \mu(x, F) \quad (2)$$

виконувалось при $x \rightarrow +\infty$ зовні деякої множини $E \subset [0, +\infty)$ ($x \notin E$) скінченної міри Лебега необхідно і достатньо, щоб умова

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{n\mu_n} < +\infty \quad (3)$$

виконувалась з $\mu_n = \lambda_n$ ($n \geq 0$).

Водночас у різних класах абсолютно збіжних рядів Діріхле відомо ([2]-[9]), що в достатніх умовах, за виконання яких справджуються ті чи інші асимптотичні співвідношення, послідовності (λ_n) і $(-\ln|a_n|)$ у випадку класу $S^+ \stackrel{def}{=} \bigcup_{\lambda} S^+(\lambda)$ та послідовності (λ_n) і $(\ln|a_n|)$ у випадку класу $S_0^+ \stackrel{def}{=} \bigcup_{\lambda} S_0^+(\lambda)$ з якісного погляду є рівноправними. В [2] подібний ефект доведено у класі S_0^+ стосовно співвідношення (2), а в [5, 6, 7] у цьому ж класі та у класі S стосовно співвідношення

$$M(x, F) = (1 + o(1))\mu(x, F). \quad (4)$$

У цьому разі від послідовності показників $\lambda = (\lambda_n)$ в [5, 6] у класі S вимагається лише, щоб виконувалась умова

$$(\forall n \geq 0): \quad \lambda_n < \sup\{\lambda_j: j \geq 0\} \stackrel{def}{=} \beta, \quad (5)$$

тобто, допускається як обмеженість послідовності показників, так і наявність у неї будь-якої кількості точок скупчення.

У цій статті доводимо подібний ефект стосовно співвідношення (2) у класі S .

Через S^Δ , $\Delta \in (0, +\infty]$, позначимо клас цілих рядів Діріхле з класу S , показники яких задовольняють умову (5) з $\beta \leq \Delta$.

Через L позначимо клас неперервних, додатних, зростаючих до $+\infty$ функцій; L_1 – підклас L , до якого входять функції $\Phi(t)$ такі, що

$$\int_{x_0}^x \frac{\Phi(t)}{t} dt = O(\Phi(x)) \quad (x \rightarrow +\infty);$$

L_2 – підклас L , до якого входять функції $\Phi(t)$, обернені функції $\varphi(t)$ до яких задовольняють умову Карамати

$$(\forall c > 0): \quad \varphi(ct) = O(\varphi(t)) \quad (t \rightarrow +\infty).$$

Зауважимо, що $L_1 = L_2$. Справді, якщо $\Phi \in L_1$, то при фіксованому $c \geq 1$ і $t \rightarrow +\infty$ маємо

$$0 \leq \ln \frac{\varphi(ct)}{\varphi(t)} = \int_{\varphi(t)}^{\varphi(ct)} d \ln x \leq \frac{1}{\Phi(\varphi(t))} \int_{\varphi(t)}^{\varphi(ct)} \frac{\Phi(x)}{x} dx = \frac{1}{t} O(\Phi(\varphi(ct))) = O(1),$$

тобто $\Phi \in L_2$.

Навпаки, з означення класу L_2 одержуємо, зокрема, що знайдеться стала $C_1 > 1$ така, що $\Phi(\frac{t}{2}) \leq \frac{1}{C_1} \Phi(t)$ ($t \geq t_0$). Не зменшуючи загальності, вважаємо $t_0 = 0$. Тому

$$\int_0^t \frac{\Phi(x)}{x} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{t \cdot 2^{-k-1}}^{t \cdot 2^{-k}} \frac{\Phi(x)}{x} dx \leq \Phi(t) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{C_1} \right)^k \ln 2 = O(\Phi(t)) \quad (t \rightarrow \infty),$$

тобто $L_2 \subset L_1$. Отже, $L_1 = L_2$.

Доведемо спочатку теорему, яка містить оцінку загального члена цілого ряду Діріхле з класу S через максимальний член ряду. Доведення цієї теореми ідейно близьке до доведення відповідної теореми з [2].

Надалі, для $F \in S^\Delta$ позначатимемо $\Phi(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \ln \mu(\sigma, F)$, $\Phi_1(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(\sigma)/\sigma$, а через φ та φ_1 позначатимемо, відповідно, обернені функції до функцій Φ та Φ_1 .

Логарифмічною мірою вимірної множини $E \subset [1, +\infty)$ називаємо величину

$$\ln -\text{meas}(E) \stackrel{\text{def}}{=} \int_E d \ln x.$$

Теорема 1. Нехай функція $F \in S^{+\infty}$ така, що $\Phi_1 \in L_1$, а $v(t)$ – невід’ємна на $[0, +\infty)$ і додатна при $t \rightarrow +\infty$ функція така, що $\int_0^{+\infty} v(t) dt < +\infty$. Якщо $\ln n = o(\ln |a_n|)$ ($n \rightarrow +\infty$), то існує функція $c_1(t) \uparrow +\infty$ ($t \rightarrow +\infty$) така, що для всіх $n \geq 0$ і для всіх $\sigma > 0$ ($\sigma \notin E, \ln -\text{meas}(E) < +\infty$) виконується нерівність

$$|a_n| e^{\sigma \lambda_n} \leq \mu(\sigma, F) \exp \left\{ -\sigma \int_{\mu_\nu}^{\mu_n} (\mu_n - t) \frac{c_1(t)}{\varphi(t)} v(4t) dt \right\}, \quad (6)$$

де $\mu_n = -\ln |a_n|$, а $\nu = \nu(\sigma, F) = \max\{n: |a_n| e^{x \lambda_n} = \mu(x, F)\}$ – центральний індекс ряду (1).

Доведення. Зауважимо спочатку, що з того, що $F(0) \neq \infty$ випливає, що $|a_n| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$), звідки $\mu_n = -\ln |a_n| \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow +\infty$). Не зменшуючи загальності, припустимо, що $\mu_n \uparrow +\infty$ ($n \rightarrow +\infty$), тобто послідовність (μ_n) монотонно зростає до $+\infty$.

Оскільки інтеграл $\int_0^{+\infty} v(t) dt$ збіжний, то $l(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_x^{+\infty} v(t) dt \downarrow 0$ ($x \rightarrow +\infty$), а також $c_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} (l(x))^{-1/2} \uparrow +\infty$ ($x \rightarrow +\infty$). Крім того,

$$M = \int_0^{+\infty} c_1(t) v(4t) dt \leq -\frac{1}{4} \int_0^{+\infty} (l(x))^{-\frac{1}{2}} dl(x) = \frac{1}{2} \sqrt{l(0)} < +\infty. \quad (7)$$

Виберемо тепер

$$\alpha(t) = - \int_t^{+\infty} \frac{1}{\varphi(u)} c_1(u) v(4u) du.$$

Зауважимо, що з (7) випливає, що

$$\alpha(t) = o\left(\frac{1}{\varphi(t)}\right) \quad (t \rightarrow +\infty). \quad (8)$$

Позначимо

$$\alpha_n = \exp \left\{ - \int_0^{\mu_n} \alpha(t) dt \right\}, \quad \tau_n = \alpha(\mu_n),$$

і розглянемо ряд Діріхле

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{\alpha_n} e^{z\mu_n}, \quad (9)$$

з $b_n = e^{\lambda_n}$. Покажемо, що функція $f \in S_0$. Справді, з того, що $F \in S$, випливає $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-\ln |a_n|}{\lambda_n} = +\infty$, тому $\lambda_n = o(\mu_n)$ ($n \rightarrow +\infty$). Звідси та з (7)

$$\ln \frac{b_n}{\alpha_n} = \lambda_n - \int_0^{\mu_n} \int_t^{\infty} \frac{c(u)}{\varphi(u)} v(4u) du = o(\mu_n) \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Оскільки за умовою $\ln n = o(\mu_n)$ ($n \rightarrow +\infty$), то за теоремою Валірона для абсциси абсолютної збіжності ряду (9) одержуємо

$$\sigma_a(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-\ln(b_n/\alpha_n)}{\mu_n} = 0.$$

Отже, $f \in S_0$.

Для того, щоб можна було застосувати міркування, подібні як у доведенні теореми 2 з [2], достатньо показати, що центральний індекс $\nu(x, f) \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -0$). Це випливало би з того, що $\mu(x, f) \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -0$). Останнє співвідношення рівносильне до умови

$$\sup \left\{ \frac{b_n}{\alpha_n} : n \geq 0 \right\} = +\infty. \quad (10)$$

Покажемо, що ця умова виконується. Справді, $0 \leq \ln \mu(\sigma, F) = -\mu_\nu + \sigma \lambda_\nu$ ($\sigma \geq \sigma_0$), $\nu = \nu(\sigma - 0, F)$, звідки $\mu_\nu \leq \sigma \lambda_\nu$. Оскільки, $\Phi(\sigma) = \sigma \Phi_1(\sigma) = \ln \mu(\sigma, F) \leq \sigma \lambda_\nu$ ($\sigma \geq \sigma_0$), то $\sigma \leq \varphi_1(\lambda_\nu)$, де φ_1 — обернена функція до функції Φ_1 . Тому

$$\sigma \leq \varphi_1(\lambda_\nu), \quad \mu_\nu \leq \sigma \lambda_\nu \leq \lambda_\nu \varphi_1(\lambda_\nu) \quad (\sigma \geq \sigma_0), \quad \nu = \nu(\sigma - 0, F). \quad (11)$$

Залишилося зауважити, що функція $t/\varphi(t)$ є оберненою до функції $t\varphi_1(t)$, де φ_1 — функція обернена до функції $\Phi_1(t) = \frac{\Phi(t)}{t}$, тому

$$\lambda_\nu \geq \frac{\mu_\nu}{\varphi(\mu_\nu)} \quad (\sigma \geq \sigma_0) \quad \nu = \nu(\sigma - 0, F).$$

Звідси

$$\ln \frac{b_\nu}{\alpha_\nu} \geq \frac{\mu_\nu}{\varphi(\mu_\nu)} - \int_0^{\mu_\nu} |\alpha(t)| dt, \quad \nu = \nu(\sigma - 0, F).$$

З умови $\Phi_1 \in L_1$ випливає, що $t/\varphi(t) = \Phi_1(\varphi(t)) \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow +\infty$), а також

$$\int_0^x \frac{dt}{\varphi(t)} = \frac{x}{\varphi(x)} + \int_0^{\varphi(x)} \frac{\Phi(u)}{u^2} du + O(1) =$$

$$= \frac{x}{\varphi(x)} + O\left(\frac{\Phi(\varphi(x))}{\varphi(x)}\right) = O\left(\frac{x}{\varphi(x)}\right) \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Тому, застосовуючи (8), отримуємо

$$\int_0^{\mu_\nu} |\alpha(t)| dt = o(\mu_\nu / \varphi(\mu_\nu)) \quad (\sigma \rightarrow +\infty), \quad \nu = \nu(\sigma - 0, F),$$

звідки, остаточно одержуємо

$$\ln \frac{b_\nu}{\alpha_\nu} \geq (1 + o(1)) \frac{\mu_\nu}{\varphi(\mu_\nu)} \rightarrow +\infty \quad (\sigma \rightarrow +\infty), \quad \nu = \nu(\sigma - 0, F),$$

тобто виконується (10), тому $\nu(x, f) \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -0$).

Нехай (s_j) – послідовність точок стрибка центрального індексу $\nu(s, f)$ занумерована так, що $\nu(s, f) = j$ для $s \in [s_j, s_{j+1})$ і, якщо $\nu(s_{j+1} - 0, f) = j$ і $\nu(s_{j+1}, f) = j + p$, то $s_{j+1} = s_{j+2} = \dots = s_{j+p} < s_{j+p+1}$. Зрозуміло, що $s_j \rightarrow -0$ ($j \rightarrow +\infty$).

Якщо $x \in [s_k + \tau_k, s_{k+1} + \tau_k) \stackrel{def}{=} E_k^* \subset (-\infty; 0)$, то $\nu(x - \tau_k, f) = k$ і за означенням $\mu(x - \tau_k, f)$ подібно як і у доведенні теореми 2 з [2] для всіх $n \geq 0$ одержуємо

$$\frac{b_n}{\alpha_n} e^{(x - \tau_k)\mu_n} \leq \mu(x - \tau_k, f).$$

Звідси при $n \neq k$

$$\frac{b_n}{b_k} e^{x(\mu_n - \mu_k)} \leq \frac{\alpha_n}{\alpha_k} e^{\tau_k(\lambda_n - \lambda_k)} = \exp\left\{-\int_{\mu_k}^{\mu_n} (\alpha(t) - \alpha(\mu_k)) dt\right\} < 1.$$

Підставляючи тут $x = -\frac{1}{\sigma}$, $\sigma > 0$, одержуємо

$$\frac{|a_n| e^{\sigma \lambda_n}}{|a_k| e^{\sigma \lambda_k}} = \left(\frac{b_n e^{x \mu_n}}{b_k e^{x \mu_k}}\right)^\sigma < 1 \quad (n \neq k), \quad (12)$$

тобто $\nu(\sigma, F) = k$ і $\mu(\sigma, F) = |a_k| e^{\sigma \lambda_k}$ при $\sigma \in [-(s_k + \tau_k)^{-1}, -(s_{k+1} + \tau_k)^{-1})$. Тому для всіх $\sigma > 0$ таких, що $x = -\sigma^{-1} \in \bigcup_{k \in J} E_k^*$, де $J \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$ – множина значень центрального індексу $\nu(x, f)$, і для всіх $n \geq 0$ з (12) одержуємо

$$\frac{|a_n| e^{\sigma \lambda_n}}{|a_k| e^{\sigma \lambda_k}} = \left(\frac{b_n e^{x \mu_n}}{b_k e^{x \mu_k}}\right)^\sigma \leq \exp\left\{-\sigma \int_{\mu_k}^{\mu_n} (\mu_n - t) \alpha'(t) dt\right\} \quad (13)$$

при $\sigma = -\frac{1}{x} > 0$. Звідси для всіх $\sigma \in \bigcup_{k \in J} \tilde{E}_k \stackrel{def}{=} \tilde{E}$, де $\tilde{E}_k \subset (0, +\infty)$ – образ множини E_k^* при відображенні $\sigma = -\frac{1}{x}$, одержуємо (6).

Оцінимо логарифмічну міру множини

$$E_2 = [-s_1^{-1}, +\infty) \setminus \tilde{E} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} [-(s_k + \tau_{k-1})^{-1}, -(s_k + \tau_k)^{-1}).$$

Зауважимо таке: оскільки $(\forall n)(\forall x): -\mu_n + x\lambda_n \leq \ln \mu(x, F)$, то при $\sigma = \varphi(\mu_n)$ отримаємо

$$\lambda_n \leq \frac{\mu_n + \Phi(\sigma)}{\sigma} = \frac{2\mu_n}{\varphi(\mu_n)}.$$

Звідси і з (11) виводимо

$$\sigma \leq \varphi_1(\lambda_{\nu(\sigma-0, F)}) \leq \varphi_1\left(\frac{2\mu_{\nu(\sigma-0, F)}}{\varphi(\mu_{\nu(\sigma-0, F)})}\right) \leq c\varphi(\mu_{\nu(\sigma-0, F)}), \quad (14)$$

останню нерівність виводимо за допомогою умови $\Phi_1 \in L_1$, тут $c < +\infty$. Справді, нехай $K \in (0, +\infty)$ таке, що

$$\int_{\sigma e^{-2K}}^{\sigma} \frac{\Phi_1(t)}{t} dt \leq \int_0^{\sigma} \frac{\Phi_1(t)}{t} dt \leq K\Phi_1(\sigma).$$

Тоді $2\Phi_1(\sigma e^{-2K}) \leq \Phi_1(\sigma)$. Звідси (14) одержуємо з $c = e^{2K}$.

Нехай тепер $k \in J$. Тоді

$$\nu(s_k + \tau_{k-1} - 0, f) = \nu\left(-(s_k + \tau_{k-1} - 0)^{-1}, F\right) \leq k - 1$$

і, отже, застосовуючи (14), одержуємо

$$|s_k + \tau_{k-1}|^{-1} = -(s_k + \tau_{k-1})^{-1} \leq c\varphi(\mu_{k-1}). \quad (15)$$

Звідси за означенням τ_k отримуємо

$$|s_k + \tau_{k-1}|^{-1}(|\tau_{k-1}| - |\tau_k|) \leq c \int_{\mu_{k-1}}^{\mu_k} c_1(t)v(4t)dt,$$

а також при $k \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \ln -meas(\tilde{E}_k) &= \ln -meas\left(\left(|s_k + \tau_{k-1}|^{-1}, |s_k + \tau_k|^{-1}\right)\right) = \\ &= \ln \left| \frac{s_k + \tau_{k-1}}{s_k + \tau_k} \right| \leq \frac{|\tau_{k-1}| - |\tau_k|}{|s_k + \tau_k|} \leq \frac{|\tau_{k-1}| - |\tau_k|}{|s_k + \tau_{k-1}| - (|\tau_{k-1}| - |\tau_k|)} \leq \\ &\leq c \int_{\mu_{k-1}}^{\mu_k} c_1(t)v(4t)dt \left(1 - c \int_{\mu_{k-1}}^{\mu_k} c_1(t)v(4t)dt\right)^{-1} \leq 2c \int_{\mu_{k-1}}^{\mu_k} c_1(t)v(4t)dt, \end{aligned}$$

де стала $c > 0$ визначена вище. Якщо ж тепер $j \notin J$ і $k, p \in J$ такі, що $p < j < k$, $s_p < s_{p+1} = s_j = s_k < s_{k+1}$, то

$$\bigcup_{j=p+1}^k \tilde{E}_k = \bigcup_{j=p+1}^k [|s_j + \tau_{j-1}|^{-1}; |s_j + \tau_j|^{-1}] = [|s_{p+1} + \tau_p|^{-1}, |s_k + \tau_k|^{-1})$$

і, отже,

$$\ln -meas\left(\bigcup_{j=p+1}^k \tilde{E}_k\right) \leq \ln \frac{|s_{p+1} + \tau_p|}{|s_{p+1} + \tau_k|} \leq \frac{|\tau_p| - |\tau_k|}{|s_{p+1} + \tau_p| - (|\tau_p| - |\tau_k|)}.$$

Застосовуючи (15), при $p \rightarrow +\infty$ маємо

$$\ln -meas\left(\bigcup_{j=p+1}^k \tilde{E}_k\right) \leq 2c \int_{\mu_p}^{\mu_k} c_1(u)v(4u)du.$$

Остаточно

$$\ln -meas(E_2) = \ln -meas\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} \tilde{E}_j\right) \leq 2c \int_0^{\infty} c_1(u)v(4u)du < +\infty.$$

Теорему 1 доведено. $\square$

Доведемо тепер теорему про співвідношення типу Бореля для цілих рядів Діріхле з класу S .

Додатну послідовність (x_n) назовемо *майже монотонно спадною*, якщо знайдеться стала $\delta > 0$ така, що $x_m \leq \delta x_n$ для всіх $n \geq n_1$ і $m \geq n + 1$.

Теорема 2. *Нехай $F \in S^\Delta$, $\Delta \leq +\infty$, $\mu_n \stackrel{def}{=} -\ln|a_n|$. Якщо $\Phi_1 \in L_1$, послідовність $(\ln n/\mu_n)$ майже монотонно спадна і виконується умова (3), то співвідношення (2) виконується при $\sigma \rightarrow +\infty$ зовні деякої множини скінченної логарифмічної міри.*

Доведення. У [9, Зауваження 1] знаходимо таке твердження: якщо $F \in S^\Delta$, $\Delta < +\infty$, то

$$\ln \mu(x, F) = (1 + o(1)) \ln F(x) = (1 + o(1))\beta x \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Тому надалі вважатимемо, що $\beta = +\infty$.

З умови (3), як і під час доведення теореми з [1], одержуємо, що

$$\int_{\mu_1}^{+\infty} \frac{\ln n_1(t)}{t^2} dt < +\infty, \quad n_1(t) = \sum_{\mu_n \leq t} 1.$$

Тому теорему 1 можна застосувати з функціями $v(t) = 16t^{-2} \ln n_1(t)$, $c_1(t) = c(4t)$. Приймаючи в (6) $n = 0$ для всіх $\sigma > 0$ зовні множини скінченної логарифмічної міри, отримаємо

$$\ln \mu(\sigma, F) \geq \sigma \int_0^{\mu_\nu} \frac{1}{\varphi(t)} \frac{c(4t) \ln n_1(4t)}{t} dt \geq \frac{\sigma}{\varphi(\mu_\nu)} c\left(\frac{\mu_\nu}{2}\right) \ln n_1(2\mu_\nu) \ln 2, \quad (16)$$

де $\varphi(t)$ – функція обернена до функції $\Phi(\sigma) = \ln \mu(\sigma, F)$. Зауважимо тепер, що з того, що послідовність $(\ln n/\mu_n)$ майже монотонно спадна випливає, що

$$\frac{\ln n_1(\tau)}{\tau} \leq 2\delta \cdot \frac{\ln n_1(t)}{t}$$

для всіх $t \geq t_0$ і $\tau \geq t$. Тому з нерівності (6) для всіх $\sigma > 0$ зовні множини скінченної логарифмічної міри одержуємо

$$\begin{aligned} \sum_{\mu_n > 2\mu_\nu} \frac{|a_n|e^{\sigma\lambda_n}}{\mu(\sigma, F)} &\leq \sum_{\mu_n > 2\mu_\nu} \exp\left\{-\sigma \int_{\mu_\nu}^{\mu_n} \frac{c(4t)}{\varphi(t)} \frac{\mu_n - t}{t^2} \ln n_1(4t) dt\right\} \leq \\ &\leq \sum_{\mu_n > 2\mu_\nu} \exp\left\{-c^*(4\mu_\nu) \frac{\mu_\nu \sigma}{\varphi(\mu_\nu)} \frac{\ln n_1(4\mu_n)}{\mu_n} \int_{\mu_\nu}^{\mu_n} \frac{\mu_n - t}{t^2} dt\right\}, \quad \nu = \nu(\sigma, F), \end{aligned}$$

де $c^*(4\mu_\nu) \stackrel{\text{def}}{=} 2\delta c(4\mu_\nu)$, у цьому разі ми також скористалися монотонністю $t/\varphi(t) \uparrow$. Якщо згадати, що $\max \left\{ \frac{\ln x}{x} : x > 0 \right\} = \frac{1}{e}$, то при $\sigma \rightarrow +\infty$ зовні множини скінченної логарифмічної міри одержимо

$$\sum_{\mu_n > 2\mu_\nu} \frac{|a_n| e^{\sigma \lambda_n}}{\mu(\sigma, F)} \leq \sum_{\mu_n > 2\mu_\nu} \exp \left\{ \frac{-\sigma c^*(\mu_\nu)}{\varphi(\mu_\nu)} \left(1 - \frac{1}{e} \right) \ln n_1(4\mu_n) \right\}, \quad (17)$$

де $\nu = \nu(\sigma, F)$ – центральний індекс. Зауважимо тепер, що для всіх досить великих σ з нерівності $0 \leq \ln \mu(\sigma, F) = -\mu_\nu + \sigma \lambda_\nu$ одержуємо $\sigma \geq \frac{\mu_\nu}{\lambda_\nu}$, а за означенням максимального члена для всіх n при $\sigma = \varphi(\mu_n)$

$$\lambda_n \leq \frac{\ln \mu(\sigma, F) + \mu_n}{\sigma} = \frac{\Phi(\sigma) + \mu_n}{\sigma} = \frac{2\mu_n}{\varphi(\mu_n)},$$

тому $\sigma \geq \frac{1}{2}\varphi(\mu_\nu)$ і, отже, з (16) і (17) при $\sigma \rightarrow +\infty$ зовні множини скінченної логарифмічної міри одержуємо

$$\ln \mu(\sigma, F) \geq \frac{\ln 2}{2} c(2\mu_\nu) \ln n_1(2\mu_\nu),$$

$$\sum_{\mu_n > 2\mu_\nu} \frac{|a_n| e^{\sigma \lambda_n}}{\mu(\sigma, F)} \leq \sum_{\mu_n > 2\mu_\nu} \exp \left\{ -\frac{c^*(\mu_\nu)}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right) \ln n_1(4\mu_n) \right\} = o(1), \quad \nu = \nu(\sigma, F).$$

Звідси при $\sigma \rightarrow +\infty$ ($\sigma \notin E$ – скінченної логарифмічної міри)

$$0 \leq \ln M(\sigma, F) - \ln \mu(\sigma, F) \leq \ln(n_1(2\mu_\nu) + o(1)) \leq \ln(n_1(2\mu_\nu) + o(1)) \leq o(\ln \mu(\sigma, F)).$$

Теорему 2 доведено. $\square$

Доведемо непокращуваність (необхідність) умови (3). Правильна така теорема.

