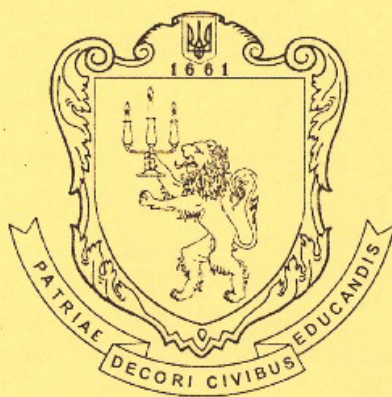


ISSN 2078-3744

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 73



2010

ISSN 2078-3744

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 73



Львівський національний університет імені Івана Франка
2010

V I S N Y K
OF THE LVIV
UNIVERSITY

Series
Mechanics and Mathematics

Issue 73

Scientific journal

Published 1-2 issues per year

Published since 1965

Ivan Franko National
University of Lviv

В І С Н И К
ЛЬВІВСЬКОГО
УНІВЕРСИТЕТУ

Серія
механіко-математична

Випуск 73

Збірник наукових праць

Виходить 1-2 рази на рік

Видається з 1965 року

Львівський національний
університет імені Івана Франка

2010

Друкується за ухвалою Вченої Ради
Львівського національного університету
імені Івана Франка

СВІДОЦТВО про державну реєстрацію
друкованого засобу масової інформації.
Серія КВ № 14606-3577Р від 29.10.2008 р.

У Віснику публікуються праці з теорії крайових задач для диференціальних рівнянь, алгебри, топології, теорії функцій комплексного змінного, функціонального аналізу, теорії ймовірності та статистики, проблем математичного моделювання фізико-механічних процесів і механіки.

Visnyk contains articles on theory of boundary value problems for differential equations, algebra, topology, complex analysis, functional analysis, probability theory and statistics, problems of mathematical modelling of physical and mechanical processes and mechanics.

Р е д а к ц і й н а к о л е г і я :

д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Зарічний* (головний редактор); д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Комарницький* (заступник головного редактора); канд. фіз.-мат. наук, доц. *О. Бугрій* (відповідальний секретар); д-р фіз.-мат. наук, проф., член-кор. НАН України *О. Андрейків*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *В. Андрійчук*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *Т. Банах*; д-р фіз.-мат. наук, проф., член-кор. НАН України *Я. Бурак*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *Я. Єлейко*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Заболоцький*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Іванчов*; д-р фіз.-мат. наук, доц. *В. Кирилич*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *А. Кондратюк*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *Б. Копитко*; канд. фіз.-мат. наук, проф. *Я. Притула*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *О. Скасків*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *О. Сторож*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *Г. Сулим*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Шеремета*.

Professor *M. Zarichny* – Editor-in-chief,
Professor *M. Komarnitskyi* – Associate editor,
Associate professor *O. Buhrii* – Executive secretary.

Відповідальний за випуск *Михайло Зарічний*

Адреса редколегії:
Львівський національний університет
імені Івана Франка,
механіко-математичний факультет,
вул. Університетська, 1,
79000 Львів, Україна
тел. (0322) 74-11-07
ел. пошта: lnu.visn.mm@gmail.com
<http://blues.franko.lviv.ua/publish/visnyk.asp>

Editorial office address:
Ivan Franko National University
of Lviv,
Mechanical and Mathematical department,
Universytets'ka Str. 1,
UA-79000 Lviv, Ukraine
tel. +(38) (0322) 74-11-07
e-mail: lnu.visn.mm@gmail.com
http://blues.franko.lviv.ua/publish/visnyk_en.asp

Редактор Н. ПЛИСА
Технічний редактор С. СЕНИК

Адреса редакції, видавця і виготовлювача:
Львівський національний університет
імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000, Львів, Україна
СВІДОЦТВО про внесення суб'єкта видавничої
справи до Державного реєстру видавців,
виготівників і розповсюджувачів видавничої
продукції. Серія ДК N 3059 від 13.12.2007 р.

Формат 70x100/16.
Умовн. друк. арк. 16,8
Наклад 200 прим. Зам.

© Львівський національний університет
імені Івана Франка, 2010

ЗМІСТ

<i>Кіт Мар'яна</i> . Вплив зварних швів на залишкову довговічність нафтопроводу.....	7
<i>Гачкевич Олександр, Дробенко Богдан, Асташкін Володимир, Будз Степан, Чупик Ігор</i> . Напружений стан титанової оболонки обертання при локальному нагріві з врахуванням фазових перетворень	16
<i>Стадник Мирон, Дідух Іван</i> . Оцінка довговічності трубних елементів на стадії росту втомної поверхневої півеліптичної тріщини	23
<i>Дробенко Богдан, Гачкевич Олександр, Бурак Ярослав, Шимчак Йосип</i> . До оцінки параметрів термомеханічного стану феромагнітних тіл за високотемпературної індукційної обробки.....	30
<i>Гачкевич Олександр, Ірза Євген, Касперський Зигмунд</i> . Термомеханічні моделі кількісного опису механічної поведінки скляних тіл обертання при тепловому навантаженні.....	37
<i>Говоруха Володимир, Лобода Володимир</i> . Вплив електричної проникності міжфазової тріщини на характеристики електромеханічного поля в околі її вершини.....	44
<i>Долінська Ірина</i> . Аналог задачі Гріффітса для поширення повзучо-втомних тріщин.....	56
<i>Токовий Юрій</i> . Інтегральні рівняння тривимірної задачі термопружності для неоднорідного простору.....	63
<i>Жидик Уляна, Николишин Мирон, Флячок Володимир</i> . Розрахунок термопружного стану шаруватої анізотропної циліндричної оболонки при локальному нагріванні джерелами тепла.....	71
<i>Касімов Заур</i> . Про базисність системи експонент з одиницею у ваговому просторі.....	77
<i>Бокало Микола</i> . Оптимальне керування еволюційними системами без початкових умов.....	85
<i>Черепанов Геннадій</i> . Про обвал Міжнародного торгового центру в Нью-Йорку 11 вересня 2001 року.....	114
<i>Сулیم Георгій, Кривень Марта</i> . Контактна пружно-пластична задача для шару з тонким включенням за наявності затримки текучості.....	139
<i>Кузь Іор, Тімар Імре</i> . Напружено-деформований стан пружно-пластичних пластин з розрізом або абсолютно жорстким включенням	148
<i>Яцик Ігор</i> . Згин пластини Рейсснера з періодичною системою наскрізних колінеарних тріщин з урахуванням ширини області контакту їхніх берегів.....	155
<i>Васільєв Кирил, Пастернак Ярослав, Сулім Георгій</i> . Антиплоска деформація квадратного в плані тіла з внутрішньою тонкою неоднорідністю	165
<i>Пир'єв Сергій</i> . Максимальне еквівалентне напруження в термопружному півпросторі при русі механічного та теплового навантаження	177
<i>Мелешко В'ячеслав, Токовий Юрій, Вілладжіо П'єро</i> . Спектр Коссера другої крайової задачі для пружного скінченного циліндра	184
<i>Богданов Владислав, Сулім Георгій</i> . Моделювання руху тріщини на основі числового розв'язування задачі плоского напруженого стану	192

<i>Прохоренко Мирослава.</i> До питання існування періодичних розв'язків для системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією у просторі $\mathbb{R}^n$	205
<i>Базиляк Галина.</i> Мішана задача для нелінійного параболічного рівняння четвертого порядку за просторовими змінними в необмеженій за часом області.....	214
<i>Бурдейна Наталя.</i> Спряження розв'язків гіперболічної задачі для системи квазілінійних рівнянь уздовж невідомої лінії розриву в криволінійному секторі.....	221
<i>Колодій Володимир, Турчин Ігор.</i> Метод поліномів Лагерра в динамічній задачі пружності для радіально-шаруватого циліндра	227

CONTENTS

<i>Kit Maryana</i> . Influence of welded seams on the residual life of the oil pipeline.....	7
<i>Hachkevych Oleksandr, Drobenko Bogdan, Astashkin Volodymyr, Budz Stepan, Chupyk Ihor</i> . Stress state of titanium circular shell during local heating taking into account phase transition.....	16
<i>Stadnyk Myron, Diduh Ivan</i> . An estimation of the life time of tubular structural elements at the stage of fatigue surface semi- elliptical crack propagation.....	23
<i>Drobenko Bogdan, Hachkevych Oleksandr, Burak Yaroslav, Shymchak Yosyp</i> . To estimation of thermo-mechanical state parameters of ferromagnetic solids subjected to high temperature induction treatment.....	30
<i>Hachkevych Oleksandr, Irza Yevgen, Kasperski Zigmund</i> . Thermomechanical models the quantitative description the mechanical behaviour of glass solids of rotation under thermal loading.....	37
<i>Govorukha Volodymyr, Loboda Volodymyr</i> . The influence of electrical permeability of an interface crack on the characteristics of the electromechanical field at the vicinity of it tip.....	44
<i>Dolinska Iryna</i> . Analogue of Griffiths' problem for propagation creep-fatigue cracks.....	56
<i>Tokovyy Yuriy</i> . Integral equations of three-dimensional thermoelasticity problem for inhomogeneous space.....	63
<i>Nykolyshyn Myron, Zhydyk Ulyana, Flyachok Volodymyr</i> . Analysis of thermoelastic state of laminated anisotropic cylindrical shell under localized head sources.....	71
<i>Kasimov Zaur</i> . On the basis of system of exponential functions with unit in weight space.....	77
<i>Bokalo Mykola</i> . The optimal control problem of evolution systems without initial conditions.....	85
<i>Cherepanov Gennady</i> . Down on the international trade centre New York September 11, 2001.....	114
<i>Sulym Georgij, Kryven Marta</i> . Contact elastoplastic problem for a layer with a thin inclusion under condition of delayed yield.....	139
<i>Kuz' Ihor, Timar Imre</i> . Stress strain state of elastic plastic plates with crack or with the same thin rigid body.....	148
<i>Yatsyk Ihor</i> . Reissner's plate bending containing periodic system of collinear through-the-thickness cracks taking into account contact region width of their faces.....	155
<i>Vasil'ev Kirill, Pasternak Yaroslav, Sulym Georgij</i> . Antiplane deformation of the rectangular solid with thin internal heterogeneity.....	165
<i>Pyryev Sergiy</i> . The maximum equivalent stress in the thermoelastic half space at driving of mechanical and thermal load.....	177
<i>Viatcheslav Meleshko, Yuriy Tokovyy, Piero Villaggio</i> . The Cosserat spectrum for the second boundary value problem for an elastic cylinder of finite length.....	184

<i>Bogdanov Vladislav, Sulym Georgij.</i> The crack cleavage simulation based on the numerical modeling of the plane stress state.....	192
<i>Prokhorenko Myroslava.</i> To a question of periodic solutions for system of the differential equations with impulse influence in space $\mathbb{R}^n$ existence.....	205
<i>Bazylyak Halyna.</i> The initial-boundary value problem for the nonlinear parabolic equation of the fourth order with spatial variable in unbounded domain for the time.....	214
<i>Burdeina Natalya.</i> The conjugation solutions of hyperbolic problem for system of quasi-linear equations along unknown discontinuity line in curvilinear sector	221
<i>Kolodiy Volodymyr, Turchyn Igor.</i> The Laguerre polynomials method in dynamic problem of elasticity for multi-layered cylinder.....	227

УДК 539.375

ВПЛИВ ЗВАРНИХ ШВІВ НА ЗАЛИШКОВУ ДОВГОВІЧНІСТЬ НАФТОПРОВОДУ

Мар'яна КІТ

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна*

Запропоновано ефективний підхід для визначення залишкового ресурсу зварного з'єднання магістрального трубопроводу з внутрішньою поверхневою тріщиною. В основу підходу покладено раніше розроблені автором математична модель для визначення періоду докритичного росту втомних тріщин і метод еквівалентних площ для наближеної реалізації цієї моделі. На підставі цього побудовано залежність залишкового ресурсу нафтопроводу від відстані тріщини до осі зварного шва.

Ключові слова: залишкова довговічність, трубопровід, тріщина, втома, зварний шов.

Вступ. Багато авторів проводили дослідження [1-6] залишкової довговічності магістральних нафтопроводів і газопроводів з врахуванням умов їхнього навантаження, дії різних фізичних і хімічних чинників, наявності в стінці труби дефектів типу тріщин і т.д. Однак всі ці дослідження проводили для випадку основного матеріалу труб без врахування зварних швів. Як відомо [7, 8], область зварного шва значно послаблює міцність і довговічність труби і неврахування цього може призвести до непередбачуваного руйнування і відповідно до аварійної ситуації. Тому для прогнозування залишкової довговічності труб магістральних трубопровідних систем треба враховувати у розрахунку наявність зварних швів, їхні міцнісні характеристики та геометрію розміщення стосовно них дефектів типу тріщин.

Ми запропонували наближений підхід для визначення залишкової довговічності труби нафтопроводу з тріщиною, що розміщена недалеко від зварного шва. В основу цього підходу покладено раніше запропоновану автором [9, 10] розрахункову модель для визначення періоду докритичного росту втомних тріщин у рамках енергетичного критерію втомного руйнування і узагальнений тут метод еквівалентних площ.

Енергетичний критерій втомного руйнування. Щоб знайти залишковий ресурс трубопроводу (час до розгерметизації), побудуємо розрахункові моделі розвитку дефектів і визначимо час до їхнього зростання наскрізь стінки (рис.1). Згідно з рис.1 введемо такі позначення: r_1 - радіус труби; h_1 - товщина стінки труби.

Уважаючи ріст тріщини неперервним, аналогічно [10], запишемо енергетичний баланс тіла для кожного моменту часу t у вигляді $A = W + \Gamma$, де A - робота зовнішніх сил;

$W = W_e + W_p^{(1)}(S) + W_p^{(2)}(t) - W_p^{(3)}(t)$ – енергія деформування тіла; W_e – пружна складова W ; $W_p^{(1)}(S)$ – робота пластичних деформацій, що залежить тільки від площі тріщини S ; $W_p^{(2)}(t)$ – робота пластичних деформацій від зовнішніх зусиль за постійної площі тріщини під час інкубаційного періоду підготовки її стрибка, що залежить тільки від часу t ; $W_p^{(3)}$ – робота пластичних деформацій під час стискання зони передруйнування внаслідок потенціальної енергії тіла, яка також виділяється за постійної площі тріщини під час інкубаційного періоду підготовки стрибка тріщини і залежить тільки від t ; Γ – енергія руйнування тіла, яка залежить лише від площі тріщини. Якщо виконується умова балансу енергії, то виконуватиметься умова балансу швидкостей зміни енергії, яку запишемо так:

$$\begin{aligned} & \partial[\Gamma - (A - W_e - W_p^{(1)} - W_p^{(2)} + W_p^{(3)})]/\partial S \cdot dS/dt - \\ & - \partial(A - W_e - W_p^{(1)} - W_p^{(2)} + W_p^{(3)})/\partial t = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Будемо вважати, що тиск p в трубі нафтопроводу змінюється циклічно з періодом T ($T = 2\pi\omega^{-1}$; ω – частота циклічного навантаження), а сама труба внаслідок защемлення ґрунтом і температурними змінами зазнає розтягу-стискання напруженнями σ_q , які можуть досягати згідно з даними [1-6] $\sigma_q = 200\text{МПа}$.

Опишемо його такою синусоїдою:

$$p(t) = a_1 + b_1 \sin \omega t. \quad (2)$$

Помноживши рівняння (1) на T і продиференціювавши з урахуванням залежностей функцій від S і t , для визначення швидкості поширення тріщини $V = ds/dt$ отримаємо [6, 9]

$$dS/dN = W_C^{(1)}/(\gamma - \gamma_s). \quad (3)$$

Тут N – кількість циклів навантаження; γ – густина енергії руйнування матеріалу [6, 9]; γ_s – густина потенціальної енергії в зоні передруйнування за максимуму напружень циклу; $W_C^{(1)}$ – циклічна складова дисипації енергії в зоні передруйнування за один цикл навантаження.

Оскільки товщина стінки нафтопроводу h набагато менша від радіуса труби r_1 , то для спрощення вважатимемо, що тріщина розвивається в нескінченній пластині під статичним напруженням $\sigma_{\dot{u}}$ і змінним навантаженням p .

Величини γ , γ_s , і $W_C^{(1)}$ обчислюємо так [6, 9]:

$$\gamma_s = \frac{\varepsilon_{fc}}{\delta_{fc} \Delta S} \int_L d\mathbf{x} \int_0^{l_s} \sigma_{of} \delta_{\max}(\xi, \mathbf{x}) d\xi; \quad \gamma = 0,75 \sigma_{of} \varepsilon_{fc}; \quad (4)$$

$$W_C^{(1)} = \frac{\varepsilon_{fc}}{\delta_{fc}} \int_0^{l_c} \int_L \sigma_{of} [\delta_{\max}(\xi, \mathbf{x}, 0) - \delta_{\min}(\xi, \mathbf{x}, 0)] d\mathbf{x} d\xi.$$

Тут σ_{of} – усереднене напруження в зоні передруйнування під навантаженнями ρ ; ΔS – площа зони передруйнування біля контуру тріщини; $\delta_{\max}$, $\delta_{\min}$ – максимальне і мінімальне розкриття модельного розрізу вздовж зони передруйнування [6]; δ_{fc} – його критичне значення, за критичного значення деформації ε_{fc} під циклічним навантаженням; $d\xi$ – зміна довжини дуги вздовж контуру тріщини L ; l_f, l_s – ширина циклічної і статичної зон передруйнування; l_c – критичне значення l_s .

Щоб спростити розв'язання задачі, вважатимемо $\delta_{\max} - \delta_{\min}$ однаковим і під час зростання, і спадання навантаження, що піде в запас довговічності. Тому за результатом праць [6, 9] знайдемо

$$\begin{aligned} \delta_{\max} - \delta_{\min} &= 0,5 \delta_{\max} (1 - R)^2 = 0,5 K_{I\max}^2 E^{-1} \delta_{of}^{-1} (1 - R)^2 \\ l_f - 0,25 l_s (1 - R)^2 &= 0,1 \sigma_{of}^{-2} K_{I\max}^2 (1 - R)^2, \end{aligned} \quad (5)$$

де $R = p_{\min} p_{\max}^{-1}$ – коефіцієнт асиметрії циклу. На цій підставі, а також результатів [6, 9] співвідношення (4) набуде вигляду

$$\begin{aligned} W_C^{(1)} &= 0,0368 \alpha \beta \varepsilon_{fc} K_{fc}^{-2} \sigma_{of}^{-1} \int_L [K_{I\max}(\xi, 0) - K_{I\min}(\xi, 0)]^4 d\xi; \\ \gamma_s &= 0,2944 \varepsilon_{fc} K_{fc}^{-2} (\Delta S) \sigma_{of}^{-1} \int_L (K_{I\max}(\xi, 0))^4 d\xi; \\ \Delta S &= 0,3927 \sigma_{of}^{-2} \int_L (K_{I\max}(\xi, 0))^2 d\xi \end{aligned} \quad (6)$$

Тут $K_{I\max}(\xi, 0), K_{I\min}(\xi, 0)$ – мінімальне і максимальне значення K_I для циклу.

Застосуємо метод еквівалентних площ [5, 6], згідно з яким зміна площі втомної тріщини розглядуваної конфігурації наближено така, як для кругової тріщини радіуса a рівної площі. Звідси запишемо наближені значення $K_{I\max}(\xi, 0), K_{I\min}(\xi, 0)$, як для пластини з поверхневою півкруговою тріщиною, яка розтягується рівномірно розподіленими напруженнями $\sigma = r_1 h_1^{-1} p(t)$

$$K_{I\max}(\xi, 0) = 2 r_1 h_1^{-1} \pi^{-1/2} a^{1/2} (a_1 + b_1), \quad K_{I\min}(\xi, 0) = 2 \pi^{-1/2} r_1 h_1^{-1} a^{1/2} (a_1 - b_1). \quad (7)$$

Співвідношення (7) підставляємо в (6), а потім разом з (5) – в (3). У підсумку отримаємо

$$\frac{da}{dN} = \frac{1,3\alpha\beta a^2 r_1^4 h_1^{-4} b_1^2}{\sigma_{0f}^2 [K_{fc}^2 - 1,2732a r_1^2 h^{-2} (a_1 + b_1)^2]}. \quad (8)$$

Отже, для визначення докритичного росту тріщини, коли порушиться герметичність труби, отримано диференціальне рівняння (8). Воно визначає тільки кінетику росту втомної тріщини, а для завершеної математичної моделі додамо ще початкові і кінцеві умови [5, 6]

$$N = 0, a = \sqrt{\pi^{-1} S_0}; \quad (9)$$

$$N = N_g, a = h_1. \quad (10)$$

Співвідношення (8) – (10) визначають період N_g докритичного росту втомної тріщини тільки від циклічної зміни внутрішнього тиску p .

Для врахування залишкових напружень $\sigma_3(x_1)$ (x_1 – відстань центра тріщини від середини зварного шва (рис. 1)), які діють в околі зварного шва, діємо так.

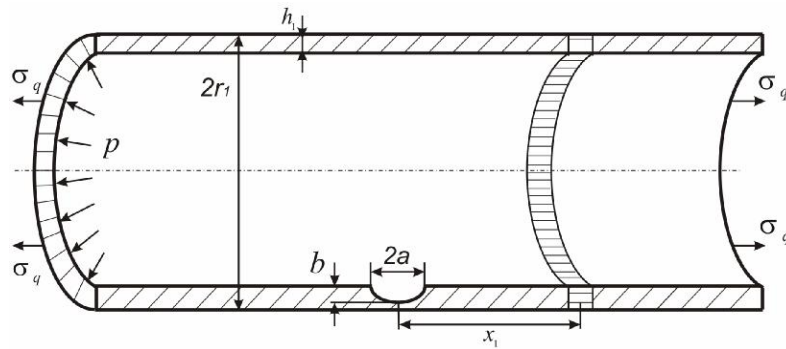


Рис. 1. Схема навантаження зварного з'єднання трубопроводу з тріщиною

Врахування зварних напружень і визначення залишкового ресурсу. В працях [11, 12] розроблено ефективний підхід для визначення залишкових напружень біля зварних швів у трубопроводах. Використовуючи цей підхід, знайдемо [11] розподіл залишкових напружень біля багат шарового зварного шва в трубопроводі $\varnothing 1420 \times 22,5$ мм; матеріал труби – сталь X70. На рис. 2 побудовано для цього випадку графічні залежності колових залишкових напружень $\sigma_3(x_1)$ від відстані x_1 до осі зварного шва. Тут крива–1 відповідає зовнішній поверхні стінки труби, а крива–2 – внутрішній. Ці графічні залежності достатньо добре можна описати такими рівняннями:

$$\sigma_3^{(1)} = \frac{48,13 - 2408,68 x_1}{1 - 109,53 x_1 + 3639 x_1^2},$$

$$\sigma_3^{(2)} = \frac{34,01 - 1691 x_1}{1 - 108,02 x_1 + 3541 x_1^2}. \quad (11)$$

Середні значення залишкових напружень $\sigma_3(x_1)$ в стінці труби визначатимемо за формулою

$$\sigma_3(x_1) = 0,5(\sigma_3^{(1)} + \sigma_3^{(2)}). \quad (12)$$

Тоді сумарні напруження в стінці труби $\sigma(x_1)$ дорівнюватимуть сумі напружень $\sigma_3(x_1)$ і напружень від внутрішнього тиску p , тобто

$$\sigma(x_1) = \sigma_3(x_1) + pr_1 h_1^{-1}. \quad (13)$$

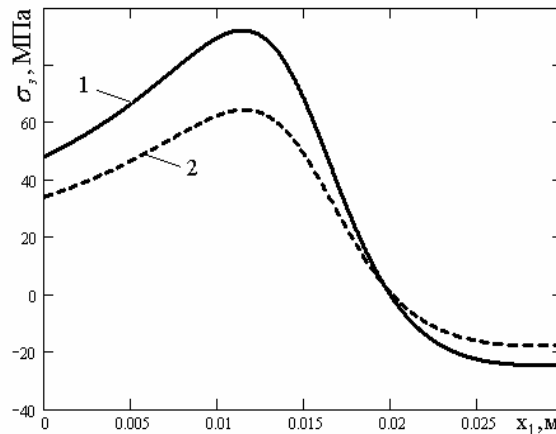


Рис. 2 Залежність залишкових напружень від відстані x_1 до осі зварного шва: 1—на зовнішній поверхні труби; 2—на внутрішній поверхні

Визначення залишкового ресурсу труби з допомогою методу еквівалентних площ. Застосуємо метод еквівалентних площ [5, 6], згідно з яким зміна площі втомної тріщини розглядуваної конфігурації наближено така, як для кругової тріщини радіуса a рівної площі. Звідси запишемо наближені значення $K_{I \max}(\xi, 0)$, $K_{I \min}(\xi, 0)$ як для пластини з поверхневою півкруговою тріщиною, яка розтягується рівномірно розподіленими напруженнями (13)

$$\begin{aligned} K_{\text{Imax}}(\xi, 0) &= 2 \left(\frac{\mathbf{a}}{\pi} \right)^{1/2} (\sigma_3(\mathbf{x}_1) + \mathbf{p} \mathbf{r}_1 \mathbf{h}_1^{-1}), \\ K_{\text{Imin}}(\xi, 0) &= 2 \pi^{-1/2} \sigma_3(\mathbf{x}_1) \mathbf{a}^{1/2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Співвідношення (14) підставляємо в (6), а потім разом з (5) – в (3). У підсумку отримаємо

$$\frac{d\mathbf{a}}{dN} = \frac{0,0675 \mathbf{p}^4 \mathbf{r}_1^4 \mathbf{h}_1^{-4} \mathbf{a}^2 \sigma_0^{-2}}{(K_{fC}^2 - 4 \pi^{-1} \mathbf{a} (\sigma_3(\mathbf{x}_1) + \mathbf{p} \mathbf{r}_1 \mathbf{h}_1^{-1})^2)}. \quad (15)$$

Отже, для визначення докритичного росту тріщини, коли порушиться герметичність труби, отримано диференційне рівняння (15). Воно визначає тільки кінетику росту втомної тріщини, а для завершеної математичної моделі додамо ще початкові та кінцеві умови [5, 6]

$$N = 0, \mathbf{a} = \sqrt{\pi^{-1} \mathbf{S}_0}; \quad (16)$$

$$N = N_g, \mathbf{a} = \mathbf{h}_1. \quad (17)$$

Співвідношення (15) – (17) визначають період N_g докритичного росту втомної тріщини тільки від циклічної зміни внутрішнього тиску $\mathbf{p}$.

Інтегруючи рівняння (15) за цих умов, отримаємо

$$\begin{aligned} N_g &= \sigma_{0f}^2 \mathbf{A}_1 (\mathbf{a}_0^{-1} - \mathbf{h}_1^{-1}) - \sigma_{0f}^2 \mathbf{A}_2 \ln \frac{\mathbf{h}_1}{\mathbf{a}_0}, \\ \mathbf{A}_1 &= 14,8131 \mathbf{p}^{-4} \mathbf{r}_1^{-4} \mathbf{h}_1^4 \mathbf{K}_{fC}^2, \\ \mathbf{A}_2 &= 18,8702 \mathbf{h}_1^4 \mathbf{p}^{-4} \mathbf{r}_1^{-4} (\sigma_3(\mathbf{x}_1) + \mathbf{p} \mathbf{r}_1 \mathbf{h}_1^{-1})^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Позаяк зона передруйнування біля контуру тріщини перебуватиме в умовах двоосового розтягу-стискання, то усереднене значення σ_{0f} напружень в цій зоні знаходимо з допомогою умови пластичності Губера-Мізеса

$$\sigma_{0f} = 0,5 \left[\sigma_q + \sqrt{4\sigma_0^2 - 3\sigma_q^2} \right]. \quad (19)$$

Обчислювати залишковий ресурс N_g будемо за таких параметрів роботи труби нафтопроводу, розмірів вихідної тріщини і констант матеріалу $\mathbf{r}_1 = 0,512 \text{ м}$, $\mathbf{h}_1 = 0,012 \text{ м}$, $\mathbf{p} = 4,5 \text{ МПа}$, $\sigma_{0f} = 420$, $\mathbf{K}_{fC} = 86 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$, $\mathbf{a}_0 = 0,0014 \text{ м}$, $\mathbf{a}_1 = \mathbf{b}_1 = 2,2 \text{ МПа}$, $\sigma_0 = 420 \text{ МПа}$.

Підставляючи в (18) вищезгадані значення відповідних параметрів і проводячи обчислення, на рис. 3 побудовано графічну залежність залишкового ресурсу N_g від відстані тріщини $\mathbf{x}_1$ від осі зварного шва.

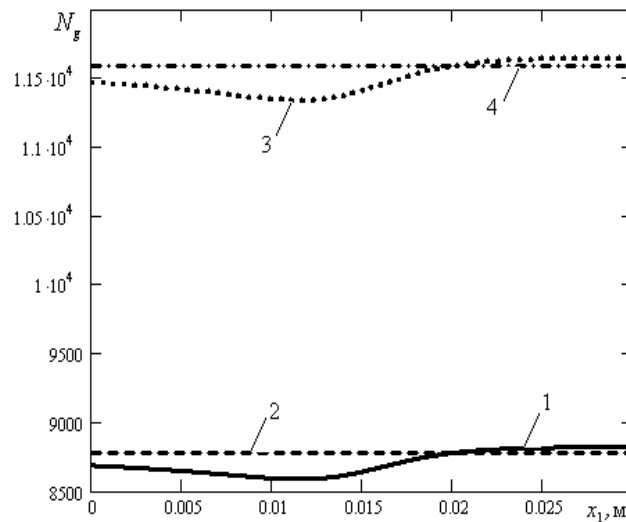


Рис. 3. Графічна залежність залишкового ресурсу N_g зварного з'єднання від відстані x_1 тріщини до осі зварного шва: 1 – з врахуванням всіх параметрів навантаження; 2 – $\sigma_z(x_1) = 0$; 3 – $\sigma_q = 0$; 4 – $\sigma_q = 0$, $\sigma_z(x_1) = 0$.

ВИСНОВКИ

1. Сформульовано математичну модель і узагальнено метод еквівалентних площ на випадок визначення залишкового ресурсу зварного з'єднання магістрального трубопроводу з тріщиною.
2. На підставі проведеного чисельного експерименту з'ясовано, що неврахування зварних напружень у разі визначення залишкового ресурсу зварного з'єднання магістрального трубопроводу може привести до значної переоцінки його залишкового ресурсу і непередбачуваної аварії.

-
1. Анучкин М. П., Горницкий В. Н., Мирошниченко Б. Л. Трубы для магистральных трубопроводов. – М., 1986.
 2. Иванцов О. М., Харитонов В. И. Надежность магистральных трубопроводов. М., 1978.
 3. Анненков Н. П., Анучкин М. П. Оценка прочности магистральных трубопроводов методами линейной механики разрушения. – Труды ВНИИСТ, 1974. Вып.30.
 4. Агапкин В. М. Кривошеин Б. Л. Методы защиты трубопроводов от разрывов при неустановившихся режимах. Москва, 1976.

5. *Андрейків О. Є., Іваницький Я. Л., Терлецька З. О., Кіт М. Б.* Оцінка довговічності труби нафтогону з поверхневою тріщиною під двовісним блочним навантаженням // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2004. – № 3. С. 103 – 108.
6. *Андрейків О. Є., Кушнір Р. М., Цирульник О. Т.* Визначення залишкового ресурсу труби нафтопроводу з урахуванням наявних дефектів у її стінці і реальних умов експлуатації // *У зб. "Проблеми ресурсу і безпеки експлуатації конструкцій, споруд та машин"* – Київ, 2006. – С. 328 – 331.
7. *Походня И.К.* Сварочные материалы: состояние и тенденции развития // *У кн. "Прогресивний матеріал і технології"* – Київ, 2003. – Т.1. – С. 7–32.
8. *Махненко В.И.* Расчетные методы исследования кинетики сварочных напряжений и деформации. – К., 1975.
9. *Андрейків О.Є., Кіт М.Б.* Визначення періоду докритичного росту тріщин в елементах конструкцій при їх двохчастотному навантаженні // *Машинознавство* – 2006, №2 – С. 3–7.6.1.4
10. *Андрейків О.Є., Кіт М.Б., Сас Н.Б.* Енергетичні критерії в механіці заповільненого руйнування матеріалів // *Зб. тез доповідей 7-го Міжнародного симпозіуму українських інженерів-механіків у Львові* – Львів, 18–20 травня 2005р. – С. 4–5.
11. *Осадчук В.А., Драгілев А.В., Банахевич Ю.В., Пороховський В.В.* Діагностування залишкових напружень у нафтогазопроводах в околі кільцевих зварних швів розрахунково-експериментальним методом // *Машинознавство.* – 2003. – №11. – С. 23–27.
12. *Драгілев А.В., Осадчук В.А.* Математична модель розрахунково-експериментального визначення залишкових напружень в магістральних трубопроводах біля монтажних швів // *Всеукраїнський щоквартальний науково-технічний журнал "Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ".* – Івано-Франківськ, 2005. – №1(14). – С. 25–29.

**ВЛИЯНИЕ СВАРНЫХ ШВОВ НА ОСТАТОЧНУЮ
ДОЛГОВЕЧНОСТЬ НЕФТЕПРОВОДОВ****Марьяна КИТ**

*Львовский национальный университет имени Ивана
Франко,
ул. Университетская, 1 79000 Львов, Украина*

Предложено эффективный подход для определения остаточного ресурса сварного соединения магистрального трубопровода с внутренней поверхностной трещиной. В основу подхода положены ранее разработанные автором математическая модель для определения периода докритического роста усталостных трещин и метод эквивалентных площадей для приближенной реализации данной модели. На основе этого построена зависимость остаточного ресурса нефтепровода от расстояния трещины к оси сварного шва.

Ключевые слова: остаточная долговечность, трубопровод, трещина, сварные швы.

**INFLUENCE OF WELDED SEAMS ON THE RESIDUAL
LIFE OF THE OIL PIPELINE.****Maryana Kit**

*Ivan Franco National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine*

An effective approach to evaluation of the residual life of a welded joint of main pipeline with an internal surface crack has been proposed. The approach is based on the previous mathematical model for determination of the fatigue cracks sub critical growth period, developed by the author and method of equivalent areas for approximate realization of the given model. On this basis the dependence of the residual life of a petroleum pipeline on the crack distance to the weld axis has been calculated

Key words: residual life, pipeline, crack, fatigue, welded seam.

Стаття надійшла до редколегії 12.05.2009

Прийнята до друку 22.12.2010

УДК 539.377

НАПРУЖЕНИЙ СТАН ТИТАНОВОЇ ОБОЛОНКИ ОБЕРТАННЯ ПРИ ЛОКАЛЬНОМУ НАГРІВІ З ВРАХУВАННЯМ ФАЗОВИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Олександр ГАЧКЕВИЧ^{1,2}, Богдан ДРОБЕНКО¹, Володимир
АСТАШКІН¹, Степан БУДЗ¹, Ігор ЧУПИК¹

¹Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.
Підстригача НАН України, вул. Наукова, 36, 79053 Львів, Україна

²Політехніка Опольська,
вул. Станіслава Миколайчука, 5, 45-271 Ополь, Польща

Розроблено числову методику визначення напруженого стану локально нагрітої
оболонки обертання, яка виготовлена з титанового сплаву. Враховано ефект зміни
об'єму при фазовому переході.

Ключові слова: фазові перетворення, залишкові напруження.

Для підвищення міцності і надійності конструкційних елементів із титанових сплавів широко використовують технології обробки, які ґрунтуються на локальному нагріві. При такому нагріві в локальних областях змінюється фазовий склад, що приводить до появи залишкових напружень і може бути причиною руйнування виробів. Внаслідок перетворень у конструкції можуть формуватися напруження, які додатково впливають на її напружений стан. Тому актуальним є формулювання і розв'язування задачі визначення напруженого стану й оптимізації режимів локального нагріву тонких оболонок в діапазоні температур фазового перетворення в матеріалі. Рівні таких напружень потрібні також для оцінки різних функціональних і екологічних параметрів відповідних елементів конструкцій і приладів [1].

Математична теорія оптимального локального нагріву викладена в [2-3]. Ця теорія побудована для матеріалів і режимів нагріву без структурних перетворень. Наша мета - розв'язати задачу визначення тимчасових і залишкових напружень у титановій оболонці обертання з врахуванням фазових перетворень.

У загальному випадку задача кількісної оцінки фазового складу титанових сплавів і зумовлених ними залишкових (структурних) напружень вимагає побудови кінетичних рівнянь, які описують еволюцію фазового складу з врахуванням впливу на неї температури, напруження та часу. Для виробів з титанових сплавів, які піддаються монотонному охолодженню, можна використовувати моделі, які ґрунтуються на використанні експериментальних даних про вплив умов нагрівання-охолодження на фазовий склад сплаву. Визначений на підставі цієї моделі фазовий склад може бути використаний для прогнозування властивостей

виробу і кількісної оцінки, які виникають у залишкових (структурних) напруженнях, які вносять значний вклад у величину сумарних експлуатаційних напружень [4,5].

Мета нашої праці - математичне моделювання і дослідження напруженого стану оболонки обертання, внутрішнього та зовнішнього радіуса r_0 , r_1 , яка виготовлена з титанового сплаву ВТ-23 при локальному кільцевому осесиметричному нагріванні (рис.1). Приймаємо, що оболонка механічно не навантажена. Температура нагрівання оболонки змінюється уздовж осі циліндра і набуває вигляду

$$t = t(t_0, t_1, z_0, z, r, \tau), \quad (1)$$

де t_0 - температура навколишнього середовища; t_1 - максимальна температура в центрі зони нагрівання, z_0 - півширина локальної зони нагрівання; z_1 - довжина оболонки; z - осьова координата; r - радіальна координата; τ - час.

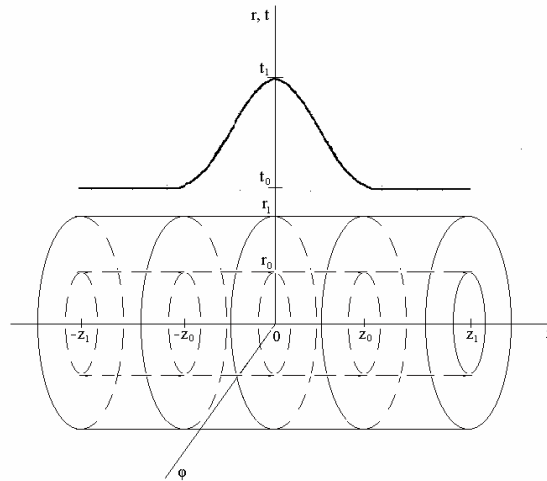


Рис.1. Локальне нагрівання оболонки

У рівноважному стані при температурі $t_0 = 20^\circ\text{C}$ титановий сплав ВТ-23 має 80% α -фази (гексагональна щільноупакована ґратка) і 20% β -фази (об'ємноцентрована кубічна ґратка). Під час нагрівання сплаву від температури початку фазових перетворень $t_{f0} = 520^\circ\text{C}$ до температури завершення фазових перетворень $t_{f1} = 920^\circ\text{C}$, кількість β -фази в ньому збільшується до 100 %. Різниця питомих об'ємів α і β фаз становить приблизно 2,5%, що суттєво впливає на розподіл і величину напружень, які зумовлені нагріванням і неоднорідним розподілом фаз після його завершення [4].

На рис. 2 зображено графік лінійної апроксимації експериментально визначеної залежності кількості β -фази (Ξ) від температури t при рівномірному нагріванні (крива 1) і експериментально визначеного відносного вмісту залишкової β -фази в матеріалі під час охолодження (крива 2) [5].

Методика чисельного моделювання фізико-механічних процесів у локально нагрітій титановій оболонці з врахуванням фазових перетворень побудована з використанням методу скінченних елементів (МСЕ). У цьому разі для апроксимації температурно-залежних властивостей матеріалу запропоновано інтерполяційні сплайни, які побудовані по точках кривих, що описують поведінку матеріалу у широкому температурному діапазоні (такий підхід допомагає описувати реальні криві практично довільної складності).

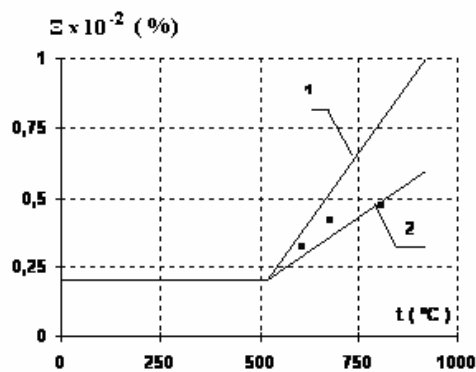


Рис. 2. Лінійна апроксимація залежності кількості β -фази (Ξ) від температури

Розв'язок сформульованої математичної задачі виконуємо у два етапи. На першому нестационарну температурну задачу (внаслідок проведення стандартної процедури кінцево-елементної дискретизації варіанту методу зважених залишків) зводимо до системи звичайних диференціальних рівнянь стосовно невідомих значень температури у вузлах кінцевого елемента. Розв'язок отриманої задачі Коші знаходимо за допомогою простих однокрокових алгоритмів, які допомагають обчислювати зі змінним кроком і порядком. Визначений на цьому етапі розподіл температури є вхідним параметром для задачі другого етапу: визначення тимчасових і залишкових (структурних) напружень.

На першому етапі формулюється і розв'язується задача теплопровідності. Якщо сформульовані припущення, то розподіл температури в оболонці описується рівнянням теплопровідності

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (2)$$

при таких граничних і початкових умовах:

$$\frac{\partial t}{\partial r} = 0 \text{ при } r = r_0, \quad \lambda \frac{\partial t}{\partial r} = k(t - t_0) \text{ при } r = r_1, \quad (3)$$

$$t(r, \tau) = t_0 \text{ при } \tau = 0, \quad (4)$$

де λ - коефіцієнт теплопровідності; c - питома теплоємність; ρ - густина матеріалу; k - коефіцієнт теплообміну; t_0 - початкова температура.

Приймаємо, що зміна фазового складу матеріалу під час нагрівання впливає на рівень тимчасових напружень, а залишкові напруження є наслідком фіксації неоднорідного фазового складу матеріалу при охолодженні.

Під час нагрівання сумарна зміна об'єму матеріалу оболонки складається з двох частин - теплової de_t і структурної de_ξ

$$de_T = de_t + de_\xi. \quad (5)$$

Тут $de_t = 3\alpha_t dt$, $de_\xi = 3\beta_t d\xi$, α_t - лінійний коефіцієнт теплового розширення, β_t - лінійний коефіцієнт структурної дилатації під час нагрівання (дилатація, яка залежить від відносного вмісту фаз). У загальному випадку коефіцієнти α_t і β_t є функціями температури. Варто зауважити, що в діапазоні температур фазового перетворення титанового сплаву температурна компонента зміни об'єму de_t зі збільшенням температури збільшується, а структурна de_ξ , зменшується [5].

Якщо дуже повільне або стаціонарне нагрівання, то в кожній точці матеріалу усталюється деякий фазовий склад, який залежить від температури в цій точці (ступінь повноти фазового перетворення Ξ є функцією лише температури t). Повну відносну зміну об'єму тут можна визначити з рівняння [5]

$$de_T = 3\alpha^*(t)dt, \quad (6)$$

де $\alpha^*(t) = \alpha_t + \beta_t d\xi/dt$ - узагальнений лінійний коефіцієнт теплового розширення, який залежить від усіх змін об'єму, що відбулись в оболонці під час нагрівання (рис.3).

Після охолодження неоднорідний розподіл фаз приводить до залишкового (структурного) напруженого стану. У цьому випадку зміну об'єму визначаємо на підставі співвідношення [6]

$$d\mathbf{e}_{\Xi} = 3\beta_{\xi} d\Xi, \quad (7)$$

де β_{ξ} лінійний коефіцієнт структурної дилатації після охолодження титанового славу.

На другому етапі тимчасові та залишкові напруження знаходимо за допомогою формули [7]

$$d\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(d\mathbf{e}_{ij} + \frac{1}{1-2\nu} [\nu d\mathbf{e} - (1+\nu) d\mathbf{e}_a] \delta_{ij} \right). \quad (8)$$

Тут $d\sigma_{ij}$ - прирости компонент тензора напружень; $d\mathbf{e}_{ij}$ - прирости компонент тензора деформацій; E - модуль Юнга; ν - коефіцієнт Пуассона; $\mathbf{e} = \mathbf{e}_{11} + \mathbf{e}_{22} + \mathbf{e}_{33}$; δ_{ij} - символи Кронекера; $\mathbf{a} = \mathbf{T}, \Xi$, $\mathbf{i}, \mathbf{j} = (1, 2, 3)$.

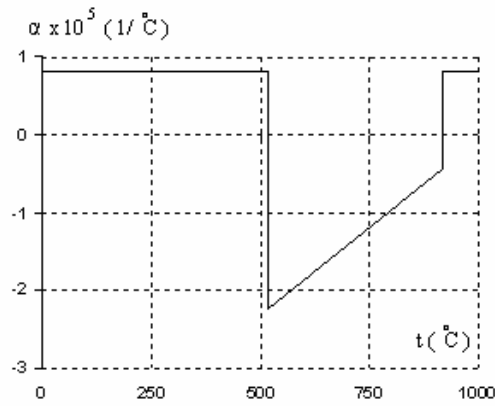


Рис. 3. Узагальнений лінійний коефіцієнт теплового розширення

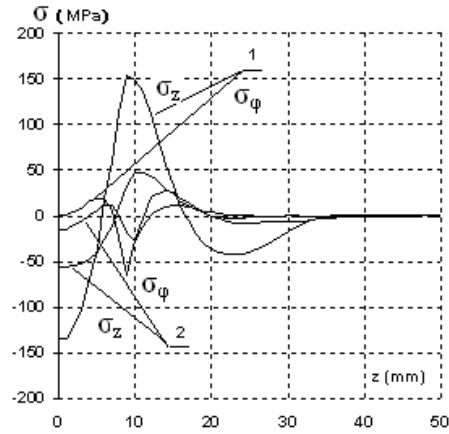


Рис. 4. Тимчасові та залишкові напруження

На рис. 4 зображено графіки розподілу тимчасових (крива 1) і залишкових (крива 2) осьових σ_z і кільцевих σ_φ напружень оболонки. Обчислення проводили за такими геометричними та фізичними параметрами: $z_0=0,028$ м, $z_1=0,05$ м, $r_0=0,024$ м, $r_1=0,025$ м, $t_0=20^\circ\text{C}$, $t_1=720^\circ\text{C}$, $E=106^\circ\text{МПа}$, $\nu=0,3$, $k=10^{-2}\text{КВт}/(\text{м К})$, $\lambda=21,9^\circ\text{Вт}/(\text{м К})$, $\rho=4540^\circ\text{кг}/\text{м}^3$, $c=0,523^\circ\text{Дж}/(\text{К моль})$. Тимчасові напруження відповідають моменту часу, коли було досягнуто розподіл температури (1.).

Із отриманих результатів випливає, що при локальному нагріванні тимчасові напруження приблизно втричі перевищують залишкові в тих самих точках тіла. На величину і розподіл тимчасових і залишкових напружень можна впливати шляхом вибору поля локального нагрівання.

-
1. Аспекты социальной политики в области безопасности производственной среды/ М. Гаек, Н. Иванова, И. Мулицка, С Рябов, Л. Шварцбург. – Москва; Ополе, 2005.
 2. Григолюк Э.И., Подстригач Я.С., Бурак Я.И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин. К., 1979.
 3. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. – К., 1970.
 4. Ломакин В.А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел – М., 1970.
 5. Ильин А.А., Коллеров М.Ю., Засыпкин В.В., Майстров В.И. Объемные изменения, происходящие в титановых сплавах при полиморфном превращении // Металловедение и термическая обработка. 1986. №1. С.52-55.
 6. Monkawa M., Nagaki S. and Inine T. Analyses of structural and stress changes during quenching and low-temperature-tempering of steels. The Journal of Society Material Science, Japan. 1980. Vol.29. N 327. P.1173-1179.
 7. Budz S., Astashkin W., Budz I. and Chupyk I. Optimization of local heating for a spherical shell made of titanium alloy BT-23. Archives of mechanics. Warszawa, 1998. Vol.50. N 1. P.113-126.

**НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТИТАНОВЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ
ЛОКАЛЬНОМ НАГРЕВЕ С УЧЕТОМ ФАЗОВЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ**

**Александр ГАЧКЕВИЧ^{1,2}, Богдан ДРОБЕНКО¹, Владимир АСТАШКИН¹,
Степан БУДЗ¹, Игорь ЧУПИК¹**

¹*Институт прикладных проблем механики и математики
им. Я.С Подстригача НАН Украины, ул. Научная, 3б 79053 Львов, Украина*

²*Политехника Опольская,
ул. Станислава Николайчука, 5 45-271 Ополе, Польша*

Разработана численная методика определения напряженного состояния локально нагретой оболочки вращения, изготовленной из титанового сплава. Учен эффект изменения объема при фазовом переходе.

Ключевые слова: фазовые превращения, остаточные напряжения, термомеханические процессы.

**STRESS STATE OF TITANIUM CIRCULAR SHELL DURING LOCAL
HEATING TAKING INTO ACCOUNT PHASE TRANSITION**

**Oleksandr HACHKEVYCH^{1,2}, Bogdan DROBENKO¹, Volodymyr
ASTASHKIN¹, Stepan BUDZ¹, Ihor CHUPYK¹**

¹*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
Naukova Str., 3b, 79053 Lviv, Ukraine*

²*Technical University of Opole,
Stanislawa Mikolajchuka Str., 5, 45-271 Opole, Poland*

The problem of numerical modelling for stress state of local heating for circular shell made of titanium alloy is posed and solved. The effect of the volume changes occurring during phase transition is taken into account.

Key words: phase transitions, residual stresses, thermo-mechanical processes.

Стаття надійшла до редколегії 10.11.2009

Прийнята до друку 22.12.2010

УДК 539.375

ОЦІНКА ДОВГОВІЧНОСТІ ТРУБНИХ ЕЛЕМЕНТІВ НА СТАДІЇ РОСТУ ВТОМНОЇ ПОВЕРХНЕВОЇ ПІВЕЛІПТИЧНОЇ ТРІЩИНИ

Мирон СТАДНИК, Іван ДІДУХ

Національний лісотехнічний університет України,
вул. Генерала Чупринки, 103 79057 Львів, Україна

Розглянуто проблеми оцінки ресурсу трубних елементів конструкцій, підданих дії циклічного навантаження на стадії росту поверхневої півеліптичної тріщини.

Ключові слова: втомна тріщина, залишкова довговічність, циклічне навантаження.

Для дослідження росту втомної поверхневої півеліптичної тріщини (рис. 1,а) в пружно-пластичному тілі під циклічним навантаженням $p(t)$, запропоновано диференціальне рівняння в частинних похідних, яке отримали на підставі відомих в літературі результатів [1, 2], у якому швидкість росту тріщини V є однозначною функцією максимального розкриття її вершини $\delta_{\max} = \delta|_{p=p_{\max}}$ на стадії навантаження (рис. 1,б) для заданої асиметрії $R = p_{\min} / p_{\max}$. Максимальне розкриття вершини тріщини визначаємо аналітично на підставі результатів [3].

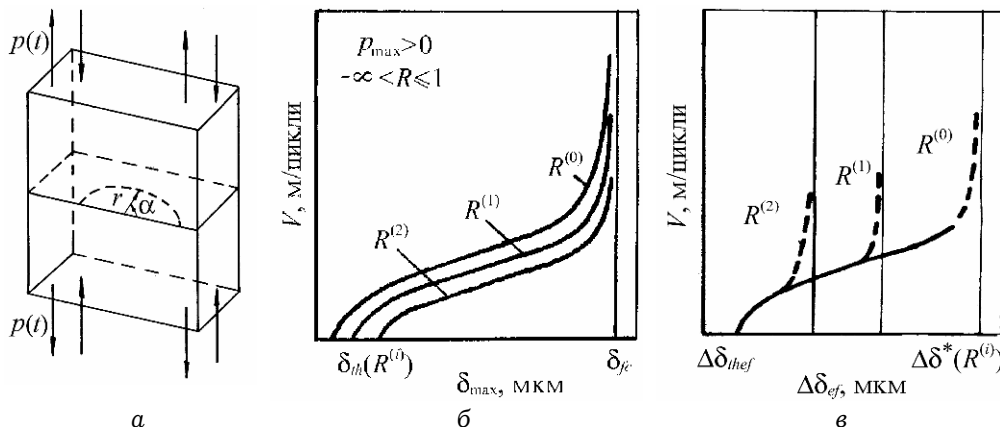


Рис. 1. Втомна поверхнева півеліптична тріщина в тривимірному тілі (а), схематичне зображення діаграм росту втомної тріщини в осях $V \sim \delta_{\max}$ (б), і $V \sim \Delta \delta_{ef}$ (в)

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{N}} \left[1 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \right)^2 \right]^{-1/2} = V(\lambda, \mathbf{A}, \mathbf{m}, \lambda_0), \quad \mathbf{r}(\alpha, \mathbf{N})|_{\mathbf{N}=0} = \mathbf{r}_0(\alpha), \quad (1)$$

де $V(\lambda, \mathbf{A}, \mathbf{m}, \lambda_0) = \frac{1}{\mathbf{A}(\mathbf{R})} [(\lambda_0(\mathbf{R}) / (\lambda_0(\mathbf{R}) - \lambda))^{\mathbf{m}(\mathbf{R})} - 1]^{-1}$, $\lambda = 1 - \sqrt{\delta_{\max} / \delta_{fc}}$,

$\lambda_0 = 1 - \sqrt{\delta_{th} / \delta_{fc}}$; N – кількість циклів; $\mathbf{A}, \mathbf{m}$ – константи матеріалу, які визначають на підставі даних експерименту і є різними (рис. 1,б) для кожної асиметрії циклічного навантаження; δ_{th} – константа матеріалу для заданої асиметрії навантаження, порогове значення розкриття вершини втомної тріщини, нижче якого вона не росте; δ_{fc} – константа матеріалу, критичне значення розкриття вершини втомної тріщини, інваріант стосовно асиметрії навантаження.

Для того, щоб більш адекватно описати процеси пластичного деформування, які відбуваються у вершині фізичної тріщини під час дії на тіло циклічного навантаження, перейдемо в диференціальному рівнянні (1) від координат $\mathbf{V} \sim \delta_{\max}$ до координат $\mathbf{V} \sim \Delta\delta_{ef}$ за формулою

$$\delta_{\max} = \Delta\delta_{ef} / (\mathbf{U}_1^2 / 2), \quad (2)$$

де $\Delta\delta_{ef} = \delta_{\max} - \delta_{\min}$ – розмах розкриття вершини тріщини з урахуванням пластичних витяжок, що формуються на її берегах, внаслідок виникнення залишкових деформацій при проходженні через пластичну зону; $\delta_{\min} = \delta|_{p=p_{\min}}$ на стадії розвантаження; $\mathbf{U}_1$ – відома в літературі функція, яку знаходять шляхом розв'язання відповідних граничних задач теорії тріщин або з експерименту і є функцією асиметрії для автотомельної тріщини та асиметрії і рівня зовнішнього навантаження для неавтотомельної тріщини.

Використовуючи формули (1) і (2), одержуємо

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{N}} \left[1 + \frac{1}{\mathbf{r}^2} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \right)^2 \right]^{-1/2} = \frac{1}{\mathbf{A}_1} \left[\left(\frac{\sqrt{\Delta\delta^*(\mathbf{R})} - \sqrt{\Delta\delta_{thef}}}{\sqrt{\Delta\delta_{ef}} - \sqrt{\Delta\delta_{thef}}} \right)^{\mathbf{m}_1} - 1 \right]^{-1}. \quad (3)$$

Тут швидкість росту тріщини є однозначною функцією ефективного розмаху розкриття її вершини $\Delta\delta_{ef}$ ($\Delta\delta_{thef} \leq \Delta\delta_{ef} < \Delta\delta^*(\mathbf{R})$) і не залежить від асиметрії навантаження на першій і другій ділянках діаграми втомного руйнування (рис. 1, в); $\Delta\delta_{thef} = \Delta\mathbf{K}_{thef}^2 / (2\sigma_0\mathbf{E})$ – константа матеріалу, інваріант стосовно асиметрії навантаження, порогове значення ефективного розмаху розкриття вершини втомної тріщини, нижче якого тріщина не росте, $\Delta\delta^*(\mathbf{R}) = \delta_{fc}\mathbf{U}_1^2 / 2$, константи $\mathbf{A}_1, \mathbf{m}_1$ є інваріантними щодо асиметрії навантаження, тому для їхнього визначення достатньо побудувати лише одну діаграму втомного руйнування.

Для визначення параметра ефективного розмаху розкриття вершини тріщини $\Delta\delta_{ef}$, який входить у диференціальні рівняння (3), розглянемо зміну напружено-деформованого стану в її вершині протягом одного циклу навантаження (рис. 2,а).

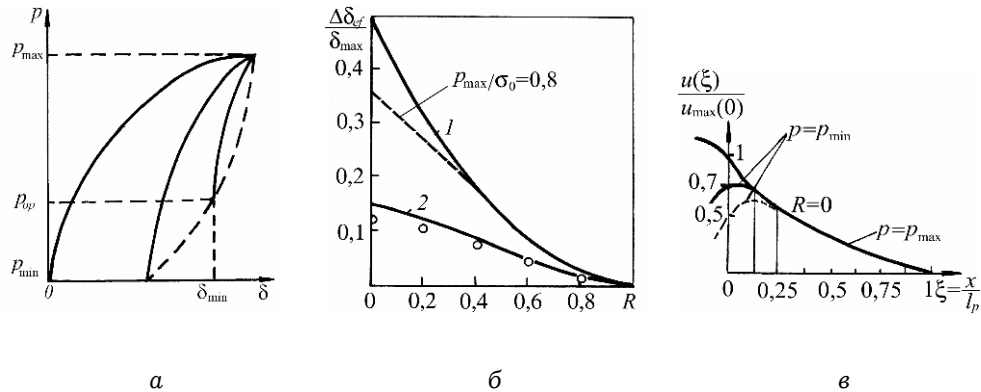


Рис. 2. Залежність величини розкриття вершини тріщини $\delta_{\min}$ від напруження $p(t)$ за один цикл навантаження (а), зміна відносного розмаху розкриття вершини тріщини залежно від асиметрії навантаження (б), зміна переміщення $u(\xi)$ берегів модельного розрізу і розмірів циклічної пластичної зони за наявності пластичних витяжок на берегах втомної тріщини (в)

Тоді, зберігаючи структуру формули для визначення мінімального розкриття вершини ідеальної тріщини

$$\delta_{\min} = (1 - \frac{1}{2}(1 - R)^2)\delta_{\max}, \quad (4)$$

і припускаючи, що зі зміною напружень $p_{\min} \leq p \leq p_{op}$ $\delta_{\min}$ залишається сталим на стадії розвантаження ($p = p_{\max} - \Delta p$, $\Delta p = p_{\max} - p_{\min}$) та довантаження ($p = p_{\min} + \Delta p$), в формулі (4), у виразі для асиметрії замість $p_{\min}$ ставимо величину p_{op} , тоді отримаємо

$$\Delta \delta_{ef} = ((U_1)^2 / 2)\delta_{\max}; \quad (5)$$

$$\Delta \delta_{ef} = (2l_{pf} / l_p)\delta_{\max}, \quad l_{pf} = (U_1)^2 / 4l_p. \quad (6)$$

Тут $U_1 = 1 - p_{op} / p_{\max}$, l_{pf}, l_p – відповідно, статична та циклічна пластичні зони. У випадку відомої в літературі функції $U_1(R) = 1 - (0,45 + 0,2 R + 0,25 R^2 + 0,1 R^3)$, визначеної теоретично для $R \geq 0$, отримане за формулою (5) відносне значення $\Delta \delta_{ef}$ (рис. 2,б, крива 2) добре узгоджуються з експериментальним [4], а максимальна відносна похибка при $R = 0$ не перевищує 10%. На підставі результатів, поданих на рис. 2,б, можна зазначити межі застосування формули (5) для визначення

$\Delta \delta_{ef}$, якщо $U_1(\mathbf{R}) = 1 - \mathbf{R}$ (ідеальна тріщина, крива 1). Вона прийнятна для автомодельної тріщини при $\mathbf{R} \geq 0,7$ і для неавтомодельної (рис. 2,б, штрихова лінія) – при $\mathbf{p}_{\max} / \sigma_0 \geq 0,8$ (σ_0 – усереднене значення напружень, задане на берегах модельної тріщини, згідно з узагальненою δ_k -моделлю). Визначати $\Delta \delta_{ef}$ можна також за формулою (6) через величину циклічної пластичної зони. Як впливає з формули (6), завдяки наявності пластичних витяжок на берегах втомної тріщини зменшуються розміри циклічної пластичної зони, а відповідно, і ефективний розмах розкриття вершини тріщини $\Delta \delta_{ef}$. На рис. 2,в показано, що для автомодельної тріщини при $\mathbf{R} = 0$ частина пластичної області, яка циклується з урахуванням наявності пластичних витяжок товщиною $\mathbf{h}_{res} = \mathbf{u}_{\min}$ на берегах тріщини, становить 0,12 від всієї пластичної області. Без урахування пластичних витяжок зона циклічного пластичного деформування значно збільшується і становить 0,25 – відомий в літературі результат [5]. Величина $\Delta \delta_{ef}$ зменшується на 20% порівняно з ідеальною тріщиною.

Диференціальне рівняння в частинних похідних (3) використаємо для опису кінетики втомної поверхневої півеліптичної тріщини, віднесеної до полярної системи координат $\mathbf{Or}\alpha$ в площині тривимірного тіла (рис. 1,а). За припущенням, що півеліптична тріщина в процесі свого розвитку від початкового розміру до критичного залишається півеліптичною [6], тоді її радіус-вектор $\mathbf{r}(\alpha, N)$ визначається за формулою

$$\mathbf{r}(\alpha, N) = \mathbf{a}(N)\mathbf{c}(N) / \sqrt{\mathbf{a}^2(N)\cos^2 \alpha + \mathbf{c}^2(N)\sin^2 \alpha}, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi. \quad (7)$$

Очевидно, для виявлення розмірів контура поверхневої півеліптичної тріщини під циклічним навантаженням достатньо знати розвиток її півосей $\mathbf{a}(N)$ і $\mathbf{c}(N)$. Для їхнього знаходження диференціальне рівняння в частинних похідних (3) запишемо у двох точках контура тріщини

$$(\alpha = \pi/2, \quad \text{і} \quad \alpha = 0). \quad \text{Враховуючи, що} \quad \mathbf{r}(\pi/2, N) = \mathbf{a}; \quad \mathbf{r}(0, N) = \mathbf{c},$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=\pi/2} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} = 0, \text{ отримаємо}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{a}}{dN} &= \mathbf{V}(\mathbf{A}_1, \mathbf{m}_1, \Delta \delta_{thef}, \lambda^{(1)}), \quad \lambda^{(1)} = 1 - \sqrt{\Delta \delta_{ef}^{(1)} / \Delta \delta^*(\mathbf{R})}, \\ \frac{d\mathbf{c}}{dN} &= \mathbf{V}(\mathbf{A}_1, \mathbf{m}_1, \Delta \delta_{thef}, \lambda^{(2)}), \quad \lambda^{(2)} = 1 - \sqrt{\Delta \delta_{ef}^{(2)} / \Delta \delta^*(\mathbf{R})}, \quad \mathbf{a}(0) = \mathbf{a}_0, \quad \mathbf{c}(0) = \mathbf{c}_0, \end{aligned} \quad (8)$$

де $\Delta\delta_{ef}^{(1)} = \Delta\delta_{ef} \big|_{\alpha=\pi/2}$, $\Delta\delta_{ef}^{(2)} = \Delta\delta_{ef} \big|_{\alpha=0}$, $\mathbf{a}_0, \mathbf{c}_0$ – відповідно, мала і велика півосі початкової поверхневої півеліптичної тріщини.

Якщо швидкість росту втомної тріщини описується диференціальними рівняннями (1) або (3), то для обчислення констант матеріалу $\mathbf{A}, \mathbf{m}$ ($\mathbf{A}_1, \mathbf{m}_1$) за допомогою методу найменших квадратів отримаємо такі формули:

$$\mathbf{a}_1(\mathbf{m})\mathbf{a}_2(\mathbf{m}) - \mathbf{n}_1\mathbf{a}_3(\mathbf{m}) = 0, \quad \mathbf{A} = 10^{-\mathbf{a}_1(\mathbf{m})/\mathbf{n}_1},$$

де

$$\mathbf{a}_1(\mathbf{m}) = \sum_{i=1}^{n_1} \lg(x_i^{\mathbf{m}} - 1) \mathbf{V}_i^e, \quad \mathbf{a}_2(\mathbf{m}) = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{x_i^{\mathbf{m}} \lg x_i}{x_i^{\mathbf{m}} - 1},$$

$$\mathbf{a}_3(\mathbf{m}) = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{x_i^{\mathbf{m}} \lg x_i}{x_i^{\mathbf{m}} - 1} \lg((x_i^{\mathbf{m}} - 1) \mathbf{V}_i^e), \quad x_i = \lambda_0 / (\lambda_0 - \lambda_i), \quad \lambda_i = 1 - \sqrt{\delta_{\max}^{(i)} / \delta_{fc}},$$

$\mathbf{V}_i^e, \delta_{\max}^{(i)}$ – координати експериментальних точок, відповідно, швидкості росту тріщини і максимального розкриття вершини; $\mathbf{n}_1$ – кількість точок експерименту; $\lambda_0 = 1 - \sqrt{\delta_{th} / \delta_{fc}}$ – визначено експериментально.

Отож, задача дослідження кінетики розвитку втомної поверхневої півеліптичної тріщини зводиться до розв'язування системи звичайних диференціальних рівнянь стосовно невідомих функцій $\mathbf{a}(\mathbf{N})$ і $\mathbf{c}(\mathbf{N})$. Після знаходження розв'язку цих рівнянь форма і розміри тріщини в довільний момент часу $\mathbf{t} = \mathbf{N} / \nu$ (ν – частота циклічного навантаження) визначаються залежністю (7).

Для визначення довговічності тіла $\mathbf{N} = \mathbf{N}_*$ і критичних розмірів тріщини $\mathbf{r}_* = \mathbf{r}(\mathbf{N}_*, \alpha)$ використовуємо критерій критичного розкриття її вершини. Вважаємо, що тіло з поверхневою півеліптичною тріщиною під циклічним навантаженням зруйнується, якщо для заданої асиметрії $\mathbf{R}$ виконується умова

$$\max \{ \Delta\delta_{ef} \big|_{\alpha=\pi/2}, \Delta\delta_{ef} \big|_{\alpha=0} \} = \Delta\delta^*(\mathbf{R}).$$

Приклад. Розглянемо трубний стояк для добування корисних копалин із дна океану, який складається зі з'єднаних за допомогою різьби трубних секцій, які транспортує корабель (рис. 3). Під впливом хвилювання океану в трубних секціях виникають циклічні напруження розтягу, що змінюються ступінчасто в робочому режимі і є регулярними в режимі штормового відстою (кожний з режимів триває по 500 год).

Задача полягає у визначенні ресурсу $\mathbf{N}_*$ трубного стояка на стадії росту в поперечному перерізі втомної півеліптичної тріщини за таких умов: матеріал – сталь 28Х2МФБД; $\sigma_{\max}^{(1)} = 400 - 500$ МПа; $\sigma_{\max}^{(2)} = 550$ МПа;

$R = 0,5$; $\nu = 0,17$ Гц; $\sigma_T = 850$ МПа; $\sigma_B = 950$ МПа; $R_1 = 112,5$ мм;
 $R_2 = 122,25$ мм; $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа; $A = 9,75 \cdot 10^4$ цикл/м; $m = 1,2$;
 $\lambda_0 = 0,93$; $\delta_{fc} = 0,021$ мм; $a_0 = 1$ мм; $c_0 = 2$ мм.