Теорема 3. Для кожної послідовності (a_n) такої, що $0 < |a_n| \downarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$),

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{\ln \frac{1}{|a_n|}} = \theta < 1,$$

і умова (3) не виконується, існує функція $F \in S^{+\infty}$, для якої

$$\frac{\ln M(\sigma, F)}{\ln \mu(\sigma, F)} \rightarrow +\infty \quad (\sigma \rightarrow +\infty). \quad (18)$$

Доведення. Не зменшуючи загальності, вважаємо, що (a_n) – послідовність додатних чисел, $a_1 = \frac{1}{e}$, $a_0 = 1$. Оскільки ряд (3) розбіжний, то розбіжний також ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{c_s}{\mu_s}, \quad c_s = \ln(s+1) - \ln s, \quad \mu_s = -\ln a_s.$$

Визначимо тепер послідовність

$$\varkappa_j = \sum_{s=1}^{j-1} \frac{c_s}{\mu_s} + 1, \quad \varkappa_1 = 1$$

та з її допомогою послідовність показників

$$\lambda_n = \lambda_1 + \sum_{s=1}^n \frac{1}{\varkappa_s} (\mu_s - \mu_{s-1}), \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_0 = 0.$$

Зауважимо, що при такому означенні $\lambda_{n+1} > \lambda_n$ ($n \geq 0$) та

$$\varkappa_n = \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} (\ln a_{n-1} - \ln a_n).$$

Оскільки $\lambda_n = o(\mu_n)$ ($n \rightarrow +\infty$), то $\ln(a_n e^{\sigma \lambda_n}) = -(1 + o(1))\mu_n$ ($n \rightarrow +\infty$) при фіксованому σ . Звідси, завдяки умові $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\mu_n} \ln n = \theta < 1$, одержуємо $F \in S^{+\infty}$.
Для всіх $\sigma \in [\varkappa_n, \varkappa_{n+1}]$

$$\begin{aligned} \ln \mu(\sigma, F) &\leq -\mu_n + \varkappa_{n+1} \lambda_n = \\ &= -\sum_{s=1}^n \varkappa_s (\lambda_s - \lambda_{s-1}) + \lambda_n \varkappa_{n+1} = \sum_{s=1}^n (\varkappa_{n+1} - \varkappa_s) (\lambda_s - \lambda_{s-1}) = \\ &= \sum_{s=1}^n (\lambda_s - \lambda_{s-1}) \sum_{j=s}^n (\varkappa_{j+1} - \varkappa_j) = \sum_{j=1}^n (\varkappa_{j+1} - \varkappa_j) \sum_{s=1}^j (\lambda_s - \lambda_{s-1}) = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{c_j}{\mu_j} \sum_{s=1}^j \frac{\mu_s - \mu_{s-1}}{\varkappa_s} = o\left(\sum_{j=1}^n c_j\right) = o(\ln n) \quad (n \rightarrow +\infty). \end{aligned} \quad (19)$$

Зауважимо тепер, що для $1 \leq m \leq n$, $\sigma \in [\varkappa_n, \varkappa_{n+1}]$

$$\ln(a_m e^{\sigma \lambda_m}) \geq x \left(-\frac{\mu_m}{\varkappa_n} + \lambda_m \right) = x \sum_{s=1}^m (\mu_s - \mu_{s-1}) \left(\frac{1}{\varkappa_s} - \frac{1}{\varkappa_n} \right) + \lambda_1 x \geq 0.$$

Звідси і з (19) випливає

$$\frac{\ln M(\sigma, F)}{\ln \mu(\sigma, F)} \geq \frac{\ln \left(\sum_{m=1}^n a_m e^{\sigma \lambda_m} \right)}{\ln \mu(\sigma, F)} \geq \frac{\ln n}{\ln \mu(\sigma, F)} \rightarrow +\infty \quad (\sigma \rightarrow +\infty).$$

Теорему 3 доведено. $\square$

Наслідок. Існує послідовність (a_n) така, що умова (3) з $\mu_n = -\ln |a_n|$ не виконується, для якої існує функція $F \in S^{+\infty}$ така, що $\Phi_1 \in L_1$ (тут $\Phi_1(\sigma) = \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{\sigma}$) і виконується співвідношення (18).

Доведення. Якщо вибрати $\mu_n = 2 \ln(n+1)$, то умови, а отже, і твердження теореми 3 виконуються. Нескладно перевірити, що

$$\varkappa_{n+1} \sim \frac{\beta}{2} \ln \ln n \quad (n \rightarrow +\infty) \text{ і } \lambda_n \sim \frac{4}{\beta} \frac{\ln n}{\ln \ln n} \quad (n \rightarrow +\infty)$$

за вибору послідовностей (λ_n) і $(\varkappa_{n+1})$, як і у доведенні теореми 3. Тому для досить великих n , $\varkappa_{n+1} < \frac{2\mu_n}{\lambda_n}$. З іншого боку, якщо $\varkappa_{n+1} < \frac{2\mu_n}{\lambda_n}$ ($n \geq n_0$), то $t^{-2} \ln \mu(t, F)$ не спадає для досить великих t , тому $\int_0^\sigma t^{-2} \ln \mu(t, F) dt = O\left(\frac{1}{\sigma} \ln \mu(\sigma, F)\right)$ ($\sigma \rightarrow +\infty$), тобто $\Phi_1 \in L_1$. $\square$

Зауваження 1. Наскільки істотною у теоремах 1 і 2 є умова $\Phi_1 \in L_1$ авторам невідомо.

Зауваження 2. Умова теореми 2, що послідовність $(\ln n / \mu_n)$ майже монотонно спадає, правдоподібно, є зайвою, позаяк вона виглядає технічною. Подібна умова виникала, наприклад, в [10], [11], [12]. У деяких із розглянутих там випадків її пізніше було знято (див., наприклад, [13]).

1. *Скасків О.Б.* О поведении максимального члена ряда Дирихле, задающего целую функцию / *Скасків О.Б.* // Матем. заметки. – 1985. – Т. 37, №1. – С. 41-47.
2. *Скасків О.Б.* О теореме типа Бореля для ряда Дирихле, имеющего нулевую абсциссу абсолютной сходимости / *Скасків О.Б.* // Укр. мат. журн. – 1989. – Т. 41, №11. – С. 1532-1541.
3. *Скасків О.Б.* О росте в полуполосах аналитических функций, представленных рядами Дирихле / *Скасків О.Б.* // Укр. мат. журн. – 1993. – Т. 45, №5. – С. 681-694.
4. *Шеремета М.Н.* Об одном свойстве целых рядов Дирихле с убывающими коэффициентами / *Шеремета М.Н.* // Укр. мат. журн. – 1993. – Т. 45, №6. – С. 843-853.
5. *Скасків О.Б.* О минимуме модуля суммы ряда Дирихле с ограниченной последовательностью показателей / *Скасків О.Б.* // Матем. заметки. – 1994. – Т. 56, №5. – С. 117-128.
6. *Скасків О.Б.* Про еквівалентність суми і максимального члена цілого ряду Діріхле / *Скасків О.Б., Стасюк Я.З.* // Мат. студії. – 2009. – Т. 31, №1. – С. 37-46.
7. *Скасків О.Б.* Про еквівалентність суми і максимального члена абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле / *Скасків О.Б., Стасюк Я.З.* // Карпатські математичні публікації. – 2009. – Т. 1, №1. – С.100-106.
8. *Сало Т.* Про максимум модуля і максимальний член абсолютно збіжних рядів Діріхле / *Сало Т., Скасків О.* // Матем. Вісник НТШ. – 2007. – Т. 3. – С. 764-774.
9. *Долинюк М.* Про правильне зростання суперпозиції ряду Діріхле і зростаючої функції / *Долинюк М.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2009. – Вип. 70. – С. 45-51.
10. *Скасків О.Б.* Некоторые теоремы типа Бореля для целых рядов Дирихле / *Скасків О.Б., Херате С.* – Львов: Деп. в УкрНИИНТИ, 1991.
11. *Скасків О.Б.* О центральном показателе целого ряда Дирихле / *Скасків О.Б., Херате С.* – Львов: Деп. в УкрНИИНТИ, 1992.
12. *Скасків О.Б.* Про центральний показник абсолютно збіжних рядів Діріхле / *Скасків О.Б.* // Доп. НАН України. – 2000. – №10. – С. 27-30.
13. *Скасків О.Б.* Асимптотичні оцінки інтегралів типу Лапласа / *Скасків О.Б., Тракало О.М.* // Мат. студії. – 2002. – Т. 18, №2. – С. 125-146.

ON THE BOREL TYPE THEOREM FOR ENTIRE DIRICHLET SERIES WITH NONMONOTONOUS EXPONENTS

Ihor OVCHAR¹, Oleh SKASKIV²

¹*Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas,
76000 Ivano-Frankivsk, Karpatska str., 15*

²*Ivan Franko National University of L'viv,
79000 L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: matstud@franko.lviv.ua*

For an entire Dirichlet series $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, where sequence of the exponents such that $\{\lambda_n : n \geq 0\} \subset \mathbb{R}_+$, conditions for $\ln M(x, F) \sim \ln \mu(x, F)$

as $x \rightarrow +\infty$ ($x \notin E$, $\int_E d \ln x < +\infty$), where $M(x, F) = \sup\{|F(x + iy)| : y \in \mathbb{R}\}$, $\mu(x, F) = \max\{|a_n|e^{x\lambda_n} : n \geq 0\}$ ($x \in \mathbb{R}$) are establish.

Key words: Dirichlet series, maximal term, logarithmic measure, Borel condition.

О ТЕОРЕМЕ ТИПА БОРЕЛЯ ДЛЯ ЦЕЛЫХ РЯДОВ ДИРИХЛЕ С НЕМОНОТОННЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

Ігорь ОВЧАР¹, Олег СКАСКИВ²

¹ *Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газа,
76000 Івано-Франківськ, ул. Карпатська, 15*

² *Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000 Львів, ул. Университетская, 1
e-mail: matstud@franko.lviv.ua*

Для целого ряда Дирихле $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, где последовательность показателей такая, что $\{\lambda_n : n \geq 0\} \subset \mathbb{R}_+$, получены условия при выполнении которых $\ln M(x, F) \sim \ln \mu(x, F)$ при $x \rightarrow +\infty$ ($x \notin E$, $\int_E d \ln x < +\infty$), где $M(x, F) = \sup\{|F(x + iy)| : y \in \mathbb{R}\}$, $\mu(x, F) = \max\{|a_n|e^{x\lambda_n} : n \geq 0\}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Ключевые слова: ряды Дирихле, максимальный член, логарифмическая мера, соотношение Бореля.

Стаття надійшла до редколегії 09.11.2010

Прийнята до друку 22.12.2010

УДК 519.2:519.7

ОБРИВНІ КЕРОВАНІ МАРКОВСЬКІ ПРОЦЕСИ НА СКІНЧЕННОМУ ІНТЕРВАЛІ ЧАСУ ДЛЯ СКІНЧЕННИХ МОДЕЛЕЙ

Нестор ПАРОЛЯ, Ярослав ЄЛЕЙКО

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000 Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: mstat@franko.lviv.ua*

Розглянуто обривні керовані марковські процеси для скінченних моделей на скінченному інтервалі часу. Доведено існування рівномірно оптимальної стратегії. Показано правильність фундаментального рівняння. Зведено задачу оптимального керування до аналогічної задачі для похідної моделі. Виведено рівняння оптимальності та метод побудови простих рівномірно оптимальних стратегій. Показано правильність марковської властивості. Розглянуто принципи динамічного програмування.

Ключові слова: керований марковський процес, оптимальна стратегія, оптимальне керування, фундаментальне рівняння.

1. Вступ. Керовані марковські процеси виникають у найрізноманітніших сферах економіки, зокрема для економічного планування роботи окремого підприємства, галузі або всього народного господарства. На початку кожного періоду, враховуючи досягнуте, можна побудувати план на наступний період. Розвиток системи можна описати математично керованим детермінованим процесом, якщо вважати, що стан системи в кінці кожного періоду однозначно визначається станом на початку періоду і планом на цей період. Проте не можна нехтувати впливом таких чинників: метеорологічні умови, демографічні зсуви, коливання попиту, недосконалість координації складних виробничих процесів, наукові відкриття, винаходи тощо. Ці чинники краще враховують стохастичні моделі, в яких, знаючи стан на початку періоду і план, можна обчислити лише розподіл ймовірності для стану в кінці періоду. Якщо ж не враховувати стан системи в минулих періодах, то ми переходимо до керованого марковського процесу (“майбутнє залежить від теперішнього і не залежить від минулого”).

Процеси такого типу детально описано в [1]: було введено означення керованого марковського процесу, поняття “марковської моделі” Z^μ , стратегії π , оцінки стратегії $\omega(\pi)$, ν -оцінки процесу Z^μ , доведено існування рівномірно оптимальної стратегії, виведено фундаментальне рівняння, рівняння оптимальності та схему знаходження простих оптимальних стратегій, доведено “марковську властивість” та показано принцип динамічного програмування.

У згаданій моделі не враховано фактор ризику, а саме ймовірність того, що підприємство може зазнати краху, збанкрутувати в певний момент часу. Іншими словами, ми приходимо до поняття обривного керованого марковського процесу, де в кожний момент часу, крім початкового, звісно, процес може обірватися з певною ненульовою ймовірністю.

Принцип обривних марковських моделей ще більше наближає стохастичну модель до реальності, яка неможлива без ризику.

2. Означення обривного керованого марковського процесу. Нехай $X_t(t = m, \dots, n)$ та $A_t(t = m + 1, \dots, n)$ довільні скінченні множини. $\forall a \in A_t$ ставиться у відповідність розподіл ймовірностей $p(\cdot|a)$ на X_t .

Означення 1. Функцію p , що визначає закон переходу з A_t в X_t , називатимемо *перехідною функцією*.

Означення 2. Точка $x^* = x_m \in X_t$ називається *точкою обриву*, а $p(x^*|a)$ – *ймовірністю обриву*, якщо $\mathbb{P}(x_{t+1} = x^*|a_t = a) = \mathbb{P}(x_{t+1} = x_m|a_t = a) \equiv p(x^*|a)$, $x_m \in X_m$.

Зауваження 1. Іншими словами, потрапивши в точку обриву, система переходить в початковий стан (процес обривається).

З означення обривної точки випливає

$$\forall a \in A_t \quad \exists x^* \in X_t : \quad p(x^*|a) = 1 - \sum_{x \in X_t \setminus x^*} p(x|a) > 0.$$

Означення 3 (Обривного керованого марковського процесу [2]). *Обривним керованим марковським процесом на інтервалі часу $[m, n]$ називається випадковий процес, який задається такими об’єктами.*

1. Множини $X_m, \dots, X_n$ (простори станів).
2. Множини $A_{m+1}, \dots, A_n$ (простори керувань).
3. Відображення проектування $j : A \rightarrow X$, де $A = \bigcup_{t=m+1}^n A_t$, $X = \bigcup_{t=m}^n X_t$:
 $j(A_t) = X_{t-1} \setminus \{x^*\}$, $x^* \in X_{t-1}$, $(t = m + 2, \dots, n)$ і $j(A_{m+1}) = X_m$.
4. Розподіл ймовірностей $p(\cdot|a)$ на X_t з обривними точками

$$\mathbb{P}(x_{t+1} = x^*|a_t = a) = \mathbb{P}(x_{t+1} = x_m|a_t = a) \equiv p(x^*|a) > 0.$$

5. Функція q , задана на A (функція винагороди).
6. Функція r , задана на множині X_n (фінальна плата).
7. Функція c (від англ. “crash” – крах, розорення), задана в обривних точках станів $c(x^*) = - \sum_{i=m+1}^t \max_{a_i \in A_i} q(a_i)$, $x^* \in X_t$, $t = m + 1, \dots, n$ (функція краху, задана

так, гарантує повне банкрутство – повну втрату накопиченого капіталу або й більше).

8. Початковий розподіл μ на X_m .

Процес, що задовольняє (1-8), називатимемо ([3]) **обривним марковським процесом (моделлю)** і позначатимемо Z_μ^* . Якщо початковий розподіл μ зосереджений в точці x , то будемо писати Z_x^* .

Наша мета – знайти спосіб керування, за якого максимізується математичне сподівання оцінки шляху l

$$I(l, x^*) = \sum_{t=m+1}^n [q(a_t) + c(x_t^*)] + r(x_n), \quad (1)$$

де $x^* = (x_{m+1}^*, \dots, x_n^*)$ – вектор точок обриву; $l = x_m a_{m+1}, \dots, a_n x_n$ – шлях.

Під способом керування будемо розуміти певну *стратегію*.

3. Стратегії.

Означення 4. Селектор багатозначного відображення $A(x) : X \setminus X_n \rightarrow A$ $\varphi(x) : A(x) \rightarrow A$ називається **простою стратегією**, якщо $\varphi(x_{t-1}) = a_t$, для довільного x_t – необривних точок станів з ймовірнісними розподілами $p(\cdot|a_t)$ ($m < t \leq n$) та x_m з початковим розподілом μ .

Зауваження 2. $\varphi(x)$ не визначена в обривних точках. Крім того, користуючись простою стратегією $\varphi(x)$ ми одержуємо шлях $l = x_m a_{m+1}, \dots, a_n x_n$.

Означення 5. Відображення $\pi : H \rightarrow \pi(\cdot|h \in H)$, де $\pi(\cdot|h \in H)$ – розподіл ймовірностей на $A(x_{t-1})$ і H – множина історій ($h \in H$ тоді і тільки тоді, коли $h = x_m a_{m+1}, \dots, a_{t-1} x_{t-1}$), називається **обривною стратегією**.

Зауваження 3. $x_{t-1} \neq x^*$.

Означення 6. Обривна стратегія $\pi(\cdot|h)$ називається **марковською**, якщо $\pi(\cdot|h) = \pi(\cdot|x_{t-1})$.

Позначимо L – множину всіх шляхів l .

Означення 7. Якщо задані перехідна функція $p(\cdot|a)$ і стратегії $\pi(\cdot|h)$, то кожному початковому розподілу μ відповідає розподіл ймовірностей P^* у просторі L , який набуває такого вигляду:

$$\begin{aligned} P^*(l, x^*) &= P^*(x_m a_{m+1}, \dots, a_n x_n, x_{m+1}^*, \dots, x_n^*) = \\ &= \mu(x_m) \pi(a_{m+1}|x_m) p(x_{m+1}|a_{m+1}) p(x_{m+1}^*|a_{m+1}) \dots \pi(a_n|x_{n-1}) p(x_n|a_n) p(x_n^*|a_n). \end{aligned} \quad (2)$$

Зауваження 4. Після того, як ми означили міру P^* , шлях l можна вважати випадковим процесом. Крім того, якщо стратегія π – марковська, то цей процес є марковським.

Для будь-якої функції $\xi = \xi(l)$ з простору L математичне сподівання ξ виглядатиме так:

$$E^*(\xi) = \sum_{l \in L} \xi(l) P^*(l, x^*). \quad (3)$$

Прикладом такої функції є оцінка (1) шляху l . Її математичне сподівання ми позначимо через ω

$$\omega = E^* I(l, x^*) = E^* \left[\sum_{t=m+1}^n [q(a_t) + c(x_t^*)] + r(x_n) \right]. \quad (4)$$

Означення 8 (Оцінки стратегії). Величину ω з (4) для обривного керованого процесу Z_μ^* , яка є функцією від π ($\omega = \omega(\pi)$), називатимемо **оцінкою стратегії** π .

Мета досліджень – максимізація функції $\omega(\pi)$.

Означення 9 (Оцінки обривного процесу). $\nu \equiv \sup_{\pi} \omega(\pi)$ називається **оцінкою обривного процесу** Z_μ^* або **оцінкою початкового розподілу** μ .

Зауваження 5. $\nu(x^*) = c(x^*)$.

Означення 10 (Оптимальної стратегії). Обривна стратегія π називається **оптимальною**, якщо $\omega(\pi) = \nu$.

Означення 11 (Рівномірно оптимальна стратегія). Обривна стратегія π називається **рівномірно оптимальною** або **оптимальною для процесу** Z^* , якщо π – оптимальна для Z_μ^* для кожного μ – початкового розподілу.

Твердження 1 (Про змішування стратегій). Нехай $\{\pi_k\}$ – скінченний або зліченний набір обривних стратегій і γ_k – невід’ємні числа, сума яких дорівнює 1. Якщо для будь-якого початкового розподілу μ ми будемо використовувати обривну стратегію π_k з ймовірністю γ_k , то одержимо в просторі шляхів L розподіл ймовірностей P^* , який набуває вигляду

$$P^* = \sum_k \gamma_k P_k^*, \quad (5)$$

де розподіл P_k^* відповідає обривній стратегії π_k .

Тоді існує деяка обривна стратегія π , якій відповідає розподіл ймовірностей P^* з (5).

Доведення. Приймемо

$$\pi(a_{t+1} | x_m a_{m+1} \dots x_t) = \begin{cases} \frac{\sum_k \gamma_k \pi_k(a_{m+1} | x_m) \dots \pi_k(a_t | h_{t-1}) \pi_k(a_{t+1} | h_t)}{\sum_k \gamma_k \pi_k(a_{m+1} | x_m) \dots \pi_k(a_t | h_{t-1})}, & \text{якщо знаменник не нуль,} \\ \pi_1(a_{t+1} | h_t), & \text{в іншому випадку;} \end{cases} \quad (6)$$

тут $m \leq t < n$, $h_t = x_m a_{m+1} \dots x_t$ – довільна історія, a_{t+1} – довільне керування з A_t ; при $t = m$ вважається, що знаменник дорівнює 1.

Вигляд $\pi(a_{t+1} | x_m a_{m+1} \dots x_t)$ впливає з (5) та такого співвідношення:

$$\pi(a_{t+1} | x_m a_{m+1} \dots x_t) = \frac{P^*(x_m a_{m+1} \dots a_t x_{t+1})}{P^*(x_m a_{m+1} \dots a_t x_t)}.$$

З того, що $\pi_k(\cdot|x_m a_{m+1} \dots x_t)$ – розподіл ймовірностей, сконцентрований на $A(x_t)$, та умови $\sum_k \gamma_k = 1, \gamma_k \geq 0$, випливає, що $\pi(\cdot|x_m a_{m+1} \dots x_t)$ – теж розподіл ймовірностей, сконцентрований на $A(x_t)$. А отже, $\pi(\cdot|x_m a_{m+1} \dots x_t)$, зображена формулою (6), – стратегія.

Тепер з формули (6) $\forall l = x_m a_{m+1} \dots x_n$ одержимо

$$\begin{aligned} & \pi(a_{m+1}|x_m)\pi(a_{m+2}|x_m a_{m+1} x_{m+1}) \cdot \dots \cdot \pi(a_n|x_m a_{m+1} \dots x_{n-1}) = \\ & = \sum_k \gamma_k \pi_k(a_{m+1}|x_m)\pi_k(a_{m+2}|x_m a_{m+1} x_{m+1}) \cdot \dots \cdot \pi_k(a_n|x_m a_{m+1} \dots x_{n-1}). \end{aligned}$$

Домножуємо праву та ліву частину рівності на

$$\mu(x_m)p(x_{m+1}|a_{m+1})p^*(x_{m+1}^*|a_{m+1}) \cdot \dots \cdot p(x_n|a_n)p^*(x_n^*|a_n)$$

і враховуючи формулу (2), отримуємо, що обривній стратегії π відповідає міра $\sum_k \gamma_k P_k^* = P^*$ $\square$

Зауваження 6. Отже, при довільному змішуванні стратегій (виборі стратегій випадково з довільним розподілом ймовірностей) ми не розширимо свої можливості, а отримаємо ще деяку стратегію, яка є комбінацією даних.

4. Існування рівномірно оптимальної стратегії. Поєднання стратегій.

Обривна стратегія π описується скінченним набором невід’ємних чисел $\pi(a|h)$. Набори, які задають стратегію, утворюють замкнуту обмежену множину Π в скінченновимірному просторі. А отже, Π – компакт. Функція $\omega(\pi)$ неперервна, бо виражається через $\pi(a|h)$ за допомогою операцій множення та додавання. За теоремою Вейерштрасса, неперервна функція на Π досягає свого максимуму. Та обривна стратегія, за якої досягається максимум, є оптимальною для процесу Z^* . З іншого боку, при кожному $x \in X_m$ існує обривна стратегія π_x , оптимальна для процесу Z_x^* .

За набором обривних стратегій π_x ми хочемо побудувати одну обривну стратегію π , оптимальну для процесу Z^* .

Природно користуватися постійно стратегією π_x , якщо шлях починається в точці x . Формально

$$\bar{\pi}(\cdot|h) = \pi_{x(h)}(\cdot|h), \quad (7)$$

де $x(h)$ – початковий стан історії h . Звісно, що формула (7) визначає деяку стратегію $\bar{\pi}$, яка буде оптимальною, тобто $\omega(x, \bar{\pi}) = \omega(x, \pi_x) = \nu(x), \forall x \in X_m$.

Твердження 2 (Про існування рівномірно оптимальної обривної стратегії). *Будь-яка обривна стратегія $\bar{\pi}$, задана формулою (7), для якої*

$$\omega(x, \bar{\pi}) = \nu(x), (x \in X_m)$$

є рівномірно оптимальною, тобто для кожного μ : $\sup_{\pi} \omega(\mu, \pi) = \omega(\mu, \bar{\pi})$.

Доведення. З формул (2)-(4) випливає, що для кожного π

$$\omega(\mu, \pi) = \sum_{l \in L} I(l, x^*) P^*(l, x^*) = \sum_{X_m} \mu(x) \omega(x, \pi). \quad (8)$$

Зокрема, $\omega(\mu, \bar{\pi}) = \sum_{X_m} \mu(x) \omega(x, \bar{\pi})$. Але $\omega(x, \pi) \leq \omega(x, \bar{\pi})$ для всіх $x \in X_m$, а отже, $\omega(\mu, \pi) \leq \omega(\mu, \bar{\pi})$. $\square$

Наслідок 1. Для рівномірно оптимальної обривної стратегії $\bar{\pi}$ і довільного початкового розподілу μ

$$\nu(\mu) = \mu\nu. \quad (9)$$

Доведення. Випливає з рівності

$$\nu(\mu) = \omega(\mu, \bar{\pi}) = \sum_{X_m} \mu(x) \omega(x, \bar{\pi}) = \sum_{X_m} \mu(x) \nu(x) = \mu\nu.$$

$\square$

Зауваження 7. Формули (8) та (9) допомагають звести вивчення процесів Z_μ^* при довільному μ до вивчення процесів Z_x^* , $\forall x \in X_m$.

Стратегія π , побудована за набором π_x ($x \in X_m$), має таку властивість (*):

Для будь-якого початкового стану $x \in X_m$ розподіли ймовірностей у просторі шляхів L , які відповідають за формулою (2) стратегіям π та π_x , ідентичні.

Означення 12. Якщо виконується властивість (*), то стратегія $\bar{\pi}$ називається **поєднанням стратегій π_x** .

5. Похідна модель. Фундаментальне рівняння. Процес керування – це низка послідовних кроків. Перший крок полягає у виборі розподілу ймовірностей на A_{m+1} (що залежить від початкового стану). Якщо вибір зроблений, то кожному початковому розподілу μ на X_m відповідає розподіл ймовірностей $\dot{\mu}$ на X_{m+1} . Тепер розглядаємо $\dot{\mu}$ як початковий розподіл в момент часу $t + 1$.

Розбиваємо нашу задачу максимізації на дві.

1. За будь-якого початкового розподілу на X_{m+1} вибрати оптимальну поведінку в подальші моменти часу.

2. Вибрати перший крок так, щоб була максимальна сума винагороди за цей крок і максимальна величина оцінки оптимальної поведінки в подальші моменти при початковому розподілі $\dot{\mu}$.

Означення 13 (Похідної моделі). *Обривна модель, яка утворена з моделі Z^* виокресленням X_m та A_{m+1} , називається похідною моделлю і позначається $\dot{Z}^*$.*

Твердження 3 (Фундаментальне рівняння).

$$\omega(x, \pi) = \sum_{A(x)} \pi(a|x) \left(q(a) + \dot{\omega}(p_a, \pi_a) \right), \quad (10)$$

де $p_a = p(\cdot|a)$, $\pi_a(\cdot|\dot{h}) = \pi(\cdot|y a \dot{h})$, $a \in A_{m+1}$, $y = j(a)$, $\dot{h}$ – історія в моделі $\dot{Z}^*$.

Рівняння (10) називається **фундаментальним** і виражає оцінку ω довільної стратегії π в моделі Z^* через оцінку $\dot{\omega}$ деяких стратегій в моделі $\dot{Z}^*$

Доведення. Згідно з формулою (8) отримуємо

$$\dot{\omega}(p_a, \pi_a) = \sum_{X_{m+1}} p(y|a) \dot{\omega}(y, \pi_a). \quad (11)$$

Розглянемо простори шляхів L та $\dot{L}$ в моделях Z^* та $\dot{Z}^*$. Нехай P^* – розподіл ймовірностей в L , який відповідає початковому стану x та стратегії π , P_a^* – розподіл ймовірностей в $\dot{L}$, який відповідає початковому розподілу p_a та стратегії π_a .

Згідно з формулою (1) та (2) $\forall \dot{l} \in \dot{L}$ одержуємо

$$I(xa\dot{l}, x^*) = q(a) + I(\dot{l}, x_{-1}^*) \quad (12)$$

$$P^*(xa\dot{l}, x^*) = \pi(a|x)P_a^*(\dot{l}, x_{-1}^*) \quad (13)$$

$$a \in A(x), \quad x_{-1}^* = (x_{m+2}^*, \dots, x_n^*), \quad (x_{m+1}^*, x_{-1}^*) = x^*.$$

На підставі (3) і (4) отримуємо

$$\omega(x, \pi) = \sum_L P^*(l, x^*) I(l, x^*), \quad (14)$$

$$\dot{\omega}(p_a, \pi_a) = \sum_{\dot{L}} P_a^*(\dot{l}, x_{-1}^*) I(\dot{l}, x_{-1}^*). \quad (15)$$

Міра $P^*(l, x^*)$ не дорівнює нулю тільки для шляхів, які починаються з точки x , тобто для шляхів вигляду $xa\dot{l}$. Тому підставляючи в (14) значення $I(l, x^*)$ з (12) та $P^*(l, x^*)$ з (13), і враховуючи (15), отримуємо фундаментальне рівняння (10). $\square$

6. Зведення задачі оптимального керування до аналогічної задачі для похідної моделі. З фундаментального рівняння (10) випливає така оцінка:

$$\omega(x, \pi) \leq \sup_{A(x)} [q(a) + \dot{\omega}(p_a, \pi_a)] \leq \sup_{A(x)} [q(a) + \dot{\nu}(p_a)] \quad (16)$$

$\forall x \in X_m$ і $\forall \pi$ ($\dot{\nu}$ – оцінка моделі $\dot{Z}^*$).

Позначимо $u(a) = q(a) + \dot{\nu}(p_a)$, ($a \in A_{m+1}$). Будемо називати цю величину – **оцінкою керування a** .

Згідно з (9) та рівністю $\nu(x^*) = c(x^*)$ отримуємо $u = U\dot{\nu}$, де оператор U переводить функції на точках (необривних) у функції на керуваннях за такою формулою:

$$Uf(a) = q(a) + \sum_y p(y|a)f(y) + \sum_{y^*} p(y^*|a)c(y^*), \quad (17)$$

де y – необривні точки; y^* – обривні точки.

Введемо ще оператор V , який переводить функції на керуваннях у функції на точках (нефінальних і необривних) так:

$$Vg(x) = \sup_{a \in A(x)} g(a). \quad (18)$$

Запишемо нерівність (16), використовуючи оператор V : $\omega(x, \pi) \leq Vu(x)$. Тепер візьмемо $\sup_{\pi}$ від лівої та правої частини й отримаємо $\nu \leq Vu$. Пізніше ми покажемо, за яких умов справджується рівність.

Означення 14 (Добутку стратегій). *Нехай $\dot{\pi}$ – довільна обривна стратегія в моделі $\dot{Z}^*$ і нехай $\forall x \in X_m$ поставлено у відповідність деякий розподіл ймовірностей $\gamma(\cdot|x)$ на A_{m+1} , який зосереджений на $A(x)$. Вибираючи на початковому кроці керування a з розподілом γ і користуючись на всіх наступних кроках обривною стратегією*

$\dot{\pi}$, ми отримуємо обривну стратегію π в моделі Z^* , яка називається **добутком** γ та $\dot{\pi}$, позначається $\gamma\dot{\pi}$ і описується формулою

$$\pi(\cdot|h) = \begin{cases} \gamma(\cdot|x) & \text{при } h = x \in X_m, \\ \dot{\pi}(\cdot|\dot{h}) & \text{при } h = x\dot{a}\dot{h}. \end{cases}$$

Твердження 4. Нехай $\pi = \gamma\dot{\pi}$ – добуток обривних стратегій γ та $\dot{\pi}$. Якщо $\dot{\pi}$ рівномірно оптимальна для моделі $\dot{Z}^*$, тоді

$$\nu = Vu. \quad (19)$$

Доведення. Для добутку стратегій $\gamma\dot{\pi}$ фундаментальне рівняння (10) набуде такого вигляду:

$$\omega(x, \gamma\dot{\pi}) = \sum_{A(x)} \gamma(a|x) (q(a) + \dot{\omega}(p_a, \dot{\pi})). \quad (20)$$

Оскільки $\dot{\pi}$ – рівномірно оптимальна (а вона існує згідно з *твердженням 2*), то $\dot{\omega}(p_a, \dot{\pi}) = \dot{\nu}(p_a)$, і згідно з виглядом функції u рівняння (20) перетворюється в

$$\omega(x, \gamma\dot{\pi}) = \sum_{A(x)} \gamma(a|x) u(a).$$

Якщо для кожного x розподіл $\gamma(\cdot|x)$ зосереджений на $\bar{A}(x) \subset A(x)$, де функція $u(a)$ ($a \in A(x)$) досягає свого максимуму $Vu(x)$, то останнє рівняння набуде вигляду

$$\omega(x, \gamma\dot{\pi}) = Vu(x) \quad (x \in X_m). \quad (21)$$

□

Наслідок 2. Оцінка ν моделі Z^* виражається через оцінку $\dot{\nu}$ моделі $\dot{Z}^*$ такими формулами:

$$\nu = Vu, \quad u = U\dot{\nu}, \quad (22)$$

де оператори U та V задані формулами (17) та (18), відповідно.

Наслідок 3. Існує селектор ψ багатозначного відображення $A(x) : X_m \rightarrow A_{m+1}$:

$$u(\psi(x)) = \nu(x). \quad (23)$$

Доведення. За $\gamma(\cdot|x)$ можна взяти розподіл, зосереджений в одній точці $\psi(x) \in \bar{A}(x)$.

□

Наслідок 4. Якщо $\dot{\pi}$ рівномірно оптимальна для моделі $\dot{Z}^*$ і селектор ψ – такий, як в Наслідку 2, то обривна стратегія $\psi\dot{\pi}$ – рівномірно оптимальна для процесу Z^* .

7. Рівняння оптимальності. Побудова простих рівномірно оптимальних стратегій. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що в цій моделі $Z^*m = 0$. Розглянемо моделі $Z_0^*, Z_1^*, \dots, Z_n^*$, де $Z^* = Z_0^*$ і Z_t^* – похідна модель від Z_{t-1}^* . Оцінки ν та u моделі Z_t^* позначимо ν_t і u_{t+1} , відповідно (ν_t визначена на X_t , u_{t+1} визначена на A_{t+1}). Функцію винагороди q та перехідну функцію p на A_t позначимо q_t і p_t , відповідно.

Згідно з результатами попереднього параграфа оцінки ν_t і u_t пов'язані між собою такими співвідношеннями:

$$\nu_{t-1} = Vu_t, \quad u_t = U\nu_t \quad (1 \leq t \leq n), \quad (24)$$

де

$$U_t f(a) = q_t(a) + \sum_{y \in X_t} p_t(y|a)f(y) + p_t(y^*|a)c(y^*), \quad (a \in A_t, \quad y^* \in X_t),$$

$$V_t g(x) = \sup_{A(x)} g(a), \quad (x \in X_{t-1}),$$

причому $\nu_n = r$.

Рівності (24) називаються *рівняннями оптимальності*. Прийmemo $T_t = V_t U_t$, тоді рівняння оптимальності запишемо у вигляді

$$\nu_{t-1} = T_t \nu_t. \quad (25)$$

За допомогою рівнянь (24),(25) та граничної умови $\nu_n = r$ послідовно обчислюємо $\nu_n, \nu_{n-1}, \dots, \nu_0$.

Далі для кожного $t = 1, 2, \dots, n$ вибираємо селектор ψ_t багатозначного відображення $A(x) : X_{t-1} \rightarrow A_t$ такий, що

$$u_t(\psi_t) = \nu_{t-1}. \quad (26)$$

За **наслідком 3** проста обривна стратегія $\varphi = \psi_1 \psi_2 \dots \psi_n$ є рівномірно оптимальною для моделі $Z^* = Z_0^*$. Рівняння (26) можна переписати у вигляді

$$T_{\psi_t} \nu_t = \nu_{t-1},$$

де оператор T_{ψ_t} переводить функції на X_t в функції на X_{t-1} за формулою

$$T_{\psi_t} f(x) = q_t[\psi_t(x)] + \sum_{X_t} p(y|\psi_t(x))f(y) + p_t(y^*|a)c(y^*). \quad (27)$$

Твердження 5. Нехай π – довільна обривна стратегія в похідній моделі Z_k^* ($k = 1, 2, \dots, n$) і ψ_t – довільні селектори багатозначного відображення $A(x) : X_{t-1} \rightarrow A_t$ ($t = 1, 2, \dots, k$), тоді

$$\omega_0(x, \psi_1 \psi_2 \dots \psi_k \pi) = T_{\psi_1} T_{\psi_2} \dots T_{\psi_k} \omega_k(x, \pi). \quad (28)$$

Доведення. Впливає з фундаментального рівняння (10), формул (11), (27) та методу математичної індукції. $\square$

Формула (28) свідчить про таке: результат, який дає обривна стратегія $\psi_1 \psi_2 \dots \psi_k \pi$ не зміниться, якщо перервати керування в момент часу k , взявши за фінальну плату оцінку обривної стратегії π .

8. Марковська властивість. Нехай $0 < k < n$. Припустимо, що на відрізку $[0, k]$ ми користуємося обривною стратегією ρ , а на відрізку $[k, n]$ – обривною стратегією π (тобто стратегія в похідній моделі порядку k). За аналогією до *означення 14 (добутку стратегій)* природно сказати, що використовується стратегія $\rho\pi$.

Твердження 6. Нехай L_0 – простір шляхів на відрізку $[0, n]$, L_k – простір шляхів на відрізку $[k, n]$ і нехай $P_x^{*\rho\pi}$ – розподіл ймовірностей, що відповідає початковому стану x і обривній стратегії $\rho\pi$, і аналогічно $P_y^{*\pi}$ – розподіл ймовірностей на L_k . Тоді для кожного $\xi = \xi(x_k a_{k+1} \dots x_n)$ з L_k правильна формула

$$E_x^{*\rho\pi} \xi = E_x^{*\rho} [E_{x_k}^{*\pi} \xi]. \quad (29)$$

Доведення. Для кожного $l = y_0 b_1 \dots b_k y_k b_{k+1} \dots y_n$ згідно з формулою (2)

$$P_x^{*\rho\pi}(y_0 b_1 \dots y_n) = P_x^{*\rho}(cy_k) P_{y_k}^{*\pi}(y_k d), \quad (30)$$

де $c = y_0 b_1 \dots b_k$, $d = b_{k+1} \dots y_n$. Будь-яку функцію ξ в просторі L_k можна трактувати як функцію в просторі L_0 , яка не залежить від $x_0 a_1, \dots, a_k$. Тому домножимо праву та ліву частину рівності (30) на $\xi(y_k d)$ та підсумуємо по всіх шляхах

$$E_x^{*\rho\pi} \xi = \sum_{cy_k} P_x^{*\rho}(cy_k) \sum_d P_{y_k}^{*\pi}(y_k d) \xi(y_k d). \quad (31)$$

Але $P_{y_k}^{*\pi}(yd) = 0$ при $y \neq y_k$, тому

$$\sum_d P_{y_k}^{*\pi}(y_k d) \xi(y_k d) = \sum_{yd} P_{y_k}^{*\pi}(yd) \xi(yd) = F(y_k). \quad (32)$$

Підставляємо (32) в (31), врахувавши $\sum_{cy_k} P_x^{*\rho}(cy_k) F(y_k) = E_x^{*\rho} F(x_k)$, отримуємо формулу (29). $\square$

Наслідок 5 (Марковська властивість). *Нехай $\nu(y) = P_\mu^{*\rho}\{x_k = y\}$ ($y \in X_k$), тоді для кожного μ*

$$E_\mu^{*\rho\pi} \xi = E_\mu^{*\rho}[E_{x_k}^{*\pi} \xi].$$

Зокрема,

$$E_\mu^{*\rho\pi} \xi(x_k a_{k+1} \dots x_n) = E_\nu^{*\pi} \xi(x_k a_{k+1} \dots x_n). \quad (33)$$

Доведення. Впливає з (29) та рівності $\sum_{y \in X_k} \nu(y) P_y^{*\pi} \xi = E_\nu^{*\pi} \xi$. $\square$

Формула (33) засвідчує, що розподіл ймовірностей для частини траєкторії на відрізку $[k, n]$ при відомому розподілі стану x_k не залежить від розподілу μ і стратегії ρ . Іншими словами, ймовірнісний прогноз “майбутнього” (ξ) якщо відоме “теперішнє” (ν) не залежить від “минулого” (μ, ρ). Це і є **марковською властивістю**.

Тепер використаємо марковську властивість для того, щоб оцінити вклади інтервалів $[0, k]$ та $[k, n]$ в оцінку обривної стратегії $\rho\pi$. Застосуємо формулу (33) до функції $\xi = \sum_{t=k+1}^n [q(a_t) + c(x_t^*)] + r(x_n)$ та отримуємо

$$\omega(\mu, \rho\pi) = \sum_{t=1}^k E_\mu^{*\rho\pi} [q(a_t) + c(x_t^*)] + \omega(\nu, \pi) = \sum_{t=1}^k E_\mu^{*\rho} [q(a_t) + c(x_t^*)] + \omega(\nu, \pi). \quad (34)$$

Сума в формулі (34) виражає оцінку $\omega(\mu, \rho)$ стратегії ρ при нульовій фінальній платі, тобто $\omega(\mu, \rho\pi) = \omega(\mu, \rho) + \omega(\nu, \pi)$.

Можна дати формулі (34) й іншу інтерпретацію. Згідно з (8) та $\nu(y) = P_\mu^{*\rho}\{x_k = y\}$ ($y \in X_k$) отримуємо

$$\begin{aligned} \omega(\nu, \pi) &= \sum_y \nu(y) \omega(y, \pi) = E_\mu^{*\rho} \omega(x_k, \pi), \\ \omega(\mu, \rho\pi) &= E_\mu^{*\rho} \left[\sum_{t=1}^k q(a_t) + \omega(x_k, \pi) \right]. \end{aligned} \quad (35)$$

Отже, оцінка обривної стратегії ρ дорівнює оцінці обривної стратегії ρ при фінальній платі $\omega(\cdot, \pi)$ в момент k .

9. Принцип динамічного програмування. Нехай Z^* – модель на відрізку $[0, n]$ і нехай $0 \leq s < t \leq n$. Позначимо $Z_{s,t}^*[f]$ – модель, яку одержують з Z^* , якщо звужити інтервал $[0, n]$ до $[s, t]$ і визначити в момент часу t фінальну плату f . Оцінку моделі $Z_{s,t}^*$, яка відповідає фінальній платі f , позначимо $\nu_s^t[f]$. Відомо, що $\nu_s^t[f] = (VU)^{t-s}f = T^{t-s}f$ на X .

Звідси $\forall t \in [0, n]$ правильне рівняння

$$\nu_0^n[r] = \nu_0^t[\nu_t^n[r]] \text{ на } X_0 \text{ (} r \text{ задана на } X_n \text{).} \quad (36)$$

Рівняння (36) рівносильне рівнянням оптимальності (24) та граничній умові. Воно виражає **принцип динамічного програмування**, згідно з яким для оптимізації керування на проміжку $[0, n]$ при фінальній платі r можна спочатку оптимізувати керування на проміжку $[t, n]$ (при тій самій фінальній платі), а потім оптимізувати керування на проміжку $[0, t]$ при фінальній платі $\nu_t^n[r]$.

Зокрема, з рівняння (36) випливає таке: якщо π'' – рівномірно оптимальна обривна стратегія для Z_t^{*n} при фінальній платі r і π' – рівномірно оптимальна обривна стратегія для Z_0^{*t} при фінальній платі $\nu_t^n[r]$, то обривна стратегія $\pi = \pi''\pi'$ має оцінку $\nu_0^n[r]$, а отже, рівномірно оптимальна для процесу Z_0^{*n} (при фінальній платі r).

-
1. *Дынкин Е.Б.* Управляемые марковские процессы и их приложения / *Дынкин Е.Б., Юшкевич А.А.* – М., 1975.
 2. *Губенко Л.Г.* Об управляемых марковских процессах с дискретным временем / *Губенко Л.Г., Штатланд Э.С.* // Теор. вер. и мат. стат. – 1972. – №7. – С. 51-64.
 3. *Derman C.* Finite state Markovian decision process / *Derman C.* – N. Y. – London.
 4. *Bellman R.* A Markovian decision process / *Bellman R.* // J. Math. Mech. – 1964. – №6. – P. 679-684.

KILLED MARKOV DECISION PROCESSES ON FINITE TIME INTERVAL FOR FINITE MODELS

Nestor PAROLYA, Yaroslav YELEJKO

*Ivan Franko National University of L'viv,
79000 L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: mstat@franko.lviv.ua*

In this article we consider killed Markov decision processes for finite models on finite time interval. Existence of a uniform optimal strategy is proved. We showed correctness of the fundamental equation. Optimal control problem is reduced to a similar problem for derived model. We receive optimality equation and method for simple optimal strategies constructing. We show correctness

of the Markovian property. Additionally dynamic programming principle is considered.

Key words: Markov decision process, optimal strategy, optimal decision, fundamental equation.

ОБРЫВНЫЕ УПРАВЛЯЕМЫЕ МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ ДЛЯ КОНЕЧНЫХ МОДЕЛЕЙ

Нестор ПАРОЛЯ, Ярослав ЕЛЕЙКО

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000 Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: mstat@franko.lviv.ua*

Рассмотрено обрывные управляемые марковские процессы для конечных моделей на конечном интервале времени. Доказано существование равномерной оптимальной стратегии. Обосновано справедливость фундаментального уравнения. Приведено задачу оптимального управления к аналогичной задаче для производной модели. Получено уравнения оптимальности и метод построения простых равномерных оптимальных стратегий. Показано справедливость марковского свойства. Рассмотрено принцип динамического программирования.

Ключевые слова: управляемый марковский процесс, оптимальная стратегия, оптимальное управление, фундаментальное уравнение.

Стаття надійшла до редколегії 26.01.2010

Прийнята до друку 22.12.2010

УДК 515.12

ФУНКТОРИ І РОЗМИТІ УЛЬТРАМЕТРИКИ

Олександр САВЧЕНКО

Херсонський державний аграрний університет,
73006 Херсон, вул. Рози Люксембург, 23
e-mail: savchenko1960@rambler.ru

Нехай F – нормальний функтор скінченного степеня на категорії компактів. Описано процедуру, яка дає змогу одержати ультраметризацію продовження функтора F на категорію метризовних просторів. Формулюється проблема перенесення отриманих результатів на випадок інтуїціоністських розмитих ультраметричних просторів.

Ключові слова: нормальний функтор, розмитий ультраметричний простір.

1. Вступ. Властивості функторних конструкцій у категорії топологічних просторів та її підкатегоріях є предметом дослідження багатьох авторів. Зокрема, В.М. Басманов, В.В. Федорчук, М.В. Смуров, М.М. Зарічний та інші досліджували геометрію просторів вигляду $F(X)$, де F – коваріантний функтор у категорії компактних або тихоновських просторів.

Ми розглядаємо випадок, коли функтор F належить до класу нормальних функторів. Цей клас виділив Є.В. Щепін у зв'язку з дослідженнями неметризовних компактних просторів методами теорії обернених спектрів (систем). Оскільки спектральна теорема Щепіна стверджує, що гомеоморфізм границь двох регулярних спектрів індукуює морфізм їхніх конфінальних підспектрів, при дослідженні різних конструкцій, означених на класі компактів, то виникає потреба також означити їх для морфізмів, тобто працювати з функторами в категорії компактів.

Спроби перенести спектральну теорему Щепіна на клас просторів, ширших, ніж компакти, мотивує розгляд функторів у інших категоріях, зокрема, у категоріях метризовних просторів. Для функторів у категорії метризовних просторів на перший план виникає вже згадана задача метризації функтора, тобто приписування кожній метриці d_X на простір X метрики $d_{F(X)}$ на просторі $F(X)$. Загальну проблему метризації просторів вигляду $F(X)$ сформулював також В.В. Федорчук у зв'язку з виділенням класів досконало метризовних і цілком метризовних функторів.

З огляду на широкі застосування ультраметрик особливе значення набуває порівняно нова задача *ультраметризації* просторів вигляду $F(X)$ для ультраметричних просторів X . Нагадаємо, що метрика d на множині X називається *ультраметрикою*, якщо для неї виконано сильну нерівність трикутника

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}, \quad x, y, z \in X.$$

Ультраметрики природно виникають у різних областях математики та її застосовувань, зокрема, в семантиці мов програмування та еволюційній біології. Ультраметризацію функторів гіперпростору, та ймовірнісних мір одержали в [16].

Наша мета – перенести деякі одержані результати на категорію розмитих (неархімедових) метричних просторів. Розмиті метричні простори запроваджені в математику в праці [1] (див. також [5]). Останнім часом поняття розмитого метричного простору інтенсивно досліджують. На клас розмитих метричних просторів переносяться різні результати і концепції теорії метричних просторів. Зокрема, багато праць присвячено перенесенню теореми Банаха про стискуючі відображення на клас відображень розмитих метричних просторів.

Зауважимо також, що останнім часом знайдено застосування розмитих метричних просторів до фільтрування кольорових образів [6]. Нещодавно, розмиті ультраметричні простори застосовані до області слів – це допомагає дослідити стабільність рекурентних рівнянь, які виникають під час аналізу деяких алгоритмів [9].

Нашою метою є розмита ультраметризація просторів вигляду $F(X)$ для одного широкого класу функторів F у категорії компактних просторів, а саме класу нормальних функторів.

2. Вступні відомості.

2.1. Розмиті метричні простори. Нагадаємо, що неперервною t -нормою називають бінарну операцію $*$: $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, яка задовольняє умови:

- (i) $*$ асоціативна і комутативна;
- (ii) $*$ неперервна;
- (iii) $a * 1 = a$ для кожного $a \in [0, 1]$;
- (iv) $a * b \leq c * d$, якщо $a \leq c$ і $b \leq d$, де $a, b, c, d \in [0, 1]$.

(Коротко кажучи, неперервна t -норма – це бінарна операція $*$: $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ така, що трійка $([0, 1], \leq, *)$ є впорядкованим абелевим топологічним моноїдом з одиницею 1.) Прикладами t -норм є функції $a * b = ab$ та $a * b = \min\{a, b\}$.

Означення 1. (А. Джордж, П. Вірамані [1, Definition 1]). Розмитим метричним простором називають упорядковану трійку $(X, M, *)$ таку, що X – непорожня множина, $*$ – неперервна t -норма і M – розмита множина на $X \times X \times (0, +\infty)$, що задовольняє умови для всіх $x, y, z \in X$, $s, t > 0$:

- (i) $M(x, y, t) > 0$;
- (ii) $M(x, y, t) = 1$ тоді і лише тоді, коли $x = y$;
- (iii) $M(x, y, t) = M(y, x, t)$;
- (iv) $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$;
- (v) функція $M(x, y, -): (0, +\infty) \rightarrow (0, 1]$ неперервна.