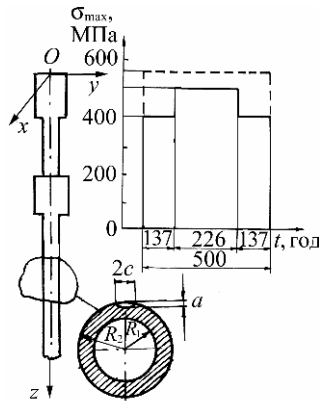


Рис. 3. Трубний стояк

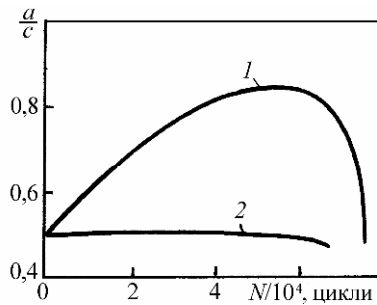


Рис. 4. Зміна відношення півосей півеліптичної тріщини від кількості циклів навантаження (1 – робочий режим; 2 – штормовий відстій)

Внаслідок розв'язання задачі визначено залишкову довговічність трубної секції і кінетику розвитку втомної поверхневої півеліптичної тріщини від початкових до критичних розмірів півосей для робочого режиму $N_*^{(1)} = 75500$ циклів (125 год), $a_*^{(1)} = 9$ мм, $c_*^{(1)} = 18,6$ мм, $a_*^{(1)} / c_*^{(1)} = 0,48$ і штормового відстою $N_*^{(2)} = 67500$ циклів (110 год), $a_*^{(2)} = 8,1$ мм, $c_*^{(2)} = 17,4$ мм, $a_*^{(2)} / c_*^{(2)} = 0,46$ (рис.4).

Отримані результати свідчать про недопустимість встановлення трубної секції в трубний стояк з початковою поверхневою тріщиною зазначених розмірів.

Отож, запропонована математична модель розвитку втомної поверхневої півеліптичної тріщини дає змогу ефективно і з достатньою для практики точністю розраховувати ресурс відповідальних трубних елементів конструкцій. Одержані результати можна використовувати для відбраковування трубних елементів конструкцій, а також визначення часу їхнього профілактичного огляду в процесі експлуатації.

1. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – К., 1968.
2. Андрейкив А. Е. Пространственные задачи теории трещин. – К., 1982.

3. Визначення величини розкриття вершини тріщини у пружнопластичних тілах /В, В. Панасюк, О. Є. Андрейків, М. М. Стадник, І. В. Дідух // Физ.-хим. механика материалов. - 1990. - № 6. - С. 53-61.
4. Newman J. C. A crack-closure model for predicting fatigue crack growth under aircraft spectrum loading // ASTM STP 748 (1981).P. 53-81
5. Elber W. Fatigue crack closure under cyclic tension. // Eng. Fract. Mech. - 1970. - 2, N1. - P. 37-45..
6. Стадник М.М., Дідух І.В. Математична модель росту поверхневої півеліптичної тріщини у пружнопластичному тілі при циклічному навантаженні // Науковий вісник: Збірник науково-технічних праць. – Львів НЛТУУ – 2007. Вип. 17.5. – С.220-226.

ОЦЕНКА ДОЛГОВЕЧНОСТИ ТРУБНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА СТАДИИ РОСТА УСТАЛОСТНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ПОЛУЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ТРЕЩИН

Мирон СТАДНИК, Иван ДИДУХ

*Національний лесотехнічний університет України,
ул. Генерала Чупринки, 103 79057 Киев, Украина*

Рассмотрены проблемы оценки ресурса трубных элементов конструкций, подверженных действию циклической нагрузки на стадии роста поверхностной полуэллиптической трещины.

Ключевые слова: усталостная трещина, остаточная долговечность, циклическое нагружение.

AN ESTIMATION OF THE LIFE TIME OF TUBULAR STRUCTURAL ELEMENTS AT THE STAGE OF FATIGUE SURFACE SEMI- ELLIPTICAL CRACK PROPAGATION

Myron STADNYK, Ivan DIDUH

*National Forestry University of Ukraine,
General Chuprinka Str., 103, 79057 Lviv, Ukraine*

The work is devoted the problems of assessing the life time of tubular structural elements at the stage of surface cracks propagation under cyclic loading.

Key words: fatigue crack, residual life time, cyclic loading.

Стаття надійшла до редколегії 12.11.2009

Прийнята до друку 22.12.2010

УДК 539.3: 538.3: 536.21: 518.12

ДО ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ ТЕРМОМЕХАНІЧНОГО СТАНУ ФЕРОМАГНІТНИХ ТІЛ ЗА ВИСОКОТЕМПЕРАТУРНОЇ ІНДУКЦІЙНОЇ ОБРОБКИ

Богдан ДРОБЕНКО¹, Олександр ГАЧКЕВИЧ^{1,2}, Ярослав БУРАК¹,
Йосип ШИМЧАК²

¹Інститут прикладних проблем механіки і математики ім.
Я.С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 36 79053 Львів, Україна

²Політехніка Опольська,
вул. Станіслава Миколайчука, 5 45-271 Ополе, Польща

Розглянуто спрощену розрахункову схему (з незалежною від напруженості поля магнітною проникністю) адекватного визначення параметрів термомеханічного стану феромагнітних тіл за високотемпературної індукційної обробки. Вимоги до комп'ютерних ресурсів (пам'ять, швидкодія) суттєво зменшуються.

Ключові слова: зв'язані поля, індукційне нагрівання, термомеханічні процеси.

Для підвищення міцності й надійності виробів з електропровідних матеріалів у сучасних технологіях термообробки широко використовують електромагнітні поля (ЕМП). Дія ЕМП на електропровідне тіло спричиняє проходження в ньому взаємозв'язаних електромагнітних, теплових і механічних процесів, які суттєво впливають на функціональні параметри та міцність. Тому для побудови раціональних режимів термообробки з використанням ЕМП і оцінки функціональної здатності виробів з електромагнітних матеріалів важливою є наявність математичних моделей і методів дослідження у взаємодії процесів електропровідності, теплопровідності й деформування в твердих електропровідних тілах залежно від їхньої електропровідності й здатності до намагнічування та поляризації.

Загальні підходи до побудови термомеханічних моделей суцільного середовища, які враховують взаємодію полів різної фізичної природи, досить детально висвітлені в літературі. На їхній основі запропоновано численні конкретні моделі опису механічної поведінки електропровідних тіл з різними електропровідністю та здатністю до поляризації та намагнічування за дії зовнішнього ЕМП. У переважній більшості прикладних праць, присвячених кількісному опису термомеханічних процесів в електропровідних тілах за термообробки з використанням ЕМП, характеристики матеріалів приймають незалежними від температури, а процеси деформування розглядають у пружному наближенні. Застосування таких моделей у випадках, коли тіла нагрівають до високих температур, може призводити до суттєвих похибок в оцінках параметрів термомеханічного стану тіл. За підвищених температур властивості електропровідних тіл є іншими, ніж у природному стані. Зокрема,

конструкційні вуглецеві сталі вже при температурах близько 550°C деформуються переважно пластично внаслідок залежності межі пружності від температури. Електропровідність таких сталей у діапазоні температур від 20°C до 1000°C може змінюватись на порядок.

Під час розгляду феромагнітних матеріалів виникає ще одна математична трудність - адекватно врахувати складну нелінійну залежність магнітної індукції від напруженості поля і температури (див. рис. 1). У цьому разі поведінку магнітно-твердих матеріалів у гармонічному ЕМП характеризує динамічна петля гістерезису (рис. 1,б). При досягненні температури Кюрі T_K феромагнітні матеріали втрачають свої феромагнітні властивості (залежність між індукцією та напруженістю магнітного поля стає лінійною і не залежить від температури).

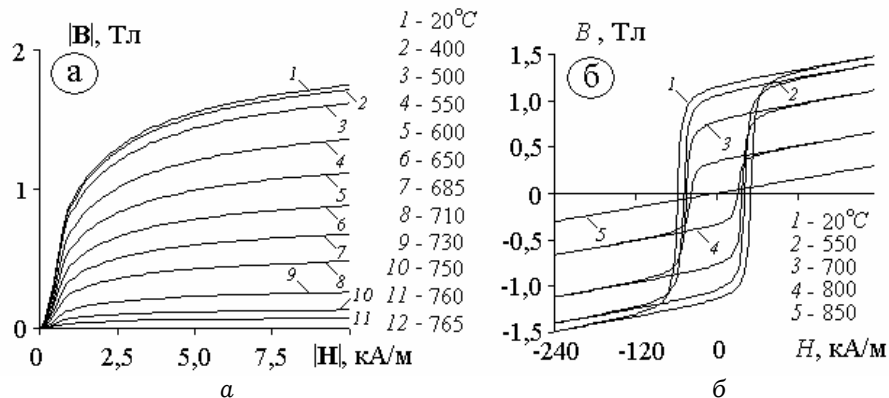


Рис. 1. Температурна залежність кривих намагнічування магнітнотвердих (а - сталь Ст. 30) та магнітно-твердих (б - сплав ЮНДК24) феромагнітних тіл

У зв'язку з зазначеним визначення параметрів, які характеризують ЕМП, температуру і напружено-деформований стан у виробках з феромагнітних матеріалів за високотемпературної індукційної обробки є доволі складною математичною проблемою. Специфіка опису взаємодії ЕМП з матеріальним континуумом, необхідність врахування термочутливості матеріалу, пружно-пластичного характеру деформування, нелінійних залежностей індукції від напруженості поля і температури приводить до зв'язаної системи нелінійних диференціальних рівнянь різних типів [1], аналітичне дослідження яких має значні труднощі. Використання відомих, добре розроблених числових підходів, які ґрунтуються на застосуванні методу скінчених елементів (для апроксимації шуканих розв'язків за просторовими координатами) у сукупності з різницевиими схемами апроксимації розв'язків за часом висуває значні вимоги щодо швидкодії і об'ємів пам'яті комп'ютерних систем вже у просторово двовимірному випадку (вимоги до дискретної моделі суттєво зростають на порядки порівняно з аналогічними для неферомагнітних тіл) [2].

Щоб зменшити обсяги обчислень, у праці [2] запропоновано ефективний алгоритм (з використанням різних кроків інтегрування за часом складових рівнянь, що описують електромагнітне, температурне та механічні поля), який дає змогу отримувати адекватні оцінки параметрів термомеханічного стану виробів з феромагнітних матеріалів за суттєво коротші часи проведення обчислювального експерименту. Однак і в цьому випадку для деяких практично важливих випадків розв'язування такої комплексної задачі навіть за наявності сучасних комп'ютерних систем виглядає досить проблематичним, зокрема, з погляду реальних обсягів і тривалості обчислень. До того ж у довідковій літературі для багатьох таких матеріалів немає інформації про нелінійні залежності магнітної індукції від напруженості магнітного поля та температури. Тому мають значний практичний інтерес спрощені розрахункові підходи для адекватного прогнозування параметрів термомеханічного стану феромагнітних тіл за дії зовнішнього ЕМП при суттєво менших обсягах обчислень.

У праці [1] досліджено вплив термочутливості властивостей магнітно-м'якого феромагнітного циліндра на отримувані розподіли термомеханічних параметрів.

Мета нашої праці:

- дослідити можливості достатньо адекватного розрахунку електромагнітних, теплових і механічних полів у феромагнітному циліндрі за високотемпературної індукційної обробки в рамках моделі термочутливого неферомагнітного пружно-пластичного тіла (без врахування нелінійної залежності магнітної індукції від напруженості магнітного поля), вимоги якої щодо комп'ютерних ресурсів суттєво менші;
- порівняти отримані результати з відповідними в рамках моделі термочутливого пружно-пластичного феромагнітного тіла (з врахуванням наявної нелінійної залежності магнітної індукції від напруженості поля);
- розробити алгоритм вибору незалежної від напруженості поля (однак залежної від температури) магнітної проникності, яка дає змогу отримувати адекватні оцінки параметрів термомеханічного стану в циліндрі за суттєво менших обсягів обчислень.

Розглянемо процес індукційної обробки вільного від механічного навантаження циліндричного феромагнітного тіла радіуса R , що перебуває в коаксіальному з ним індукторі, який моделює циліндрична поверхня радіуса R_i за заданої у ній густини струму

$$\mathbf{j}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = (0, J_0(1 - e^{-\xi t}) \sin 2\pi\omega t, 0), \quad \mathbf{r} = \mathbf{R}_i, \quad (1)$$

де ω – частота; $J_0(1 - e^{-\xi t})$ – амплітуда (параметр ξ характеризує плавність виходу на усталений режим). У початковий момент часу ЕМП у тілі й середовищі немає та заданий розподіл T_0 температури. Тіло перебуває за умов конвективного теплообміну (з коефіцієнтом β) із зовнішнім середовищем, температура якого T_s . Коли температура

циліндра на глибині h_g від поверхні досягає певної температури T_g , струм вимикаємо (приймаємо, що ЕМП в тілі немає). Далі циліндр охолоджується шляхом конвективного теплообміну з зовнішнім середовищем.

ЕМП у системі тіло – зовнішнє середовище та температурне й механічне поля у тілі описуємо, відповідно, системою рівнянь Максвелла (з нелінійними феноменологічними залежностями для тіл з різними електропровідністю та здатністю до намагнічення), теплопровідності і співвідношеннями неізотермічної термopружно-пластичної течії [1]. У цьому разі вплив ЕМП на процеси деформування та теплоперенесення враховано через пондеромоторні сили та об'ємні тепловиділення (джоулеві та пов'язані з перемагнічуванням і переполяризацією).

Математичне формулювання розглядуваної задачі для циліндра (із магнітно-м'якої сталі Ст. 30 та магнітно-твердого сплаву ЮНДК24) і методику її розв'язування достатньо опрацьовано у [1–3]. Розглянемо результати обчислювального експерименту, проведеного з метою адекватного розв'язання цієї задачі в рамках спрощеної розрахункової схеми (за коротший комп'ютерний час) при таких значеннях параметрів: $R = 0,01$ м; $R_i = 0,012$ м; $J_0 = 10^6 = 1$ МА/м; $\xi = 10^5$ с⁻¹; $T_0 = T_s = 20^\circ\text{C}$; $h_g = 0,0015$ м; $T_g = 970^\circ\text{C}$; $T_K = 770^\circ\text{C}$; $\beta = 13$ Вт/(м²К) – за дії зовнішнього ЕМП; $\beta = 10$ кВт/(м²К) – при охолодженні.

Порівняльний аналіз результатів (для циліндра з сталі Ст. 30 при $\omega = 8 = 8$ кГц), отриманих в рамках моделей феромагнітного термочутливого пружно-пластичного тіла (з врахуванням нелінійної залежності магнітної індукції від напруженості поля, зображеної на рис. 1,а) та неферомагнітного термочутливого пружно-пластичного тіла (з усередненою за напруженістю магнітного поля у діапазоні $[0, H_{\max}]$ магнітною проникністю

$$\mu_s(T) = \mu_0 + (H_{\max}^{-1} \int_0^{H_{\max}} \mu(H, T_0) dH - \mu_0)(1 - (T/T_K)^6), \quad T < T_K, \quad (2)$$

де $H_{\max} = 1$ МА/м; $\mu_s(T) = \mu_0$ при $T \geq T_K$) показав суттєву (понад два рази) різницю в оцінках залишкових напружень в циліндрі та тривалості нагрівання поверхневого шару циліндра товщиною h_g до температур вищих за T_g .

У зв'язку з цим визначено таку сталу μ_{T_g} і відповідно незалежну від напруженості поля магнітну проникність вигляду

$$\mu_g(T) = \mu_0 + (\mu_{T_g} - \mu_0)(1 - (T/T_K)^6), \quad (3)$$

яка забезпечує таку ж тривалість нагрівання тіла до необхідної температури, як і в рамках моделі феромагнітного тіла.

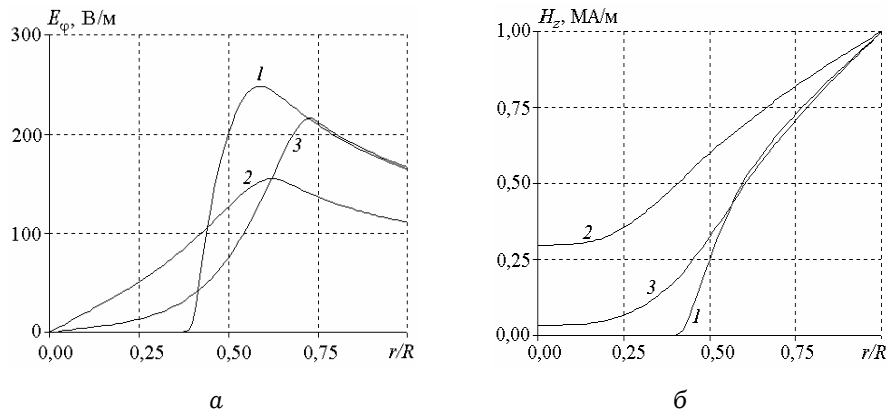


Рис. 2. Напруженості електричного (а) й магнітного (б) полів у циліндрі в момент вимкнення струму

На рис. 2 і 3 показано розподіли амплітуди напруженості E_φ електричного й H_z магнітного полів, температури T у момент вимкнення струму, а також залишкових кільцевих $\sigma_{\text{фф}}$ напружень за радіусом циліндра. Кривій 1 відповідають значення, отримані в рамках моделі феромагнітного тіла. Кривими 2 і 3 позначені розв'язки задачі в рамках моделі неферомагнітного тіла з магнітними проникностями μ_s (2) і μ_g (3), відповідно. Зазначимо, що під час виконання розрахунків у рамках моделі неферомагнітного тіла стійку збіжність отримуваних числових розв'язків досягнуто при суттєво (на два порядки) менших кроках інтегрування і кількостях скінченних елементів у дискретній моделі, ніж в рамках моделі феромагнітного тіла.

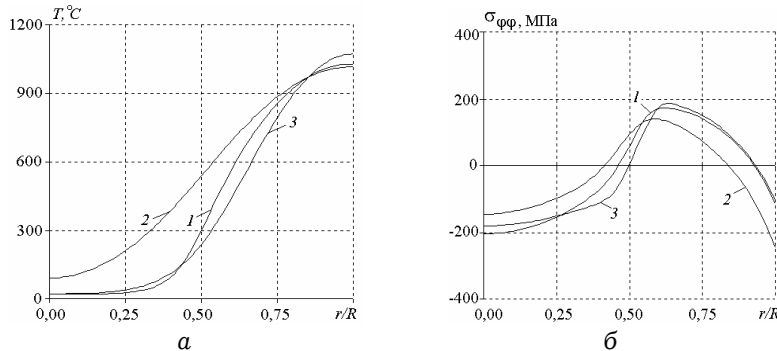


Рис. 3. Температура у циліндрі (а) в момент вимкнення струму та залишкові напруження (б) після повного охолодження циліндра

Аналогічно (як і у випадку циліндра з магнітною сталлю Ст. 30) запропонований підхід апробований і у випадку циліндра, виготовленого з магнітно-твердого феромагнітного сплаву ЮНДК24 [3], залежність магнітної

індукції від напруженості поля і температури для якого показано на рис. 1,б. На рис. 4, зокрема, показано результати порівняльного аналізу розв'язків (зміни температури поверхні циліндра за часом), отриманих у рамках моделей магнітно-твердого феромагнітного (криві 1) і неферомагнітного (2) термочутливих тіл для частот 50 Гц і 5 кГц, відповідно. Кривими 3 і 4 на рис. 4,б позначено температури на осі обертання (при меншій частоті температури поверхні в середині циліндра збігаються).

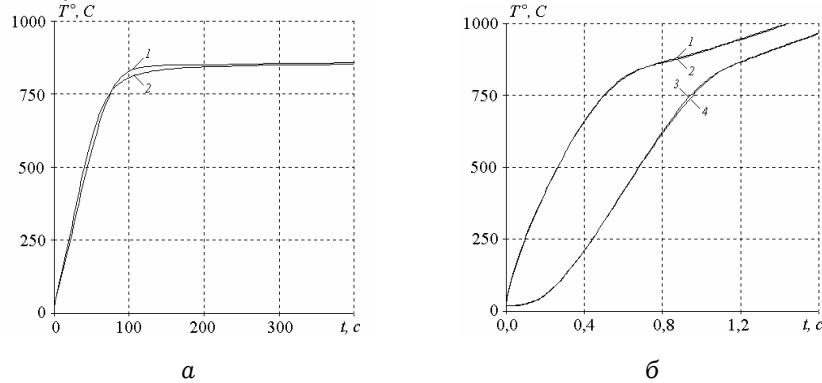


Рис. 4. Зміни температури поверхні циліндра для частот 50 Гц (а) і 5 кГц (б), відповідно

Отже, в рамках моделі неферомагнітного термочутливого тіла (вимоги якої щодо комп'ютерних ресурсів суттєво менші) для окремих феромагнітних матеріалів можна за усталеної усередненої (за напруженістю поля) магнітної проникності отримати задовільні оцінки параметрів, які описують електромагнітне, температурне та механічне поля у феромагнітних (магнітно-м'яких та магнітно-твердих) тілах за високотемпературної індукційної обробки. Запропонований підхід до моделювання термомеханічних процесів у термочутливих пружно-пластичних феромагнітних тілах за квазіусталених електромагнітних навантажень на основі такої спрощеної моделі може виявитись особливо ефективним за відсутності чи неповноти інформації про феромагнітні властивості тіла. У цьому випадку за експериментально визначеної тривалості нагрівання тіла до певної температури можна ставити і розв'язувати обернені задачі про знаходження усередненої магнітної проникності феромагнітного тіла і отримувати на цій основі оцінки параметрів його термомеханічного стану.

1. Гачкевич О.Р., Дробенко Б.Д. Математичне моделювання процесу індукційного нагріву електропровідних тіл // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика. – 2004. – Вип. 8. – С. 97-111.
2. Гачкевич О.Р., Дробенко Б.Д. Методика числового дослідження електромагнітних, температурних і механічних полів при індукційному нагріві електропровідних тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – 49, № 4. – С.146-156.

3. Дробенко Б. Моделювання термомеханічних процесів у термочутливих магнітотвердих ферромагнітних тілах при високотемпературному індукційному нагріванні // *Машинознавство*. – 2006. – № 7. – С. 13-17.

**К ОЦЕНКЕ ПАРАМЕТРОВ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ
ФЕРРОМАГНИТНЫХ ТЕЛ ПРИ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ
ИНДУКЦИОННОЙ ОБРАБОТКЕ**

**Богдан ДРОБЕНКО¹, Александр ГАЧКЕВИЧ^{1,2}, Ярослав БУРАК¹,
Иосиф ШИМЧАК²**

¹*Институт прикладных проблем механики и математики
и.м. Я.С.Подстригача НАН Украины, ул. Научная, 3б 79053 Львов, Украина*

²*Политехника Опольская,
ул. Станислава Николайчука, 5 45-271 Ополе, Польша*

Рассмотрена упрощенная расчетная схема (с независимой от напряженности поля магнитной проницаемостью) адекватного определения параметров термомеханического состояния ферромагнитных тел с высокотемпературной индукционной обработкой. Требования к компьютерным ресурсам (память, быстродействие) существенно уменьшаются.

Ключевые слова: связанные поля, индукционное нагревание, термомеханические процессы.

**TO ESTIMATION OF THERMO-MECHANICAL STATE PARAMETERS OF
FERROMAGNETIC SOLIDS SUBJECTED TO HIGH TEMPERATURE
INDUCTION TREATMENT**

Bogdan DROBENKO¹, Oleksandr HACHKEVYCH^{1,2}, Yaroslav BURAK¹, Yosyp SHYMCHAK²

¹*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
Naukova Str., 3b 79053 Lviv, Ukraine*

²*Technical University of Opole,
Stanislawa Mikolajchuka Str., 5, 45-271 Opole, Poland*

A simplified numerical scheme (when magnetic permeability is independent of magnetic field strength) are considered to obtain adequate estimations of thermo-mechanical state parameters of ferromagnetic solids subjected to high temperature induction heating. The approach requires less computer resources (memory and speed).

Key words: coupled fields, induction heating, thermo-mechanical processes

Стаття надійшла до редколегії 12.11.2009

Прийнята до друку 22.12.2010

УДК 539.3

ТЕРМОМЕХАНІЧНІ МОДЕЛІ КІЛЬКІСНОГО ОПИСУ МЕХАНІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ СКЛЯНИХ ТІЛ ОБЕРТАННЯ ПРИ ТЕПЛОВОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Олександр ГАЧКЕВИЧ^{1,2}, Євген ІРЗА¹, Зигмунд КАСПЕРСЬКИЙ²

¹Інститут прикладних проблем механіки і математики ім.
Я.С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 36 79053 Львів, Україна

²Політехніка Опольська,
вул. Станіслава Миколайчука, 5, 45-271 Ополе, Польща

Запропоновано моделі опису термомеханічної поведінки скляних тіл обертання при різних теплових режимах нагрівання (охолодження) і числову методику розв'язання запропонованих задач.

Ключові слова: термообробка, тіла обертання.

Скляні тіла в процесі виготовлення і обробки піддаються різним тепловим навантаженням. Температурні напруження (тимчасові та залишкові), які виникають у таких діях, змінюються в широкому діапазоні залежно від параметрів температурних полів. Значні рівні напружень можуть приводити до руйнування тіл або до погіршення їхніх експлуатаційних властивостей. Тому потрібна методика прогнозування рівня цих напружень, щоб надалі їх мінімізувати.

Оскільки загальна модель, яка б враховувала всі особливості термомеханічної поведінки тіла в широкому діапазоні температур, досить складна в отриманні алгоритмів розв'язків, виникає необхідність у розробці менш складних часткових моделей, які б адекватно відображали термомеханічну поведінку тіла в розглядуваних діапазонах температурних змін. Зокрема, простіша структура розв'язків важлива для дослідження зумовлених наявними фізико-механічними процесами функціональних і екологічних параметрів скляних тіл як елементів відповідних пристроїв [1], які отримують на підставі критеріїв, де ці розв'язки вихідні. Ми запропонували таку методику за різних теплових навантажень і температур нагрівання.

На відміну від відомих у літературі [2–4] в цій праці як вихідні прийнято математичні моделі кількісного опису напруженого стану термочутливих скляних тіл обертання (форма яких відмінна від канонічної) в тривимірному формулюванні за врахування особливостей поведінки скла залежно від діапазону температур, в яких є виріб і специфіки температурного навантаження. Розглянуто три моделі, які описують поведінку скляного тіла обертання при різних типових теплових навантаженнях залежно від діапазону температур нагрівання: модель пружного термочутливого тіла; модель пружного термочутливого тіла за врахування залишкових напружень, які формуються в момент склування при охолодженні від

високих температур; модель термочутливого пружного тіла за врахування релаксації залишкових напружень.

Розглянемо віднесене до циліндричної системи координат $O\mathbf{r}\varphi\mathbf{z}$ скляне тіло обертання при осесиметричному розподілі в ньому початкової температури $(\mathbf{t}(\mathbf{r}, \mathbf{z}, 0) = \mathbf{t}_0(\mathbf{r}, \mathbf{z}))$, яке займає область Ω евклідового простору $\mathbf{R}^3$ і обмежене неперервною за Ліпшицем поверхнею Γ . Тіло нагрівається конвективним способом зовнішнім середовищем з температурою $\mathbf{t}_c(\tau)$ через одну частину поверхні Γ_t , $(\mathbf{r}, \mathbf{z}) \in \Gamma_t$ і тепловим потоком $\mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{z}, \tau)$ через іншу частину Γ_q , $(\mathbf{r}, \mathbf{z}) \in \Gamma_q$, $\Gamma_t \cup \Gamma_q = \Gamma$ за наявності розподілених джерел тепла потужності $\mathbf{Q}(\mathbf{r}, \mathbf{z}, \tau)$, $(\mathbf{r}, \mathbf{z}) \in \Omega$. За механічні межові умови приймаємо класичні: на частині Γ_u поверхні Γ тіла задані переміщення $\bar{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}_r^0, \mathbf{u}_z^0)$, на частині Γ_σ - силове навантаження з вектором $\bar{\mathbf{p}} = (\mathbf{p}_r, \mathbf{p}_z)$, $\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma = \Gamma$.

Температурне поле описуємо рівнянням теплопровідності [5]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mathbf{k} \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mathbf{k} \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial z} \right) = \rho \mathbf{c} \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \tau} \quad (1)$$

і такими початковими та граничними умовами:

$$\mathbf{t}(\mathbf{r}, \mathbf{z}, 0) = \mathbf{t}_0; \quad (2)$$

$$\left[\mathbf{k} \left(\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial r} \mathbf{n}_r + \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial z} \mathbf{n}_z \right) + \alpha (\mathbf{t} - \mathbf{t}_c) \right]_{\Gamma_t} = 0; \quad \left[\mathbf{k} \left(\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial r} \mathbf{n}_r + \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial z} \mathbf{n}_z \right) + \mathbf{q} \right]_{\Gamma_q} = 0, \quad (3)$$

які відповідають заданим тепловим умовам. Тут $\mathbf{k}$ - коефіцієнт теплопровідності; $\mathbf{c}$ - питома теплоємність; ρ - густина; α - коефіцієнт тепловіддачі; $\mathbf{n}_r$, $\mathbf{n}_z$ - компоненти зовнішньої нормалі до поверхні тіла.

Зв'язок між тензором напружень $\{\sigma\}$ і тензором деформацій $\{\varepsilon\}$ відповідає типу теплових навантажень і інтервалам температур, в яких розташоване тіло.

Для теплових процесів в інтервалах температур, які є меншими за температуру склування $\mathbf{t}_g$ [2], коли в тілі є тільки пружні температурні деформації $\{\varepsilon_t\}$, рівняння стану приймаємо у вигляді [5]

$$\{\sigma\} = [\mathbf{D}](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_t\}). \quad (4)$$

При охолодженні виробів із скла від температур, які є більшими за температуру склування $\mathbf{t}_g$, в рівнянні стану враховуємо залишкові $\{\varepsilon_0\}$ деформації, що формуються при охолодженні від високих температур у момент склування [2]. Тоді

$$\{\sigma\} = [\mathbf{D}](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_t\} - \{\varepsilon_0\}). \quad (5)$$

При нагріванні виробів із скла (з рівнем залишкових напружень σ_0) від початкової натуральної температури до верхньої температури відпалювання t_ν^b [4] і витримкою при цій температурі, і подальшому охолодженні до натуральної температури (коли характерні релаксаційні процеси), і міцність конструкції оцінюють за рівнем еквівалентних напружень $\sigma_{екв}$, рівняння стану приймають такими [4]:

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_t\}) \text{ при } t < t_\nu^b, \sigma_{екв} = \sigma_0 \exp(-G\tau/\eta_c) \text{ при } t = t_\nu^b, \quad (6)$$

$$\text{де } \sigma_{екв} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{rr} - \sigma_{zz})^2 + 6\sigma_{rz}^2}.$$

Тензори напружень $\{\sigma\}$ і тензори деформацій $\{\varepsilon\}$, $\{\varepsilon_t\}$, $\{\varepsilon_0\}$ для осесиметричного випадку подамо в циліндричній системі координат у такій матричній формі:

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= \{\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{zz}, \sigma_{rz}\}^T; \quad \{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\varphi\varphi}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{rz}\}^T; \\ \{\varepsilon_t\} &= \int_{t_0}^t \alpha_t(\xi) d\xi \cdot \{1, 1, 1, 0\}^T; \quad \{\varepsilon_0\} = -\alpha_t \Phi \cdot \{1, 1, 1, 0\}^T. \end{aligned} \quad (7)$$

Функція навантаження $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{z})$ відповідно до гіпотези “заморожування” Бартенєва [2] (модифікована на тривимірний випадок [5]) визначається співвідношенням

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial t}{\partial \mathbf{r}}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial t}{\partial \mathbf{z}} \text{ при } t(\mathbf{r}, \mathbf{z}, \tau_g) = t_g, \quad (8)$$

де α_t - коефіцієнт лінійного температурного розширення; τ_g - момент часу в який досягається температура склування t_g .

Матриця пружних характеристик $[D]$ набуває вигляду

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5(1-2\nu) \end{bmatrix}.$$

Тут E - модуль пружності; ν - коефіцієнт Пуассона.

В області Ω виконуються рівняння рівноваги (квазістатичне формулювання) і механічні граничні умови, тобто,

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\mathbf{r}} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\sigma_{rz}}{\mathbf{r}} = 0; \quad (9)$$

$$\mathbf{n}_r \sigma_{rr} + \mathbf{n}_z \sigma_{zr} - \mathbf{p}_r = 0, \quad \mathbf{n}_r \sigma_{rz} + \mathbf{n}_z \sigma_{zz} - \mathbf{p}_z = 0 \text{ на } \Gamma_\sigma, \quad (10)$$

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_r^0, \mathbf{u}_z = \mathbf{u}_z^0 \text{ на } \Gamma_u.$$

Обмежуємось випадком малих деформацій, коли [3]

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{\mathbf{u}_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial \mathbf{u}_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{u}_z}{\partial r}. \quad (11)$$

Задачі формулюємо в переміщеннях. Залежності (1)-(11) становлять повну систему співвідношень для визначення температурного поля, компонент вектора переміщень, компонент тензорів деформацій і напружень, якщо задана температура навколишнього середовища t_c , коефіцієнт теплообміну α , тепловий потік $\mathbf{q}$, зовнішнє силове навантаження $\bar{\mathbf{p}}$, переміщення $\bar{\mathbf{u}}$ і потужності внутрішніх джерел тепла $\mathbf{Q}$.

У рамках цих моделей запропоновано відповідні алгоритми визначення параметрів температурних і механічних процесів. Оскільки геометрична конфігурація області, яку займає тіло, часто досить складна, а системи вихідних диференціальних рівнянь моделей, які описують наявні фізико-механічні процеси, нелінійні, то для розв'язання використовують метод зважених нев'язок в поєднанні з методом кінцевих елементів. Такий підхід дає змогу отримати ефективні наближені розв'язки сформульованих комплексних задач. Схема розв'язування таких задач охоплює розбиття області на елементи; апроксимацію невідомих функцій на елементі розбиття; отримання на цій підставі систем алгебричних рівнянь стосовно невідомих функцій у вузлах елементів за врахування специфіки матеріальних зв'язків у різних температурних інтервалах і алгоритм розв'язування цих систем.

Розглянемо задачу теплопровідності (1)-(3). Застосовуючи метод зважених нев'язок (зокрема метод Гальоркіна) в поєднанні з методом кінцевих елементів рівняння теплопровідності (1) з рахуванням граничних умов (3), зводимо до вигляду [6]

$$[\mathbf{C}_t] \frac{d\{\mathbf{T}\}}{d\tau} + [\mathbf{K}_t]\{\mathbf{T}\} = \{\mathbf{f}_t\}. \quad (12)$$

Тут $[\mathbf{C}_t]$, $[\mathbf{K}_t]$, $\{\mathbf{f}_t\}$ - відповідні температурні матриці "жорсткості" і вектор "навантаження".

Використовуючи метод кінцевих різниць (розділивши проміжок $[0, \tau_k]$ на дискретну множину точок $\tau_0, \tau_1, \dots$ з кроком $\Delta\tau$), із (12) отримуємо систему нелінійних алгебричних рівнянь

$$([\mathbf{C}_t] + \theta\Delta\tau [\mathbf{K}_t])\{\mathbf{T}\}_{n+1} - ([\mathbf{C}_t] - (1-\theta)\Delta\tau [\mathbf{K}_t])\{\mathbf{T}\}_n = \{\mathbf{f}_t\}_n, \quad (13)$$

де індексами n позначені значення величин в моменти часу τ_n , відповідно.

Завдяки вибору точки колокації співвідношення (13) можна перетворити в одну з таких відомих скінчено-різницевоїх схем для рівняння (12), а саме

[5]: при $\theta = 0$ - схему Ейлера (схема з різницею вперед), $\theta = 0,5$ - схему Кранка-Нікольсона (схема з центральною різницею), $\theta = 0,66667$ – метод Гальоркіна, $\theta = 1$ – схему з різницею назад. Систему (13) розв'язуємо з використанням ітераційних методів [7].

Розглянемо три типові моделі, які описують поведінку скляного тіла обертання при різному тепловому навантаженні залежно від діапазону температур нагрівання.

1. *Модель пружного термочутливого тіла.* Якщо відоме температурне поле $\mathbf{t}(\mathbf{r}, \mathbf{z}, \tau)$, то система рівнянь (4), (9)-(11), з використанням методу зважених нев'язок в поєднанні з методом кінцевих елементів, зводиться (як і задача теплопровідності) до системи нелінійних алгебричних рівнянь вигляду

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{U}(\tau)\} = \{\mathbf{F}_0(\tau)\}, \quad (14)$$

стосовно невідомих значень переміщень $\mathbf{U}(\tau)$ у вузлах елементів [5]. Тут $[\mathbf{K}]$, $\{\mathbf{F}_0(\tau)\}$, - відповідно, матриця жорсткості і вектор навантаження.

2. *Модель пружного термочутливого тіла за врахування залишкових напружень, які формуються при охолодженні від високих температур у момент склування.* Якщо відоме температурне поле на основі гіпотези "заморожування" (8) знаходимо розподіл градієнтів функції навантаження Φ , а саму функцію навантаження знаходимо, використовуючи метод простої ітерації [7], то даємо її у вигляді

$$\Phi_{ij} = \frac{\Phi_{i+1j} + \Phi_{i-1j} + \Phi_{ij+1} + \Phi_{ij-1}}{4} - \frac{\left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}} \right)_{i+1j} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}} \right)_{i-1j} \right) (h_{i+1j}^2 + h_{i-1j}^2)}{8(h_{i+1j} + h_{i-1j})} - \frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}} \right)_{ij} (h_{i+1j} - h_{i-1j}) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{z}} \right)_{ij} (h_{ij+1} - h_{ij-1})}{4} - \frac{\left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{z}} \right)_{ij+1} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{z}} \right)_{ij-1} \right) (h_{ij+1}^2 + h_{ij-1}^2)}{8(h_{ij+1} + h_{ij-1})}.$$

Тут $i, i+1, i-1, j, j+1, j-1$ – відповідні номери сусідніх вузлів елементів розбиття; h_{i+1j} , h_{i-1j} , h_{ij+1} , h_{ij-1} – відстань між відповідними сусідніми вузлами.

По відомому температурному полі $\mathbf{t}(\mathbf{r}, \mathbf{z}, \tau)$ і функції навантаження $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{z})$ система рівнянь (5), (9)-(11), з використанням методу зважених нев'язок в поєднанні з методом кінцевих елементів, зводиться, як і вище, до системи нелінійних алгебричних рівнянь вигляду

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{U}(\tau)\} = \{\mathbf{F}_0(\tau)\} + \{\Phi_0\}, \quad (15)$$

де $\{\Phi_0\}$ – відповідний вектор навантаження.

3. *Модель термочутливого пружного тіла з врахуванням релаксації залишкових напружень.* Система рівнянь (6), (9)-(11), як і в попередніх випадках, зводиться до системи нелінійних алгебричних рівнянь вигляду (14).

Запропоновані моделі використані для знаходження термонапруженого стану циліндра (висотою 250мм, внутрішнім радіусом 30мм і товщиною 10мм). Циліндр виготовлений зі скла С-93 [5].

На рис.1 зображено режим нагрівання циліндра в інтервалі температур, коли скло поводить себе як пружне тіло. Кривою 1 показано зміну температури на поверхнях циліндра, а кривими 2 - відповідні максимальні еквівалентні напруження в циліндрі.

На рис.2 проілюстровано розподіл залишкових напружень у локально нагрітій області $30 \leq r \leq 40$ мм; $100 \leq z \leq 150$ мм і початковою сталою температурою, яка дорівнює $t_0 = 850^\circ\text{C}$ (інші області мають температуру 20°C). Циліндр охолоджується зовнішнім середовищем з температурою $t_c = 20^\circ\text{C}$ і коефіцієнтом тепловіддачі $\alpha = 150 \text{ Вт}/\text{м}^2 \cdot \text{К}$ (при $Q=0$, $q=0$).

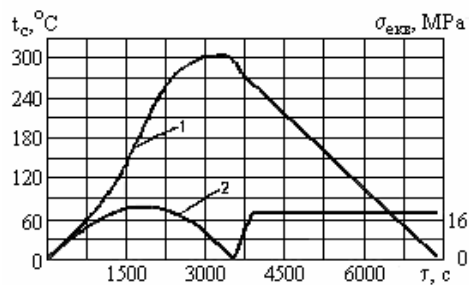


Рис. 1

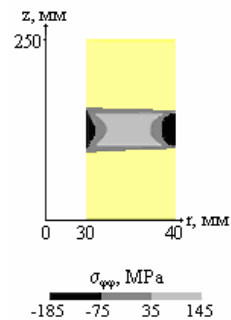


Рис. 2

Отримані результати добре узгоджуються з відомими в літературі результатами термомеханічної поведінки скляних виробів у цих областях температурного навантаження [4].

Запропонований підхід до моделювання процесів термообробки, залежно від діапазону температур, в яких перебуває тіло, дає змогу суттєво спростити розрахунки термонапруженого стану скляних тіл обертання завдяки спрощенню вихідних систем диференціальних рівнянь, що описують поведінку тіла.

1. Гаек М., Иванова И., Мулицка И., Рябов С., Шварцбург Л. Аспекты специальной политики в области безопасности производственной среды. – Москва; Ополе, 2005.
2. Бартенев Г. М. Механические свойства и тепловая обработка стекла. – М., 1960.
3. Ковальчук Б. И., Лебедев А. А., Уманский С. Э. Механика неупругого деформирования материалов и элементов конструкций. – К., 1987.

4. Дяківський С. І., Житлинський Г. С., Ячишин Й. М. Термічне оброблення і напруження у склі. – Львів, 2003.
5. Ірза Є. М. Математична модель формування залишкових напружень у скляних тілах обертання під час охолодження // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2008. – № 2. – С. 14–19.
6. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. Finite Element Method: Vol 1. The Basis. – London, 2000.
7. Турчак Л.И. Основы численных методов. – М., 1987.

ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КОЛИЧЕСТВЕННОГО ОПИСАНИЯ МЕХАНИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ СТЕКЛЯННЫХ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ ПРИ ТЕПЛОВОЙ НАГРУЗКЕ

Александр ГАЧКЕВИЧ^{1,2}, Евгений ИРЗА¹, Зигмунд КАСПЕРСКИЙ²

¹*Институт прикладных проблем механики и математики
и.м. Я.С Подстригача НАН Украины, ул. Научная, 3б 79053 Львов, Украина*

²*Политехника Опольская,
ул. Станислава Николайчука, 5 45-271 Ополе, Польша*

Предложены модели описания термомеханического поведения стеклянных тел вращения при различных тепловых режимах нагрева (охлаждения) и числовую методику решения сформулированных задач.

Ключевые слова: термообработка, тела вращения.

THERMOMECHANICAL MODELS THE QUANTITATIVE DESCRIPTION THE MECHANICAL BEHAVIOUR OF GLASS SOLIDS OF ROTATION UNDER THERMAL LOADING

Oleksandr HACHKEVYCH^{1,2}, Yevgen IRZA¹, Zigmund KASPERSKI²

¹*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
Naukova Str., 3b, 79053 Lviv, Ukraine*

²*Technical University of Opole,
Stanislawa Mikolajchuka Str., 5, 45-271 Opole, Poland*

The models of description of thermomechanical behavior of glass solids of rotation under different heating (cooling) regimes and numerical procedure to solve the proposed problems are proposed.

Key words: heat treatment, bodies of rotation.

Стаття надійшла до редколегії 12.11.2009
Прийнята до друку 22.12.2010

УДК 539.3

ВПЛИВ ЕЛЕКТРИЧНОЇ ПРОНИКНОСТІ МІЖФАЗОВОЇ ТРІЩИНИ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНОГО ПОЛЯ В ОКОЛІ ЇЇ ВЕРШИНИ

Володимир ГОВОРУХА, Володимир ЛОБОДА

*Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара,
просп. Гагаріна, 72 49010, Дніпропетровськ, Україна*

Розглянуто плоску задачу електропружності для п'єзокерамічного біматеріалу з частково електропроникною міжфазовою тріщиною. Розв'язок задачі побудовано в замкненій формі методами теорії функцій комплексної змінної. Показано, що в околі вершини тріщини, залежно від комбінації п'єзокерамічних матеріалів, можуть виникати різні види особливостей. Для різних видів навантаження визначено основні параметри руйнування та проаналізовано їхню залежність від електричної проникності тріщини.

Ключові слова: п'єзоелектрична кераміка, частково електропроникна міжфазова тріщина, швидкість вивільнення енергії.

П'єзокерамічні матеріали широко використовують у різних галузях промисловості як сенсори, актуатори, трансформатори та інші пристрої. У більшості випадків п'єзокерамічні компоненти є елементами складних композитних конструкцій. За своєю природою п'єзокерамічні матеріали дуже крихкі та схильні до появи в них тріщин, зокрема міжфазових, що часто призводить до руйнування всієї конструкції. Тому дослідження тріщин і визначення основних параметрів руйнування має важливе практичне значення.

Ключовий момент у задачах руйнування п'єзокерамічних матеріалів - формулювання електричних граничних умов на берегах тріщини. Вперше ці умови були сформульовані в [1], де розглядали модель електропроникної міжфазової тріщини, що передбачає неперервність стрибка електричного потенціалу на її берегах. Згодом, враховуючи, що діелектрична проникність повітря, яке найчастіше заповнює тріщину, на декілька порядків нижча, ніж п'єзокераміки, запропонували модель міжфазової тріщини [2], в якій брали умови електричної ізоляції на її берегах. Однак найбільш реалістичним і узагальненим варіантом електричних умов можна вважати умови для частково електропроникної тріщини [3, 4], в яких враховується електрична проникність середовища, що заповнює тріщину.

Модель [3, 4] запропонована для тріщин в однорідному матеріалі. Для міжфазової тріщини задача стає значно складнішою завдяки наявності некореневої особливості в околі вершини тріщини. Незважаючи на те, що модель частково електропроникної міжфазової тріщини найбільш реалістична, можна виділити лише праці [5, 6], де цю модель досліджували раніше. Це зумовлює необхідність подальшого розвитку моделі [3, 4] на випадок міжфазової тріщини.

© Говоруха В., Лобода В., 2010

Нижче у замкненому аналітичному вигляді подаємо розв'язок задачі для частково електропроникної тріщини, яка розміщена на межі поділу двох півпросторів із різних п'єзокерамічних матеріалів. Особливу увагу приділяємо аналізу впливу електричної проникності тріщини та зовнішнього навантаження на основні параметри руйнування.

Формулювання задачі. Розглянемо частково електропроникну тріщину, яка міститься у смузі $b_1 < x_1 < b_2$, $x_3 = 0$ області розмежування двох різнорідних п'єзокерамічних півпросторів $x_3 > 0$ і $x_3 < 0$. Матеріали обох півпросторів мають клас симетрії $6mm$ і попередньо поляризовані в напрямі осі Ox_3 . Вважаємо, що поза тріщиною півпростори жорстко зчеплені між собою вздовж своєї межі $x_3 = 0$, а на нескінченності задані однорідні поля механічних зусиль та електричної індукції (рис. 1). Будемо розглядати задачу для випадку плоскої деформації, вважаючи, що всі компоненти електромеханічного поля не залежать від координати x_2 .

За відсутності зовнішнього навантаження на поверхні тріщини граничні умови на межі поділу матеріалів $x_3 = 0$ мають такий вигляд:

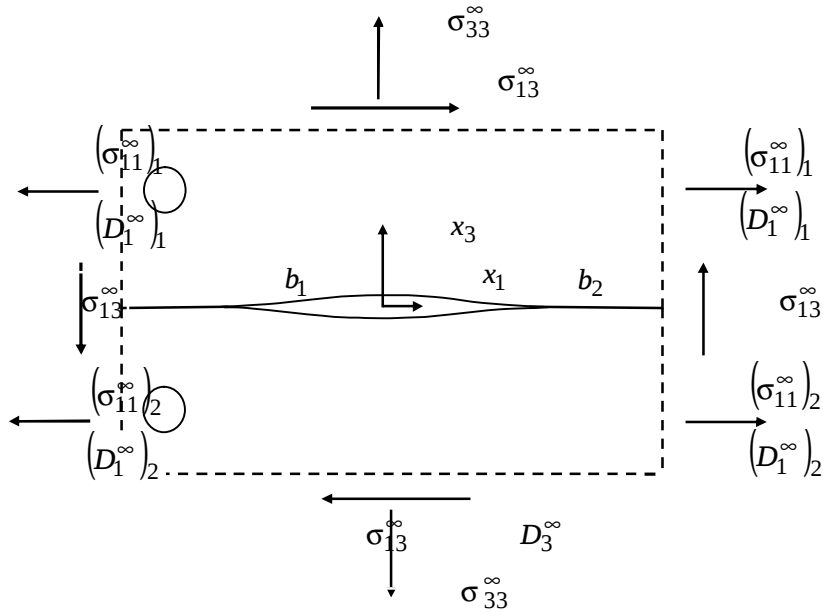


Рис. 1

$$[[\sigma_{13}]] = 0, [[\sigma_{33}]] = 0, [[D_3]] = 0, x_1 \in (-\infty, \infty); \quad (1)$$

$$[[u_1]] = 0, [[u_3]] = 0, [[\varphi]] = 0, x_1 \notin (b_1, b_2); \quad (2)$$

$$\sigma_{13} = 0, \sigma_{33} = 0, D_3 [[u_3]] = -\varepsilon_a [[\varphi]], x_1 \in (b_1, b_2), \quad (3)$$

де σ_{ij} , $\mathbf{D}_i$, $\mathbf{u}_i$, φ – механічні напруження, електрична індукція, переміщення та електричний потенціал, відповідно; ε_a – діелектрична проникність заповнювача тріщини. Символ $[[\cdot]]$ тут і надалі означає стрибок відповідної функції на межі поділу матеріалів.

Характерною особливістю цієї моделі тріщини, на відміну від електропроникної та електроізолюваної, є підстави розглядати тріщину як фізичну поверхню з заданими значеннями діелектричних сталей. Внаслідок цього електричні граничні умови на берегах частково електропроникної тріщини вміщують одночасно електричні та механічні компоненти поля, що призводить, як це буде показано далі, до нелінійності цієї моделі.

Заповнювач тріщини характеризується своєю відносною діелектричною проникністю ε_r , яка є відношенням між його діелектричною проникністю ε_a та діелектричною проникністю вакууму (повітря) $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$

$$\varepsilon_a = \varepsilon_r \varepsilon_0.$$

Оскільки для вакууму (повітря) $\varepsilon_r = 1$, то очевидно, що в природі фізично не існує середовищ, для яких $\varepsilon_r < 1$. Зазначимо також, що електропроникну та електроізолювану тріщини можна розглядати як граничні випадки частково електропроникної тріщини, коли $\varepsilon_r \rightarrow \infty$ або $\varepsilon_r \rightarrow 0$, відповідно.

Відповідно до методики [2] основні компоненти електромеханічного поля $\mathbf{V} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3, \varphi]^T$ і $\mathbf{t} = [\sigma_{13}, \sigma_{33}, \mathbf{D}_3]^T$ на межі поділу матеріалів можна подати у вигляді

$$[[\mathbf{V}']] = -i\mathbf{H}[\mathbf{h}^+(\mathbf{x}_1) - \mathbf{h}^-(\mathbf{x}_1)], \quad (4)$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}_1, 0) = \mathbf{h}^+(\mathbf{x}_1) + \bar{\mathbf{H}}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{h}^-(\mathbf{x}_1) + \mathbf{T}^\infty, \quad (5)$$

де $\mathbf{h}(\mathbf{z}) = \begin{cases} \mathbf{B}^{(1)}\mathbf{f}'^{(1)}(\mathbf{z}), & \mathbf{x}_3 > 0 \\ \mathbf{H}^{-1}\bar{\mathbf{H}}\mathbf{B}^{(2)}\mathbf{f}'^{(2)}(\mathbf{z}), & \mathbf{x}_3 < 0 \end{cases}$ – вектор-функція, аналітична у всій

комплексній площині за винятком області тріщини, $\mathbf{T}^\infty = [\sigma_{13}^\infty, \sigma_{33}^\infty, \mathbf{D}_3^\infty]^T$.

Вирази для матриць $\mathbf{A}^{(k)}$, $\mathbf{B}^{(k)}$ та функцій $\mathbf{f}'^{(k)}(\mathbf{z})$ ($k = 1, 2$) наведені в [2].

Матриця $\mathbf{H}$ у виразах (4), (5) визначається за формулою

$$\mathbf{H} = i \left[\mathbf{A}^{(1)} (\mathbf{B}^{(1)})^{-1} - \bar{\mathbf{A}}^{(2)} (\bar{\mathbf{B}}^{(2)})^{-1} \right]$$

і для трансверсально-ізотропних п'єзокерамічних матеріалів має таку структуру:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & ih_{13} & ih_{14} \\ ih_{31} & h_{33} & h_{34} \\ ih_{41} & h_{43} & h_{44} \end{bmatrix},$$

де h_{ml} ($m, l = 1, 3, 4$) – дійсні числа.

За своєю побудовою вирази (5) автоматично задовольняють граничні умови (1).

Метод розв'язування. Припустимо, що на берегах тріщини виконується умова [5]

$$\mathbf{D}_3^+(\mathbf{x}_1, 0) = \mathbf{D}_3^-(\mathbf{x}_1, 0) = \mathbf{D},$$

де $\mathbf{D}$ – деяка дійсна стала, що потребує подальшого визначення.

Тоді, задовольняючи за допомогою співвідношень (5) перші дві з граничних умов (3), одержимо векторну задачу спряження

$$\mathbf{h}^+(\mathbf{x}_1) + \bar{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{h}^-(\mathbf{x}_1) = -(\mathbf{T}^\infty - \mathbf{T}_0), \quad \mathbf{x}_1 \in (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2). \quad (6)$$

тут $\mathbf{T}_0 = [0, 0, \mathbf{D}]^T$.

Розв'язок однорідної задачі відповідно до (6)

$$\mathbf{h}^+(\mathbf{x}_1) + \bar{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{h}^-(\mathbf{x}_1) = 0, \quad \mathbf{x}_1 \in (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2), \quad (7)$$

який задовольняє умову $\mathbf{h}(\infty) = 0$, будемо шукати у вигляді [7]

$$\mathbf{h}(\mathbf{z}) = (\mathbf{z} - \mathbf{b}_1)^{-0,5-i\nu} (\mathbf{z} - \mathbf{b}_2)^{-0,5+i\nu} \mathbf{w}, \quad (8)$$

де ν – деяка комплексна стала; $\mathbf{w} = [\mathbf{w}^{(1)}, \mathbf{w}^{(2)}, \mathbf{w}^{(3)}]^T$ – довільний вектор.

Підставляючи (8) у (7), одержимо систему

$$[\bar{\mathbf{H}} - \mathbf{e}^{2\pi i \nu} \mathbf{H}] \mathbf{w} = 0. \quad (9)$$

Очевидно, що ν та $\mathbf{w}$ будуть, відповідно, власними числами та власними векторами цієї системи.

Враховуючи, що однорідна система (9) матиме ненульові розв'язки, якщо її визначник дорівнює нулю, то для знаходження її власних чисел використаємо рівняння

$$|\bar{\mathbf{H}} - \mathbf{e}^{2\pi i \nu} \mathbf{H}| = 0,$$

яке можна переписати у вигляді

$$\delta^3 - \Xi \delta = 0, \quad (10)$$

$$\text{де } \delta = \frac{1 - \mathbf{e}^{2\pi i \nu}}{1 + \mathbf{e}^{2\pi i \nu}}, \quad \Xi = \frac{\mathbf{h}_{14}(\mathbf{h}_{33}\mathbf{h}_{41} - \mathbf{h}_{31}\mathbf{h}_{43}) - \mathbf{h}_{13}(\mathbf{h}_{34}\mathbf{h}_{41} - \mathbf{h}_{31}\mathbf{h}_{44})}{\mathbf{h}_{11}(\mathbf{h}_{34}\mathbf{h}_{43} - \mathbf{h}_{33}\mathbf{h}_{44})}.$$

Розв'язуючи рівняння (10), отримаємо його корені

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{\Xi}}{1 - \sqrt{\Xi}} \right), \quad \nu_2 = -\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{\Xi}}{1 - \sqrt{\Xi}} \right), \quad \nu_3 = 0.$$

Знаючи власні числа ν_j ($j = 1, 2, 3$), із системи (9) знайдемо відповідні їм власні вектори $\mathbf{w}_j$.

Числовий аналіз засвідчує, що для однієї групи п'єзокерамічних біматеріальних композицій виконується умова $\Xi > 0$, а для іншої $\Xi < 0$. Тоді

$$\begin{aligned} \nu_1 = \varepsilon, \nu_2 = -\varepsilon, \nu_3 = 0 \text{ при } \Xi > 0; \\ \nu_1 = i\kappa, \nu_2 = -i\kappa, \nu_3 = 0 \text{ при } \Xi < 0, \end{aligned}$$

$$\text{де } \varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{\Xi}}{1 - \sqrt{\Xi}} \right), \kappa = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(\sqrt{|\Xi|}).$$

Отож, в околі вершини частково електропроникної міжфазової тріщини, залежно від комбінації п'єзокерамічних матеріалів, може виникати або осцилююча особливість (композиції ε -класу), або степенева особливість, відмінна від кореневої (композиції κ -класу).

У випадку, коли характеристики матеріалів верхнього та нижнього п'єзокерамічних півпросторів однакові, матриця $\mathbf{H}$ стає дійсною, внаслідок чого $\Xi = 0$ і рівняння (10) має єдиний розв'язок $\nu = 0$. У цьому випадку компоненти тензора напружень і вектора електричної індукції мають в околі вершини тріщини кореневу особливість.

Перейдемо до розв'язку неоднорідної задачі (6). За своєю побудовою вектори $\mathbf{w}_j$ ($j = 1, 2, 3$) утворюють множину лінійно незалежних векторів (базисну систему векторів), тому, як показано в [2], можливе розкладання, і притому єдине, вектора $\mathbf{T} = \mathbf{T}^\infty - \mathbf{T}_0$ та вектора-функції $\mathbf{h}(\mathbf{z})$ за базисом цих векторів

$$\mathbf{T} = T_1 \mathbf{w}_1 + T_2 \mathbf{w}_2 + T_3 \mathbf{w}_3, \quad (11)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{z}) = h_1(\mathbf{z}) \mathbf{w}_1 + h_2(\mathbf{z}) \mathbf{w}_2 + h_3(\mathbf{z}) \mathbf{w}_3. \quad (12)$$

Підставляючи подання (11) та (12) в (6), одержимо три окремі скалярні задачі лінійного спряження

$$h_j^+(x_1) + e^{-2\pi i \nu_j} h_j^-(x_1) = -T_j, \quad x_1 \in (b_1, b_2), \quad (13)$$

де функції $h_j(\mathbf{z})$ ($j = 1, 2, 3$) аналітичні у всій комплексній площині за винятком області тріщини.

Враховуючи, що $h_j(\infty) = 0$, і використовуючи умову однозначності переміщень та електричного потенціалу, розв'язки задач (13) у класі функцій, що мають у вершинах тріщини інтегровані особливості, запишемо у вигляді [7]

$$h_j(\mathbf{z}) = \frac{T_j}{1 + e^{-2\pi i \nu_j}} \left\{ \frac{(z - b_1)^{-i\nu_j} (z - b_2)^{i\nu_j}}{\sqrt{(z - b_1)(z - b_2)}} \left[z + il\nu_j - \frac{b_1 + b_2}{2} \right] - 1 \right\},$$

де $l = b_2 - b_1$.

Використавши вираз (12), одержимо подання для вектор-функції $\mathbf{h}(\mathbf{z})$

$$\mathbf{h}(\mathbf{z}) = \sum_{j=1}^3 \frac{\mathbf{T}_j \mathbf{w}_j}{1 + e^{-2\pi\nu_j}} \left\{ \frac{(\mathbf{z} - \mathbf{b}_1)^{-i\nu_j} (\mathbf{z} - \mathbf{b}_2)^{i\nu_j}}{\sqrt{(\mathbf{z} - \mathbf{b}_1)(\mathbf{z} - \mathbf{b}_2)}} \left[\mathbf{z} + i\mathbf{l}_{\nu_j} - \frac{\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2}{2} \right] - 1 \right\}. \quad (14)$$

Для граничних значень вектор-функції $\mathbf{h}(\mathbf{z})$ на берегах тріщини правильні такі формули:

$$\mathbf{h}^{\pm}(\mathbf{x}_1) = \sum_{j=1}^3 \frac{\mathbf{T}_j \mathbf{w}_j}{1 + e^{-2\pi\nu_j}} \left\{ \frac{e^{\mp i\pi\nu_j} (\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}_1)^{-i\nu_j} (\mathbf{b}_2 - \mathbf{x}_1)^{i\nu_j}}{\pm i\sqrt{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}_1)(\mathbf{b}_2 - \mathbf{x}_1)}} \left[\mathbf{x}_1 + i\mathbf{l}_{\nu_j} - \frac{\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2}{2} \right] - 1 \right\}.$$

Підставляючи ці вирази в (4), отримуємо

$$[[\mathbf{V}'(\mathbf{x}_1)]] = -\mathbf{H} \sum_{j=1}^3 \frac{\mathbf{T}_j \mathbf{w}_j (1 + e^{2\pi\nu_j}) (\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}_1)^{-i\nu_j} (\mathbf{b}_2 - \mathbf{x}_1)^{i\nu_j}}{2\mathbf{ch}(\pi\nu_j) \sqrt{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}_1)(\mathbf{b}_2 - \mathbf{x}_1)}} \left[\mathbf{x}_1 + i\mathbf{l}_{\nu_j} - \frac{\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2}{2} \right].$$

Інтегруючи останній вираз, запишемо для проміжку $\mathbf{x}_1 \in (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$

$$[[\mathbf{V}(\mathbf{x}_1)]] = \frac{\mathbf{H} + \bar{\mathbf{H}}}{2} \sqrt{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}_1)(\mathbf{b}_2 - \mathbf{x}_1)} \sum_{j=1}^3 \frac{\mathbf{T}_j \mathbf{w}_j}{\mathbf{ch}(\pi\nu_j)} \left(\frac{\mathbf{b}_2 - \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}_1} \right)^{i\nu_j}. \quad (15)$$

На підставі (15), враховуючи структуру матриці $\mathbf{H}$, одержимо вирази для стрибків електричного потенціалу та нормального переміщення берегів тріщини

$$[[\varphi(\mathbf{x}_1)]] = \sqrt{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}_1)(\mathbf{b}_2 - \mathbf{x}_1)} \sum_{j=1}^3 \frac{\mathbf{T}_j [\mathbf{h}_{43}\mathbf{w}_j^{(2)} + \mathbf{h}_{44}\mathbf{w}_j^{(3)}]}{\mathbf{ch}(\pi\nu_j)} \left(\frac{\mathbf{b}_2 - \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}_1} \right)^{i\nu_j},$$

$$[[\mathbf{u}_3(\mathbf{x}_1)]] = \sqrt{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}_1)(\mathbf{b}_2 - \mathbf{x}_1)} \sum_{j=1}^3 \frac{\mathbf{T}_j [\mathbf{h}_{33}\mathbf{w}_j^{(2)} + \mathbf{h}_{34}\mathbf{w}_j^{(3)}]}{\mathbf{ch}(\pi\nu_j)} \left(\frac{\mathbf{b}_2 - \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}_1} \right)^{i\nu_j}. \quad (16)$$

Підставляючи ці вирази в останню з граничних умов (3), отримуємо рівняння для визначення нормальної складової вектора електричної індукції на берегах тріщини

$$\mathbf{D} \sum_{j=1}^3 \frac{\mathbf{T}_j [\mathbf{h}_{33}\mathbf{w}_j^{(2)} + \mathbf{h}_{34}\mathbf{w}_j^{(3)}]}{\mathbf{ch}(\pi\nu_j)} \left(\frac{\mathbf{b}_2 - \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}_1} \right)^{i\nu_j} +$$

$$+ \epsilon_a \sum_{j=1}^3 \frac{\mathbf{T}_j [\mathbf{h}_{43}\mathbf{w}_j^{(2)} + \mathbf{h}_{44}\mathbf{w}_j^{(3)}]}{\mathbf{ch}(\pi\nu_j)} \left(\frac{\mathbf{b}_2 - \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}_1} \right)^{i\nu_j} = 0. \quad (17)$$

Враховуючи, що $\mathbf{T}_j$ лінійно залежать від $\mathbf{D}$, співвідношення (17) для кожного $\mathbf{x}_1$ є алгебричним рівнянням другого степеня стосовно $\mathbf{D}$, яке, як свідчить числовий аналіз, завжди має два дійсних і різних корені. Позначивши ці корені через $\mathbf{D}_1$ і $\mathbf{D}_2$, проведемо подальший аналіз. Для

цього обчислимо за формулою (16) стрибок нормального переміщення берегів тріщини $[[u_3(x_1)]]$. Числові результати цих обчислень для п'єзокерамічної композиції PZT-5/PZT-4 при $\sigma_{33}^\infty = 10$ МПа, $\sigma_{13}^\infty = 0$, $D_3^\infty = 0,01$ Кл/м², $l = 2$ мм, $\varepsilon_r = 1$ зображено на рис. 2. Із наведених результатів видно, що кореню D_1 відповідають додатні значення $[[u_3(x_1)]]$, а кореню D_2 – від'ємні. Зважаючи на те, що стрибок нормального переміщення берегів тріщини не може набувати від'ємних значень, корінь D_2 , з фізичного погляду, непридатний. Аналогічний висновок можна також зробити, проаналізувавши залежність коренів D_1 та D_2 від відносної діелектричної проникності середовища тріщини ε_r . Видно, що при $\varepsilon_r \rightarrow 0$, тобто у випадку електроізолюваної тріщини, корінь D_2 , на відміну від D_1 , залишається ненульовою величиною, що, з фізичного погляду, теж є непридатним. Отож, можна зробити висновок, що лише один корінь рівняння (17) фізично реальний і саме це значення електричної індукції на берегах тріщини використовуватимемо в подальшому аналізі.

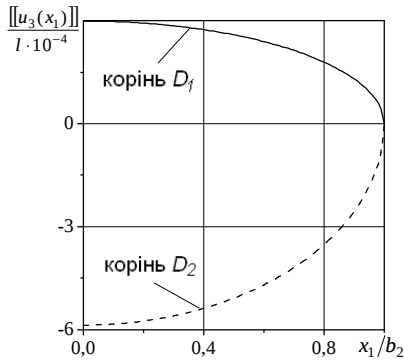


Рис. 2

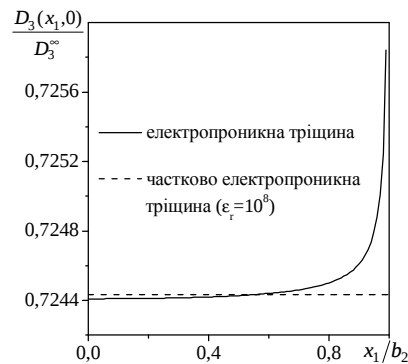


Рис. 3

На рис. 3 показано розподіл $D_3(x_1, 0)$ на берегах електропроникної міжфазової тріщини (суцільна крива) порівняно з аналогічним розподілом для частково електропроникної тріщини при $\varepsilon_r = 10^8$ (пунктирна крива). Характеристики п'єзокерамічних матеріалів, розміри тріщини та електромеханічне навантаження залишаються такими самими, як і в попередніх обчисленнях. Із отриманих результатів випливає, що зі зростанням ε_r значення $D_3(x_1, 0)$ для частково електропроникної тріщини практично на всьому проміжку $x_1 \in (b_1, b_2)$ наближаються до відповідних значень електропроникної тріщини, і лише в досить малому околі точок b_1 , b_2 між ними простежується деяка відмінність. Це підтверджує наше припущення щодо сталого розподілу нормальної складової вектора електричної індукції на берегах частково електропроникної тріщини.

Підставляючи далі подання (14) в (5) і враховуючи, що кусково-аналітична вектор-функція $\mathbf{h}(\mathbf{z})$ аналітично продовжувана через лінію жорсткого зчеплення матеріалів, отримаємо вирази для напружень і електричної індукції при $x_1 > b_2$

$$\mathbf{t}(x_1, 0) = \sum_{j=1}^3 \frac{(x_1 - b_1)^{-i\nu_j} (x_1 - b_2)^{i\nu_j}}{\sqrt{(x_1 - b_1)(x_1 - b_2)}} \left[x_1 + il\nu_j - \frac{b_1 + b_2}{2} \right] \mathbf{T}_j \mathbf{w}_j + \mathbf{T}_0. \quad (18)$$

На підставі (15), (18) отримаємо асимптотичні формули для основних механічних та електричних польових величин в околі правої вершини тріщини

$$\mathbf{t}(x_1, 0)|_{x_1 \rightarrow b_2 + 0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{x_1 - b_2}} \sum_{j=1}^3 \left(\frac{x_1 - b_2}{l} \right)^{i\nu_j} (1 + 2i\nu_j) \mathbf{T}_j \mathbf{w}_j, \quad (19)$$

$$[[\mathbf{V}(x_1)]]|_{x_1 \rightarrow b_2 - 0} = \frac{\mathbf{H} + \bar{\mathbf{H}}}{2} \sqrt{l(b_2 - x_1)} \sum_{j=1}^3 \frac{\mathbf{T}_j \mathbf{w}_j}{\text{ch}(\pi\nu_j)} \left(\frac{b_2 - x_1}{l} \right)^{i\nu_j}. \quad (20)$$

Швидкість вивільнення енергії в околі точки b_2 для частково електропроникної тріщини визначають за формулою [3]

$$\mathbf{G} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta l} \int_{b_2}^{b_2 + \Delta l} \mathbf{t}(x_1, 0) [[\mathbf{V}(x_1 - \Delta l)]] d\mathbf{x}_1.$$

Використавши вирази (19), (20) і обчислюючи відповідні інтеграли, одержимо вираз для швидкості вивільнення енергії в такій формі:

$$\mathbf{G} = \frac{\pi l}{16} \left\{ \frac{2(1 - 4\nu_1\nu_2) \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 \mathbf{w}_2^T (\mathbf{H} + \bar{\mathbf{H}}) \mathbf{w}_1}{\text{ch}^2(\pi\nu_1)} + \frac{\mathbf{T}_3^2 \mathbf{w}_3^T (\mathbf{H} + \bar{\mathbf{H}}) \mathbf{w}_3}{\text{ch}^2(\pi\nu_3)} \right\}. \quad (21)$$

Аналіз результатів. Для ілюстрації отриманих результатів було проведено числові розрахунки для біматеріалу, складеного з п'єзокераміки PZT-5 (верхній матеріал) та PZT-4 (нижній). Характеристики цих матеріалів подано в [5]. У розрахунках враховували, що $\sigma_{33}^\infty = 10$ МПа, $\sigma_{13}^\infty = 0$, $l = 2$ мм, а величина $\mathbf{D}_3^\infty$ змінювалася в діапазоні від -0,006 Кл/м² до 0,006 Кл/м².

На рис. 4 зображено графіки, що характеризують вплив електричної проникності тріщини на стрибок нормального переміщення берегів тріщини $[[\mathbf{u}_3]]$ в точці $x_1 = 0$. Тут і надалі крива 1 відповідає електроізолюваній тріщині; 2 – частково електропроникній, заповненій вакуумом (повітрям) ($\epsilon_r = 1$); 3 – частково електропроникній, заповненій силіконом ($\epsilon_r = 2,5$); 4 – електропроникній. Як видно з результатів, значення $[[\mathbf{u}_3]]$ дуже малі і для цього зовнішнього навантаження та розмірів тріщини не перевищують 1 мкм, що сумірно з середнім розміром домена PZT-кераміки. У цьому разі електрична проникність тріщини суттєво впливає на $[[\mathbf{u}_3]]$.

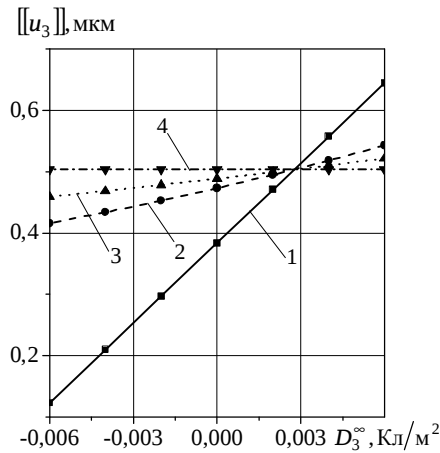


Рис. 4

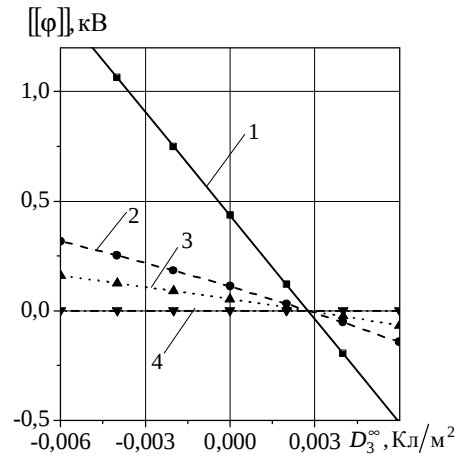


Рис. 5

Можна бачити, що у випадку електропроникної тріщини зовнішнє електричне навантаження не впливає на стрибок нормального переміщення берегів тріщини, тому $[[u_3]]$ в цьому випадку змінюється лише під дією зовнішнього механічного навантаження. Враховуючи, що стрибок нормального переміщення берегів тріщини тісно пов'язаний з можливістю подальшого розвитку тріщини, можна вважати, що електричне навантаження не сприяє і не перешкоджає розвитку електропроникної тріщини.

У випадку інших видів електричної проникності тріщини аналіз наведених результатів свідчить про лінійну залежність $[[u_3]]$ від зовнішнього електричного навантаження. Якщо однакоє механічне навантаження, то стрибок нормального переміщення берегів тріщини монотонно зростає при змінах електричної індукції від $-0,006$ Кл/м² до $0,006$ Кл/м². Це означає, що додатне зовнішнє електричне поле сприяє розвитку тріщини, тоді як від'ємне – перешкоджає такому розвитку. Різні значення кутових коефіцієнтів прямих на цих рисунках пояснюються різними значеннями електричної проникності середовища тріщини. Більшому значенню ϵ_r відповідає менше значення кутового коефіцієнта.

Розглянемо далі стрибок електричного потенціалу $[[\varphi]]$, що є в точці $x_1 = 0$ (рис. 5). Очевидно, що у випадку електропроникної тріщини стрибок електричного потенціалу на берегах тріщини завжди дорівнює нулю. Для інших видів електричних граничних умов усі криві мають лінійну функціональну залежність між стрибком електричного потенціалу та зовнішнім електричним навантаженням. Значення $[[\varphi]]$ монотонно спадають при змінах електричної індукції від $-0,006$ Кл/м² до $0,006$ Кл/м². Однак нахил цих кривих різний залежно від значення електричної проникності тріщини.

Числові результати свідчать про те, що значення $[[\varphi]]$ для частково електропроникної та електроізолюваної тріщини дуже великі, особливо при збільшенні за модулем від'ємного електричного поля на нескінченності. Оскільки відповідні стрибки нормальних переміщень дуже малі, то для такого типу електричних граничних умов правильне значне збільшення напруженості електричного поля, що може призвести до електричного пробоя тріщини.

Числові результати обчислення швидкості вивільнення енергії G при $\sigma_{33}^{\infty} = 10$ МПа та $\sigma_{33}^{\infty} = 50$ МПа зображені на рис. 6, 7.

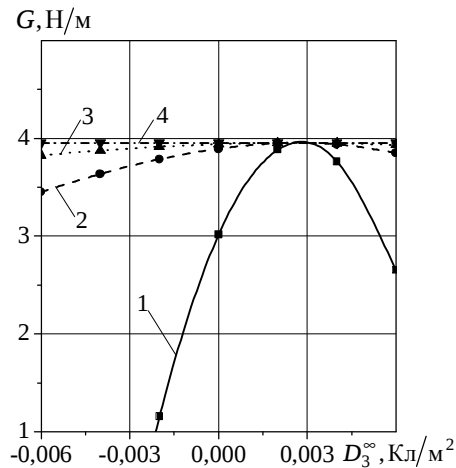


Рис. 6

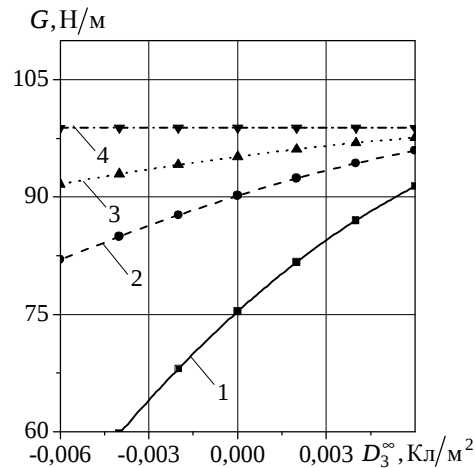


Рис. 7

Як видно з результатів, при незначному зовнішньому механічному навантаженні значення швидкості вивільнення енергії дуже малі і для частково електропроникної тріщини майже збігаються з відповідними значеннями для електропроникної тріщини. Це свідчить про те, що зовнішнє електричне поле має незначний вплив на швидкість вивільнення енергії за відсутності значного механічного навантаження на нескінченності. Причина такого ефекту полягає в тому, що в цьому випадку дуже мале розкриття тріщини, тому умова неперервності стрибка електричного потенціалу на берегах тріщини виконується майже автоматично.

Зі збільшенням механічного навантаження на нескінченності різниця між кривими, що відповідають різним моделям тріщини, збільшується, коли збільшується за модулем і зовнішнє електричне навантаження. У цьому разі значення G для частково електропроникної тріщини завжди лежать між двома граничними значеннями, які відповідають електропроникній та електроізолюваній тріщинам. Отож, можна зробити висновок, що в моделі електроізолюваної тріщини переоцінюється вплив електричного поля незалежно від зовнішнього механічного навантаження, тоді як зі збільшенням механічного навантаження для електропроникної моделі тріщини цей вплив недооцінюється, але в більш "м'якій" формі.

Якщо великі значення розтягувальних механічних зусиль, то залежність швидкості вивільнення енергії від електричної проникності тріщини значно відрізняється від попередніх випадків і суттєво залежить від знака D_3^∞ . Бачимо, що при додатному зовнішньому електричному полі значення швидкості вивільнення енергії для різних моделей тріщини наближаються одне до одного, а при від'ємному електричному полі відмінності у значеннях G залишаються. Причина цього пов'язана з нелінійністю частково електропроникної моделі тріщини.

Видно також, що при досить малому механічному навантаженні графіки швидкості вивільнення енергії, як функції від прикладеного електричного навантаження, мають форму параболи. Зі збільшенням механічного навантаження функціональна залежність швидкості вивільнення енергії стосовно електричного поля стає вже майже лінійною. Це ще одне виявлення нелінійності частково електропроникної моделі тріщини.

Числовий аналіз, проведений для п'єзокерамічних композицій ε -класу та κ -класу, засвідчує, що, незважаючи на принципову відмінність в особливостях поведінки основних характеристик поля в околі вершини тріщини, вплив електричної проникності тріщини та електромеханічного навантаження має однакові характерні риси для обох цих типів п'єзокерамічних композицій.

Отже, на підставі проведеного дослідження можна стверджувати, що найбільш детальні, достовірні та фізично обґрунтовані висновки щодо процесів руйнування п'єзoeлектричних матеріалів можна отримати, враховуючи не тільки зовнішнє електромеханічне навантаження та геометричні розміри тріщини, а й її електричну проникність. З огляду на це модель частково електропроникної тріщини найбільш придатна і важлива для подібних досліджень.

-
1. Кудрявцев Б. А., Партон В. З., Ракитин В. И. Механика разрушения пьезоэлектрических материалов. Прямолинейная туннельная трещина на границе с проводником // Прикл. мат. и мех. 1975. Т. 39. № 1. С. 149–159.
 2. Suo Z., Kuo C. M., Barnett D. M., Willis J. R. Fracture mechanics for piezoelectric ceramics // J. Mech. Phys. Solids. 1992. Vol. 40. P. 739–765.
 3. Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М., 1988.
 4. Hao T. H., Shen Z. Y. A new electric boundary condition of electric fracture mechanics and its applications // Eng. Fract. Mech. 1994. Vol. 47. P. 793–802.
 5. Govorukha V. B., Loboda V. V., Kamlah M. On the influence of the electric permeability on an interface crack in a piezoelectric bimaterial compound // Int. J. Solids Structures. 2006. Vol. 43. P. 1979–1990.

6. *Li Q., Chen Y. H.* Solution for a semi-permeable interface crack between two dissimilar piezoelectric material // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 2007. Vol. 74. P. 833–844.
7. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966.

ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНЫ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОГО ПОЛЯ ВБЛИЗИ ЕЕ ВЕРШИНЫ

Владимир ГОВОРУХА, Владимир ЛОБОДА

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара,
просп. Гагарина, 72 49010, Днепропетровск, Украина*

Рассмотрена плоская задача электроупругости для пьезокерамического биматериала с частично электропроводимой межфазной трещиной. Решение задачи построено в замкнутой форме методами теории функций комплексного переменного. Показано, что в окрестности вершины трещины в зависимости от комбинации пьезокерамических материалов, могут возникать различные виды особенностей. Для разных видов нагрузки определены основные параметры разрушения и проанализированы их зависимость от электрической проницаемости трещины.

Ключевые слова: пьезоэлектрическая керамика, частично электропроводимая межфазная трещина, скорость высвобождения энергии.

THE INFLUENCE OF ELECTRICAL PERMEABILITY OF AN INTERFACE CRACK ON THE CHARACTERISTICS OF THE ELECTROMECHANICAL FIELD AT THE VICINITY OF IT TIP

Volodymyr GOVORUKHA, Volodymyr LOBODA

*Dnipropetrovsk National University named of Oles Gonchar,
Gagarin av., 72 49010 Dnipropetrovsk, Ukraine*

An electrically limited permeable crack between two semi-infinite piezoelectric spaces is considered. The exact analytical solution of the problem is found. The singular fields are investigated around interface crack tips. Attention is focused on the effect of the permittivity of the medium inside the crack gap on the fracture mechanical parameters.

Key words: piezoelectric ceramics, electrically limited permeable interface crack, energy release rate.

Стаття надійшла до редколегії 10.02.2010
Прийнята до друку 22.12.2010

УДК: 539.375; 539.4: 536.543.

АНАЛОГ ЗАДАЧІ ГРІФФІТСА ДЛЯ ПОШИРЕННЯ ПОВЗУЧО–ВТОМНИХ ТРІЩИН

Ірина ДОЛІНСЬКА

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська 1 79000 Львів, Україна*

На підставі запропонованої раніше автором розрахункової моделі розв'язано задачу про визначення періоду докритичного росту повзучо–втомної тріщини в нескінченній пластині (аналог задачі Гріффітса за циклічного розтягу при високій температурі). Показано, що неврахування вкладу повзучості у докритичному рості повзучо–втомної тріщини може привести до переоцінки залишкової довговічності пластини і до не передбачуваного руйнування.

Ключові слова: повзучо–втомна тріщина, повзучість, аналог задачі Гріффітса, циклічний розтяг, енергетичний баланс, залишкова довговічність.

Вступ. Відомо, що втрата міцності та вичерпання ресурсу металічних елементів конструкцій при змінних довготривалих навантаженнях і високих температурах проходить шляхом зародження і до критичного росту повзучо–втомних тріщин, особливо, коли такі дефекти вже наявні в матеріалі конструкції. Тому протягом багатьох років не припиняються спроби створити теорії поширення тріщин високотемпературної повзучості в твердих тілах при циклічних навантаженнях.

Ми побудували кінетичне рівняння, яке описує поширення повзучо–втомної тріщини і дає змогу оцінити час її докритичного росту залежно від величини періоду циклу навантаження та початкової її довжини.

Розрахункова модель. Розглянемо пластинку послаблену прямолінійною тріщиною початкової довжини l_0 , яка навантажена циклічно з амплітудою p за високої температури, що спричиняє в зоні передруйнування біля вершини тріщини високотемпературну повзучість (рис.1,а). Задача полягає у визначенні залишкової довговічності пластини $t = t_*$. Будемо вважати, що навантаження змінюється в часі, як показано на схемі (рис. 1,б). У цьому разі зовнішні навантаження розтягу з амплітудою p прикладені так, що напружено–деформований стан буде симетричним стосовно осі розміщення тріщини. Побудуємо кінетичне рівняння, яке допомагає визначити кінетику поширення тріщини і час $t = t_*$ (кількості циклів навантаження $N = N_*$), коли тріщина підросте до критичного розміру l_* і пластина зруйнується.

Розглянемо рівняння енергетичного балансу процесу поширення тріщини на величину Δl [1–4]

$$Q + A_0 = W + G. \quad (1)$$

Тут $Q = \text{const}$ – величина теплової енергії; A_0 – робота зовнішніх сил; W – енергія деформування пластини, яку можна подати так [1– 4]:

$$W = W_e + W_p^{(0)}(l) + W_p^{(1)}(t) - W_p^{(2)}(t) - W_p^{(3)}(t) - W_p^{(4)}(t), \quad (2)$$

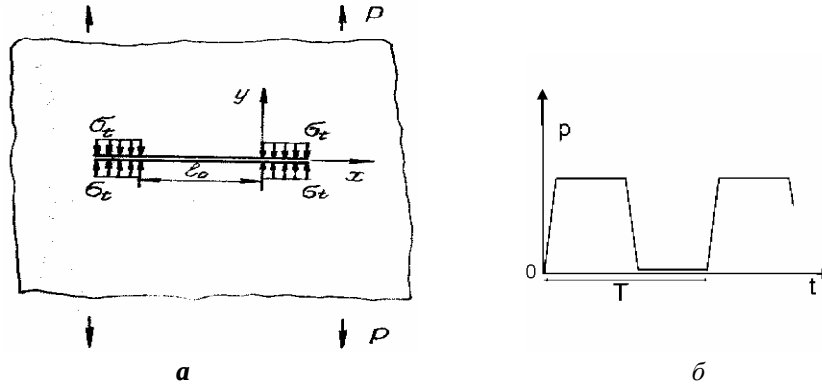


Рис.1. Схеми навантаження пластини з прямолінійною тріщиною (а) і зміни в часі параметра p зовнішнього навантаження (б)

де W_e – пружна складова енергії W ; $W_p^{(0)}(l)$ – частина роботи пластичних деформацій у зоні передруйнування при її статичному розтязі, яка залежить тільки від довжини тріщини l ; $W_p^{(1)}(t)$ – частина роботи пластичних деформацій від зовнішніх зусиль при зростанні навантаження в циклі розтягу зони передруйнування, що залежить від часу t ; $W_p^{(2)}(t)$ – частина роботи пластичних деформацій за постійної довжини тріщини під час повзучості зони передруйнування біля вершини тріщини за розтягу, що залежить тільки від часу t ; $W_p^{(3)}(t)$ – частина роботи пластичних деформацій під час повзучості при розвантаженні пластини, тобто стискування зони передруйнування, яка також виділяється за постійної довжини тріщини, генерується самою пластиною і залежить тільки від t ; $W_p^{(4)}(t)$ – частина роботи пластичних деформацій, яка генерується самою пластиною під час її розвантаження і статичного стискування зони передруйнування; Γ – енергія руйнування пластини, яка залежить тільки від довжини тріщини l . Виконання співвідношення (1) призводить до виконання такого співвідношення [1]:

$$\partial A_0 / \partial t = \partial W / \partial t + \partial \Gamma / \partial t. \quad (3)$$

Для спрощення формулювання математичної моделі будемо вважати, що $W_p^{(2)}(t) = W_p^{(3)}(t)$. Як і в [1–3], рівняння (3) зведемо до такого вигляду:

$$\partial [\Gamma - (A_0 - W_e - W_p^{(0)} - W_p^{(1)})] / \partial l \cdot dl / dt - \partial (W_p^{(4)} + 2W_p^{(3)}) / \partial t = 0. \quad (4)$$

Звідси, аналогічно до [1–4], знайдемо величину $V = dl/dt$ швидкості зміни довжини тріщини

$$dl/dt = \partial (W_p^{(4)} + 2W_p^{(3)}) / \partial t / (\gamma_{fc} - \gamma_t), \quad (5)$$

де γ_t – питома робота пластичних деформацій в зоні передруйнування у разі росту тріщини; γ_{fc} – її критичне значення.

Поділимо швидкість зміни довжини тріщини dl/dt на дві складові

$$dl/dt = dl^{(f)}/dt + dl^{(c)}/dt, \quad (6)$$

де $l^{(f)}$ – змінна довжина тріщини від циклічного навантаження; $l^{(c)}$ – змінна довжина тріщини при механізмі повзучості в циклі. Окремо ці дві складові можна ще записати у вигляді такої системи рівнянь:

$$dl^{(f)}/dN = \partial W_p^{(4)} / \partial N / [\gamma_{fc} - \gamma_t]; dl^{(c)}/dN = 2\partial W_p^{(3)} / \partial N / [\gamma_{fc} - \gamma_t], \quad (7)$$

з відповідними початковою і кінцевою умовами

$$N = 0, \quad l(0) = l_0, \quad N = N_*(T), \quad l(N_*(T)) = l_*, \quad \gamma_t(l_*) = \gamma_{fc}. \quad (8)$$

Тут N_* – період до критичного росту макротріщини, який залежить від періоду циклу T ; $t = T \cdot N$.

Отже, кінетичне рівняння (7) та умови (8) становлять математичну модель для дослідження до критичного росту тріщини в пластинах за умови симетрії навантаження.

Оскільки ми розглядаємо практичні часи витримок, тобто T не є досить велике [5], то головну частку часу буде займати перший етап повзучості, для якого характерне зменшення швидкості повзучості [5]. Відповідно до цього розкриття зони передруйнування $\delta_{t \max}(x, t)$ запишемо, використовуючи логарифмічний закон повзучості [5]

$$\delta_{t \max}(x, t) = \delta_{\max}(x) + B \cdot \ln((1 + t) \cdot t_1^{-1}), \quad (9)$$

де B , t_1 – константи, які визначають із експерименту; $\delta_{\max}(x)$ – максимальне розкриття зони передруйнування на початку циклу навантаження; $B \cdot \ln((1 + t) \cdot t_1^{-1})$ – додаткове розкриття зони передруйнування завдяки повзучості протягом циклу навантаження; x – координата з початком у вершині тріщини вздовж нормалі до неї.

Аналізуючи результати відомих експериментальних досліджень [1–5], доходимо висновку, що навіть при достатньо великих значеннях періоду циклу T виконується умова $dl^{(f)}/dN \gg dl^{(c)}/dN$. Тому надалі будемо вважати, що

$$d\mathbf{l} / dN \approx d\mathbf{l}^{(f)} / dN . \quad (10)$$

Величину $\partial \mathbf{W}_p^{(4)} / \partial N$ в рівнянні (7) визначатимемо так [1–4]:

$$\partial \mathbf{W}_p^{(4)} / \partial N = \varepsilon_{fc} \alpha \delta_{fc}^{-1} \int_0^{l_p} \sigma_{of} [\delta_{t\max}^{(f)}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) - \delta_{t\min}^{(f)}(\mathbf{x}, \mathbf{t})] d\mathbf{x} , \quad (11)$$

де l_p – ширина зони передруйнування біля вершини тріщини по нормалі до неї; ε_{fc} – критичне значення деформації $\varepsilon_{t\max}^{(f)}$ матеріалу біля вершини тріщини при циклічному навантаженні; α – коефіцієнт, що пов'язує значення статичного та циклічного розкриття тріщини [6, 7]; δ_{fc} – критичне значення $\delta_{t\max}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$; σ_{of} – усереднене значення напружень у зоні передруйнування.

Ми розглядаємо випадок, коли в кожному циклі пластина піддається однаковому навантаженню (рис.1,а) з витримкою $\mathbf{T}$, тому розкриття тріщини буде більше, ніж у випадку синусоїдального циклічного навантаження. Отже, використовуючи (9) та результати [5–7], запишемо різницю розкриття тріщини $[\delta_{t\max}^{(f)}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) - \delta_{t\min}^{(f)}(\mathbf{x}, \mathbf{t})]$ в такому вигляді:

$$\delta_{t\max}^{(f)}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) - \delta_{t\min}^{(f)}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = 0,5 (\delta_{\max}^{(f)}(\mathbf{x}) + \mathbf{B} \ln((1 + \mathbf{t}) \cdot \mathbf{t}_1^{-1})) (1 - \mathbf{R}^2)^2 . \quad (12)$$

Тут $\mathbf{R}$ – коефіцієнт асиметрії циклу. Для простоти подальшого викладення будемо вважати, що $\mathbf{R} = 0$.

Позаяк із (9) випливає, що $\mathbf{B} = \delta_{t\max}^{(f)}(\mathbf{x}, 0)$, то, використовуючи результати [5–7], величину $\delta_{t\max}^{(f)}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ подамо так:

$$\delta_{t\max}^{(f)}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \left[\delta_{\max}^{(f)}(0) + \delta_{t\max}^{(f)}(0, 0) \cdot \ln((1 + \mathbf{t}) \cdot \mathbf{t}_1^{-1}) \right] \cdot (1 - \mathbf{x} / l_p)^2 .$$

Підставляючи це в (12) і (11), отримаємо

$$\partial \mathbf{W}_p^{(4)} / \partial N = \varepsilon_{fc} \alpha \sigma_{of} \delta_{fc}^{-1} 6^{-1} (\delta_{\max}^{(f)}(0) + \delta_{t\max}^{(f)}(0, 0) \cdot \ln((1 + \mathbf{t}) \mathbf{t}_1^{-1})) \cdot l_p . \quad (13)$$

Для обчислення $\partial \mathbf{W}_p^{(4)} / \partial N$ використовуватимемо співвідношення для розкриття вершини тріщини [6, 7]

$$\delta_{t\max}^{(f)}(0) = \mathbf{K}_{I\max}^2(0) \sigma_{of}^{-1} \mathbf{E}^{-1}; \quad \delta_{t\max}^{(f)}(0, \mathbf{t}) = \delta_{fc} \varepsilon_{fc}^{-1} \varepsilon_{t\max}^{(f)}(\mathbf{t}) , \quad (14)$$

де $\mathbf{K}_{I\max}$ – максимальне значення коефіцієнта інтенсивності напружень у циклі; $\mathbf{E}$ – модуль пружності.

У формулу (13) входить невідома величина $\delta_{t\max}^{(f)}(0, 0)$ – швидкість розкриття у вершині тріщини за повзучості в зоні передруйнування, яку будемо визначати так:

$$\delta_{t \max}^{(f)}(0,0) = A \left[\delta_{t \max}^{(f)}(0,0) \delta_{fC}^{-1} \right]^m. \quad (15)$$

Тут A, m – константи, які треба визначати з експерименту. Коректність запропонованої тут залежності (15) можна перевірити тільки експериментальним шляхом, але в літературі таких експериментальних даних немає. З огляду на це поступаємо так. За допомогою другого співвідношення (14) залежність (15) можемо записати так:

$$\delta_{t \max}^{(f)}(0) = B [\varepsilon_{t \max}^{(f)}(0)]^m, \quad B = A \delta_{fC}^{-1} \varepsilon_{fC}^{1-m}, \quad (16)$$

де B, m – константи, які визначають з експерименту.

Підставляючи (14), (15) в (13), запишемо $\partial W_p^{(4)} / \partial N$ у такому вигляді:

$$\partial W_p^{(4)} / \partial N = \varepsilon_{fC} \sigma_{of} \alpha 6^{-1} E^2 K_{fC}^{-2} \left[\delta_{\max}^{(f)}(0) + A \cdot \left[\delta_{\max}^{(f)}(0) \delta_{fC}^{-1} \right]^m \ln((1+t)t_1^{-1}) \right]^2 \quad (17)$$

Як приклад розглянемо прямолінійну тріщину довжиною l_0 , розкриття у вершині якої будуть внаслідок осьової симетрії постійні. Тоді співвідношення (17) запишемо так:

$$\partial W_p^{(4)} / \partial N = \varepsilon_{fC} \sigma_{of} \alpha 6^{-1} E^2 K_{fC}^{-2} \left[\delta_{\max}^{(f)}(0) + A \cdot \left[\delta_{\max}^{(f)}(0) \delta_{fC}^{-1} \right]^m \ln((1+t)t_1^{-1}) \right]^2. \quad (18)$$

Використавши співвідношення (9), (10), (14), (18) і рівність [7]

$$\delta_{\max}^{(f)} / \delta_{fC} = K_{l \max}^2 / K_{fC}^2,$$

отримуємо остаточний вигляд кінетичного рівняння (6) для визначення швидкості поширення повзучо–втомної прямолінійної тріщини

$$\begin{aligned} dl / dN = & \left[K_{l \max}^2 \sigma_{of}^{-1} E^{-1} + A \cdot \left[K_{l \max}^2 / K_{fC}^2 \right]^m \ln((1+T)t_1^{-1}) \right]^2 \times \\ & \times \alpha E^2 4,5^{-1} (K_{fC}^2 - K_{l \max}^2)^{-1} \end{aligned} \quad (19)$$

з початковою і кінцевою умовами

$$N = 0, \quad l(0) = l_0, \quad N = N_*(T), \quad l(N_*(T)) = l_*, \quad K_{l \max}(l_*) = K_{fC}. \quad (20)$$

Розв'язок математичної задачі (19), (20) і дасть змогу визначити залишкову довговічність пластини $N_*(T)$.

Аналог задачі Гріффітса у випадку кінетики поширення повзучо–втомної тріщини у разі високої температури. Розглянемо нескінченну пластину зі сталі 321 з початковою тріщиною довжини l_0 , яка нагріта до високої температури T_0 і розтягується в нескінченно віддалених точках рівномірно розподіленими зусиллями інтенсивності p , які направлені перпендикулярно до осі Ox і змінюються циклічно (див. рис. 1,б).

Задача полягає у визначенні кількості циклів навантаження $N = N_*$, досягнувши яке тріщина підросте до критичного розміру $l = l_*$ і пластина зруйнується. Для розв'язку цієї задачі застосуємо сформульовану

розрахункову модель (19)–(20), внаслідок чого для матеріалу пластини сталь 321 [8] побудуємо

графічну залежність періоду до критичного росту тріщини N_{*n} від початкової довжини тріщини l_0 (рис. 2). Як видно з рис. 2, неврахування вкладу повзучості у докритичному рості повзучо–втомної тріщини може привести до переоцінки залишкової довговічності пластини і до не передбачуваного руйнування.

Висновки. Зроблена адаптація раніше запропонованої автором розрахункової моделі визначення періоду докритичного росту повзучо–втомних тріщин у тримірних тілах на випадок поширення таких тріщин у пластинах. На прикладі розв'язку задачі Гріффітса показано, що неврахування вкладу повзучості у докритичному рості повзучо–втомної тріщини може привести до переоцінки залишкової довговічності пластини і до не передбачуваного руйнування.

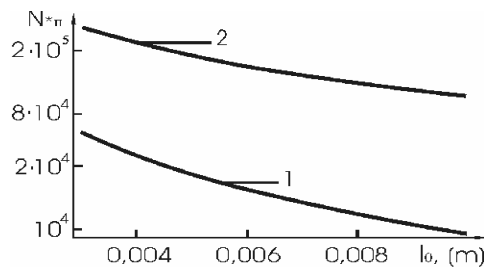


Рис. 2. Залежність N_{*n} від початкової довжини тріщини l_0 ; 1 – з врахуванням повзучості; 2 – без такого врахування.

1. Андрейків О.Є., Лесів Р.М., Долінська І.Я. Залежність докритичного росту повзучо–втомної тріщини від величини періоду циклу навантаження // Фізико–хімічна механіка матеріалів – 2009. 45, № 4. Р. 31–38.
2. Andrejkiv O. and Lesiv R. Mathematical model for estimating the period of creep–fatigue crack growth in construction materials at high temperature // Acta mechanica et automatica. – 2007. – 1, № 1. – Р. 7–10.
3. Андрейків О.Є., Сас Н.Б. Математична модель для визначення періоду до критичного поширення тріщини високотемпературної повзучості в твердих тілах // Доп. НАН України. – 2006. – №5, – С. 47 – 52.
4. Андрейків О.Є., Ліщинська М.В. Рівняння росту втомних тріщин в неоднорідних пластинах // Фіз.–хім. механіка матеріалів. – 1999. – № 3. – С. 53–58.
5. Garofalo F. Fundamentals of creep and creep–rupture in metals. – New–York; London, 1970.

6. *Андрейків О.Є., Кім М.Б.* Визначення періоду докритичного росту тріщини в елементах конструкцій при їх двох частотному навантаженні // *Машинознавство.* – 2006. – №2, – С. 3 – 7.
7. *Шата М., Терлецька З.О.* Енергетичний підхід у механіці втомного поширення макротріщини // *Механіка руйнування і міцність конструкцій* (за ред. В.В. Панасюка). – Львів, – 1999. – В.2. – С. 141–148.
8. *Koteraazawa R.* Creep–Fatigue crack growth of metallic materials at elevated temperatures // *Advances in Fracture resistance and structural integrity.* – Pergamon, 1994, – P. 497–504.

АНАЛОГ ЗАДАЧИ ГРИФФИТСА ДЛЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПОЛЗУЧЕ–УСТАЛОСТНЫХ ТРЕЩИН

Ирина ДОЛИНСКАЯ

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская 1 79000 Львов, Украина*

На основании предложенной ранее автором расчетной модели решена задача об определении периода докритического роста усталостной трещины в бесконечной пластине (аналог задачи Гриффитса при циклическом растяжении). Показано, что пренебрежение ползучестью в докритическом росте ползуче–усталостной трещины может привести к переоценке остаточной долговечности пластины и к не предполагаемому разрушению.

Ключевые слова: ползуче–усталостная трещина, ползучесть, циклическое растяжение, энергетический баланс, остаточная долговечность

ANALOGUE OF GRIFFITHS' PROBLEM FOR PROPAGATION CREEP–FATIGUE CRACKS

Iryna DOLINSKA

*Ivan Franco National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine*

On the basis of calculation model offered before by author, problem about determination of period to critical growth of creep–fatigue crack in an infinity plate (analogue of Griffiths problem in cyclic tension at high temperature) was solved. It is shown that ignoring deposit of creep in the critical grown of creep–fatigue crack can result to revaluation of residual life–time of the plate and to not predictable destruction.

Key words: creep–fatigue crack, creep, analogue of Griffiths' problem, cyclic tension, power balance, residual life–time.

Стаття надійшла до редколегії 12.11.2009

Прийнята до друку 22.12.2010

УДК 539.3

ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТРИВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ НЕОДНОРІДНОГО ПРОСТОРУ

Юрій ТОКОВИЙ

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім.
Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3б 79053 Львів, Україна*

Запропоновано методику зведення тривимірної задачі термопружності для неоднорідного в одному з координатних напрямів простору до інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду.

Ключові слова: тривимірна задача термопружності, неоднорідний простір, інтегральні рівняння.

Вступ. Відомі на сьогодні методи розв'язування задач теорії пружності й термопружності для неоднорідних тіл здебільшого полягають у застосуванні наближених чи варіаційних підходів; використанні лінеаризаційних алгоритмів; моделюванні неперервно-неоднорідного тіла багат шаровим композитом; розвитку методів, які ефективні лише для деяких конкретних способів задавання розподілів неоднорідності; застосуванні числових методів тощо [1,2]. Проте наведені підходи не можуть задовольнити сучасні потреби у цій галузі, позаяк визначення напружено-деформованого стану не є кінцевою метою досліджень, а лише проміжним етапом, який повинен надати зручний для аналізу розв'язок прямої задачі.

Більшість відомих на сьогодні методів розв'язування тривимірних задач теорії пружності та термопружності для неоднорідних тіл зорієнтовані на постановку у переміщеннях [3,4]. У [5] вихідні рівняння задачі теорії пружності для неоднорідного в одному з просторових напрямів простору зведено до визначальних інтегродиференціальних рівнянь у деформаціях, на підставі яких проаналізовано деякі часткові випадки неоднорідності. Низку підходів щодо розв'язання тривимірних задач для неоднорідного простору, півпростору та шару запропоновано та розвинуто у працях [6-9 та ін.].

Наша праця присвячена розвитку методу прямого інтегрування, який запропонував В.М. Вігак [10] щодо побудови загальних розв'язків тривимірних задач теорії пружності й термопружності в напруженнях для простору, що є неоднорідним за одним із просторових напрямів. Метод ґрунтується на зведенні цих задач до інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду. Для їхнього розв'язання пропонують застосовувати метод резольвенти, внаслідок чого розв'язки вихідних задач знаходять у явному вигляді [11].

Формулювання задачі. У тривимірному формулюванні квазістатична задача термопружності для неоднорідного простору $D = \{(x, y, z) \in (-\infty, \infty)^3\}$ у системі безрозмірних декартових координат

$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ полягає у визначенні компонент вектора переміщень $\mathbf{u}_\eta$, тензора деформації $\mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_{\eta\xi}$ та напружень $\sigma_\eta, \sigma_{\eta\xi}$ ($\eta, \xi = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}, \eta \neq \xi$) на підставі [12] рівнянь рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \mathbf{F}_x = 0 \text{ і т.д.}, \quad (1)$$

співвідношень Коші

$$\mathbf{e}_x = \frac{\partial \mathbf{u}_x}{\partial x} \quad \text{і т.д.}, \quad \mathbf{e}_{xy} = \frac{\partial \mathbf{u}_x}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{u}_y}{\partial x} \quad \text{і т.д.} \quad (2)$$

та фізичних співвідношень

$$\mathbf{E}\mathbf{e}_x = \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) + \alpha \mathbf{E}\mathbf{T} \quad \text{і т.д.}, \quad \mathbf{G}\mathbf{e}_{xy} = \sigma_{xy} \quad \text{і т.д.} \quad (3)$$

Тут $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{z}), \nu = \nu(\mathbf{z}), \mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{z}), \alpha = \alpha(\mathbf{z})$ – відповідно аналоги модуля Юнга, коефіцієнта Пуассона, модуля зсуву та коефіцієнта лінійного температурного видовження; $\mathbf{F}_x, \mathbf{F}_y, \mathbf{F}_z$ – проекції масових сил у розмірності напружень на осі координат x, y, z ; $\mathbf{T}$ – задане квазістаціонарне температурне поле. Тут і надалі помітка "і т.д." означає отримання аналогічних рівнянь за допомогою циклічної перестановки індексів. Ми розглядатимемо такі масові сили й температурне поле, які згасають під час прямування до безмежності за кожним з координатних напрямів. Вважатимемо, що характеристики матеріалу не виходять за межі, визначені у теорії пружності.

Рівняння суцільності в деформаціях, які отримав Сен-Венан у 1864 р., набувають вигляду

$$\frac{\partial^2 \mathbf{e}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{e}_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{e}_{xy}}{\partial x \partial y} \quad \text{і т.д.} \quad (4)$$

та

$$2 \frac{\partial^2 \mathbf{e}_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \mathbf{e}_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{e}_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{e}_{xy}}{\partial z} \right) \quad \text{і т.д.} \quad (5)$$

Р.В. Саусвелл показав [13], що за використання функцій Максвелла застосування варіаційного принципу Кастільяно призводить до отримання лише рівнянь (4). Якщо ж використати функції Морери, то аналогічно отримують рівняння (5). Коментуючи цей результат, названий "парадоксом Саусвелла", Дж.І. Тейлор виявив, що для однозначного визначення переміщень в однозв'язному тілі необхідно і достатньо лише рівнянь (4) або лише рівнянь (5) без жодних додаткових умов [13, с. 212]. У відповідь на це Саусвелл навів доведення того, що усі шість рівнянь (4), (5) є необхідними, використовуючи комбінації функцій Максвелла та Морери. Проте окремі елементи його доведення були недостатньо переконливими [14], що

спонукало до подальших досліджень цього питання. У [14] з використанням тотожностей Біанкі показано таке: якщо в обмеженому однозв'язному тілі V з межею S рівняння (4) виконуються в об'ємі V , а рівняння (5) на межі S , то рівняння (5) виконуються і в об'ємі V . І навпаки, якщо рівняння (5) виконуються в об'ємі V , а рівняння (4) на межі S , то (4) виконуються і в об'ємі V . У підсумку К. Вашіцу висловив тезу про те, що в обмежених тілах одна з груп рівнянь, наприклад (4), повинна слугувати за визначальні рівняння, тоді як іншу групу, (5), приймають як додаткові умови на межі тіла. У [15] на підставі інтегрування рівнянь (2) визначено кількість способів виведення рівнянь суцільності в деформаціях. Аналогічні дослідження проведено у [16], де також подано огляд праць, присвячених цьому питанню. Оскільки у нашому випадку простір $\mathbf{D}$ є необмеженою областю, то ми можемо обмежитися будь-якою з груп рівнянь (4), (5). Для нашого підходу зручнішим є використання рівнянь (4) [10].

Зведення задачі до ключових рівнянь. З використанням рівнянь (1), (3) та формули $\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$, подамо рівняння суцільності (4) у напруженнях

$$\Delta\sigma_z = \frac{1}{1+\nu}\Delta_{xy}(\sigma + \alpha\mathbf{E}\mathbf{T}) - \frac{\partial F_z}{\partial z} - \frac{\partial F_x}{\partial x} - \frac{\partial F_y}{\partial y}, \quad (6)$$

$$\Delta\left(\frac{\sigma_\eta}{2\mathbf{G}}\right) = \Delta\left(\frac{\nu\sigma}{\mathbf{E}} - \alpha\mathbf{T}\right) - \frac{1}{\mathbf{E}}\frac{\partial^2\sigma}{\partial\eta^2} + \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\mathbf{G}}\right)\frac{\partial\sigma_{\eta z}}{\partial\eta} - \frac{1}{\mathbf{G}}\frac{\partial F_\eta}{\partial\eta} - \alpha\frac{\partial^2\mathbf{T}}{\partial\eta^2}, \quad \eta = \{x, y\},$$

де $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$, $\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$,

$\Delta_{xy} = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$.

Рівняння (6) визначають нормальні компоненти тензора напружень σ_x , σ_y і σ_z у термінах першого інваріанта σ та відповідних дотичних напружень. Додавши ці рівняння, отримаємо ще одне –

$$\Delta\left(\frac{1-\nu}{\mathbf{E}}\sigma + 2\alpha\mathbf{T}\right) = \frac{\sigma_z}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{\mathbf{G}}\right) - F_z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\mathbf{G}}\right) - \frac{1}{2\mathbf{G}}\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right), \quad (7)$$

яке виражає перший інваріант тензора напружень через σ_z .

Легко перекоонатися, що для однорідного матеріалу, тобто, коли пружні властивості не залежать від координати z , рівняння (6), (7) зводяться до отриманих у [10].

Зведення ключових рівнянь до інтегральних рівнянь Вольтерра. Застосуємо до рівнянь (6), (7) інтегральне перетворення Фур'є [10]

$$\bar{\varphi}(\mathbf{z}) \equiv \bar{\varphi}(\mathbf{s}, \mathbf{p}; \mathbf{z}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) e^{-i(\mathbf{s}\mathbf{x} + \mathbf{p}\mathbf{y})} d\mathbf{x} d\mathbf{y}, \quad \mathbf{i}^2 = -1, \quad (8)$$

де $\mathbf{s}, \mathbf{p}$ – відповідно, параметри перетворення за змінною $\mathbf{x}$ та $\mathbf{y}$. У підсумку отримаємо

$$\begin{aligned}
\bar{\Delta}\bar{\sigma}_z &= -\frac{\mathbf{k}^2}{1+\nu}[\bar{\sigma} + \alpha\mathbf{E}\bar{\mathbf{T}}] + \Phi, \bar{\Delta}\left[\frac{1-\nu}{\mathbf{E}}\bar{\sigma} + 2\alpha\bar{\mathbf{T}}\right] = \frac{\bar{\sigma}_z}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{\mathbf{G}}\right) - \frac{d}{dz}\left(\frac{\bar{\mathbf{F}}_z}{\mathbf{G}}\right) - \frac{\Phi}{2\mathbf{G}}, \\
\bar{\Delta}\left[\frac{\bar{\sigma}_y}{2\mathbf{G}}\right] &= \bar{\Delta}\left[\frac{\nu\bar{\sigma}}{\mathbf{E}} - \alpha\bar{\mathbf{T}}\right] + \mathbf{p}^2\left(\frac{\bar{\sigma}}{\mathbf{E}} + \alpha\bar{\mathbf{T}}\right) + i\mathbf{p}\bar{\sigma}_{yz}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\mathbf{G}}\right) - \frac{i\mathbf{p}}{\mathbf{G}}\bar{\mathbf{F}}_y, \\
\bar{\Delta}\left[\frac{\bar{\sigma}_x}{2\mathbf{G}}\right] &= \bar{\Delta}\left[\frac{\nu\bar{\sigma}}{\mathbf{E}} - \alpha\bar{\mathbf{T}}\right] + \mathbf{s}^2\left(\frac{\bar{\sigma}}{\mathbf{E}} + \alpha\bar{\mathbf{T}}\right) + i\mathbf{s}\bar{\sigma}_{xz}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\mathbf{G}}\right) - \frac{i\mathbf{s}}{\mathbf{G}}\bar{\mathbf{F}}_x.
\end{aligned} \tag{9}$$

Тут $\mathbf{k}^2 = \mathbf{s}^2 + \mathbf{p}^2$; $\bar{\Delta} = d^2/dz^2 - k^2$; $\Phi = i(s\bar{\mathbf{F}}_x + p\bar{\mathbf{F}}_y) - d\bar{\mathbf{F}}_z/dz$.

Перше та друге рівняння системи (9) містять лише дві з шуканих функцій, а саме $\bar{\sigma}_z$ та $\bar{\sigma}$. Загальні розв'язки цих двох рівнянь нескладно знайти у вигляді

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}(\mathbf{z}) &= \frac{\mathbf{E}(\mathbf{z})}{1-\nu(\mathbf{z})}\left[-2\alpha(\mathbf{z})\bar{\mathbf{T}}(\mathbf{z}) + \frac{1}{2|\mathbf{k}|}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\bar{\mathbf{F}}_z(\xi)}{\mathbf{G}(\xi)}\right)e^{-|\mathbf{k}||\mathbf{z}-\xi|}d\xi + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4|\mathbf{k}|}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\Phi(\xi)}{\mathbf{G}(\xi)} - \bar{\sigma}_z(\xi)\frac{d^2}{d\xi^2}\left(\frac{1}{\mathbf{G}(\xi)}\right)\right]e^{-|\mathbf{k}||\mathbf{z}-\xi|}d\xi\right],
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_z(\mathbf{z}) &= \frac{|\mathbf{k}|}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha(\eta)\mathbf{E}(\eta)}{1+\nu(\eta)}\bar{\mathbf{T}}(\eta)e^{-|\mathbf{k}||\mathbf{z}-\eta|}d\eta - \\
&\quad - \frac{1}{2|\mathbf{k}|}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\eta)e^{-|\mathbf{k}||\mathbf{z}-\eta|}d\eta + \frac{|\mathbf{k}|}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\bar{\sigma}(\eta)e^{-|\mathbf{k}||\mathbf{z}-\eta|}}{1+\nu(\eta)}d\eta.
\end{aligned} \tag{11}$$

Підставивши (10) в (11), отримаємо інтегральне рівняння для $\bar{\sigma}_z$ у вигляді

$$\bar{\sigma}_z(\mathbf{z}) = \Theta_z(\mathbf{z}) + \Psi_z(\mathbf{z}) + \int_{-\infty}^{\infty}\bar{\sigma}_z(\xi)\mathbf{K}_z(\mathbf{z}, \xi)d\xi, \tag{12}$$

де

$$\begin{aligned}
\Theta_z(\mathbf{z}) &= -\frac{|\mathbf{k}|}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha(\eta)\mathbf{E}(\eta)\bar{\mathbf{T}}(\eta)e^{-|\mathbf{k}||\mathbf{z}-\eta|}}{1-\nu(\eta)}d\eta, \\
\mathbf{K}_z(\mathbf{z}, \xi) &= -\frac{1}{4}\frac{d^2}{d\xi^2}\left(\frac{1}{\mathbf{G}(\xi)}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathbf{G}(\eta)e^{-|\mathbf{k}|(|\mathbf{z}-\eta|+|\eta-\xi|)}}{1-\nu(\eta)}d\eta, \\
\Psi_z(\mathbf{z}) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathbf{G}(\eta)e^{-|\mathbf{k}||\mathbf{z}-\eta|}}{1-\nu(\eta)}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\bar{\mathbf{F}}_z(\xi)}{\mathbf{G}(\xi)}\right) + \frac{\Phi(\xi)}{2\mathbf{G}(\xi)}\right]e^{-|\mathbf{k}||\eta-\xi|}d\xi d\eta.
\end{aligned}$$

Підстановка (11) у (10) дає змогу визначити інтегральне рівняння

$$\bar{\sigma}(\mathbf{z}) = \Theta(\mathbf{z}) + \Psi(\mathbf{z}) + \int_{-\infty}^{\infty}\bar{\sigma}(\eta)\mathbf{K}(\mathbf{z}, \eta)d\eta, \tag{13}$$

де

$$\begin{aligned}\Theta(\mathbf{z}) &= -\frac{\mathbf{E}(\mathbf{z})}{1-\nu(\mathbf{z})} \left[2\alpha(\mathbf{z})\bar{\Gamma}(\mathbf{z}) + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2}{d\xi^2} \left(\frac{1}{\mathbf{G}(\xi)} \right) e^{-|\mathbf{k}||\mathbf{z}-\xi|} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\eta)\mathbf{G}(\eta)\bar{\Gamma}(\eta) e^{-|\mathbf{k}||\xi-\eta|} d\eta d\xi \right], \\ \Psi(\mathbf{z}) &= \frac{\mathbf{E}(\mathbf{z})}{2|\mathbf{k}|(1-\nu(\mathbf{z}))} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d}{d\xi} \left(\frac{\bar{\mathbf{F}}_z(\xi)}{\mathbf{G}(\xi)} \right) + \frac{\Phi(\xi)}{2\mathbf{G}(\xi)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4|\mathbf{k}|} \frac{d^2}{d\xi^2} \left(\frac{1}{\mathbf{G}(\xi)} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\eta) e^{-|\mathbf{k}||\xi-\eta|} d\eta \right) e^{-|\mathbf{k}||\mathbf{z}-\xi|} d\xi, \\ \mathbf{K}(\mathbf{z}, \xi) &= -\frac{1}{8|\mathbf{k}|(1-\nu(\mathbf{z}))(1+\nu(\eta))} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2}{d\xi^2} \left(\frac{1}{\mathbf{G}(\xi)} \right) e^{-|\mathbf{k}|(|\mathbf{z}-\xi|+|\xi-\eta|)} d\xi.\end{aligned}$$

Побудову розв'язків рівнянь Вольтерра (12) та (13) можна проводити різним способом [1,2]. Застосування з цією метою методу резольвенти дає змогу знайти їхні розв'язки у явному вигляді [1,11], тому вважатимемо надалі функції $\bar{\sigma}_z$ та $\bar{\sigma}$ відомими.

Тепер варто знайти загальні розв'язки двох останніх рівнянь (9), визначивши з них нормальні компоненти $\bar{\sigma}_x$ та $\bar{\sigma}_y$. З цією метою спершу вилучимо з цих рівнянь дотичні напруження. За допомогою інтегрування за координатою y формули

$$2 \frac{\partial^2 \sigma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} + \frac{\partial F_x}{\partial x} - \frac{\partial F_y}{\partial y} - \frac{\partial F_z}{\partial z},$$

отриманої з рівнянь рівноваги (1), та застосування до результату інтегрального перетворення (8) із використанням співвідношення $\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ отримаємо рівність

$$\begin{aligned}ip\bar{\sigma}_{yz}(\mathbf{z}) &= -\frac{s^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{\sigma}(\xi) - \bar{\sigma}_z(\xi)) \operatorname{sgn}(\mathbf{z} - \xi) d\xi + \frac{k^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\sigma}_y(\xi) \operatorname{sgn}(\mathbf{z} - \xi) d\xi - \\ &\quad - \frac{d\bar{\sigma}_z(\mathbf{z})}{d\mathbf{z}} + \frac{i}{4} \int_{-\infty}^{\infty} (s\bar{\mathbf{F}}_x(\xi) - p\bar{\mathbf{F}}_y(\xi)) \operatorname{sgn}(\mathbf{z} - \xi) d\xi - \frac{\bar{\mathbf{F}}_z(\mathbf{z})}{2},\end{aligned}\quad (14)$$

яка виражає дотичні напруження, наявні в третьому рівнянні (9), через знайдені функції $\bar{\sigma}_z$, $\bar{\sigma}$ та шукані у цьому рівнянні напруження $\bar{\sigma}_y$. Отож, підстановка (14) у третє рівняння (9) дає змогу визначити інтегральне рівняння для $\bar{\sigma}_y$ у вигляді

$$\bar{\sigma}_y(\mathbf{z}) = \Theta_y(\mathbf{z}) + \Psi_y(\mathbf{z}) + \Phi_y(\mathbf{z}) + \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\sigma}_y(\xi) \mathbf{K}_y(\mathbf{z}, \xi) d\xi, \quad (15)$$

де

$$\begin{aligned}
\Theta_y(\mathbf{z}) &= -2\mathbf{G}(\mathbf{z}) \left[\alpha(\mathbf{z})\bar{\mathbf{T}}(\mathbf{z}) + \frac{1}{2|\mathbf{k}|} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\eta)\bar{\mathbf{T}}(\eta) \mathbf{e}^{-|\mathbf{k}||\mathbf{z}-\eta|} d\eta \right], \\
\Psi_y(\mathbf{z}) &= 2\mathbf{G}(\mathbf{z}) \left[\frac{\nu(\mathbf{z})\bar{\sigma}(\mathbf{z})}{\mathbf{E}(\mathbf{z})} - \frac{\mathbf{p}^2}{2|\mathbf{k}|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\sigma}(\eta)}{\mathbf{E}(\eta)} \mathbf{e}^{-|\mathbf{k}||\mathbf{z}-\eta|} d\eta + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4|\mathbf{k}|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{\mathbf{G}(\eta)} \right) \left\{ \frac{d\bar{\sigma}_z(\eta)}{d\eta} + \frac{\mathbf{s}^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{\sigma}(\xi) - \bar{\sigma}_z(\xi)) \operatorname{sgn}(\eta - \xi) d\xi \right\} \mathbf{e}^{-|\mathbf{k}||\mathbf{z}-\eta|} d\eta \right], \\
\Phi_y(\mathbf{z}) &= 2\mathbf{G}(\mathbf{z}) \left[\frac{i\mathbf{p}}{2|\mathbf{k}|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\mathbf{F}}_y(\eta)}{\mathbf{G}(\eta)} \mathbf{e}^{-|\mathbf{k}||\mathbf{z}-\eta|} d\eta + \frac{1}{4|\mathbf{k}|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{\mathbf{G}(\eta)} \right) \left\{ \bar{\mathbf{F}}_z(\eta) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{s}\bar{\mathbf{F}}_x(\xi) - \mathbf{p}\bar{\mathbf{F}}_y(\xi)) \operatorname{sgn}(\mathbf{z} - \xi) d\xi \right\} \mathbf{e}^{-|\mathbf{k}||\mathbf{z}-\eta|} d\eta \right], \\
\mathbf{K}_y(\mathbf{z}, \xi) &= -\mathbf{G}(\mathbf{z}) \frac{|\mathbf{k}|}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{\mathbf{G}(\eta)} \right) \mathbf{e}^{-|\mathbf{k}||\mathbf{z}-\eta|} \operatorname{sgn}(\eta - \xi) d\eta.
\end{aligned}$$

Рівняння (15) є інтегральним рівнянням Вольтерра, яке аналогічне до (12), (13). Для його розв'язання та визначення $\bar{\sigma}_y$ можна застосувати методику [11].

Аналогічно виконують пошук напружень $\bar{\sigma}_x$ на підставі останнього рівняння (9) або ж за допомогою рівності $\bar{\sigma}_x = \bar{\sigma} - \bar{\sigma}_y - \bar{\sigma}_z$.

Роботу виконано за фінансової підтримки згідно з грантом № 0109U007351 Національної Академії наук України

1. Tokovyy Y.V., Ma C.-C. Thermal stresses in anisotropic and radially inhomogeneous annular domains // J. Thermal Stresses. – 2008. – 31, № 9. – P. 892-913.
2. Tokovyy Y.V., Ma C.-C. Analytical solutions to the planar non-axisymmetric elasticity and thermoelasticity problems for homogeneous and inhomogeneous annular domains // Int. J. Engng. Science. – 2009. – 47, № 3. – P. 325-486.
3. Колчин Г.Б. Расчет элементов конструкций из упругих неоднородных материалов. – Кишинев, 1971.
4. Плевако В. П. Общие решения в задачах теории упругости неоднородных сред. – Харьков, 1997.
5. Маковенко С.Я. Об одном методе решения задач неоднородной теории упругости в деформациях // Прикл. механика. – 1986. – 22, № 1. – С. 40-45.

6. Пуло А.Э. Напряженное состояние неоднородного по глубине полупространства // Прикл. механика. – 1988. – 24, № 11. – С. 3-9.
7. Бородачев А.Н. Упругое равновесие неоднородного по толщине слоя // Прикл. механика. – 1988. – 24, № 8. – С. 30-36.
8. Жгенти В.С. К расчету неоднородных по толщине плит, лежащих на упругом полупространстве // Прикл. механика. – 1988. – 24, № 12. – С. 17-23.
9. Kashtalyan M., Rushchitsky, J.J. Revisiting displacement functions in three-dimensional elasticity of inhomogeneous media // Int. J. Solids Struct. – 2009. – 46, № 18-19. – P. 3463-3470.
10. Визак В.М., Рычагивский А.В. Метод прямого интегрирования уравнений трехмерных задач упругости и термоупругости для пространства и полупространства // Прикл. механика. – 2000. – 36, №11. – С. 74–81.
11. Tokovyy Y., Ma C.-C. An explicit-form solution to the plane elasticity and thermoelasticity problems for anisotropic and inhomogeneous solids // Int. J. Solids Struct. – 2009. – 46, № 21. – P. 3850-3859.
12. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. – М., 1955.
13. Southwell R. V. Castigliano's principle of minimum strain-energy, and the conditions of compatibility for strain. In S. Timoshenko, 60th Anniversary Volume. – New York: The Macmillan Company, 1938. – P. 211–217
14. Washizu K. A note on the conditions of compatibility // J. Math. Phys. – 1957. – 36, № 4. – P. 306-312.
15. Визак В. М. Рівняння суцільності для деформівного твердого тіла // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – 41, № 2. – С. 117–123.
16. Остросаблин Н.И. Условия совместности малых деформаций и функции напряжений // Прикл. механика и техн. физика. – 1997. – 38, № 5. – С. 136-146.

**ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ
ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ПРОСТРАНСТВА****Юрий ТОКОВЫЙ**

*Институт прикладных проблем механики и математики
им. Я.С.Подстригача НАН Украины, ул. Наукова, 3б 79053 Львов, Украина*

Предложена методика сведения пространственной задачи термоупругости для неоднородного в одном из координатных направлений пространстве к интегральным уравнениям Вольтерра второго рода.

Ключевые слова: пространственная задача термоупругости, неоднородное пространство, интегральные уравнения.

**INTEGRAL EQUATIONS OF THREE-DIMENSIONAL
THERMOELASTICITY PROBLEM FOR INHOMOGENEOUS SPACE****Yuriy TOKOVYY**

*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
Naukova Str., 3b 79053 Lviv, Ukraine*

The technique for reduction of the three-dimensional thermoelasticity problem for a space, which exhibits inhomogeneous properties in one of the spatial directions, to solution of Volterra integral equations of second kind is proposed.

Key words: three-dimensional thermoelasticity problem, inhomogeneous space, integral equations.

Стаття надійшла до редколегії 12.11.2009

Прийнята до друку 22.12.2010

УДК 539.3

РОЗРАХУНОК ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ ШАРУВАТОЇ АНІЗОТРОПНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ПРИ ЛОКАЛЬНОМУ НАГРІВАННІ ДЖЕРЕЛАМИ ТЕПЛА

Уляна ЖИДИК¹, Мирон НИКОЛИШИН², Володимир ФЛЯЧОК³

¹Національний університет „Львівська політехніка”,
вул. Ст. Бандери, 12 79013 Львів, Україна

²Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С.Підстригача НАН України, вул. Наукова, 36 79053 Львів, Україна,

³Українська академія друкарства,
вул. Підголоско, 19 79020 Львів, Україна

Для неоднорідних анізотропних циліндричних оболонок записано нестационарні рівняння термопружності й теплопровідності з відповідними крайовими умовами. Методами інтегральних перетворень Фур'є і Лапласа знайдено розв'язок динамічної задачі термопружності для скінченної шарнірно опертої ортогонально армованої оболонки антисиметричної структури при локальному нагріванні.

Ключові слова: оболонка, циліндрична, анізотропна, шарувата, термопружність, джерела тепла.

Композитні циліндричні оболонки як важливі елементи сучасних конструкцій часто піддаються дії швидкозмінних температурних полів. Тому розрахунок таких конструкцій є важливою науковою задачею. Дослідження у цьому напрямі здебільшого стосувались однорідних оболонок із ізотропного або слабо анізотропного матеріалу [1-3]. Однак використання композитних матеріалів з високою анізотропією фізико-механічних характеристик потребує використання розширених моделей розрахунку оболонок.

Мета статті – дослідити термопружний стан ортогонально армованих шаруватих анізотропних кругових циліндричних оболонок скінченної довжини, які нагріваються локально розподіленими температурними джерелами. Для дослідження використали модель неоднорідних анізотропних оболонок [4], яка враховує фізико-механічні характеристики анізотропного матеріалу у трансверсальному напрямі.

Формулювання задачі та метод розв'язування. Розглянемо багат шарову кругову циліндричну оболонку сталої товщини $2h$, складену зі скінченної кількості ідеально скріплених між собою тонких композитних шарів з однаковою товщиною, які армовані волокнами в одному напрямі. Матеріал шарів вважатимемо однорідним і ортотропним, що характеризується ефективними модулями. Осі ортотропії кожного шару (напрями волокон) орієнтовані під кутом 0° або 90° до осі оболонки (ортогонально армована оболонка). Точки простору оболонки віднесемо до ортогональної системи координат x, θ, z , де x – осьова; θ – кругова; z – радіальна координати.

Початок координат помістимо у середній поверхні з радіусом $\mathbf{R}$. Цим координатам надалі відповідатимуть індекси 1, 2, 3, а кома перед індексами 1, 2 позначатиме частинні похідні за аргументами $\mathbf{x}$ і θ , відповідно.

Нехай оболонка перебуває під дією зовнішнього силового навантаження, а також нагрівається джерелами тепла і зовнішнім середовищем через конвективний теплообмін. Термопружну поведінку такої оболонки дослідимо на підставі рівнянь руху в узагальнених переміщеннях $\mathbf{u}_i, \gamma_i$ ($i = 1, 2, 3$), які запишемо в операторній формі

$$\sum_p^6 L_{sp} \mathbf{y}_p = \mathbf{b}_s \quad (s, p = 1, 2, \dots, 6), \quad (1)$$

де $\mathbf{y}_i = \mathbf{u}_i, \mathbf{y}_{3+i} = \gamma_i$ ($i = 1, 2, 3$); $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ - переміщення серединної поверхні; γ_1, γ_2 - кути повороту нормалі; γ_3 - нормальна деформація; диференціальні оператори $\mathbf{L}_{rk}$ ($\mathbf{L}_{rk} = \mathbf{L}_{kr}$) і вільні члени $\mathbf{b}_r$ набувають вигляду:

$$\begin{aligned} L_{11} &= (\mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_{11}/\mathbf{R})(\cdot)_{,11} + (\mathbf{A}_{66} + \mathbf{D}_{66}/\mathbf{R}^2)/\mathbf{R}^2(\cdot)_{,22} - \rho_1(\cdot)''; \\ L_{12} &= (\mathbf{A}_{12} + \mathbf{A}_{66})/\mathbf{R}(\cdot)_{,12}; \quad L_{13} = \mathbf{A}_{12}/\mathbf{R}(\cdot)_{,1}; \quad L_{16} = (\mathbf{A}_{13} + \mathbf{B}_{13}/\mathbf{R})(\cdot)_{,1}; \\ L_{14} &= (\mathbf{B}_{11} + \mathbf{D}_{11}/\mathbf{R})(\cdot)_{,11} - \mathbf{D}_{66}/\mathbf{R}^3(\cdot)_{,22} - \rho_2(\cdot)''; \quad L_{15} = 0; \quad L_{24} = 0; \\ L_{22} &= \mathbf{A}_{66}(\cdot)_{,11} + (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{B}_{22}/\mathbf{R} + \mathbf{D}_{22}/\mathbf{R}^2)/\mathbf{R}^2(\cdot)_{,22} - \\ &\quad - k'(\mathbf{A}_{44} - \mathbf{B}_{44}/\mathbf{R} + \mathbf{D}_{44}/\mathbf{R}^2)/\mathbf{R}^2(\cdot) - \rho_1(\cdot)''; \\ L_{23} &= (\mathbf{A}_{22} + k'\mathbf{A}_{44} - (\mathbf{B}_{22} + k'\mathbf{B}_{44})/\mathbf{R} + (\mathbf{D}_{22} + k'\mathbf{D}_{44})/\mathbf{R}^2)/\mathbf{R}^2(\cdot)_{,2}; \\ L_{25} &= \mathbf{D}_{66}/\mathbf{R}(\cdot)_{,11} + (\mathbf{B}_{22} - \mathbf{D}_{22}/\mathbf{R})/\mathbf{R}^2(\cdot)_{,22} + \frac{k'}{\mathbf{R}}(\mathbf{A}_{44} - \mathbf{B}_{44}/\mathbf{R} + \mathbf{D}_{44}/\mathbf{R}^2)(\cdot) - \rho_2(\cdot)''; \\ L_{26} &= (\mathbf{A}_{23} + (\mathbf{B}_{22} + k'\mathbf{B}_{44})/\mathbf{R} - (\mathbf{D}_{22} + k'\mathbf{D}_{44})/\mathbf{R}^2)/\mathbf{R}(\cdot)_{,2}; \\ L_{33} &= -k'(\mathbf{A}_{55} + \mathbf{B}_{55}/\mathbf{R})(\cdot)_{,11} - k'(\mathbf{A}_{44} - \mathbf{B}_{44}/\mathbf{R} + \mathbf{D}_{44}/\mathbf{R}^2)/\mathbf{R}^2(\cdot)_{,22} + \\ &\quad + (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{B}_{22}/\mathbf{R} + \mathbf{D}_{22}/\mathbf{R}^2)/\mathbf{R}^2(\cdot) + \rho_1(\cdot)''; \quad L_{34} = -(k'\mathbf{A}_{55} + k'\mathbf{B}_{55}/\mathbf{R})(\cdot)_{,1}; \\ L_{35} &= -(k'\mathbf{A}_{44} - (k'\mathbf{B}_{44} + \mathbf{B}_{22})/\mathbf{R} + (k'\mathbf{D}_{44} + \mathbf{D}_{22})/\mathbf{R}^2)/\mathbf{R}(\cdot)_{,2}; \\ L_{36} &= -k'(\mathbf{B}_{55} + \mathbf{D}_{55}/\mathbf{R})(\cdot)_{,11} - k'(\mathbf{B}_{44} - \mathbf{D}_{44}/\mathbf{R})/\mathbf{R}^2(\cdot)_{,22} + \\ &\quad + (\mathbf{A}_{23} + \mathbf{B}_{22}/\mathbf{R} - \mathbf{D}_{22}/\mathbf{R}^2)/\mathbf{R}(\cdot) + \rho_2(\cdot)''; \quad L_{45} = (\mathbf{D}_{12} + \mathbf{D}_{66})/\mathbf{R}(\cdot)_{,12}; \\ L_{44} &= \mathbf{D}_{11}(\cdot)_{,11} + \mathbf{D}_{66}/\mathbf{R}^2(\cdot)_{,22} - k'(\mathbf{A}_{55} + \mathbf{B}_{55}/\mathbf{R})(\cdot) - \rho_3(\cdot)''; \\ L_{46} &= (\mathbf{B}_{13} - k'\mathbf{B}_{55} + (\mathbf{D}_{12} + \mathbf{D}_{13} - k'\mathbf{D}_{55})/\mathbf{R})(\cdot)_{,1}; \\ L_{66} &= -k'\mathbf{D}_{55}(\cdot)_{,11} - k'\mathbf{D}_{44}/\mathbf{R}^2(\cdot)_{,22} + (\mathbf{A}_{33} + (\mathbf{B}_{33} + 2\mathbf{B}_{23})/\mathbf{R} + \mathbf{D}_{22}/\mathbf{R}^2)(\cdot) + \rho_3(\cdot)'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= (A_{11}^t + B_{11}^t/R)T_{1,1} + (B_{11}^t + D_{11}^t/R)T_{2,1}/h - q_1; \\
b_2 &= A_{22}^t T_{1,2}/R + B_{22}^t T_{2,2}/(Rh) - q_2; \\
b_3 &= A_{22}^t T_1/R + B_{22}^t T_2/(Rh) + q_3; \\
b_4 &= (B_{11}^t + D_{11}^t/R)T_{1,1} + (D_{11}^t + F_{11}^t/R)T_{2,1}/h - m_1; \\
b_5 &= B_{22}^t T_{1,2}/R + D_{22}^t T_{2,2}/(Rh) - m_2; \\
b_6 &= (A_{33}^t + B_{22}^t/R)T_1 + (D_{33}^t/R + D_{22}^t/R)T_2/h + m_3.
\end{aligned}$$

Тут і далі позначення відповідають праці [5].