Функцію M називають *розмитою метрикою* на X (стосовно $*$). Зауважимо, що для кожного метричного простору (X, d) функція

$$M_d(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$$

є розмитою метрикою на X для t -норми $*$ = min.

Нескладно показати, що функція $M(x, y, -)$ неспадна для кожних $x, y \in X$ (див., наприклад, [2]).

Якщо замінити умову (iv) в означенні 1 на умову

$$(iv') : M(x, y, t) * M(y, z, t) \leq M(x, z, t),$$

то ми одержимо означення *розмитої ультраметрики* на множині X , якщо в умові (v) вимагати, щоби функція $M(x, y, -) : (0, +\infty) \rightarrow (0, 1]$ була неперервною зліва, то одержимо поняття *розмитого (ультра)метричного простору* в сенсі [5].

Нехай $(X, M, *)$, $(X', M', *)$ – розмиті метричні простори. Відображення $f : X \rightarrow X'$ називають *нерозтягуючим*, якщо $M'(f(x), f(y), t) \geq M(x, y, t)$ для кожних $x, y \in X$, $t > 0$. Очевидно, що розмиті метричні простори (стосовно однієї і тієї ж t -норми $*$) та нерозтягуючі відображення утворюють категорію (позначається $\mathcal{FMS}(*)$).

2.2. Функтори в категорії компактних просторів. Нехай $n \in \mathbb{N}$ і $\mathcal{K}_n$ означає категорію дискретних просторів потужності $\leq n$. Позначимо через **Comp** категорію компактних гаусдорфових просторів і неперервних відображень. Нехай також **Comp_f** – її підкатегорія скінченних просторів (=скінченних множин). Розглянемо такі властивості коваріантного функтора $F : \mathcal{K}_n \rightarrow \mathbf{Comp}$:

- 1) F мономорфний (тобто зберігає вкладення);
- 2) F епіморфний (тобто зберігає відображення на);
- 3) F зберігає перетини;
- 4) F зберігає точку і порожню множину.

Ці властивості взято з означення нормального функтора в категорії компактних топологічних просторів (див. [11]). Якщо функтор F зберігає вкладення, то для кожного $A \subset B$ природно ототожнити множину $F(A)$ з відповідною підмножиною в $F(B)$. Властивість перетинів означає, що $F(\cap_\alpha A_\alpha) = \cap_\alpha F(A_\alpha)$ для кожної сім'ї $\{A_\alpha\}$ підмножин в X . Для кожного $a \in F(X)$ множину

$$\text{supp}(a) = \cap \{A \subset X \mid a \in F(A) \subset F(X)\}$$

називають *носієм* точки a .

Функтор називають *фінітним*, якщо він переводить об'єкти категорії $\mathcal{K}_n$ в скінченні простори.

Прикладами функторів, що задовольняють наведені вище умови, є:

1) функтор G -симетричного степеня SP_G^n . Нагадаємо, що підгрупа G групи S_n групи перестановок множини $\{1, \dots, n\}$ (симетричної групи) діє на n -й степінь X^n простору X перестановками координат: якщо $\sigma \in G$ і $x = (x_1, \dots, x_n) \in X^n$, то $\sigma x = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$. Простір орбіт цієї дії позначається $SP_G^n(X)$. Для кожного $x = (x_1, \dots, x_n) \in X^n$ через $[x_1, \dots, x_n]$ позначається орбіта, що містить x . Для кожного відображення $f : X \rightarrow Y$ через $SP_G^n(f) : SP_G^n(X) \rightarrow SP_G^n(Y)$ позначаємо

відображення, що діє за формулою

$$SP_G^n(f)([x_1, \dots, x_n]) = [f(x_1), \dots, f(x_n)];$$

2) функтор n -го гіперсиметричного степеня exr_n . Для кожного простору X нехай $\text{exr } X$ означає множину всіх непорожніх компактних підмножин у X . Для кожного натурального n нехай $\text{exr}_n X$ означає підпростір в $\text{exr } X$, утворений ком- пактами потужності $\leq n$;

3) функтор P_n ймовірнісних мір з носіями потужності $\leq n$. Нехай $X \in \mathcal{K}_n$. Тоді множина $P_n(X)$ – це множина формальних комбінацій вигляду

$$\sum \left\{ \alpha_x \delta_x \mid x \in X, \alpha_x \geq 0, \sum_{x \in X} \alpha_x = 1 \right\}.$$

Відомо, що для кожного нормального функтора F існує природне перетворення $\eta: 1 \rightarrow F$, де 1 означає тотожний функтор.

3. Основний результат. Нехай $(X, M, *)$ – розмитий ультраметричний простір. Для кожних $r \in (0, 1)$ і $t > 0$ нехай $\mathcal{B}_{r,t}(x) = \{B(x, r, t) \mid x \in X\}$. Множина $\mathcal{B}_{r,t}(x)$ називається *кулею з центром в x радіуса r для параметра t* .

Лема 1. *Сім'я $\mathcal{B}_{r,t}$ диз'юнктна.*

Доведення можна знайти в [13].

Для кожних $r \in (0, 1)$ і $t > 0$ нехай $q_{r,t}: X \rightarrow X/\mathcal{B}_{r,t} = \{B(x, r, t) \mid x \in X\}$ – фактор-відображення. Означимо функцію $M_F: F(X) \times F(X) \times (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ формулою

$$M_F(a, b, t) = \inf\{r > 0 \mid F(q_{r,t})(a) = F(q_{r,t})(b)\}.$$

Теорема 1. *Функція M_F є розмитою ультраметрикою на множині X .*

Доведення. Доведемо спочатку, що функція M_F коректно означена. Нехай $t > 0$. Існує $x_0 \in X$ та $r \in (0, 1)$ таке, що

$$\text{supp}(a) \cup \text{supp}(b) \subset B(x_0, r, t).$$

Тоді $F(q_{r,t})(a) = F(q_{r,t})(b) = \eta_X(q_{r,t}(x_0))$.

Очевидно, що $M_F(a, b, t) = M_F(b, a, t)$ для кожних $a, b \in F(X)$ і кожного $t > 0$.

Нехай $a, b, c \in F(X)$. Нехай $M_F(a, b, t) = r_1$, $M_F(b, c, t) = r_2$. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $r_1 \leq r_2$. Тоді існує $h: X/\mathcal{B}_{r_1,t} \rightarrow X/\mathcal{B}_{r_2,t}$ таке, що $h q_{r_1,t} = q_{r_2,t}$. Тоді одержуємо

$$F(q_{r_2,t})(c) = F(q_{r_2,t})(b) = F(h)F(q_{r_1,t})(b) = F(h)F(q_{r_1,t})(a) = F(q_{r_2,t})(a),$$

тому

$$M_F(a, c, t) \geq M_F(a, b, t) = \min\{M_F(a, b, t), M_F(b, c, t)\} = M_F(a, b, t) * M_F(b, c, t)$$

(оскільки, як легко бачити, $\min$ є найбільшою з усіх t -норм). Це доводить умову (iv) з означення розмитої метрики.

Неперервність функції $t \mapsto M_F(a, b, t): (0, \infty) \rightarrow (0, 1]$ випливає зі скінченності носіїв функтора F і неперервності функції $t \mapsto M(x, y, t): (0, \infty) \rightarrow (0, 1]$. $\square$

Теорема 2. Нехай $f: X \rightarrow Y$ – нерозтягуюче відображення розмитих метричних просторів $(X, M, *)$ та $(Y, N, *)$. Тоді відображення $F(f): F(X) \rightarrow F(Y)$ нерозтягуюче стосовно розмитих метрик M_F та N_F .

Ці дві теореми свідчать про те, що F є коваріантним функтором на категорії $\mathcal{FMS}(*)$.

Теорема 3. Нехай X – компактний простір. Топологія на $F(X)$, породжена розмитою ультраметрикою M_F , дорівнює вихідній топології на $F(X)$ тоді і лише тоді, коли F – фінітний функтор.

Доведення. Нехай $F(n)$ – нескінченна множина. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що існує скінченна множина $A \subset X$ така, що множина $K = \{a \in F(X) \mid \text{supp}(a) = A\}$ нескінченна. Нехай $t > 0$. Прийmemo $r_0 = \max\{M(x, y, t) \mid x, y \in A, x \neq y\}$. Тоді для кожного $r \in (0, r_0)$ і для кожних $a, b \in K$, $a \neq b$ маємо $F(q_{r,t})(a) \neq F(q_{r,t})(b)$. Звідси безпосередньо випливає, що $M_F(a, b, t) \geq r_0$ для кожних $a, b \in K$, $a \neq b$. З характеристики компактності в розмитих метричних просторах випливає, що простір $F(X)$ некомпактний. $\square$

Нехай $B \in \text{exp } X$. Для кожних $a \in X$ і $t \in (0, \infty)$, нехай

$$M(a, B, t) = \sup\{M(a, b, t) \mid b \in B\}$$

(див. [15]).

Розмита метрика Гаусдорфа M_H на гіперпросторі $\text{exp } X$ означена формулою:

$$M_H(A, B, t) = \min \left\{ \inf_{a \in A} M(a, B, t), \inf_{b \in B} M(A, b, t) \right\}$$

(див. [8]).

Твердження 1. M_{exp_n} дорівнює звуженню метрики Гаусдорфа M_H на $\text{exp}_n X$.

Якщо $(X, M, *)$ – розмитий метричний простір, то функція $\tilde{M}: SP_G^n X \times SP_G^n X \times (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$, означена формулою

$$\tilde{M}([x_1, \dots, x_n], [y_1, \dots, y_n], t) = \max_{\sigma \in G} \min_{i=1, \dots, n} M(x_i, y_{\sigma(i)}, t),$$

є розмитою метрикою на множині $SP_G^n X$.

Твердження 2. Маємо $\tilde{M} = M_{SP_G^n}$.

3.1. Природні перетворення. Нехай F_1, F_2 – нормальні функтори в категорії компактних просторів і $\varphi: F_1 \rightarrow F_2$ – їхнє природне перетворення.

Твердження 3. Якщо $(X, M, *)$ – розмитий метричний простір, то відображення φ_X є нерозтягуючим відображенням розмитих метричних просторів $(F_1(X), M_{F_1}, *)$ і $(F_2(X), M_{F_2}, *)$.

Доведення. Доведення одержуємо безпосередньою перевіркою. $\square$

4. Зауваження і відкриті проблеми.

4.1. *Інші категорії розмитих метричних просторів.* Розмитий метричний простір $(X, M, *)$ називають *основним*, якщо сім'я $\{B(x, r, t) \mid r \in (0, 1)\}$ є базою в точці $x \in X$ для кожного $x \in X$ і кожного $t > 0$.

Нехай $(X, M, *)$ – розмитий метричний простір. Розмиту метрику M називають *сильною* (див. [3]), якщо вона задовольняє нерівність

$$M(x, z, t) \geq M(x, y, t) * M(y, z, t)$$

для кожних $x, y, z \in X$ і $t > 0$.

Залишаємо відкритою проблему перенесення доведених вище результатів на класи основних і сильних розмитих метричних просторів.

4.2. *Інтуїціоністські розмиті ультраметрики.* Щоби сформулювати таке означення інтуїціоністського метричного простору, нам додатково до означення t -норми буде потрібне означення t -конорми [12].

Бінарна операція $\diamond: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ називається неперервною t -конормою, якщо $\diamond$ задовольняє умови:

- (i) $\diamond$ комутативна й асоціативна;
- (ii) $\diamond$ неперервна;
- (iii) $a \diamond 0 = a$ для всіх $a \in [0, 1]$;
- (iv) $a \diamond b \leq c \diamond d$, як тільки $a \leq c$ and $b \leq d$ для всіх $a, b, c, d \in [0, 1]$.

Означення 2. *П'ятірка $(X, M, N, *, \diamond)$ називається інтуїціоністським розмитим метричним простором, якщо X – довільна множина, $*$ – неперервна t -норма, $\diamond$ – неперервна t -конорма, $M, N: X^2 \times (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ задовольняють умови:*

- (i) $M(x, y, t) + N(x, y, t) \leq 1$ для всіх $x, y \in X$ і $t > 0$;
- (ii) $M(x, y, 0) = 0$ для всіх $x, y \in X$;
- (iii) $M(x, y, t) = 1$ для всіх $x, y \in X$ і $t > 0$ тоді і лише тоді, коли $x = y$;
- (iv) $M(x, y, t) = M(y, x, t)$ для всіх $x, y \in X$, $t > 0$;
- (v) $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$ для всіх $x, y, z \in X$ і $s, t > 0$;
- (vi) для всіх $x, y \in X$ функція $M(x, y, -): (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ неперервна;
- (vii) $\lim_{t \rightarrow \infty} M(x, y, t) = 1$ для всіх $x, y \in X$ і $t > 0$;
- (viii) $N(x, y, 0) = 1$ для всіх $x, y \in X$;
- (ix) $N(x, y, t) = 0$ для всіх $x, y \in X$ і $t > 0$ тоді і лише тоді, коли $x = y$;
- (x) $N(x, y, t) = N(y, x, t)$ для всіх $x, y \in X$ і $t > 0$;
- (xi) $N(x, y, t) \diamond N(y, z, s) \leq N(x, z, t + s)$ для всіх $x, y, z \in X$ і $s, t > 0$;
- (xii) для всіх $x, y \in X$, функція $N(x, y, -): (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ неперервна;
- (xiii) $\lim_{t \rightarrow \infty} N(x, y, t) = 0$ для всіх $x, y \in X$.

Тоді пара (M, N) називається інтуїціоністською розмитою метрикою на X .

Природно назвати пару (M, N) інтуїціоністською розмитою ультраметрикою на X , якщо додатково задовольняються умови

- (v') $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$ для всіх $x, y, z \in X$ і $s, t > 0$;
- (xi') $N(x, y, t) \diamond N(y, z, s) \leq N(x, z, t + s)$ для всіх $x, y, z \in X$ і $s, t > 0$.

Сформулюємо проблему: чи можна перенести отримані вище результати на випадок інтуїціоністських розмитих ультраметричних просторів?

4.3. *Інші проблеми.* Відомо, що кожен нормальний функтор має продовження на категорію тихоновських просторів і це продовження зберігає клас метризовних просторів. Оскільки клас розмитих метризовних просторів збігається з класом метризовних просторів, то ми можемо розглядати проблему розмитої метризації нормальних функторів на категорії метризовних просторів. Результати статті можна узагальнити на цей випадок.

Природно виникає проблема збереження повноти розмитих метричних просторів одержаними функторами.

Однією з основних проблем також залишається проблема перенесення результатів цієї статті на випадок функторів нескінченного степеня. Зауважимо, що це вже зроблено для функторів гіперпростору exp та ймовірнісних мір P (див. [16]).

-
1. *George A.* On some results in fuzzy metric spaces / *George A., Veeramani P.V.* // Fuzzy Sets and Systems. – 1994. – Vol. 64. – P. 395-399.
 2. *Grabiec M.* Fixed points in fuzzy metric spaces / *Grabiec M.* // Fuzzy Sets and Systems. – 1989. – Vol. 27. – P. 385-389.
 3. *Gregori V., Morillas, Sapena A.* On a class of completable fuzzy metrics, (подано до друку).
 4. *Gregory V.* A note on intuitionistic fuzzy metric spaces / *Gregory V., Romaguera S., Veeramani P.* // Chaos, Solitons and Fractals. – 2006. – Vol. 28. – P. 902-905.
 5. *Kramosil O.* Fuzzy metric and statistical metric spaces / *Kramosil O., Michalek J.* // Kybernetika. – 1975. – Vol. 11. – P. 326-334.
 6. *Morillas S.* A fast impulsive noise color image filter using fuzzy metrics *Morillas S., Gregori V., Peris-Fajarnes G., Latorre P.* // Real-Time Imaging. – 2005. – Vol. 11, №5-6. – P. 417-428.
 7. *Park J.H.* Intuitionistic fuzzy metric spaces / *Park J.H.* // Chaos, Solitons and Fractals. – 2004. – Vol. 22. – P. 1039-1046.
 8. *Rodríguez-López J.* The Hausdorff fuzzy metric on compact sets / *Rodríguez-López J., Romaguera S.* // Fuzzy Sets and Systems. – Vol. 147, № 2. – P. 273-283.
 9. *Romaguera S.* The Banach fixed point theorem in fuzzy quasi-metric spaces with application to the domain of words / *Romaguera S., Sapena A., Tirado P.* // Topology and its Applications. – 2007. – Vol. 154, № 10. – P. 2196-2203.
 10. *Sapena A.* A contribution to the study of fuzzy metric spaces / *Sapena A.* // Applied General Topology. – 2001. – Vol. 2, № 1. – P. 63-75.
 11. *Щепин Е.В.* Функторы и несчетные степени компактов / *Щепин Е.В.* // Успехи матем. наук. – 1981. – Т. 36, № 3. – С. 3-62.
 12. *Schweizer B.* Probabilistic Metric Spaces / *Schweizer B., Sklar A.* – Elsevier Science Publishing Company, 1983.
 13. *Savchenko A.* Fuzzy ultrametrics on the set of probability measures / *Savchenko A., Zarichnyi M.* // Topology. – 2009. – Vol. 48, № 2-4. – P. 130-136.
 14. *Teleiko A.* Categorical topology of compact Hausdorff spaces / *Teleiko A., Zarichnyi M.* – Mathematical Studies: Monograph Series, Volume 5.
 15. *Veeramani P.* Best approximation in fuzzy metric spaces / *Veeramani P.* // J. Fuzzy Math. – 2001. – Vol. 9. – P. 75-80.
 16. *Breugel F.* A Note on Hyperspaces and Terminal Coalgebras / *Breugel F., Watson S.* // Coalgebraic Methods in Computer Science. Electronic Notes in Theoretical Computer Science. – 1999. – Vol. 19. – P. 201-208.

FUNCTORS AND FUZZY ULTRAMETRICS

Aleksandr SAVCHENKO

*Kherson state agricultural university,
73006 Kherson, Rozy Lyuksemburg Str., 23
e-mail: savchenko1960@rambler.ru*

Let F be a normal functor of finite degree on the category of compacta. We describe a procedure that allows for obtaining ultrametrizations of extensions of the functor F onto the category of metrizable spaces. We formulate a problem of extension of the obtained results onto the category of intuitionistic fuzzy ultrametric spaces.

Key words: normal functor, fuzzy ultrametric space.

ФУНКТОРЫ И НЕЧЁТКИЕ УЛЬТРАМЕТРИКИ

Александр САВЧЕНКО

*Херсонский государственный аграрный университет,
73006 Херсон, ул. Розы Люксембург, 23
e-mail: savchenko1960@rambler.ru*

Пусть F – нормальный функтор конечного степени на категории компактов. Описана процедура, которая позволяет получить ультраметризации продолжения функтора F на категорию метризованных пространств. Сформулировано проблему использования полученных результатов в случае интуиционистских нечётких ультраметрических пространств.

Ключевые слова: функтор, нечёткое ультраметрическое пространство.

Стаття надійшла до редколегії 27.08.2010

Прийнята до друку 22.12.2010

УДК 517.9

КОНСТРУКТИВНИЙ МЕТОД ПОБУДОВИ ОПЕРАТОРА РОЗСІЯННЯ ДЛЯ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

Юрій СИДОРЕНКО

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000 Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: y_sydorenko@franko.lviv.ua

Запропоновано конструктивний метод побудови операторів перетворення та розсіяння у випадку вироджених даних розсіяння для нестационарної системи Дірака, який ґрунтується на бінарних перетвореннях типу Дарбу. Знайдено зв'язок між результатами, отриманими в цій праці, та результатами Л. Нижника з теорії обернених задач розсіяння.

Ключові слова: бінарні перетворення Дарбу, оператор розсіяння, система Дірака.

1. Вступ. Ми розглянемо нестационарну гіперболічну систему рівнянь Дірака вигляду

$$LY = 0, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1(x, y) \\ Y_2(x, y) \end{pmatrix}, \quad L = \alpha \partial_y - \sigma_3 \partial_x + U = \begin{pmatrix} \alpha \partial_y - \partial_x & u_1(x, y) \\ u_2(x, y) & \alpha \partial_y + \partial_x \end{pmatrix}, \quad (1)$$
$$\sigma_3 = \text{diag}(1, -1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \partial_x := \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_y := \frac{\partial}{\partial y},$$

де $\mathbb{R}_+ \ni \alpha$ – деяка додатна стала, а комплекснозначні функції (потенціали) $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$ достатньо швидко спадають на нескінченностях.

Пряму й обернену задачі розсіяння для системи (1), де $y := t$ (еволюційна змінна), $\alpha = 1$ досліджував вперше Л.П. Нижник в [1]. В цій праці були описані властивості оператора розсіяння S , що визначається співвідношенням

$$b = Sa, \quad (2)$$

де $b = \begin{pmatrix} b_1(y + \alpha x) \\ b_2(y - \alpha x) \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} a_1(y + \alpha x) \\ a_2(y - \alpha x) \end{pmatrix}$ є асимптотиками розв'язку $Y = (Y_1, Y_2)^T$ системи (1)

$$\begin{aligned} Y_1(x, y) &= a_1(y + \alpha x) + o(1), \quad Y_2(x, y) = b_2(y - \alpha x) + o(1), \quad x \rightarrow +\infty; \\ Y_1(x, y) &= b_1(y + \alpha x) + o(1), \quad Y_2(x, y) = a_2(y - \alpha x) + o(1), \quad x \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (3)$$

Очевидно, що асимптотичні рівності (3) еквівалентні до таких:

$$\begin{aligned} Y_1(x, y) &= a_1(y + \alpha x) + o(1), \quad Y_2(x, y) = a_2(y - \alpha x) + o(1), \quad y \rightarrow -\infty; \\ Y_1(x, y) &= b_1(y + \alpha x) + o(1), \quad Y_2(x, y) = b_2(y - \alpha x) + o(1), \quad y \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (4)$$

Функції a і b (2) є, очевидно, розв'язками незбуреної ($u_1 \equiv u_2 \equiv 0$) системи (1), а з фізичного погляду, це асимптотики хвиль, що падають на потенціал U (1) і хвиль, які пройшли потенціальний бар'єр, відповідно. Саме $a_1(y + \alpha x)$ – асимптотика хвилі, що “приходить з $+\infty$ ”, а $a_2(y - \alpha x)$ – асимптотика хвилі, яка “приходить з $-\infty$ ”.

Оператор розсіяння S (2) переводить розв'язки незбуреної системи

$$L_0 Y_0 = 0, \quad Y_0 = \begin{pmatrix} Y_{10}(y + \alpha x) \\ Y_{20}(y - \alpha x) \end{pmatrix}, \quad (5)$$

в розв'язки цієї ж системи (5) і є прикладом інваріантного ($[S, L_0] := SL_0 - L_0 S = 0$) оператора автоперетворень типу Беклунда-Дарбу.

В [1] було доведено, що антидіагональні елементи матричних розмірностей (2×2) операторів $S - I := F$, $S^{-1} - I := G$ є операторами Фредгольма, а діагональні елементи – оператори Вольтерра. Можливість факторизації оператора розсіяння S так званими операторами перетворень (що переводять розв'язки незбуреної системи (5) у розв'язки системи Дірака (1)) допомагає отримати аналоги рівнянь Марченка-Гельфанда-Левітана. Ці рівняння оберненої задачі є інтегральними рівняннями Фредгольма другого роду, що зв'язують ядра оператора розсіяння і операторів перетворень. Оператори перетворень дають змогу відновити потенціали $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$ системи Дірака (1) за заданими даними розсіяння. При вироджених даних розсіяння (вироджених ядрах оператора розсіяння S) оператори перетворень і потенціали системи (1) можуть бути знайдені явно. Відповідні формули отримали в Розділі 3.

Мета нашої праці – знайти в явному вигляді оператори перетворення оберненої задачі для системи Дірака (1) і відповідного їм оператора розсіяння з виродженими даними розсіяння. Ми пропонуємо конструктивний алгоритм їхньої побудови, що ґрунтується на розробленій в [2-4] теорії бінарних перетворень типу Беклунда-Дарбу.

Подібні результати для системи рівнянь Дірака в конусних змінних були отримані в [5], де також проаналізували їхнє співвідношення з дослідженнями Л.П. Нижника [6].

Одним із головних завдань роботи також є доведення того, що розв'язки оберненої задачі розсіяння збігаються з потенціалами системи Дірака (1), отриманими методом бінарних перетворень (див. Розділ 3, Твердження 2).

Зауважимо, що метод бінарних перетворень має алгебризований характер, тому отримані явні формули для потенціалів (19) і (54) правильні і при $\alpha = i \in i\mathbb{R}$. У цьому випадку вихідна система (1) стає еліптичною і не підпадає під методику [1].

Робота організована так. В Розділі 2 стисло вводяться необхідні поняття і означення з теорії бінарних перетворень для системи Дірака (1).

Основні результати статті містяться в Розділі 3.

В розділі 4 ми зробили деякі зауваження про результати, які отримали в цій праці, так і ті, які з різних причин (в тім числі, щоб суттєво не збільшити обсяг статті) не розкриті в основному тексті. Ми сподіваємось у наступних публікаціях повернутись до цих питань.

2. Вихідні положення. Конструкція загальних бінарних перетворень для довільних еволюційних операторів запропонована в [2-4], а для випадку оператора Дірака (1) відповідні побудови проведені в [7].