Інтегральні характеристики температури T_1, T_2 , що входять у вільні члени системи (1), повинні бути визначені з рівнянь теплопровідності, які запишемо для випадку однакових умов теплообміну на поверхнях $z = \pm h$.

$$\begin{aligned}
P_{(2)}^2 T_1 + P_{(3)}^2 T_2 - \lambda_{33}^{(1)} T_2/h^2 + \lambda_{33}^{(2)} T_2/(Rh) - C^{(2)} T_1 - C^{(3)} T_2 - T_2 \varepsilon_1^t &= -W_2^t; \\
P_{(1)}^2 T_1 + P_{(2)}^2 T_2 + \lambda_{33}^{(1)} T_2/(Rh) - C^{(1)} T_1 - C^{(2)} T_2 - (T_1 - t_1^c) \varepsilon_1^t &= -W_1^t. \quad (2)
\end{aligned}$$

Для однозначності розв'язку систем рівнянь руху (1) і теплопровідності (2) задамо такі граничні умови на краях $x = 0$ і $x = l$:

$$u_3 = u_2 = 0; \gamma_3 = \gamma_2 = 0; N_{11} = M_{11} = 0; T_1 = T_2 = 0 \quad (3)$$

й однорідні початкові умови. Починаючи з часу $\tau > 0$, оболонка нагрівається джерелами тепла, які експоненціально розподілені по області $|x - x_0| \leq d, |\theta| \leq \eta$

$$\begin{Bmatrix} W_1^t \\ W_2^t \end{Bmatrix} (x, \theta, \tau) = \begin{Bmatrix} w_t^* \\ \bar{w}_t^* \end{Bmatrix} \frac{a^* + b^* e^{-k^* \tau}}{4d\eta R} e^{-r_1|x-x_0|} e^{-r_2|\theta|} N(x) N(\theta), \quad (4)$$

де $N(x) = S_-(x - (x_0 - d)) - S_+(x - (x_0 + d))$; $N(\theta) = S_-(\theta + \eta) - S_+(\theta - \eta)$; $S_{\pm}(x)$ – асиметричні одиничні функції; $w_t^*, \bar{w}_t^*$ – потужності теплових джерел, причому w_t^* – відповідає рівномірному розподілу по товщині ("плоске" джерело), а $\bar{w}_t^*$ – лінійному розподілу ("згинне" джерело); x_0 – осьова координата середини області нагрівання; $2d$ – її ширина; 2η – кут області нагрівання; r_1, r_2 і a^*, b^*, k^* – параметри, від яких залежить розподіл джерел тепла по координатах і в часі відповідно.

Розв'язок систем диференціальних рівнянь (1) і (2) з урахуванням функцій розподілу джерел тепла (4) знаходимо методом скінчених інтегральних перетворень Фур'є за координатами і методом інтегрального

перетворення Лапласа за часом відповідно до граничних умов (3) і однорідних початкових умов.

Аналіз числових результатів і висновки. Числові дослідження проводили для шаруватих циліндричних оболонок антисиметричної структури двох типів: двошарової ($0/90^\circ$) і чотиришарової ($0/90^\circ/0/90^\circ$), а також однорідної (нескінчена кількість шарів) за таких значень параметрів: $\nu_{21} = \nu_{31} = 0,25$; $G_{23} = 0,2E_2$; $E_2 = E_3 = 0,05E_1$; $G_{12} = G_{13} = 0,5E_2$; $\alpha_{22}^t = \alpha_{33}^t = 5\alpha_{11}^t$; $\lambda_{22} = \lambda_{33} = 0,5\lambda_{11}$; $h/R = 0,05$; $a^* = 1$; $b^* = 0$; $r_1 = r_2 = 0$; $l/R = 3$; $d/l = 0,05$; $\eta = \pi/2$; $x_0 = l/2$.

Обчислено максимальні значення безрозмірних прогинів, нормальних зусиль і згинних моментів залежно від колової координати θ при значенні поздовжньої координати $x = l/2$ (рис. 1-5). Суцільні лінії на рисунках відповідають двошаровій оболонці, штрихпунктирні – чотиришаровій, а штрихові – однорідній оболонці.

Із аналізу числових результатів і рисунків видно, що неоднорідність матеріалу може змінювати не лише кількісну картину напружено-деформованого стану (наприклад, для w' , N'_1 , N'_2 , M'_2), а й якісну (наприклад, для M'_1).

Прогини найбільші в центрі зони нагрівання, а потім плавно зменшуються до нуля в напрямі твірної і змінюють знак при переході від нагрітої зони до ненагрітої в напрямі напрямної.

Збільшення кількості шарів призводить до зменшення величини максимального прогину, тобто до збільшення ефективної жорсткості

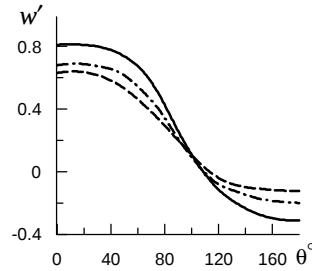


Рис. 1

оболонки. Прогини також зменшуються зі збільшенням тепловіддачі. Зусилля N'_1 розтягувальне всюди вздовж твірної $\theta = 0$, але коливається між розтягувальним і стискувальним вздовж напрямної $x = l/2$. Варто

зауважити, що зусилля N'_1 порівняно з іншими параметрами напруженого стану має характерну особливість, яка полягає в тому, що в пограничній зоні між нагрітою і ненагрітою областями досягаються однакові за величиною максимальні стискувальні і максимальні розтягувальні значення.

Зусилля N'_2 також має коливний характер від максимальних стискувальних в області дії теплових джерел до максимальних розтягувальних поза цією зоною, але стискувальні зусилля значно більші, ніж розтягувальні. Характер поведінки згинних моментів також коливний. Максимум необов'язково досягається в центрі дії теплового джерела. Вплив неоднорідності на напружено-деформований стан оболонки суттєво залежить від ступеня анізотропії матеріалу шарів.

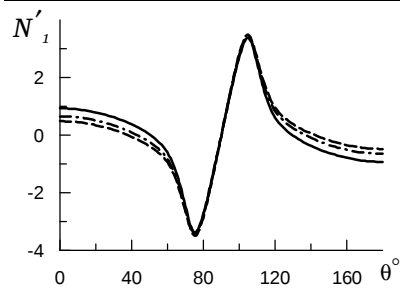


Рис. 2

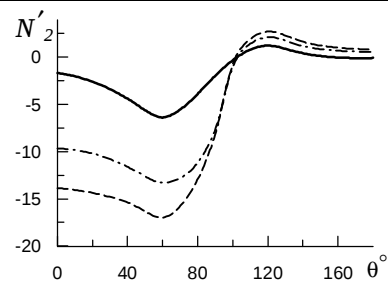


Рис. 3

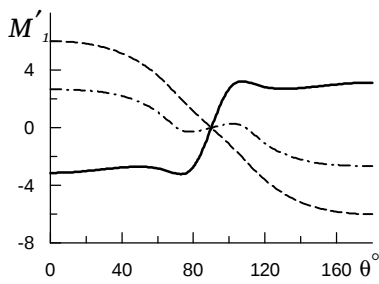


Рис. 4

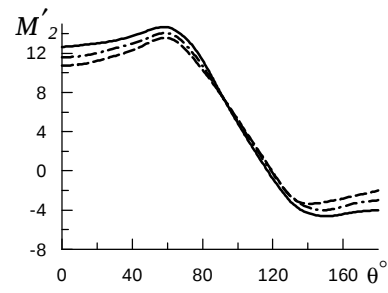


Рис. 5

Наприклад, значення прогинів w' , обчислених в центрі дії теплового джерела для двохшарової оболонки, порівняно з однорідною, збільшуються: при $E_1/E_3 = 20$, $\alpha_{33}^t/\alpha_{11}^t = 5$ на 22%, а при $E_1/E_3 = 20$, $\alpha_{33}^t/\alpha_{11}^t = 10$ – уже на 40%. Вплив неоднорідності також збільшується зі збільшенням ширини смуги нагрівання тепловими джерелами.

1. Подстригач Я. С. Термоупругость тонких оболочек / Я. С. Подстригач, Р. Н. Швец. – К., 1978.
2. Василенко А. Т. К определению температурных напряжений в слоистых анизотропных оболочках по уточненной теории / А. Т. Василенко, Г. П. Голуб, Я. М. Григоренко / Докл. АН УССР. Сер. А. – 1977. – № 4. – С. 327-330.
3. Shirakawa K. Dynamic response of an orthotropic cylindrical shell to rapid heating / K. Shirakawa // J. Sound and Vibr. – 1982. – 83, No. 1 – P. 27-35.
4. Жидик У. В. Математичне моделювання термомеханічної поведінки неоднорідних анізотропних оболонок / У. В. Жидик // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 57. – С. 72-75.
5. Жидик У. В. Дослідження температурних напружень в ортогонально армованих шаруватих анізотропних циліндричних оболонках / У. В. Жидик // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2006. – Вип. 4. – С. 139-145.

**РАСЧЕТ ТЕРМОУПРУТОГО СОСТОЯНИЯ СЛОИСТОЙ
АНИЗОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ
ЛОКАЛЬНОМ НАГРЕВЕ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА**

Уляна ЖЫДИК¹, Мирон НИКОЛЫШИН², Владимир ФЛЯЧОК³

¹*Национальный университет „Львовская политехника”,
ул. Ст. Бандеры, 12 79013 Львов, Украина*

²*Институт прикладных проблем механики и математики
и.м. Я.С.Подстригача НАН Украины, ул. Наукова, 36 79053 Львов, Украина,*

³*Украинская академия печати,
ул. Пидголоско, 19, 79020 Львов, Украина*

Методами интегральных преобразований Фурье и Лапласа найдено решение динамической задачи термоупругости для конечной шарнирно опертой оболочки антисимметрической структуры при локальном нагреве.

Ключевые слова: оболочка, термоупругость, анизотропия, источники тепла.

**ANALYSIS OF THERMOELASTIC STATE OF LAMINATED ANISOTROPIC
CYLINDRICAL SHELL UNDER LOCALIZED HEAD SOURCES**

Myron NYKOLYSHYN¹, Ulyana ZHYDYK², Volodymyr FLYACHOK³

¹*Lviv Polytechnic National University,
12 St. Bandera St., 79013 Lviv, Ukraine*

²*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
Naukova Str., 3b, 79053 Lviv, Ukraine*

³*Ukrainian Academy of Printing,
Pidgolosko Str., 19, 79020 Lviv, Ukraine*

For heterogeneous anisotropic cylindrical shells the non-stationary equations of thermoelasticity and heat conduction with appropriate boundary conditions are written down. By the integral Fourier and Laplace transformations the solution to dynamic thermoelastic problem for finite freely supported shell possessing antisymmetric cross-ply laminates under local heating is obtained.

Key words: shell, cylindrical, anisotropic, laminated, thermoelasticity, head sources.

Стаття надійшла до редколегії 12.11.2009

Прийнята до друку 22.12.2010

УДК 517.5

ON THE BASIS OF SYSTEM OF EXPONENTIAL FUNCTIONS WITH UNIT IN WEIGHT SPACE

Zaur KASIMOV

*Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan
F.Ahaeva Str. A31141 Baku, Azerbaijanian Republic*

The system of exponents with unity with complex coefficients is examined in this article. The necessary and sufficient terms of basis of this system are found in weight space of Lebesgue.

Key words: system of exponential function, basis.

We will consider the next system of exponent with unit

$$1 \cup \left\{ e^{i(nt - \alpha(t) \operatorname{sign} n)} \right\}_{n \neq 0}, \quad (1)$$

where $\alpha(t)$ – is an actual function on a segment $[-\pi, \pi]$. Let suppose that

$$\rho(t) \equiv \prod_{i=1}^l |t - \tau_i|^{\beta_i},$$

where $\{\tau_i\} \subset (-\pi, \pi)$, $\{\beta_i\} \subset \mathbf{R}$ is some great numbers.

It is easy to see that the system (1) differs from the system of exponent,

$$\left\{ e^{i(nt - \alpha(t) \operatorname{sign} n)} \right\}_{n \in \mathbf{Z}}, \quad (2)$$

by one member. The similar idea of replacement belongs to N. Levinson [1], which found that if the full exponent in L_p system $\{e^{i\lambda_k t}\}_{k \in \mathbf{Z}}$ ($\mathbf{Z}$ - is a set of integers) replace an eventual number $\{\lambda_k\}_{k \in M}$, with other $\{\mu_k\}_{k \in M}$, where $\{\mu_k\}_{k \in M} \cap \{\lambda_k\}_{k \in \mathbf{Z} \setminus M} = \{\emptyset\}$, $\mu_i \neq \mu_j$, with $i \neq j$, then obtained after replacement system of exponent will remain complete in L_p , where $M \subset \mathbf{Z}$ - is some finite subset of $\mathbf{Z}$. The presence of variable coefficients in the system (2) does not allow to apply the method of Levinson to study the basic properties of the system (1). It appears under certain conditions that the basic properties of the systems (1) and (2) are identical in the weight space $L_{p, \rho}$:

$$L_{p,\rho} \equiv \left\{ f : \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \rho(t) dt < +\infty \right\},$$

with a norm

$$\|f\|_{p,\rho} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f|^p \rho dt < +\infty \right)^{1/p}.$$

The previous questions of the basis of system (1), (2) in L_p , $1 < p < +\infty$, in case when $\alpha(t) \equiv \alpha t$, is fully studied in the works [2–5], where $\alpha \in \mathbb{C}$ - is a complex parameter. Interest to the similar systems has originated from Paley-Wiener's basic results [6]. These systems in model cases are the own functions of maximal differential operators of first-order. Therefore the study of basic properties of these systems is of particular interest from in terms of spectral theory of differential operators. On the other hand, the study of basic properties of the systems of type of sines and cosines

$$\{\sin(nt + \gamma(t))\}_{n \geq 1},$$

in $L_p(0, \pi)$, as it is shown in the work [7], substantially uses analogical properties in relation to the systems (1), (2) in $L_p(-\pi, \pi)$.

In this article basic properties of the system is studied (1) in $L_{p,\rho}$. The basic properties of the system (2) in L_p have been previously studied by the author [9].

We will do next basic suppositions:

1) $\alpha(t)$ is a piecewise-Hölder, odd function on $[-\pi, \pi]$: $\{s_i : -\pi < s_1 < \dots < s_r < \pi\}$ - is a great number of irremovable points of breaks of function $\alpha(t)$, where $h_k = \alpha(s_k + 0) - \alpha(s_k - 0)$ - is gallops of function $\alpha(t)$ in points s_k , $k = \overline{1, r}$, $h_\pi = -2\alpha(\pi)$;

2) Great Numbers $T \equiv \{\tau_i\}_1^l$ и $S = \{s_i\}_1^r$ do not intersect: $T \cap S = \{\emptyset\}$.

The following main theorem is proved in the work

Theorem 1. Let executed terms 1); 2) and inequalities:

$$\begin{aligned} -1 < \beta_i < \frac{p}{q}, \quad i = \overline{1, l}; \quad -\frac{1}{q} < \frac{h_k}{\pi} < \frac{1}{p}, \quad k = \overline{1, r}; \\ -\frac{\pi}{2p} < \alpha(\pi) < \frac{\pi}{2q} \end{aligned}$$

Then the system (1) forms a base in $L_{p,\rho}$.

Before passing to the proof of the theorem, we will consider the following homogeneous regional task of Riemann in the classes of Hardy $H_p^\pm$:

$$\mathbf{Z}_0^+(\mathbf{e}^{it}) + \mathbf{e}^{-2i\alpha(t)} \mathbf{Z}_0^-(\mathbf{e}^{it}) = 0 \quad \text{п.в. on } [-\pi, \pi]. \quad (3)$$

By a solution of task (3) it is meant the following thing: it is needed to find the pair of analytical functions $\{\mathbf{Z}_0^+(\mathbf{z}); \mathbf{Z}_0^-(\mathbf{z})\}$, which belong to the classes of Hardy $\mathbf{H}_p^+$, $\mathbf{H}_p^-$ — , inside and outside of the unit circle, accordingly, non-tangential boundary values which almost everywhere on a single circumference satisfy to correlation (3). The theory of such tasks is well worked out and sanctified in a monograph [8]. Functions $\mathbf{Z}_0^\pm(\mathbf{z})$ are determined by next expressions [8]:

$$\mathbf{Z}_0(\mathbf{z}) = \begin{cases} \mathbf{X}(\mathbf{z}), & |\mathbf{z}| < 1, \\ -\mathbf{Y}(\mathbf{z}), & |\mathbf{z}| > 1, \end{cases}$$

where

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\mathbf{z}) &= \exp \left\{ \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(s) \frac{\mathbf{e}^{is} + \mathbf{z}}{\mathbf{e}^{is} - \mathbf{z}} ds \right\}, \quad |\mathbf{z}| < 1, \\ \mathbf{Y}(\mathbf{z}) &= \exp \left\{ -\frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(s) \frac{\mathbf{e}^{is} + \mathbf{z}}{\mathbf{e}^{is} - \mathbf{z}} ds \right\}, \quad |\mathbf{z}| > 1, \end{aligned}$$

We have previously [9] proved that under the conditions of theorem 1 system (2) forms a base in $\mathbf{L}_{p,\rho}(-\pi, \pi)$, the biorthogonal to her system $\{\mathbf{e}_n^+(t); \mathbf{e}_{n+1}^-(t)\}_{n \geq 0}$ looks like

$$\mathbf{e}_n^\pm(t) \equiv \frac{\mathbf{h}_n^\pm(t)}{\rho(t)},$$

where

$$\mathbf{h}_n^+(t) = \frac{\mathbf{e}^{i\alpha(t)} \sum_{k=0}^n \mathbf{b}_{n-k}^+ \mathbf{e}^{-ikt}}{2\pi \mathbf{Z}_0^+(\mathbf{e}^{it})}, \quad n \geq 0; \quad \mathbf{h}_n^-(t) = \frac{\mathbf{e}^{i\alpha(t)} \sum_{k=1}^n \mathbf{b}_{n-k}^- \mathbf{e}^{ikt}}{2\pi \mathbf{Z}_0^+(\mathbf{e}^{it})}, \quad n \geq 1;$$

$\{\mathbf{b}_n^\pm\}_{n \geq 0}$ are coefficients at $\mathbf{z}^n$ function $\mathbf{Z}_0^\pm(\mathbf{z})$ in decompositions of Taylor on degrees $\mathbf{z}$ in zero and in the vicinity of infinitely-remote point, accordingly.

Formulas of Sokhotski-Plemel [8] gives

$$\ln \mathbf{Z}_0^+(\mathbf{e}^{it}) = \ln \mathbf{G}(t) + \ln [-\mathbf{Z}_0^-(\mathbf{e}^{it})] = \ln \mathbf{G}(t) - \ln \mathbf{Y}(\mathbf{e}^{it}),$$

where $\mathbf{G}(t) \equiv \mathbf{e}^{2i\alpha(t)}$.

Once again applying the formulas of Sokhotski-Plemel to expression $Y(z)$ we have

$$\ln Z_0^+(e^{it}) = \frac{1}{2} \ln G(t) + \frac{i}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln G(s) \operatorname{ctg} \frac{t-s}{2} ds.$$

If to pay attention to identity

$$\operatorname{ctg} \frac{t-s}{2} = i + i \frac{2e^{is}}{e^{it} - e^{is}},$$

we will get

$$\ln Z_0^+(e^{it}) = \frac{1}{2} \ln G(t) - \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln G(s) ds + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\ln G(s) e^{is}}{e^{is} - e^{it}} ds.$$

It is clear, that $\int_{-\pi}^{\pi} \ln G(s) ds = 0$. Therefore it is

Let

$$I(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\ln G(s) e^{is}}{e^{is} - e^{it}} ds.$$

Thus

$$I(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \ln G(s) \left[\frac{1}{1 - e^{i(t-s)}} - \frac{1}{1 - e^{i(t+s)}} \right] ds.$$

It is easy to establish the validity of correlation

$$\frac{1}{1 - e^{i(t-s)}} - \frac{1}{1 - e^{i(t+s)}} = -\frac{i}{2} \frac{\cos \frac{s}{2}}{\cos \frac{t}{2}} \left[\frac{1}{\sin \frac{s-t}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{s+t}{2}} \right].$$

Taking into consideration this correlation in the expression for $I(t)$ we will get

$$I(t) = -\frac{i}{4\pi} \int_0^{\pi} \ln G(s) \frac{\cos \frac{s}{2}}{\cos \frac{t}{2}} \left[\frac{1}{\sin \frac{s-t}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{s+t}{2}} \right] ds.$$

Thus $I(t)$ even function on $[-\pi, \pi]$ and finally for $Z_0^+(e^{it})$ we have

$$Z_0^+(e^{it}) = G^{\frac{1}{2}}(t) e^{I(t)}.$$

Quite obviously, that it is

$$\mathbf{b}_0^+ = \mathbf{Z}_0^+(0) = \mathbf{X}(0)\mathbf{Y}(0) = \exp\left\{\frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(s) ds\right\} \neq 0.$$

Then for $\mathbf{h}_0^+(\mathbf{t})$ we get expression

$$\mathbf{h}_0^+(\mathbf{t}) = \frac{\mathbf{b}_0^+}{2\pi} [\mathbf{Z}_0^+(\mathbf{e}^{it})\mathbf{A}(\mathbf{t})]^{-1} = \frac{\mathbf{b}_0^+}{2\pi} \mathbf{e}^{-I(\mathbf{t})} |\mathbf{A}(\mathbf{t})\mathbf{B}(\mathbf{t})|^{-\frac{1}{2}}.$$

Consequently

$$\mathbf{c}_0^+ = \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{e}_0^+(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathbf{h}_0^+(\mathbf{t})}{\rho(\mathbf{t})} d\mathbf{t} = \frac{\mathbf{b}_0^+}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{e}^{-I(\mathbf{t})} |\mathbf{A}(\mathbf{t})\mathbf{B}(\mathbf{t})|^{-\frac{1}{2}} \rho^{-1}(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \neq 0.$$

Let's assume

$$\mathbf{c}_n^{\pm} = \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{e}_n^{\pm}(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, \quad n \geq 1.$$

We will consider the system $\{\mathbf{H}_n^+(\mathbf{t}); \mathbf{H}_k^-\}_{n \geq 0, k \geq 1}$, which is defined by formulas

$$\mathbf{H}_0^+(\mathbf{t}) = \frac{1}{\mathbf{c}_0^+} \mathbf{e}_0^+(\mathbf{t}); \mathbf{H}_n^{\pm}(\mathbf{t}) = \mathbf{e}_n^{\pm}(\mathbf{t}) - \mathbf{b}_n^{\pm} \mathbf{e}_0^+(\mathbf{t}), n \geq 1,$$

where $\mathbf{b}_n^{\pm} = \frac{\mathbf{c}_n^{\pm}}{\mathbf{c}_0^+} \dots$

It is easy to check, that system

$$\mathbf{H}_0^+ \cup \{\mathbf{H}_n^+; \mathbf{H}_n^-\}_{n \geq 1},$$

is biorthogonal attended to the system (1). Further we examine a partial sum $(\varphi_n^+(\mathbf{t}) \equiv \mathbf{e}^{-i\alpha(\mathbf{t})} \mathbf{e}^{\text{int}}; \quad \varphi_n^-(\mathbf{t}) \equiv \mathbf{e}^{i\alpha(\mathbf{t})} \mathbf{e}^{-\text{int}})$

$$\mathbf{S}_{N^+, N^-} = \sum_{n=0}^{N^+} (\mathbf{H}_n^+, \psi)_{\rho} \varphi_n^+(\mathbf{t}) + \sum_{n=0}^{N^-} (\mathbf{H}_n^-, \psi)_{\rho} \varphi_n^-(\mathbf{t}),$$

where

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g})_{\rho} = \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{g}(\mathbf{t}) \overline{\mathbf{f}(\mathbf{t})} \rho(\mathbf{t}) d\mathbf{t}.$$

After simple transformations it can be easily obtained

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{S}_{N^+, N^-} - \psi \right\|_{\mathbf{p}, \rho} &\leq \left\| \sum_{n=0}^{N^+} (\mathbf{e}_n^+, \psi)_\rho \varphi_n^+ + \sum_{n=0}^{N^-} (\mathbf{e}_n^-, \psi)_\rho \varphi_n^- - \psi \right\|_{\mathbf{p}, \rho} + \\ &+ \left\| \frac{1}{\mathbf{c}_0^+} (\mathbf{e}_0^+, \psi)_\rho - (\mathbf{e}_0^+, \psi)_\rho \left[\sum_{n=1}^{N^+} \mathbf{b}_n^+ \varphi_n^+ + \sum_{n=1}^{N^-} \mathbf{b}_n^- \varphi_n^- \right] - (\mathbf{e}_0^+, \psi)_\rho \varphi_0^+ \right\|_{\mathbf{p}, \rho} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

when $N^\pm \rightarrow \infty$.

Thus, any function can be decomposed into a series of system (2.1). From $\{\mathbf{H}_n^+; \mathbf{H}_{n+1}^-\} \subset \mathbf{L}_{\mathbf{q}, \rho} \left(\frac{1}{\mathbf{p}} + \frac{1}{\mathbf{q}} = 1 \right)$ it is obvious that it is minimal in $\mathbf{L}_{\mathbf{p}, \rho}$ and consequently, any function ψ from $\mathbf{L}_{\mathbf{p}, \rho}$ decomposes in a row and thus by only character on the system (1) in $\mathbf{L}_{\mathbf{p}, \rho}$. By it basis of systems (1) is proved

A theorem is well-proved.

Now, we will suppose that a condition is executed

$$3) \left\{ \frac{\mathbf{h}_k}{\pi} - \frac{1}{\mathbf{p}} : k = \overline{1, \mathbf{r}}; \mathbf{h}_\pi \right\} \mathbf{I} \mathbf{Z} = \{\emptyset\}.$$

We will define $\{\mathbf{n}_k\}_0^r \subset \mathbf{Z}$ from correlations

$$-\frac{1}{\mathbf{q}} < \frac{\mathbf{h}_k}{\pi} + \mathbf{n}_{k-1} - \mathbf{n}_k < \frac{1}{\mathbf{p}}, \quad k = \overline{1, \mathbf{r}}; \quad \mathbf{n}_0 = 0.$$

We will accept $\omega_r = \frac{-2\alpha(\pi)}{\pi} + \mathbf{n}_r$.

We will enter a function in consideration

$$\mathbf{C}(\mathbf{t}) \equiv \mathbf{e}^{i2n_k\pi}, \quad \mathbf{t} \in (\mathbf{s}_{k-1}, \mathbf{s}_k), \quad k = \overline{1, \mathbf{r}+1}, \quad \mathbf{s}_0 = -\pi, \quad \mathbf{s}_{\mathbf{r}+1} = \pi.$$

Along with (1) we will consider the system

$$1 \mathbf{U} \left\{ \overset{\mathbf{y}}{\mathbf{A}}(\mathbf{t}) \mathbf{e}^{\text{int}}; \mathbf{e}^{i\alpha(\mathbf{t})} \mathbf{e}^{-\text{int}} \right\}_{n \geq 1}, \quad (4)$$

where $\overset{\mathbf{y}}{\mathbf{A}}(\mathbf{t}) \equiv \mathbf{e}^{i\alpha(\mathbf{t})} \mathbf{C}(\mathbf{t})$. It is quite obviously, that base properties of the systems (1) and (4) in $\mathbf{L}_{\mathbf{p}, \rho}$ are identical. If $-\frac{1}{\mathbf{q}} < \omega_r < \frac{1}{\mathbf{p}}$, then for the system (4) all terms of theorem 1 are executed, and as a result it forms a base in $\mathbf{L}_{\mathbf{p}, \rho}$. We will consider a case $\omega_r < -\frac{1}{\mathbf{q}}$, let e.g., $-\frac{1}{\mathbf{q}} - 1 < \omega_r < -\frac{1}{\mathbf{q}}$. In this case we examine the system

$$1 \mathbf{U} \left\{ \overset{\mathbf{y}}{\mathbf{A}}(\mathbf{t}) \mathbf{e}^{\text{int}}; \overset{\mathbf{y}}{\mathbf{B}}(\mathbf{t}) \mathbf{e}^{-\text{int}} \right\}_{n \geq 1}, \quad (5)$$

where $\overset{\circ}{B}(t) \equiv e^{-it}$. we will denote $\overset{\circ}{G}(t) \equiv \frac{\overset{\circ}{B}(t)}{\overset{\circ}{A}(t)}$. It is easy to notice, that in this case it is executed $\overset{\circ}{G}(-t) \equiv \overset{\circ}{G}^{-1}(t)$ on $[-\pi, \pi]$. Then quite similar to the proof of theorem 1 we set that the system (5) forms a base in $L_{p,\rho}$ and as result the system (1) is full, but not minimal in $L_{p,\rho}$. Extending this argument as a result we get that system (1) at $\omega_r < -\frac{1}{q}$ is full, but not minimal in $L_{p,\rho}$.

Similarly, we prove that at $\omega_r > \frac{1}{p}$ the system (1) is unfull, but minimal in $L_{p,\rho}$. Thus we have the following theorem.

Theorem 2. Let executed terms 1) - 3) have inequalities $-1 < \beta_i < \frac{p}{q}$, $i = \overline{1, l}$. System (1) forms a base in $L_{p,\rho}$ $1 < p < +\infty$, only when $-\frac{1}{q} < \omega_r < \frac{1}{p}$. Thus, at $\omega_r < -\frac{1}{q}$ it is full, but unminimal, and at $\omega_r > \frac{1}{p}$ it is unfull, but minimal in $L_{p,\rho}$.

We will consider the separate special cases.

$$1 \cup \left\{ e^{i(n - \alpha \operatorname{sign} n)t} \right\}_{n \neq 0} \quad (6)$$

Directly from a theorem we get

Investigation 1. Let $\alpha \in \mathbb{C}$ is complex parameter and inequalities take place

$$\begin{aligned} -1 < \beta_i < \frac{p}{q}, \quad i = \overline{1, l}; \\ -\frac{1}{2q} < \operatorname{Re} \alpha < \frac{1}{2p}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

Then the system (6) forms a base in $L_{p,\rho}$, $1 < p < +\infty$.

Actually, in this case it is $\alpha(t) \equiv \alpha t$ and it is easily to notice that all terms are executed 1), 2).

-
1. *Levin B.Ya.* Distribution of roots of whole functions. M., GYTTL..
 2. *E.I. Moeseev.* There is DAN of the USSR at the basis systems of sines and cosines //, 1984, T. 275, №4, C.794-798.

3. *Sedleckyj A.M.* Biorthogonal decompositions in rows on the intervals of material axis // *Usp. math. sciences.* 1982. V.37. P.51-95.
4. *Devdariani* About basis of one system of functions // *Different. equalizations.* 1986. V.22. №1. P. 170-171.
5. *Bilalov B.T.* Basis of some systems of exponent, cosines and sines // *Different. equalizations.* 1990. №1. P.10-16.
6. *Wiener of H., Pely* Transformation of Fourier to the complex area, M., 1964.
7. *Bilalov B.T.* Base properties of the systems of degrees are in // *Syb.mat.mag.* 2006. V.47. №1.
8. *Daniliuk I.I.* Irregular border tasks on a plane. M., 1975.
9. *Kasimov Z.A.* On a generalization of a system of exponents in weight spaces // *Trans. of NAS of Azerbaijan, XXVI,* 2006. P.97-102.

ПРО БАЗИСНІСТЬ СИСТЕМИ ЕКСПОНЕНТ З ОДИНИЦЕЮ У ВАГОВОМУ ПРОСТОРІ

Заур КАСИМОВ

*Інститут математики і механіки НАН Азербайджану,
вул.Ф.Агаєва Аз1141 Баку, Республіка Азербайджан,*

Розглянуто систему експонент з одиницею з комплексними коефіцієнтами. Знайдено необхідні і достатні умови базисності цієї системи у ваговому просторі Лебега.

Ключові слова: система експонент, базисність.

О БАЗИСНОСТИ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ С ЕДИНИЦЕЙ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Заур КАСИМОВ

*Институт математики и механики НАН Азербайджана,
вул.Ф. Агаева Аз1141 Баку, Республика Азербайджан,*

Рассмотрено систему экспонент с единицей с комплексными коэффициентами. Найдены необходимые и достаточные условия базисности этой системы в весовом пространстве Лебега.

Ключевые слова: система экспонент, базисность.

Стаття надійшла до редколегії 10.03.2010
Прийнята до друку 22.12.2010

УДК 517.95

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ЕВОЛЮЦІЙНИМИ СИСТЕМАМИ БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ

Микола БОКАЛО

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна*

Розглянуто задачу оптимального керування системами, що описуються еволюційними рівняннями, заданими на часовому промені $(-\infty, 0]$. Отримано достатні умови існування єдиного розв'язку цієї задачі.

Ключові слова: еволюційне рівняння, оптимальне керування, задачі без початкових умов.

Теорія оптимального керування детермінованими системами опирається на такі вихідні положення:

- 1) керування $\mathbf{v}$ вибирають з деякої множини $\mathbf{U}_\partial$ (множина допустимих керувань), що є підмножиною простору $\mathbf{U}$ (простору керувань);
- 2) стан $\mathbf{y}(\mathbf{v})$ керованої системи визначається для вибраного керування $\mathbf{v}$ як розв'язок рівняння

$$\Lambda \mathbf{y}(\mathbf{v}) = \Theta(\mathbf{v}), \quad (0.1)$$

де Λ – заданий оператор, який визначається керованою системою (Λ – "модель" системи), $\Theta(\mathbf{v})$ – задана функція;

- 3) спостереження $\mathbf{z}(\mathbf{v})$ визначається як певна функція стану $\mathbf{y}(\mathbf{v})$;

- 4) функція вартості $\mathbf{J} : \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}$ задається за допомогою деякої числової функції $(\mathbf{z}, \mathbf{v}) \rightarrow \Phi(\mathbf{z}, \mathbf{v}) \geq 0$ на "просторі спостережень" та просторі (множині) допустимих керувань за законом

$$\mathbf{J}(\mathbf{v}) = \Phi(\mathbf{z}(\mathbf{v}), \mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \in \mathbf{U}(\mathbf{U}_\partial). \quad (0.2)$$

Задача оптимального керування детермінованими системами полягає у відшуванні керування $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_\partial$ такого, що

$$\inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{U}_\partial} \mathbf{J}(\mathbf{v}) = \mathbf{J}(\mathbf{u}) \quad (0.3)$$

(варіаційна задача). Будь-яке таке значення $\mathbf{u}$ називається *оптимальним керуванням*.

В теорії оптимального керування вирішують такі проблеми:

- (i) отримати умови існування глобального мінімуму функціонала $\mathbf{J}$;
- (ii) вивчити структуру і властивості рівнянь, які виражають ці умови (в них повинна брати участь "модель" Λ);
- (iii) скласти конструктивний алгоритм чисельного знаходження апроксимацій оптимального керування $\mathbf{u}$.

Побудова теорії оптимального керування детермінованими системами залежить від моделі Λ . В багатьох прикладних задачах через складність керованих систем як Λ розглядають оператор з частинними похідними. Іншими словами, досліджують системи, для яких стан $y(v)$ визначається як розв'язок диференціального рівняння з частинними похідними типу (1), що задовольняє певні крайові умови, а у випадку еволюційних рівнянь - ще і початкову умову [1].

Ми розглядаємо проблему оптимального керування еволюційними системами, стан яких визначається диференціальними рівняннями параболічного типу, які задані на нескінченному часовому проміжку $(-\infty, 0]$. Тоді початковий момент збігається з $-\infty$ і стандартну початкову умову ставити не можна, а треба її замінити, наприклад, на обмеження поведінки розв'язку при $t \rightarrow -\infty$. Тому ми кажемо, що розглядаються еволюційні системи без початкових умов.

1. Коректність задачі без початкових умов для еволюційних рівнянь.

Нехай V і H – гільбертові простори над полем дійсних чисел з відповідно скалярними добутками $(\cdot, \cdot)_V$ і $(\cdot, \cdot)$ та нормами $\|\cdot\|$ і $|\cdot|$. Припустимо, що простір V неперервно і щільно вкладається в H , тобто; V є підмножиною H , замикаання V за нормою H збігається з H та існує стала $\lambda > 0$ така, що

$$\lambda \|v\|^2 \leq \|v\|_H^2 \quad \forall v \in V. \quad (1.1)$$

Нехай V' , H' спряжені відповідно до V та H простори і вважатимемо (провівши відповідне ототожнення функціоналів), що простір H' є підпростором простору V' . Ототожнивши (на підставі теореми Ріса) простори H та H' , у підсумку отримаємо неперервні та щільні вкладення

$$V \subset H \subset V'. \quad (1.2)$$

Зауважимо, що в цьому випадку $\langle g, v \rangle_V = (g, v)$ для будь-яких $v \in V, g \in H \subset V'$, де $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ – означає дію елемента з простору V' на елемент простору V (канонічний добуток на $V \times V'$). Тому надалі вживатимемо позначення $(\cdot, \cdot)$ замість $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$. Також використовуватимемо позначення $(\cdot, \cdot)_V, \|\cdot\|_V$ для відповідно скалярного добутку і норми в V' . Зауважимо, що

$$\lambda \|h\|_*^2 \leq \|h\|_H^2 \quad \forall h \in H, \quad (1.3)$$

де λ – стала з нерівності (1.1). Справді, на підставі (1.1) одержуємо

$$\|h\|_*^2 = \sup_{v \in V, \|v\|=1} |(h, v)| \leq \sup_{v \in V, \|v\|=1} \|h\| \|v\| \leq \lambda^{-1/2} \|h\|.$$

Нехай $S := (-\infty, 0]$. Введемо ще потрібні нам далі простори функцій і розподілів, визначених на S .

Нехай X – довільний гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)_X$ і нормою $\|\cdot\|_X$. Під $L^2_{\text{loc}}(S; X)$ розумітимемо лінійний простір визначених на S зі значеннями в X функцій, які є вимірними і для будь-якого відрізка $[a, b] \subset X$ їхні звуження на цей відрізок належать простору $L^2(a, b; X)$.

Якщо $\omega \in \mathbb{R}$ – довільне число і $\gamma : S \rightarrow (0, +\infty)$ – яка-небудь вимірна функція, що є обмеженою на будь-якій обмеженій підмножині множини S , то позначимо

$$L^2_{\omega, \gamma}(S; X) := \{f \in L^2_{\text{loc}}(S; X) : \int_S \gamma(t) e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \|f(t)\|_X^2 dt < \infty\}.$$

Лінійний простір $L^2_{\omega, \gamma}(S; X)$ є гільбертовим зі скалярним добутком

$$(f, g)_{\omega, \gamma, X} = \int_S \gamma(t) e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} (f(t), g(t))_X dt. \quad (1.4)$$

Якщо $\gamma(t) = 1$ при $t \in S$, то простір $L^2_{\omega, \gamma}(S; X)$ позначатимемо $L^2_{\omega, 1}(S; X)$.

Під $D'(S; V')$ розумітимемо простір визначених на $D(\text{int} S)$ ($\text{int} S := (-\infty, 0)$) зі значеннями в V' розподілів, тобто простір лінійних функціоналів на $D(\text{int} S)$ зі значеннями в V' ($D(\text{int} S)$ – простір нескінченно диференційовних і фінітних на $\text{int} S$ функцій. Легко переконатися (враховуючи (1.2)), що простори $L^2_{\text{loc}}(S; V)$, $L^2_{\text{loc}}(S; V')$ (зокрема, $L^2_{\omega, \alpha}(S; V)$, $L^2_{\omega, 1/\alpha}(S; V')$), можна ототожнити з підпросторами простору розподілів $D'(-\infty, 0; V')$. Це, зокрема, дає підстави говорити про похідні функцій з $L^2_{\text{loc}}(S; V)$ (відповідно $L^2_{\omega, \alpha}(S; V)$) в сенсі розподілів $D'(-\infty, 0; V')$ і належність таких похідних до $L^2_{\text{loc}}(S; V')$ (відповідно $L^2_{\omega, 1/\alpha}(S; V')$). З відомих результатів (див., наприклад, [12], 177-179) легко впливає такий факт: якщо функція y з $L^2_{\text{loc}}(S; V)$ має похідну y' з $L^2_{\text{loc}}(S; V')$, то y належить (можливо, після її зміни на множині міри нуль) простору $C(S; H)$ і функція $t \rightarrow |y(t)|^2$ є абсолютно неперервною на будь-якому відрізку променя S , причому виконується рівність

$$\frac{d}{dt} |y(t)|^2 = 2(y'(t), y(t)) \text{ для майже всіх } t \in S. \quad (1.5)$$

Введемо простір

$$W_{\omega}(S) := \{y \in L_{\omega, \alpha}^2(S; V) \mid y' \in L_{\omega, 1/\alpha}^2(S; V')\},$$

який є гільбертовим зі скалярним добутком $(y, z)_{W_{\omega}(S)} := (y, z)_{\omega, \alpha, V} + (y', z')_{\omega, 1/\alpha, V'}$, де y', z' - похідні функції відповідно y, z в сенсі розподілів $D'(-\infty, 0; V')$.

Зі сказаного випливає, що

$$W_{\omega}(S) \subset C(S; H). \quad (1.6)$$

Лема 1. Нехай $y \in W_{\omega}(S)$, де $\omega \in \mathbf{i}$ - довільне число. Тоді існує $y_0 \geq 0$ таке, що

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{\omega \int_0^t \alpha(s) ds} |y(t)| = y_0, \quad (1.7)$$

причому, коли

$$\inf_{t \in S} \alpha(t) > 0, \quad (1.8)$$

то (обов'язково) $y_0 = 0$.

Крім того, правильною є така оцінка:

$$\begin{aligned} & e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} |y(t)|^2 \leq \\ & \leq y_0^2 + (2\omega\lambda^{-1} + 1) \int_{-\infty}^t e^{2\omega \int_0^{\theta} \alpha(s) ds} (\alpha(\theta) |y(\theta)|^2 + [\alpha(\theta)]^{-1} |y'(\theta)|^2) d\theta, \quad t \in S. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Доведення. Приймемо $z(t) := e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} |y(t)|^2, t \in S$, і покажемо існування $z_0 \geq 0$ такого, що $\lim_{t \rightarrow -\infty} z(t) = z_0$. Для цього використаємо критерій Коші існування границі функцій. Спочатку зауважимо, що для довільних $t_1, t_2 \in S$ на підставі (5), (1) та нерівності Коші одержуємо

$$\begin{aligned} |z(t_1) - z(t_2)| &= \left| \int_{t_1}^{t_2} z'(t) dt \right| \leq 2\omega \int_{t_1}^{t_2} \alpha(t) e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} |y(t)|^2 dt + \\ &+ 2 \int_{t_1}^{t_2} e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} |y'(t)|^2 dt \leq 2\omega\lambda^{-1} \int_{t_1}^{t_2} \alpha(t) e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \|y(t)\|^2 dt + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \alpha(t) e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \|y(t)\|^2 dt + \int_{t_1}^{t_2} [\alpha(t)]^{-1} e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \|y'(t)\|_*^2 dt. \end{aligned}$$

Оскільки $y \in W_\omega(S)$, то випливає, що для довільного, як завгодно малого, значення $\varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $t_1, t_2 < -1/\delta$ матимемо $|z(t_2) - z(t_1)| < \varepsilon$. Отже, на підставі критерію Коші робимо висновок про існування числа $z_0 \geq 0$ такого, що $\lim_{t \rightarrow -\infty} z(t) = z_0$, звідки отримаємо рівність (7) з $y_0 = \sqrt{z_0}$.

Тепер доведемо, що для виконання умови (8) в (7) обов'язково $y_0 = 0$.

Справді, оскільки $\int_S \alpha(t) e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \|y(t)\|^2 dt < \infty$, то існує послідовність

$\{t_j\} \subset S$ така, що $t_j \rightarrow -\infty$ і $\alpha(t_j) e^{2\omega \int_0^{t_j} \alpha(s) ds} \|y(t_j)\|^2 \rightarrow 0$ при $j \rightarrow +\infty$.

Звідси, оскільки $\lambda \|y(t_j)\|^2 \leq \|y(t_j)\|^2$ ($j \in \mathbb{N}$) та $e^{2\omega \int_0^{t_j} \alpha(s) ds} \|y(t_j)\|^2 \rightarrow y_0^2$ при $j \rightarrow +\infty$, то випливає, що $y_0 = 0$.

Тепер доведемо оцінку (9). Як вже було сказано, для функції $y \in W_\omega(S)$ виконується рівність (5). Домножимо її для майже кожного $t \in S$ на $e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds}$ і проінтегруємо отриману рівність за t від ν до $\tau, -\infty < \nu < \tau \leq 0$

$$\int_\nu^\tau e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \frac{d}{dt} \|y(t)\|^2 dt = 2 \int_\nu^\tau e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} (y'(t), y(t)) dt.$$

З цієї рівності, інтегруючи частинами її ліву частину, отримаємо

$$e^{2\omega \int_0^\tau \alpha(s) ds} \|y(\tau)\|^2 = e^{2\omega \int_0^\nu \alpha(s) ds} \|y(\nu)\|^2 + \\ + 2\omega \int_\nu^\tau \alpha(t) e^{\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \|y(t)\|^2 dt + 2 \int_\nu^\tau e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} (y'(t), y(t)) dt. \quad (1.10)$$

Використавши нерівність Коші ($ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$), оцінимо

$$\left| \int_\nu^\tau e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} (y'(t), y(t)) dt \right| \leq \int_\nu^\tau e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \|y'(t)\|_* \|y(t)\| dt = \\ = \int_\nu^\tau (\alpha(t))^{1/2} e^{\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \|y(t)\| (\alpha(t))^{-1/2} e^{\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \|y'(t)\|_* dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_{\nu}^{\tau} \alpha(t) e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \|y(t)\|^2 dt + \frac{1}{2} \int_{\nu}^{\tau} [\alpha(t)]^{-1} e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \|y(t)\|_*^2 dt. \quad (1.11)$$

З (1.10), врахувавши (1.11) і (1.1), одержимо

$$e^{2\omega \int_0^{\tau} \alpha(s) ds} |y(\tau)|^2 \leq e^{2\omega \int_0^{\nu} \alpha(s) ds} |y(\nu)|^2 + \\ + (2\omega\lambda^{-1} + 1) \int_{\nu}^{\tau} \alpha(t) e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \|y(t)\|^2 dt + \int_{\nu}^{\tau} [\alpha(t)]^{-1} e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \|y'(t)\|_*^2 dt. \quad (1.12)$$

Зафіксувавши в (1.12) довільно вибране $\tau \in S$ і спрямувавши ν до $-\infty$, на підставі (1.7) отримаємо (1.9).

Зауваження 1. Умова (1.8) суттєва для гарантування рівності нулю границі (1.7). Справді, нехай $V = H = V' = \mathbf{i}$, $\omega = 0$, $\alpha(t) = (t^2 + 1)^{-1}$, $y(t) = 1$ при $t \in S$. Очевидно, що $y \in W_0(S)$ і в (7) $y_0 = 1$.

Нехай задана сім'я операторів $A(t) : V \rightarrow V'$, $t \in S$ така, що:

A_1 : функція $t \rightarrow (A(t)v, w)$ вимірна на S для будь-яких $v, w \in V$;

A_2 : існує вимірна функція $\alpha : S \rightarrow (0, +\infty)$ така, що

$$0 < \inf_{t \in [\tau, 0]} \alpha(t) \leq \sup_{t \in [\tau, 0]} \alpha(t) < \infty \quad \forall \tau < 0$$

і для будь-яких $v \in V, t \in S$, виконується нерівність

$$(A(t)v, v) \geq \alpha(t) \|v\|^2, \quad v \in V; \quad (1.13)$$

A_3 : існує вимірна функція $\beta : S \rightarrow (0, +\infty)$ така, що

$$\sup_{t \in [\tau, 0]} \beta(t) < \infty \quad \forall \tau < 0$$

і для будь-яких $v, w \in V, t \in S$ виконується нерівність

$$\|A(t)v\|_* \leq \beta(t) \|v\|, \quad v \in V. \quad (1.14)$$

Очевидно, що $\alpha(t) \leq \beta(t), t \in S$.

З властивостей $A_1 - A_3$ випливає, що для кожного $t \in S$ форма

$$a(t; v, w) := (A(t)v, w), \quad v, w \in V, \quad (1.15)$$

є білінійною і задовольняє умови:

- функція $t \rightarrow a(t; v, w)$ є вимірною на S для будь-яких $v, w \in V$;

- $a(t; v, v) \geq \alpha(t) \|v\|^2$;
- $|a(t; v, w)| \leq \beta(t) \|v\| \|w\|$.

Навпаки, якщо для кожного $t \in S$ визначена дійснозначна білінійна форма

$$v, w \rightarrow a(t; v, w), \quad v, w \in V,$$

і сім'я цих форм має зазначені властивості, то задано сім'ю лінійних операторів $A(t) : V \rightarrow V'$, яка задовольняє умови $A_1 - A_3$.

Розглянемо рівняння

$$\frac{dy(t)}{dt} + A(t)y(t) = f(t), \quad t \in S, \quad (1.16)$$

де $f \in L^2_{loc}(S; V')$ – задана функція.

Під розв'язком рівняння (1.16) розумітимемо функцію $y \in L^2_{loc}(S; V)$, яка має похідну в сенсі розподілів $D'(-\infty, 0; V')$ з простору $L^2_{loc}(S; V')$ і задовольняє рівняння (1.16) в сенсі простору $L^2_{loc}(S; V')$.

Для рівняння (1.16) розглянемо задачу: знайти його розв'язок, який задовольняє умову

$$e^{\omega \int_0^t \alpha(s) ds} |y(t)| \rightarrow 0 \quad t \rightarrow -\infty, \quad (1.17)$$

де $\omega \in \mathbb{R}$ – задане число.

Таку задачу називають *задачею без початкових умов для еволюційного рівняння*, оскільки початковий момент у цій ситуації збігається з $-\infty$, тому ставити стандартну початкову умову не можна. Фактично умова (1.17) є аналогом початкової умови. Далі цю задачу коротко називатимемо задачею (1.16), (1.17).

Зауваження 2. Якщо $\omega_1 < \omega_2$, то з виконання умови (1.17) при $\omega = \omega_1$ випливає виконання цієї ж умови при $\omega = \omega_2$. Справді, одержимо

$$e^{\omega_2 \int_0^t \alpha(s) ds} |y(t)| = e^{\omega_1 \int_0^t \alpha(s) ds} e^{(\omega_2 - \omega_1) \int_0^t \alpha(s) ds} |y(t)| \leq e^{\omega_1 \int_0^t \alpha(s) ds} |y(t)|, \quad t \leq 0.$$

Теорема 1. Правильні такі два твердження.

- Задача (1.16), (1.17) має не більше одного розв'язку, якщо $\omega \leq \lambda$.
- Нехай $\omega < \lambda$ – яке-небудь число, $f \in L^2_{\omega, 1/\alpha}(S; V')$. Крім того, припустимо, що існує стала $K \geq 1$ така, що

$$\beta(t) \leq K \alpha(t), \quad t \in S. \quad (1.18)$$

Тоді існує (єдиний) розв'язок задачі (1.16), (1.17), він належить $W_\omega(S)$ і задовольняє оцінки

$$e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} |y(t)|^2 \leq C_1 \int_{-\infty}^t [\alpha(\theta)]^{-1} e^{2\omega \int_0^\theta \alpha(s) ds} \|f(\theta)\|_*^2 d\theta, \quad t \in S, \quad (1.19)$$

$$\|y\|_{W_\omega(S)} \leq C_2 \|f\|_{\omega, 1/\alpha, V'}, \quad (1.20)$$

де $C_1, C_2 > 0$ – сталі, які залежать тільки від ω, λ, K .

Доведення. Спочатку доведемо твердження (i). Припустимо протилежне. Нехай y_1, y_2 – які-небудь два розв'язки задачі (1.16), (1.17). Тоді, підставивши їх по черзі в рівняння (1.16) та віднявши отримані рівності, для різниці $z := y_1 - y_2$ отримаємо рівність

$$\frac{d}{dt} z(t) + A(t)z(t) = 0 \text{ в } L_{loc}^2(S; V'). \quad (1.21)$$

Легко також переконатися, що виконується умова

$$e^{\omega \int_0^t \alpha(s) ds} |z(t)| \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow -\infty. \quad (1.22)$$

Для майже кожного $t \in S$ скалярно домножимо рівність (21) на $z(t)$ і врахуємо рівність (1.5) та нерівність (1.13)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |z(t)|^2 + \alpha(t) \|z(t)\|^2 \leq 0, \quad t \in S.$$

Звідси, врахувавши нерівність (1.1) та умову $\omega \leq \lambda$, отримаємо

$$\frac{d}{dt} |z(t)|^2 + 2\omega \alpha(t) |z(t)|^2 \leq 0, \quad t \in S. \quad (1.23)$$

Домножимо нерівність (1.23) для майже кожного $t \in S$ на $e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds}$

$$\frac{d}{dt} (e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} |z(t)|^2) \leq 0, \quad t \in S,$$

і проінтегруємо отриману нерівність за t від t_1 до t_2 , $-\infty < t_1 < t_2 \leq 0$. У підсумку одержимо

$$e^{2\omega \int_0^{t_2} \alpha(s) ds} |z(t_2)|^2 \leq e^{2\omega \int_0^{t_1} \alpha(s) ds} |z(t_1)|^2. \quad (1.24)$$

Зафіксуємо в (1.24) довільно вибране значення $t_2 \in S$ і спрямуємо t_1 до $-\infty$. Звідси, врахувавши умову (1.22) і довільність t_2 , отримаємо, що $z(t) = 0$ для кожного $t \in S$. Отримане протиріччя доводить твердження (i).

Тепер доведемо твердження (ii). Для кожного $m \in N$ прийнемо

$$f_m(t) := \begin{cases} f(t), & -m < t \leq 0, \\ 0, & t \leq -m \end{cases}$$

і розглянемо задачу: знайти функцію $y_m \in L^2(-m, 0; V)$, $dy_m/dt \in L^2(-m, 0; V')$, яка є розв'язком рівняння

$$\frac{dy_m(t)}{dt} + A(t)y_m(t) = f_m(t), \quad t \in (-m, 0], \quad (1.25)$$

і задовольняє початкову умову

$$y_m(-m) = 0. \quad (1.26)$$

Існування та єдиність розв'язку задачі (1.25), (1.26) легко випливає з відомих результатів (див., наприклад, [11], с. 111-112).

Для кожного $m \in N$ продовжимо y_m нулем на весь промінь $(-\infty, 0]$ і за цим продовженням залишимо те ж саме позначення y_m .

Зробимо деякі оцінки членів послідовності $\{y_m\}$. Найперше зауважимо, що для кожного $m \in N$ функція y_m належить $W_\omega(S)$ і є розв'язком рівняння (1.16) з заміною f та f_m , тобто виконується рівність

$$\frac{dy_m(t)}{dt} + A(t)y_m(t) = f_m(t), \quad t \in S. \quad (1.27)$$

Помножимо скалярно рівність (1.27) для майже кожного $t \in S$ на $y_m(t)$ і врахуємо рівність (1.5). Внаслідок отримаємо

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|y_m(t)\|^2 + (A(t)y_m(t), y_m(t)) = (f_m(t), y_m(t)), \quad t \in S, m \in \mathbb{N}. \quad (1.28)$$

З рівності (1.28), оцінивши її праву частину та використавши умову (1.13), одержимо нерівність

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|y_m(t)\|^2 + \alpha(t) \|y_m(t)\|^2 \leq \|f_m(t)\|_* \|y_m(t)\|, \quad t \in S, m \in \mathbb{N}. \quad (1.29)$$

На підставі нерівності Коші отримаємо для м.в. $t \in S$

$$\|f(t)\|_* \|y_m(t)\| \leq \frac{\varepsilon \alpha(t)}{2} \|y_m(t)\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon \alpha(t)} \|f(t)\|_*, \quad (1.30)$$

де $m \in \mathbb{Y}$ і $\varepsilon > 0$ — довільні числа.

Помножимо нерівність (1.29) на $2e^{2\omega \int_0^t \alpha(s)ds}$ і врахуємо (1.30). Внаслідок простих перетворень одержимо для м.в. $t \in S$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (e^{2\omega \int_0^t \alpha(s)ds} |y_m(t)|^2) - 2\omega \alpha(t) e^{2\omega \int_0^t \alpha(s)ds} |y_m(t)|^2 + \\ & + (2 - \varepsilon) \alpha(t) e^{2\omega \int_0^t \alpha(s)ds} \|y_m(t)\|^2 \leq [\varepsilon \alpha(t)]^{-1} e^{2\omega \int_0^t \alpha(s)ds} \|f(t)\|_*^2. \end{aligned} \quad (1.31)$$

На підставі (1.1) отримаємо

$$\begin{aligned} (2 - \varepsilon) \|y_m(t)\|^2 & \geq \varepsilon(2 - \varepsilon) \|y_m(t)\|^2 + \\ & + (1 - \varepsilon)(2 - \varepsilon) \lambda |y_m(t)|^2, t \in S, \varepsilon \in (0; 1]. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Якщо $\omega \leq 0$, то візьмемо $\varepsilon = 1$, якщо $0 < \omega < \lambda$, то виберемо $\varepsilon \in (0, 1)$ з умови

$$(1 - \varepsilon)(2 - \varepsilon) \lambda = 2\omega, \quad (1.33)$$

а саме $\varepsilon = (3 - \sqrt{1 + 8\omega\lambda^{-1}})/2$.

Звідси та з (1.31) на підставі (1.32) і (1.33) отримаємо

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (e^{2\omega \int_0^t \alpha(s)ds} |y_m(t)|^2) + K_1 \alpha(t) e^{2\omega \int_0^t \alpha(s)ds} \|y_m(t)\|^2 \leq \\ & \leq K_2 [\alpha(t)]^{-1} e^{2\omega \int_0^t \alpha(s)ds} \|f(t)\|_*^2, \quad t \in S, \end{aligned} \quad (1.34)$$

де $K_1, K_2 > 0$ — сталі, які залежать тільки від λ і ω .

Проінтегруємо нерівність (1.34) за t від ν до τ , де ν, τ — довільні числа, $\nu < \tau \leq 0$. У підсумку отримаємо

$$\begin{aligned} & e^{2\omega \int_0^\tau \alpha(s)ds} |y_m(\tau)|^2 - e^{2\omega \int_0^\nu \alpha(s)ds} |y_m(\nu)|^2 + \\ & + K_1 \int_\nu^\tau \alpha(t) e^{2\omega \int_0^t \alpha(s)ds} \|y_m(t)\|^2 dt \leq K_2 \int_\nu^\tau [\alpha(t)]^{-1} e^{2\omega \int_0^t \alpha(s)ds} \|f_m(t)\|_*^2 dt. \end{aligned}$$

Спрямуємо в цій нерівності ν до $-\infty$, врахувавши означення y_m і f_m

$$e^{2\omega \int_0^\tau \alpha(s)ds} |y_m(\tau)|^2 + K_1 \int_{-\infty}^\tau \alpha(t) e^{2\omega \int_0^t \alpha(s)ds} \|y_m(t)\|^2 dt \leq$$

$$\leq K_2 \int_{-\infty}^{\tau} [\alpha(t)]^{-1} e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \|f_m(t)\|_*^2 dt, \quad \tau \leq 0. \quad (1.35)$$

Тепер зауважимо, що з (1.27) та (1.14) легко випливає оцінка

$$\|y_m'(t)\|_*^2 \leq 2(\|A(t)y_m(t)\|_*^2 + \|f_m(t)\|_*^2) \leq 2(\beta^2(t) \|y_m(t)\|^2 + \|f_m(t)\|_*^2) \quad (1.36)$$

для майже кожного $t \in S$.

Домножимо нерівність (1.36) на $[\alpha(t)]^{-1} e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds}$ і проінтегруємо за t від $-\infty$ до $\tau \leq 0$, врахувавши умову (1.18) і те, що $y_m(t) = 0, f_m(t) = 0$ при $t < -m$. Отримаємо оцінку

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\tau} [\alpha(t)]^{-1} e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \|y_m'(t)\|_*^2 dt &\leq 2K^2 \int_{-\infty}^{\tau} \alpha(t) e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \|y_m(t)\|^2 dt + \\ &+ 2 \int_{-\infty}^{\tau} [\alpha(t)]^{-1} e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \|f_m(t)\|_*^2 dt, \quad \tau \in S. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Врахувавши означення f_m , з (1.35) і (1.37) одержимо оцінки

$$e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \|y_m(t)\|^2 \leq C_1 \int_{-\infty}^t [\alpha(\theta)]^{-1} e^{2\omega \int_0^\theta \alpha(s) ds} \|f(\theta)\|_*^2 d\theta, \quad t \in S, \quad (1.38)$$

$$\|y_m\|_{W_\omega(S)} \leq C_2 \|f\|_{\omega, 1/\alpha, V'}, \quad (1.39)$$

де $C_1, C_2 > 0$ – сталі, які залежать тільки від ω, λ і K .

З оцінки (1.39), зокрема, випливає, що послідовність $\{y_m\}$ обмежена в $L_{\omega, \alpha}^2(S; V)$, а послідовність $\{y_m'\}$ обмежена в $L_{\omega, 1/\alpha}^2(S; V')$. Це разом з оцінкою (1.38) і тим, що $L_{\omega, \alpha}^2(S; V)$, $L_{\omega, 1/\alpha}^2(S; V')$, $W_\omega(S)$ – гільбертові простори, дає змогу зробити висновок про існування функцій $y \in L_{\omega, \alpha}^2(S; V)$, $\dot{y} \in L_{\omega, 1/\alpha}^2(S; V')$, $z \in W_\omega(S)$ і підпослідовності $\{y_{m_j}\}_{j=1}^\infty$ послідовності $\{y_m\}_{m=1}^\infty$ таких, що

$$y_{m_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} y \text{ слабо в } L_{\omega, \alpha}^2(S; V), \quad (1.40)$$

$$y_{m_j}' \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \dot{y} \text{ слабо в } L_{\omega, 1/\alpha}^2(S; V'), \quad (1.41)$$

$$y_{m_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} z \text{ слабо в } W_\omega(S), \quad (1.42)$$

$$y_{m_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \overset{\circ}{z}^* - \text{слабко в } L_{loc}^\infty(S; H). \quad (1.43)$$

Зауважимо, що співвідношення (1.43) означає, що для будь-яких $t_1, t_2 \in S (t_1 < t_2)$ і довільного $g \in L^1(t_1, t_2; H)$ одержуємо

$$\int_{t_1}^{t_2} (y_{m_j}(t), g(t)) dt \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} (\overset{\circ}{z}(t), g(t)) dt. \quad (1.44)$$

Покажемо, що

$$\overset{\circ}{y} = y', \quad z = y, \quad \overset{\circ}{z} = y. \quad (1.45)$$

Справді, нехай $v \in V, \varphi \in D(-\infty, 0)$ – довільні. Одержали

$$\int_S (y'_{m_j}(t), v) \varphi(t) dt = - \int_S (y_{m_j}(t), v) \varphi'(t) dt, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (1.46)$$

Згідно з (1.40) отримаємо

$$\begin{aligned} \int_S (y_{m_j}(t), v) \varphi'(t) dt &= \int_S \alpha(t) e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} (y_{m_j}(t), [\alpha(t)]^{-1} e^{-2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \varphi'(t) v) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \\ &\xrightarrow{j \rightarrow \infty} \int_S \alpha(t) e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} (y(t), [\alpha(t)]^{-1} e^{-2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \varphi'(t) v) = \int_S (y(t), v) \varphi'(t) dt. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Аналогічно, використавши (41), можна довести, що

$$\int_S (y'_{m_j}(t), v) \varphi(t) dt \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \int_S (\overset{\circ}{y}(t), v) \varphi(t) dt. \quad (1.48)$$

На підставі (1.47) і (1.48) перейдемо в (1.46) до границі при $j \rightarrow \infty$. У підсумку отримаємо

$$\int_S (y'(t), v) \varphi(t) dt = - \int_S (y(t), v) \varphi'(t) dt$$

для довільних $v \in V$ і $\varphi \in D(-\infty, 0)$, звідки одержуємо першу з рівностей (1.45).

На підставі першої з рівностей (1.45) і співвідношень (1.40) - (1.42) отримаємо для довільного елемента $g \in W_\omega(S)$

$$(y_{m_j}, g)_{\omega, \alpha, V} + (y_{m_j}', g')_{\omega, 1/\alpha, V'} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} (z, g)_{\omega, \alpha, V} + (z', g')_{\omega, 1/\alpha, V'} = (y, g)_{\omega, \alpha, V} + (y', g')_{\omega, 1/\alpha, V'}.$$

Звідси отримаємо другу з рівностей (1.45). Ми також з'ясували, що $y \in W_\omega(S)$ і виконується оцінка (1.20).

Тепер доведемо правильність третьої з рівностей (1.45). Нехай $t_1, t_2 \in S (t_1 < t_2)$ – довільні числа і g – будь-який елемент з $L^2(t_1, t_2; H) \subset L^1(t_1, t_2; H)$. Продовжимо g нулем на весь промінь S , залишивши за цим продовженням те саме позначення g . Очевидно, що виконується (1.44). З іншого боку, на підставі (1.40) одержуємо

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} (y_{m_j}(t), g(t)) dt &= \int_{t_1}^{t_2} (y_{m_j}(t), \Lambda_V^{-1} g(t))_V dt = \\ &= \int_S \alpha(t) e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} (y_{m_j}(t), [\alpha(t)]^{-1} e^{-2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \Lambda_V^{-1} g(t))_V dt \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \\ &\xrightarrow{j \rightarrow \infty} \int_S \alpha(t) e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} (y(t), [\alpha(t)]^{-1} e^{-2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \Lambda_V^{-1} g(t))_V dt = \int_{t_1}^{t_2} (y(t), g(t)) dt, \end{aligned}$$

де $\Lambda_V : V \rightarrow V'$ – канонічний ізоморфізм Ріса. Звідси і (1.44) легко випливає третя з рівностей (1.45).

Доведемо правильність оцінки (1.19). Зауважимо, що з оцінки (1.38) випливає оцінка

$$|y_m(t)| \leq h(t), \quad t \in S, \quad m \in \mathbb{Y}, \quad (1.49)$$

де

$$h(t) := C_1 e^{-2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \int_{-\infty}^t [\alpha(\theta)]^{-1} e^{2\omega \int_0^\theta \alpha(s) ds} \|f(\theta)\|_*^2 d\theta \geq 0, \quad t \in S \quad (h \in C(S)).$$

Нехай $\tau \in S, \delta > 0$ – які-небудь числа. Тоді з (1.49) отримаємо

$$|y_{m_j}(t)| \leq \max_{s \in [\tau - \delta, \tau]} h(s), \quad t \in [\tau - \delta, \tau], \quad j \in \mathbb{Y}. \quad (1.50)$$

З (1.43), (1.45), (1.50) і того, що $y \in C(S; H)$, випливає оцінка

$$|y(t)| \leq \max_{s \in [\tau - \delta, \tau]} h(s), \quad t \in [\tau - \delta, \tau].$$

Звідси отримаємо нерівність $|y(\tau)| \leq \max_{s \in [\tau - \delta, \tau]} h(s)$ для будь-яких $\delta > 0$, а це означає, що $|y(\tau)| \leq h(\tau)$. Отож, оцінка (1.19) правильна.

Тепер доведемо, що y – розв'язок задачі (1.16), (1.17). Спочатку зауважимо, що для будь-яких $t_1, t_2 \in S (t_1 < t_2)$ і довільних

$g \in L^2(t_1, t_2; V), \mathring{g} \in L^2(t_1, t_2; V')$ одержуємо

$$\int_{t_1}^{t_2} (y_{m_j}(t), \mathring{g}(t)) dt \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} (y(t), \mathring{g}(t)) dt, \quad (1.51)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (y'_{m_j}(t), g(t)) dt \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} (y'(t), g(t)) dt. \quad (1.52)$$

Доведемо правильність (1.51). Для цього продовжимо $\overset{\circ}{g}$ нулем на весь промінь S , залишивши за цим продовженням те саме позначення $\overset{\circ}{g}$. Використавши (1.40), отримаємо

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} (y_{m_j}(t), \overset{\circ}{g}(t)) dt &= \int_S (y_{m_j}(t), \overset{\circ}{g}(t)) dt = \\ &= \int_S \alpha(t) e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} (y_{m_j}(t), [\alpha(t)]^{-1} e^{-2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \Lambda_V^{-1} \overset{\circ}{g}(t))_V dt \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \\ &\xrightarrow{j \rightarrow \infty} \int_S \alpha(t) e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} (y(t), [\alpha(t)]^{-1} e^{-2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \Lambda_V^{-1} \overset{\circ}{g}(t))_V dt = \int_{t_1}^{t_2} (y(t), \overset{\circ}{g}(t)) dt, \end{aligned}$$

тобто, співвідношення (1.51) правильне. Аналогічно доводиться правильність (1.52).

Нехай $g \in L_{loc}^2(S; V)$, $t_1, t_2 \in S$ ($t_1 < t_2$), $m \in \mathbb{Y}$ — довільні. Для майже кожного $t \in S$ домножимо скалярно (1.27) на $g(t)$ і проінтегруємо отриману рівність за t від t_1 до t_2

$$\int_{t_1}^{t_2} (y'_m(t), g(t)) dt + \int_{t_1}^{t_2} (A(t)y_m(t), g(t)) dt = \int_{t_1}^{t_2} (f_m(t), g(t)) dt. \quad (1.53)$$

Тепер зауважимо, що на підставі співвідношення (1.51) отримуємо

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} (A(t)y_{m_j}(t), g(t)) dt &= \int_{t_1}^{t_2} (y_{m_j}(t), A^*(t)g(t)) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} (y(t), A^*(t)g(t)) dt = \int_{t_1}^{t_2} (A(t)y(t), g(t)) dt, \end{aligned} \quad (1.54)$$

де для кожного $t \in S$ $A^*(t)$ — спряжений до $A(t)$ оператор.

Приймемо в (1.53) $m = m_j$ ($j \in \mathbb{Y}$) і перейдемо до границі при $j \rightarrow \infty$, враховуючи (1.52), (1.54) та означення f_m ($m \in \mathbb{Y}$). Внаслідок отримаємо рівність

$$\int_{t_1}^{t_2} (y'(t) + A(t)y(t) - f(t), g(t)) dt = 0 \quad (1.55)$$

для довільних $g \in L_{loc}^2(S; V)$, $t_1, t_2 \in S$ ($t_1 < t_2$). Звідси випливає рівність

$$y'(t) + A(t)y(t) = f(t) \text{ для м.в. } t \in S, \quad (1.56)$$

тобто, функція y є розв'язком рівняння (1.16).

З оцінки (1.19) і того, що $f \in L_{\omega,1/\alpha}(S;V')$, легко випливає умова (1.17). Отож, ми довели, що функція y є розв'язком задачі (1.16), (1.17), належить простору $W_{\omega}(S)$ і задовольняє оцінки (1.19) і (1.20).

2. Формулювання задачі оптимального керування та її однозначна розв'язність. Нехай U – гільбертів простір керувань; ω – деяке число; $A(t) : V \rightarrow V', t \in S$, – сім'я операторів, яка описана в попередньому пункті; $B \in L(U; L_{\omega,1/\alpha}^2(S;V'))$ – деякий оператор; g – який-небудь елемент простору $L_{\omega,1/\alpha}^2(S;V')$.

Стан досліджуваної еволюційної системи $y(v) = y(;\nu)$ при заданому керуванні $\nu \in U$ визначатимемо як функцію з простору $W_{\omega}(S)$, що є розв'язком рівняння

$$\frac{d}{dt}y(t;\nu) + A(t)y(t;\nu) = g(t) + (B\nu)(t), \quad t \in S, \quad (2.1)$$

і задовольняє умову

$$e^{\omega \int_0^t \alpha(s) ds} |y(t;\nu)| \rightarrow 0 \quad t \rightarrow -\infty. \quad (2.2)$$

Нехай H – деякий гільбертів простір спостережень; $C \in L(W_{\omega}(S); H)$ – заданий оператор, який визначає спостереження $z(\nu) := Cy(\nu)$ при керуванні $\nu \in U$.

Позначимо через N симетричний оператор з простору $L(U)$ ($L(U)$ – банахів простір лінійних обмежених операторів на U), який задовольняє умову

$$(N\nu, \nu)_U \geq \nu \|\nu\|_U^2, \quad \nu \in U, \quad (2.3)$$

де $\nu = \text{const} > 0$.

Нехай $\Phi(z, \nu) := \|z - z_0\|_H^2 + (N\nu, \nu), (z, \nu) \in H \times U$, – деяка функція і введемо в розгляд функцію вартості $J(\nu) := \Phi(z(\nu), \nu), \nu \in U$, тобто

$$J(\nu) = \|Cy(\nu) - z_0\|_H^2 + (N\nu, \nu)_U, \quad \nu \in U, \quad (2.4)$$

де $z_0 \in H$ – заданий елемент.

Нехай U_{∂} – опукла замкнена множина в U . Задача, яку ми розглядаємо, полягає у знаходженні елементів $u \in U_{\partial}$ таких, що

$$\inf_{\mathbf{v} \in U_{\partial}} J(\mathbf{v}) = J(\mathbf{u}) \quad (2.5)$$

($\mathbf{u}$ — оптимальне керування). Далі цю задачу коротко називатимемо задачею (2.5).

Нас цікавить питання існування єдиного розв'язку задачі (2.5).

Теорема 2. Нехай простори $\mathbf{V}, \mathbf{H}$ та сім'я операторів $\mathbf{A}(\mathbf{t}) : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}', \mathbf{t} \in \mathbf{S}$, з пункту 1 і виконуються зазначені в цьому пункті припущення. Крім того, вважаємо, що $\omega < \lambda$. Тоді задача (2.5) має єдиний розв'язок.

Для доведення цієї теореми будемо використовувати таке відоме (див. [1]) твердження.

Твердження 1. Нехай $\mathbf{v} \rightarrow J(\mathbf{v}) : U \rightarrow \mathbb{R}$ — строго опуклий, диференційовний функціонал, який у випадку, коли U_{∂} — необмежена множина, задовольняє умову

$$J(\mathbf{v}) \rightarrow +\infty \text{ при } \|\mathbf{v}\|_U \rightarrow +\infty, \mathbf{v} \in U_{\partial}. \quad (2.6)$$

Тоді існує єдиний розв'язок (оптимальне керування) задачі (2.5) і він характеризується варіаційною нерівністю

$$J'(\mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in U_{\partial}. \quad (2.7)$$

Доведення теореми 1. Нам достатньо показати, що в нашому випадку виконуються всі умови Твердження 1.

Нехай $\mathbf{W}_{\omega}^*(\mathbf{S})$ — лінійний підпростір простору $\mathbf{W}_{\omega}(\mathbf{S})$, який складається з функцій, які задовольняють умову (1.17). Легко переконатися, використовуючи лему 1, що $\mathbf{W}_{\omega}^*(\mathbf{S})$ з нормою простору $\mathbf{W}_{\omega}(\mathbf{S})$ є банаховим простором.

Зауважимо, що відображення $\mathbf{y}(\cdot) \rightarrow \mathbf{A}(\cdot)\mathbf{y}(\cdot)$ переводить простір $\mathbf{L}_{\omega, \alpha}^2(\mathbf{S}; \mathbf{V})$ в простір $\mathbf{L}_{\omega, 1/\alpha}^2(\mathbf{S}; \mathbf{V}')$. Справді, для довільного $\mathbf{y} \in \mathbf{L}_{\omega, \alpha}^2(\mathbf{S}; \mathbf{V})$ на підставі (1.14) і (1.18) отримаємо

$$\begin{aligned} & [\alpha(\mathbf{t})]^{-1} e^{2 \int_0^t \alpha(s) ds} \|\mathbf{A}(\mathbf{t})\mathbf{y}(\mathbf{t})\|_*^2 \leq \\ & \leq [\alpha(\mathbf{t})]^{-1} \beta^2(\mathbf{t}) e^{2 \int_0^t \alpha(s) ds} \|\mathbf{y}(\mathbf{t})\|^2 \leq K^2 \alpha(\mathbf{t}) e^{2 \int_0^t \alpha(s) ds} \|\mathbf{y}(\mathbf{t})\|^2, \quad \mathbf{t} \in \mathbf{S}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Оскільки права частина нерівності (8) інтегровна по $\mathbf{S}$, то з цієї нерівності випливає, що функція $\mathbf{t} \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{t})\mathbf{y}(\mathbf{t})$ належить простору $\mathbf{L}_{\omega, 1/\alpha}^2(\mathbf{S}; \mathbf{V}')$. Отож, на підставі сказаного коректно визначений оператор

$$\mathbf{L} : \mathbf{W}_{\omega}^*(\mathbf{S}) \rightarrow \mathbf{L}_{\omega, 1/\alpha}^2(\mathbf{S}; \mathbf{V}') \quad (2.9)$$

за правилом

$$(Ly)(t) := \frac{dy(t)}{dt} + A(t)y(t), \quad t \in S, \quad (2.10)$$

для кожного $y \in W_{\omega}^*(S)$.

Оскільки ми припустили, що $\omega < \lambda$, то з теореми 1 випливає бієктивність відображення L , причому оператор L і обернений до нього $L^{-1} : L_{\omega, 1/\alpha}^2(S; V') \rightarrow W_{\omega}^*(S)$ є неперервними. Справді, для L це легко перевіряється з використанням нерівності (2.8), а для L^{-1} випливає з оцінки (1.20), якщо прийняти $y := L^{-1}f$. Отже, оператор L виконує ізоморфізм між просторами $W_{\omega}^*(S)$ і $L_{\omega, 1/\alpha}^2(S; V')$.

З (2.1), (2.2) випливає, що для кожного $v \in U$ стан $y(v)$ системи визначається за правилом

$$y(v) = L^{-1}(g + Bv). \quad (2.11)$$

Звідки, зокрема, випливає, що відображення $v \rightarrow y(v) : U \rightarrow W_{\omega}^*(S)$ є афінним і неперервним. Згідно з цим і нашими припущеннями отримаємо, що функціонал J строго монотонний і неперервний. Покажемо, що він є диференційовний, і знайдемо його диференціал.

Нехай v, h – довільні елементи простору U . Зауважимо, що

$$y(v + h) = L^{-1}(g + B(v + h)) = L^{-1}(g + Bv) + L^{-1}Bh = y(v) + L^{-1}Bh. \quad (2.12)$$

Використовуючи рівність (12) та властивості скалярного добутку, отримаємо

$$\begin{aligned} J(v + h) - J(v) &= \|Cy(v + h) - z_0\|_H^2 + (N(v + h), v + h)_U - \|Cy(v) - z_0\|_H^2 - \\ &\quad - (Nv, v)_U = \|Cy(v) - z_0 + CL^{-1}Bh\|_H^2 + (Nv, h)_U + (Nh, v)_U + (Nh, h)_U - \\ &\quad - \|Cy(v) - z_0\|_H^2 = 2(Cy(v) - z_0, CL^{-1}Bh)_H + 2(Nv, h)_U + \|CL^{-1}Bh\|_H^2 + (Nh, h)_U. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Звідси випливає, що функціонал J диференційовний і його диференціал набуває вигляду

$$J'(v) \cdot h = 2(Cy(v) - z_0, CL^{-1}Bh)_H + 2(Nv, h)_U, \quad v \in U, h \in U. \quad (2.14)$$

Умова (6) виконується, оскільки на підставі (3) отримаємо

$$J(v) = \|Cy(v) - z_0\|_H^2 + (Nv, v)_U \geq \nu \|v\|^2, \quad v \in U. \quad (2.15)$$

Зі сказаного і твердження 1 випливає, що задача (2.5) має єдиний розв'язок і він характеризується варіаційною нерівністю (2.7). $\square$

Дещо "розшифруємо" нерівність (2.7). Для цього зауважимо, що ця нерівність, враховуючи (2.14) і те, що $L^{-1}B(v - u) = y(v) - y(u)$ (див. (2.11)), набуде вигляду

$$(Cy(u) - z_0, C(y(v) - y(u)))_H + (Nu, v - u)_U \geq 0 \quad \forall v \in U_\partial. \quad (2.16)$$

Для подальшої конкретизації співвідношень, що характеризують оптимальне керування, треба уточнити типи спостережень. Ми розглянемо два типи спостереження – *фінальне* і *розподілене*.

3. Сукупність співвідношень, які характеризують оптимальне керування у випадку фінального спостереження. Розглянемо випадок *фінального спостереження*, тобто виконання умови

$$F : H = H, \quad C = DP, \quad \text{де } P \in L(W_\omega(S); H), \quad Pz = z(0) \quad \forall z \in W_\omega(S), \quad D \in L(H).$$

У цьому випадку нерівність (2.16) набуде вигляду

$$(Dy(0; u) - z_0, D(y(0; v) - y(0; u)))_H + (Nu, v - u)_U \geq 0 \quad \forall v \in U_\partial. \quad (3.1)$$

Оскільки $H = H'$, то з (3.1) одержуємо

$$(D^*(Du(0; u) - z_0), y(0; v) - y(0; u))_H + (Nu, v - u)_U \geq 0 \quad \forall v \in U_\partial, \quad (3.2)$$

де D^* – спряжений до D оператор, тобто D^* – оператор з $L(H)$ такий, що

$$(Dv, w) = (v, D^*w) \quad \forall v, w \in H.$$

Для кожного $t \in S$ через $A^*(t) : V \rightarrow V'$ позначимо спряжений до $A(t)$ оператор, тобто $A^*(t) \in L(V; V')$ такий, що

$$(A^*(t)v, w) = (A(t)w, v) \quad \forall v, w \in V. \quad (3.3)$$

Легко переконатися, що

$$(A^*(t)v, v) \geq \alpha(t) \|v\|^2 \quad \forall v \in V, \quad (3.4)$$

$$\|A^*(t)v\|_* \leq \beta(t) \|v\| \quad \forall v \in V, \quad (3.5)$$

де α і β ті, що в умовах A_2 і A_3 .

Справді, з (3.3) і A_2 одержуємо

$$(A^*(t)v, v) = (A(t)v, v) \geq \alpha(t) \|v\|^2 \quad \forall t \in S, v \in V,$$

звідки отримуємо (3.4).

Тепер зауважимо, що з (3) і A_3 випливає

$$|(A^*(t)v, w)| = |(A(t)w, v)| \leq \beta(t) \|w\| \|v\| \quad \forall t \in S, v, w \in V,$$

звідки легко отримаємо (3.5).

Введемо в розгляд спряжений стан $t \rightarrow p(t; u) \in L_{loc}^2(S; V) \cap C(S; H)$ як розв'язок задачі Коші

$$-\frac{dp(t; u)}{dt} + A^*(t)p(t; u) = 0 \quad D'(S; V'), \quad (3.6)$$

$$p(0; u) = D^*(Dy(0; u) - z_0). \quad (3.7)$$

Існування розв'язку цієї задачі випливає з відомих результатів, якщо зробити в (3.6) заміну t на $-t$. Очевидно (див.(3.5)), що функція $t \rightarrow A^*(t)p(t; u)$ є елементом простору $L_{loc}^2(S; V')$, а отже, функція $t \rightarrow \frac{d}{dt}p(t; u)$ належить $L_{loc}^2(S; V')$.

Одержимо деякі оцінки розв'язку задачі (3.6), (3.7). Для зручності і спрощення викладення позначимо

$$p_0 := D^*(Dy(0; u) - z_0) \quad (3.8)$$

і писатимемо $p(t), p$ замість відповідно $p(t; u), p(u)$ ($t \in S$).

Для майже кожного $t \in S$ домножимо скалярно рівність (3.6) на $p(t)e^{-2\omega \int_0^t \alpha(s) ds}$ і отриману рівність проінтегруємо за t від $\tau < 0$ до 0. У підсумку, врахувавши рівність

$$(p'(t), p(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |p(t)|^2 \quad \text{О лСс о КМХ} \quad t \in S,$$

отримаємо

$$-\frac{1}{2} \int_{\tau}^0 e^{-2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \frac{d}{dt} |p(t)|^2 dt + \int_{\tau}^0 e^{-2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} (A^*(t)p(t), p(t)) dt = 0. \quad (3.9)$$

Перший член лівої частини цієї рівності проінтегруємо частинами, врахуємо умову (3.7) і позначення (3.8). Одержимо

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_{\tau}^0 e^{-2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \frac{d}{dt} |p(t)|^2 dt &= -\frac{1}{2} |p_0|^2 + \frac{1}{2} |p(\tau)|^2 e^{-2\omega \int_0^{\tau} \alpha(s) ds} - \\ &\quad - \omega \int_{\tau}^0 \alpha(t) e^{-2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} |p(t)|^2 dt. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Врахувавши умову (3.4), отримаємо

$$\int_{\tau}^0 e^{-2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} (A^*(t)p(t), p(t)) dt \geq \int_{\tau}^0 \alpha(t) e^{-2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \|p(t)\|^2 dt. \quad (3.11)$$

З (3.9), врахувавши (3.10), (3.11), отримаємо

$$\begin{aligned} & \|p(\tau)\|^2 e^{-2\omega \int_0^{\tau} \alpha(s) ds} - 2\omega \int_{\tau}^0 \alpha(t) e^{-2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \|p(t)\|^2 dt + \\ & + 2 \int_{\tau}^0 \alpha(t) e^{-2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \|p(t)\|^2 dt \leq p_0^2, \quad \tau \in S. \end{aligned}$$

Звідси, розглядаючи окремо два випадки: $\omega < 0$ і $0 \leq \omega < \lambda$ та застосовуючи у другому випадку нерівність (1.1), одержимо

$$\begin{aligned} & \|p(\tau)\|^2 e^{-2\omega \int_0^{\tau} \alpha(s) ds} + \\ & + 2 \min\{1; 1 - \lambda^{-1}\omega\} \int_{\tau}^0 \alpha(t) e^{-2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \|p(t)\|^2 dt \leq p_0^2, \quad \tau \in S. \end{aligned} \quad (3.12)$$

З (3.12) випливають оцінки

$$\|p(t)\| \leq p_0 e^{\omega \int_0^t \alpha(s) ds}, \quad t \in S, \quad (3.13)$$

$$\int_S \alpha(t) e^{-2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \|p(t)\|^2 dt \leq (2 \min\{1; 1 - \lambda^{-1}\omega\})^{-1} p_0^2. \quad (3.14)$$

Тоді, врахувавши (1.18) і (3.5), з (3.6) отримаємо

$$\|p'(t)\|_*^2 = \|A^*(t)p(t)\|_*^2 \leq \beta^2(t) \|p(t)\|^2 \leq K^2 \alpha^2(t) \|p(t)\|^2, \quad t \in S. \quad (3.15)$$

Для кожного $t \in S$ помножимо (3.15) скалярно на $[\alpha(t)]^{-1} e^{-2\omega \int_0^t \alpha(s) ds}$ і проінтегруємо за t від $\tau < 0$ до 0

$$\int_{\tau}^0 [\alpha(t)]^{-1} e^{-2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \|p'(t)\|_*^2 dt \leq K^2 \int_{\tau}^0 \alpha(t) e^{-2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \|p(t)\|^2 dt, \quad t \in S. \quad (3.16)$$

З (3.16) і (3.14) одержуємо

$$\int_S [\alpha(t)]^{-1} e^{-2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \|p'(t)\|_*^2 dt \leq K^2 (2 \min\{1; 1 - \lambda^{-1}\omega\})^{-1} p_0^2. \quad (3.17)$$

Зауважимо, що для довільних чисел $t_1, t_2 \in S$ ($t_1 < t_2$) і будь-яких функцій $x, y \in W(t_1, t_2) := \{z \in L^2(t_1, t_2; V) : z' \in L^2(t_1, t_2; V')\}$ маємо таку формулу інтегрування частинами:

$$\int_{t_1}^{t_2} (x', y) dt = (x, y) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} (y', x) dt. \quad (3.18)$$

Справді, як відомо, для функцій $z \in W(t_1, t_2)$ отримаємо рівність

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z(t)\|^2 = (z'(t), z(t)) \quad \text{О.К.} \quad t \in (t_1, t_2). \quad (3.19)$$

Проінтегрувавши (3.19) за t від t_1 до t_2 , отримаємо

$$\int_{t_1}^{t_2} (z'(t), z(t)) dt = \frac{1}{2} \|z(t)\|^2 \Big|_{t_1}^{t_2}. \quad (3.20)$$

Прийmemo в цій рівності $z = x + y$, де $x, y \in W(t_1, t_2)$. У підсумку одержимо

$$\int_{t_1}^{t_2} (x' + y', x + y) dt = \frac{1}{2} \|x + y\|^2 \Big|_{t_1}^{t_2},$$

звідки, врахувавши (3.20), отримаємо

$$\int_{t_1}^{t_2} [(x', y) + (y', x)] dt = (x, y) \Big|_{t_1}^{t_2},$$

що і треба було довести.

Тепер для майже кожного $t \in S$ скалярно домножимо (3.6) на $y(t; v) - y(t; u), v \in V$, і проінтегруємо отриману рівність за t від $\tau < 0$ до 0

$$-\int_{\tau}^0 \left(\frac{d}{dt} p(t; u), y(t; v) - y(t; u) \right) dt + \int_{\tau}^0 (A^*(t) p(t; u), y(t; v) - y(t; u)) dt = 0. \quad (3.21)$$

Використовуючи співвідношення (3.18), одержимо

$$\begin{aligned} & -\int_{\tau}^0 \left(\frac{d}{dt} p(t; u), y(t; v) - y(t; u) \right) dt = -(p(t; u), y(t; v) - y(t; u)) \Big|_{\tau}^0 + \\ & + \int_{\tau}^0 (p(t; u), \frac{d}{dt} (y(t; v) - y(t; u))) dt = -(p(0; u), y(0; v) - y(0; u)) + \\ & + (p(\tau; u), y(\tau; v) - y(\tau; u)) + \int_{\tau}^0 (p(t; u), \frac{d}{dt} (y(t; v) - y(t; u))) dt. \end{aligned} \quad (3.22)$$

На підставі означення спряженого оператора отримаємо

$$\int_{\tau}^0 (A^*(t) p(t; u), y(t; v) - y(t; u)) dt =$$

$$= \int_{\tau}^0 (\mathbf{p}(t; \mathbf{u}), \mathbf{A}(t)(\mathbf{y}(t; \mathbf{v}) - \mathbf{y}(t; \mathbf{u}))) dt. \quad (3.23)$$

З (3.21)-(3.23) легко виведемо

$$(\mathbf{p}(0; \mathbf{u}), \mathbf{y}(0; \mathbf{v}) - \mathbf{y}(0; \mathbf{u})) = (\mathbf{p}(\tau; \mathbf{u}), \mathbf{y}(\tau; \mathbf{v}) - \mathbf{y}(\tau; \mathbf{u})) + \int_{\tau}^0 (\mathbf{p}(t; \mathbf{u}), (\mathbf{B}(\mathbf{v} - \mathbf{u}))(t)) dt. \quad (3.24)$$

Покажемо, що в (3.24) можна перейти до границі при $\tau \rightarrow -\infty$.

На підставі (2.2) і (3.13)

$$\begin{aligned} |(\mathbf{p}(\tau; \mathbf{u}), \mathbf{y}(\tau; \mathbf{v}) - \mathbf{y}(\tau; \mathbf{u}))| &\leq |\mathbf{p}(\tau; \mathbf{u})| \cdot |\mathbf{y}(\tau; \mathbf{v}) - \mathbf{y}(\tau; \mathbf{u})| \leq \\ &\leq |\mathbf{p}(0; \mathbf{u})| e^{\omega \int_0^{\tau} \alpha(s) ds} \cdot \gamma(\tau) e^{-\omega \int_0^{\tau} \alpha(s) ds} = |\mathbf{p}(0; \mathbf{u})| \gamma(\tau), \end{aligned} \quad (3.25)$$

де $\gamma(t), t \in S$, — функція така, що $\gamma(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$.

Легко бачити, що

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^0 |(\mathbf{p}(t; \mathbf{u}), (\mathbf{B}(\mathbf{v} - \mathbf{u}))(t))| dt &\leq \int_{\tau}^0 \|\mathbf{p}(t; \mathbf{u})\| \cdot \|(\mathbf{B}(\mathbf{v} - \mathbf{u}))(t)\|_* dt = \\ &= \int_{\tau}^0 [\alpha(t)]^{1/2} e^{-\omega \int_0^{\tau} \alpha(s) ds} \|\mathbf{p}(t; \mathbf{u})\| [\alpha(t)]^{-1/2} e^{\omega \int_0^{\tau} \alpha(s) ds} \|(\mathbf{B}(\mathbf{v} - \mathbf{u}))(t)\|_* dt. \end{aligned} \quad (3.26)$$

На підставі (3.14) і того, що $\mathbf{B}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \in L_{\omega, 1/\alpha}^2(S; V')$, можна зробити висновок про інтегровність на S підінтегральної функції в інтегралі правої частини нерівності (3.26). Врахувавши це, а також (3.25), перейдемо в (3.24) до границі при $\tau \rightarrow -\infty$

$$(\mathbf{p}(0; \mathbf{u}), \mathbf{y}(0; \mathbf{v}) - \mathbf{y}(0; \mathbf{u})) = \int_S (\mathbf{p}(t; \mathbf{u}), (\mathbf{B}(\mathbf{v} - \mathbf{u}))(t)) dt. \quad (3.27)$$

Приймемо

$$\overset{\circ}{\mathbf{p}}(t; \mathbf{u}) := \mathbf{p}(t; \mathbf{u}) e^{-2\omega \int_0^t \alpha(s) ds}, \quad t \in S.$$

На підставі (3.14) можемо зробити висновок, що $\overset{\circ}{\mathbf{p}}(\mathbf{u}) \in L_{\omega, \alpha}(S; V)$. Очевидно, що правильною є рівність

$$\int_S (\mathbf{p}(t; \mathbf{u}), (\mathbf{B}(\mathbf{v} - \mathbf{u}))(t)) dt = \int_S e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} ((\mathbf{B}(\mathbf{v} - \mathbf{u}))(t), \overset{\circ}{\mathbf{p}}(t; \mathbf{u})) dt. \quad (3.28)$$

Нехай

$$\inf_{t \in S} \alpha(t) = \alpha_0 > 0. \quad (3.29)$$

Приймемо

$$\mathbf{V}_\omega := L_{\omega,\alpha}(\mathbf{S};\mathbf{V}), \mathbf{H}_\omega := L_{\omega,1}^2(\mathbf{S};\mathbf{H}), \mathbf{V}'_\omega := L_{\omega,1/\alpha}^2(\mathbf{S};\mathbf{V}').$$

Як було сказано раніше, простори $\mathbf{V}_\omega, \mathbf{H}_\omega, \mathbf{V}'_\omega$ - гільбертові. Зауважимо, що в припущенні (3.29) правильним є ланцюжок неперервних і щільних вкладень

$$\mathbf{V}_\omega \subset \mathbf{H}_\omega \subset \mathbf{V}'_\omega. \quad (3.30)$$

Справді, на підставі співвідношень (1.1) – (1.3) й умови (3.29) одержуємо

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_\omega}^2 &= \int_S \mathbf{e}^{2\omega \int_0^t \alpha(s)ds} |\mathbf{v}(t)|^2 dt \leq \lambda^{-1} \alpha_0^{-1} \int_S \alpha(t) \mathbf{e}^{2\omega \int_0^t \alpha(s)ds} \|\mathbf{v}(t)\|^2 dt = \\ &= \lambda^{-1} \alpha_0^{-1} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_\omega}^2, \mathbf{v} \in \mathbf{V}_\omega; \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{V}'_\omega}^2 &= \int_S [\alpha(t)]^{-1} \mathbf{e}^{2\omega \int_0^t \alpha(s)ds} \|\mathbf{w}(t)\|_*^2 dt \leq \\ &\leq \lambda^{-1} \alpha_0^{-1} \int_S \mathbf{e}^{2\omega \int_0^t \alpha(s)ds} |\mathbf{w}(t)|^2 dt = \lambda^{-1} \alpha_0^{-1} \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}_\omega}^2, \\ \mathbf{w} &\in \mathbf{H}_\omega. \end{aligned} \quad (3.32)$$

На підставі (3.31) і (3.32) матимемо ланцюжок неперервних вкладень (30). Щільність вкладень (3.30) неважко перевірити, використовуючи щільність вкладень в (1.2).

Ототожнимо спряжений до $\mathbf{H}_\omega$ простір з ним самим. Тоді спряжений до $\mathbf{V}_\omega$ простір ототожнюється з $\mathbf{V}'_\omega$ і дія елемента $\mathbf{f} \in \mathbf{V}'_\omega$ на елемент $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_\omega$ визначається так:

$$((\mathbf{f}, \mathbf{v})) = \int_S \mathbf{e}^{2\omega \int_0^t \alpha(s)ds} (\mathbf{f}(t), \mathbf{v}(t)) dt. \quad (3.33)$$

На підставі (3.33) бачимо, що (3.28) можна записати у вигляді

$$\int_S (\mathbf{p}(t; \mathbf{u}), (\mathbf{B}(\mathbf{v} - \mathbf{u}))(t)) dt = ((\overset{\circ}{\mathbf{p}}(\mathbf{u}), \mathbf{B}(\mathbf{v} - \mathbf{u}))) = \langle \mathbf{B}^* \overset{\circ}{\mathbf{p}}(\mathbf{u}), \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle_U. \quad (3.34)$$

Отже, на підставі (3.7), (3.27), (3.34) співвідношення (3.2) рівносильне нерівності

$$(\Lambda_U^{-1} \mathbf{B}^* \overset{\circ}{\mathbf{p}}(\mathbf{u}) + \mathbf{N}\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_U \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in U_\partial, \quad (3.35)$$

де $\Lambda_U : U \rightarrow U'$ канонічний ізоморфізм Ріса.

Отже, ми довели таке твердження.

Теорема 3. Нехай виконуються накладені в п. 1 умови на простори V, H та сім'ю операторів $A(t) : V \rightarrow V'$, $t \in S$, а оператори B, N, C визначені в п. 2. Крім того, припустимо, що $g \in L_{\omega, 1/\alpha}(S; V')$, і виконуються умови **F** та (3.29). Тоді оптимальне керування u в задачі (2.5) характеризується співвідношеннями

$$\begin{aligned} \frac{dy(t; u)}{dt} + A(t)y(t; u) &= g(t) + (Bu)(t), \quad t \in S, \\ t \rightarrow y(t; u) &\in L_{\omega, \alpha}^2(S; V), \\ -\frac{dp(t; u)}{dt} + A^*(t)p(t; u) &= 0, \quad t \in S, \\ p(0; u) &= D^*(Dy(0; u) - z_0), \\ t \rightarrow \overset{\circ}{p}(t; u) &:= p(t; u)e^{-2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \in L_{\omega, \alpha}(S; V), \\ (\Lambda_U^{-1} B^* \overset{\circ}{p}(u) + Nu, v - u)_U &\geq 0 \quad \forall v \in U_\partial. \end{aligned}$$

4. Сукупність співвідношень, які характеризують оптимальне керування у випадку розподіленого спостереження. В цьому пункті розглянемо випадок розподіленого спостереження, тобто виконання умови

$$R : \quad C \in L(L_{\omega, \alpha}^2(S; V); H) \subset L(W_\omega(S); H)$$

і знайдемо співвідношення, які характеризують оптимальне керування у цьому випадку.

Вважаємо, що виконується умова (3.29), а отже, включення (3.30) правильне.

У цьому випадку нерівність (2.16) можна записати у вигляді

$$\langle C^* \Lambda(Cy(u) - z_0), y(v) - y(u) \rangle_{V_\omega} + (Nu, v - u)_U \geq 0 \quad \forall v \in U_\partial, \quad (4.1)$$

де $\Lambda : H \rightarrow H'$ – канонічний ізоморфізм Ріса; $C^* : H' \rightarrow V_\omega'$ – спряжений до C оператор.

Введемо в розгляд спряжений стан $t \rightarrow p(t; u) \in V_\omega \equiv L_{loc}^2(S, V)$ як розв'язок задачі Коші

$$-\frac{dp(t; u)}{dt} + A^*(t)p(t; u) = (C^* \Lambda(Cy(u) - z_0))(t) \quad \hat{a} \in V_{\omega'} \equiv L_{loc}^2(S, V'), \quad (4.2)$$

$$p(0; u) = 0, \quad (4.3)$$

$$p(u) \in L_{\omega, \alpha}(S; V) \cap C_b(S; H), \quad (4.4)$$

де $C_b(S;H)$ – підпростір простору $C(S;H)$, що складається з обмежених на S функцій.

Існування єдиного розв'язку $p(u) \in L_{loc}^2(S;V)$, $p'(u) \in L_{loc}^2(S;V')$, рівняння (4.2), який задовольняє умову (4.3), легко випливає з відомих результатів (див.,наприклад,[11], с. 111-112)), якщо зробити в рівнянні (4.2) заміну t на $-t$. Покажемо, що виконується умова (4.4). У цьому разі для спрощення викладення писатимемо $p(t), p$ замість відповідно $p(t;u), p(u)$ і використовуватимемо позначення

$$h := C^* \Lambda(Cy(u) - z_0). \quad (4.5)$$

Отже, нехай функція $t \rightarrow p(t) \in L_{loc}^2(S;V)$ перетворює рівняння (4.2) в рівність майже скрізь на S і задовольняє умову (4.3). Для майже кожного $t \in S$ домножимо скалярно рівність (4.2) на $e^{2\omega \int_0^t \alpha(s)ds} p(t)$ й отриману рівність проінтегруємо за t від τ до 0 ($\tau < 0$ – довільне число)

$$\begin{aligned} - \int_{\tau}^0 e^{2\omega \int_0^t \alpha(s)ds} (p'(t), p(t)) dt + \int_{\tau}^0 e^{2\omega \int_0^t \alpha(s)ds} (A^*(t)p(t), p(t)) dt = \\ = \int_{\tau}^0 e^{2\omega \int_0^t \alpha(s)ds} (h(t), p(t)) dt. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Враховуючи умову (4.3), отримаємо

$$\begin{aligned} - \int_{\tau}^0 e^{2\omega \int_0^t \alpha(s)ds} (p'(t), p(t)) dt = - \frac{1}{2} \int_{\tau}^0 e^{2\omega \int_0^t \alpha(s)ds} \frac{d}{dt} |p(t)|^2 dt = \\ = \frac{1}{2} e^{2\omega \int_0^{\tau} \alpha(s)ds} |p(\tau)|^2 + \omega \int_{\tau}^0 \alpha(t) e^{2\omega \int_0^t \alpha(s)ds} |p(t)|^2 dt. \end{aligned} \quad (4.7)$$

За умовою (3.4) отримаємо

$$\int_{\tau}^0 e^{2\omega \int_0^t \alpha(s)ds} (A^*(t)p(t), p(t)) dt \geq \int_{\tau}^0 \alpha(t) e^{2\omega \int_0^t \alpha(s)ds} \|p(t)\|^2 dt. \quad (4.8)$$

На підставі нерівності Коші ($ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2$, $\varepsilon > 0, a, b \in \mathbf{i}$) виведемо

$$\int_{\tau}^0 e^{2\omega \int_0^t \alpha(s)ds} (h(t), p(t)) dt \leq \int_{\tau}^0 [\alpha(t)]^{1/2} [\alpha(t)]^{-1/2} e^{2\omega \int_0^t \alpha(s)ds} \|h(t)\|_* \|p(t)\| dt \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{\tau}^0 \alpha(t) e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \|p(t)\|^2 dt + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\tau}^0 [\alpha(t)]^{-1} e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \|h(t)\|_*^2 dt, \quad (4.9)$$

де $\varepsilon > 0$ – довільне число.

З (4.6) на підставі (4.7)-(4.9) одержимо

$$\begin{aligned} & e^{2\omega \int_0^{\tau} \alpha(s) ds} |p(\tau)|^2 + (2 - \varepsilon) \int_{\tau}^0 \alpha(t) e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \|p(t)\|^2 dt + \\ & + 2\omega \int_{\tau}^0 \alpha(t) e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} |p(t)|^2 dt \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^0 [\alpha(t)]^{-1} e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \|h(t)\|_*^2 dt. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Покажемо, що звідси за умови $\omega > -\lambda$ випливають оцінки

$$\sup_{t \in S} e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} |p(t)|^2 \leq \max\{1; (1 + \lambda^{-1}\omega)^{-1}\} \int_S [\alpha(s)]^{-1} e^{2\omega \int_0^s \alpha(s) ds} \|h(t)\|_*^2 dt, \quad (4.11)$$

$$\int_S \alpha(t) e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \|p(t)\|^2 dt \leq \max\{1; (1 + \lambda^{-1}\omega)^{-2}\} \int_S [\alpha(t)]^{-1} e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \|h(t)\|_*^2 dt. \quad (4.12)$$

Для цього розглянемо два випадки: 1) $\omega \geq 0$; 2) $\omega < 0$.

У першому випадку приймемо $\varepsilon = 1$ в (4.10) і легко отримаємо оцінки (4.11), (4.12). У другому випадку спочатку оцінимо третій член лівої частини нерівності (4.10), використовуючи (1.1):

$$2\omega \int_{\tau}^0 \alpha(t) e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} |p(t)|^2 dt \geq 2\lambda^{-1}\omega \int_{\tau}^0 \alpha(t) e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \|p(t)\|^2 dt. \quad (4.13)$$

З (4.10) і (4.13) отримаємо

$$\begin{aligned} & e^{2\omega \int_0^{\tau} \alpha(s) ds} |p(\tau)|^2 + (2(1 + \lambda^{-1}\omega) - \varepsilon) \int_{\tau}^0 \alpha(t) e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \|p(t)\|^2 dt \leq \\ & \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^0 [\alpha(t)]^{-1} e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \|h(t)\|_*^2 dt. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Припустимо, що $\omega > -\lambda$. Тоді, прийнявши $\varepsilon = 1 + \lambda^{-1}\omega > 0$, з (4.14), одержимо (4.11), (4.12). Звідси робимо висновок, що умова (4.4) виконується.

Тепер повернемося до нерівності (4.1). Перетворимо її, використовуючи спряжений стан, описаний співвідношеннями (4.2) – (4.4).

Для майже кожного $t \in S$ домножимо рівність (4.2) на $y(t; v) - y(t; u)$ і проінтегруємо отриману рівність за t від τ до 0 ($\tau < 0$ – довільне число)

$$\begin{aligned}
& -\int_{\tau}^0 \left(\frac{dp(t;u)}{dt}, y(t;v) - y(t;u) \right) dt + \int_{\tau}^0 (A^*(t)p(t;u), y(t;v) - y(t;u)) dt = \\
& = \int_{\tau}^0 (C^* \Lambda(Cy(u) - z_0), y(v) - y(u)) dt.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Перетворимо ліву частину рівності (4.15), використовуючи умову (4.3), формулу інтегрування частинами і означення спряженого оператора. У підсумку отримаємо

$$\begin{aligned}
& (p(\tau;u), y(\tau;v) - y(\tau;u)) + \int_{\tau}^0 (p(t;u), (B(v-u))(t)) dt = \\
& = \int_{\tau}^0 (C^* \Lambda(Cy(u) - z_0), y(v) - y(u)) dt.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Припустимо, що

$$-\lambda < \omega \leq 0. \tag{4.17}$$

В цьому випадку, врахувавши (4.11) і (2.2), одержуємо

$$|y(\tau;u)| \rightarrow 0, \quad |y(\tau;v)| \rightarrow 0 \quad \text{БТх} \quad \tau \rightarrow -\infty, \tag{4.18}$$

$$|p(\tau;u)| \leq C, \quad \tau \in S, \tag{4.19}$$

де $C > 0$ – стала, що не залежить від τ .

Врахувавши це, перейдемо до границі в (4.16) при $\tau \rightarrow -\infty$. Отримаємо

$$\langle C^* \Lambda(Cy(u) - z_0), y(v) - y(u) \rangle_{V_{\omega}} = \langle p(u), B(v-u) \rangle_{V_{\omega}}. \tag{4.20}$$

Очевидно, що

$$\langle p(u), B(v-u) \rangle_{V_{\omega}} = \langle B^* p(u), v-u \rangle_U = \langle \Lambda_U^{-1} B^* p(u), v-u \rangle_U, \tag{4.21}$$

де $\Lambda_U : U \rightarrow U'$ – канонічний ізоморфізм Ріса.

На підставі (4.20), (4.21) отримаємо, що нерівність (4.6) рівносильна нерівності

$$(\Lambda_U^{-1} B^* p(u) + Nu, v-u)_U \geq 0 \quad \forall v \in U_{\partial}. \tag{4.22}$$

Отже, ми довели таке твердження.

Теорема 4. Нехай виконуються накладені в п. 1 умови на простори V, H та сім'ю операторів $A(t) : V \rightarrow V'$, $t \in S$, а оператори B, N, C визначені в п. 2. Крім того, припустимо, що $g \in L^2_{\omega, 1/\alpha}(S; V')$, $-\lambda < \omega \leq 0$, і виконуються умови **R** та (3.29). Тоді оптимальне керування u в задачі (2.5) характеризується співвідношеннями

$$\frac{dy(t;u)}{dt} + A(t)y(t;u) = y(t) + (Bu)(t), \quad t \in S, \quad (4.23)$$

$$e^{\int_0^t \alpha(s)ds} |y(t)| \rightarrow 0 \quad \text{БТх} \quad t \rightarrow -\infty, \quad (4.24)$$

$$-\frac{dp(t;u)}{dt} + A^*(t)p(t;u) = (C^* \Lambda(Cy(u) - z_0))(t), \quad t \in S, \quad (4.25)$$

$$p(0;u) = 0, \quad (4.26)$$

$$(\Lambda_u^{-1} B^* p(u) + Nu, v - u) \geq 0 \quad \forall v \in U_\partial, \quad (4.27)$$

$$y(u) \in L_{\omega,\alpha}^2(S;V), \quad p(u) \in L_{\omega,\alpha}^2(S;V) \cap C_b(S;H). \quad (4.28)$$

-
1. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.-Л. Лионс. – М., 1972.
 2. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления / Болтянский В.Г. – М., 1969.
 3. Hestenes M.R. Calculus of variations and optimal control theory / Hestenes M.R. – Wiley, 1966.
 4. Balakrishnan V. Semigroup theory and control theory / Balakrishnan V. – Washington, 1965.
 5. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределёнными параметрами / Бутковский А.Г. – М., 1975.
 6. Згуровский М.З. Нелинейный анализ и управления бесконечномерными системами / М.З. Згуровский, В.С. Мельник - К., 1999.
 7. Згуровский М.З. Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями / Згуровский М.З., Мельник В.С., Новиков А.Н. - К., 2004.
 8. Бокало Н.М. О задаче без начальных умов для некоторых классов нелинейных параболических уравнений / Бокало Н.М. // Труды семинара им. И.Г.Петровского (М.: Изд-во Моск. ун-та). – 1989. – Вып. 14. – С.3-32.
 9. Bokalo M. Linear evolution first-order problems without initial conditions / Mykola Bokalo and Alfredo Lorenzi // Milan Journal of Mathematics. - 2009. - Vol. 77. - 437-494.
 10. Shovalter R.E. Hilbert space methods for partial differential equations / R.E. Shovalter. - Monographs and studies in mathematics (Monographs in differential equations), Vol. 1, Pitman, London, 1977.

11. Shovalter R.E. Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations /R.E.Shovalter. - American Mathematical Society: Mathematical surveys and monographs, Vol. 49. 1997.
12. Х. Гавевский, К. Грёгер, К. Захарияс. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.,1978.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЭВОЛИЦИОННЫМИ СИСТЕМАМИ БЕЗ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

Николай БОКАЛО

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1 79000 Львов, Украина*

Рассмотрено задачу оптимального управления системами, которые описываются эволюционными уравнениями, заданными на полуоси $(-\infty, 0]$. Получено достаточные условия существования единственного решения этой задачи.

Ключевые слова: эволюционное уравнение, оптимальное управление, задачи без начальных условий.

THE OPTIMAL CONTROL PROBLEM OF EVOLUTION SYSTEMS WITHOUT INITIAL CONDITIONS

Mykola BOKALO

*Ivan Franko National University of L'viv,
Universytetska Str., 1 79000 L'viv, Ukraine*

Considered problem of the optimal control of systems governed by evolution equations, defined on time interval $(-\infty, 0]$. Obtained enough conditions for the existence of a unique solution of this problem.

Key words: evolution equation, optimal control, problems without initial conditions.

Стаття надійшла до редколегії 16.03.2010

Прийнята до друку 22.12.2010

УДК 539.3

ПРО ОБВАЛ МІЖНАРОДНОГО ТОРГОВОГО ЦЕНТРУ В НЬЮ- ЙОРКУ 11 ВЕРЕСНЯ 2001 РОКУ¹

Геннадій ЧЕРЕПАНОВ

Маямі, Флорида, США

Загальноприйняте пояснення обвалу веж Міжнародного торгового центру (МТЦ) 11 вересня 2001 базується на спекулятивній „теорії” почергової втрати стійкості утримувальних колон зі швидкістю вільного падіння, що зумовлена втратою стійкості за умов повзучості колон аварійного поверху, які перебували під впливом руйнівної пожежі від розлитого палива і наступного динамічного удару верхніх конструкцій. У цій статті доведено, що ця офіційна „теорія” невірна, оскільки вона побудована на помилкових припущеннях і неправильних обчисленнях. „Теорія” не може пояснити вільне падіння, звук вибуху, перетворення на пил будинків так само, як і інші факти цієї події. Одночасний обвал сусідньої 47-поверхової вежі безпосередньо суперечить „теорії”. З’ясовано, що сумісний із усіма відомими фактами предмету обговорення сценарій усіх обвалів був таким: (i) нагрівання несучих колон у „гарячій плямі” зумовило появу високих стискувальних теплових напружень у цих колонах, (ii) ці напруження разом із внутрішніми напруженнями спричинили хвилю руйнування, і (iii) ця хвиля руйнування менше, ніж за 0,1 секунди, роздробила весь будинок невидимими тріщинами, створюючи звук вибуху і забезпечуючи умови, необхідні для вільного падіння сталевих фрагментів і виникнення хмар пилу з дрібненьких шматочків скла, мармуру і бетону. Теорія хвиль руйнування (див. додаток 1) обґрунтовує цей сценарій. Офіційна „теорія” подана в додатку 2.

Ключові слова: Міжнародний торговий центр, вежа, будинок, колона, обвал, вибух, вільне падіння конструкцій, руїни, перетворення конструкції на пил, хвиля руйнування, теплові напруження, внутрішні напруження, повзучість, втрата стійкості, динамічний удар, прогресуюче руйнування, пусковий механізм, точний аналіз проти наближеного.

Передмова до українського перекладу. Тривають наукові дискусії з приводу обвалу веж Міжнародного торгового центру (МТЦ) 11 вересня 2001. Основними виявилися два погляди на причини цієї події. Наукове трактування, яке було прийняте за офіційне пояснення причин руйнування, запропонували у своїй праці З.П.Базант та Ю.Жоу (Z.P.Bazant and Y.Zhou). Один із найвідоміших фахівців у галузі механіки руйнування Г.П.Черепанов вступив у гостру полеміку з приводу цих оглядів. Свої міркування він виклав у доволі великій статті, виставленій на власному сайті (<http://www.genadycherepanov.com/911.asp>). Багато журналів, у тому числі й Росії та Україні надрукували її мовою оригіналу (англійською). Для того, щоб наблизити цей цікавий та повчальний матеріал до українських науковців, інженерів, аспірантів і студентів та показати, як механіка розв’язує складні задачі, за згодою Г.П.Черепанова подаємо тут дещо скорочений переклад цієї праці. Матеріали праці З.П.Базанта та Ю.Жоу

© Черепанов Г., 2010

¹ Переклад О.Є.Андрейківа, Я.М.Пастернака, Г.Т.Сулима.

Друкується в авторській редакції.

містяться у додатку 2 до цієї публікації. Хочемо також, щоб читачі побачили можливість вирішення складних проблем простими і цілком доступними для них засобами, відчули смак наукової дискусії і самі вирішили, які аргументи для них є переконливішими.

1. **Вступ.** „Як Ви думаєте, чому вежі обвалилися?” – запитав Ларі свого гостя, видатного члена Комісії „11 вересня”, на недавньому шоу Ларі Кінга. „Подія все ще розслідується” – відповів гість. Очевидно, публіка, поки що не сприйняла „теорію” Базанта і Жоу (Bazant and Zhou [1]). Тим часом технічне співтовариство без жодного сумніву визнало „теорію” вірною і повноцінною. Автор цієї статті відчув це офіційне визнання на власній шкурі після того, як редактори й анонімні рецензенти численних технічних журналів відмовилися публікувати його розуміння обвалу як протиставлення до цієї „теорії”. Найважливішим висновком Базанта і Жоу, отриманим з їхнього аналізу, було те, що обвал МТЦ був неминучим наслідком терористичного акту. Цей висновок був необхідним для обох сторін. Для американського уряду – щоб здійснити запланований раніше поворот до нової політики. Терористам – для визнання успішною їхньої стратегії та для сприяння початку джихаду у всьому світі. Тим часом, на думку того ж таки технічного співтовариства цей теракт не міг спричинити обвал МТЦ. Іншими словами, усі люди були б евакуйовані з будинків протягом пожежі і 300 пожежників не наказували б піднятися нагору, тобто замість трьох тисяч жертв загинуло би не більше ста чоловік. Обвал стався зненацька. Моя точка зору, доведена нижче, полягає в тому, що аналіз та висновки Базанта і Жоу неправильні і що обвал був результатом недостатнього знання механізмів руйнування, а особливо хвилі руйнування, яку механіки не беруть до відома ані при проектуванні висотних будівель, ані при передбаченні того, що може статися після теракту.

„Теорія” запропонувала такий сценарій обвалу: втрата стійкості за умов повзучості несучих колон критичного поверху, вільне падіння і динамічний удар верхніх конструкцій, і поступове, поверх за поверхом, руйнування внаслідок втрати стійкості колон нижчих конструкцій. Ця „теорія” не здатна була пояснити такі відомі факти про предмет обговорення:

(i) режим вільного падіння всіх обвалів;

(ii) звук вибуху, утворений кожним обвалом;

(Звук утворюється внаслідок розтріскування. Якби розтріскування тривало протягом десяти секунд, як це стверджує „теорія”, було би чути гучний глухий шум, а не вибух.)

(iii) перетворення на пил зруйнованих будинків.

(Відповідно до „теорії” руїни після обвалу мали би складатися зі шматків сталевих колон завдовжки приблизно два метри, і не більше.)

Відповідно до „теорії” сусідній 47-поверховий будинок **не повинен** би був зруйнуватися. Але це сталося.

Відповідно до „теорії” Емпайр-стейт-билдінг повинен був зруйнуватися ще в 1945 р. за умов подібної катастрофи літака і наступної пожежі. Але цього не сталося.

Тим часом, для кожної людини, знайомої з промисловими вибухами, коли за планового руйнування будівля знищується рівномірно розподіленою

вибухівкою для того, щоб утворилися невеликі за розмірами уламки, що легко транспортуються, обвал МТЦ разюче нагадав цей спланований вибух, викликаний попередньо розподіленими зарядами вибухівки. Дійсно, кожен з обвалів веж тривав приблизно десять секунд, тобто всі частини кожного будинку падали вільно, без будь-якого опору. Те ж саме трапляється після того, як будинок роздріблений вибухівкою. Не дивно, що теорія змови, сумісна з відомими фактами предмету обговорення, всупереч офіційній „теорії” стала широко розповсюдженою у світі. У промові на популярному каналі телебачення C-SPAN 18 квітня і 7 травня 2005 р. Девід Рей Гріффін, котрий є відомою громадською особою у США, дав короткий огляд подій 11 вересня 2001. Він зазначив наступні факти: (i) Близькі зв'язки сімейств Буша і бен Ладена у спільному нафтовому бізнесі в Саудівській Аравії; (ii) бен Ладен був агентом ЦРУ в 1980-их, коли він воював проти росіян в Афганістані; (iii) Ніхто із сімейства бен Ладена (брати, сестри, дружини, дорослі діти) ніколи не затримувалися чи переслідувалися за рішенням суду; (iv) Багатьом членам родини бен Ладена, що мешкали в США до 11 вересня 2001 і святкували ці події, дозволили без будь-якого розслідування залишити США, використовуючи літак, що летів над американською територією 12 вересня 2001, коли всі інші польоти були суворо заборонені; (v) Декотрі з 19 терористів, що виконали місію самогубства 11 вересня 2001, були напередодні заарештовані через недійсні документи, але якимось чудом вони звільнилися; (vi) ФБР і ЦРУ знали про теракт наперед; (vii) У грудні 2001, коли бен Ладен був у Тора-Бора – що було відомо американській розвідці – військові США відмовилися від нападу на загони бен Ладена і дозволили йому втекти; (viii) Розслідування обвалу веж МТЦ було доручене Національному Інституту Стандартів (NIST), що є урядовим закладом, а не набагато престижнішим установам, таким як МТІ (Масачусетський технологічний інститут) або Гарвард, що є приватними і більш незалежними установами (дійсно, наскільки я знаю, у NIST взагалі немає жодних експертів із механіки руйнування); (ix) США виплекали Аль Каїду і багато її гілок, включаючи й чеченські формування. Терористичні організації співпрацювали з ЦРУ та іншими американськими спецслужбами, що вибирали, фінансували, інструктували і спрямовували терористів. Багато фактів цієї співпраці можна також знайти в книзі Нафіз Ахмеда „Війна з правдою”. Обговорення цієї книги проводилося на американському каналі телебачення C-SPAN2 23 і 31 липня 2005. Недавно я сам зустрічався з деякими чеченцями з Росії, що захоплювалися бен Ладеном і проживали тут безкоштовно на урядові субсидії, отримували тут інструкції, і були захищені американським урядом краще від звичайних американців. Продовжувати можна до безмежності.

Девід Рей Гріффін відхиляє офіційну теорію обвалу МТЦ як квапливо придуману і таку, що суперечить відомим фактам предмету обговорення. Дійсно, стаття Базанта і Zhou, у якій офіційна теорія була вперше опублікована, була прийнята до друку 13 вересня 2001. Я особисто не можу уявити, що таке важливе дослідження могло бути зроблене протягом одного дня. Доктора Базанта, що є знаменитим ученим, відомим з його робіт у галузі повзучості та руйнування бетону, імовірно, використовували, щоб

ввести в оману і невірно спрямувати технічне співтовариство. Незважаючи на очевидні грубі помилки і прорахунки зазначені у наступних розділах (цієї праці – пер.), його теорію ніколи не критикували у науковому друці. Більше того, доктор Сандер з NIST використовуючи численні дослідницькі групи і необмежені ресурси, створив числову модель, що підтримує усі основні положення „теорії”. Усі зазначені вище факти обвалу так само як і сама пожежа у цій моделі, що описує обвал, зафіксований на кадрах, отриманих із камер спостереження зовні будинку, знову ігнорувалися. Звичайно, камери не могли зафіксувати розтріскування будинку безпосередньо перед обвалом.

На думку Девіда Рей Гріффіна американські урядові агенти, що діяли разом з бен Ладеном, використовуючи для своєї місії терористів, заздалегідь замінували дві вежі і сусідній 47-поверховий хмарочос вибухівкою, що була здетонована у якусь мить після аварій. David Ray Griffin вважає, що події 11 вересня, подібно до підпалу Рейхстагу в Німеччині в 1933 р., необхідні для тих урядових кіл, які розробили план американського правління на земній кулі у документі під назвою „Американське століття”, виданому ще в 1993 р. Вольфовіц, який є першим заступником Міністра оборони, був таємним керівником цього плану. Він розглядається як головна мозкова сила у війнах в Афганістані та Іраку. Дійсно, 11 вересня 2001 стало віхою, що ділить американську історію на до і після. Був створений міф, що деякі народи ненавидять американців і бажають знищити їх. Усі міжнародні права й угоди були порушені і почалася ера пріоритетних воєн, втручання і окупації. Американські збройні сили, поліція і розвідка отримали право розшукувати і затримувати кожного на Землі без обвинувачувального вироку та використовувати будь-які засоби, включаючи вільний доступ до фінансів, пошти, телефонних переговорів, приватного життя і т.д. аж до вбивства. Я безпосередньо двічі затримувався, – ймовірно через мою бороду, – а мій автомобіль обшукали на наявність вибухових речовин та зброї. Маямі перебуває під пильним спостереженням поліції, охорони та кінологів з собаками, що шукають запах вибухових речовин. Недавня спроба вбивства президента Венесуели Чавеса є ще одним прикладом. Війни в Афганістані й Іраку, що відповідно до „Американського століття” є першим кроком до контролю над арабійською та каспійською нафтою, розпочалися тільки після 11 вересня й усе ще тривають. Однак, військові витрати для набагато більшої війни у багато разів перевищують витрати на антитерористичну діяльність і військові витрати решти світу. Величезні фонди були задіяні для стратегічного озброєння, включаючи суперпроникаючі бомби, станції перехоплення, нове покоління субмарин і ядерних бомб, озброєння військових супутників, і т.д., і т.п. Нова гонитва озброєнь почалася з безпрецедентною швидкістю. Починаючи Іракську війну, Президент Буш попередив, що використання „ядерної зброї не зняте з порядку денного”. Без сумніву, вона би була використана щоб знищити Багдад, якщо б американські загони були переможені; а тому партизанська війна стала єдиним вибором для іракських патріотів. Хто особливо зацікавлений у війні або, більше того, у великій війні? Відповідь очевидна: „Ніхто” і „Немає

взагалі ніяких ворогів". Однак, у Сполучених Штатах є близько чотирьохсот мільярдів і чотири мільйони мільйонерів. Вони виконують головну місію США, яка звучить так: „Гроші – влада”. Їхня влада величезна, хоча прихована внаслідок суперництва, подібно до енергії нуклонів у ядрі. Вона примножена в багато разів шістдесятимільйонними арміями менших інвесторів, які підтримуються ЗМІ, збройними силами і 14 спецслужбами. Один американський мільярдер може створити свій уряд і контролювати таку країну як Естонія, Вірменія чи Грузія. Він не робить цього тільки тому, що він не бачить як збільшити завдяки цьому своє багатство – це поки що не є для нього доброю інвестицією. Втілена у корпораціях американська пристрасть до заробляння грошей (*оригінал money making – робити гроші*), створює величезну результуючу силу, якій не може протистояти жодна держава, країна або уряд. Ніхто не може перевершити їх у прибутковому бізнесі, заснованому на узаконених обмані та примусі. Подібно до спритного моряка, що може вести вітрильник проти вітру, ця сила може вести цю велику країну проти вітру етики, суспільної думки, побоювання ядерної війни і т.д. у будь-якому напрямі, де є запах грошей. Після падіння Радянського Союзу, коли система світу антигрошей зруйнувалася, долар через конвертовані валюти став власником цілого світу. США управляються не Президентом чи Конгресом, а Федеральним Резервом, що є приватною організацією мільярдерів.

Нижче доведено, що офіційна „теорія” обвалу МТЦ побудована на помилкових припущеннях і прорахунках, і отже, невірна, а також запропоновано сумісне з усіма відомими фактами наукове пояснення.

2. Пусковий механізм: теплові напруження проти повзучості. „Втрата захисної теплової ізоляції сталевих колон протягом початкового вибуху пришвидшила нагрівання колон до дуже високої усталеної температури, набагато більшої за 800°C, що знизило межу текучості і спричинило втрату стійкості за умов повзучості більше ніж половини колон на критичному поверсі, тому верхня частина конструкції вище від цього поверху впала і величезним вертикальним динамічним навантаженням зруйнувала нижчу частину вежі; відбулася низка ударів і руйнувань протягом усього падіння вниз” – каже офіційна „теорія”, не звертаючи жодної уваги на теплові напруження і залишкові технологічні напруження, що виникають як результат прокатування, зварювання, збирання і т.д. Дивно, але „теорія” ігнорує навіть головну подію – горіння розлитого палива на критичному поверсі, подію, що спричинила весь обвал.

Усі припущення і висновки цієї „теорії” є помилковими. Спочатку утрата захисної теплової ізоляції у більш ніж половини з 260 колон критичного поверху внаслідок первісного вибуху є нічим іншим, як чудом, необхідним для „теорії”, оскільки для повзучості суттєвим є час. Згадавши, що проміжок часу між кожною катастрофою (літака – пер.) і обвалом становив близько однієї години, що є, звісно, дуже невеликою кількістю часу для впливу повзучості в сталевій колоні, яка на рівні напружень, принаймні, у три рази менша, ніж межа текучості і/або напруження, за яких втрачається стійкість, при нормальній температурі, через запас

міцності, навіть якщо повна бічна поверхня колони була піддана температурі 800°C протягом всього цього часу.

Швидкість поширення теплоти визначається тепловою проникністю, що дорівнює $12 \times 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ для сталі і приблизно у п'ятдесят разів менша для захисної теплової ізоляції. Наскільки швидкий цей процес у вимірах часу? Давайте розглянемо точний приклад. Припустимо, що початкова температура сталевого півпростору є нульовою. Потрібна одна година, щоб збільшити температуру до 650°C на відстані 8 см від поверхні, на якій протягом усього часу підтримується температура 800°C. Для теплової ізоляції відповідна відстань дорівнює близько 1 см за тих самих крайових умов. Іншими словами, одна година є лише часом, необхідним для проникнення теплоти через захисну теплову ізоляцію несучої колони; потрібно ще одна година, щоб нагріти колону безпосередньо. Тобто для прояву повзучості зовсім немає часу.

По-друге, припущення, що температура чотириметрової утримувальної колони критичного поверху протягом пожежі становила 800°C, є досить фривольним. Давайте знову розглянемо приклад точного обчислення. Припустимо, що паливо з н-октану спалюється за сталого тиску в адіабатній камері згоряння двигуна літака з 40%-им надлишком повітря; паливо вводиться в камеру згоряння при 25°C, у той час як повітря від компресора входить у цю камеру згоряння під тиском 600 кПа і за температури 300°C. Можна обчислити, що продукти згоряння залишають камеру згоряння і надходять до турбіни з температурою 769°C, так що середня температура лопаток турбіни значно нижча за 700°C. Це є реальні умови згоряння палива в двигунах Боїнгів, що врізалися у вежі.

Давайте порівняємо згоряння палива, розлитого на критичному поверсі вежі МТЦ, зі згорянням цього ж палива в двигуні Боїнга. Камерою згоряння вважатимемо цілий поверх, відкритий до доступу повітря простір з рідким паливним шаром на підлозі. Повітря входить у цю камеру згоряння з атмосфери під тиском 100 кПа і за температури 25°C. Порівняємо температуру лопаток турбіни Боїнга із відповідними значеннями для теплоізованих колон поверху. Перебіг згоряння в двигуні відбувається за ідеальних умов однорідного перемішування в однорідній суміші, розробленій для досягнення настільки високої температури продуктів згоряння, наскільки це можливо. Згоряння на відкритому, неадіабатному поверсі є, очевидно, неповним і далеким від стехіометричного балансу, – з холодним повітрям і низьким повітряно-паливним відношенням, з реакцією, що перебігає в конвективному вогнищі, яке забезпечує дуже неоднорідний розподіл температур в просторі і часі. Наприклад, температура вершини конвективного полум'я свічки може досягти 500°C, але Ви можете провести у ньому пальцем, оскільки середня температура полум'я є нижчою за 100°C. Отже, середня температура в палаючому оточенні несучих колон була ймовірно нижчою за 500°C, у той час як у локальному вимірі у деяких плямах близько до стелі поверху, вона могла досягти 1000°C і вище через високі адіабатні температури полум'я

палива. Для втрати стійкості за умов повзучості, насправді, ціла колона повинна перебувати під дією високої температури протягом тривалого часу.

По-третє, зменшення межі текучості сталі було занадто малим, щоб відіграти яку-небудь роль при обвалі. Фасонний гарячий прокат, використаний у колонах, має межу текучості, що становить приблизно 600 МПа, а межа міцності складає близько 900 МПа за 20°C. При 800°C ці значення на 10–20 % нижчі, у той час як номінальні напруження в колонах були, принаймні, утричі меншими за таку межу текучості.

Із цього аналізу пожежі випливає, що висновки „теорії” про втрату стійкості за умов повзучості є необґрунтованими. Помітна повзучість конструкцій із аустенітової сталі починається приблизно від 540°C. Тим часом, ця і більш високі температури могли бути досягнуті тільки в окремих місцях, у верхніх частинах деяких несучих колон, де температура полум'я була максимальною. А через тепловий захист, ці температури могли підтримуватися протягом часу, набагато меншого від одної години.

Для „теорії” істотним є те, щоб кожна утримувальна колона палаючого поверху була нагрітою від основи до вершини до однієї і тієї ж найвищої температури і підтримувалася при ній протягом тривалого часу, оскільки у випадку однорідного нагрівання всіх колон не виникає жодних теплових напружень у колонах, тобто, щоб тепловими напруженнями можна було знехтувати. Якщо тільки декотрі з колон є нагрітими, то у них виникають теплові напруження, що можуть досягти рівня αET , де α – коефіцієнт теплового розширення; E – модуль Юнга; T – температура. Для сталі $\alpha = 12 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$, а $E = 200$ ГПа, отже, за температури 800°C теплові напруження могли би бути надзвичайно високими (на рівні 2 ГПа), що приблизно в чотири рази більше за межу текучості сталі за 800°C, тобто це, звичайно, нереально.

Обчислення просторово-часового розподілу температури і теплових напружень у будинку за реальних умов пожежі є тонкою процедурою, яка відповідальна за забезпечення правильного передбачення або пояснення заключного результату. Чи зруйнується, чи залишиться будинок цілим залежить від розподілу теплових напружень. Будь-який матеріальний об'єм конструкції розірве на шматки тепловими напруженнями, якщо деяка частина конструкції нагрівається до високої температури занадто швидко. Тому числова модель обвалу повинна включати як найважливіші складові випаровування рідкого паливного шару, газову динаміку реагуючої суміші на критичному поверсі, теплообмін і поширення температури й теплових напружень у будинку. Така модель не була досі зроблена.

Тільки задля грубої оцінки виконаємо деякі обчислення, використовуючи поняття „гарячої плями” всередині будинку. Несучі колони у гарячій плямі нагріваються до однієї і тої ж температури T , у той час як несучі колони поза гарячою плямою зберігають початкову температуру $T = 0$. Отже, теплові напруження в гарячих колонах є стискаючими, у той час як у холодних колонах вони розтягуючі. У випадку пожежі у вежах МТЦ і суміжному 47-поверховому будинку центральні колони були ймовірно в гарячій плямі, у той час як, принаймні, деякі утримувальні колони

зовнішнього каркасу, охолоджені атмосферним повітрям, були поза гарячою плямою. Стискаючи теплові напруження, будучи сприйнятими тільки згином стропильних ферм поверху і холодними колонами зовнішнього каркасу, проникли далеко вглиб холодних колон основної конструкції. В сумі із гравітаційними і залишковими технологічними напруженнями стиску, теплові напруження в будинку створили теплову бомбу, подібну до „батовської сльози”, що зумовило зародження хвилі руйнування, яка роздробила цілу вежу менше ніж за 0,1 с.