Подамо деякі з них. Нехай:

$$1) Y = \begin{pmatrix} Y_1(x, y) \\ Y_2(x, y) \end{pmatrix} - \text{довільний розв'язок системи (1);}$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1(x, y) \\ \varphi_2(x, y) \end{pmatrix} \quad (6)$$

– деяка фіксована розмірності $(2 \times K)$ матриця розв'язків системи (1);

2)

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1(x, y) \\ \psi_2(x, y) \end{pmatrix} \quad (7)$$

– фіксована матриця розв'язків транспонованої системи

$$L^T \psi = 0, \quad (8)$$

$$L^T = -\alpha \partial_y + \sigma_3 \partial_x + U^T = \begin{pmatrix} -\alpha \partial_y + \partial_x & u_2(x, y) \\ u_1(x, y) & -\alpha \partial_y - \partial_x \end{pmatrix}.$$

Матричні $(K \times K)$ функції $P[\psi, \varphi] := \alpha \psi^T \varphi$, $Q[\psi, \varphi] = \psi^T \sigma_3 \varphi$ задовольняють співвідношення

$$P_y = Q_x, \quad (9)$$

наслідком чого є існування (з точністю до сталої) матричного потенціалу

$$\Omega = \Omega[\psi, \varphi], \quad d\Omega[\psi, \varphi] = Pdx + Qdy, \quad (10)$$

$$\Omega = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy.$$

Оператор загальних бінарних перетворень типу Дарбу W , побудований з використанням систем функцій φ, ψ (6)-(9), та його обернений W^{-1} згідно з результатами [2-4] набувають, відповідно, вигляду

$$W = I - \varphi \Delta^{-1} \Omega[\psi, \cdot], \quad (11)$$

$$W^{-1} = I + \varphi \Omega[\psi (\Delta^T)^{-1}, \cdot],$$

де $\Delta := C + \Omega[\psi, \varphi]$, $C \in Mat_{K \times K}(\mathbb{C})$ – деяка стала комплексна матриця розмірності $(K \times K)$.

Твердження 1. [7] 1. При перетворенні подібності

$$L \rightarrow \hat{L} := WLW^{-1} \quad (12)$$

з оператором бінарних перетворень типу Дарбу (11) оператор $\hat{L}$ є оператором Дірака з потенціалами

$$\hat{u}_1 = u_1 - 2\varphi_1 \Delta^{-1} \psi_2^T, \quad \hat{u}_2 = u_2 + 2\varphi_2 \Delta^{-1} \psi_1^T. \quad (13)$$

2. Довільний розв'язок $Y(x, y)$ системи Дірака (1) переходить у розв'язок $\hat{Y}(x, y)$ системи Дірака

$$\hat{L}\hat{Y} = 0 \quad (14)$$

з потенціалами $\hat{u}_1, \hat{u}_2$ (13) за формулою

$$\hat{Y} = WY. \quad (15)$$

Нехай тепер $Y_0 = (Y_{10}(y + \alpha x), Y_{20}(y - \alpha x))^T$ – довільний розв'язок, а

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1(y + \alpha x) \\ \varphi_2(y - \alpha x) \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1(y + \alpha x) \\ \psi_2(y - \alpha x) \end{pmatrix} \quad (16)$$

– фіксовані $(2 \times K)$ матричні розв'язки незбурених систем

$$L_0 Y_0 = 0, \quad L_0 \varphi = 0, \quad L_0^T \psi = 0. \quad (17)$$

Наслідком Твердження 1 є таке. Функція

$$Y := WY_0, \quad (18)$$

де W – оператор загальних бінарних перетворень (11) побудований за системами функцій φ, ψ (16)-(17) є загальним розв'язком нестационарної гіперболічної системи (1), з потенціалами u_1, u_2 вигляду

$$u_1 = -2\varphi_1 \Delta^{-1} \psi_2^T, \quad u_2 = 2\varphi_2 \Delta^{-1} \psi_1^T, \quad (19)$$

тобто

$$L = WL_0W^{-1} = \alpha \partial_y - \sigma_3 \partial_x + \begin{pmatrix} 0 & u_1 \\ u_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Зауваження 1. Оператор W (11) залежить від вибору сталої матриці C та від конкретної реалізації потенціалу $\Omega[\psi, \varphi]$ (10).

Прийнявши в формулах (9)-(10) $x_0 = x; y_0 = -\infty$, отримаємо

$$\Omega_1[\psi, \varphi] = \int_{-\infty}^y \left[\psi_1^T(s + \alpha x) \varphi_1(s + \alpha x) - \psi_2^T(s - \alpha x) \varphi_2(s - \alpha x) \right] ds. \quad (21)$$

Прийнявши $x_0 = x; y_0 = +\infty$, отримаємо

$$\Omega_2[\psi, \varphi] = \int_{+\infty}^y \left[\psi_1^T(s + \alpha x) \varphi_1(s + \alpha x) - \psi_2^T(s - \alpha x) \varphi_2(s - \alpha x) \right] ds. \quad (22)$$

Для Твердження 1 правильний такий наслідок.

Наслідок 1. *Правильними є такі співвідношення*

$$L = W_1 L_0 W_1^{-1} = W_2 L_0 W_2^{-1}, \quad (23)$$

де оператори бінарних перетворень W_1, W_2 у розгорнутій формі мають вигляд

$$W_1 = I - \begin{pmatrix} \varphi_1 \Delta_1^{-1} \int_{-\infty}^y \psi_1^\top \cdot ds & -\varphi_1 \Delta_1^{-1} \int_{-\infty}^y \psi_2^\top \cdot ds \\ \varphi_2 \Delta_1^{-1} \int_{-\infty}^y \psi_1^\top \cdot ds & -\varphi_2 \Delta_1^{-1} \int_{-\infty}^y \psi_2^\top \cdot ds \end{pmatrix}, \quad (24)$$

$$W_2 = I - \begin{pmatrix} \varphi_1 \Delta_2^{-1} \int_{+\infty}^y \psi_1^\top \cdot ds & -\varphi_1 \Delta_2^{-1} \int_{+\infty}^y \psi_2^\top \cdot ds \\ \varphi_2 \Delta_2^{-1} \int_{+\infty}^y \psi_1^\top \cdot ds & -\varphi_2 \Delta_2^{-1} \int_{+\infty}^y \psi_2^\top \cdot ds \end{pmatrix}, \quad (25)$$

де

$$\Delta_1(\tau + \alpha x, z - \alpha x) := C_1 + \int_{-\infty}^{\tau} \psi_1^\top \varphi_1(s + \alpha x) ds - \int_{-\infty}^z \psi_2^\top \varphi_2(s - \alpha x) ds,$$

$$\Delta_2(\tau + \alpha x, z - \alpha x) := C_2 + \int_{+\infty}^{\tau} \psi_1^\top \varphi_1(s + \alpha x) ds - \int_{+\infty}^z \psi_2^\top \varphi_2(s - \alpha x) ds;$$

$$\Delta_1(y + \alpha x, y - \alpha x) := \Delta_1 = C_1 + \Omega_1[\psi, \varphi], \quad \Delta_2(y + \alpha x, y - \alpha x) := \Delta_2 = C_2 + \Omega_2[\psi, \varphi].$$

Внаслідок рівності $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ стали C_1 і C_2 зв'язані співвідношенням

$$C_2 = C_1 - \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\psi_1^\top(s + \alpha x) \varphi_1(s + \alpha x) - \psi_2^\top(s - \alpha x) \varphi_2(s - \alpha x) \right] ds. \quad (26)$$

3. Основна частина.

3.1. Метод бінарних перетворень. Ми будемо оператор розсіяння S (2) у вигляді

$$S = \widehat{W}_2^{-1} \widehat{W}_1, \quad (27)$$

де $\widehat{W}_1, \widehat{W}_2$ - пара спеціальних операторів перетворень, які пов'язують асимптотики $a(x, y), b(x, y)$ (див. формули (4)) з розв'язком $Y(x, y)$ системи Дірака (1)

$$Y = \widehat{W}_1 a, \quad (28)$$

$$Y = \widehat{W}_2 b. \quad (29)$$

Нагадаємо, що оператор S (27) діє в просторі розв'язків незбуреної системи (5) інваріантно (є автоперетворенням Беклунда-Дарбу)

$$[S, L_0] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{W}_1 L_0 \widehat{W}_1^{-1} = \widehat{W}_2 L_0 \widehat{W}_2^{-1} = L. \quad (30)$$

Зауважимо, що операторів перетворень є безліч. Наприклад, якщо

$$W L_0 W^{-1} = L, \quad (31)$$

то і $(WA) L_0 (WA)^{-1} = L$, де оператор A є довільним автоперетворенням незбуреного оператора L_0

$$A L_0 A^{-1} = L_0 \quad ([A, L_0] = 0).$$

Для побудови спеціальних операторів перетворень (28), (29) ми використовуємо загальні бінарні перетворення Розділу 2, а саме, знайдені там оператори W_1, W_2 (24), (25).

За попереднім зауваженням (див. формулу (35)) ми визначаємо оператори $\widehat{W}_1, \widehat{W}_2$ у формі

$$\widehat{W}_1 := W_1 S_1, \quad \widehat{W}_2 := W_2 S_2, \quad (32)$$

де оператори автоперетворень S_1 і S_2 знаходять з асимптотичних умов

$$\begin{aligned} (\widehat{W}_1 a)_1 &= (W_1 S_1 a)_1 \xrightarrow[y \rightarrow -\infty]{y+\alpha x = \text{const}} a_1(y + \alpha x), \\ (\widehat{W}_1 a)_2 &= (W_1 S_1 a)_2 \xrightarrow[y \rightarrow -\infty]{y-\alpha x = \text{const}} a_2(y - \alpha x), \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} (\widehat{W}_2 b)_1 &= (W_2 S_2 b)_1 \xrightarrow[y \rightarrow +\infty]{y+\alpha x = \text{const}} b_1(y + \alpha x), \\ (\widehat{W}_2 b)_2 &= (W_2 S_2 b)_2 \xrightarrow[y \rightarrow +\infty]{y-\alpha x = \text{const}} b_2(y - \alpha x). \end{aligned} \quad (34)$$

Розпишемо умови (33) у явному вигляді

$$\begin{aligned} (W_1 S_1 a)_1 &= \{(S_1)_{11} a_1 + (S_1)_{12} a_2\} (y + \alpha x) - \varphi_1(y + \alpha x) \Delta^{-1} \int_{-\infty}^y \psi_1^T \times \\ &\quad \times \{(S_1)_{11} a_1 + (S_1)_{12} a_2\} (s + \alpha x) ds + \varphi_1(y + \alpha x) \Delta^{-1} \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^y \psi_2^T \{(S_1)_{21} a_1 + (S_1)_{22} a_2\} (s - \alpha x) ds \xrightarrow[y \rightarrow -\infty]{y+\alpha x = \text{const}} \\ &\xrightarrow[y \rightarrow -\infty]{y+\alpha x = \text{const}} \{(S_1)_{11} a_1 + (S_1)_{12} a_2\} (y + \alpha x) - \varphi_1(y + \alpha x) \Delta^{-1} (y + \alpha x, -\infty) \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^y \psi_1^T \{(S_1)_{11} a_1 + (S_1)_{12} a_2\} (s + \alpha x) ds = a_1(y + \alpha x). \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} (W_1 S_1 a)_2 &= \{(S_1)_{21} a_1 + (S_1)_{22} a_2\} (y - \alpha x) - \varphi_2(y - \alpha x) \Delta^{-1} \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^y \psi_1^T \{(S_1)_{11} a_1 + (S_1)_{12} a_2\} (s + \alpha x) ds + \varphi_2(y - \alpha x) \Delta^{-1} \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^y \psi_2^T \{(S_1)_{21} a_1 + (S_1)_{22} a_2\} (s - \alpha x) ds \xrightarrow[y \rightarrow -\infty]{y-\alpha x = \text{const}} \\ &\xrightarrow[y \rightarrow -\infty]{y-\alpha x = \text{const}} \{(S_1)_{21} a_1 + (S_1)_{22} a_2\} (y - \alpha x) + \varphi_2(y - \alpha x) \Delta^{-1} (-\infty, y - \alpha x) \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^y \psi_1^T \{(S_1)_{21} a_1 + (S_1)_{22} a_2\} (s - \alpha x) ds = a_2(y - \alpha x). \end{aligned} \quad (36)$$

З умов (35) та (36) отримуємо таку систему для елементів оператора S_1 :

$$\begin{cases} \left(I - \varphi_1(y + \alpha x) \Delta^{-1} (y + \alpha x, -\infty) \int_{-\infty}^y \psi_1^T \cdot ds \right) (S_1)_{11} a_1(y + \alpha x) = a_1(y + \alpha x), \\ \left(I - \varphi_1(y + \alpha x) \Delta^{-1} (y + \alpha x, -\infty) \int_{-\infty}^y \psi_1^T \cdot ds \right) (S_1)_{12} a_2(y - \alpha x) = 0, \\ \left(I - \varphi_2(y - \alpha x) \Delta^{-1} (-\infty, y - \alpha x) \int_{-\infty}^y \psi_2^T \cdot ds \right) (S_1)_{21} a_1(y + \alpha x) = 0, \\ \left(I + \varphi_2(y - \alpha x) \Delta^{-1} (-\infty, y - \alpha x) \int_{-\infty}^y \psi_2^T \cdot ds \right) (S_1)_{22} a_2(y - \alpha x) = a_2(y - \alpha x). \end{cases} \quad (37)$$

Використавши теорему про бінарні перетворення інтегродиференціального оператора [11], знаходимо явний вигляд оператора S_1

$$S_1 = I + \begin{pmatrix} \varphi_1 \int_{-\infty}^y \Delta^{-1}(s + \alpha x, -\infty) \psi_1^T \cdot ds; & 0 \\ 0; & -\varphi_2 \int_{-\infty}^y \Delta^{-1}(-\infty, s - \alpha x) \psi_2^T \cdot ds \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Аналогічно знаходимо оператор S_2

$$S_2 = I + \begin{pmatrix} \varphi_1 \int_{+\infty}^y \Delta^{-1}(s + \alpha x, +\infty) \psi_1^T \cdot ds; & 0 \\ 0; & -\varphi_2 \int_{+\infty}^y \Delta^{-1}(+\infty, s - \alpha x) \psi_2^T \cdot ds \end{pmatrix}. \quad (39)$$

З формул (32) отримуємо такі оператори перетворень $\widehat{W}_1, \widehat{W}_2$:

$$\widehat{W}_1 = I + \begin{pmatrix} (\widehat{W}_1)_{11} & (\widehat{W}_1)_{12} \\ (\widehat{W}_1)_{21} & (\widehat{W}_1)_{22} \end{pmatrix}, \quad (40)$$

де

$$\begin{aligned} (\widehat{W}_1)_{11} &= -\varphi_1 \Delta^{-1} \left(\int_{-\infty}^y \psi_2^T \varphi_2 ds \right) \int_{-\infty}^y \Delta^{-1}(s + \alpha x, -\infty) \psi_1^T \cdot ds, \\ (\widehat{W}_1)_{12} &= \varphi_1 \Delta^{-1} \Delta(-\infty, y - \alpha x) \int_{-\infty}^y \Delta^{-1}(-\infty, s - \alpha x) \psi_2^T \cdot ds, \\ (\widehat{W}_1)_{21} &= -\varphi_2 \Delta^{-1} \Delta(y + \alpha x, -\infty) \int_{-\infty}^y \Delta^{-1}(s + \alpha x, -\infty) \psi_1^T \cdot ds, \\ (\widehat{W}_1)_{22} &= -\varphi_2 \Delta^{-1} \left(\int_{-\infty}^y \psi_1^T \varphi_1 ds \right) \int_{-\infty}^y \Delta^{-1}(-\infty, s - \alpha x) \psi_2^T \cdot ds. \\ \widehat{W}_2 &= I + \begin{pmatrix} (\widehat{W}_2)_{11} & (\widehat{W}_2)_{12} \\ (\widehat{W}_2)_{21} & (\widehat{W}_2)_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (41)$$

Тут

$$\begin{aligned} (\widehat{W}_2)_{11} &= -\varphi_1 \Delta^{-1} \left(\int_{+\infty}^y \psi_2^T \varphi_2 ds \right) \int_{+\infty}^y \Delta^{-1}(s + \alpha x, +\infty) \psi_1^T \cdot ds, \\ (\widehat{W}_2)_{12} &= \varphi_1 \Delta^{-1} \Delta(+\infty, y - \alpha x) \int_{+\infty}^y \Delta^{-1}(+\infty, s - \alpha x) \psi_2^T \cdot ds, \\ (\widehat{W}_2)_{21} &= -\varphi_2 \Delta^{-1} \Delta(y + \alpha x, +\infty) \int_{+\infty}^y \Delta^{-1}(s + \alpha x, +\infty) \psi_1^T \cdot ds, \end{aligned}$$

$$(\widehat{W}_2)_{22} = -\varphi_2 \Delta^{-1} \left(\int_{+\infty}^y \psi_1^T \varphi_1 ds \right) \int_{+\infty}^y \Delta^{-1}(+\infty, s - \alpha x) \psi_2^T \cdot ds.$$

Безпосередньо з факторизації (27) знаходимо явний вигляд операторів S та S^{-1}

$$S = I + \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix}, \quad (42)$$

де

$$\begin{aligned} F_{11} &= -\varphi_1 \Delta^{-1}(y + \alpha x, +\infty) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2^T \varphi_2 ds \right) \int_{-\infty}^y \Delta^{-1}(s + \alpha x, -\infty) \psi_1^T \cdot ds, \\ F_{12} &= \varphi_1 \Delta^{-1}(y + \alpha x, +\infty) \Delta(-\infty, +\infty) \int_{-\infty}^y \Delta^{-1}(-\infty, s - \alpha x) \psi_2^T \cdot ds, \\ F_{21} &= -\varphi_2 \Delta^{-1}(+\infty, y - \alpha x) \Delta(+\infty, -\infty) \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^{-1}(s + \alpha x, -\infty) \psi_1^T \cdot ds, \\ F_{22} &= -\varphi_2 \Delta^{-1}(+\infty, y - \alpha x) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^T \varphi_1 ds \right) \int_{-\infty}^y \Delta^{-1}(-\infty, s - \alpha x) \psi_2^T \cdot ds. \end{aligned} \quad (43)$$

$$S^{-1} = I + \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Тут

$$\begin{aligned} G_{11} &= \varphi_1 \Delta^{-1}(y + \alpha x, -\infty) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2^T \varphi_2 ds \right) \int_{+\infty}^y \Delta^{-1}(s + \alpha x, +\infty) \psi_1^T \cdot ds, \\ G_{12} &= -\varphi_1 \Delta^{-1}(y + \alpha x, -\infty) \Delta(+\infty, -\infty) \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^{-1}(+\infty, s - \alpha x) \psi_2^T \cdot ds, \\ G_{21} &= \varphi_2 \Delta^{-1}(-\infty, y - \alpha x) \Delta(-\infty, +\infty) \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^{-1}(s + \alpha x, +\infty) \psi_1^T \cdot ds, \\ G_{22} &= \varphi_2 \Delta^{-1}(-\infty, y - \alpha x) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^T \varphi_1 ds \right) \int_{+\infty}^y \Delta^{-1}(+\infty, s - \alpha x) \psi_2^T \cdot ds. \end{aligned} \quad (45)$$

3.2. Метод оберненої задачі розсіяння. Коефіцієнти (потенціали) $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$ системи Дірака (1) однозначно визначають даними розсіяння (парою операторів (F_{21}, G_{12}) або (F_{12}, G_{21})). Зокрема, у випадку вироджених ядер операторів

коефіцієнти $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$ можна знайти явно. Нехай ядра операторів F_{21} , G_{12} набувають вигляду

$$\begin{aligned} F_{21}(\eta - \alpha x, \xi + \alpha x) &= f_2(\eta - \alpha x) g_1^\top(\xi + \alpha x), \\ G_{12}(\eta + \alpha x, \xi - \alpha x) &= f_1(\eta + \alpha x) g_2^\top(\xi - \alpha x). \end{aligned} \quad (46)$$

Коефіцієнти u_1 , u_2 визначають за допомогою рівностей

$$u_1(x, y) = -2A_{+12}(x, y, \xi), \quad u_2(x, y) = 2A_{-21}(x, y, \xi), \quad (47)$$

де функції $A_{+12}(x, y, \xi)$, $A_{-21}(x, y, \xi)$ задовольняють системи рівнянь:

$$\begin{cases} A_{-11}(x, y, \xi) - \int_{-\infty}^y A_{+12}(x, y, \eta) F_{21}(\eta - \alpha x, \xi + \alpha x) d\eta = 0, & \xi \geq y, \\ A_{+12}(x, y, \xi) - \int_y^{+\infty} A_{-11}(x, y, \eta) G_{12}(\eta + \alpha x, \xi - \alpha x) d\eta = G_{12}(\eta - \alpha x, \xi + \alpha x), & \xi \leq y, \end{cases} \quad (48)$$

$$\begin{cases} A_{+22}(x, y, \xi) - \int_y^{+\infty} A_{-21}(x, y, \eta) G_{12}(\eta + \alpha x, \xi - \alpha x) d\eta = 0, & \xi \leq y, \\ A_{-21}(x, y, \xi) - \int_{-\infty}^y A_{+22}(x, y, \eta) F_{21}(\eta - \alpha x, \xi + \alpha x) d\eta = F_{21}(\eta - \alpha x, \xi + \alpha x), & \xi \geq y. \end{cases} \quad (49)$$

Системи (48)-(49), отримані в [1], є рівняннями типу Марченка-Гельфанда-Левітана і у випадку вироджених ядер (46) розв'язуються явно. Після нескладних технічних обчислень ми отримуємо розв'язки систем (48)-(49) у такому вигляді:

$$\begin{aligned} A_{-11}(x, y, \xi) &= f_1(y + \alpha x) \left[I - \left(\int_{-\infty}^y g_2^\top f_2(\tau - \alpha x) d\tau \right) \left(\int_y^{+\infty} g_1^\top f_1(\tau + \alpha x) d\tau \right) \right]^{-1} \times \\ &\times \left(\int_{-\infty}^y g_2^\top f_2(\tau - \alpha x) d\tau \right) g_1^\top(\xi + \alpha x), \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} A_{+12}(x, y, \xi) &= f_1(y + \alpha x) \left[I - \left(\int_{-\infty}^y g_2^\top f_2(\tau - \alpha x) d\tau \right) \left(\int_y^{+\infty} g_1^\top f_1(\tau + \alpha x) d\tau \right) \right]^{-1} \times \\ &\times g_2^\top(\xi - \alpha x), \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} A_{-21}(x, y, \xi) &= -f_2(y - \alpha x) \left[I - \left(\int_y^{+\infty} g_1^\top f_1(\tau + \alpha x) d\tau \right) \left(\int_{-\infty}^y g_2^\top f_2(\tau - \alpha x) d\tau \right) \right]^{-1} \times \\ &\times g_1^\top(\xi + \alpha x), \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} A_{+22}(x, y, \xi) &= -f_2(y - \alpha x) \left[I - \left(\int_y^{+\infty} g_1^\top f_1(\tau + \alpha x) d\tau \right) \left(\int_{-\infty}^y g_2^\top f_2(\tau - \alpha x) d\tau \right) \right]^{-1} \times \\ &\times \left(\int_y^{+\infty} g_1^\top f_1(\tau + \alpha x) d\tau \right) g_2^\top(\xi - \alpha x). \end{aligned} \quad (53)$$

З рівності (47) одержимо зображення для потенціалів u_1, u_2

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= -2f_1(y + \alpha x) \left[I - \left(\int_{-\infty}^y g_2^\top f_2(\tau - \alpha x) d\tau \right) \left(\int_y^{+\infty} g_1^\top f_1(\tau + \alpha x) d\tau \right) \right]^{-1} \times \\ &\quad \times g_2^\top(y - \alpha x), \\ u_2(x, y) &= -2f_2(y - \alpha x) \left[I - \left(\int_y^{+\infty} g_1^\top f_1(\tau + \alpha x) d\tau \right) \left(\int_{-\infty}^y g_2^\top f_2(\tau - \alpha x) d\tau \right) \right]^{-1} \times \\ &\quad \times g_1^\top(y + \alpha x). \end{aligned} \quad (54)$$

3.3. Еквівалентність результатів, отриманих двома методами. Нехай у формулі (26) C_1 – довільна невикористана стала матриця розмірності $(K \times K)$.

Зробимо заміну функцій $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ на f_1, f_2, g_1, g_2 так, щоб виконувалась рівність відповідних ядер (43), (45) та (46).

$$\begin{aligned} f_2(\eta - \alpha x) &= -\varphi_2(\eta - \alpha x) \Delta^{-1}(+\infty, \eta - \alpha x) \Delta(+\infty, -\infty), \\ g_1^\top(\xi + \alpha x) &= \Delta^{-1}(\xi + \alpha x, -\infty) \psi_1^\top(\xi + \alpha x), \\ f_1(\eta + \alpha x) &= -\varphi_1(\eta + \alpha x) \Delta^{-1}(\eta + \alpha x, -\infty) \Delta(+\infty, -\infty), \\ g_2^\top(\xi - \alpha x) &= \Delta^{-1}(+\infty, \xi - \alpha x) \psi_2^\top(\xi - \alpha x). \end{aligned} \quad (55)$$

Правильним є таке твердження.

Твердження 2. Після заміни змінних (55) потенціали u_1, u_2 (19) збігаються з відповідними потенціалами u_1, u_2 (54), отриманими на підставі рівнянь Марченка-Гельфанда-Левітана.

Доведення. Доведення проводимо шляхом безпосередньої перевірки. □

4. Закінчення. Теорію операторів загальних бінарних перетворень W [2-4] розробляли для інтегрування нелінійних рівнянь математичної фізики, які допускають диференціальні та інтегродиференціальні зображення Лакса-Захарова-Шабата (див., наприклад, [8-10]). У цій праці, а також у [5] ми продемонстрували як оператори перетворень (і оператори розсіяння) оберненої задачі можна отримати, враховуючи теорію загальних бінарних перетворень.