Варто нагадати, що так звана „батовська сльоза”, тобто тільки-но виїнята зі скляної ванни маса скла у формі сльозини і відразу оброблена фторидною кислотою для видалення поверхневого шару з тріщинами, містить ядро, що перебуває під дією високих стискувальних напружень, і має бездоганний поверхневий шар з високими розтягувальними напруженнями близько 5 ГПа. Відламування від „батовської сльози” її малюсінкового хвостика звільнює пружну енергію стискувальних напружень у вигляді хвилі руйнування, що поширюється зі швидкістю звуку і розпорошує скло на шматочки мікронних розмірів. (див. додаток 1) Принагідно варто нагадати, що залишкові напруження стиску від вальцювання сталевих колон можуть досягати половини або й більше від межі текучості. Розглянемо детально те, що сталося під час пожежі на критичному поверсі. Пара розлитого на підлозі поверху рідкого палива змішалася з атмосферним киснем поверху, і випадкове займання спричинило екзотермічну реакцію суміші так, що базуючись на вищезгаданому обчисленні процесу згоряння, температура і тиск продуктів згоряння на поверсі могла досягти до 750 °C і 400 кПа. Ця стадія вибуху тривала декілька секунд. Тиск газу не зміг би розірвати навіть одягу когонебудь в епіцентрі, не кажучи вже про захисну теплову ізоляцію сталевих колон. Але, тиск вибив усі вікна і зробив поверх відкритим для атмосфери. Порівняно стійка стадія пожежі тривала близько однієї години. На цій стадії холодне повітря від зовнішнього кисневого постачання, необхідного для горіння, заходило по підлозі поверху, у той час як гарячі продукти згоряння виходили попід стелею поверху. Тиск газу на поверсі на цій стадії становив близько 100 кПа, як і зовні. Згоряння відбувалося у конвективному вогні, низ якого мав температуру випаровування палива, тобто меншу, ніж 100 °C, у той час як середня температура на вершині вогню біля стелі могла, звичайно, сягати 800 °C і більших значень через високу адіабатну температуру полум'я октану. Лінійне наближення каже, що верхня частина колони завдовжки близько одного метра перебувала під впливом температури 550 °C і вище. Найпершими напевне сприйняли теплове розширення і втрату стійкості від теплових напружень довгі горизонтальні стропильні ферми на стелі критичного поверху. Повзучість і розм'якшення бетону на цій стелі, разом із втратою стійкості стропильних ферм, протягом пожежі значно зменшили підтримку верхніх кінців гарячих несучих колон на критичному поверсі. Для демонстрації впливу теплових напружень засобами моделі „гарячої плями” припустимо, що підлога критичного поверху і холодна стеля наступного верхнього поверху тверді, у той час як стеля критичного поверху зм'якшується протягом пожежі. Припустимо

також, що всі гарячі колони є пружними аж до втрати стійкості, а всі холодні колони є пружними аж до руйнування розтягу.

Позначимо через S_A площу поперечного перерізу всіх несучих колон критичного поверху. Припустимо, що βS_A – площа поперечного перерізу гарячих несучих колон, нагрітих до температури T , а $(1 - \beta)S_A$ – площа поперечного перерізу холодних несучих колон при температурі $T = 0$. У результаті гарячі колони знаходяться під дією стискаючих теплових напружень

$$\sigma = -\delta(1 - \beta)\alpha ET, \quad \text{де } 0 < \beta < 1, \quad 1/2 < \delta < 1, \quad (1)$$

у той час як холодні колони знаходяться під дією розтягуючих теплових напружень

$$\sigma = \delta\beta\alpha ET, \quad \text{де } 0 < \beta < 1, \quad 1/2 < \delta < 1. \quad (2)$$

Коефіцієнт δ враховує пружну реакцію верхніх кінців колон. Для твердих стропильних ферм поверху $\delta = 1$, а для дуже м'яких ферм перекриття поверху, коли пружна реакція основи створюється колонами безпосередньо, $\delta = 0,5$. Отже, гарячі колони знаходяться під дією суми стискаючих гравітаційних і теплових напружень, у той час як холодні колони будуть розвантажені тепловими напруженнями. У цій ілюстративній оцінці ми знехтували залишковими напруженнями.

Обвал може початися або з руйнування внаслідок розтягу холодних колон, або із втрати стійкості гарячими колонами на критичному поверсі. Оцінимо критичний розмір гарячої плями для обох випадків.

Припустимо, що втрата стійкості гарячих колон відбувається при $\beta = \beta_b$ і що $-f\sigma_Y$ – номінальні напруження у всіх колонах поверху, зумовлені вагою верхньої конструкції; тут f – запас міцності, а σ_Y – межа текучості для сталі. Нехай $-f_0\sigma_Y$ – напруження в гарячих колонах, за яких втрачається стійкість; очевидно, що $f_0 \geq f$. Звідси і з рівняння (1) випливає, що

$$f\sigma_Y + \delta(1 - \beta_b)\alpha ET = f_0\sigma_Y, \quad (3)$$

а отже,

$$\beta_b = 1 - \frac{(f_0 - f)\sigma_Y}{\delta\alpha ET}. \quad (4)$$

Тепер припустимо, що руйнування холодних колон під дією розтягуючих напружень відбувається за $\beta = \beta_T$. Звідси і з рівняння (2) випливає, що

$$\delta\beta_T\alpha ET - f\sigma_Y = \sigma_b, \quad (5)$$

отже,

$$\beta_T = \frac{\sigma_b + f\sigma_Y}{\delta\alpha ET}, \quad (6)$$

де σ_b – межа міцності на розрив для конструкційної сталі. Запишемо відношення β_b/β_T із рівнянь (4) та (6)

$$\frac{\beta_b}{\beta_T} = \frac{\delta \alpha E T - f_o \sigma_Y + f \sigma_Y}{\sigma_b + f \sigma_Y}. \quad (7)$$

Із рівняння (7) випливає, що

$$\frac{\beta_b}{\beta_T} > 1 \quad \text{оскільки} \quad \delta \alpha E T > \sigma_b + f_o \sigma_Y. \quad (8)$$

Наприклад, за типових значень, коли $\alpha E T = 2$ ГПа, $\sigma_Y = 0,5$ ГПа, $\sigma_b = 0,7$ ГПа, $f_o = 0,5$, $f = 0,25$, а $\delta = 0,75$, отримуємо, що $\beta_b/\beta_T = 5/3$.

Це означає, що обвал почався з руйнування холодних колон унаслідок розтягу, оскільки критичний розмір гарячої плями за цього сценарію менший, ніж за сценарію втрати стійкості гарячих колон. Гаряча пляма, очевидно, розширювалася протягом пожежі.

Отже, руйнування холодних колон критичного поверху відіграло роль малюсінкового хвостика „батовської сльози”, що відламавшись розпорошується на маленькі фрагменти усю сльозину. Руйнування холодних колон критичного поверху ініціювало процес звільнення пружної енергії стискаючих напружень, що спричинили до появи хвилі руйнування, оскільки тільки хвиля руйнування може так швидко розпорошити матеріал на дрібні фрагменти.

3. Динаміка: точний аналіз проти наближеного. Відповідно до „теорії”, верхня частина вежі вище від критичного поверху вільно падала на початку обвалу і створювала „величезні” динамічні напруження в несучих колонах основної конструкції, так, що максимальні динамічні напруження були в 64,5 разів більшими за номінальні статичні напруження в цих колонах від ваги верхньої конструкції. „Ця оцінка розрахована за рівняннями пружних хвиль” – так стверджує „теорія”.

Давайте перевіримо ці обчислення. Припустимо, що маса m падає під дією гравітаційних сил і вдаряється об кінець вертикальної пружної колони (стрижня) зі швидкістю V_o і прилипає до цього кінця. Легко знайти швидкість v_x та напруження σ_x у внутрішніх точках колони (стрижня), що є результатом цього удару:

$$v_x = \frac{mg}{SE} c + \left(V_o - \frac{mg}{SE} c \right) \exp \left[\frac{SE}{mc^2} (x - ct) \right], \quad (9)$$

$$\sigma_x = -\frac{mg}{S} + \left(-\frac{V_o}{c} E + \frac{mg}{S} \right) \exp \left[\frac{SE}{mc^2} (x - ct) \right]. \quad (10)$$

Тут $0 < x < ct$; t – час з моменту удару $t = 0$; x – координата уздовж осі стрижня, розміщена за $x > 0$; E – модуль пружності; c – швидкість поширення пружних хвиль у колоні, що дорівнює $\sqrt{E/\rho}$, де ρ – густина

матеріалу; S – площа поперечного перерізу колон. Для $x > ct > 0$ і σ_x , і v_x дорівнюють нулю.

Зокрема на кінці колони при $x = 0$ і $t > 0$ напруження та швидкість дорівнюють

$$\sigma_x = -\frac{mg}{S} + \left(-\frac{V_o}{c}E + \frac{mg}{S}\right) \exp\left[-\frac{SE}{mc}t\right], \quad (11)$$

$$v_x = \frac{mg}{SE}c + \left(V_o - \frac{mg}{SE}c\right) \exp\left[-\frac{SE}{mc}t\right]. \quad (12)$$

Максимальні напруження дорівнюють

$$\sigma_x = -\frac{V_o}{c}E \quad \text{за} \quad x = 0, \quad t = 0. \quad (13)$$

Якщо взяти до уваги припущення „теорії” про вільне падіння верхньої конструкції, то тоді $V_o = \sqrt{2gh} = 8,5$ м/с, оскільки висота поверху $h = 3,7$ м, а $g = 9,8$ м/с². Для сталеві колони $c = 5,1$ км/с, а $E = 200$ ГПа, отже, відповідно до рівняння (13) максимальні напруження в колонах основної конструкції дорівнювали би 340 МПа. Виходячи із зазначеної оцінки „теорії”, номінальні статичні напруження в цих колонах, тобто mg/S , повинні були б дорівнювати $340/64,5 = 5$ МПа, що в сто разів менше від межі текучості для сталі. Це неправдоподібно! Навіть дівчинка-підліток може створити такий тиск на підлогу своїми високими підборами. Наближена оцінка „теорії” дуже неточна.

Однак, навіть дуже перебільшені внаслідок припущення вільного падіння максимальні напруження у 340 МПа від удару є приблизно в шість разів меншими, ніж максимальні теплові напруження у 2 ГПа. Отже, роль динамічного перевантаження від удару верхньої частини конструкції, виявляється вторинною у порівнянні з тепловими напруженнями. Динамічні напруження могли зробити внесок у стискувальні теплові напруження основних колон, щоб взаємно створити хвилю руйнування, якщо, звичайно, ці колони не були роздроблені хвилею руйнування раніше. Час вільного падіння верхньої конструкції із висоти $h = 3,7$ м дорівнює $\sqrt{2h/g} = 0,75$ с, що набагато більше за час 0,05 с, необхідний для розтріскування цілого будинку хвилею руйнування, якщо, звичайно, вона була створена зразу ж після руйнування холодних колон внаслідок розтягу.

Між іншим, автори „теорії” зробили припущення про те, що максимальні динамічні напруження будуть поширюватися вниз зі швидкістю 5 км/с, і що хвиля руйнування повинна виникнути зразу ж за хвилею ударного стиску, оскільки жоден матеріал не зміг би витримати „величезні” напруження стиску, що були, відповідно до „теорії”, у 64,5 разів більші за статичні напруження. Отже, „теорія” таки підтримує механізм обвалу внаслідок хвилі руйнування, а не механізм поступового руйнування. Але те, що сталося, є набагато складнішим від того, що має на увазі „теорія”.

На підставі поданих обчислень динамічного перевантаження є безперечно очевидним те, що саме теплові, а не динамічні напруження спричинили обвал сусідньої 47-поверхової вежі. Частина розлитого палива потрапила на дах цього будинку і зумовила там пожежу. Не було ніякої верхньої конструкції, яка би могла впасти і почати обвал, як цього вимагає „теорії”. У цьому випадку тільки теплові напруження могли спричинити хвилю руйнування.

4. Вільне падіння: хвиля руйнування проти поступового руйнування. Щоб пояснити обвал у режимі вільного падіння, „теорія” припускає, що в будь-який момент обвалу існують верхня частина вежі, що рухається вниз, а також основна конструкція, що залишається неушкодженою, і що основна конструкція не чинить жодної реакції та опору падаючій зверху частині, оскільки „розсіювання непружної енергії у пластичних шарнірах колон, що обвалюються, є набагато меншим за кінетичну енергію падаючої маси”.

Ця теза є очевидно грубою помилкою. Утрата кінетичної енергії падаючої маси зумовлена головню пружною деформацією основної конструкції, а опір твердотільної конструкції спричинений головню пружною реакцією, що може зупинити падаючу масу, навіть якщо розсіювання непружної енергії дорівнює нулю. Наприклад, „величезне” динамічне перевантаження від удару верхньої конструкції на критичному поверсі, що є відповідно до „теорії” у 64,5 разів більшим за статичне навантаження, відповідно до закону Ньютона має також бути прикладеним до рухомої маси, створюючи силу опору, що повністю відкидається відповідно до „теорії”.

Навіть у межах моделі про поступове руйнування, розсіювання непружної енергії було розраховане невірно. Дійсно, енергія, розсіяна в пластичних шарнірах колон, що втратили стійкість, приблизно в 8,4 рази менша за зменшення гравітаційної енергії верхньої частини конструкції, що падає з критичного поверху. Однак, така оцінка дійсна за урахування тільки одного пластичного шарніра на кожному поверсі, що суперечить таким фактам. По-перше, динамічна нестійкість колон (стрижнів) відбувається за більш високого порядку мод втрати стійкості (чим більше динамічне навантаження, тим вища мода втрати стійкості). По-друге, (за одного пластичного шарніру – ред.) руїни повинні складатися з уламків колон, завдовжки два метри що є дуже далеким від дійсності. Якщо взяти до уваги три пластичні шарніри на кожному поверсі, то такі ж обчислення дають відношення 2,8, а не 8,4. У цьому випадку руїни склалися би з уламків колон, завдовжки один метр, що ближче до дійсності. Будь-яке точне обчислення засвідчує те, що розсіювання непружної енергії протягом обвалу істотне і порівняне зі зменшенням потенціальної енергії і значенням відповідної кінетичної енергії.

Проаналізуємо модель „поступового руйнування” виключивши помилки „теорії”. Припустимо, що всі колони критичного поверху одночасно зникли, і верхня конструкція вільно впала на основну конструкцію, як це пропонується в „теорії”. Із точного розв’язку з розділу 3 випливає, що максимальні повні напруження в колонах основної конструкції внаслідок удару дорівнюють 340 МПа, що є майже вдвічі менше за межу текучості

для сталі. Це значення повинно бути близьким до напружень втрати стійкості з урахуванням запасу міцності добре спроектованих колон. З огляду на те, що 340 МПа – дуже перебільшена відповідно до припущення про вільне падіння оцінка, і що такі максимальні значення напружень залишаються на цьому рівні протягом досить короткого часу, набагато меншого за 0,01 с, то є сумнівним, що цей уявний удар міг зумовити загальне руйнування або втрату стійкості колон основної конструкції. Руйнування внаслідок втрати стійкості могло бути можливим тільки у випадку дуже гнучких колон дуже поганого проекту, оскільки напруження втрати стійкості за динамічного навантаження навіть для гнучких колон набагато більші від відповідних напружень за статичного навантаження внаслідок вищих мод втрати стійкості.

Отже, поступове руйнування є нічим іншим як результатом прорахунків „теорії”.

Єдиним можливим науковим поясненням обвалу в режимі вільного падіння є те, що будинки були роздроблені хвилями руйнування на початку обвалу кожної споруди упродовж приблизно 0,05 с, оскільки хвилі руйнування поширюються у сталі, склі, бетоні, а також мармурі зі швидкістю приблизно 6 км/с. Розтріскування протягом такого короткого проміжку часу є непомітним, оскільки об'єм тріщин є дуже малим у порівнянні з об'ємом неушкодженого матеріалу, який увесь цей час не зазнає видимих деформацій. Розтріскування вежі за 0,05 с спричинило акустичну емісію, яку було чути як вибух. Гучний глухий шум було би чути тоді, коли розтріскування, як це стверджує „теорія” поступового руйнування, тривало б 10 с. Для того, щоб поширилася хвиля руйнування, необхідно щоб матеріал був навантажений стискаючими напруженнями високої енергії, оскільки ця енергія звільняється хвилею руйнування. (див. додаток 1).

Швидкість фрагментів після хвилі руйнування складає порядку 10–100 м/с залежно від матеріалу і напружень; для скла вона приблизно в чотири рази більша, ніж для сталі. Розмір фрагментів після хвилі руйнування залежить від напружень і матеріалу; для сталі він дорівнює приблизно від 5 до 50 см, а для скла, бетону і мармуру – від 0,1 до 10 мкм. Поеднання вільного падіння важких сталевих фрагментів під дією сил тяжіння і вибухового розкидання частинок скла, бетону і мармуру у формі хмар пилу створили картину обвалу, яку можна було бачити на телеекранах.

Класичним прикладом дії хвилі руйнування є згадувана скляна „батовська сльоза”. Якщо відламується її малесенький хвостик, то вона гучно вибухає і перетворюється на хмару пилу. Потрібно 10^{-5} с щоб розпорошити хвилею руйнування п'ятисантиметрову „сльозину”, і 10^{-2} с щоб створити однометрову хмару скляних частинок мікронних розмірів.

Отже, механізм обвалів МТЦ та сусіднього 47-поверхового будинку внаслідок хвилі руйнування підтримується такими фактами:

- (i) усі будинки зруйнувалися у режимі вільного падіння;
- (ii) кожен обвал супроводжувався звуком вибуху;

(iii) розміри сталевих фрагментів і частинок пилу зі скла, бетону і мармуру відповідають розрахованим за теорією хвиль руйнування;

(iv) створивши хмари, частинки пилу поширилися на декілька сотень метрів.

5. Хвиля руйнування проти ударної хвилі. Звернемо увагу на основні властивості ударних хвиль та хвиль руйнування услід за [2]. Обидві хвилі є деякими фронтами неоднорідності густини, швидкості, і напружень у матеріалі.

Ударні хвилі спричиняються ударами, а також вибухами у газах, рідинах і твердих тілах. Густина матеріалу позаду ударної хвилі завжди більша, ніж на фронті хвилі. Максимальні стискні напруження позаду ударної хвилі завжди більші, ніж перед нею. Нормальна швидкість ударної хвилі завжди більша від швидкості звуку (у твердих тілах і рідинах незначно більша). Товщина фронту ударної хвилі визначається в'язкістю матеріалу.

Існує розповсюджене, але невірне переконання, що ударна хвиля може розділити матеріал на маленькі фрагменти². Розділити означає розділити тріщинами на малі фрагменти, але ударна хвиля не може вкрити тріщинами тіло, оскільки будь-яке тріщиноутворення супроводжується розширенням тіла. Хвиля руйнування повинна завжди йти за ударною хвилею, щоб розділити матеріал.

Хвилі руйнування можуть бути зумовлені в тілах тільки стискувальними напруженнями. Хвиля руйнування розмежовує неушкоджений матеріал перед хвилею від роздібненого матеріалу позаду хвилі. Товщина фронту хвилі руйнування має порядок розміру фрагментів матеріалу позаду хвилі. Середня густина матеріалу, максимальні стискні напруження за хвилею руйнування завжди менші, ніж перед нею. Нормальна швидкість усталених хвиль руйнування дорівнює швидкості звуку (поздовжня пружна хвиля). Для неусталених хвиль руйнування, нормальна швидкість менша від швидкості звуку і визначається із розв'язку конкретної задачі, тобто залежить від крайових і початкових умов.

6. Висновки. З'ясовано, що під час трагічного обвалу 11 вересня 2001:

(i) повзучість не відіграла жодної ролі, а обвал спричинили теплові напруження;

(ii) обвал зумовило руйнування унаслідок розтягу під дією теплових напружень декількох не нагрітих утримувальних колон, а не втрата стійкості за умов повзучості гарячих колон;

(iii) динамічні напруження від удару верхньої конструкції на початковій стадії обвалу кожної будівлі були недостатніми навіть для того, щоб спричинити руйнування нижніх конструкцій, не кажучи вже про поступове руйнування цілих будинків;

(iv) породжена після руйнування внаслідок розтягу невеликої кількості не нагрітих колон критичного поверху хвиля руйнування роздробила кожен будинок приблизно за 0,05 с і утворила звук вибуху, а сталеві фрагменти

² Доктор Базант та багато анонімних рецензентів дотримувалися цієї думки.

вільно падали, у той час як скло, бетонні та мармурові фрагменти утворили хмари пилу.

Механізм хвилі руйнування є найімовірнішою гіпотезою, оскільки він підтримується фактами предмета обговорення та уточненими обчисленнями. Однак, строгі умови, що зумовлюють хвилі руйнування повинні бути вивчені, що є важливою задачею на майбутнє.

Подяки. Автор вдячний редакторам і анонімним рецензентам технічних журналів, які відхилили пояснення автора через їхню суперечність офіційній „теорії”. Їхні коментарі стимулювали автора до поданого тут аналізу „теорії”, котрій все ще так глибоко довіряють.

1. *Bazant Z.P., Zhou Y. Why did the World Trade Center collapse? – Simple analysis // J. Engineering Mechanics, 2002. – Vol. 128. – No. 1. – P. 1–6.*
2. *Cherepanov G.P. Mechanics of Brittle Fracture. – New York: McGraw-Hill, 1979. – 980 p. (Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.)*

Додаток 1. Теорія хвиль руйнування

Хвиля руйнування є фронтом неоднорідності масової густини, матеріальних швидкості і напружень, що відокремлює неушкоджений матеріал перед хвилею руйнування від роздробленого позаду неї. Густина матеріалу позаду фронту хвилі руйнування завжди менша, ніж перед хвилею, оскільки будь-яке розтріскування в тілі розширює його. Товщина фронту хвилі руйнування має порядок розміру фрагментів роздробленого матеріалу позаду нього.

Закони збереження для хвилі руйнування можна подати таким чином: збереження маси

$$\rho_0 (\mathbf{V} - \mathbf{v}_0) = \rho_F (\mathbf{V} - \mathbf{v}_F), \quad (\text{Д.1})$$

збереження кількості руху

$$-\sigma_0 + \rho_0 (\mathbf{V} - \mathbf{v}_0)^2 = -\sigma_F + \rho_F (\mathbf{V} - \mathbf{v}_F)^2, \quad (\text{Д.2})$$

збереження енергії

$$\frac{1}{2}(\mathbf{V} - \mathbf{v}_0)^2 + \frac{U_0}{\rho_0} - \frac{\sigma_0}{\rho_0} = \frac{1}{2}(\mathbf{V} - \mathbf{v}_F)^2 + \frac{U_F}{\rho_F} - \frac{\sigma_F}{\rho_F} + \frac{D}{\rho_F}. \quad (\text{Д.3})$$

Тут індексом „0” позначено величини, що відповідають неушкоджені матеріалу перед хвилею руйнування, а індексом „F” – зруйнованому матеріалу позаду хвилі руйнування; $\mathbf{V}$ – нормальна швидкість фронту хвилі руйнування; $\mathbf{v}$ – швидкість точок матеріалу, нормальна до фронту руйнування; ρ – густина матеріалу; U – об’ємна густина пружної енергії матеріалу; σ – нормальна до фронту руйнування компонента напружень; D – об’ємна густина поверхневої енергії зруйнованого матеріалу.

Рівняння (Д.1) і (Д.3) можна переписати таким чином:

$$\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_F} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\mathbf{v}_F - \mathbf{v}_0}{\mathbf{V} - \mathbf{V}_0} \quad (\text{Д.4})$$

$$\sigma_0 - \sigma_F = \rho_0 (\mathbf{V} - \mathbf{v}_0)(\mathbf{v}_F - \mathbf{v}_0), \quad (\text{Д.5})$$

$$\frac{\mathbf{D}}{\rho_F} = \frac{\mathbf{U}_0}{\rho_0} - \frac{\mathbf{U}_F}{\rho_F} + \frac{1}{2}(\sigma_0 + \sigma_F) \left(\frac{1}{\rho_F} - \frac{1}{\rho_0} \right). \quad (\text{Д.6})$$

Припустимо, що неушкоджений матеріал знаходиться у стані спокою, тобто, $\mathbf{v}_0 = 0$. Тоді значення ρ_F , $\mathbf{v}_F$ та $\mathbf{D}$ можна знайти з рівнянь (Д.4)-(Д.6) наступним чином:

$$\rho_F = \frac{\rho_0}{1 - \frac{\sigma_0 - \sigma_F}{\rho_0 \mathbf{V}^2}}, \quad (\text{Д.7})$$

$$\mathbf{v}_F = \frac{\sigma_0 - \sigma_F}{\rho_0 \mathbf{V}}, \quad (\text{Д.8})$$

$$\mathbf{D} = \frac{\rho_F}{\rho_0} \left(\mathbf{U}_0 - \frac{\sigma_0^2 - \sigma_F^2}{2\rho_0 \mathbf{V}^2} \right) - \mathbf{U}_F. \quad (\text{Д.9})$$

Із рівнянь (Д.7) та (Д.8) випливає, що оскільки внаслідок фізичних міркувань про хвилі руйнування $\rho_0 > \rho_F$, то $\mathbf{v}_F < 0$ і $\sigma_0 < 0$. Це означає, що хвиля руйнування може рухатися тільки у стиснутому матеріалі, а швидкість руху зруйнованого матеріалу завжди протилежна до напрямку нормальної складової швидкості хвилі руйнування.

Обмежимося тут лише розглядом усталених хвиль руйнування. Припустимо, що $\mathbf{V} < \mathbf{c}$, де $\mathbf{c}$ – швидкість руху поздовжніх пружних хвиль у матеріалі. Пружна поле, що передує такій хвилі руйнування також буде усталеним. Однак, з рівнянь теорії пружності випливає, що усталене пружне поле може поширюватися тільки зі швидкістю $\mathbf{c}$. (Хвилі зсуву за таких обставин, очевидно, неможливі). Це означає, що припущення невірне, отже, $\mathbf{V} > \mathbf{c}$ для усталених хвиль руйнування. Із рівняння (Д.7) випливає, що ρ_F є дуже близьким до ρ_0 , тобто $\rho_F \approx \rho_0$, оскільки $\sigma_0 = \mathbf{E}$, а $\rho_0 \mathbf{V}^2 \geq \rho_0 \mathbf{c}^2 \approx \mathbf{E}$. Отже, рівняння (Д.9) запишеться так:

$$\mathbf{D} = \mathbf{U}_0 - \frac{\sigma_0^2}{2\rho_0 \mathbf{V}^2} - \left(\mathbf{U}_F - \frac{\sigma_F^2}{2\rho_0 \mathbf{V}^2} \right). \quad (\text{Д.10})$$

Знехтуємо взаємним контактом фрагментів зруйнованого матеріалу унаслідок втрати взаємозв'язку, тобто вважатимемо, що $\sigma_0 \neq \sigma_F$ і $\mathbf{U}_0 \neq \mathbf{U}_F$. Тоді рівняння (Д.8) та (Д.10) набудуть вигляду

$$\mathbf{v}_F = \frac{\sigma_0}{\rho_0 \mathbf{V}}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{U}_0 - \frac{\sigma_0^2}{2\rho_0 \mathbf{V}^2}. \quad (\text{Д.11})$$

Дослідимо D як функцію від V . Виходячи із принципу мінімуму поверхневої енергії величина D повинна бути мінімально можливою, оскільки D є поверхневою енергією одиниці об'єму зруйнованого матеріалу. Із цього принципу випливає, що $V = c$, оскільки D мінімальне за $V = c$. У 1967 р. автор разом із Л. Галіном дійшов цього ж висновку виходячи з аналогії між хвилею руйнування та вибуховою хвилею тринітротолуолу (гіпотеза Чапмена-Жуге).

Отже, основні рівняння усталених хвиль руйнування можна сукупно подати так:

$$V = c, \quad D = U_0 - \frac{\sigma_0^2}{2\rho_0 c^2}, \quad v_F = \frac{\sigma_0}{\rho_0 c}, \quad \rho_F \approx \rho_0. \quad (Д.12)$$

Ці рівняння виконуються для будь-яких анізотропних квазікрихких матеріалів, розміри яких набагато більші за товщину фронту хвилі руйнування, тобто за розміри фрагментів зруйнованого після проходження хвилі матеріалу. Використовуючи визначену експериментально із дослідів механіки руйнування ефективну поверхневу енергію Γ розтріскування матеріалу, можна оцінити розміри фрагментів зруйнованого матеріалу в термінах Γ та D .

Якщо, наприклад, вважати, що фрагменти є однаковими кубиками з ребром d , то можна обчислити

$$d = 12 \frac{\Gamma}{D}, \quad (Д.13)$$

а якщо фрагменти є довгими однаковими голками шестикутного поперечного перерізу з ребром r , то

$$2r = \frac{8}{\sqrt{3}} \frac{\Gamma}{D}. \quad (Д.14)$$

Така голчата форма фрагментів спостерігалася в деяких експериментах зі скляними зразками.

Припустимо, що ізотропний матеріал перебуває у стані гідростатичного стиску напруженнями σ_0 на фронті хвилі руйнування. У цьому випадку

$$U_0 = \frac{3(1-2\nu)}{2} \frac{E}{\rho_0} \sigma_0^2, \quad \rho_0 c^2 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \quad (Д.15)$$

Тут E і ν – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона. Підставивши рівняння (Д.12) в (Д.15), отримаємо такі результати для силікатного скла при $\Gamma = 2$ Н/м, $\rho_0 = 2,4$ г/см³, $E = 7 \times 10^4$ Н/мм², а $\nu = 0,17$:

$V = c = 5950$ м/с і

при $\sigma_0 = -500$ Н/мм²: $v_F = -35$ м/с, $D = 1,9$ Н/мм², $d = 12,8$ мкм, $2r = 5$ мкм;

при $\sigma_0 = -1$ кН/мм²: $v_F = -70$ м/с, $D = 7,5$ Н/мм², $d = 3,2$ мкм, $2r = 1,2$ мкм;

при $\sigma_0 = -5$ кН/мм²: $v_F = -350$ м/с, $D = 187,5$ Н/мм², $d = 0,1$ мкм, $2r = 0,05$ мкм;

Скляні голки, для яких параметр $2r$ перебував у діапазоні приблизно від 1 мкм до 10 мкм, спостерігалися експериментально [2]. Для каменю та будівельних матеріалів, таких як бетон, мармур та дерево, значення v_F , D , d та r порівняльні із відповідними значеннями для скла, оскільки їхня поверхнева енергія Γ порівняльна із енергією для скла.

Відповідно до цих обчислень пил, утворений внаслідок обвалу трьох будинків 11 вересня 2001, складався із фрагментів мікронних розмірів скла, бетону і мармуру, оскільки товщина фронту хвиль руйнування у цих матеріалах була набагато меншою від будь-якого розміру конструкції.

Припустимо тепер, що хвиля руйнування поширюється у сталевій колоні між стелею і підлогою поверху. Припустимо, що колона є твердотілим, вертикальним, круглим циліндром і що сталеві фрагменти за хвилею руйнування будуть деякими сегментами колони, розтріснутої уздовж площинок ковзання, нахилених під кутом 45° до осі циліндра. У цьому випадку висота сегмента h_s має дорівнювати

$$h_s = 2\sqrt{2} \frac{\Gamma}{D}, \quad (Д.16)$$

а

$$U_0 = \frac{\sigma_0^2}{2E}, \quad \rho_0 c^2 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \quad (Д.17)$$

Тут σ_0 є середнім значенням напружень стиску у неушкодженому сегменті перед хвилею руйнування, спричинених гравітаційним, тепловим і технологічним навантаженнями (наприклад, від вальцювання, зварювання і збирання). Хвиля руйнування, що звільнює потенціальну енергію напружень стиску випереджає групову швидкість $\sqrt{E/\rho_0}$ так, що на відстані 4 м (висоти колони) вона випереджає її приблизно на 0,3 м.

Використовуючи рівняння (Д.12), (Д.16) та (Д.17), можна знайти для сталі ($\Gamma = 20$ кН/м, $\rho_0 = 7,9$ г/см³, $E = 200$ ГПа і $\nu = 0,33$), коли $V = c = 5850$ м/с, то

за $\sigma_0 = -1$ кН/мм²: $v_F = -21$ м/с, $D = 0,83$ Н/мм², $h_s = 6,8$ см;

а за $\sigma_0 = -500$ Н/мм²: $v_F = -10$ м/с, $D = 0,2$ Н/мм², $h_s = 27,2$ см.

Слід зазначити, що ефективна поверхнева енергія Γ для сталі включає і приповерхневу пластичну енергію, розсіяну в тонкому шарі на поверхні тріщини. Отже, навіть така груба оцінка розміру сталевих фрагментів, що виходить із точного балансу енергії у хвилі руйнування, забезпечує реалістичну картину, що стосується обвалу всіх трьох будинків 11 вересня 2001, оскільки розраховані значення h_s набагато менші від висоти колони на поверсі.

За іншим підходом до оцінки розмірів сталевих фрагментів, утворених під час обвалу будинків, можна змодельовати будинок як твердотілий матеріальний об'єм тієї ж маси і форми, структурно ортотропний із вертикальною віссю симетрії і полярними площинами симетрії, жорсткість якого в цих напрямках дорівнює жорсткості будинку. Ефективна поверхнева енергія цього модельного матеріалу дорівнює $(1 - \varepsilon)^\Gamma$, де ε – відношення порожнього об'єму до загального об'єму будинку, а Γ – ефективна поверхнева енергія сталі. Поширення хвиль руйнування в пористих матеріалах вимагає застосування подібного підходу.

Додаток 2. Офіційна „теорія”

Фрагмент статті Bazant Z.P., Zhou Y. Why did the World Trade Center collapse? – Simple analysis // J. Engineering Mechanics, 2002. – Vol. 128. – No. 1. – P. 1–6.

Чому Міжнародний торговий центр обвалився? Простий аналіз

З.П. Базант, Ю. Жоу

Вступ і сценарій руйнування

110-поверхові вежі Міжнародного торгового центру були спроектовані так, щоб вони могли протистояти в цілому силам, зумовленим горизонтальним ударом великого комерційного літака. Отже, чому відбувався повний обвал? Причиною був динамічний наслідок тривалого нагрівання сталевих колон до дуже високої температури. Нагрівання знизило межу текучості і зумовило в'язкопластичну (за умов повзучості) втрату стійкості колон зовнішнього каркасу уздовж периметра вежі і колон ядра будинку. Ймовірний сценарій руйнування приблизно наступний.

У стадії 1 (рис. 1) внаслідок пожежі, зумовленої згорянням розлитого у будівлі палива літака, сталь колон була під дією високих температур, очевидно вище 800°C . Нагрівання ймовірно було пришвидшене втратою захисної теплової ізоляції сталі під час початкового вибуху. За таких температур у конструкційній сталі зменшується межа текучості і вона зазнає істотних в'язкопластичних деформацій (тобто, повзучості – збільшення деформації за сталого навантаження). Це зумовлює втрату стійкості колон за умов повзучості (Bazant і Cedolin 1991, Розд. 9) і, як наслідок, втрату їхньої утримувальної здатності (стадія 2). Коли на критичному поверсі більше половини найбільш нагрітих колон втрачають стійкість (стадія 3), вага верхньої частини конструкції вище від цього поверху більше не може бути утримана, а тому верхня частина починає з пришвидшенням падати на частину нижче критичного поверху, поки не відбудеться удар із цією нижньою частиною. У цей момент, верхня частина набуде величезної кінетичної енергії та істотної швидкості падіння. Вертикальний удар маси верхньої частини об нижчу частину (стадія 4) зумовлює надмірне вертикальне динамічне навантаження на основну конструкцію, що значно перевищує її утримувальну здатність, навіть без впливу нагрівання. Це зумовлює руйнування основної частини багатоповерхової вежі (стадія 4), у якій руйнування кріплень стропильних ферм підлоги до колон одномоментно або послідовно супроводжується

втратою стійкості центральних колон і загальною втратою стійкості зовнішнього каркасу, із втратою стійкості, що ймовірно охоплює висоту багатьох поверхів (стадія 5, справа), і верхня частина можливо утискується в уже порожню нижчу частину зовнішнього каркасу (стадія 5, зліва). Втрата стійкості спочатку пластична, але швидко зумовлює руйнування пластичних шарнірів. Частина будівлі, розташована нижче, після цього знову піддається удару ще більшої маси, що падає з більшою швидкістю і шлях униз супроводжується низкою таких ударів і руйнувань (стадія 5).

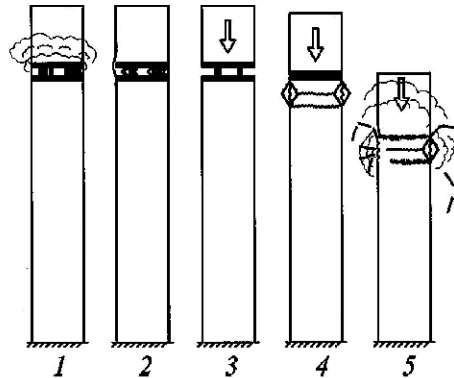


Рис. 1. Стадії обвалу будівлі (висота поверху перебільшена)

Динамічний аналіз теорії пружності. Деталі процесу руйнування після вирішального початкового пускового механізму, що приводить верхню частину будівлі в рух, звичайно дуже складні, і їхнє роз'яснення вимагало б багатьох комп'ютерних моделювань. Наприклад, верхня частина однієї вежі нахилиється, коли починає падати; розподіл ударного навантаження на основні колони зовнішнього каркасу і ядра та між колонами і стропильними фермами, що утримують підлогу, дуже неоднорідний; і т.д. Однак, комп'ютер не потрібний, щоб зробити висновок, що обвал більшості колон одного поверху повинен був зумовити руйнування цілої вежі. Це може бути продемонстровано наступними елементарними обчисленнями, у яких зроблені найбільш оптимістичні в сенсі витривалості спрощувальні припущення.

Протягом короткого часу після вертикального удару верхньої частини, але після того, як пружна хвиля, утворена вертикальним ударом, поширилася до землі, поведінку нижньої частини конструкції можна наближено розглядати як дію пружини (рис. 2(a)). Яка ж її жорсткість C ? Вона може істотно змінюватися залежно від розподілу сили удару по колонах зовнішнього каркасу та між цими колонами і тими, що розташовані в ядрі, а також між колонами та стропильними фермами, що утримують плити залізобетонної підлоги.

Задля нашої мети можна припустити, що всі сили удару припадають на колони і розподілені поміж ними однаково. Навряд чи такий розподіл може існувати, проте це найбільш оптимістична гіпотеза, яку можна висунути,

оскільки опір будинку ударові за такого розподілу найвищий. Якби будинок, зазнав руйнування при однорідному розподілі ударних сил, то він зазнав би руйнування при будь-якому іншому розподілі. Відповідно до цієї гіпотези, можна оцінити, що $C \approx 71$ ГН/м (через відсутність точних даних, з цією метою був виконаний наближений розрахунок поперечних перерізів колон).

Переміщення вниз відносно початкового положення рівноваги до точки максимального відхилення нижньої частини (за умови її пружної поведінки) дорівнює $h + (P/C)$, де P – максимальна сила, від дії верхньої частини конструкції на нижню, а h – висота колон критичного поверху (висота початкового падіння верхньої частини $h \approx 3,7$ м). Дисипацією енергії, особливо внаслідок непружної деформації колон під час початкового падіння верхньої частини, можна знехтувати, тобто можна припустити, що верхня частина переміщується по висоті h майже в режимі вільного падіння (дійсно, енергія, розсіяна в колонах під час

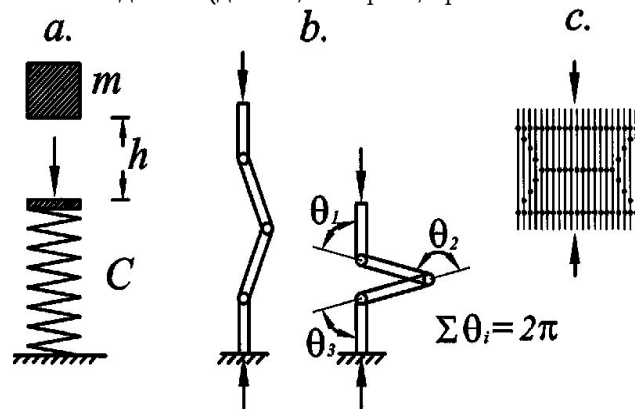


Рис. 2. (а) Модель удару верхньої частини будівлі об нижню;
(б) Механізм пластичної втрати стійкості на лінії однієї колони;
(с) Поєднання пластичних шарнірів, що спричинює втрату стійкості в стінці труби

падіння, максимально дорівнює $2\pi \times \text{момент текучості колон} \times \text{кількість колон}$, що дорівнює приблизно тільки 12 % від зміни потенціальної енергії, якщо би колони були не нагрітими і набагато менше від цього за 800°C). Тобто втрата потенціальної енергії верхньої частини може приблизно дорівнювати енергії деформації нижньої частини при максимальному пружному відхиленні. Це дає рівняння $mg[h + (P/C)] = P^2/2C$, де m – маса верхньої частини (для Північної Вежі $\approx 58 \cdot 10^6$ кг), а g – пришвидження вільного падіння. З розв'язку при $P = P_{\text{dyn}}$ отримується наступне перевантаження внаслідок удару верхньої частини, обчислене за припущень пружності:

$$P_{\text{dyn}} / P_0 = 1 + \sqrt{1 + (2Ch / mg)} \approx 31, \quad (1)$$

де $P_0 = mg$ – запроектована утримувальна здатність. Незважаючи на наближену природу цього аналізу, очевидно, що пружно обчислені зусилля в колонах, що зумовлені вертикальним ударом верхньої частини, перевищили утримувальну здатність нижньої частини принаймні на порядок цієї величини.

Інша оцінка, яка дає початкове перевантаження, що триває тільки частки секунди в момент удару,

$$P_{\text{dyn}} / P_0 = (A / P_0) \sqrt{2\rho g E_{\text{ef}} h} \approx 64,5, \quad (2)$$

де A – площа поперечного перерізу будинку; E_{ef} – жорсткість поперечного перерізу всіх колон поділена на A ; ρ – характерна маса одиниці об'єму будівлі (густина). Ця оцінка обчислена з рівняння пружних хвиль, що дає інтенсивність стрибкоподібного фронту набігаючої хвилі тиску, зумовленої ударом, якщо швидкість верхньої частини в момент удару на критичному поверсі розглядається як крайова умова (Bazant і Cedolin, 1991, Розд. 13.1). Після того, як хвиля пошириться до землі, вірогідною є попередня оцінка.

Аналіз дисипації непружної енергії. Непружна деформація сталі веж зумовлена пластичністю і тріщиноутворенням. Оскільки ми не намагаємося змодельовувати деталі реального механізму руйнування, але прагнемо тільки довести, що вежі повинні були зруйнуватися і обвалилися у спосіб, описаний у (Post and Winston, 2001; American 2001), тут буде знехтувано тріщиноутворенням, навіть при тому, що розвиток тріщин, особливо в кріпленнях колон, чітко простежується на фотографіях обвалу. Припустивши, що сталь повинна поводитися пластично, з необмеженою в'язкістю, ми робимо найбільш оптимістичне припущення щодо здатності веж встояти (насправді ж пластичні шарніри, особливо шарніри в кріпленнях колон, повинні були зруйнуватися, і зробили це при відносно малому куті повертання, зумовлюючи істотне зменшення утримувальної здатності).

Основне питання, на яке потрібно відповісти: Чи може падіння верхньої частини бути зупинене дисипацією енергії під час пластичної деформації, яка настає після початкового пружного деформування? Можна розглянути багато механізмів пластичного руйнування, наприклад: (1) колони основного поверху втрачають стійкість локально (рис. 1, стадія 2); (2) стропильні ферми, що утримують підлогу, руйнуються на з'єднаннях із зовнішнім каркасом та з основними колонами і падають у межах каркасу, залишаючи основні колони і зовнішній каркас без підтримки з боку, і в такий спосіб просувають деформацію основних колон і зовнішнього каркасу при вертикальному стиску (рис. 1, стадія 4 і рис. 2(с)); або (3) верхня частина частково втиснута у межах спорожнілого зовнішнього каркасу нижньої частини, розштовхує стіни зовнішнього каркасу назовні (рис. 1, стадія 5). Можна довести, що кожен з цих механізмів здатний зумовити повний обвал, проте комбінація останніх двох здається найбільш реалістичною [причина: багатоповерхові частини зовнішнього каркасу, з майже прямими

границями, що, очевидно, відповідають лініям пластичних шарнірів, які зумовлюють втрату стійкості стін зовнішнього каркасу, були сфотографовані у момент падіння (Post and Winston, 2001; American 2001)].

Незалежно від точного способу руйнування, досвід із питань втрати стійкості свідчить, що у той час як багато пружних короблень одночасно співіснують у стиснутій вздовж осі трубі, пластична деформація локалізується (внаслідок пластичної біфуркації) у єдиному коробленні на раз (рис. 1, стадія 4 і рис. 2(с)), і в такий спосіб шарніри повинні скластися один за одним. Таким чином необхідно одночасно від одного до чотирьох пластичних шарнірів на лінії колони, щоб дати можливість верхній частині продовжувати падати (рис. 2(b)) (Bazant і Cedolin 1991). (Твердження також вірне, якщо колони тільки одного поверху втрачають стійкість разом.) Насамкінець, сума кутів повертання θ_i ($i = 1, 2, \dots$) шарнірів на лінії однієї колони не може перевищити 2π (рис. 2(b)). Ця верхня межа, що не залежить від кількості поверхів, колони яких втрачають стійкість, використовується в даних обчисленнях тому, що в сенсі витривалості вона є найоптимістичнішою гіпотезою, що максимізує пластичну дисипацію енергії.

Обчислюючи дисипацію на одиницю ширини колони зовнішнього каркасу як добуток пластичного згинального моменту M_p однієї колони (Jirasek і Bazant 2002) на загальний кут повороту $\sum \theta_i = 2\pi$ (рис. 2(b)) і множачи її на кількість колон, можна стверджувати, що пластично розсіяна енергія W_p дорівнює, оптимістично, порядку 0.5 ГН·м (за недостатності інформації, окремі деталі, такі як товщина стінки сталевих колон, були оцінені, виконуючи приблизні обчислення за планом будівлі).

Щоб досягти загального кута повертання $\sum \theta_i = 2\pi$ пластичних шарнірів на лінії кожної колони, верхня частина будинку повинна пройти додатковий шлях завдовжки принаймні у висоту одного поверху, що розташований під поверхом, на якому почався обвал, і таким чином повна зміна потенціальної енергії дорівнює $W_g = mg \cdot 2h \approx 2 \times 2,1 = 4,2$ ГН·м. Щоб зупинити падіння кінетична енергія верхньої частини, що дорівнює зміні потенціальної енергії, повинна була би поглинутися повертанням пластичних шарнірів, тобто, W_p повинна бути більшою від W_g . Однак

$$W_g / W_p \approx 8,4. \quad (3)$$

Тому навіть відповідно до найбільш оптимістичних припущень, пластична деформація може розсіяти лише незначну частину кінетичної енергії, що набула верхньою частиною будинку.

Поки сформується наступне короблення з групою пластичних шарнірів, верхня частина вже пройде багато поверхів униз і набуде набагато більшої кінетичної енергії; частка кінетичної енергії, розсіяної пластично, має тоді порядок 1 %. Ця частка продовжує надалі зменшуватися, оскільки верхня частина падає. Якщо розглянути тріщиноутворення у пластичних шарнірах, то буде отримано ще меншу (насправді, набагато меншу) дисипацію енергії.

Таким чином, обвал вежі повинен відбуватися майже в режимі вільного падіння. Цей висновок підтверджується тим, що тривалість обвалу кожної вежі, яка дорівнювала приблизно 10 с, була приблизно такою ж як і тривалість вільного падіння у вакуумі від вершечка вежі $H = 416$ м до вершини купи руїн ($H_0 = 25$ м), що дорівнює $t = \sqrt{2(H - H_0)/g} = 8,93$ с. Із цього випливає, що головний удар вертикального падіння припав в основному безпосередньо на колони зовнішнього каркасу і ядра, а також що фронт обвалу поверхнів, можливо, не просунувся істотно перед фронтом обвалу зовнішнього каркасу, адже інакше обвал зовнішнього каркасу повинен був тривати значно довше, ніж 9 с.

Заключні коментарі та задача зменшення катастроф. Проектування висотних будинків, які б могли протистояти такому типу нападів здається майже неможливим. Воно вимагало б набагато товстішої ізоляції сталі зі стійким до вибуху захисним покриттям. Заміна прямокутного зовнішнього каркасу укріпленим круглим монолітним каркасом з маленькими вікнами могла б допомогти відхилити значну частину уламків зіткнення літака і паливо в сторони, але незалежно від вартості, хто би хотів працювати в такому будинку?

Задача є також важливою при проектуванні бетонних колон, оскільки бетон, нагрітий до таких температур, піддається вибуховому тепловому розтріскуванню, тепловому руйнуванню, і розпадові внаслідок дегідратації (Bazant і Kaplan 1996). Ці питання стосуються не тільки будинків, що утримуються завдяки багатьом колонам, але також і для недавніх проектів високих будинків з масивним монолітним бетонним ядром, що функціонує як трубчаста щогла. Ці недавні проекти використовують бетон високої міцності, що, однак, ще більше піддається впливу вибухового теплового розтріскування і теплового руйнування, ніж звичайний бетон. Використання жаростійких бетонів як конструкційних матеріалів має багато невирішених питань (Bazant і Kaplan 1996). Спеціальні сплави або різні жаростійкі керамічні композити можуть, звичайно, функціонувати при таких температурах, але вартість будівлі збільшилася би астрономічно.

Було би також доречним почати дослідження матеріалів і проектів, що відтерміновували б обвал будинку для того, щоб збільшити необхідний для евакуації час, забезпечили укріплену і краще ізольовану сходову клітку, або навіть запобігти обвалу у випадку менш серйозного нападу, такого як позацентровий удар, або удар літака, що містить менше палива.

Важливою загадкою на цей час є те, чому суміжний 46-поверховий будинок, на який імовірно не було розлито істотну кількість палива літака, також зруйнувався. Незважаючи на недостатність даних, на цей час ймовірним видається пояснення, що високі температури (можливо значно нижчі за 800°C) утримувалися принаймні на одному поверсі того будинку протягом набагато тривалішого часу, ніж той, що визначається поточними умовами горіння.

-
1. American Media Specials. (2001). September, Boca Raton, Fla.

2. *Bazant Z.P., and Cedolin L.* (1991). *Stability of structures: Elastic, inelastic, fracture and damage theories*, Oxford University Press, New York.
3. *Bazant Z.P., and Kaplan M.F.* (1996). *Concrete at high temperatures*, Longman–Addison-Wesley, London.
4. *Bazant Z. P., and Planas J.* (1998). *Fracture and size effect of concrete and other quasibrittle materials*, CRC Press, Boca Raton, Fla.
5. *Jirasek M., Bazant Z.P.* (2002). *Inelastic analysis of structures*, Wiley, New York.
6. *Levy M., Salvadori M.* (1992). *Why buildings fall down*, W. W. Norton, New York.
7. "Massive assault doomed towers." (2001). *Eng. News-Rec.*, 247(12), 10–13.
8. *Post N.M., Winston S.* Massive Assault Doomed Towers // *Engineering News-Record* (September 17, 2001), 247(12), P. 10–13.

**О ОБВАЛЕ МЕЖДУНАРОДНОГО ТОРГОВОГО ЦЕНТРА
В НЬЮ-ЙОРКЕ 11 СЕНТЯБРЯ 2001 ГОДА**

Геннадий ЧЕРЕПАНОВ

Майами, Флорида, США

Рассмотрено отличную от официальной версию обвала Международного торгового центра в Нью-Йорке. Доказано, что официальная "теория" обвала неверна, поскольку она построена на ложных предположениях и неверных вычислениях.

Ключевые слова: колонна, обвал, взрыв, волна разрушения, динамический удар, прогрессирующее разрушение.

**DOWN ON THE INTERNATIONAL TRADE CENTRE
NEW YORK SEPTEMBER 11, 2001**

Gennady CHEREPANOV

Miami, Florida, USA

Considered different from the official version of the collapse of World Trade Centre in New York. We prove that the official "theory" collapse is false because it is built on false assumptions and incorrect calculations.

Keywords: column, collapse, explosion, a wave of destruction, dynamic impact, a progressive deterioration.

Стаття надійшла до редколегії 16.03.2009

Прийнята до друку 22.12.2010

КОНТАКТНА ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНА ЗАДАЧА ДЛЯ ШАРУ З ТОНКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ЗА НАЯВНОСТІ ЗАТРИМКИ ТЕКУЧОСТІ

Георгій СУЛИМ, Марта КРИВЕНЬ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Досліджено розвиток пластичних деформацій в околі жорсткого тонкого включення, розміщеного у шарі, симетрично і перпендикулярно до його граней. Матеріал шару пружно-пластичний зі значним перепадом порогів текучості. Деформація спричинена тангенціальним зсувом граней шару. Знайдено співвідношення між верхнім і нижнім порогамі текучості, за якого відбуватиметься пластичне відшаровування включення і від вершин включення розвиватимуться по дві навескісні смуги. Досліджено розвиток пластичних смуг при поступовому квазістатичному зміщенні граней шару.

Ключові слова: контактна задача, включення, текучість.

Локалізація пластичних деформацій в околі концентраторів напружень, у тім числі й у вигляді тонких смуг пластичності, має численні експериментальні підтвердження [1]. Її треба враховувати не тільки для адекватного опису картини розвитку пластичних деформацій, а й для точнішого визначення утримувальної здатності матеріалу та елементів конструкцій. Хоча фізичні причини, які обумовлюють тонкосмугову локалізацію пластичних деформацій ще остаточно не з'ясовані, є підстави вважати, що головна її причина – явище затримки текучості, або, як його по-іншому називають, перепаду меж текучості [2 – 4]. До досягнення напруженнями певного рівня (верхнього порогу текучості) пластичні деформації взагалі не відбуваються, а потім виникають пластичні деформації, які розвиваються під практично сталими напруженнями (нижній поріг текучості), суттєво нижчими за стартові.

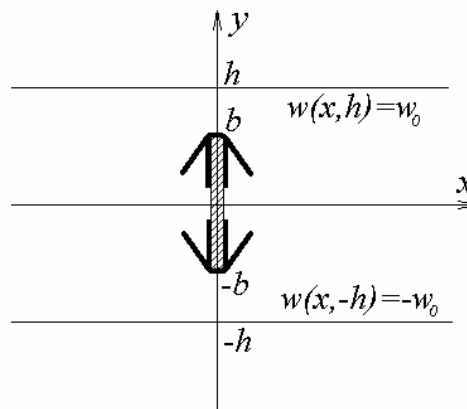


Рис. 1. Схема задачі

Наша мета – вивчити розвиток пластичних смуг в околі вершин тонкого жорсткого стрічкового включення ($x = 0, -b \leq y \leq b, -\infty < z < +\infty$), розміщеного центрально у шарі $-\infty < x < +\infty, -b \leq y \leq b, -\infty < z < +\infty$

перпендикулярно до його граней. Грані $y = b$ та $y = -b$ шару тангенціально й квазістатично зміщуються (вздовж граней зміщення сталі й дорівнюють w_0 і $-w_0$ відповідно), що спричиняє антиплоский напружено-деформований стан (рис. 1).

Вважатимемо, що матеріалу матриці властива затримка пластичної текучості з верхнім порогом k_1 і нижнім k_0 . За певних співвідношень між порогами текучості спостерігатиметься пластичне відшаровування включення (розвиток смуг на межі включення-середовище), а також від вершин (фронтів) включення під певним кутом α до нього розвиватимуться дві, симетричні стосовно включення, косі смуги. Товщини усіх пластичних смуг вважатимемо нульовими і моделюватимемо їх лініями тангенціального розриву переміщення.

1. Формалізація задачі. За описаної ситуації в шарі виникне антиплоский напружено-деформований стан, що описується одним ненульовим переміщенням $w(x, y)$ і двома ненульовими компонентами тензора напружень $\tau_{xz}(x, y)$ та $\tau_{yz}(x, y)$, яким у пружній частині тіла відповідає аналітична функція $\tau(\zeta) = \tau_{xz}(x, y) + i\tau_{yz}(x, y)$ комплексної змінної $\zeta = x + iy$. Внаслідок силової й геометричної симетрії задачі можна обмежитися розглядом напружено-деформованого стану тільки у півсмугі $0 < x < \infty$, $0 < y < h$. Ця півсмука з математичним розрізом уздовж відрізка, що збігається з косою пластичною смугою, називатимемо областю **D**.

У зв'язку з затримкою текучості з верхнім k_1 і нижнім k_0 порогами пластичні деформації виникають за виконання напруженнями в тілі умови

$$\tau_{xz}^2(x, y) + \tau_{yz}^2(x, y) = k_1^2 \quad (1)$$

та розвиваються вздовж площинки з нормаллю $\mathbf{n}$, коли

$$\tau_{nz} = k_0. \quad (2)$$

Сформулюємо в області **D** крайову задачу для функції $\tau(\zeta)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \tau(\zeta) &= 0 \quad (\zeta = x, \quad 0 < x < +\infty); \\ \operatorname{Im} \tau(\zeta) &= 0 \quad (\zeta = iy, \quad b - d_1 < x < b); \\ \tau_{yz}(0, y) &= k_0 \quad (b - d_1 < y < b); \\ \tau_{nz}(\zeta) &= k_0 \quad (\zeta = b + \rho e^{i(\alpha \pm 0)}, \quad 0 < \rho < d_2); \\ \operatorname{Re} \tau(\zeta) &= 0 \quad (\zeta = iy, \quad b < y < h); \\ \operatorname{Im} \tau(\zeta) &= 0 \quad (\zeta = x + ih, \quad 0 < x < +\infty); \\ \operatorname{Im} \frac{1}{\mu} \int_{x_0}^{x_0 + ih} \tau(\zeta) d\zeta &= w_0, \end{aligned} \quad (3)$$

де d_1, d_2 - довжини вертикальної та косої пластичних смуг; $\mathbf{n}$ - вектор одиничної нормалі до косої смуги; x_0 - довільне додатне дійсне число; μ - модуль зсуву матеріалу тіла, інтегрування від точки $\zeta = x_0$ до точки $\zeta = x_0 + ih$ виконується вздовж довільної лінії з області $\mathbf{D}$.

Внаслідок умови (1) розв'язок задачі (3) додатково повинен задовольняти умову $|\tau(\zeta)| < k_1$ в усіх точках області $\mathbf{D}$.

Варто дослідити змішану нелінійну крайову задачу (3), знайти умову існування її розв'язку (залежності d_1, d_2 від w_0) та знайти його.

2. Аналіз задачі (3). Можна довести, що функція $\tau = \tau(\zeta)$ є в області $\mathbf{D}$ однолистою і внаслідок умов (3) конформно відображає її на область $\mathbf{G}$ комплексної площини τ (рис. 2). Отже, дослідження й розв'язування задачі (3) зводиться до з'ясування умов існування зображеного на рис. 2. відображення та знаходження його.

Дамо необхідні пояснення до рис. 2. Точки D і F в області $\mathbf{D}$ означають кінці пластичних смуг, тому їхні координати наперед невідомі. Точки A, B, D, G в області $\mathbf{G}$ характеризують відповідно напруження на нескінченності, посередині верхньої грані шару, на кінці косої смуги, посередині нижньої грані шару і є також невідомими апіорі. Кут чотирикутника $\mathbf{G}$ у точці C дорівнює α , а його сторона EF розташована на відстані k_0 від початку координат. Фігура $\mathbf{G}$ не повинна виходити за межі круга радіуса k_1 з центром у початку координат.

Аналіз області $\mathbf{G}$ дає змогу зробити висновок про зв'язок величини

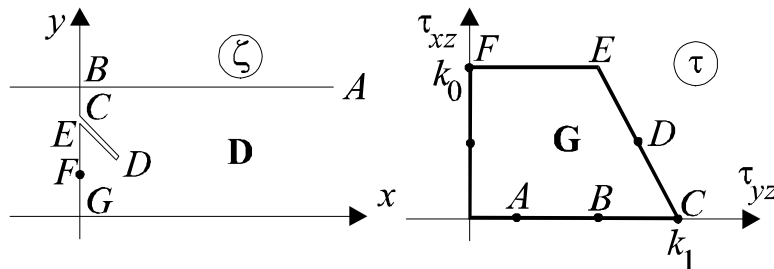


Рис. 2. Области конформного відображення, які виконує функція $\tau = \tau(\zeta)$

затримки текучості з кутом нахилу косої смуги до включення. Найменше значення затримки, за якої, крім відшаровування включення, виникне лише бічна смуга, дорівнює $k_1 = \sqrt{2}k_0$. Тоді вона розвиватиметься перпендикулярно до включення. Якщо більша затримка, то коса смуга розвивається під кутом

$$\alpha = \arcsin \frac{k_0}{k_1}. \quad (4)$$

Оскільки у фігурах **D** і **G** тільки дві пари точок **C** і **E** фіксовані, то згідно з теоремою Рімана про існування конформного відображення [5] існуватиме однопараметрична множина відображень **D** на **G**. Вибором параметра, наприклад, координатою точки **F** у площині ζ (довжиною смуги на межі включення-матриця), можна забезпечити виконання останньої з умов (3) – заданого зміщення граней шару.

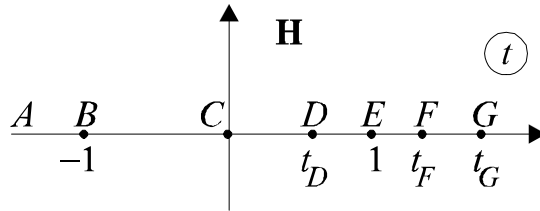


Рис. 3. Допоміжна комплексна площина

Фігури **D** і **G** прямокутні багатокутники, а відтак потрібне конформне відображення можна побудувати з допомогою перетворення Крістофеля-Шварца [6]. Уведемо для цього допоміжну комплексну площину t і відобразимо почергово її верхню половину на області **D** і **G**. Тоді пара функцій

$$\zeta = \zeta(t), \quad \tau = \tau(t) \quad (t \in H, \quad H = \{t | \operatorname{Im} t > 0\})$$

визначатиме відображення $\tau(\zeta)$ у параметричному вигляді [7].

Прийнявши для визначеності у площині t координати відомих априорі точок **C**, **E** і **F** відповідно такими, що дорівнюють 0, 1 і t_F (рис. 3), отримуємо для функції $\tau = \tau(t)$

$$\tau(t) = k_0 + ik_0 \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\int_0^t |F_\tau(\eta)| d\eta}, \quad (5)$$

де $F_\tau(t) = t^{\frac{\alpha}{\pi}-1} (t-1)^{-\frac{\alpha}{\pi}} (t-t_F)^{-\frac{1}{2}} (t-t_0)^{-\frac{1}{2}}$; t_F – параметр, що може набувати довільного дійсного значення; t_0 – від’ємне дійсне число, яке знайдемо з умови існування відображення $\tau(t)$. Під $(t-q)^p$ (q – дійсне число) тут і далі розумітимемо аналітичну в області **H** функцію, що набуває дійсних додатних значень, якщо $t-q$ додатне дійсне число.

Величину t_0 , що входить у формулу (5), знайдемо, забезпечивши потрібні метричні співвідношення у фігурі $\mathbf{G}$. Вимагаючи, щоб відношення сторін CE і EF дорівнювало $k_0 / (k_1 \sin \alpha - k_0 \cos \alpha)$, отримуємо рівняння для обчислення t_0

$$(k_1 \sin \alpha - k_0 \cos \alpha) \int_0^1 |F_\tau(\eta)| d\eta = k_0 \int_{t_0}^0 |F_\tau(\eta)| d\eta. \quad (6)$$

Для вибраного t_F розв'язок рівняння (6) можна отримати за допомогою такого рекурсивного алгоритму:

$$t_0^{(j+1)} = t_0^{(j)} \left(1 + \frac{k_0 EC^{(j)} - (k_1 \sin \alpha - k_0 \cos \alpha) EF^{(j)}}{k_0 (EC^{(j)} + EF^{(j)})} \right) \quad (j = 0, 1, \dots), \quad (7)$$

де $t_0^{(0)} = -1$, $EC^{(j)} = \int_0^1 |F_\tau^{(j)}(\eta)| d\eta$, $EF^{(j)} = \int_1^{t_F^{(j)}} |F_\tau^{(j)}(\eta)| d\eta$; функції $F_\tau^{(j)}(\eta)$

відрізняються від $F_\tau(\eta)$ тільки заміною параметра t_0 на $t_0^{(j)}$.

Функцію $\zeta = \zeta(t)$, яка однозначно визначається, коли прообрази трьох точок межі області $\mathbf{D}$ вибрати фіксованими, також визначатимемо за допомогою інтеграла Крістофеля-Шварца. Координати двох точок, а саме C , E вже знайдені під час побудови відображення $\tau = \tau(t)$. Тому доволіно можна вибирати тільки одну точку. Зафіксуємо в площині t точку B , вважаючи, що її афікс дорівнює -1 . Тоді

$$\zeta(t) = ih - \frac{ib}{\int_1^{t_G} |F_\zeta(\eta)| d\eta} \int_0^t F_\zeta(\eta) d\eta, \quad (8)$$

де $F_\zeta(t) = (t+1)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{\alpha}{\pi} - \frac{1}{2}} (t-t_D)(t-t_G)^{-\frac{1}{2}}$. Невідомі дійсні параметри t_D , t_G , що задовольняють умови $0 < t_D < 1$, $t_G > t_F$, визначають на підставі метричних співвідношень у фігурі $\mathbf{D}$: рівності берегів CD і DE розрізу

$$\int_0^{t_D} |F_\zeta(\eta)| d\eta = \int_{t_D}^1 |F_\zeta(\eta)| d\eta \quad (9)$$

та відомого відношення довжини включення до висоти шару

$$b \int_{-1}^0 |F_\zeta(\eta)| d\eta = (h-b) \int_1^{t_G^{(j)}} |F_\zeta(\eta)| d\eta. \quad (10)$$

Знайдемо шукані параметри, розв'язавши систему рівняння (9), (10) методом послідовних наближень за допомогою схеми:

$$\mathbf{t}_D^{(j+1)} = \frac{2\mathbf{CD}^{(j)}}{\mathbf{CD}^{(j)} + \mathbf{DE}^{(j)}} \mathbf{t}_D^{(j)}, \quad \mathbf{t}_G^{(j+1)} = \frac{(\mathbf{BC}^{(j)} + \mathbf{EG}^{(j)})\mathbf{b} - h\mathbf{EG}^{(j)}}{(\mathbf{BC}^{(j)} + \mathbf{EG}^{(j)})\mathbf{b} + h\mathbf{EG}^{(j)}} \mathbf{t}_G^{(j)}, \quad (11)$$

де

$$\mathbf{CD}^{(j)} = \int_0^{\mathbf{t}_D^{(j)}} |\mathbf{F}_\zeta^{(j)}(\eta)| d\eta, \quad \mathbf{DE}^{(j)} = \int_{\mathbf{t}_D^{(j)}}^1 |\mathbf{F}_\zeta^{(j)}(\eta)| d\eta,$$

$$\mathbf{BC}^{(j)} = \int_{-1}^0 |\mathbf{F}_\zeta^{(j)}(\eta)| d\eta, \quad \mathbf{EG}^{(j)} = \int_1^{\mathbf{t}_G^{(j)}} |\mathbf{F}_\zeta^{(j)}(\eta)| d\eta,$$

а функції $\mathbf{F}_\zeta^{(j)}(\eta)$ відрізняються від $\mathbf{F}_\zeta(\eta)$ лише заміною параметрів $\mathbf{t}_D$ і $\mathbf{t}_G$ на $\mathbf{t}_D^{(j)}$ і $\mathbf{t}_G^{(j)}$.

3. Дослідження розвитку пластичних смуг. Довжину $\mathbf{d}_1$ смуги на межі включення-матриці і косої смуги $\mathbf{d}_2$ просто визначають із виразу функції $\zeta = \zeta(\mathbf{t})$:

$$\mathbf{d}_1 = \mathbf{b} - |\zeta(\mathbf{t}_F)|, \quad \mathbf{d}_1 = |\zeta(\mathbf{t}_D) - \zeta(0)|,$$

або на підставі формули (8), яка дає змогу запропонувати залежності

$$\mathbf{d}_1 = \mathbf{b} \frac{\int_0^{\mathbf{t}_F} |\mathbf{F}_\zeta(\eta)| d\eta}{\int_1^{\mathbf{t}_G} |\mathbf{F}_\zeta(\eta)| d\eta}, \quad \mathbf{d}_2 = \mathbf{b} \frac{\int_{\mathbf{t}_G}^{\mathbf{t}_D} |\mathbf{F}_\zeta(\eta)| d\eta}{\int_1^0 |\mathbf{F}_\zeta(\eta)| d\eta}. \quad (12)$$

Обчислимо тепер тангенціальне переміщення $\mathbf{g}_1$ початкової точки смуги на межі включення-середовище і $\mathbf{g}_2$ – відносне зміщення початкових точок на берегах косої смуги. З формул (5), (8) та останньої формули (3) отримуємо

$$\mathbf{g}_1 = K \int_0^1 \mathbf{f}(t) dt, \quad \mathbf{g}_2 = K \int_1^{\mathbf{t}_F} \mathbf{f}(t) dt,$$

$$K = \frac{k_0(1 - \cos \alpha)}{\mu \sin \alpha \int_0^1 |\mathbf{F}_\tau(\eta)| d\eta}, \quad \mathbf{f}(t) = (t + 1)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{\alpha}{\pi} - \frac{1}{2}} |t - \mathbf{t}_D| |t - \mathbf{t}_G|^{-\frac{1}{2}} \left| \int_0^t \mathbf{F}_\tau(\eta) d\eta \right|.$$

Подібним способом визначають і спричинене пружною деформацією переміщення верхньої грані шару стосовно включення g_0

$$g_0 = K \int_{-1}^0 f(t) dt.$$

Відносне зміщення граней стосовно серединної площини шару дорівнює сумі трьох переміщень

$$w_0 = g_0 + g_1 + g_2. \quad (13)$$

Формули (5), (8) та (12), (13) дають повний розв'язок сформульованої задачі та можливість досліджувати розвиток пластичних смуг під час квазістатичного сталого зміщення граней шару.