Зауважимо, що точні розв'язки нелінійних рівнянь Лакса, які можна отримати за допомогою рівнянь оберненої задачі типу Марченка-Гельфанда-Левітана, можна також отримати і за допомогою загальних бінарних перетворень, позаяк відповідні оператори (32) відрізняються тільки інваріантним множником (автоперетворенням незбуреної системи).

Зазначимо також, що, зробивши в зображеннях (40)-(41) відповідну заміну змінних під знаками інтегральних операторів, неважко перейти до зображення $\widehat{W}_1, \widehat{W}_2$ як інтегральних вольтерівських операторів за змінною x . У цьому разі зображення розв'язку $Y(x, y)$ системи Дірака (1) у вигляді (28)-(29) будуть автоматично задовольняти асимптотичні умови (3), відповідно.

Якщо на розв'язки незбурених систем φ, ψ (6)-(7) накласти допустиму редукцію $\psi = \bar{\varphi}$, то оператор Дірака L (1) з потенціалами (19) (коли вибрати як сталу матрицю C_1 довільну ермітову ($C_1^* = C_1$)) буде косоермітовим ($L^* := \overline{L^\top} = -L$), $u_2(x, y) =$

$-\bar{u}_1(x, y)$. В цьому випадку з формул (42)-(44) неважко отримати, що оператори S і S^{-1} задовольняють умову унітарності $SS^* = I$ ($S^* = S^{-1}$).

Зауважимо також, що при $\alpha \in \mathbb{R}$ та при $\alpha \in i\mathbb{R}$ за відповідної лінійної еволюції за змінною $t \in \mathbb{R}$ розв'язків $\varphi_1(y + \alpha x; t)$, $\psi_1(y + \alpha x; t)$, $\varphi_2(y - \alpha x; t)$, $\psi_2(y - \alpha x; t)$ потенціали (19) та (54) задовольняють різні типи нелінійних систем Деві-Стюардсона DS-1, DS-2 (див., наприклад, [3,13]).

Ми плануємо розповсюдити метод цієї статті на інші задачі розсіяння, зокрема для загальної гіперболічної системи рівнянь [6], яка тісно пов'язана з системою нелінійної взаємодії n -хвиль [12].

1. *Нижник Л.П.* Обратная нестационарная задача рассеяния. / *Нижник Л.П.* – К., 1973. – 182 с.
2. *Sydorenko Yu.M.* Factorization of matrix differential operators and Darboux-like transformations / *Sydorenko Yu.M.* // *Mat. studii.* – 2003. – Vol. 19, №2. – P. 181-192.
3. *Сидоренко Ю.М.* Бінарні перетворення і $(2+1)$ -вимірні інтегровні системи / *Сидоренко Ю.М.* // *Укр. мат. журн.* – 2002. – Т. 54, №11. – С. 1531-1550.
4. *Sydorenko Yu.* Generalized Binary Darboux-like Theorem for Constrained Kadomtsev-Petviashvili (cKP) Flows / *Sydorenko Yu.* // *Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine.* – 2004. – Vol. 50, Part 1. – P. 470-477.
5. *Починайко М.Д.* Побудова операторів розсіяння методом бінарних перетворень Дарбу / *Починайко М.Д., Сидоренко Ю.М.* // *Укр. мат. журнал* – 2006. – Т. 58, №8. – С. 1097-1115.
6. *Нижник Л.П.* Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений / *Нижник Л.П.* – К., 1991.
7. *Pochynayko M.D.* Darboux transformations and scattering operator for nonstationary system of Dirac equations / *Pochynayko M.D., Sydorenko Yu.M.* // *Мат. студії.* – 2006. – Т. 26, №1. – С. 86-90.
8. *Сидоренко Ю.М.* Інтегрування нелінійних просторово-двовимірних рівнянь Гейзенберга / *Сидоренко Ю.М., Беркела Ю.Ю.* // *Мат. студії.* – 2002. – Т. 18, №1. – С. 57-68.
9. *Починайко М.Д.* Інтегрування деяких $(2+1)$ -вимірних інтегровних систем методом оберненої задачі розсіяння та бінарних перетворень Дарбу / *Починайко М.Д., Сидоренко Ю.М.* // *Мат. студії.* – 2003. – Т. 20, №2. – С. 119-132.
10. *Беркела Ю.* Векторно-матричні узагальнення бігамільтонових динамічних систем та їх інтегрування / *Беркела Ю., Сидоренко Ю.* // *Мат. студії.* – 2005. – Т. 23, №1. – С. 31-51.
11. *Сидоренко Ю.М.* Бінарні перетворення просторово-двовимірних інтегродиференціальних операторів і рівнянь Лакса / *Сидоренко Ю.М., Чварталцький О.І.* // *Вісн. Київ. ун-ту. Серія мат. та мех.* – 2009. – Вип. 22. – С. 32-35.
12. *Солитоны.* Под ред. *Булафа Р., Кодри Ф.* – М., 1983.
13. *Самойленко В.Г.* Ієрархія матричних рівнянь Бюргерса і інтегровні редукції в системі Деві-Стюардсона / *Самойленко В.Г., Сидоренко Ю.М.* // *Укр. мат. журн.* – 1998. – Т. 50, №2. – С. 252-264.

A CONSTRUCTIVE METHOD OF FINDING A SCATTERING OPERATOR FOR NON-STATIONARY HYPERBOLIC SYSTEM OF EQUATIONS

Yuriy SYDORENKO

*Ivan Franko National University of L'viv,
79000 L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: y_sydorenko@franko.lviv.ua*

A constructive method of finding operators of transformations and scattering in case of the degenerate scattering data is proposed. This method is based on binary Darboux-like transformations for non-stationary Dirac system. A connection between the results obtained in this work and the results in the inverse scattering problem obtained by L. Nizhnik is found.

Key words: binary Darboux transformations, scattering operator, system of Dirac Equations.

КОНСТРУКТИВНЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ОПЕРАТОРА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Юрий СИДОРЕНКО

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000 Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: y_sydorenko@franko.lviv.ua*

Предложено конструктивный метод построения операторов преобразования и рассеяния в случае вырожденных данных рассеяния, который базируется на бинарных преобразованиях типа Дарбу для нестационарной системы Дирака. Установлено связь между результатами этой работы и результатами Л. Нижника по теории обратных задач рассеяния.

Ключевые слова: бинарные преобразования Дарбу, оператор рассеяния, система Дирака.

Стаття надійшла до редколегії 01.11.2010

Прийнята до друку 22.12.2010

УДК 517.547

DEFICIENCIES OF MEROMORPHIC FUNCTIONS IN A PUNCTURED PLANE

Ostap STASHYSHYN

*Ivan Franko National University of L'viv,
79000 L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: ostap.stashyshyn@gmail.com*

Let f be a meromorphic function defined in the punctured plane $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. In this paper we study the problem of possible deficient values and magnitudes of appropriate defects of meromorphic functions in the punctured plane $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. The definition of the deficiency for meromorphic function in the punctured plane is given. The certain relationship that concerns deficiencies of meromorphic function f is established. Nevanlinna problem for meromorphic functions in the punctured plane is considered.

Key words: deficiency, deficient value, Nevanlinna problem, couple of veritable orders, Nevanlinna characteristic.

1. Introduction. Extensions of Nevanlinna theory to annuli have been made by many authors [3], [5], [7]–[13]. The main tools the authors used were a lemma on index of meromorphic functions along a circle [3], [5], a decomposition lemma due to G. Valiron [11], and the argument principle. In [5] an approach was given which allows to introduce a one-parameter Nevanlinna characteristic and apply Fourier series methods to the functions meromorphic in the annulus $A_r = \{z : 1/r < |z| < r\}$, $1 < r \leq +\infty$. The theory of meromorphic functions on annuli is more complicated than those in the disks. It is natural to consider the meromorphic functions in the annulus $A_{\frac{1}{\tau}r} = \{z : \frac{1}{\tau} < |z| < r\}$, $\tau \geq 1$, $r \geq 1$. In [3], a two-parameter characteristic $T(\tau, r; f)$ was introduced for meromorphic function f in such annulus, which gives a possibility to describe the behavior of such function at approaching to the inner and outer boundary circles of the annulus $A_{\frac{1}{\tau}r}$. In this paper, the meromorphic function f in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ with $T(\tau, r; f)$ and couple of veritable orders is considered. In [2] it was established that if for a meromorphic function f the set

$$K(T) = \{(\alpha, \beta) : \exists(\tau_0, r_0) \quad \forall(\tau, r) \quad \tau > \tau_0, \quad r > r_0 : T(\tau, r; f) \leq \tau^\alpha + r^\beta\}$$

is nonempty, then this set is a quadrant. A vertex of this quadrant is denoted by (ρ_1, ρ_2) and is called a couple of veritable orders of f .

In the direction of the development of Nevanlinna theory for meromorphic in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ function f , the question appears about a deficiency of such function. In this paper a deficiency of f is introduced. It is studied the problem of possible deficient values and magnitudes of appropriate defects of f , and connections between a couple of veritable orders of such function and possible deficient values. Also Nevanlinna problem for meromorphic functions in the punctured plane is considered.

Let f be a non-constant meromorphic function in the complex plane, and

$$K(f) = \lim_{r \rightarrow \infty} \sup \frac{N(r, 0, f) + N(r, \infty, f)}{T(r, f)},$$

where the standard notations from Nevanlinna theory are used. The number $K(f)$ was introduced by R. Nevanlinna. He posed the problem of finding the greatest lower bound of $K(f)$ for functions of a given order ρ . The following Theorem A answers this question for $0 \leq \rho < 1$.

Theorem A [1]. *Let $f(z)$ be a meromorphic function of order ρ , $0 \leq \rho < 1$. Then*

$$\begin{aligned} K(f) &\geq 1, & 0 \leq \rho \leq 1/2 \\ K(f) &\geq \sin \pi \rho, & 1/2 \leq \rho < 1. \end{aligned}$$

These inequalities are best possible.

A variant of Theorem A is showed in this paper for meromorphic function defined in the punctured plane $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ with couple of veritable orders (ρ_1, ρ_2) [2], where $0 \leq \rho_1 < 1$, $0 \leq \rho_2 < 1$.

2. Definitions and notations. Let f be a meromorphic function in $A_{\frac{1}{\tau}r} = \{z : \frac{1}{\tau} < |z| < r\}$, $\tau \geq 1$, $r \geq 1$. Denote

$$m(\tau, r; f) = m\left(\frac{1}{\tau}, f\right) + m(r, f) - 2m(1, f),$$

where $m(t, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(te^{i\theta})| d\theta$.

Definition 1. [3]. *The function*

$$T(\tau, r; f) = N(\tau, r; f) + m(\tau, r; f) + c_f \log \frac{r}{\tau}, \quad \tau \geq 1, \quad r \geq 1,$$

where $N(\tau, r; f) = \int_1^\tau \frac{n(t, 1; f)}{t} dt + \int_1^r \frac{n(1, t; f)}{t} dt + n(T, f) \log \sqrt{\tau r}$, T is the unit circle, $n(1/\tau, r; f)$ is the number of poles of f in $A_{\frac{1}{\tau}r}$, $n(T, f)$ is the number of poles of f on T , $c_f = \frac{1}{2\pi} \int_{E_f^+} \operatorname{Im} \left(\frac{f'}{f} dz \right) + \frac{1}{4\pi} \int_{E_f^0} \operatorname{Im} \left(\frac{f'}{f} dz \right)$, $E_f^+ = \{z \in T : |f(z)| > 1\}$,

$E_f^0 = \{z \in T : |f(z)| = 1\}$, is called the Nevanlinna characteristic of f .

By Theorem 2 [2] the function $T(\tau, r; f)$ has a couple of veritable orders.

Definition 2. *Let $f(z)$ be a meromorphic function in the punctured plane $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. A couple of veritable orders of f is called the couple of veritable orders of $T(\tau, r; f)$ [2].*

Definition 3. Let $f(z)$ be a non-constant meromorphic function in the punctured plane $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Denote

$$\delta_0(a, f) = 1 - \lim_{\substack{\tau \rightarrow +\infty \\ r \rightarrow +\infty}} \frac{N\left(\tau, r; \frac{1}{f-a}\right)}{T(\tau, r; f)}$$

The value $\delta_0(a, f)$ is called the defect or deficiency of the function f for the value a . The value $\delta_0(a, f)$ is also defined at $a = \infty$ by taking f instead of $\frac{1}{f-a}$.

If there is no doubt as to which $f(z)$ is referred to, we write $N(\tau, r, a)$, $T(\tau, r)$ instead of $N(\tau, r; \frac{1}{f-a})$, $T(\tau, r; f)$ if a is finite, and $N(\tau, r, \infty)$ instead of $N(\tau, r; f)$.

3. Main results. Let $f(z)$ be a meromorphic function in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ with a couple of veritable orders (ρ_1, ρ_2) . We start with formulation of the following Theorem 1, which answers the following questions for $0 < \rho_1 < 1$, $0 < \rho_2 < 1$:

1. Let $\delta_0(0)$ and $\delta_0(\infty)$ be two real numbers: $0 \leq \delta_0(0) \leq 1$, $0 \leq \delta_0(\infty) \leq 1$. When can one find a meromorphic in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ function f with a couple of veritable orders (ρ_1, ρ_2) such that $\delta_0(0) = \delta_0(0, f)$, $\delta_0(\infty) = \delta_0(\infty, f)$?
2. Let $f(z)$ be a meromorphic function with couple of veritable orders (ρ_1, ρ_2) , where $0 < \rho_1 < 1$, $0 < \rho_2 < 1$, and such that $\delta_0(a) = \delta_0(a, f)$, $\delta_0(b) = \delta_0(b, f)$. What can one say about the possible values of the pair of numbers $\delta_0(a)$, $\delta_0(b)$?

Theorem 1. Let $f(z)$ be a meromorphic function in the punctured plane $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ with a couple of veritable orders (ρ_1, ρ_2) , where $0 < \rho_1 < 1$, $0 < \rho_2 < 1$. Let

$$u = 1 - \delta_0(0, f), \quad v = 1 - \delta_0(\infty, f).$$

I. Then, in addition to trivial inequalities

$$0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1, \tag{1}$$

u and v satisfy

$$\begin{cases} u^2 + v^2 - 2uv \cos \pi \rho_1 \geq \sin^2 \pi \rho_1 \\ u^2 + v^2 - 2uv \cos \pi \rho_2 \geq \sin^2 \pi \rho_2 \end{cases} \tag{2}$$

If $u < \min \{\cos \pi \rho_1; \cos \pi \rho_2\}$, then $v = 1$; if $v < \min \{\cos \pi \rho_1; \cos \pi \rho_2\}$, then $u = 1$. (3)

II. All values u, v compatible with these restrictions are actually possible.

Note that the equations

$$u^2 + v^2 - 2uv \cos \pi \rho_1 = \sin^2 \pi \rho_1, \quad u^2 + v^2 - 2uv \cos \pi \rho_2 = \sin^2 \pi \rho_2$$

in the uv -plane represent ellipses with symmetry axes $\{u = v\}$ and $\{u = -v\}$ that are inscribed in the square S defined by (1). These ellipses touch the lines $\{u = 1\}$ and $\{v = 1\}$ at the points $(1, \cos \pi \rho_1)$ and $(\cos \pi \rho_1, 1)$, $(1, \cos \pi \rho_2)$ and $(\cos \pi \rho_2, 1)$ respectively. If $0 < \rho_1 \leq \frac{1}{2}$ the first equation of (2) shows that the point (u, v) lies either on one of the sides $\{u = 1\}$, $\{v = 1\}$ of the square S or at the corner of this square cut off by the arc joining $(\cos \pi \rho_1, 1)$ to $(1, \cos \pi \rho_1)$. This set of (u, v) is denoted by $S_{\rho_1}^1$. If $\frac{1}{2} < \rho_1 < 1$ then the first equation of (2) divides S into two parts. The point (u, v) lies in the part of S which contains the sides $\{u = 1\}$, $\{v = 1\}$ of S . This set of (u, v) is denoted by $S_{\rho_1}^2$. The same considerations for ρ_2 and the second equation of (2), and consequently we have $S_{\rho_2}^1$ and $S_{\rho_2}^2$. Thus, Theorem 1 shows that the point (u, v) belongs to one of intersections

$S_{\rho_1}^1 \cap S_{\rho_2}^1, S_{\rho_1}^1 \cap S_{\rho_2}^2, S_{\rho_1}^2 \cap S_{\rho_2}^1, S_{\rho_1}^2 \cap S_{\rho_2}^2$ that is admissible depending on values ρ_1 and ρ_2 .

As $\rho_1 \rightarrow 0$, the first ellipse of (2) tends to a limit position which is the linear segment joining $(1, 1)$ and $(-1, -1)$. Similarly, as $\rho_1 \rightarrow 1$ the limit position is the segment joining $(-1, 1)$ and $(1, -1)$. The same for ρ_2 .

These facts suggest that Theorem 1 can be supplemented by the following propositions:

If $\rho_1 = 0$ and $0 \leq \rho_2 \leq 1$ or $\rho_2 = 0$ and $0 \leq \rho_1 \leq 1$ then the point (u, v) lies on one of sides $\{u = 1\}$ or $\{v = 1\}$. Every point of these sides is admissible.

If $\rho_1 = 1$ and $\rho_2 = 1$, the point (u, v) may be any point of the square S .

If $\rho_1 = 1$ and $0 < \rho_2 < 1$, the point (u, v) either belong to $S_{\rho_2}^1$ or $S_{\rho_2}^2$ depending on value ρ_2 . If $\rho_2 = 1$ and $0 < \rho_1 < 1$, the point (u, v) either belong to $S_{\rho_1}^1$ or $S_{\rho_1}^2$ depending on value ρ_1 .

To prove Theorem 1 we need the following Lemmas.

Lemma 1. *Let f be a meromorphic function in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ with a couple of finite veritable orders (ρ_1, ρ_2) , let $\{a_j\}$ and $\{b_k\}$ be the sequences of their zeros, $|a_j| \geq 1$, $|b_k| < 1$, and $\{c_j\}$, $\{d_k\}$ be the sequences of its poles, $|c_j| \geq 1$, $|d_k| < 1$. Let p_1, p_2, q_1 and q_2 be genera of the sequences $\{a_j\}$, $\{b_k\}$, $\{c_j\}$ and $\{d_k\}$ respectively. Then*

$$f(z) = z^m \exp(z^{-\nu_1} P(z)) \frac{\prod_{|b_k| < 1} E\left(\frac{b_k}{z}, p_1\right) \prod_{|a_j| \geq 1} E\left(\frac{z}{a_j}, p_2\right)}{\prod_{|d_k| < 1} E\left(\frac{d_k}{z}, q_1\right) \prod_{|c_j| \geq 1} E\left(\frac{z}{c_j}, q_2\right)}, \quad (4)$$

where $m \in \mathbb{Z}$, $\nu_1 \in \mathbb{Z}_+$, $P(z)$ is a polynomial, $\deg P(z) = \nu_1 + \nu_2$, $\nu_2 \in \mathbb{Z}_+$, and $\nu_1 \leq [\rho_1]$, $\nu_2 \leq [\rho_2]$, $E(z, p)$ is the Weierstrass elementary factor.

The genus of the sequence $\{a_j\}$ and respectively of $\{c_j\}$ is defined as usual. The genus of the sequence $\{b_k\}$ and respectively of $\{d_k\}$ is defined as the lowest non-negative integer p such that

$$\sum_k |b_k|^{p+1} < +\infty. \quad (5)$$

An important property of meromorphic in the punctured plane $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ function with a couple of veritable orders (ρ_1, ρ_2) , where both ρ_1 and ρ_2 are less than one is the following

Lemma 2. *Let*

$$f(z) = \frac{\prod_{|b_k| < 1} \left(1 - \frac{b_k}{z}\right) \prod_{|a_j| \geq 1} \left(1 - \frac{z}{a_j}\right)}{\prod_{|d_k| < 1} \left(1 - \frac{d_k}{z}\right) \prod_{|c_j| \geq 1} \left(1 - \frac{z}{c_j}\right)} \quad (6)$$

and

$$h(z) = \frac{\prod_{|b_k| < 1} \left(1 + \frac{|b_k|}{z}\right) \prod_{|a_j| \geq 1} \left(1 + \frac{z}{|a_j|}\right)}{\prod_{|d_k| < 1} \left(1 - \frac{|d_k|}{z}\right) \prod_{|c_j| \geq 1} \left(1 - \frac{z}{|c_j|}\right)} \quad (7)$$

The function $h(z)$ is called the function associated with f . Then

$$T(\tau, r; f) \leq T(\tau, r; h) + (c_f - c_h) \log \frac{\tau}{r}. \quad (8)$$

To prove Lemma 2 one can use the same idea as in the classical version [[4], p. 294-296, Lemma 4.4] but with two additional products, and Definition 1.

Lemma 3. Let $g(z)$ be a holomorphic function in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ without zeros and

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{T(\tau, 1; g)}{\tau^{\mu_1}} = 0 \quad \text{for some } \mu_1 > 0, \quad (9)$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{T(1, r; g)}{r^{\mu_2}} = 0 \quad \text{for some } \mu_2 > 0. \quad (10)$$

Then

$$g(z) = z^m \exp(z^{-\nu_1} P(z)), \quad (11)$$

where $m \in \mathbb{Z}$, $\nu_1 \in \mathbb{Z}_+$, $P(z)$ is a polynomial, $\deg P(z) = \nu_1 + \nu_2$, $\nu_2 \in \mathbb{Z}_+$, and $\nu_1 \leq [\mu_1]$, $\nu_2 \leq [\mu_2]$.

Proof. Let $m = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{g'(z)}{g(z)} dz$. Consider the function $G(z) = z^{-m} g(z)$. By virtue of ([5], Lemma 3.2) a branch of $\log G(z)$ is determined in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Considering the Laurent expansion of $\log G(z)$ with the coefficients $\{c_k\}$ we obtain

$$\begin{aligned} \log |G(z)| &= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (c_k r^k + \bar{c}_{-k} r^{-k}) e^{ik\theta}, \quad |z| = r \geq 1, \\ \frac{1}{2} (c_k r^k + \bar{c}_{-k} r^{-k}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |G(re^{i\theta})| e^{-ik\theta} d\theta, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \log |G(z)| &= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (c_{-k} \tau^k + \bar{c}_k \tau^{-k}) e^{-ik\theta}, \quad |z| = 1/\tau, \quad \tau \geq 1, \\ \frac{1}{2} (c_{-k} \tau^k + \bar{c}_k \tau^{-k}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |G(e^{i\theta}/\tau)| e^{ik\theta} d\theta. \end{aligned} \quad (13)$$

Since $|\log |G(z)|| \leq |\log |g(z)|| + |m| |\log |z||$, we get from (10), (12) as $r \rightarrow +\infty$ that $c_k = 0$ for $k \geq \mu_2$, and from (9), (13) as $\tau \rightarrow +\infty$ that $c_{-k} = 0$ for $k \geq \mu_1$. Therefore

$$\log G(z) = \sum_{k=0}^{\nu_2} c_k z^k + \sum_{k=1}^{\nu_1} c_{-k} z^{-k} = z^{-\nu_1} \sum_{k=-\nu_1}^{\nu_2} c_k z^{k+\nu_1} = z^{-\nu_1} P(z),$$

$\nu_1 \leq [\mu_1]$, $\nu_2 \leq [\mu_2]$, and $g(z) = z^m \exp(z^{-\nu_1} P(z))$. This completes the proof.

Theorem 2. A couple of veritable orders of the function

$$F(z) = \prod_{|b_k| < 1} E\left(\frac{b_k}{z}, p_1\right) \prod_{|a_j| \geq 1} E\left(\frac{z}{a_j}, p_2\right)$$

is equal to the couple of veritable orders of function $N(\tau, r, 0)$ termwise.

Proof. Let (ρ'_1, ρ'_2) be the couple of veritable orders of $N(\tau, r, 0)$ [[2], Lemma 2]. From the first fundamental theorem [[3], FFT] $N(\tau, r, 0) \leq T(\tau, r, F) + 4 \log 2 + C \cdot \log \frac{\tau}{r}$, where C is a constant depending on the function F , we have $\rho'_1 \leq \rho_1$ and $\rho'_2 \leq \rho_2$, where (ρ_1, ρ_2) is the couple of veritable orders of $F(z)$. As p_1 is the lowest integer number such that $\sum_k |b_k|^{p_1+1} < +\infty$ and p_2 is the lowest integer number such that $\sum_k |a_k|^{-p_2-1} < +\infty$, then $p_1 \leq \rho'_1 \leq p_1 + 1$ and $p_2 \leq \rho'_2 \leq p_2 + 1$. Using [[4], p. 78] one can get

$$\begin{aligned} \log M(r, F) &\leq \log M\left(r, \prod_{|b_k| < 1} E\left(\frac{b_k}{z}, p_1\right)\right) + \log M\left(r, \prod_{|a_k| \geq 1} E\left(\frac{z}{a_k}, p_2\right)\right) < \\ &< C(p_1) \int_r^\infty \frac{n(r/s, 1, 0; F)}{s^{p_1+1}} \frac{ds}{1+s} + C(p_2) \int_{1/r}^\infty \frac{n(1/rs, 0; F)}{s^{p_2+1}} \frac{ds}{1+s}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \log M\left(\frac{1}{\tau}, F\right) &\leq \log M\left(\frac{1}{\tau}, \prod_{|b_k| < 1} E\left(\frac{b_k}{z}, p_1\right)\right) + \log M\left(\frac{1}{\tau}, \prod_{|a_k| \geq 1} E\left(\frac{z}{a_k}, p_2\right)\right) < \\ &< C(p_1) \int_{1/\tau}^\infty \frac{n(1/\tau s, 1, 0; F)}{s^{p_1+1}} \frac{ds}{1+s} + C(p_2) \int_\tau^\infty \frac{n(1/s/\tau, 0; F)}{s^{p_2+1}} \frac{ds}{1+s}. \end{aligned} \quad (15)$$

Note that $\log M(r, F) = o(r^{p_2+1})$, $r \rightarrow \infty$ and $\log M(\frac{1}{\tau}, F) = o(\tau^{p_1+1})$, $\tau \rightarrow \infty$. Since the inequalities $\rho_1 \leq p_1 + 1$, $\rho_2 \leq p_2 + 1$ are valid, so if $\rho'_1 = p_1 + 1$ and $\rho'_2 = p_2 + 1$ then $\rho'_1 \geq \rho_1$ and $\rho'_2 \geq \rho_2$. Let now $\rho_1 < p_1 + 1$, $\rho_2 < p_2 + 1$. Then for any ρ''_1 , $\rho'_1 < \rho''_1 < p_1 + 1$ and for any ρ''_2 , $\rho'_2 < \rho''_2 < p_2 + 1$ the $n(1/t, 0; F) < C_2 r^{\rho''_2}$ and $n(1/t, 1, 0; F) < C_1 \tau^{\rho''_1}$ hold for all r and $\tau \geq 1$, where C_1, C_2 are some constants. From here and from (14), (15) we obtain $\log M(r, F) < C_3 r^{\rho''_2}$ and $\log M(\frac{1}{\tau}, F) < C_4 \tau^{\rho''_1}$. Hence $\rho_1 \leq \rho''_1$, $\rho_2 \leq \rho''_2$, and therefore $\rho_1 \leq \rho'_1$, $\rho_2 \leq \rho'_2$.

Proof of Lemma 1. Denote the function in the numerator of (4) by $F_1(z)$ and in the denominator by $F_2(z)$. Since $N(\tau, r; f) \leq T(\tau, r; f) - c_f \log \frac{\tau}{r}$ and $N(\tau, r; 1/f) \leq T(\tau, r; f) - c_{1/f} \log \frac{\tau}{r}$ the couples of veritable orders of $N(\tau, r; f)$ and $N(\tau, r; 1/f)$ do not exceed termwise the couple of veritable orders (ρ_1, ρ_2) . The same is true for the couple of veritable orders of $F_i(z)$, $i = 1, 2$, by the Theorem 2. Consider the zero-free holomorphic function $g(z) = \frac{f(z)F_2(z)}{F_1(z)}$. The function $g(z)$ satisfies the conditions of Lemma 3. By Lemma 3, the proof is completed.

Proof of part I of Theorem 1. Consider the associated function $h(z) = h_1(z)h_2(z)$, where

$$h_1(z) = \frac{\prod_{|b_k| < 1} \left(1 + \frac{|b_k|}{z}\right)}{\prod_{|d_k| < 1} \left(1 - \frac{|d_k|}{z}\right)} \quad \text{and} \quad h_2(z) = \frac{\prod_{|a_j| \geq 1} \left(1 + \frac{z}{|a_j|}\right)}{\prod_{|c_j| \geq 1} \left(1 - \frac{z}{|c_j|}\right)},$$

and start from the well-known representations

$$\log h_1(z) = z \int_1^\infty N(t, 1, 0) \frac{dt}{(zt+1)^2} + z \int_1^\infty N(t, 1, \infty) \frac{dt}{(zt-1)^2} \quad (16)$$

$$\log h_2(z) = z \int_1^\infty N(1, t, 0) \frac{dt}{(z+t)^2} + z \int_1^\infty N(1, t, \infty) \frac{dt}{(z-t)^2} \quad (17)$$

valid for $0 < \arg z < \pi$. It is sufficient to focus our attention on the values of r and τ for which, simultaneously

$$m(r, h) > 0, \quad m(r, 1/h) > 0 \quad (18)$$

$$m(1/\tau, h) > 0, \quad m(1/\tau, 1/h) > 0. \quad (19)$$

Assume that $\delta_0(0, f) > 0$, $\delta_0(\infty, f) > 0$. Using Lemma 2 we obtain the inequalities

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\tau \rightarrow +\infty \\ r \rightarrow +\infty}} \frac{T(\tau, r; f)}{N(\tau, r, f)} &\leq \lim_{\substack{\tau \rightarrow +\infty \\ r \rightarrow +\infty}} \left(\frac{T(\tau, r; h) + (c_f - c_h) \log \frac{\tau}{r}}{N(\tau, r, h)} \right) \leq \\ &\leq \lim_{\substack{\tau \rightarrow +\infty \\ r \rightarrow +\infty}} \frac{T(\tau, r; h)}{N(\tau, r, h)} + \overline{\lim}_{\substack{\tau \rightarrow +\infty \\ r \rightarrow +\infty}} \frac{(c_f - c_h) \log \frac{\tau}{r}}{N(\tau, r, h)}. \end{aligned}$$

In view of the fact that $\overline{\lim}_{\substack{\tau \rightarrow +\infty \\ r \rightarrow +\infty}} \frac{(c_f - c_h) \log \frac{\tau}{r}}{N(\tau, r, h)} = 0$, because the function h is the function

with couple of genera which equal zero, we obtain $\overline{\lim}_{\substack{\tau \rightarrow +\infty \\ r \rightarrow +\infty}} \frac{N(\tau, r; f)}{T(\tau, r; f)} \geq \overline{\lim}_{\substack{\tau \rightarrow +\infty \\ r \rightarrow +\infty}} \frac{N(\tau, r; h)}{T(\tau, r; h)}$.

Thus $\delta_0(0, h) > 0$ and the same is true for $\delta_0(\infty, h)$. Hence, inequalities (18), (19) are valid for all sufficiently large values of r and τ . The function $\log |h(re^{i\theta})|$ is an even function of θ decreasing when θ varies from 0 to π . Hence, in view of (18) $\log |h(r)| > 0$, $\log |h(-r)| < 0$, and there exists a number $\beta_1 = \beta_1(r)$, uniquely determined and such that $0 < \beta_1(r) < \pi$, $\log |h(re^{i\beta_1})| = 0$. The above considerations are also valid for $\log \left| h\left(\frac{e^{i\theta}}{\tau}\right) \right|$ with uniquely determined $\beta_2 = \beta_2(\tau)$. For sufficiently large values $r \geq 1$ and $\tau \geq 1$ using (16), (17) we have

$$\begin{aligned} m(r, h) &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\beta_1} \log |h_2(re^{i\theta})| d\theta + C_1 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_\delta^{\beta_1} \log |h_2(re^{i\theta})| d\theta + C_1 \leq \\ &\leq \int_1^\infty N(1, t, 0) P(t, r, \beta_1) dt + \int_1^\infty N(1, t, \infty) P(t, r, \pi - \beta_1) dt - \\ &- \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_1^\infty N(1, t, 0) P(t, r, \delta) dt - \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_1^\infty N(1, t, \infty) P(t, r, \pi - \delta) dt + C_1, \\ m(1/\tau, h) &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\beta_2} \log \left| h_1\left(\frac{e^{i\theta}}{\tau}\right) \right| d\theta + C_2 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_\delta^{\beta_2} \log \left| h_1\left(\frac{e^{i\theta}}{\tau}\right) \right| d\theta + C_2 \leq \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_1^\infty N(t, 1, 0) P(t, \tau, \beta_2) dt + \int_1^\infty N(t, 1, \infty) P(t, \tau, \pi - \beta_2) dt - \\ &- \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_1^\infty N(t, 1, \infty) P(t, \tau, \pi - \delta) dt - \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_1^\infty N(t, 1, 0) P(t, \tau, \delta) dt + C_2, \end{aligned} \quad (21)$$

where $P(t, s, \gamma) = \frac{1}{\pi} \frac{s \sin \gamma}{t^2 + 2ts \cos \gamma + r^2}$ and C_1, C_2 are constants that only depends on the function $h(z)$. The limits $\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_1^\infty N(1, t, 0) P(t, r, \delta) dt$, $\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_1^\infty N(t, 1, 0) P(t, \tau, \delta) dt$ are equal to zero. Using well-known properties of the Poisson integral for the half-plane [[4], p. 298] we have $\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_1^\infty N(1, t, \infty) P(t, r, \pi - \delta) dt = N(1, r, \infty)$,

$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_1^\infty N(t, 1, \infty) P(t, \tau, \pi - \delta) dt = N(\tau, 1, \infty)$. By Lemma 2,

$$T(\tau, 1) \leq \int_1^\infty N(t, 1, 0) P(t, \tau, \beta_2) dt + \int_1^\infty N(t, 1, \infty) P(t, \tau, \pi - \beta_2) dt + c_f \log \tau + C_1, \quad (22)$$

$$T(1, r) \leq \int_1^\infty N(1, t, 0) P(t, r, \beta_1) dt + \int_1^\infty N(1, t, \infty) P(t, r, \pi - \beta_1) dt + c_f \log \frac{1}{r} + C_2. \quad (23)$$

Let U, V denote two positive quantities such that $U > u = 1 - \delta_0(0, f)$, $V > v = 1 - \delta_0(\infty, f)$. The definition of deficiency (Definition 3) implies

$$N(t, r_1, 0) < UT(t, r_1), \quad N(t, r_1, \infty) < VT(t, r_1) \quad \text{for some fixed } r_1 > r_0, \quad (24)$$

$$N(\tau_1, s, 0) < UT(\tau_1, s), \quad N(\tau_1, s, \infty) < VT(\tau_1, s) \quad \text{for some fixed } \tau_1 > \tau_0. \quad (25)$$

Choose ε so that $0 < \varepsilon < \min\{\rho_1; \rho_2\}$, $\varepsilon + \max\{\rho_1; \rho_2\} < 1$. By Polya's Lemma [1, p. 237] there exists sequences $\{r_n\}$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = +\infty$) (depending on ε) and $\{\tau_m\}$ ($\lim_{m \rightarrow \infty} \tau_m = +\infty$) (depending on ε) such that

$$\begin{cases} \frac{T(t, r_1)}{t^{\rho_1 - \varepsilon}} \leq \frac{T(\tau_m, r_1)}{\tau_m^{\rho_1 - \varepsilon}}, & (\tau_0 \leq t \leq \tau_m), \\ \frac{T(t, r_1)}{t^{\rho_1 + \varepsilon}} \leq \frac{T(\tau_m, r_1)}{\tau_m^{\rho_1 + \varepsilon}}, & (\tau_m \leq t), \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases} \frac{T(\tau_1, s)}{s^{\rho_2 - \varepsilon}} \leq \frac{T(\tau_1, r_n)}{r_n^{\rho_2 - \varepsilon}}, & (r_0 \leq t \leq r_n), \\ \frac{T(\tau_1, s)}{s^{\rho_2 + \varepsilon}} \leq \frac{T(\tau_1, r_n)}{r_n^{\rho_2 + \varepsilon}}, & (r_n \leq t). \end{cases} \quad (27)$$

Using (24), (26) in (22), and (25), (27) in (23), we obtain

$$T(\tau_m, r_1) \leq UT(\tau_m, r_1) \left\{ \int_0^{\tau_m} \left(\frac{t}{\tau_m} \right)^{\rho_1 - \varepsilon} P(t, \tau_m, \beta_2) dt + \int_{\tau_m}^\infty \left(\frac{t}{\tau_m} \right)^{\rho_1 + \varepsilon} P(t, \tau_m, \beta_2) dt \right\} +$$

$$+VT(\tau_m, r_1) \left\{ \int_0^{\tau_m} \left(\frac{t}{\tau_m} \right)^{\rho_1 - \varepsilon} P(t, \tau_m, \pi - \beta_2) dt + \int_{\tau_m}^{\infty} \left(\frac{t}{\tau_m} \right)^{\rho_1 + \varepsilon} P(t, \tau_m, \pi - \beta_2) dt \right\} + \quad (28)$$

$$+ \eta_1(\tau_m) + T(1, r_1) + c_f \log \tau_m + C_1,$$

$$\eta_1(\tau_m) \leq \{N(\tau_0, 1, 0) + N(\tau_0, 1, \infty)\} \frac{\tau_m(\tau_0 - 1)}{(\tau_m - \tau_0)^2}.$$

$$T(\tau_1, r_n) \leq UT(\tau_1, r_n) \left\{ \int_0^{r_n} \left(\frac{t}{r_n} \right)^{\rho_2 - \varepsilon} P(t, r_n, \beta_1) dt + \int_{r_n}^{\infty} \left(\frac{t}{r_n} \right)^{\rho_2 + \varepsilon} P(t, r_n, \beta_1) dt \right\} +$$

$$+VT(\tau_1, r_n) \left\{ \int_0^{r_n} \left(\frac{t}{r_n} \right)^{\rho_2 - \varepsilon} P(t, r_n, \pi - \beta_1) dt + \int_{r_n}^{\infty} \left(\frac{t}{r_n} \right)^{\rho_2 + \varepsilon} P(t, r_n, \pi - \beta_1) dt \right\} + \quad (29)$$

$$+ \eta_2(r_n) + T(\tau_1, 1) + c_f \log \frac{1}{r_n} + C_2, \eta_2(r_n) \leq \{N(1, r_0, 0) + N(1, r_0, \infty)\} \frac{r_n(r_0 - 1)}{(r_n - r_0)^2}.$$

The following considerations are carried out only for (28), for (29) the considerations are much the same. Via the substitution $t = s\tau_m$ we obtain for $0 < \rho_1 - \varepsilon < \rho_1 + \varepsilon < 1$

$$\int_0^{\tau_m} \left(\frac{t}{\tau_m} \right)^{\rho_1 - \varepsilon} P(t, \tau_m, \beta_2) dt + \int_{\tau_m}^{\infty} \left(\frac{t}{\tau_m} \right)^{\rho_1 + \varepsilon} P(t, \tau_m, \beta_2) dt =$$

$$= \int_0^{\infty} s^{\rho_1 + \varepsilon} P(s, 1, \beta_2) ds + \int_0^1 (s^{\rho_1 - \varepsilon} - s^{\rho_1 + \varepsilon}) P(s, 1, \beta_2) ds. \quad (30)$$

It is well-known that $\int_0^{\infty} s^{\rho_1 + \varepsilon} P(s, 1, \beta_2) ds = \frac{\sin \beta_2(\rho_1 + \varepsilon)}{\sin \pi(\rho_1 + \varepsilon)}$. For given $\eta > 0$ and for $0 < \varepsilon < \varepsilon_0(\eta)$ we have $0 < \int_0^1 (s^{\rho_1 - \varepsilon} - s^{\rho_1 + \varepsilon}) P(s, 1, \beta_2) ds < \eta$. Hence and from (28) after division by $T(\tau_m, r_1)$ for $\varepsilon < \varepsilon_0(\eta)$ we obtain

$$1 \leq \sup_{0 \leq \gamma \leq \pi} \left\{ U \frac{\sin \gamma(\rho_1 + \varepsilon)}{\sin \pi(\rho_1 + \varepsilon)} + V \frac{\sin(\pi - \gamma)(\rho_1 + \varepsilon)}{\sin \pi(\rho_1 + \varepsilon)} \right\} +$$

$$+ (U + V)\eta + O\left(\frac{1}{\tau_m T(\tau_m, r_1)}\right) + \frac{c_f \log \tau_m}{T(\tau_m, r_1)}. \quad (31)$$

Similarly we obtain from (29)

$$1 \leq \sup_{0 \leq \sigma \leq \pi} \left\{ U \frac{\sin \sigma(\rho_2 + \varepsilon)}{\sin \pi(\rho_2 + \varepsilon)} + V \frac{\sin(\pi - \sigma)(\rho_2 + \varepsilon)}{\sin \pi(\rho_2 + \varepsilon)} \right\} +$$

$$+ (U + V)\eta + O\left(\frac{1}{r_n T(\tau_1, r_n)}\right) + \frac{c_f \log \frac{1}{r_n}}{T(\tau_1, r_n)}. \quad (32)$$

Let $n \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$ in (31), (32), and then make the proceeding to the limit $\varepsilon \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$, $U \rightarrow u$, $V \rightarrow v$ we can see that the deficiencies u and v satisfy the system of

inequalities

$$\begin{cases} \sin \pi \rho_1 \leq \sup_{0 \leq \gamma \leq \pi} \{u \sin \gamma \rho_1 + v \sin (\pi - \gamma) \rho_1\}, \\ \sin \pi \rho_2 \leq \sup_{0 \leq \sigma \leq \pi} \{u \sin \sigma \rho_2 + v \sin (\pi - \sigma) \rho_2\}. \end{cases}$$

Since $u \sin \gamma \rho_1 + v \sin (\pi - \gamma) \rho_1$ is a continuous function of γ , we can find a value of γ for which the sup is attained. For this γ ,

$$\sin \pi \rho_1 \leq u \sin \gamma \rho_1 + v \sin (\pi - \gamma) \rho_1 = (u - v \cos \pi \rho_1) \sin \gamma \rho_1 + v \sin \pi \rho_1 \cos \gamma \rho_1.$$

Hence, by Schwarz's inequality we get (2).

The immediate consequence of Theorem 1 is the following

Theorem 3. I. *Let f be a meromorphic function in the punctured plane $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ with a couple of veritable orders (ρ_1, ρ_2) , where $0 \leq \rho_1 \leq 1/2$ and $0 \leq \rho_2 \leq 1/2$. If $\delta_0(a, f) \geq 1 - \min \{\cos \pi \rho_1, \cos \pi \rho_2\}$ under the condition that either $0 \leq \rho_1 \leq 1/2$ and $0 < \rho_2 \leq 1/2$, or $0 \leq \rho_2 \leq 1/2$ and $0 < \rho_1 \leq 1/2$, then a is a unique deficiency of meromorphic function $f(z)$.*

II. *Let f be a meromorphic function in the punctured plane $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ with a couple of veritable orders (ρ_1, ρ_2) , where $0 \leq \rho_1 < 1/2$ and $0 \leq \rho_2 < 1/2$. If $\delta_0(a, f) > 0$ under the condition that either $\rho_1 = 0$, $0 \leq \rho_2 < 1/2$ or $\rho_2 = 0$, $0 \leq \rho_1 < 1/2$, then a is a unique deficient value of meromorphic function $f(z)$. In particular, meromorphic function with couple of veritable orders (ρ_1, ρ_2) , where at least either ρ_1 or ρ_2 is equal to zero, cannot have more than one deficient value.*

Proof. If $\delta_0(a, f) > 1 - \min \{\cos \pi \rho_1, \cos \pi \rho_2\}$ then the result of the theorem immediately follows from (3). If $0 \leq \rho_1 \leq 1/2$, $0 < \rho_2 \leq 1/2$ or $0 \leq \rho_2 \leq 1/2$, $0 < \rho_1 \leq 1/2$ and $\delta_0(a, f) = 1 - \min \{\cos \pi \rho_1, \cos \pi \rho_2\}$, this means that $u = \min \{\cos \pi \rho_1, \cos \pi \rho_2\}$ in Theorem 1. Without loss of generality let $u = \cos \pi \rho_1$, then from (2) it follows that $v = 1$ or $v \leq \cos 2\pi \rho_1$. In the last case from (3) we obtain that $u = 1$ because $\cos 2\pi \rho_1 < \cos \pi \rho_1$ when $0 < \rho_1 \leq 1/2$, this leads to the contradiction. Thus we should have $v = 1$.

Now we are interested in finding a lower-bound estimate of quantity

$$\overline{\lim}_{\substack{\tau \rightarrow +\infty \\ r \rightarrow +\infty}} \frac{N(\tau, r, 0; f) + N(\tau, r, \infty; f)}{T(\tau, r; f)},$$

that is to say to prove a variant of Theorem A for meromorphic functions in the punctured plane $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Thus, a slight modification the proof of Theorem 1 leads to

Theorem 4. *Let f be a meromorphic function in the punctured plane $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ with a couple of veritable orders (ρ_1, ρ_2) , where $0 \leq \rho_1 < 1$, $0 \leq \rho_2 < 1$. Then*

$$\overline{\lim}_{\substack{\tau \rightarrow +\infty \\ r \rightarrow +\infty}} \frac{N(\tau, r, 0; f) + N(\tau, r, \infty; f)}{T(\tau, r, f)} \geq$$

$$\geq \begin{cases} 1, & \text{if } \rho_1 = 0, \quad 0 \leq \rho_2 < 1, \\ & \text{or } \rho_2 = 0, \quad 0 \leq \rho_1 < 1, \\ \frac{1}{\min \left(\sup_{0 \leq \gamma \leq \pi} \frac{\sin \gamma \rho_1}{\sin \pi \rho_1}; \sup_{0 \leq \sigma \leq \pi} \frac{\sin \sigma \rho_2}{\sin \pi \rho_2} \right)}, & \text{if } 0 < \rho_1 < 1, \quad 0 < \rho_2 < 1. \end{cases} \quad (33)$$

The inequality above is best possible.

Proof. For the couple of veritable orders (ρ_1, ρ_2) such that $\rho_1 = 0, 0 \leq \rho_2 < 1$ or $\rho_2 = 0, 0 \leq \rho_1 < 1$, Theorem 4 follows from the fact that a function with a couple of veritable orders (ρ_1, ρ_2) , where at least either ρ_1 or ρ_2 is equal to zero has at most one deficient value, so that

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{\substack{\tau \rightarrow +\infty \\ r \rightarrow +\infty}} \frac{N(\tau, r, 0; f) + N(\tau, r, \infty; f)}{T(\tau, r, f)} \geq \\ & \geq \max \left\{ \overline{\lim}_{\substack{\tau \rightarrow +\infty \\ r \rightarrow +\infty}} \frac{N(\tau, r, 0; f)}{T(\tau, r, f)}, \quad \overline{\lim}_{\substack{\tau \rightarrow +\infty \\ r \rightarrow +\infty}} \frac{N(\tau, r, \infty; f)}{T(\tau, r, f)} \right\} = 1. \end{aligned}$$

In the sequel, $0 < \rho_1 < 1$ and $0 < \rho_2 < 1$. The (22) and (23) imply the following inequality

$$\begin{aligned} T(\tau, r, f) & \leq \int_1^\infty N(t, 1, 0) P(t, \tau, \beta_2) dt + \int_1^\infty N(t, 1, \infty) P(t, \tau, \pi - \beta_2) dt + \\ & + \int_1^\infty N(1, t, 0) P(t, r, \beta_1) dt + \int_1^\infty N(1, t, \infty) P(t, r, \pi - \beta_1) dt + c_f \log \frac{\tau}{r} + C_1 + C_2, \end{aligned} \quad (34)$$

which is valid for all sufficiently large values $r \geq 1, \tau \geq 1$. If $\lambda_1 = \lambda_1(\tau) = \max\{\beta_2(\tau), \pi - \beta_2\}$ and $\lambda_2 = \lambda_2(r) = \max\{\beta_1(r), \pi - \beta_1\}$, then obviously $\lambda_1 \geq \pi/2$, $\lambda_2 \geq \pi/2$, and $\max\{P(t, r, \beta_1), P(t, r, \pi - \beta_1)\} = P(t, r, \lambda_2)$, $\max\{P(t, \tau, \beta_2), P(t, \tau, \pi - \beta_2)\} = P(t, \tau, \lambda_1)$. Hence, by (34)

$$\begin{aligned} T(\tau, r, f) & \leq \int_1^\infty \{N(t, 1, 0) + N(t, 1, \infty)\} P(t, \tau, \lambda_1) dt + \\ & + \int_1^\infty \{N(1, t, 0) + N(1, t, \infty)\} P(t, r, \lambda_2) dt + c_f \log \frac{\tau}{r} + C_1 + C_2. \end{aligned}$$

Apply Polya's Lemma to the functions in square brackets in both integrals above, as in the proof of Theorem 1. We obtain the inequality

$$\begin{aligned} T(\tau_m, r_n, f) & \leq N_1(\tau_m) A(\rho_1) + N_2(r_n) A(\rho_2) + \eta_1(\tau_m) + \eta_2(r_n) + \\ & + 2\eta + c_f \log \frac{\tau_m}{r_n} + C_1 + C_2, \end{aligned}$$

where $N_1(\tau_m) = N(\tau_m, 1, 0) + N(\tau_m, 1, \infty)$ and $N_2(r_n) = N(1, r_n, 0) + N(1, r_n, \infty)$, $A(\rho_1) = \frac{\sin \lambda_1(\rho_1 + \varepsilon)}{\sin \pi(\rho_1 + \varepsilon)}$, $A(\rho_2) = \frac{\sin \lambda_2(\rho_2 + \varepsilon)}{\sin \pi(\rho_2 + \varepsilon)}$. After division the last inequality by

$N(\tau_m, r_n, 0) + N(\tau_m, r_n, \infty)$, where $N(\tau_m, r_n, 0) + N(\tau_m, r_n, \infty) = N_1(\tau_m) + N_2(r_n)$ we get

$$\begin{aligned} \frac{T(\tau_m, r_n; f)}{N(\tau_m, r_n, 0) + N(\tau_m, r_n, \infty)} &\leq \frac{A(\rho_1)N_1(\tau_m) + A(\rho_2)N_2(r_n)}{N_1(\tau_m) + N_2(r_n)} + \frac{c_f \log \frac{\tau_m}{r_n}}{N_1(\tau_m) + N_2(r_n)} + \\ &+ O\left(\frac{1}{\tau_m(N_1(\tau_m) + N_2(r_n))} + \frac{1}{r_n(N_1(\tau_m) + N_2(r_n))}\right) + \frac{2\eta}{N_1(\tau_m) + N_2(r_n)} + \\ &+ \frac{C_1 + C_2}{N_1(\tau_m) + N_2(r_n)}. \end{aligned}$$

Passing to the lower limit in the previous inequality when $n \rightarrow +\infty$, $m \rightarrow +\infty$ we obtain

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\tau \rightarrow +\infty \\ r \rightarrow +\infty}} \frac{T(\tau, r; f)}{N(\tau, r, 0) + N(\tau, r, \infty)} &\leq \\ &\leq \min\{A(\rho_1), A(\rho_2)\} \leq \min\left\{\sup_{0 \leq \gamma \leq \pi} \frac{\sin \gamma(\rho_1 + \varepsilon)}{\sin \pi(\rho_1 + \varepsilon)}; \sup_{0 \leq \sigma \leq \pi} \frac{\sin \sigma(\rho_2 + \varepsilon)}{\sin \pi(\rho_2 + \varepsilon)}\right\}, \end{aligned}$$

since $\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ m \rightarrow +\infty}} \frac{A(\rho_1)N_1(\tau_m) + A(\rho_2)N_2(r_n)}{N_1(\tau_m) + N_2(r_n)} = \min\{A(\rho_1), A(\rho_2)\}$. Then passing to the limit

when $\varepsilon \rightarrow 0$ completes the proof of (33).