Залежності довжин пластичних смуг від переміщення граней шару для

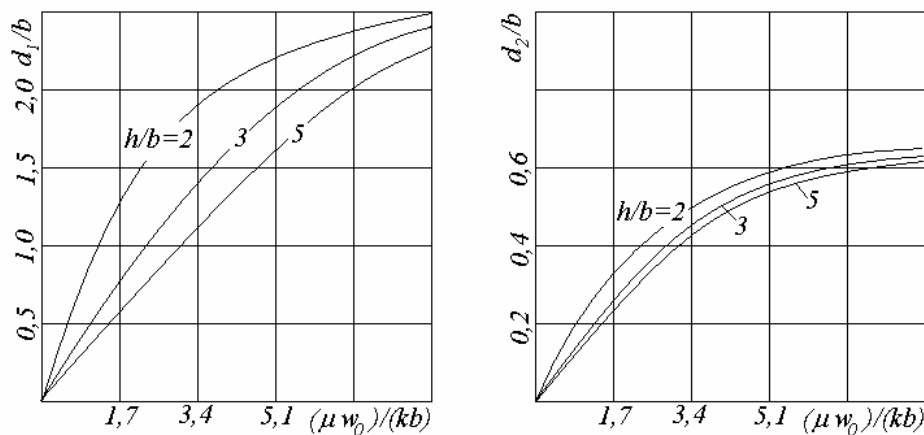


Рис. 4.

випадку $k_1 = \sqrt{2}k_0$, коли коса смуга розвивається перпендикулярно до включення, зображені на рис. 4. Доки смуги малі щодо розміру включення спостерігається суттєвий вплив його висоти на величину смуг. Коли довжина косої смуги перевищує розмір включення, цей вплив ослаблюється. Довжина вертикальних смуг, вздовж яких відбувається відшарування включення, на початковій стадії свого розвитку росте пропорційно з переміщенням граней, але згодом, охопивши приблизно 2/3 поверхні включення, їхній ріст практично зупиняється. Аналогічна картина простежується в ідеально пружно-пластичному тілі для просторового розподілу пластичних деформацій [8].

1. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел. – М., 1954.
2. *Пресняков Л.А.* Локализация пластической деформации // М., 1983.
3. *Криштал М.М.* Неустойчивость и мезоскопическая неоднородность пластической деформации (аналитический обзор) Часть 1. Феноменология зуба текучести и прерывистой текучести // Физическая мезомеханика (ФММ). – 2004. – Т. 7. – Вып. 5. – С. 5-29.
4. *Коттрелл А.Х.* Прерывистая текучесть // Структура и механические свойства металлов. – М., 1967.
5. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М., 1987.
6. *Иванов В.И., Попов В.Ю.* Конформные отображения и их приложения. – М., 2002.
7. *Heorhiy Sulym, Marta Kryweń* Odseparowywanie plastyczne cienkiej sztywnej inkluzji w ośrodku z dużym zatrzymaniem płynięcia pod czas antypłaskiego stanu odkształcenia // Materiały III Symp. Mechaniki Zniszczenia Materiałów i Konstrukcji (Augustów, 1-4 czerwca 2005), Białystok, 2005. S. 397-400.
8. *Кривень В.А.* Двоперіодична пружнопластична задача поздовжнього зсуву тіла з жорсткими ромбічними включеннями // Математичні методи і фіз.- мех. поля. – 2001. – Т. 44, № 1. – С. 109-113.

**КОНТАКТНАЯ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СЛОЯ С
ТОНКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ ПРИ НАЛИЧИИ ЗАДЕРЖКИ ТЕКУЧЕСТИ**

Георгий СУЛИМ, Марта КРЫВЕНЬ

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1 79000 Львов Украина*

Исследовано развитие пластических деформаций в окрестности жесткого тонкого включения, расположенного в слое перпендикулярно и симметрично его граням. Материал слоя упруго-пластический со значительным перепадом предела текучести. Деформация обусловлена тангенциальным смещением граней слоя. Найдено соотношение между верхним и нижним порогами текучести, при котором включение отслаивается и развиваются по две косые полосы у вершин включения. Исследовано развитие пластических полос при поступательном квазистатическом смещении граней слоя.

Ключевые слова: контактная задача, включения, текучесть.

**CONTACT ELASTO-PLASTIC PROBLEM FOR A LAYER WITH A THIN
INCLUSION UNDER CONDITION OF DELAYED YIELD**

Georgij SULYM, Marta KRYVEN

*Ivan Franco National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine*

Propagation of plastic deformations in the neighborhood of a rigid thin inclusion, located centrally inside a layer perpendicularly to it's surface, was investigated. The layer's body is elastoplastic with a significant delayed yield. Deformation is induced by tangential shear force acting on the layer's surface. Relation between upper and lower yield points was found, reaching which will result in plastic separation of the inclusion and development of two plastic strips starting from it's vertexes. Propagation of plastic strips during quasistatic shear on the layer's surface was studied.

Key words: Contact problem, inclusion, yield

Стаття надійшла до редколегії 26.01.2010

Прийнята до друку 22.12.2010

УДК 539.3

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНИХ ПЛАСТИН З РОЗРІЗОМ АБО АБСОЛЮТНО ЖОРСТКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Ігор КУЗЬ¹, Імре ТІМАР²

¹Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

²Університет Панонії, вул. Еджем, 10 8200 Веспрем, Угорщина

За допомогою варіаційно-різницевого методу розв'язуються плоскі задачі деформаційної теорії пластичності за активного навантаження про деформування пластини з розрізом або з таким самим абсолютно жорстким включенням.

Ключові слова: варіаційно-різницевий метод, незв'язна область, деформаційна теорія пластичності, пластина, розріз, абсолютно жорстке включення.

Дослідження напружено-деформованого стану пластин з розрізами або з тонкими включеннями – необхідний етап розрахунку їхньої міцності та надійності. Оскільки такі елементи конструкцій займають незв'язну область [1] і містять концентратори напружень, то можливість застосування аналітичних методів розв'язування відповідних крайових задач значно обмежена.

За допомогою числового методу ми розв'язали плоскі задачі деформаційної теорії пластичності про деформування пластин з розрізом або з таким самим абсолютно жорстким включенням.

Формулювання задачі. Розглядають плоскі задачі деформаційної теорії пластичності (теорії малих пружно-пластичних деформацій Ілюшина) за активного навантаження в областях V з межею Σ (рис.1), які моделюють напружено-деформований стан у пластині. З математичного погляду вони полягають у розв'язуванні рівнянь рівноваги

$$(C_{ijkl}u_{k,l})_{,j} + X_i = 0 \quad (1)$$

при використанні мішаних крайових умов на її межі $\Sigma (\Sigma_u \cup \Sigma_\sigma = \Sigma)$

$$u_i \Big|_{\Sigma_u} = u_i^0, \quad C_{ijkl}u_{k,l}n_j \Big|_{\Sigma_\sigma} = S_i^0. \quad (2)$$

Тут C_{ijkl} – компоненти тензора модулів пружності; u_i, X_i, S_i^0, n_j – компоненти векторів переміщень, об'ємних і поверхневих сил, а також зовнішньої нормалі до поверхні Σ_σ , відповідно; $u_{i,j} \equiv \partial u_i / \partial x_j$. За однаковими індексами, які трапляються в одному виразі двічі, відбувається підсумовування від одиниці до двох.

У випадку плоскої деформації

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_x(x, y), \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_y(x, y), \quad \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_z \equiv 0. \quad (3)$$

Щоб отримати задачу деформаційної теорії пластичності для початково ізотропного матеріалу, потрібно в (1), (2) прийняти

$$\mathbf{C}_{ijkl}(\varepsilon_{\mathbf{u}}) = \lambda(\varepsilon_{\mathbf{u}})\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\varepsilon_{\mathbf{u}})(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}),$$

$$\mu(\varepsilon_{\mathbf{u}}) = \mu(1 - \omega(\varepsilon_{\mathbf{u}})), \quad \lambda(\varepsilon_{\mathbf{u}}) = \mathbf{K} - \frac{2}{3}\mu(\varepsilon_{\mathbf{u}}), \quad (4)$$

де $\varepsilon_{\mathbf{u}}$ – інтенсивність тензора деформацій

$(\varepsilon_{\mathbf{u}} = \sqrt{\mathbf{e}_{ij}\mathbf{e}_{ij}}, \quad \mathbf{e}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij})$; $\mathbf{K}$ – модуль об'ємного стиску; $\omega(\varepsilon_{\mathbf{u}})$ – функція пластичності Ілюшина [2].

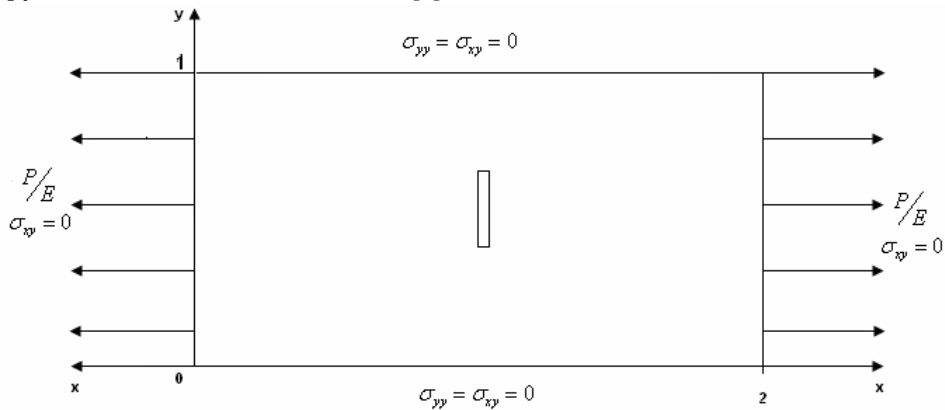


Рис.1. Пластина з розрізом (абсолютно жорстким включенням) і крайовими умовами на зовнішній межі

Для матеріалу з лінійним зміцненням $\omega(\varepsilon_{\mathbf{u}})$ набуває вигляду

$$\omega(\varepsilon_{\mathbf{u}}) = \begin{cases} (1 - \gamma) \frac{\varepsilon_{\mathbf{u}} - \varepsilon_s}{\varepsilon_{\mathbf{u}}} & \text{при } \varepsilon_{\mathbf{u}} > \varepsilon_s \\ 0 & \text{при } \varepsilon_{\mathbf{u}} \leq \varepsilon_s. \end{cases} \quad (5)$$

Тут ε_s – межа плинності; $\gamma = \mu'/\mu$ (μ' – модуль зміцнення).

Метод розв'язування задачі. Для числового розв'язування задачі (1) - (5) зручно використовувати її варіаційне формулювання [3], яке полягає у мінімізації лагранжіана

$$\mathbf{L} = \int_V \mathbf{w} dV - \int_V \mathbf{X}_i \mathbf{u}_i dV - \int_{\Sigma_\sigma} \mathbf{S}_i^0 \mathbf{u}_i d\Sigma, \quad (6)$$

де $W = \frac{1}{2} C_{ijkl}(\varepsilon_u) u_{i,j} u_{k,l}$ - питома енергія пружно-пластичної деформації.

Запишемо лагранжіан (6) у канонічній області V_0 , якою може бути прямокутник або область, складена з них. Для цього використаємо дискретне взаємно-однозначне відображення сітки в області V на рівномірну прямокутну сітку області V_0 (рис.2)

$$x_i = x_i(\beta^1, \beta^2) \quad (i = 1, 2). \quad (7)$$

Тоді $J = \det(A_i^j)$, $g_{ij} = A_i^m A_j^m$, де $A_i^j = \partial x_i / \partial \beta^j$ - матриця Якобі цього відображення. За допомогою (7) запишемо питому енергію деформації W у координатах β

$$W = \frac{1}{2} C^{ijkl} u_{i,j} u_{k,l} = \frac{1}{2} C^{ijkl}(\beta) B_j^m B_l^n u_{i|m} u_{k|n} = \frac{1}{2} D^{imkn}(\beta) u_{i|m} u_{k|n},$$

де $u_{i|m} \equiv \partial u_i / \partial \beta^m$, $B_j^m = \partial \beta^m / \partial x_j$, $D^{imkn} = C^{ijkl} B_j^m B_l^n$.

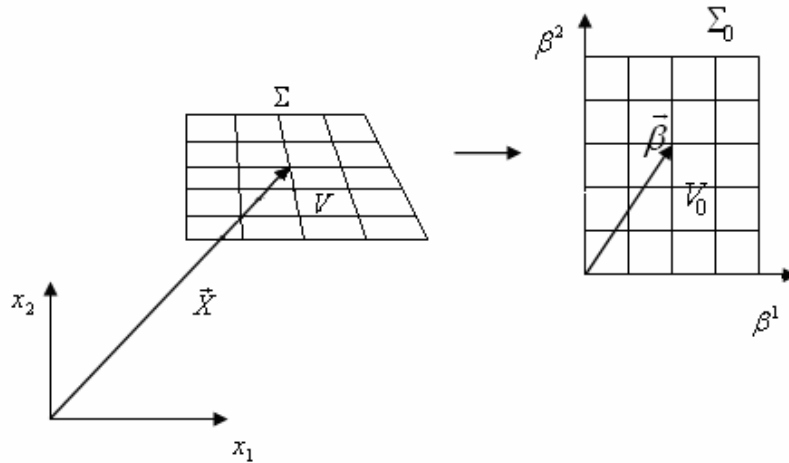


Рис.2. Відображення сітки в області V на рівномірну прямокутну сітку області V_0

Об'ємні та поверхневі інтеграли перетворюються за формулами

$$\int_V \vec{X} \vec{u} dv = \int_{V_0} J \vec{X} \vec{u} dv, \quad \int_{\Sigma} \vec{S}^0 \vec{u} d\Sigma = \int_{\Sigma_0} q(\beta) \vec{S}^0 \vec{u} d\Sigma, \quad (8)$$

де

$$\mathbf{q}(\beta) = \begin{cases} \sqrt{g_{11}}, & \beta^2 = \{0, I_2\}, \\ \sqrt{g_{22}}, & \beta^1 = \{0, I_1\}. \end{cases}$$

Отже, лагранжіан у прямокутнику V_0 набуде вигляду

$$L_0 = \frac{1}{2} \int_{V_0} J D^{imkn} u_{i|m} u_{k|n} dv - \int_{V_0} J X^{\mathbf{r}} u d\mathbf{v} - \int_{\Sigma_0} \mathbf{q}(\beta) S^{\mathbf{r}}_0 u d\Sigma. \quad (9)$$

Замінивши в (9) усі континуальні функції сітковими, інтеграли – скінченими сумами, похідні – різницеви похідними, отримаємо різницевий аналог лагранжіана L_0^h .

Для визначення стаціонарної точки L_0^h у випадку деформаційної теорії пластичності отримаємо системи нелінійних алгебричних рівнянь

$$\mathbf{P}^{\mathbf{r}}(\mathbf{u}) + \mathbf{F} = 0,$$

які розв'язують ітераційними методами [4].

Описаний варіаційно-різницевий метод у неоднорозв'язних областях реалізований у вигляді пакета програм на мові FORTRAN з підпрограмою побудови сіток на DELPHI.

Результати числових досліджень. На рис.1 зображено геометрію пластини з крайовими умовами. Межа розрізу або вільна від навантажень ($\sigma_{nn} = 0, \sigma_{n\tau} = 0$), або закріплена ($u_\tau = 0, u_n = 0$), що моделює наявність тонкого абсолютно жорсткого включення. До правого та лівого краю пластини прикладене рівномірне горизонтальне розтягувальне навантаження $P/E = 0,45$.

Усі розрахунки проводили у безрозмірних величинах. Модуль пружності $E = 1$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$, межа плинності $\sigma_s = 0,5$, параметр зміцнення $\gamma = 0,2$. Отримані діаграми розподілу інтенсивності тензора напружень σ_u/E у пластинах з розрізом або з абсолютно жорстким включенням зображені на рис.3, 4, відповідно.

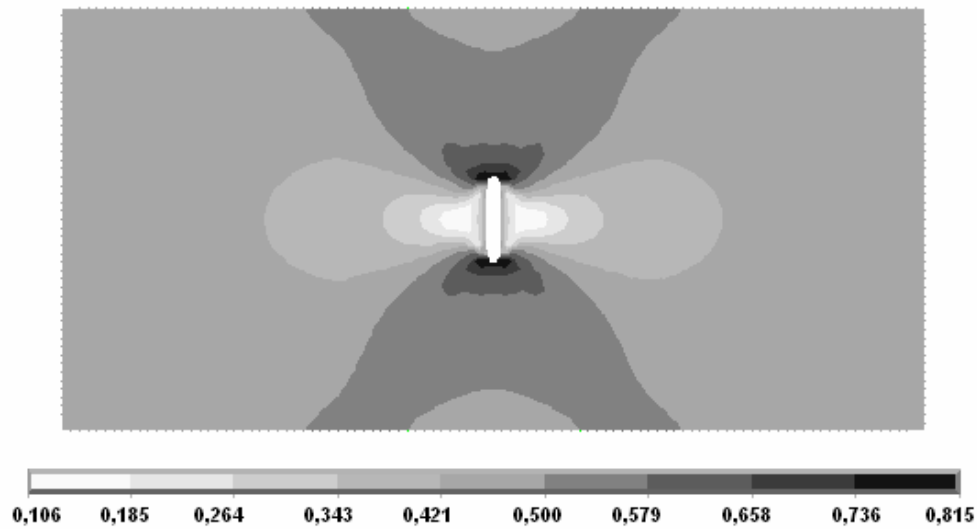


Рис.3. Діаграма розподілу інтенсивності тензора напружень σ_u/E у пластині з розрізом

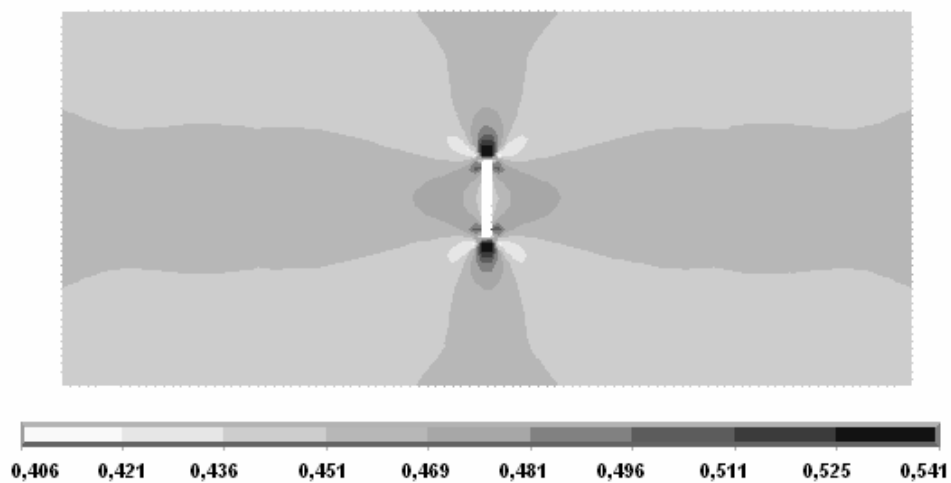


Рис.4. Діаграма розподілу інтенсивності тензора напружень σ_u/E у пластині з тонким абсолютно жорстким включенням

На рис. 3 також показано, як буде деформуватися межа розрізу. За допомогою діаграм розподілу інтенсивності тензора напружень σ_u/E можна визначити області виникнення та розвитку пластичних деформацій. Згідно з умовами плинності Губера-Мізеса пластичне деформування починається

тоді, коли інтенсивність тензора напружень σ_{II} досягає межі плинності σ_s (у нас $\sigma_s = 0,5$).

Висновки. Як видно з рис.3, області пластичних деформацій у пластині з розрізом зароджуються навколо верхнього і нижнього торців розрізу та розповсюджуються вертикально догори і вниз широкою зоною. Як видно з рис.4, пластичні деформації у пластинці з таким же абсолютно жорстким включенням виникають на деякій відстані від верхнього і нижнього торців включення, розповсюджуються так само вертикально догори і вниз, але значно вужчою зоною. Форма областей з однаковою величиною інтенсивності напружень у пластині з розрізом (включенням) є, очевидно, симетричною стосовно вертикальної та горизонтальної осей симетрії розрізу (включення). Пластичні деформації у пластині з розрізом виникають при навантаженні на 35% меншому, ніж у пластині з таким самим включенням.

Отже, отримані поля напружень дають змогу виявити області їхньої найбільшої концентрації та за відповідним критерієм руйнування оцінити міцність пластин з розрізом або з тонким абсолютно жорстким включенням.

-
1. Кузь І. С. Дослідження пружно-пластичного з'єднувального елемента конструкцій під дією нерівномірних навантажень / Кузь І. С. // В зб. "Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій". Вип. 8. – Львів, 2009.
 2. Ильющин А. А. Пластичность / Ильющин А. А. – М.;Л., 1948.
 3. Победря Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. / Победря Б. Е. – М., 1981.
 4. Кузь І. С. О прикладных итерационных методах / Шешенин С. В., Кузь І. С. // Вычислительная механика деформируемого твердого тела. – 1990. – Вып. 1. – С. 63-75.

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ПЛАСТИН С РАЗРЕЗОМ ИЛИ АБСОЛЮТНО ЖЕСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Игорь КУЗЬ¹, Имре ТИМАР²

¹Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1 79000, Украина

²Университет Панонии,
ул. Еджете, 10 8200 Веспрем, Венгрия

С помощью вариационно-разностного метода построено решение плоских задач деформационной теории пластичности при активной нагрузке о деформировании пластины с разрезом или с такого же размера абсолютно жестким включением.

Ключевые слова: вариационно-разностный метод, деформационная теория пластичности, пластина, разрез, абсолютно жесткое включение.

STRESS STRAIN STATE OF ELASTIC PLASTIC PLATES WITH CRACK OR WITH THE SAME THIN RIGID BODY

Ihor Kuz¹, Imre Timar²

¹Ivan Franko National University of L'viv,
Universytetska Str., 1 79000 L'viv, Ukraine

²University of Pannonia,
Egyetem Str., 10 8200 Veszprem, Hungary

Variation difference method of building finite difference schemes is used in unconnected domain. Using this method for solving 2D plasticity problems stress states in plate with crack or with the same thin rigid body is investigated.

Key words: variation difference method, plasticity problems, thin rigid body.

Стаття надійшла до редколегії 24.03.2010

Прийнята до друку 22.12.2010

УДК 539.3

ЗГИН ПЛАСТИНИ РЕЙССНЕРА З ПЕРІОДИЧНОЮ СИСТЕМОЮ НАСКРІЗНИХ КОЛІНЕАРНИХ ТРІЩИН З УРАХУВАННЯМ ШИРИНИ ОБЛАСТІ КОНТАКТУ ЇХНІХ БЕРЕГІВ

Ігор ЯЦИК

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна*

Розглянуто задачу згину безмежної ізотропної пластини рівномірно розподіленими згинальними моментами на нескінченності, яка ослаблена періодичною системою наскрізних співвісних тріщин, береги яких вільні від зовнішнього навантаження. Припускається, що береги тріщин контактують поблизу верхньої основи пластини вздовж усієї їхньої довжини, причому зона контакту має сталу для кожної тріщини ширину. Внаслідок контакту берегів тріщин розв'язок задачі подано як суперпозицію розв'язків двох задач: плоскої задачі та задачі згину пластин з використанням теорії Рейсснера. Використовуючи методи теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів, отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь, яку розв'язано чисельно за допомогою методу механічних квадратур. Наведено результати чисельного аналізу задачі.

Ключові слова: плоска задача теорії пружності, теорія згину пластин за Рейсснером, ізотропна пластина, періодична система наскрізних колінеарних тріщин, ширина області контакту, комплексні потенціали, контактне зусилля, коефіцієнти інтенсивності зусиль і моментів.

Вступ. Широке використання у техніці і будівництві елементів конструкцій у формі пластин вимагає розробки методів оцінки їхньої міцності в умовах дефектності матеріалу внаслідок існуючих тріщин, які є потужними концентраторами напружень і, отже, значно зменшують величину допустимих навантажень. Тріщини виникають також у процесі експлуатації структурних елементів, вони розвиваються і є основною причиною їхнього руйнування.

Формулювання задач згину пластин з тріщинами без урахування контакту їхніх берегів і методи їхнього розв'язування добре відомі [1–3]. Оскільки не враховували можливість берегів контактувати, то це зумовило кінематичне протиріччя – накладання одного берега на інший в тих місцях, де нормальні напруження від'ємні. З використанням класичної теорії згину тонких пластин в останні роки [4–7] були отримані розв'язки багатьох задач згину пластин з тріщинами з урахуванням контакту берегів тріщини вздовж лінії на одній з основ пластини, а в працях [8, 9] розв'язані деякі задачі в припущенні про контакт берегів тріщини за всією довжиною вздовж зони постійної ширини. Праці [10–12] використовують з цією метою вже й уточнені теорії згину пластин.

Наша мета – дослідити аналіз впливу періодичної системи тріщин у пластині Рейсснера за її згину у випадку, коли береги тріщин взаємодіють один з одним без тертя вздовж смуги постійної ширини на її напружено-деформований стан. Розв'язок шукають у вигляді суперпозиції розв'язків двох задач – задачі про плоский напружений стан і задачі згину пластини за рівняннями Рейсснера. Використовуючи метод функції комплексної змінної та комплексні потенціали, отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь, яку розв'язано числовим методом механічних квадратур. Наведено результати числового аналізу контактного зусилля між берегами тріщин і коефіцієнтів інтенсивності моментів. В окремих випадках були отримані вже відомі в літературних працях дані.

Формулювання задачі. Нехай маємо ізотропну пластину постійної товщини $2h$ з періодичною системою наскрізних тріщин довжини $2l$, які розташовані на спільній прямій, де відстань між центрами сусідніх тріщин позначимо через $2d$ (див. рис. 1). Дослідимо задачу про її згин рівномірно розподіленими згинальними моментами на нескінченності.

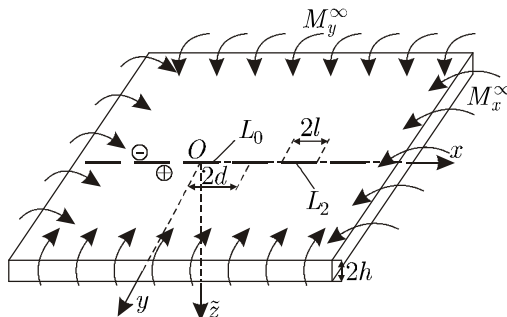


Рис. 1. Схема навантаження пластини з тріщинами

координат O у центрі однієї з тріщин, спрямувавши вісь Ox уздовж тріщин. Позначимо контактне зусилля між берегами k -ї тріщини через N_k ($N_k > 0$), розподілені згинальні моменти на нескінченності – через M_x^∞ і M_y^∞ , а відрізки дійсної осі $[-l + 2dk, l + 2dk]$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) – відповідно, через L_k і $L = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} L_k$.

Надалі використовуватимемо такі позначення: μ – модуль зсуву; E – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона; $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$.

Унаслідок контакту берегів тріщин розв'язок задачі ділимо на дві частини: плоску задачу теорії пружності і задачу згину пластини з використанням теорії Рейсснера.

На берегах k -ї тріщини, згідно з формулюванням задачі, маємо такі крайові умови:

Припустимо, що під впливом зовнішнього навантаження береги тріщин приходять у гладкий контакт за всією їхньою довжиною уздовж двовимірної області постійної ширини h_1 поблизу верхньої основи пластини, причому до її деформування береги тріщин були вільними від зовнішнього навантаження.

Виберемо декартову систему координат $Oxyz$ з координатними осями Ox і Oy у серединній площині пластини і початком

$$\sigma_{yy}^+ = \sigma_{yy}^- = -N_k/(2h), \quad \sigma_{xy}^+ = \sigma_{xy}^- = 0, \quad x \in L_k, \quad (1)$$

$$M_y^+ = M_y^- = M_k, \quad Q_y^+ = Q_y^- = 0, \quad H_{xy}^+ = H_{xy}^- = 0, \quad x \in L_k, \quad (2)$$

$$M_k = \beta h N_k, \quad \partial_x [v_\Pi] - \alpha h \partial_x [\varphi_y] = 0, \quad x \in L_k, \quad (3)$$

де σ_{xy} , σ_{yy} і v_Π – відповідно, компоненти тензора напружень і проекція вектора переміщення точки на вісь Oy у плоскій задачі; φ_y – усереднений за товщиною пластини кут повороту нормалі до серединної площини пластини в задачі згину [13]; M_y – згинальний момент; Q_y і H_{xy} – поперечна сила і крутний момент, відповідно; $\partial_x = \partial/\partial x$, $[f] = f^+ - f^-$; значками «+» і «-» позначені граничні значення функції при прямуванні точки площини до тріщин коли $y \rightarrow \pm 0$; $\alpha = 0.5\{1 + (1 - \gamma)^2\}$, $\beta = 1 - \gamma/3$ і $\gamma = h_1/h$ – наведена ширина області контакту [8].

Потрібно знайти напружено-деформований стан пластини.

Побудова розв'язку задачі. При визначенні плоского напруженого стану введемо комплексні потенціали $\Phi_\Pi(z)$ і $\Omega_\Pi(z)$, які прямують до нуля на нескінченності, а для визначення напружено-деформованого стану пластини правильні залежності [14]

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} - i\sigma_{xy} &= \Phi_\Pi(z) + \Omega_\Pi(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'_\Pi(z)}, \\ 2\mu\partial_x(u_\Pi + iv_\Pi) &= \kappa\Phi_\Pi(z) - \Omega_\Pi(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'_\Pi(z)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Комплексний потенціал $\Phi_\Pi(z)$ візьмемо у вигляді [15]

$$\Phi_\Pi(z) = 1/(4di) \int_{-l}^l \operatorname{ctg}\left\{\pi(t-z)/(2d)\right\} \mathfrak{U}'(t) dt, \quad (5)$$

де $\mathfrak{U}'(x) = 2\mu\partial_x[u_\Pi + iv_\Pi]/(1 + \kappa) = \mathfrak{U}'_1(x) + i\mathfrak{U}'_2(x)$, $x \in L$.

Врахувавши (4), з крайових умов (1) отримаємо задачу лінійного спряження, розв'язавши яку знайдемо, що $\Phi_\Pi(z) = \Omega_\Pi(z)$, а також, врахувавши (5), одержимо залежності

$$-N_k/(2h) = 1/(2d) \int_{-l}^l \operatorname{ctg}\left\{\pi(t-x)/(2d)\right\} \mathfrak{U}'_2(t) dt, \quad x \in L_k, \quad (6)$$

$$\int_{-l}^l \operatorname{ctg}\left\{\pi(t-x)/(2d)\right\} \mathfrak{U}'_1(t) dt = 0, \quad x \in L. \quad (7)$$

Розв'язавши сингулярне рівняння (7) [16] і врахувавши, що $\int_{L_k} \mathbb{G}'_1(t) dt = 0$, одержимо $\mathbb{G}'_1(t) = 0$, $t \in L$.

Для побудови розв'язку задачі згину введемо комплексні потенціали $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$, функцію $\Omega(z, \bar{z})$ і скористаємося залежностями [17], які після перетворень запишемо у вигляді

$$M_y + iH_{xy} = 2m \operatorname{Re} \Phi(z) + n \{ z \overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)} \} + \rho \{ 2\overline{\Phi''(z)} + i \overline{\partial_{zz}^2 \Omega(z, \bar{z})} \}, \quad (8)$$

$$Q_x - iQ_y = -2D \{ 2\Phi'(z) - i\partial_z \Omega(z, \bar{z}) \}, \quad (9)$$

де $D = 2Eh^3 / \{ 3(1 - \nu^2) \}$; $m = -D(1 + \nu)$; $n = D(1 - \nu)$; $\rho = 4D/k_*^2$; $k_*^2 = 5/(2h^2)$; $\partial_z = 0.5(\partial_x - i\partial_y)$; функція $\Omega(z, \bar{z})$ – розв'язок рівняння Гельмгольца $4\partial_{zz}^2 \Omega(z, \bar{z}) = k_*^2 \Omega(z, \bar{z})$; $\partial_{\bar{z}} = 0.5(\partial_x + i\partial_y) = \overline{\partial_z}$.

Комплексні потенціали $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$ запишемо у вигляді [2]

$$\Phi(z) = \Phi_*(z) + \Gamma, \quad \Psi(z) = \Psi_*(z) + \Gamma', \quad (10)$$

де $\Gamma = (M_x^\infty + M_y^\infty)/(4m)$, $\Gamma' = (M_y^\infty - M_x^\infty)/(2n)$; $\Phi_*(z)$ і $\Psi_*(z)$ – голоморфні функції, які зникають на безмежності.

Враховуючи результати [8, 10], функції $\Phi_*(z)$ і $\Omega(z, \bar{z})$ подамо так:

$$\Phi_*(z) = 1/(4di) \int_{-l}^l \operatorname{ctg} \{ \pi(t - z)/(2d) \} g(t) dt, \quad g(t) = g_1(t) + i g_2(t), \quad (11)$$

$$\Omega(z, \bar{z}) = k_*/\pi \operatorname{Im} \left\{ \int_L r K_1(k_* r) / (t - z) \omega(t) dt \right\}, \quad \omega(t) = \omega_1(t) + i \omega_2(t), \quad (12)$$

де $r = \sqrt{(t - z)(t - \bar{z})}$, $g_1(t)$, $g_2(t)$, $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ – невідомі дійсні функції; тут і надалі $K_j(x)$ – функція Макдональда j -го порядку; $j = 1, 2$.

Врахувавши формули (10)–(12) та обчисливши похідні від функції $\Omega(z, \bar{z})$, що входять у вирази (8) і (9), і ввівши функцію $V(z) = q \overline{\Phi_*(z)} + z \overline{\Phi'_*(z)} + \overline{\Psi_*(z)} + m_1/(k_*^2 \pi i) \int_L \overline{\delta(t)} / (t - z)^3 dt$, можемо записати

$$M_y + iH_{xy} = n \{ q(\Phi_*(z) + 2\Gamma) + \Gamma' + V(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi'_*(z)} + i m_1 k_*^{-2} \overline{\Omega_2(z, \bar{z})} \}, \quad (13)$$

$$Q_x - iQ_y = -2D \{ P(z) - i\Omega_1(z, \bar{z}) \}, \quad (14)$$

де $P(z) = -1/(2\pi i) \int_L \delta(t)/(t-z)^2 dt$, $q = -(1+\nu)/(1-\nu)$, $m_1 = 4/(1-\nu)$,
 $\delta(t) \equiv \delta_1(t) + i\delta_2(t) = -2g(t) + i\omega(t)$, $\delta_1(t)$ і $\delta_2(t)$ – дійсні функції;

$$\Omega_1(z, \bar{z}) = \frac{ik_*^2}{2\pi} \int_L \left\{ \frac{r^2 \mathbb{K}'_1(k_* r)}{(t-z)^2} \omega(t) + \frac{(t-\bar{z}) K_0(k_* r)}{r^2} \operatorname{Re} \{ (t-\bar{z}) \omega(t) \} \right\} dt,$$

$$\Omega_2(z, \bar{z}) = k_*^2/(2\pi) \left\{ \int_L r^2 \mathbb{K}_2(k_* r) / \{ i(t-z)^3 \} \omega(t) dt - k_*/2 \operatorname{Im} \left\{ \int_L K_1(k_* r) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times r/(t-z) \omega(t) dt \right\} + k_* \int_L (t-x)/r^3 K_1(k_* r) (t-\bar{z}) \operatorname{Im} \{ (t-\bar{z}) \omega(t) \} dt \right\},$$

$$\mathbb{K}_1(x) = K_1(x) - 1/x, \quad \mathbb{K}_2(x) = K_2(x) - 2/x^2.$$

Враховуючи умови $\delta(2dk-l) = \delta(2dk+l) = 0$, функцію $P(z)$ запишемо у вигляді $P(z) = -1/(2\pi i) \int_L \delta'(t)/(t-z) dt$, звідки отримаємо

$$P^+(x) - P^-(x) = -\delta'(x) \quad (x \in L). \quad (15)$$

Задовольнивши за допомогою формули (14) другу крайову умову (2) і врахувавши співвідношення (15), одержимо $\delta'_2(x) = 0$, а з вище наведених умов випливає, що $\delta_2(x) = 0$, тому правильні залежності $\omega_1(x) = 2g_2(x)$, $\omega_2(x) = -2g_1(x) - \delta_1(x)$.

Враховуючи (13), з першої і третьої крайових умов (2) одержимо задачу лінійного спряження, з якої знаходимо

$$V(z) = 1/(2\pi i) \int_L \{ q g_1(t) - i m_2 g_2(t) \} / (t-z) dt, \quad m_2 = (5+\nu)/(1-\nu).$$

Скориставшись залежністю $\partial_x(\varphi_x + i\varphi_y) = -\{ \Phi_*(z) + m_1/2 \overline{\Phi_*(z)} + (z-\bar{z}) \overline{\Phi'_*(z)} + V(\bar{z}) + i m_1 \{ \overline{\Omega_2(z, \bar{z})}/k_*^2 + \Omega(z, \bar{z})/4 \} \}$, одержимо $\partial_x[\varphi_x + i\varphi_y] = -m_1 \{ g_1(x) + i g_2(x) \}$, $x \in L$, звідки, на підставі другої умови (3) отримаємо $\mathbb{K}'_2(t) = -2\alpha h m_1 \mu / (1+\kappa) g_2(t)$, $t \in L$. Врахувавши це, (6)

$$\text{запишемо у вигляді } N_k = \frac{2\alpha h^2 m_1 \mu}{d(1+\kappa)} \int_{-l}^l \operatorname{ctg} \{ \pi(t-x)/(2d) \} g_2(t) dt, \quad x \in L_k.$$

Враховуючи (11), (13), (14) і наведені викладення, з крайових умов (2) і (3) одержимо систему інтегральних рівнянь для визначення невідомих функцій $g_1(x)$ і $\delta_1(x)$, з якої знаходимо, що $g_1(x) = \delta_1(x) = 0$, і рівняння для визначення невідомої функції $g_2(x)$

$$\int_L \{ n_1 + \rho\rho/n + 2m_1 \mathbb{K}_2(k_*|t-x|) \} / (t-x) g_2(t) dt = 2\pi M_y^\infty / n, \quad x \in L_k, \quad (16)$$

де $n_1 = 2(3 + \nu)/(1 - \nu)$, $\rho\rho = 8\alpha\beta h^3 m_1 \mu / (1 + \kappa)$.

У цьому разі справджуються додаткові умови $\int_{L_k} g_2(t) dt = 0$.

Обезрозміривши систему рівнянь (16) разом з додатковими умовами та врахувавши симетрію задачі, можемо записати

$$\int_{-1}^1 \left\{ \{3 + \nu + 3\alpha\beta(1 + \nu)\} \pi / (2\xi) \operatorname{ctg} \left\{ \pi(\mathbf{T} - \mathbf{X}) / (2\xi) \right\} + 4 \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} k_2 (|\mathbf{T} - \mathbf{X} + 2\xi k|/\lambda) / (\mathbf{T} - \mathbf{X} + 2\xi k) \right\} g_2^*(\mathbf{T}) / \sqrt{1 - \mathbf{T}^2} d\mathbf{T} = 1, \quad \mathbf{X} \in [-1, 1],$$

$$\int_{-1}^1 g_2^*(\mathbf{T}) / \sqrt{1 - \mathbf{T}^2} d\mathbf{T} = 0, \quad (17)$$

де $\lambda = 1/(k_* l)$, $\xi = d/l$, $g_2^*(\mathbf{T}) = D \sqrt{1 - \mathbf{T}^2} g_2(l\mathbf{T}) / (\pi M_y^\infty)$.

Систему рівнянь (17) розв'язуємо методом механічних квадратур [15].

Для визначення коефіцієнтів інтенсивності зусиль (КІЗ) $K_1^\pm$ і моментів (КІМ) $K_M^\pm$ у вершинах тріщин скористаємося залежностями з монографій [3, 17], які після перетворень набудуть вигляду

$$K_M^\pm = mm \sqrt{l} \pi M_y^\infty / D g_2^*(\pm 1), \quad K_1^\pm = 3\alpha K_M^\pm / h, \quad (18)$$

де $g_2^*(\pm 1) = m_1 / S \sum_{s=1}^S (-1)^{s+0.5(1+m_1)S} g_2^*(T_s) \operatorname{tg}^{m_1} \left\{ (2s-1)\pi / (4S) \right\}$; $T_s = \cos \left\{ \frac{2s-1}{2S} \pi \right\}$; S – кількість вузлів методу механічних квадратур.

Числовий аналіз задачі. Провели числовий аналіз задачі при $\nu = 0.3$ і $\gamma = 0.1$. На рис. 2 зображено графічну залежність зведеного контактного зусилля $\tilde{N} = h N_k / M_y^\infty$ уздовж тріщин, причому, враховуючи симетрію

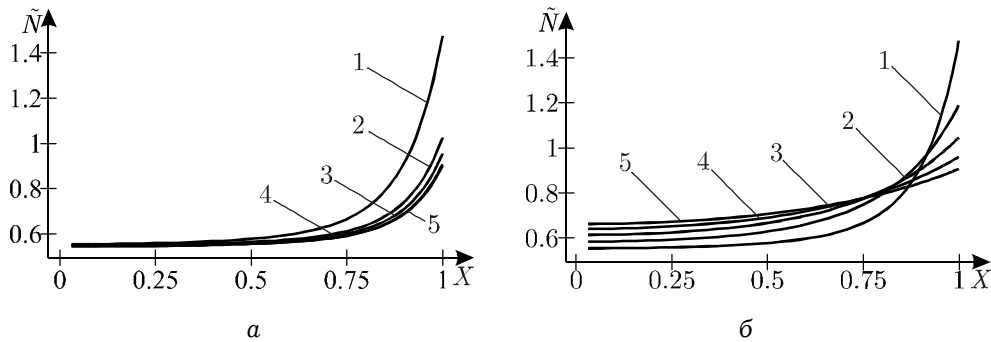


Рис 2. Графічні залежності зведеного контактного зусилля

задачі стосовно осі, що проходить через середину тріщини, графічні залежності наведемо при $X \geq 0$. Рис. 2,а побудовано при $\bar{h} = h/l = 0.1$, причому кривій 1 відповідає $\xi = d/l = 1.1$, кривій 2 – $\xi = 1.5$, кривій 3 – $\xi = 2$, кривій 4 – $\xi = 5$, кривій 5 – $\xi = 10$, а рис. 2,б – при $\xi = 1.1$, причому кривій 1 відповідає $\bar{h} = 0.1$, кривій 2 – $\bar{h} = 0.2$, кривій 3 – $\bar{h} = 0.3$, кривій 4 – $\bar{h} = 0.4$, кривій 5 – $\bar{h} = 0.5$.

Як видно з рис. 2, зі зменшенням параметра $\bar{h}$ та зі зближенням тріщин максимальне значення $\bar{K}_M$ збільшується і досягається біля вершин тріщин. Крім того, за цих значень параметрів вплив відстані між тріщинами на зведене контактне зусилля порівняно з впливом параметра $\bar{h}$ не є значним.

На рис. 3,а зображені графічні залежності зведеного КІМ $\bar{K}_M = K_M^{\pm} / (M_y^{\infty} \sqrt{l})$ від параметра $\bar{h}$, а на рис. 3,б ці ж залежності – від параметра ξ . На рис. 3,а крива 1 побудована при $\xi = 1.1$, крива 2 – при $\xi = 1.5$, крива 3 – при $\xi = 2$, крива 4 – при $\xi = 5$, крива 5 – при $\xi = 10$. На рис. 3,б крива 1 наведена при $\bar{h} = 10^{-5}$, крива 2 – при $\bar{h} = 0.25$, крива 3 – при $\bar{h} = 0.5$.

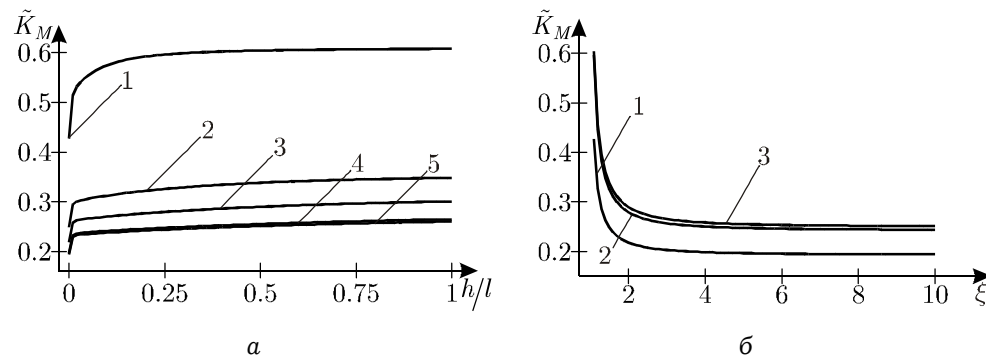


Рис 3. Графічні залежності зведеного КІМ

З рис. 3 видно, що зростання параметра $\bar{h}$ і зменшення ξ призводить до збільшення $\bar{K}_M$, особливо за малих значень $\bar{h}$. Коли $\xi \rightarrow 1$, КІМ швидко прямують до нескінченності.

Зауважимо, що КІЗ $K_I^{\pm}$ пов'язаний з КІМ $K_M^{\pm}$ згідно з формулою (18), тому графічних залежностей для нього не наводимо.

Зазначимо також, що у часткових випадках отримані відомі в літературі результати для згину пластини з тріщинами за класичною теорією згину пластин [5] (при $\gamma = 0$ і $\bar{h} \rightarrow 0$) і [9] (при $\bar{h} \rightarrow 0$), та за теорією Рейсснера [12] (при $\xi \rightarrow \infty$).

1. *Бережницький Л. Т.* Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин / Л. Т. Бережницький, М. В. Делявский, В. В. Панасюк. – К., 1979.
2. *Прусов И. А.* Метод сопряжения в теории плит / И. А. Прусов. – Минск, 1975.
3. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М. П. Саврук. – К., 1981.
4. *Шацький І. П.* Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами / І. П. Шацький // Доп. АН УРСР. Сер. А. Фіз.-мат. та техн. науки. – 1988. – № 7. – С. 49–51.
5. *Шацький І. П.* Взаимодействие коллинеарных разрезов с контактирующими кромками в изгибаемой пластине / І. П. Шацький // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 1990. – Т. 26, № 3. – С. 70–75.
6. *Шацький І. П.* Згин напівнескінченної пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами / І. П. Шацький, В. В. Перепічка // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 1992. – Т. 28, № 2. – С. 54–58.
7. *Шацький І.* Задачі теорії пластин та оболонок із взаємопов'язаними крайовими умовами на розрізах / І. Шацький, В. Перепічка, Т. Даляк, А. Щербій // Матем. проблеми механіки неоднорідних структур. – Львів, 2000. – Т. 2. – С. 51–54.
8. *Опанасович В. К.* Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її поверхонь / В. К. Опанасович // Наукові нотатки Луцького технічного університету. – 2007. – Вип. 20 (2). – С. 123–127.
9. *Опанасович В. К.* Згин пластини з періодичною системою колінеарних тріщин з урахуванням контакту їх берегів / В. К. Опанасович, М. Г. Стащук, М. І. Дорош // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2008. – Т. 44, № 2. – С. 46–52.
10. *Опанасович В. К.* Новий підхід до розрахунку напруженого стану плити з тріщиною за теорією Рейсснера / В. К. Опанасович, М. В. Делявський, А. Подхорецькі // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій: в 3-х т. / За заг. ред. Панасюка В. – Т. 2: Аналітичні методи в механіці руйнування матеріалів. – 1999. – С. 186–189.
11. *Опанасович В. К.* Врахування контакту берегів тріщини під час згину трансверсально-ізотропної пластини / В. К. Опанасович, В. П. Новосад, Р. Г. Селіверстов // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій: Збірник наукових праць. – Вип. 5 / За заг.

- ред. О. Є. Андрейківа, Й. Й. Лучка, В. В. Божидарника. – Львів, - 2002. – С. 148–153.
12. Опанасович В. Згин пластины Рейсснера з наскрізною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів / Віктор Опанасович, Ігор Яцик // Вісник Львівського університету. Сер. мех.-мат. – 2008. – Вип. 69. – С. 125–135.
 13. Тимошенко С. П. Пластины и оболочки / С. П. Тимошенко, Войновски-Кригер. – М., 1966.
 14. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М., 1966.
 15. Панасюк В. В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацишин. – К., 1976.
 16. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мухелишвили – М., 1962.
 17. Мазурак Л. П. Изгиб трансверсально-изотропных пластин с дефектами типа трещин / Л. П. Мазурак, Л. Т. Бережницкий – К., 1990.

**ИЗГИБ ПЛАСТИНЫ РЕЙССНЕРА С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ
СКВОЗНЫХ КОЛЛИНЕАРНЫХ ТРЕЩИН С УЧЕТОМ ШИРИНЫ
ОБЛАСТИ КОНТАКТА ИХ БЕРЕГОВ**

Игорь ЯЦЫК

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1 79000 Львов, Украина*

Рассмотрена задача изгиба неограниченной изотропной пластины равномерно распределенными изгибающими моментами на бесконечности, ослабленной периодической системой коллинеарных трещин со свободными от внешней нагрузки берегами. Предполагается, что берега трещин контактируют вблизи верхнего основания пластины по всей их длине, причем зона контакта имеет постоянную для каждой трещины ширину. За счет контакта берегов трещин решение задачи является суперпозицией решений двух задач: плоской задачи и задачи изгиба пластин с использованием теории Рейсснера. Используя методы теории функций комплексного переменного и комплексных потенциалов, получено систему сингулярных интегральных уравнений, решенную численно с помощью

метода механических квадратур. Приведены результаты численного анализа случаев задачи.

Ключевые слова: плоская задача теории упругости, теория изгиба пластин по Рейсснеру, изотропная пластина, периодическая система сквозных коллинеарных трещин, ширина области контакта, комплексные потенциалы, контактное усилие, коэффициенты интенсивности усилий и моментов.

REISSNER'S PLATE BENDING CONTAINING PERIODIC SYSTEM OF COLLINEAR THROUGH-THE-THICKNESS CRACKS TAKING INTO ACCOUNT CONTACT REGION WIDTH OF THEIR FACES

Ihor YATSYK

*Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine*

In this paper the bending problem of boundless isotropic Reissner's plate is investigated by the evenly distributed bending moments on infinity, which is loosened by collinear cracks periodic system, the faces of which are the external loading free. It is assumed that faces of cracks are in smooth contact near overhead plate basis on all their length and contact zone width is permanent on every crack. Through cracks faces contact the problem solution is a superposition of two problems solutions: the plane problem and plates bending problem using Reissner theory. On the basis of complex variable theory methods and complex potentials obtained singular integral equations system which is solved numerically by the method of mechanical quadratures. The problem cases numerical analysis results is conducted.

Key words: plane elasticity problem, Reissner theory of plates bending, isotropic plate, periodic system of through-the-thickness collinear cracks, contact zone width, complex potentials, contact force, forces and moments intensity factors.

Стаття надійшла до редколегії 17.05.2010

Прийнята до друку 22.12.2010

УДК 539.4

АНТИПЛОСКА ДЕФОРМАЦІЯ КВАДРАТНОГО В ПЛАНІ ТІЛА ІЗ ВНУТРІШНЬОЮ ТОНКОЮ НЕОДНОРІДНІСТЮ

Кирил ВАСІЛЬЄВ¹, Ярослав ПАСТЕРНАК¹, Георгій СУЛИМ²

¹Інститут прикладних проблем механіки і математики ім.
Я. С. Підстригача,
вул. Наукова, 36 79060 Львів, Україна

²Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Запропоновано два методи дослідження антиплатоскої деформації обмежених тіл із тонкими стрічковими неоднорідностями. Перший – аналітично-числовий спосіб розв'язування задачі – полягає у моделюванні обмеженої області за допомогою простору з системою контактуючих між собою неоднорідностей, у точках контакту яких діють невідомі зосереджені сили і дислокації. Для верифікації цього методу розроблено другий підхід на підставі схеми методу граничних елементів. Обчислення виконано для прикладу квадрата з довільно розміщеною внутрішньою тріщиною. Різниця між результатами застосування двох методів не перевищила 1%.

Ключові слова: антиплатоска деформація, МППВ, МГЕ, прямокутне в плані тіло, тріщина, КІН.

1. **Вступ.** Задачі дослідження напружено-деформованого стану обмежених тіл із тонкими дефектами типу тріщин, абсолютно жорстких чи пружних включень є важливими, зважаючи на їхнє поширення в техніці. З огляду на високу технологічність виготовлення, простоту геометрії та зручне взаємне поєднання, об'єкти у формі прямокутника, чи квадрата використовують найчастіше, тому й задачі дослідження їхнього напружено-деформованого стану досить добре висвітлені в літературі. Проте визначення напруженого стану обмежених тіл надзвичайно складне і громіздке з позицій математичного моделювання завдання, тому більшість результатів для таких задач отримано за допомогою числових методів, зокрема методу граничних елементів [1, 2]. Інші підходи використовують, зокрема, перетворення Фур'є [3], чи застосовують метод прямого неповного вирізування, коли прямокутний виріз у необмеженому середовищі моделюється за допомогою двох відокремлених ламаних тріщин [4].

Ми запропонували два підходи дослідження антиплатоскої деформації обмежених тіл із тонкими стрічковими неоднорідностями на прикладі прямокутника з тріщиною. Перший – аналітично-числовий спосіб розв'язування задачі на основі модифікованого методу прямого вирізування, який верифікується другим – числовим підходом на підставі схеми методу граничних елементів.

2. **Формулювання задачі.** У квадратному в плані тілі S зі стороною $2b$ і модулем пружності G наявна щілина (тріщина) L , нахилена під кутом α

© Васильєв К., Пастернак Я., Сулим Г., 2010

Розглянемо однорідний ізотропний простір із модулем пружності $\mathbf{G}$ і п'ятьма стрічковими неоднорідностями $\mathbf{L}_j$ ($j = \overline{0,4}$). Довжини включень – $2a_j$, товщини – $2h_j$, модулі пружності – $\mathbf{G}_{Bj}$, орієнтації щодо осі абсцис – α_j , координати центрів – $\mathbf{z}_{0j} = \mathbf{x}_{0j} + i\mathbf{y}_{0j}$ ($j = \overline{0,4}$). Грані квадрата моделюватимемо за допомогою чотирьох стрічкових неоднорідностей $\mathbf{L}_j$ ($j = \overline{1,4}$) однакової довжини $2a_j = 2b$ ($j = \overline{1,4}$) (тріщин у випадку дослідження вільних, чи навантажених берегів квадрата і абсолютно жорстких включень, у випадку дослідження жорстко защемлених берегів тіла), які контактують між собою в точках $\mathbf{O}_j^*$ ($j = \overline{1,4}$). Досліджувану тріщину описуватимемо моделлю дуже податного включення $\mathbf{L}_0$, орієнтація і розміщення якого такі ж, як і щілини $\mathbf{L}$ вихідної задачі (рис. 2).

У точках $\mathbf{O}_j^*$ дотику моделюючих включень функції стрибків суміжних неоднорідностей повинні якимось між собою пов'язуватись. Оскільки цей зв'язок заздалегідь невідомий, то спочатку накладемо додаткові умови рівності нулю функцій стрибків у точках $\mathbf{O}_j^*$ ($j = \overline{1,4}$)

$$\begin{aligned} f_{5j}(\mathbf{O}_j^*) &= f_{6j}(\mathbf{O}_j^*) = 0 \quad (j = \overline{1,4}); \\ f_{5j}(\mathbf{O}_{j+1}^*) &= f_{6j}(\mathbf{O}_{j+1}^*) = 0 \quad (j = \overline{1,3}); \quad f_{54}(\mathbf{O}_1^*) = f_{64}(\mathbf{O}_1^*) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Через те, що у точках $\mathbf{O}_j^*$ ($j = \overline{1,4}$) первісної задачі існує певний ненульовий стрибок напружень і похідних від переміщень, а тонка неоднорідність із фізичного погляду моделюється за допомогою розподілених вздовж її осі зосереджених сил і дислокацій [5, 7], то для того, щоб підправити накладене умовами (1) обмеження, додатково розмістимо у цих точках невідомі зосереджені сили $\mathbf{Q}_j$ і дислокації $\mathbf{b}_j$ ($j = \overline{1,4}$), які повинні забезпечити згаданий стрибок. Отже, напружений стан модельованої задачі шукатимемо у вигляді суперпозиції розв'язків для п'яти включень в однорідному просторі та невідомих зосереджених сил і дислокацій, що діють у точках $\mathbf{O}_j^*$ ($j = \overline{1,4}$) контакту неоднорідностей

$$\begin{aligned} \sigma_{yz} + i\sigma_{xz} &= \frac{i}{2\pi} \sum_{j=0}^4 \int_{L_j'} \frac{f_{5j}(t) + iGf_{6j}(t)}{te^{i\alpha_j} - (z - z_{0j})} dt + \sum_{j=1}^4 (\sigma_{yz}^{j*} + i\sigma_{xz}^{j*}), \\ \sigma_{yz}^{j*} + i\sigma_{xz}^{j*} &= -\frac{i}{2\pi} \frac{\mathbf{Q}_j + iG\mathbf{b}_j}{z - z^{j*}}, \quad z^{j*} = x^{j*} + iy^{j*}. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут σ_{yz}^{j*} , σ_{xz}^{j*} – напруження від дії зосередженої сили $\mathbf{Q}_j$ і дислокації $\mathbf{b}_j$ в точці $\mathbf{O}_j^*$ із координатами z^{j*} контакту неоднорідностей.

Для визначення невідомих f_{5j}, f_{6j} ($j = \overline{0,4}$) за методом функцій стрибка треба використати умови взаємодії матриці з включеннями. Для пружної тонкої плівки завдовжки $2a_j$, завтовшки $2h_j$ з довільним сталим модулем зсуву G_{Bj} , навантаженої симетричними зусиллями τ_{Bj} умови взаємодії можна подати у вигляді [5, 6]

$$\begin{aligned} \sigma_{sz}^{j+} + \sigma_{sz}^j + \frac{G}{G_{Bj}h_j} \int_{-a_j}^{s_j} (\sigma_{nz}^{j+} - \sigma_{nz}^j) dt &= 2 \frac{G\sigma_{sz}^{jc}(-a_j)}{G_{Bj}}, \\ \sigma_{nz}^{j+} + \sigma_{nz}^j + 2\tau_{Bj} - \frac{G_{Bj}}{h_jG} \int_{-a_j}^{s_j} (\sigma_{sz}^{j+} - \sigma_{sz}^j) dt &= \frac{w_j^*}{h_j}. \end{aligned} \quad (3)$$

Тут $\sigma_{sz}^{j\pm}, \sigma_{nz}^{j\pm}$ – дотичні і нормальні напруження на верхньому (+) і нижньому (–) берегах неоднорідності у її локальній системі координат $s_j O_j n_j$; $\sigma_{sz}^j(-a_j)$, w_j^* – певні торцеві сталі лівої вершини неоднорідності, для визначення яких використовують апріорні залежності [5, 8]

$$\sigma_{sz}^j(-a_j) = \sigma_{sz}^0(-a_j) \frac{G_{Bj}}{\max(G_{Bj}, G)}, \quad w_j^* = 2h_j(a_j) \sigma_{nz}^0(-a_j) \frac{\min(G_{Bj}, G)}{G}. \quad (4)$$

Перейдемо у (2) до локальної для j -го включення ($j = \overline{0,4}$) системи координат $s_j O_j n_j$

$$\begin{aligned} \sigma_{nz}^j + i\sigma_{sz}^j &= [\sigma_{yz} + i\sigma_{xz}] \exp(i\alpha_j), \\ \mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y} &= \mathbf{z}_j \exp(i\alpha_j) + \mathbf{z}_{0j} = (\mathbf{s}_j + i\mathbf{n}_j) \exp(i\alpha_j) + \mathbf{z}_{0j}. \end{aligned}$$

Застосувавши до результату такого перетворення формулу Сохоцького – Племель [9], отримаємо вирази для залежності напружень і переміщень на верхньому та нижньому берегах стрічкових неоднорідностей від невідомих функцій стрибків f_{5j}, f_{6j} ($j = \overline{0,4}$)

$$\begin{aligned} \sigma_{nz}^{j\pm}(\mathbf{s}_j) + i\sigma_{sz}^{j\pm}(\mathbf{s}_j) &= \mathbf{m} \frac{1}{2} [f_{5j}(\mathbf{s}_j) + iGf_{6j}(\mathbf{s}_j)] + \frac{i}{2\pi} \int_{L'_j} \frac{f_{5j}(\mathbf{t}) + iGf_{6j}(\mathbf{t})}{\mathbf{t} - \mathbf{s}_j} d\mathbf{t} + \\ &+ (\delta_{nz}^j + i\delta_{sz}^j) + \sum_{p=1}^4 (\sigma_{nz}^{pj*} + i\sigma_{sz}^{pj*}) \quad (j = \overline{0,4}), \\ \delta_{nz}^j + i\delta_{sz}^j &= \frac{i}{2\pi} \sum_{k=0, k \neq j}^4 \int_{L'_k} \frac{f_{5k}(\mathbf{t}) + iGf_{6k}(\mathbf{t})}{\mathbf{t} \exp(i\alpha_k) - (\mathbf{s}_p \exp(i\alpha_j) + \mathbf{z}_{0j} - \mathbf{z}_{0k})} \exp(i\alpha_j) d\mathbf{t}, \\ \sigma_{nz}^{pj*} + i\sigma_{sz}^{pj*} &= [\sigma_{yz}^{p*} + i\sigma_{xz}^{p*}] \exp(i\alpha_j). \end{aligned} \quad (5)$$

Підставляючи (5) в умови взаємодії матриці з включеннями (3), отримаємо десять сингулярних інтегральних рівнянь стосовно десяти невідомих функцій стрибків f_{5j} , f_{6j} ($j = \overline{0,4}$) та восьми невідомих сталих Q_j і b_j ($j = \overline{1,4}$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{L_j'} \frac{f_{5j}(t)}{t-s_j} dt - \frac{G}{G_{Bj}h_j} \int_{-a_j}^{s_j} f_{5j} dt + 2\delta_{sz}^j + 2 \sum_{p=1}^4 \sigma_{sz}^{pj*} &= 2 \frac{G\sigma_{sz}^j(-a_j)}{G_{Bj}}, \\ \frac{1}{\pi} \int_{L_j'} \frac{f_{6j}(t)}{t-s_j} dt - \frac{G_{Bj}}{Gh_j} \int_{-a_j}^{s_j} f_{6j} dt - \frac{2}{G} \delta_{nz}^j - \frac{2}{G} \sum_{p=1}^4 \sigma_{nz}^{pj*} &= -\frac{w_j^*}{Gh_j} - \frac{2\tau_{Bj}}{G} \quad (j = \overline{0,4}). \end{aligned} \quad (6)$$

Дві додаткові залежності задані умовами глобальної рівноваги досліджуваної неоднорідності L_0 і умовами однозначності переміщень при обході навколо неї

$$\int_{-a_0}^{a_0} f_{50}(t) dt = 0; \quad \int_{-a_0}^{a_0} f_{60}(t) dt = 0. \quad (7)$$

Отож, отримано десять сингулярних інтегральних рівнянь (6) стосовно десяти невідомих функцій стрибків та восьми невідомих сталих. Шістнадцять умов (1) і дві умови (7) дають змогу розв'язати отриману систему сингулярних інтегральних рівнянь. Розв'язок (1), (6), (7) шукатимемо на підставі методу колокацій [5], вважаючи, як і у загальній схемі відокремлених включень, що функції стрибків мають кореневі особливості на кінцях L_j .

Основними характеристиками поля напружень біля вістря тонких неоднорідностей вважатимемо, відповідно до [5], узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень (УКІН), що визначаються за формулами [5, 7]

$$\begin{aligned} K_{32}^A - iK_{31}^A &= (p_5^A + iGp_6^A) \sqrt{\pi/2}, \quad p_j^A = \lim_{t \rightarrow -a_0} [\sqrt{a_0 + t} f_{j0}(-a_0)], \\ K_{32}^B - iK_{31}^B &= -(p_5^B + iGp_6^B) \sqrt{\pi/2}, \quad p_j^B = \lim_{t \rightarrow a_0} [\sqrt{a_0 - t} f_{j0}(a_0)] \quad (j = \overline{5,6}). \end{aligned} \quad (8)$$

Тут "A" і "B" – відповідно ліва і права вершини неоднорідності.

4. Моделювання антиплатої деформації тіл із тріщинами за схемою методу граничних елементів. Система інтегральних рівнянь дуального методу граничних елементів для задач теорії тріщин набуває вигляду [10]:

- коли точка колокації y розташована на межі $\Gamma = \bigcup_{j=1}^4 L_j$ тіла

$$\frac{1}{2}\mathbf{w}(\mathbf{y}) = \text{RPV} \int_{\Gamma} \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{t}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{CPV} \int_{\Gamma} \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{w}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma_c^+} [\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma \mathbf{t}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \mathbf{w}(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}); \quad (9)$$

- коли точка колокації $\mathbf{y}$ розташована на серединній поверхні $\Gamma_c = L_0$ щілини

$$\left\{ \begin{aligned} & \text{RPV} \int_{\Gamma_c^+} \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma \mathbf{t}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{CPV} \int_{\Gamma_c^+} \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \mathbf{w}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = \\ & = \Sigma \mathbf{w}(\mathbf{y})/2 - \int_{\Gamma} [\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{t}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{w}(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}), \\ & n_j^+(\mathbf{y}) \left[\text{CPV} \int_{\Gamma_c^+} D_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma \mathbf{t}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{HPV} \int_{\Gamma_c^+} S_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \mathbf{w}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \right] = \\ & = \Delta \mathbf{t}(\mathbf{y})/2 - n_j^+(\mathbf{y}) \int_{\Gamma} [D_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{t}(\mathbf{x}) - S_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{w}(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}). \end{aligned} \right. \quad (9')$$

де $\mathbf{w}$, $\mathbf{t}$ – ненульові компоненти векторів переміщень $(0, 0, \mathbf{w})$ та напружень $(0, 0, \mathbf{t})$; $\Delta \mathbf{w} = \mathbf{w}^+ - \mathbf{w}^-$, $\Delta \mathbf{t} = \mathbf{t}^+ - \mathbf{t}^-$, $\Sigma \mathbf{w} = \mathbf{w}^+ + \mathbf{w}^-$, $\Sigma \mathbf{t} = \mathbf{t}^+ + \mathbf{t}^-$; знаками «+» та «-» позначено величини, які стосуються поверхонь Γ_c^+ та Γ_c^- , утворених математичним розрізом Γ_c ; позначення RPV означає величину невластивого інтеграла (Riemann principal value); CPV – головне значення інтеграла (Cauchy principal value); HPV – скінченну частину гіперсингулярного інтеграла (Hadamard principal value). Індеси у позначеннях відповідають проекціям векторів на осі глобальної системи координат Ox_1x_2 . У формулах прийняте правило Ейнштейна підсумовування за індексом, що повторюється. Ядра інтегральних рівнянь для антиплоскої задачі теорії пружності набувають вигляду

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{\ln \mathbf{r}}{2\pi \mathbf{G}} + \mathbf{A}, \quad \mathbf{T}(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{2\pi \mathbf{r}^2} \mathbf{n}_k \mathbf{n}_k \quad (k = 1, 2). \\ D_j = \mathbf{r}_j / (2\pi \mathbf{r}^2); \quad S_j = \mathbf{G} [n_j \mathbf{r}^2 - 2\mathbf{r}_j (\mathbf{n}_k \mathbf{r}_k)] / (2\pi \mathbf{r}^4).$$

Тут $\mathbf{r}_i = x_i - \xi_i$, $\mathbf{r} = \sqrt{\mathbf{r}_k \mathbf{r}_k}$; $\mathbf{G}$ – модуль зсуву.