The following function with couple of veritable orders (λ_2, λ_1) , where $0 < \lambda_1 < 1$, $0 < \lambda_2 < 1$, will be used to show that the result of Theorem 4 is best possible,

$$H_{\alpha_1, \alpha_2}(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha_1^{1/\lambda_1}(z + c_1)}{a_\nu}\right) \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + b_n \alpha_2^{1/\lambda_2} \left(\frac{1}{z} + c_2\right)\right), \quad (35)$$

where $a_\nu = \nu^{1/\lambda_1}$, ($\nu = 1, 2, 3, \dots$) $b_n = \frac{1}{n^{1/\lambda_2}}$ ($n = 2, 3, \dots$), $0 \leq \alpha_1$ and $0 \leq \alpha_2$, $c_1 \geq 0$, $c_2 \geq 0$. Now we will look at the asymptotic behavior of $H_{\alpha_1, \alpha_2}(z)$ when $z \rightarrow \infty$ and $z \rightarrow 0$. The asymptotic behavior of $f(z; \lambda) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{c_\nu}\right)$ (Lindelöf functions), where $c_\nu = \nu^{1/\lambda}$ ($\nu = 1, 2, 3, \dots$), $0 < \lambda < 1$ is well-known [1], [6] and it implies

$$\log H_{\alpha_1, \alpha_2}(z) = \frac{\pi \alpha_1}{\sin \pi \lambda_1} z^{\lambda_1} (1 + \varepsilon_1(z)), \quad (36)$$

where $\varepsilon_1(z) \rightarrow 0$, uniformly, as $z \rightarrow \infty$ in the angle $|\arg z| \leq \pi - \theta$ ($0 < \theta < \pi$), and

$$\log H_{\alpha_1, \alpha_2}(z) = \frac{\pi \alpha_2}{\sin \pi \lambda_2} \frac{1}{z^{\lambda_2}} \left(1 + \varepsilon_2\left(\frac{1}{z}\right)\right), \quad (37)$$

where $\varepsilon_2\left(\frac{1}{z}\right) \rightarrow 0$, uniformly, as $z \rightarrow 0$ in the angle $|\arg z| \leq \pi - \theta$ ($0 < \theta < \pi$). It is easy to infer from (36) and (37) that, as $r \rightarrow \infty$ and $\tau \rightarrow \infty$,

$$\begin{cases} m(r, H_{\alpha_1, \alpha_2}(z)) \sim \frac{\alpha_1 r^{\lambda_1}}{\lambda_1 \sin \pi \lambda_1} & \left(\frac{1}{2} < \lambda_1 < 1\right), \\ m(r, H_{\alpha_1, \alpha_2}(z)) \sim \frac{\alpha_1 r^{\lambda_1}}{\lambda_1} & \left(0 < \lambda_1 \leq \frac{1}{2}\right), \end{cases} \quad (38)$$

$$\begin{cases} m\left(\frac{1}{\tau}, H_{\alpha_1, \alpha_2}(z)\right) \sim \frac{\alpha_2 \tau^{\lambda_2}}{\lambda_2 \sin \pi \lambda_2} & \left(\frac{1}{2} < \lambda_2 < 1\right), \\ m\left(\frac{1}{\tau}, H_{\alpha_1, \alpha_2}(z)\right) \sim \frac{\alpha_2 \tau^{\lambda_2}}{\lambda_2} & \left(0 < \lambda_2 \leq \frac{1}{2}\right). \end{cases} \quad (39)$$

Let $n(1/t, 1; 0)$, $n(1, t; 0)$ denote the counting-functions associated with $H_{\alpha_1, \alpha_2}(z)$. Evidently, $n(1/t, 1; 0) \sim \alpha_2 \tau^{\lambda_2}$ ($\tau \rightarrow \infty$) and $n(1, r; 0) \sim \alpha_1 r^{\lambda_1}$ ($r \rightarrow \infty$). And hence

$$N(\tau, r, 0) \sim \frac{\alpha_1 r^{\lambda_1}}{\lambda_1} + \frac{\alpha_2 \tau^{\lambda_2}}{\lambda_2} \quad (\tau \rightarrow \infty, \quad r \rightarrow \infty). \quad (40)$$

Under different values of $0 < \lambda_1 < 1$ and $0 < \lambda_2 < 1$ asymptotic relations (38), (39) and (40) imply the equality in (33).

Proof of part II of Theorem 1. In proving this Theorem the constructed examples are modification of examples given by Albert Edrei and Wolfgang H. J. Fuchs [1] in the classical case. According to the geometrical discussion following the statement of Theorem 1, we must show that for every point (u, v) in the corner of the square $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$, cut off by the arc of one of ellipse (2), which lies above, there exists a meromorphic function $f(z)$ with a couple of veritable orders (λ_2, λ_1) , such that

$$u = 1 - \delta_0(0, f), \quad v = 1 - \delta_0(\infty, f)$$

If $0 < \lambda_i \leq \frac{1}{2}$ ($i = 1, 2$), the lines $u = 1$ and $v = 1$ have to be added to this corner. Let $P_1(\beta) : (\cos(\pi - \beta)\lambda_1, \cos\pi\lambda_1)$, $P_2(\beta) : (\cos(\pi - \beta)\lambda_2, \cos\pi\lambda_2)$ ($0 \leq \beta \leq \pi$). Either the point $P_1(\beta)$ or $P_2(\beta)$ describes the arc which lies above depending on values λ_1 and λ_2 . Then let L_β be the closed line segment joining the point $P_1(\beta)$ or $P_2(\beta)$ to $(1, 1)$. Let C_β be the part of L_β contained in the square $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$. First it will be proved that every point of C_β is a possible position of $(1 - \delta_0(0, f), 1 - \delta_0(\infty, f))$. As β varies from 0 to π , one of the points $P_1(\beta)$, $P_2(\beta)$ describes the arc which lies above and C_β sweeps over the whole corner described above. Therefore, every point in the corner is a possible position of $(1 - \delta_0(0, f), 1 - \delta_0(\infty, f))$. Consider the function

$$f(z) = \frac{H_{\alpha_1, \alpha_2}(z) H_{\alpha_3, \alpha_4}(-z)}{H_{\alpha_5, \alpha_6}(z) H_{\alpha_7, \alpha_8}(-z)} \quad (41)$$

where $H_{\alpha_i, \alpha_j}(z)$ is function (35). For every specific choice of the quantities α_i ($i = \overline{1, 8}$), we may choose the constants c_1, c_2 so as to prevent cancellation of zeros between the various functions $H_{\alpha_i, \alpha_j}(z)$ in (41). We take, for instance, $c_1 = 0, c_2 = 0$ in $H_{\alpha_1, \alpha_2}(z)$ and $H_{\alpha_3, \alpha_4}(-z)$ and $c_1 = \gamma_1 > 0, c_2 = \gamma_2 > 0$ in $H_{\alpha_5, \alpha_6}(z)$ and $H_{\alpha_7, \alpha_8}(-z)$. The α_i ($i = \overline{1, 8}$) are chosen so that

$$\begin{cases} (\alpha_3 - \alpha_7) \sin \pi \lambda_1 = -\cos \beta \lambda_1, \\ (\alpha_1 - \alpha_5) + (\alpha_3 - \alpha_7) \cos \pi \lambda_1 = \sin \beta \lambda_1 \\ (\alpha_4 - \alpha_8) \sin \pi \lambda_2 = -\cos \beta \lambda_2, \\ (\alpha_2 - \alpha_6) + (\alpha_4 - \alpha_8) \cos \pi \lambda_2 = \sin \beta \lambda_2, \\ (\alpha_3 + \alpha_5) \sin \pi \lambda_1 = X, \\ (\alpha_4 + \alpha_6) \sin \pi \lambda_2 = X, \end{cases} \quad (42)$$

where $X \geq \max\{A, B\}$,

$$A = \max\{0, -\cos(\pi - \beta)\lambda_1, -\cos\beta\lambda_1\}, \quad B = \max\{0, -\cos(\pi - \beta)\lambda_2, -\cos\beta\lambda_2\}. \quad (43)$$

Using considerations as in [1] one can easily show that the system (42) may be satisfied by non-negative α . All the α are non-negative and one, at least, is positive. By (36), (37)

and (41) we have for every η , $0 < \eta < \pi$,

$$\log f(re^{i\theta}) = \frac{\pi r^{\lambda_1}}{\sin \pi \lambda_1} \left[(\alpha_1 - \alpha_5) e^{i\lambda_1 \theta} + (\alpha_3 - \alpha_7) e^{i\lambda_1(\theta - \pi)} \right] + \varepsilon'(z) r^{\lambda_1}, \quad (44)$$

$$\log f\left(\frac{e^{i\theta}}{\tau}\right) = \frac{\pi \tau^{\lambda_2}}{\sin \pi \lambda_2} \left[(\alpha_2 - \alpha_6) e^{-i\lambda_2 \theta} + (\alpha_4 - \alpha_8) e^{-i\lambda_2(\theta - \pi)} \right] + \varepsilon''\left(\frac{1}{z}\right) \tau^{\lambda_2}, \quad (45)$$

$$0 < \eta \leq \theta \leq \pi - \eta; \quad \varepsilon'(z) \rightarrow 0, \quad \text{uniformly as } |z| = r \rightarrow \infty$$

and

$$\varepsilon''\left(\frac{1}{z}\right) \rightarrow 0 \quad \text{uniformly as } |z| = \frac{1}{\tau}, \quad \tau \rightarrow \infty.$$

Using (44), (45) and the four first equations of (42), we obtain

$$\log |f(re^{i\theta})| = \frac{\pi r^{\lambda_1}}{\sin \pi \lambda_1} \sin \lambda_1 (\beta - \theta) + \varepsilon'(r, \theta) r^{\lambda_1}, \quad (46)$$

$$\log \left| f\left(\frac{e^{i\theta}}{\tau}\right) \right| = \frac{\pi \tau^{\lambda_2}}{\sin \pi \lambda_2} \sin \lambda_2 (\beta - \theta) + \varepsilon''(\tau, -\theta) \tau^{\lambda_2}, \quad (47)$$

where the quantities $\varepsilon'(r, \theta)$, $\varepsilon''(\tau, -\theta)$ tend to zero uniformly as $r \rightarrow \infty$, $\tau \rightarrow \infty$ and $\eta \leq \theta \leq \pi - \eta$. Although (46) and (47) are not valid with θ replaced by $-\theta$, the asymptotic behavior of $f(re^{-i\theta})$ and $f\left(\frac{e^{-i\theta}}{\tau}\right)$ are known since, by (41), the function $f(z)$ is real for real values of z and hence

$$|f(re^{i\theta})| = |f(re^{-i\theta})|, \quad \left| f\left(\frac{e^{i\theta}}{\tau}\right) \right| = \left| f\left(\frac{e^{-i\theta}}{\tau}\right) \right|.$$

Using the result from ([1], P. 244) we obtain

$$\int_{\omega}^{\omega+\eta} |\log |H_{\alpha_i, \alpha_j}(re^{i\theta})|| d\theta < Ar^{\lambda_1} \left(\eta + \int_{\omega}^{\omega+\eta} \log \left(\frac{1}{\sin \theta} \right) d\theta \right), \quad (48)$$

$$\int_{\omega}^{\omega+\eta} |\log |H_{\alpha_i, \alpha_j}(e^{i\theta}/\tau)|| d\theta < B\tau^{\lambda_2} \left(\eta + \int_{\omega}^{\omega+\eta} \log \left(\frac{1}{\sin \theta} \right) d\theta \right), \quad (49)$$

($0 \leq \omega < \omega + \eta \leq \pi$), A , B depend only on $H_{\alpha_i, \alpha_j}(z)$. Now from (46), (47) and (48), (49) it easily follows that

$$m(r, f) = \frac{r^{\lambda_1}}{\sin \pi \lambda_1} \int_0^{\beta} \sin \lambda_1 (\beta - \theta) d\theta + o(r^{\lambda_1}) = \frac{r^{\lambda_1}}{\lambda_1 \sin \pi \lambda_1} (1 - \cos \beta \lambda_1) + o(r^{\lambda_1}) \quad (r \rightarrow \infty),$$

$$m\left(\frac{1}{\tau}, f\right) = \frac{\tau^{\lambda_2}}{\sin \pi \lambda_2} \int_0^{\beta} \sin \lambda_2 (\beta - \theta) d\theta + o(\tau^{\lambda_2}) = \frac{\tau^{\lambda_2}}{\lambda_2 \sin \pi \lambda_2} (1 - \cos \beta \lambda_2) + o(\tau^{\lambda_2}) \quad (\tau \rightarrow \infty).$$

By (40) and (41),

$$N(\tau, r, 0) \sim \frac{(\alpha_1 + \alpha_3) r^{\lambda_1}}{\lambda_1} + \frac{(\alpha_2 + \alpha_4) \tau^{\lambda_2}}{\lambda_2}, \quad N(\tau, r, \infty) \sim \frac{(\alpha_5 + \alpha_7) r^{\lambda_1}}{\lambda_1} + \frac{(\alpha_6 + \alpha_8) \tau^{\lambda_2}}{\lambda_2}. \quad (50)$$

Hence, using (42)

$$T(\tau, r, f) \sim \left[\frac{r^{\lambda_1}}{\lambda_1 \sin \pi \lambda_1} + \frac{\tau^{\lambda_2}}{\lambda_2 \sin \pi \lambda_2} \right] (1 + X). \quad (51)$$

Using (50), (51), and (42) we get

$$\begin{aligned} u &= \overline{\lim}_{\substack{\tau \rightarrow +\infty \\ r \rightarrow +\infty}} \frac{N(\tau, r, 0)}{T(\tau, r, f)} = \max \left\{ \frac{(\alpha_1 + \alpha_3) \sin \pi \lambda_1}{1 + X}; \frac{(\alpha_2 + \alpha_4) \sin \pi \lambda_2}{1 + X} \right\} = \\ &= \max \left\{ \frac{\cos(\pi - \beta) \lambda_1 + X}{1 + X}; \frac{\cos(\pi - \beta) \lambda_2 + X}{1 + X} \right\} = \\ &= \frac{\max \{ \cos(\pi - \beta) \lambda_1; \cos(\pi - \beta) \lambda_2 \} + X}{1 + X}. \end{aligned} \quad (52)$$

Similarly

$$v = \overline{\lim}_{\substack{\tau \rightarrow +\infty \\ r \rightarrow +\infty}} \frac{N(\tau, r, \infty)}{T(\tau, r, f)} = \frac{\max \{ \cos \beta \lambda_1; \cos \beta \lambda_2 \} + X}{1 + X}. \quad (53)$$

As X varies according to (43), the point (u, v) whose coordinates are given by (52) and (53) describes the segment C_β except for the end-point $(1, 1)$. But the values $u = 1$, $v = 1$ are attained for any function f with $\delta_0(0, f) = \delta_0(\infty, f) = 0$. To complete the proof we need to consider the cases $\lambda_1 < \frac{1}{2}$, $\lambda_2 < \frac{1}{2}$, $u = 1$, $v < \min \{ \cos \pi \lambda_1; \cos \pi \lambda_2 \}$; $u < \min \{ \cos \pi \lambda_1; \cos \pi \lambda_2 \}$, $v = 1$. Consider the function

$$f(z) = \frac{H_{1+\alpha_1, 1+\alpha_1}(z)}{H_{\alpha_1, \alpha_1}(z)},$$

which yields

$$\begin{aligned} m(r, f) &\sim \frac{r^{\lambda_1}}{\lambda_1}, \quad m(1/\tau, f) \sim \frac{\tau^{\lambda_2}}{\lambda_2}, \\ N(\tau, r, 0) &\sim \frac{(1 + \alpha_1) r^{\lambda_1}}{\lambda_1} + \frac{(1 + \alpha_1) \tau^{\lambda_2}}{\lambda_2}, \quad N(\tau, r, \infty) \sim \frac{\alpha_1 r^{\lambda_1}}{\lambda_1} + \frac{\alpha_1 \tau^{\lambda_2}}{\lambda_2} \quad (\alpha_1 > 0), \\ T(\tau, r, f) &\sim \frac{(1 + \alpha_1) r^{\lambda_1}}{\lambda_1} + \frac{(1 + \alpha_1) \tau^{\lambda_2}}{\lambda_2}, \\ u &= 1, \quad v = \frac{\alpha_1}{1 + \alpha_1}. \end{aligned}$$

When α_1 varies from 0 to ∞ , v attains every value in $(0, 1)$. The case $u = 1$, $v = 0$ is trivial since we may take for $f(z)$ any holomorphic in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ function with a couple of veritable orders (λ_2, λ_1) , where $\lambda_1 < \frac{1}{2}$ and $\lambda_2 < \frac{1}{2}$. Passing from $f(z)$ to $\frac{1}{f(z)}$, it is clear that the values of u and v are exchanged.

-
1. *Edrei A.* The deficiencies of meromorphic functions of order less than one / *Edrei A., Fuchs W.H.J.* // Duke Math. J. – 1960. – Vol. 27. – P. 233-250.
 2. *Gnatiuk O.* Two-parameter growth characteristics of nonnegative and meromorphic in annulus functions / *Gnatiuk O., Greshko O., Stashyshyn O.* // Visnyk Lviv Univ. Ser. Mech. Math. – 2009. – Vol. 71. – P. 62-70.
 3. *Kondratyuk A. A.* Meromorphic functions with several essential singularities, I / *Kondratyuk A. A.* // Mat. studii. – 2008. – Vol. 30, №. 2. – P. 125-131.

4. *Goldberg A. A.* Value distributions of meromorphic functions / *Goldberg A. A., Ostrowskii I. V.* – Moscow: Nauka, 1970.
5. *Kondratyuk A.* Meromorphic functions in multiply connected domains / *Kondratyuk A., Laine I.* // Fourier series methods in complex analysis. Univ. Joensuu Dept. Math. Rep. Ser. – 2006. – №10. – P. 9-111.
6. *Nevanlinna R.* Le Théorème de Picard-Borel et la Théorie des Fonctions Méromorphes / *Nevanlinna R.* – Paris, 1930.
7. *Khrystianyn A. Ya.* On the Nevanlinna theory for meromorphic functions on annuli, I / *Khrystianyn A. Ya., Kondratyuk A. A.* // Mat. studii. – 2005. – Vol. 23. – №1. – P. 19-30.
8. *Khrystianyn A. Ya.* On the Nevanlinna theory for meromorphic functions on annuli, II / *Khrystianyn A. Ya., Kondratyuk A. A.* // Matematychni Studii. – 2005. – Vol. 24. – №2. – P. 57-68.
9. *Hällström G.* Über meromorpher Functionen mit mehrfach zusammenhängenden Existenzgebieten / *Hällström G.* // Acta Acad. Math. et Phys. – 1940. – Vol. 12. – №8. – P. 1-100.
10. *Korhonen R.* Nevanlinna theory in an annulus / *Korhonen R.* // Value Distribution Theory and Related Topics, in: Adv. Complex Anal. Appl. Kluwer Acad. Publ., Boston, MA – 2004. – Vol. 3. – P. 167-179.
11. *Valiron G.* Lectures on the General Theory of Integral Functions / *Valiron G.* – New York: Chelsea Publishing Company, 1949.
12. *Mathevossian H. H.* On a factorization of meromorphic function in multiply connected domain and some of its applications / *Mathevossian H. H.* // Izv. Akad. Nauk Arm. SSR IX – 1974. – №5. – P. 387-408.
13. *Zmorovich V. A.* On certain classes of analytic functions in a circular ring / *Zmorovich V. A.* // Math. Sb. – 1956. – №40. – P. 225-238.

ДЕФЕКТИ МЕРОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ У ПРОКОЛОТІЙ ПЛОЩИНІ

Остап СТАШИШИН

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000 Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: ostap.stashyshyn@gmail.com*

Нехай f – мероморфна функція в проколотій площині $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Вивчено проблему можливих дефектних значень і величини відповідних дефектів мероморфних функцій у проколотій площині. Доведено деякі співвідношення стосовно дефектів мероморфної функції f . Розглянуто проблему Неванлінни для мероморфної в проколотій площині функції.

Ключові слова: дефект, дефектне значення, проблема Неванлінни, пара істинних порядків, Неванліннівська характеристика.

ДЕФЕКТЫ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В ПРОКОЛОТОЙ ПЛОСКОСТИ

Остап СТАШИШИН

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000 Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: ostap.stashyshyn@gmail.com*

Пусть f – мероморфная функция в проколотой плоскости $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Рассмотрено проблему возможных дефектных значений и величины соответственных дефектов мероморфных функций в проколотой плоскости. Устанавливаются некоторые соотношения относительно дефектов мероморфной функции f . Рассмотрено проблему Неванлинны для мероморфной функции в проколотой плоскости.

Ключевые слова: дефект, дефектное значение, проблема Неванлинны, пара истинных порядков, характеристика Неванлинны.

Стаття надійшла до редколегії 31.05.2010

Прийнята до друку 22.12.2010

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

1. Стаття повинна містити результати нових досліджень автора з повним їхнім доведенням. Не доцільно робити великі огляди вже опублікованих результатів. Робити посилання на неопубліковані праці не можна.

2. Текст статті набирають на комп'ютері українською чи англійською мовами. До редакційної колегії потрібно подавати:

два примірники статті з підписом автора (співавторів) на останній сторінці;
назву статті, резюме (резюме повинно передавати зміст основних результатів статті, а не лише повторювати її назву), ключові слова, ім'я, прізвище автора, місце роботи, адресу українською, англійською та російською мовами, електронну адресу; електронний варіант статті та резюме на CD-RW диску (редколегія повертає авторові диск; тексти можна надіслати за адресою lnu.vishn.mn@gmail.com);

довідка про автора (співавторів), у якій треба зазначити ім'я, по батькові та прізвище автора, місце роботи, посаду, адресу українською, англійською та російською мовами, телефон та електронну адресу.

Оптимальний обсяг статті до 12 сторінок. Розмір шрифтів 10pt, висота сторінки – 190 mm, ширина – 135 mm.

3. Вимоги до набору.

Текст статті створювати у версії L^AT_EX з кодуванням кириличних шрифтів „Кирилиця (Windows)“ (кодова сторінка 1251).

На першій сторінці статті потрібно зазначити номер УДК.

Номери формул ставити з правого боку і нумерувати лише формули, на які є посилання.

У посиланнях на теорему з монографії зазначити сторінку, на якій вона описана.

Рисунки до статті подавати у графічному форматі BMP чи PCX. Назва рисунка чи його номер не входять у зображення, їх треба створювати засобами L^AT_EX'у. Вибираючи розмір графічного зображення, належить врахувати, що воно буде надруковане на принтері з роздільною здатністю 600 dpi.

Літературу подавати загальним списком у порядку посилань на джерела в тексті статті.

Зразки бібліографічного опису книги, статті, препринту, дисертації, депонованого рукопису, тез доповідей конференцій (з'їздів та ін.):

1. *Грабович А.І.* Назва / *Грабович А.І.* – К., 1985.
2. *Петренко О.Б.* Назва / *Петренко О.Б., Шинк М.М.* – Л., 2001.
3. *Кравчук О.М.* Назва / *Кравчук О.М.* // Укр. мат. журн. – 1985. – Т. 2, №2. – С. 4-20.
4. *Кравчук О.М.* Назва / *Кравчук О.М., Потічний М.М.* // Мат. студії – 1995. – Т. 2, №2. – С. 4-20.
5. *Михайленко Г.Д.* Назва / *Михайленко Г.Д.* – Л.: ІППММ, 1993. – 9 с. – (Препринт / НАН України, Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача: 80.1).

6. *Михайленко Г.Д.* Назва / *Михайленко Г.Д., Степаняк С.І.* – Л.: ІППММ, 1993. – 9 с. – (Препринт / НАН України, Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача: 80.1).
7. *Колмаз Ю. А.* Назва: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук. / *Колмаз Ю.А.* – К., 2008. – 20 с.
8. *Сеник С.М.* Назва / *Сеник С.М.* – К., 1992. – 17 с. – Деп. в ДНТБ України, В2020-1995.
9. *Сеник С.М.* Назва / *Сеник С.М., Мандрик І.Т.* – К., 1992. – 17 с. – Деп. в ДНТБ України, В2020-1995.
10. *Муравський В.К.* Назва / *Муравський В.К.* // Наукова конф. “Нелінійні диференціальні рівняння”: тези доп., 27 серпня - 2 вересня 1994 р., Київ. – К.: КНУ ім. Т. Г. Шевченка, 1994. – С. 540-551.
11. *Муравський В.К.* Назва / *Муравський В.К., Ліско С.В.* // Наукова конф. “Нелінійні диференціальні рівняння”: тези доп., 27 серпня - 2 вересня 1994 р., Київ. – К.: КНУ ім. Т. Г. Шевченка, 1994. – С. 540-551.