Для розв'язування рівнянь (9) за схемою методу граничних елементів [10] зазвичай використовують розривні квадратичні елементи [10], які задаються Лагранжевими базовими функціями

$$\phi_1 = \mathbf{t} \left(\frac{9}{8} \mathbf{t} - \frac{3}{4} \right), \quad \phi_2 = \left(1 - \frac{3}{2} \mathbf{t} \right) \left(1 + \frac{3}{2} \mathbf{t} \right), \quad \phi_3 = \mathbf{t} \left(\frac{9}{8} \mathbf{t} + \frac{3}{4} \right) \quad (-1 \leq \mathbf{t} \leq 1)$$

для системи вузлів $\mathbf{t}_p = [-2/3; 0; 2/3]$ тривузлового елемента. Це дає змогу обчислювати особливі інтеграли аналітично, однак у цьому разі не можна отримати достатньо високу точність обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень. Для підвищення точності методу та для зручності визначення

УКІН очевидно видається перевага введення спеціальних елементів, що моделюють приторцеві ділянки тріщини. У цьому разі постає необхідність числового обчислення інтегралів від добутку спеціальних базових функцій на сингулярні ядра задачі, оскільки аналітичне інтегрування надто складне, а можливо й нездійсненне.

Тому для моделювання приторцевої частини тріщини за допомогою тривузлових розривних граничних елементів введено такі системи базових функцій для розривів переміщень:

$$\phi_p^{\Delta w} = \Phi_{p1}^{\Delta w} \sqrt{\rho} + \Phi_{p2}^{\Delta w} \rho + \Phi_{p3}^{\Delta w} \rho^{3/2} \quad (p = 1, 2, 3). \quad (10)$$

Тут $\rho = 1 \pm t$ ($-1 \leq t \leq 1$) – нормована дугова координата граничного елемента; $\Phi_{pj}^{\Delta w}$ – матриця сталих, яку визначають з рівнянь

$$\phi_p(t_p) = 1, \quad \phi_p(t_{j \neq p}) = 0.$$

Базові функції у формі (10) дають значну перевагу, навіть порівняно зі спеціальними функціями [1] типу $\phi_p = \Phi_{p1} \sqrt{\rho} + \Phi_{p2} \rho + \Phi_{p3}$, оскільки вони вводять сталу складову в розриви переміщень у вершині дефекту, що фізично не виправдано. Саме тому в [1] КІН визначали все ж за допомогою J -інтеграла, а не безпосередньо (це було би природно) як коефіцієнт при $\sqrt{\rho}$.

Із введенням базових функцій (10) у числовій схемі методу граничних елементів треба обчислювати такі сингулярні інтеграли:

$$I_2 = \int_{-1}^1 T(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t_p)) \phi^{\Delta w}(t) dt, \quad I_4 = \int_{-1}^1 S(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t_q)) \phi^{\Delta w}(t) dt,$$

де $T : O(|t - t_p|^{-1})$, $S : O(|t - t_p|^{-2})$.

Для обчислення сингулярних інтегралів $I_{2,4}$ побудовано спеціальні квадратури інтерполяційного типу із вузлами Чебишева

$$\int_{-1}^1 \frac{f(s)}{s} ds = \sum_{k=1}^n A_k^{CPV} f(\sigma_k), \quad \int_{-1}^1 \frac{f(s)}{s^2} ds = \sum_{k=1}^n A_k^{HPV} f(\sigma_k), \quad (11)$$

де $\sigma_k = \cos[(2k-1)\pi/(2n)]$ – нулі поліномів Чебишова; n – парне додатне ціле число; інтеграли записані в сенсі головного значення чи скінченної частини. Квадратури (11) точні, коли $f(s)$ є поліномом степеня, меншого за n .

Для обчислення сингулярних і гіперсингулярних інтегралів за квадратурами (11) додатково запропоновано використовувати нелінійне відображення

$$\mathbf{t} = \mu(\mathbf{s}) = \mathbf{t}_p + (1 + (-2\mathbf{t}_p + (1/2 + (\mathbf{t}_p - \mathbf{s}/2)\mathbf{s})\mathbf{s})\mathbf{s}), \quad (12)$$

яке завдяки своїм властивостям

$$\mu(\pm 1) = \pm 1, \quad \mu(0) = \mathbf{t}_p, \quad |\mu(\mathbf{s})| < 1 \\ (-1 < \mathbf{s} < 1, \mathbf{t}_p = \{-2/3; 0; 2/3\}), \quad \mu'(\mathbf{s})|_{\mathbf{s}=\pm 1} = 0$$

дає змогу не тільки згладити підінтегральний вираз біля кінців проміжку інтегрування, а й перенести особливу точку $\mathbf{t}_p$ в точку $\mathbf{s} = 0$. Із використанням відображення (12) і спеціальних квадратур (11) інтеграли $I_{2,4}$ обчислюють так:

$$I_2 = \int_{-1}^1 \mathbf{T}(\mathbf{x}(\mathbf{t}), \mathbf{y}(\mathbf{t}_p)) \phi^{\Delta \mathbf{w}}(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = \int_{-1}^1 \mathbf{T}[\mathbf{x}(\mu(\mathbf{s})), \mathbf{y}(\mathbf{t}_p)] \phi^{\Delta \mathbf{w}}(\mu(\mathbf{s})) \mu'(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \approx \\ \approx \sum_{k=1}^n \mathbf{A}_k^{CPV} \mathbf{T}[\mathbf{x}(\mu(\sigma_k)), \mathbf{y}(\mathbf{t}_p)] \phi^{\Delta \mathbf{w}}(\mu(\sigma_k)) \sigma_k \mu'(\sigma_k), \\ I_4 = \int_{-1}^1 \mathbf{S}(\mathbf{x}(\mathbf{t}), \xi(\mathbf{t}_p)) \phi^{\Delta \mathbf{w}}(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = \int_{-1}^1 \mathbf{S}[\mathbf{x}(\mu(\mathbf{s})), \mathbf{y}(\mathbf{t}_p)] \phi^{\Delta \mathbf{w}}(\mu(\mathbf{s})) \mu'(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \approx \\ \approx \sum_{k=1}^n \mathbf{A}_k^{HPV} \mathbf{S}[\mathbf{x}(\mu(\sigma_k)), \mathbf{y}(\mathbf{t}_p)] \phi^{\Delta \mathbf{w}}(\mu(\sigma_k)) \sigma_k^2 \mu'(\sigma_k).$$

Базові функції приторцевих елементів у формі (10) дають також змогу безпосередньо визначити коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) K_3 : K_{31} як коефіцієнт при $\sqrt{r}$ [5]

$$K_{31} = G \sqrt{\frac{\pi}{8}} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{w}(\mathbf{r})}{\sqrt{r}},$$

де r – відстань до вершини тріщини.

5. Аналіз результатів. Вивчимо вплив геометричних та фізичних параметрів тіла і неоднорідності на УКІН, отримані двома методами.

Приклад 1. Розглянемо антиплоску деформацію квадратного в плані тіла з вільними берегами і навантаженою тріщиною.

Проаналізуємо вплив кута орієнтації центральної неоднорідності (табл. 1) на нормовані КІН $K_3^{0B} = K_3^B / \tau \sqrt{\pi a}$.

Таблиця 1

Вплив кута орієнтації центральної тріщини на КІН K_3^{0B}

a/b	0,5		0,7		0,9	
α	МППВ	МГЕ	МППВ	МГЕ	МППВ	МГЕ
0	1,1305	1,1305	1,3376	1,3376	2,1136	2,1181

$\pi/12$	1,1266	1,1266	1,3137	1,3136	1,8997	1,9009
$\pi/6$	1,1187	1,1187	1,2667	1,2665	1,5872	1,5863
$\pi/4$	1,1148	1,1148	1,2435	1,2431	1,4606	1,4593
$\pi/3$	1,1187	1,1187	1,2667	1,2665	1,5872	1,5863
$5\pi/12$	1,1266	1,1266	1,3137	1,3136	1,8997	1,9009
$\pi/2$	1,1305	1,1305	1,3376	1,3376	2,1135	2,1181

Мінімальні КІН центральної тріщини отримано при $\alpha = \pi/4$ за найбільшого віддалення кінців тріщини від межі тіла; максимальні – при $\alpha = 0, \pi/2$, коли вершини тріщини знаходяться найближче до граней досліджуваного тіла. Відносна різниця отриманих двома методами результатів не перевищує 1 %, що підтверджує достовірність одержаних даних.

Дослідимо вплив відносного розміщення $d = 2y_0/b$ (див. рис. 2) паралельної ($\alpha = 0$) щодо осі абсцис тріщини (табл. 2)

Таблиця 2

Вплив розміщення тріщини на КІН K_3^{0B}

$d \backslash a/b$	0,5		0,7		0,9	
	МППВ	МГЕ	МППВ	МГЕ	МППВ	МГЕ
0	1,1305	1,1305	1,3376	1,3375	2,1136	2,1181
0,1	1,1306	1,1306	1,3377	1,3376	2,1137	2,1181
0,2	1,1309	1,1309	1,3379	1,3378	2,1138	2,1182
0,5	1,1336	1,1337	1,3401	1,3400	2,1143	2,1187
0,8	1,1416	1,1416	1,3464	1,3463	2,1158	2,1203
1	1,1534	1,1533	1,3561	1,3559	2,1182	2,1227
1,3	1,1950	1,1948	1,3928	1,3924	2,1285	2,1330
1,5	1,2618	1,2613	1,4577	1,4568	2,1504	2,1549
1,9	2,0670	2,0527	2,3827	2,3649	2,8354	2,8142

З наближенням до вільної межі області спостерігаємо монотонне збільшення значень КІН. Збільшення лінійних розмірів досліджуваного квадрата спричинює зменшення КІН. Практично всі результати, отримані двома методами, крім обчислених для досить близького розміщення тріщини до межі тіла при $d = 1,9$ та при $a/b = 0,9$, відрізняються між собою не більше, як на 0,1 %. Для $d = 1,9$, $a/b = 0,9$ ця різниця не перевищує 1 %.

Приклад 2. Розглянемо антиплоску деформацію квадратного в плані тіла з жорстко зацемленими берегами і навантаженою тріщиною. Лінійні

розміри квадрата – $b = 2a$; відносне розташування центру неоднорідності – $d = y_0/a$. Усі обчислення виконані двома запропонованими методами. Відносне відхилення результатів не перевищує 0,1 %.

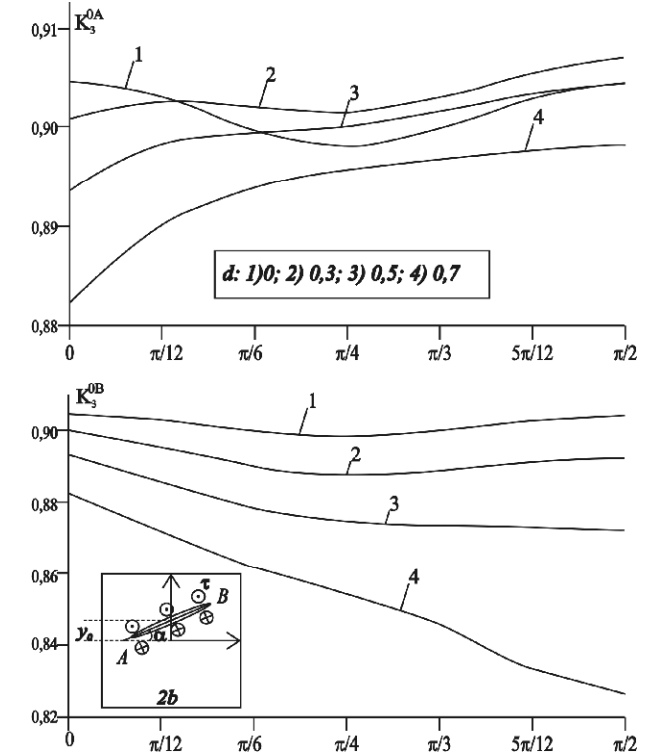


Рис. 1. КІН тріщини залежно від кута орієнтації і відносного розміщення d

Вивчаючи вплив орієнтації неоднорідності та її відносного розміщення на УКІН $K_3^{0AB} = K_3^{AB} / \tau \sqrt{\pi a}$ (рис. 3), спостерігаємо, що наближення вершини тріщини (B) до защемленого берега зменшує її КІН біля кожної з вершин A і B . А ось залежність K_3^{0A} , K_3^{0B} від кута α може бути немонотонною. Це пов'язано передусім з поступовим послабленням впливу одних граней квадрата і посиленням впливу інших.

Під час розв'язування системи сингулярних інтегральних рівнянь (6) з додатковими умовами (1), (7) методом колокацій [5] брали $N = 40$ членів розвинення в ряд функцій стрибків. Для розв'язування інтегральних рівнянь (9) задачі за схемою методу граничних елементів використано 31 елемент для моделювання поверхні тріщини та по 35 елементів для кожної з бічних сторін квадратного в плані тіла. У цьому разі для двох крайніх

граничних елементів тріщини використано базові функції у формі (10), а для решти – звичайні Лагранжеві.

6. Висновки. На підставі методу функцій стрибків і принципу спряження континуумів різної вимірності на прикладі прямокутника з тріщиною запропоновано два зручних способи визначення напружено-деформованого стану обмежених тіл з тонкими стрічковими неоднорідностями. В одному з них задача зведена до визначення напружено-деформованого стану простору зі збільшеною кількістю навантажених неоднорідностей і невідомих зосереджених сил і дислокацій, які діють у вершинах модельованого об'єкта. Розроблений за схемою методу граничних елементів числовий алгоритм підтвердив достовірність застосування запропонованого підходу. Різниця між отриманими за допомогою двох методів результатами обчислення КІН не перевищувала 1%.

1. *Pan E.* Fracture mechanics analysis of 2D anisotropic media with a new formulation of the boundary element method / *E. Pan, B. Amadei* // *Int. J. Fract.* – 1996. – 77. – P. 161–174.
2. *Wei-Liang Wu.* Dual Boundary Element Method Applied to Antiplane Crack Problems / *Wei-Liang Wu* // *Mathematical Problems in Engineering.* – 2009. – Article ID 132980, 10 pages, 2009. doi:10.1155/2009/132980
3. *X. S. Zhang.* A tearing mode crack located anywhere in a finite rectangular sheet / *X. S. Zhang* // *Engineering Fracture Mechanics.* – 1989. – Vol. 33, № 4. P 509 – 516.
4. *Саврук М. П.* Поздовжній зсув безмежного тіла із системою ламаних тріщин / *Саврук М. П., Осечко А. М.* // *ФХММ.* – 2003. – Т. 39, № 5. – С. 49 – 58.
5. *Сулим Г. Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями / *Сулим Г. Т.* – Монографія. – Львів, 2007.
6. *Васільєв К.В.* Прямий метод вирізування для моделювання напружено-деформованого стану ізотропних шаруватих середовищ з тонкими неоднорідностями за антиплого деформування / *Васільєв К.В. Сулим Г.Т.* // *Машинознавство.* – 2006. – №11-12. – С. 10-17.
7. *Божидарник В. В.* Елементи теорії пластичності та міцності / *Божидарник В. В. Сулим Г. Т.* – Львів, 1994.
8. *Сулим Г. Т.* Антиплоская задача для системы линейных включений в изотропной среде / *Сулим Г. Т.* // *Прикл. матем. и механика.* – 1981. – Т. 45, № 2. – С. 308 – 318.
9. *Божидарник В. В.* Елементи теорії пружності / *Божидарник В. В. Сулим Г. Т.* – Львів, 1994.

**АНТИПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ КВАДРАТНОГО В ПЛАНЕ ТЕЛА
С ВНУТРЕННЕЙ ТОНКОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ****Кирилл ВАСИЛЬЕВ¹, Ярослав ПАСТЕРНАК¹, Георгий СУЛИМ²**¹*Институт прикладных проблем механики и математики
им. Я. С. Подстригача, ул. Научная, 3б 79060 Львов, Украина*²*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1 79000 Львов, Украина*

Предложено два метода исследования антиплоской деформации ограниченных тел с тонкими ленточными неоднородностями. Первый – аналитико-численный способ решения задачи – состоит в моделировании ограниченной области с помощью пространства с системой контактирующих между собой неоднородностей, в точках контакта которых действуют неизвестные сосредоточенные силы и дислокации. Для верификации этого метода разработан второй подход на основе схемы метода граничных элементов. Вычисления осуществлены для примера квадрата с произвольно размещенной внутренней трещиной. Разница между результатами применения двух методов не превысила 1%.

Ключевые слова: антиплоская деформация, МППВ, МГЭ, прямоугольное в плане тело, трещина, КИН.

**ANTIPLANE DEFORMATION OF THE RECTANGULAR SOLID
WITH THIN INTERNAL HETEROGENEITY****Kirill VASIL'EV¹, Iaroslav PASTERNAK¹, Heorhiy SULYM²**¹*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
Naukova St., 3b 79060, Lviv, Ukraine*²*Ivan Franko National University of L'viv,
Universytetska Str., 1 79000 L'viv, Ukraine*

This paper presents two methods for studying the antiplane deformation of finite solids containing thin ribbon-like inclusions. The first one is the analytic-numerical method, which models finite domains using the infinite medium with the system of contacting heterogeneities with the unknown concentrated forces and dislocations located at the contact points. For verification of this method, the second numerical approach is proposed basing on the boundary element method procedure. Numerical examples are presented for a square domain with the arbitrarily located crack. The difference between the results of two methods is less than 1 % that shows the efficiency of proposed approaches.

Key words: antiplane deformation, method of direct complete cutting, BEM, rectangular solid, crack, SIF

Стаття надійшла до редколегії 17.05.2010

Прийнята до друку 22.12.2010

УДК 539.3

МАКСИМАЛЬНЕ ЕКВІВАЛЕНТНЕ НАПРУЖЕННЯ В ТЕРМОПРУЖНОМУ ПІВПРОСТОРІ ПРИ РУСІ МЕХАНІЧНОГО ТА ТЕПЛОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Сергій ПИР'ЄВ

*Українська Академія Друкарства,
вул. Підвальна, 17 79000 Львів, Україна*

Згідно з четвертою теорією міцності досліджено еквівалентне напруження в термопружному півпросторі. Напружений стан зумовлений впливом на еліптичну область поверхні механічного навантаження та теплового потоку, які рухаються з постійною швидкістю. Знайдені значення параметрів, для яких небезпечна точка лежить в глибині півпростору. В небезпечній точці значення еквівалентного напруження досягає максимуму.

Ключові слова: термопружність, рухоме навантаження, теплові потоки.

Механіка контактної взаємодії є одним з провідних напрямів у механіці деформівного твердого тіла. Коли аналізують, приймають допущення Герца, згідно з яким у випадку малої ділянки контакту порівняно з розмірами взаємодіючих тіл, ці тіла заміняють півпросторами, на які діють невідомі контактні параметри (контактний тиск, сили тертя, теплові потоки тощо). Після знаходження цих параметрів з розв'язку інтегральних рівнянь проводять аналіз напруженого стану півпросторів в оточенні області контакту.

Для аналізу термінів експлуатації вузлів тертя важливим є знаходження точки у півпросторі за певних навантажень, у яких найбільше значення набувають величини відповідальні за їхню міцність. Такими величинами можуть бути залежно від вибраної теорії міцності найбільше дотичне напруження, інтенсивність дотичних напружень, максимальне головне напруження та ін.

Академік О. Н. Динник, аналізуючи напружений стан в області контакту [1], довів, що найбільше дотичне напруження є не в середині області, а на глибині приблизно рівній половині радіуса кругової ділянки контакту. Це напруження більше, ніж утричі від аналогічного напруження в центрі області контакту. У випадку рівномірно розподіленого навантаження у крузі на поверхні півпростору максимальне дотичне напруження досягається у глибині півпростору під навантаженням на відстані, яка приблизно дорівнює двом третинам радіуса навантаженого круга. Значення цього максимуму становить приблизно одну третю прикладеного тиску при $\nu = 0,3$ [2]. У центрі поверхні навантаження ця величина досягає лише значення $0,1p_0$. У випадку контакту двох тіл сферичної форми найбільше стискувальне дотичне напруження досягається на глибині, яка дорівнює

приблизно половині радіуса поверхні контакту. Цю точку у випадку матеріалу зі сталі вважають найнебезпечнішою. Максимальне дотичне напруження досягає значення при $\nu = 0,3$ приблизно $0,31p_0$ [2]. Для крихких матеріалів руйнування визначається максимальним розтягувальним напруженням. Це напруження для згаданої задачі діє на границі кругової області контакту у радіальному напрямі, маючи для $\nu = 0,3$ значення $0,133p_0$. Це напруження набагато менше за максимальне дотичне напруження. У випадку контакту тіл по еліптичній області [3] максимальне дотичне напруження лежить на деякій глибині z_1 , яка залежить від співвідношення півосей. Наприклад, $z_1 = 0,47a$ для $b/a = 1$ і $z_1 = 0,24a$ для $b/a = 0,34$. Максимальне дотичне напруження набуває, відповідно, значення $\tau_{\max} = 0,31p_0$ і $\tau_{\max} = 0,32p_0$. Розрахункове напруження в небезпечному пункті згідно з енергетичною теорією міцності відповідно до [3] становить приблизно $0,6p_0$ максимального навантаження. У [4] розглянуто просторову контактну задачу для двох пружних тіл з урахуванням тепловиділення. Отримані формули для визначення напружень на глибині (під областю контакту). На підставі цих формул вивчають розподіл найбільших розрахункових напружень по третій теорії міцності. Розглянуто приклад, коли майданчиком контакту є еліпс.

Проведений аналіз свідчить про важливість знаходження таких пунктів у півпросторі. Наша мета – знайти параметри задачі про дію рухомого навантаження по поверхні термопружного півпростору, для яких найнебезпечніша точка розташована всередині півпростору.

Математичне формулювання задачі. Розглядають тривимірну квазістатичну задачу термопружності для півпростору, по поверхні якого з постійною швидкістю V рухається в протилежний бік вісь x , розподілена в області S (еліпс з півосями a і b), механічне (нормальні і дотичні зусилля) і теплове (тепловий потік) навантаження. Вважаємо, що розподіл нормальних зусиль герцівський

$P(x,y) = p_0 p(x,y)$, $p(x,y) = \sqrt{1 - (x/a)^2 - (y/b)^2}$, дотичні зусилля зв'язані з нормальними згідно з законом Кулона зі сталим коефіцієнтом тертя f , а інтенсивність теплового потоку дорівнює питомій потужності сил тертя $q(x,y) = fVP(x,y)$. Знайдемо значення параметрів, для яких максимум інтенсивності дотичних напружень розташований у глибині півпростору.

Для знаходження напружено-деформованого стану і температури у півпросторі в системі координат x,y,z , жорстко зв'язаній із ділянкою навантаження, розглянуто квазістаціонарну задачу лінійної термопружності

$$\mu \Delta \mathbf{U} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{U} = \gamma \operatorname{grad} T + \rho_0 V^2 \partial^2 \mathbf{U} / \partial x^2, \quad -\infty < x, y < \infty, z > 0, \quad (1)$$

$$\Delta T(x,y,z) = (V/k) \partial T(x,y,z) / \partial x, \quad -\infty < x, y < \infty, z > 0, \quad (2)$$

$$\sigma_{zz}(x,y,z) \Big|_{z=0} = -p_0 p(x,y), \quad (x,y) \in S, \quad (3)$$

$$\sigma_{zx}(x, y, z)|_{z=0} = -fp_0p(x, y), (x, y) \in S, \quad (4)$$

$$\sigma_{zy}(x, y, z)|_{z=0} = 0, (x, y) \in S, \quad (5)$$

$$-K \partial T(x, y, z)/\partial z|_{z=0} = fVp_0p(x, y), (x, y) \in S, \quad (6)$$

$$U(x, y, z) \rightarrow 0, r \rightarrow \infty, \quad (7)$$

де U – вектор переміщення; $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{zx}, \sigma_{zy}, \sigma_{xy}$ – компоненти тензора напружень $\sigma(x, y, z)$; f – коефіцієнт тертя; p_0 – характерне значення контактного тиску; $p(x, y)$ – гладка функція; Δ – оператор Лапласа; $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha$, λ, μ – коефіцієнти Ляме; α – коефіцієнт лінійного теплового розширення; ρ_0 – густина; K, k – коефіцієнти тепло- і температуропровідності, відповідно, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Аналіз числових результатів. Розв'язок задачі (1)-(7) знайдений з використанням прямого та оберненого перетворення Фур'є. Інтегральні подання для компонент тензора напружень наведені у [5]. Проведено аналіз еквівалентного напруження $\sigma_{\text{екв}}$ згідно з критерієм найбільшої інтенсивності дотичних напружень τ_i (енергетичної теорії міцності, потенціальної енергії формозміни, середніх дотичних напружень)

$$\sigma_{\text{екв}} = \sqrt{3}\tau_i = \sqrt{3J_2}, \quad (8)$$

де другий інваріант тензора напружень J_2 дорівнює

$$J_2 = \frac{1}{6}[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2)]. \quad (9)$$

Для вивчення впливу параметрів f та Pe на величину $\sigma_{\text{екв}}$ зроблено тестові розрахунки для оксидної кераміки, представником якої є оксид алюмінію Al_2O_3 : $\mu = 84,28$ ГПа – модуль зсуву, $\nu = 0,28$ – коефіцієнт Пуассона, $E = 215,79$ ГПа – модуль Юнга, $K = 38,52$ Вт/(м К), $k = 0,965 \cdot 10^{-5}$ м²/с, $\alpha = 14,0 \cdot 10^{-6}$ К⁻¹ – коефіцієнти тепло- і температуропровідності та лінійного теплового розширення відповідно, $a = 0,5$ мм, $b = 1$ мм, $h = b/a = 2$.

З метою аналізу впливу швидкості руху навантаження на максимальне значення еквівалентного напруження на рис. 2-4 зображено залежність безрозмірного еквівалентного напруження $\sigma_{\text{екв}}/\rho_0$ від безрозмірної

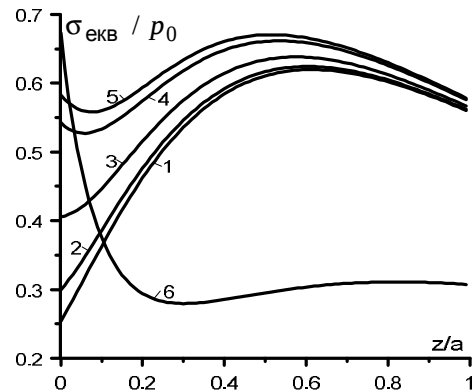


Рис. 1

глибини z/a для різних значень безрозмірного числа Pe і різних значень коефіцієнту тертя f , $y = 0$.

На рис. 1 зображено графіки розподілу безрозмірного еквівалентного напруження $\sigma_{\text{екв}}/\rho_0$ від безрозмірної глибини z/a для $Pe = 0$ і різних значень коефіцієнта тертя f , $y = 0$. Крива 1 відповідає коефіцієнту тертя $f = 0$ і $x/a = 0$; крива 2 – $f = 0,1$ і $x/a = -0,15$; крива 3 – $f = 0,2$ і $x/a = -0,3$; крива 4 – $f = 0,3$ і $x/a = -0,4$; крива 5 – $f = 0,33$ і $x/a = -0,45$; крива 6 – $f = 0,33$ і $x/a = 0,95$. Зростання коефіцієнта тертя f спричиняє зменшення відстані точки до поверхні, де еквівалентне напруження досягає максимуму. Ця точка зміщується в напрямі дії дотичних напружень. Значення еквівалентного напруження зростають. Після досягнення значення $f = 0,33$ є дві точки у півпросторі $x/a = -0,45$, $y/a = 0$, $z/a = 0,51$ і $x/a = 0,95$, $y/a = 0$, $z/a = 0$, де еквівалентне напруження набуває максимального значення $\sigma_{\text{екв}}/\rho_0 = 0,67$. Зазначимо, що друга точка лежить на поверхні півпростору недалеко від границі навантаження у протилежному напрямі до дії дотичного напруження. Для коефіцієнта тертя $f > 0,33$ точка з найбільшим значенням еквівалентного напруження завжди лежить на поверхні півпростору.

На рис. 2 зображено розподіл безрозмірного еквівалентного напруження $\sigma_{\text{екв}}/\rho_0$ вздовж безрозмірної глибини z/a для малого коефіцієнта тертя $f = 0,1$ на перетині площини $y = 0$ і площин $x/a = -0,15$, $x/a = -0,3$, $x/a = -0,2$ і $x/a = 0,5$ відповідно для кривих 1-4. Крива 1 відповідає $Pe = 1$, крива 2 – $Pe = 10$, крива 3 – $Pe = 60$, крива 4 – $Pe = 70$. Зі збільшенням коефіцієнта Pe зростає й максимальне значення еквівалентного напруження $\sigma_{\text{екв}}/\rho_0$. Для кривої 1 $\max(\sigma_{\text{екв}}/\rho_0) = 0,61$; для кривої 2 – 0,62, для кривої 3 – 0,64. Зазначимо, що точки, де еквівалентні напруження $\sigma_{\text{екв}}/\rho_0$ досягають свого максимального значення, розташовані у глибині півпростору попереду рухомого навантаження. Подальше зростання коефіцієнта Pe призводить до того, що максимальне значення еквівалентного напруження $\sigma_{\text{екв}}/\rho_0$ досягається вже на поверхні півпростору позаду центра рухомого навантаження. Для $Pe = 70$ найбільше значення еквівалентного напруження дорівнює 0,70 і досягається на поверхні півпростору ($x/a = 0,5$, $y/a = 0$, $z/a = 0$).

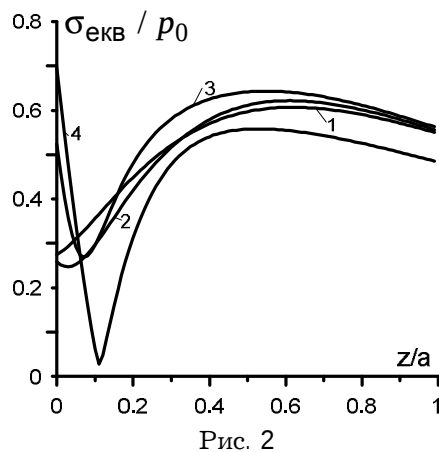


Рис. 2

На рис. 3 зображено графіки розподілу безрозмірного еквівалентного напруження $\sigma_{\text{екв}}/\rho_0$ для коефіцієнта тертя $f = 0,2$ і різних значень швидкостей. Номери кривих відповідають таким значенням параметрів: 1 - $Pe = 1$; $x/a = -0,35$; 2 - $Pe = 10$; $x/a = -0,55$; 3 - $Pe = 20$; $x/a = -0,5$; 4 - $Pe = 20$; $x/a = 0,0$. Збільшення числа Пекле Pe спричиняє зменшенню відстані точки до поверхні, де еквівалентне напруження досягає максимуму. Ця точка розташована в напрямі руху навантаження. Значення еквівалентного напруження зростають.

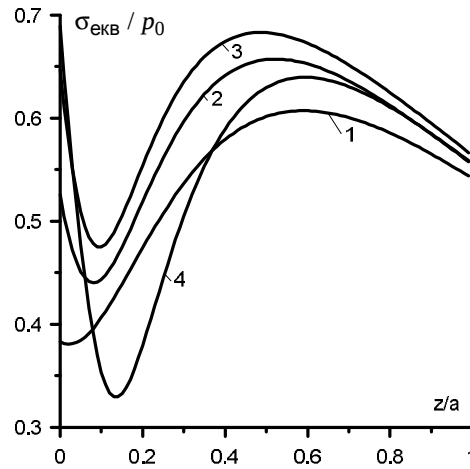


Рис. 3

По досягненню значення $Pe = 20$ є дві точки у півпросторі $x/a = -0,5$, $y/a = 0$, $z/a = 0,48$ і $x/a = 0,0$, $y/a = 0$, $z/a = 0$, де еквівалентне напруження максимальне $\sigma_{\text{екв}}/\rho_0 = 0,68$. Зазначимо, що друга точка є на поверхні півпростору всередині області навантаження. Для $Pe > 20$ точка з найбільшим значенням еквівалентного напруження завжди лежить на поверхні півпростору.

На рис. 4 зображено графіки розподілу безрозмірного еквівалентного напруження $\sigma_{\text{екв}}/\rho_0$ для коефіцієнта тертя $f = 0,3$. Номери кривих відповідають таким значенням параметрів: 1 - $Pe = 1$; $x/a = -0,6$; 2 - $Pe = 4$; $x/a = -0,8$; 3 - $Pe = 4$; $x/a = -0,75$. Так як і у попередніх випадках збільшення числа Пекле Pe спричиняє зменшення відстані точки до поверхні, де еквівалентне напруження досягає максимуму. Ця точка розташована в напрямі руху навантаження.

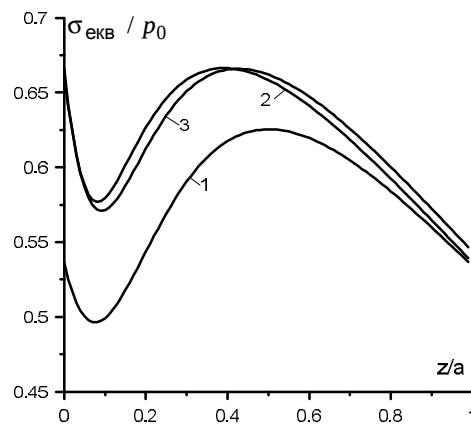


Рис. 4

Максимальне значення еквівалентного напруження зростає. По досягненню значення $Pe = 4$ є дві точки у півпросторі $x/a = -0,6$, $y/a = 0$, $z/a = 0,4$ і $x/a = -0,75$, $y/a = 0$, $z/a = 0$, де еквівалентне напруження максимальне $\sigma_{\text{екв}}/\rho_0 = 0,67$. Друга точка лежить на поверхні півпростору. Для $Pe > 4$ точка з найбільшим значенням еквівалентного напруження завжди лежить на поверхні півпростору.

Так знайдено область параметрів f , Pe , для яких небезпечні пункти згідно з критерієм найбільшої інтенсивності дотичних напружень розташовані у глибині півпростору. Ці параметри відповідають точкам, які лежать під кривою на рис. 5.

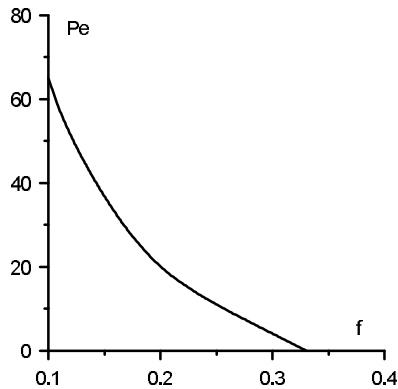


Рис. 5

Для параметрів, які відповідають точкам поза цією областю, небезпечні пункти є на поверхні півпростору. Експлуатаційні значення швидкості ковзання дають значення безрозмірного параметра Pe значно вищими від отриманих критичних значень. Наприклад, для швидкості $V = 15$ м/с, число Пекле $Pe = Va/k = 777,2$. Зазначимо, що поза визначеною областю параметрів, збільшення числа Пекле призводить до зростання величини максимального еквівалентного напруження і пересування пункту його досягнення зі сторони перед центром навантаження у сторону протилежну до руху. Наприклад, для $f = 0,4$, $Pe = 4$ значення $\max(\sigma_{\text{екв}}/\rho_0) = 0,91$ досягається в пункті $x/a = -0,75$, $y/a = 0$, $z/a = 0$, для $Pe = 10$ значення $\max(\sigma_{\text{екв}}/\rho_0) = 1,13$ досягається в пункті $x/a = -0,45$, $y/a = 0$, $z/a = 0$, для $Pe = 50$ значення $\max(\sigma_{\text{екв}}/\rho_0) = 2,71$ досягається в пункті $x/a = 0,4$, $y/a = 0$, $z/a = 0$, для $Pe = 500$ значення $\max(\sigma_{\text{екв}}/\rho_0) = 10,6$ досягається в пункті $x/a = 0,6$, $y/a = 0$, $z/a = 0$.

1. Динник А. Н. Удар и сжатие упругих тел. – К., 1952.
2. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М., 1975.
3. Беляев Н. М. Сопротивление материалов. – М., 1965.
4. Бородачев Н. М., Тариков Г. П. Определение наибольших расчетных напряжений под площадкой контакта с учетом тепловыделения // Изв. РАН. МТТ. – 2008. №3. – С. 76-84.

5. Євтушенко О. О., Пир'єв С. Ю. Напружений стан півпростору, зумовлений дією на його поверхні рухомого механічного та теплового навантаження // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – 50, №2. – С. 94-100.

**МАКСИМАЛЬНОЕ ЭКВИВАЛЕНТНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ В
ТЕРМОУПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ПРИ ДВИЖЕНИИ
МЕХАНИЧЕСКОЙ И ТЕПЛОВОЙ НАГРУЗКИ**

Сергей ПЫРЬЕВ

*Украинская академия печати,
ул. Підголоско, 19 79020 Львов, Украина*

Согласно четвертой теории прочности исследовано эквивалентное напряжение в термоупругом полупространстве. Напряженное состояние вызвано воздействием на эллиптическую область поверхности механической нагрузки и теплового потока движущейся с постоянной скоростью. Найдено значения параметров, для которых опасная точка лежит в глубине полупространства. В опасной точке значение эквивалентного напряжения достигает максимума.

Ключевые слова: термоупругость, движущиеся нагрузки, потоки тепла.

**THE MAXIMUM EQUIVALENT STRESS IN THE THERMOELASTIC HALF
SPACE AT DRIVING OF MECHANICAL AND THERMAL LOAD**

Sergiy PYRYEV

*Ukrainian Academy of Printing,
Pidgolosko Str., 19 79020 Lviv, Ukraine*

According to the fourth theory of strength equivalent pressure in the thermoelastic half space is examined. The state of stress is called by effect on elliptical area of a surface of mechanical load and a heat flow moving with fixed speed. Values of parameters for which the dangerous point lies in the heart of half space are discovered. In a dangerous point value of equivalent pressure reaches a maximum.

Key words: thermoelasticity, moving load, heat flow.

Стаття надійшла до редколегії 12.01.2010
Прийнята до друку 22.12.2010

УДК 539.3

СПЕКТР КОССЕРА ДРУГОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПРУЖНОГО СКІНЧЕНОГО ЦИЛІНДРА

В'ячеслав МЕЛЕШКО¹, Юрій ТОКОВИЙ², П'єро ВІЛЛАДЖІО³

¹Київський національний університет ім. Тараса Шевченка,
вул. Володимирська, 64 01601 Київ, Україна

²Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С.Підстригача НАН України, вул. Наукова, 36 79053 Львів, Україна

³Пізанський університет,
Лунжарно Пацінотті, 43 56126 Піза, Італія

Досліджено спектр Коссе́ра другої основної крайової задачі теорії пружності для суцільного ізотропного скінченного циліндра залежно від співвідношення між його довжиною та радіусом.

Ключові слова: спектр Коссе́ра, задача теорії пружності в напруженнях, скінчений циліндр.

Вступ. У серії з дев'яти коротких публікацій протягом 1898-1901 рр. (першою з яких була стаття [1], перелік і короткий зміст решти наведено в [2]), брати Ежен та Франсуа Коссе́ра запропонували оригінальний підхід до розв'язування основних двох крайових задач теорії пружності для ізотропного тіла. У випадку другої основної задачі, коли на всій межі тіла задано вектор зовнішніх зусиль, задача описується рівнянням Ляме для вектора переміщень $\mathbf{u}$, яке має інваріантний вигляд

$$(\omega + 1)\text{grad div } \mathbf{u} - \text{rot rot } \mathbf{u} + \mathbf{F} / \mathbf{G} = 0 \quad (1)$$

в області V , разом із крайовими умовами

$$\mathbf{n}(\omega - 1)\text{div } \mathbf{u} + 2(\mathbf{n} \cdot \text{grad}) \mathbf{u} + \mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{u} = \mathbf{t} / \mathbf{G} \quad (2)$$

на межі S . Тут grad , div , rot – відомі диференціальні оператори; $\mathbf{n}$ – вектор зовнішньої нормалі до поверхні S ; $\mathbf{F}$ – сила, що діє в одиниці об'єму; $\mathbf{t}$ – поверхневе зусилля, віднесене до одиниці площі; $\omega = 1/(1 - 2\sigma)$, σ та $\mathbf{G}$ – відповідно коефіцієнт Пуассона та модуль зсуву пружного матеріалу. Для розв'язання крайової задачі (1), (2) брати Коссе́ра запропонували спочатку знайти такі власні значення параметра ω_n , при яких однорідна крайова задача

$$(\omega + 1)\text{grad div } \mathbf{u} - \text{rot rot } \mathbf{u} = 0, \quad (3)$$

$$\mathbf{n}(\omega - 1)\text{div } \mathbf{u} + 2(\mathbf{n} \cdot \text{grad}) \mathbf{u} + \mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{u} = 0 \quad (4)$$

має нетривіальний розв'язок.

Завдяки фізичним обмеженням $-1 \leq \sigma \leq 1/2$ на коефіцієнт Пуассона реальних матеріалів та теоремі єдиності розв'язку задачі (1), (2) значення ω_n для однорідної крайової задачі (3), (4) можуть перебувати лише в інтервалі $[-\infty, 1/3]$. Для відносно простого випадку суцільної пружної кулі

брати Коссера [3] довели, що $\omega_n = \frac{2n+1}{2n^2+4n+3}$ ($n = 0, 1, 2$), навели вирази

для власних функцій $\mathbf{u}_n^{\mathbf{r}}$ і записали коротко повний розв'язок задачі. (Цей розв'язок, на нашу думку, потребує ретельної перевірки.) В [4] було доведено, що $\omega_0 = 1/3$ завжди буде власним числом задачі (3), (4).

Хоча роботи братів Коссера були досить відомими – їм було присвячено один параграф у класичній книзі [5], де детально обговорили розв'язок першої основної крайової задачі – до середини 70-х років практично нічого не було зроблено з застосування та розвитку цього підходу. Інтерес до спектра Коссера знову сколихнули праці С.Г. Міхліна, перелік яких подано в [2], а пізніше – серія праць [6,7], в яких було розглянуто здебільшого плоскі крайові задачі, та [8]. Зокрема, С.Г. Міхлін [2, с. 66] довів, що задача (3), (4), окрім дискретного спектра ω_n , має власні значення $\omega^{(-1)} = -1$ та $\omega^{(-\infty)} = -\infty$, яким відповідає нескінченна кількість незалежних власних функцій $\mathbf{u}_k^{(-1)}$ та $\mathbf{u}_k^{(-\infty)}$. У загальному випадку розв'язок крайової задачі (1), (2) набуває вигляду [2, с. 70]

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2}{1+\omega} (\mathbf{f}, \mathbf{u}_k^{(-1)}) \mathbf{u}_k^{(-1)} + (\mathbf{f}, \mathbf{u}_k^{(-\infty)}) \mathbf{u}_k^{(-\infty)} \right] + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-\omega_n}{\omega-\omega_n} (\mathbf{f}, \mathbf{u}_n) \mathbf{u}_n,$$

де

$$(\mathbf{f}, \mathbf{u}_\alpha) = \frac{1}{G} \left[\int_V \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_\alpha dV + \int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}_\alpha dS \right], \quad \alpha = k, n,$$

а всі власні функції $\mathbf{u}_k^{(-1)}$, $\mathbf{u}_k^{(-\infty)}$ та $\mathbf{u}_n$ - ортонормовані у метриці, пов'язаній з енергією системи [2, с. 65].

Незважаючи на перелічені публікації, зовсім немає відомостей про спектр Коссера для суто просторових пружних тіл, окрім сфери. На нашу думку, однією з перешкод у поширенні згаданого методу є складність у практичному відшукуванні власних значень і власних функцій для тіл порівняно складної геометрії, зокрема скінчених тіл за наявності кутових точок межі.

Ми запропонували методику знаходження власних значень Коссера для осесиметричної задачі теорії пружності для суцільного циліндра скінченої довжини з крайовими умовами в термінах напружень. Проаналізовано вплив співвідношення між довжиною та радіусом циліндра на власні значення.

Формулювання задачі. Розглядаємо осесиметричну задачу про рівновагу пружного ізотропного циліндра $V = \{0 \leq r \leq a, |z| \leq h\}$ у циліндричній системі координат. Векторне рівняння Ляме (3) у цьому випадку запишемо покомпонентно у вигляді

$$(\omega + 1) \frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{z}} = 0, \quad (\omega + 1) \frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{z}} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r\Omega)}{\partial \mathbf{r}} = 0, \quad (5)$$

де $\Theta = \operatorname{div} \mathbf{u}$ – об'ємне розширення; $\Omega = \frac{\partial u_r}{\partial \mathbf{z}} - \frac{\partial u_z}{\partial \mathbf{r}}$ – єдина відмінна від нуля компонента $\operatorname{rot} \mathbf{u}$. Ставимо задачу знаходження таких значень параметра ω , за яких розв'язки рівнянь (5) відмінні від нуля в області V , забезпечуючи виконання крайових умов (4), які набувають вигляду

$$\sigma_r = 0, \quad \tau_{rz} = 0, \quad \mathbf{r} = \mathbf{a}; \quad \sigma_z = 0, \quad \tau_{rz} = 0, \quad \mathbf{z} = \pm h. \quad (6)$$

Побудова розв'язку. Знаходити розв'язки рівнянь (5) можна різними способами. Ми застосуємо підхід, який ґрунтується на використанні функції Лява [9, § 188]. Переміщення та напруження виражаються через бігармонічну функцію $\chi(\mathbf{r}, \mathbf{z})$ за допомогою таких співвідношень:

$$\begin{aligned} 2Gu_r &= -\frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial \mathbf{z}}, \quad 2Gu_z = (1 - 2\sigma)\nabla^2 \chi + \frac{\partial^2 \chi}{\partial \mathbf{r}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{r}}, \\ \sigma_r &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \left(\sigma \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial \mathbf{r}^2} \right), \quad \sigma_z = \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \left((2 - \sigma) \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial \mathbf{z}^2} \right), \quad \tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left((1 - \sigma) \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial \mathbf{z}^2} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

де $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{z}^2}$ – осесиметричний оператор Лапласа.

Використаємо функцію напружень для симетричного стосовно площини $z = 0$ поля напружень у вигляді [10]

$$\chi(\mathbf{r}, \mathbf{z}) = B_0 \mathbf{z}^3 + D_0 \mathbf{r}^2 \mathbf{z} + a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n X_n R_n(\mathbf{r}) \frac{\sin k_n \mathbf{z}}{k_n^4} + h \sum_{j=1}^{\infty} Y_j Z_j(\mathbf{z}) \frac{J_0(\lambda_j \mathbf{r})}{\lambda_j^4 J_0(\lambda_j a)}, \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned} R_n(\mathbf{r}) &= k_n \mathbf{r} \frac{I_1(k_n \mathbf{r})}{I_1(k_n a)} - \left(\frac{\omega + 1}{\omega} + k_n a \frac{I_0(k_n a)}{I_1(k_n a)} \right) \frac{I_0(k_n \mathbf{r})}{I_1(k_n a)}, \\ Z_j(\mathbf{z}) &= \left(\frac{\omega - 1}{\omega} + \lambda_j h \operatorname{cth} \lambda_j h \right) \frac{\operatorname{sh} \lambda_j \mathbf{z}}{\operatorname{sh} \lambda_j h} - \lambda_j \mathbf{z} \frac{\operatorname{ch} \lambda_j \mathbf{z}}{\operatorname{sh} \lambda_j h}, \end{aligned}$$

$k_n = n\pi/h$; $\lambda_j > 0$ – корінь рівняння $J_1(\lambda_j a) = 0$, J_0 , J_1 і I_0 , I_1 – відповідно звичайні та модифіковані функції Бесселя першого роду нульового та першого порядків.

Визначення напружень на підставі співвідношень (7) та задоволення ними крайових умов (6) приводить до двох систем лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} (\omega - 1)\mathbf{B}_0 + 2\omega\mathbf{D}_0 = 0, \\ (\omega + 1)\mathbf{B}_0 + 2(\omega - 1)\mathbf{D}_0 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \mathbf{X}_n \mathbf{P}_n - \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{Y}_j \frac{4\mathbf{k}_n^2}{(\mathbf{k}_n^2 + \lambda_j^2)^2} = 0, & \mathbf{n} = 1, 2, \dots, \\ \mathbf{Y}_j \Delta_j - \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_n \frac{4\lambda_j^2}{(\mathbf{k}_n^2 + \lambda_j^2)^2} = 0, & \mathbf{j} = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (10)$$

Тут

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{a}^2 \left(\frac{\mathbf{I}_0^2(\mathbf{k}_n \mathbf{a})}{\mathbf{I}_1^2(\mathbf{k}_n \mathbf{a})} - 1 \right) - \frac{1}{\mathbf{k}_n^2} \frac{1 + \omega}{\omega}, \quad \Delta_j = \frac{\mathbf{h}}{\lambda_j} \left(\operatorname{cth} \lambda_j \mathbf{h} + \frac{\lambda_j \mathbf{h}}{\operatorname{sh}^2 \lambda_j \mathbf{h}} \right).$$

Побудова нетривіальних розв'язків рівнянь (5) за крайових умов (6) можлива, якщо системи рівнянь (9) і (10) мають нетривіальні розв'язки, що забезпечується рівністю нулів головних визначників цих систем рівнянь.

У випадку системи рівнянь (9) рівність нулів визначника забезпечується за єдиного значення параметра $\omega = 1/3$, якому відповідає $\sigma = -1$. Варто зауважити, що отримане власне значення не залежить від радіуса та довжини циліндра.

Перед тим, як розглядати визначник системи (10), варто зазначити, що лише рівняння першої групи цієї системи, що подаються першою стрічкою (10), залежать від параметра ω завдяки коефіцієнту $\mathbf{P}_n$, а рівняння другої групи (друга стрічка (10)) від зазначеного параметра не залежать. Тому доцільно вилучити рівняння другої групи з розгляду. Визначивши з цих рівнянь $\mathbf{Y}_j$ та підставивши їхні значення у рівняння першої групи, систему (10) перепишемо у вигляді

$$\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{nm} \mathbf{X}_m = 0, \quad \mathbf{n} = 1, 2, \dots \quad (11)$$

де

$$\alpha_{nm} = \mathbf{P}_n \delta_{nm} - \frac{16}{\mathbf{h}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^3 (\operatorname{ch} 2\lambda_j \mathbf{h} - 1)}{(\mathbf{k}_n^2 + \lambda_j^2)^2 (\mathbf{k}_m^2 + \lambda_j^2)^2 (\operatorname{sh} 2\lambda_j \mathbf{h} + 2\lambda_j \mathbf{h})},$$

δ_{nm} – символ Кронекера.

Система (11) має нетривіальні розв'язки, якщо величини ω є коренями характеристичного рівняння

$$\Psi_{\infty} = 0, \quad (12)$$

де $\Psi_{\infty} = \det(\alpha_{nm})_{n,m=1,\infty}$. Зауважимо, що вирази, які містять параметр ω , розташовані лише на головній діагоналі Ψ_{∞} . Вираз для Ψ_{∞} є нескінченним

[illegible]

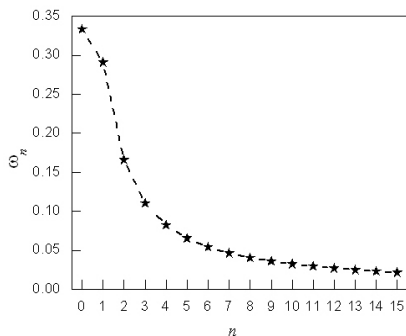


Рис. 1

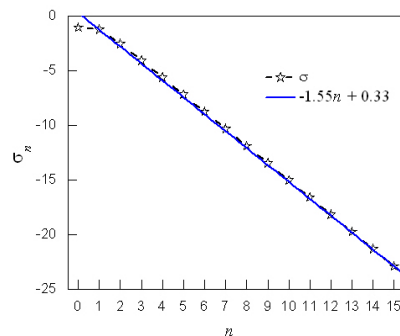


Рис. 2

Вплив відношення h/a на власні значення ω_n показано на рис. 3, а на відповідні значення σ_n – рис. 4. Як видно, зі зменшенням цього відношення власні значення скупчуються біля рівня $\omega = 0$, а з його збільшенням – біля рівня $\omega = 1/3$. Коефіцієнти Пуассона, крім $\sigma_0 = -1$, розташовуються вздовж прямих, які описуються такими рівняннями для випадків, показаних на рис. 4, у порядку збільшення h/a : $\sigma_n = -15.73n + 2.78$, $\sigma_n = -3.14n + 0.84$, $\sigma_n = -1.55n + 0.33$, $\sigma_n = -0.73n - 0.29$, $\sigma_n = -0.07n - 0.93$, $\sigma_n = 3 \cdot 10^{-5}n - 1$. Зі збільшенням відношення h/a величини σ_n розташовуються уздовж прямої, яка змагає до горизонтального положення, все менше відрізняючись зі зміною n ; у цьому разі зі збільшенням h/a спадає похибка визначення власних значень.

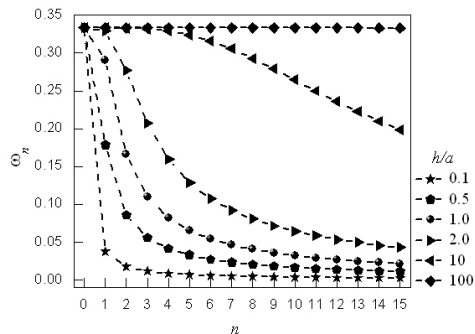


Рис. 3

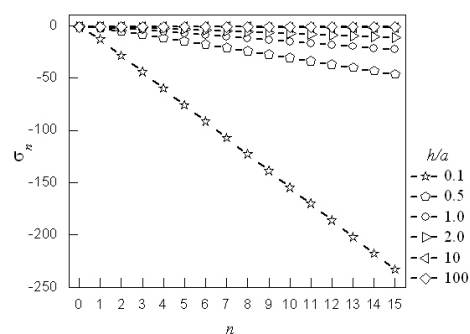


Рис. 4

Висновки. Знайдено дискретний спектр Коссера для скінченного пружного циліндра у випадку осесиметричного деформування за крайових умов у термінах напружень і досліджено вплив співвідношення між довжиною та радіусом циліндра на власні значення. Виявлено лінійну залежність від номера відповідних значень коефіцієнта Пуассона. Незважаючи на ці дані,

автори схиляються до короткого зауваження [5, с. 149]: "...для практичного обчислення вказаний метод, взагалі кажучи, не застосовувався, проте окремі задачі, які можуть бути розв'язані й іншими способами, були розібрані за його допомогою" та рекомендують використовувати прямий підхід [10] для розв'язування крайових задач теорії пружності для скінчених циліндрів.

-
1. Cosserat E., Cosserat F. Sur les equations de la theorie de l'elasticité // *C. R. Acad. Sci. Paris.* – 1898. – 126. – P. 1089-1091.
 2. Михлин С.Г. Спектр пучка операторов теории упругости // *Успехи матем. наук.* – 1973. – 28, № 3(171). – С. 43-82.
 3. Cosserat E., Cosserat F. Sur la deformation infiniment petite d'un corps elastique soumis à des forces donnees // *C. R. Acad. Sci. Paris.* – 1901. – 133. – P. 271-273.
 4. Cosserat E., Cosserat F. Sur un point critique particulier de la solution des equations de l'elasticite, dans le cas on les efforts sur la frontiere sont donnees // *C. R. Acad. Sci. Paris.* – 1901. – 133. – P. 382-384.
 5. Трещфц Е. Математическая теория упругости. – М.; Л., 1934.
 6. Markenscoff X., Paukshto M. The Cosserat spectrum in the theory of elasticity and applications // *Proc. R. Soc. Lond.* – 1998. – A454. – P. 631-643.
 7. Liu W., Markenscoff X., Paukshto M. The Cosserat spectrum theory for two-dimensional thermoelastic problems // *J. Thermal Stresses.* – 1999. – 22. – P. 225-239.
 8. Михлин С.Г., Морозов Н.Ф., Паукшто М.В. Интегральные уравнения в теории упругости. – СПб., 1994.
 9. Ляв А. Математическая теория упругости. – М.; Л., 1935.
 10. Meleshko V.V. Equilibrium of an elastic finite cylinder: Filon's problem revisited // *J. Eng. Math.* – 2003. – 46. – P. 355-376.

**СПЕКТР КОССЕРА ВТОРОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОГО
ЦИЛИНДРА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ****Вячеслав МЕЛЕШКО¹, Юрий ТОКОВЫЙ², Пьеро ВИЛЛАДЖИО³**

¹ *Київський національний університет ім. Тараса Шевченка,
ул. Владимирская, 64 01601 Київ, Украина*

² *Институт прикладных проблем механики и математики
им. Я.С Подстригача НАН Украины, ул. Научная, 3б 79053 Львов, Украина*

³ *Пизанский университет,
Лунгарно Пацинотти, 43 56126 Пиза, Италия*

Исследован спектр Коссера второй основной граничной задачи теории упругости для сплошного изотропного конечного цилиндра в зависимости от соотношения между его длиной и радиусом.

Ключевые слова: спектр Коссера, задача теории упругости в напряжениях, конечный цилиндр.

**THE COSSERAT SPECTRUM FOR THE SECOND BOUNDARY VALUE
PROBLEM FOR AN ELASTIC CYLINDER OF FINITE LENGTH****Viatcheslav MELESHKO¹, Yuriy TOKOVYY², Piero VILLAGGIO³**

¹ *Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Volodymyrs'ka St., 64 01601 Kyiv, Ukraine*

² *Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
Naukova Str., 3b 79053 Lviv, Ukraine*

³ *University of Pisa,
Lungarno Pacinotti, 43 56126 Pisa, Italy*

The Cosserat spectrum for the second boundary value problem for an isotropic elastic cylinder of finite length is investigated with respect to different aspect of sides ratio.

Keywords: the Cosserat spectrum, elasticity problem in terms of stresses, finite cylinder.

Стаття надійшла до редколегії 12.01.2010

Прийнята до друку 22.12.2010

МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ ТРІЩИНИ НА ОСНОВІ ЧИСЛОВОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ПЛОСКОГО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ

Владислав БОГДАНОВ¹, Георгій СУЛИМ²

¹Національний транспортний університет,
вул. Суворова, 1 01010 Київ, Україна

²Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

З використанням різницевих методів досліджують плоский напружений стан тонкого компактного зразка для визначення в'язкості руйнування (тріщиновитримності) в нестационарному пружно-пластичному формулюванні з урахуванням підростання тріщини за навантаження, яке прикладене до локалізованої області та змінюється з часом за лінійним законом. Умовою підростання тріщини вважають локальний критерій крихкого руйнування. Як основний незалежний параметр для опису розвитку полів напружень, деформацій, параметра Одквіста, пружних і пластичних складових густин енергії деформації та інших величин вибрано розрахункові значення коефіцієнта інтенсивності напружень біля тріщини у статичній задачі для пружно-деформованого компактного зразка. Виявлено особливості зміни напружень при досягненні згаданими коефіцієнтами інтенсивності напружень певних критичних значень.

Ключові слова: компактний зразок, пружно-пластична деформація, динамічна задача, ріст тріщини, енергії деформації.

Вступ. Для детальнішого вивчення процесів руйнування, граничного стану конструктивних елементів і способів визначення граничних значень параметрів, які його окреслюють, необхідна побудова математичних моделей і розв'язків тих задач, які описують ті явища, які спостерігають та вивчають в експериментах. Найпростіше формулювати такі задачі з використанням лінійно-пружних механічних моделей рівноважного стану, оскільки у багатьох випадках сталі руйнування (параметри граничного сталі) визначають за ударного руйнування, зокрема на триточковий згин надрізаних зразків прямокутної форми (компактних зразків для визначення в'язкості руйнування), то нехтування динамічними явищами, а також нелінійністю перебігу процесів деформування та розвитку руйнування, зокрема й пластичністю явища деформування обумовлюватиме дуже великі похибки.

У працях [1, 2] для аналізу процесів руйнування було запропоновано застосувати поряд із експериментальними також і розрахункові методи з використанням квазістатичної пружно-пластичної моделі матеріалу. Ці результати було узагальнено у публікаціях [3–5], де визначальні співвідношення для пружно-пластичного деформування було поєднано з рівняннями руху середовища у припущенні, що тріщина є нерухомою. У [6] використовують таке ж динамічне пружно-пластичне формулювання, однак

враховано рух тріщини у припущенні, що найбільше головне напруження досягнуло чи перевищило рівень критичних напружень крихкого руйнування за умови, що певне ефективне напруження не є від'ємним. Запропоновані моделі дали змогу суттєво підвищити рівень адекватності отриманих теоретичних підходів, однак їхнє застосування можна вважати коректним лише у разі повільного підростання тріщини. В [7] визначаємо напружено-деформований стан жорстко-пластичної криволінійної пластини змінної товщини з довільним отвором при динамічному навантаженні.

У цьому дослідженні методика [4] поширена на той випадок, коли тріщина динамічно просувається у пружно-пластичному зразку після його динамічного навантажування. На відміну від [4], де так як і в [2], складовою ϵ_z^p пластичних деформацій нехтували, ці складові враховують. На відміну від [6], для підростання тріщини використовують локальний критерій крихкого руйнування.

1. Математичне формулювання задачі. Розглядають деформування балкового зразка у формі прямокутника $\Sigma = L \times B$ ($-L/2 \leq x \leq L/2$; $0 \leq y \leq B$) з пропилом-тріщиною початкової довжини $l = l_0$ уздовж відрізка $\{x = 0; 0 \leq y \leq l_0\}$, що контактує з двома нерухомими опорами уздовж $\{L_* \leq |x| \leq L_* + a; y = 0\}$. Товщина w зразка вважається настільки малою, що можна було б використовувати залежності плоского напруженого стану ($\sigma_{zz} = 0, \sigma_{xz} = 0, \sigma_{yz} = 0$).

Зверху на тіло падає абсолютно жорсткий ударник, що контактує уздовж відрізка $\{|x| \leq A; y = B\}$. Його дію на тіло замінимо рівномірно розподіленим в області контакту нормальним напруженням $-P$, що змінюється з часом як лінійна функція $P = p_{01} + p_{02}t$. З огляду на симетрію процесу деформування стосовно лінії $x = 0$ далі розглядається лише права частина поперечного перерізу тіла (рис. 1,а).

Внаслідок ударного навантаження вважатимемо, що матеріал пружно-пластичний із зміцненням, причому розрахунок полів напружень, деформацій та їхніх приростів, зокрема й приростів інтенсивності пластичних $d\epsilon_i^p$, а також параметра Одквіста $\kappa = \int d\epsilon_i^p$ будемо виконувати на підставі числового розв'язування відповідної динамічної пружно-пластичної задачі.

Під час проведення розрахунків використаємо відомі методики дослідження квазістатичної пружно-пластичної [1, 2] моделі, що враховують нестационарність навантаження і застосовують числове інтегрування, зреалізоване в розрахунку динамічної пружної моделі [7]. У розрахунку динамічних полів напружень і деформацій не враховуємо взаємодії хвильових полів, відбиття від межі тіла і можливої контактної взаємодії між берегами розрізу.

Розглядають рівняння плоскої динамічної теорії, для якої компоненти вектора зміщень $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ пов'язані з компонентами тензора

деформацій співвідношеннями Коші $\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$, $\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}$, $\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$,
 $\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)$, а рівняння руху середовища набувають вигляду
 $\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$, $\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}$, де ρ - густина матеріалу.

Крайові умови задачі, які враховують зміну довжини тріщини, впливають із припущення про незмінність області прикладання реакції, розташування опор, а також визначення опорних реакцій за допомогою методів статки, запишемо так:

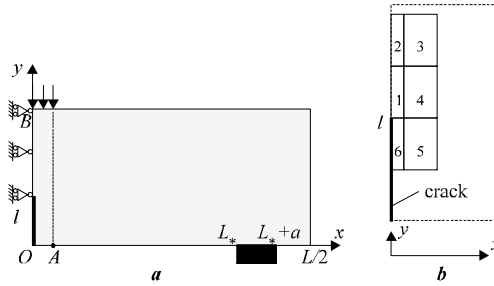


Рис. 1. Геометрична схема задачі (а) і сітка розбиття біля вістря тріщини (б)

$$\begin{aligned}
 x = 0, \quad 0 < y < l: & \quad \sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \\
 x = 0; \quad l < y < B: & \quad u_x = 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \\
 x = L/2, \quad 0 < y < B: & \quad \sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \\
 y = 0, \quad 0 < x < L*: & \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \\
 y = 0, \quad L* < x < L* + a: & \quad u_y = 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \\
 y = 0, \quad L* + a < x < L/2: & \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \\
 y = B, \quad 0 < x < A: & \quad \sigma_{yy} = -P, \quad \sigma_{xy} = 0; \\
 y = B, \quad A < x < L/2: & \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Початкові умови набувають вигляду

$$u_x|_{t=0} = 0, \quad u_y|_{t=0} = 0, \quad u_z|_{t=0} = 0, \quad \dot{u}_x|_{t=0} = 0, \quad \dot{u}_y|_{t=0} = 0, \quad \dot{u}_z|_{t=0} = 0, \quad l|_{t=0} = l_0, \tag{2}$$

де крапочка над символом означає похідну за часом.

В основу визначальних співвідношень механічної моделі покладено теорію неізотермічного пластичного течіння середовища з зміцненням за умови текучості Губера – Мізеса [9]. Ефектами повзучості і температурним розширенням нехтуємо. Тоді, вважаючи компоненти тензора деформацій сумою пружних і пластичних його складових [10], отримаємо для них

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \quad \varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2G} s_{ij} + K\sigma + \varphi, \quad d\varepsilon_{ij}^p = s_{ij} d\lambda. \quad (3)$$

Тут $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma$ – компоненти девіатора тензора напружень; δ_{ij} – символ Кронекера; G – модуль зсуву; $K_1 = (1 - 2\nu)/(3E)$; E – модуль пружності; ν – коефіцієнт Пуассона; $K = 3K_1$ – модуль об'ємного стиску, що зв'язує у співвідношенні $\varepsilon = K\sigma + \varphi$ об'ємне розширення 3ε (температурне розширення $\varphi \equiv 0$); $\sigma = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3$ – середнє напруження; $d\lambda$ – деяка скалярна функція, що визначається умовою пластичності (формою поверхні навантаження) і з огляду на згаданий вище його вибір квадратично залежить від компонент девіатора напружень s_{ij} [9]. Матеріал зміцнюється з коефіцієнтом зміцнення η_* [2]

$$\sigma_s(T) = \sigma_{02}(T_0) \left(1 + \frac{\kappa(T)}{\varepsilon_0} \right)^{\eta_*}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_{02}(T_0)}{E}, \quad T_0 = 20^\circ \text{C}, \quad (4)$$

де $\sigma_s(T)$ – межа текучості після зміцнення матеріалу за температури T .

Перепишемо (3) у розгорнутій формі

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{xx} &= d \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma}{2G} + K\sigma \right) + (\sigma_{xx} - \sigma) d\lambda, \quad d\varepsilon_{xy} = d \left(\frac{\sigma_{xy}}{2G} \right) + \sigma_{xy} d\lambda, \\ d\varepsilon_{yy} &= d \left(\frac{\sigma_{yy} - \sigma}{2G} + K\sigma \right) + (\sigma_{yy} - \sigma) d\lambda, \end{aligned} \quad (5)$$

причому

$$\begin{aligned} d\lambda &= \begin{cases} 0 & (f \equiv \sigma_i^2 - \sigma_s^2(T) < 0), \\ \frac{3d\varepsilon_i^p}{2\sigma_i} & (f = 0, \quad df = 0) \end{cases} (f > 0 - \text{неприпустиме}), \\ d\varepsilon_i^p &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\varepsilon_{xx}^p - d\varepsilon_{yy}^p)^2 + (d\varepsilon_{xx}^p - d\varepsilon_{zz}^p)^2 + (d\varepsilon_{yy}^p - d\varepsilon_{zz}^p)^2 + 6(d\varepsilon_{xy}^p)^2}, \\ \sigma_i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx})^2 + (\sigma_{yy})^2 + 6(\sigma_{xy})^2}, \quad d\varepsilon_{zz}^p = -d\varepsilon_{xx}^p - d\varepsilon_{yy}^p. \end{aligned} \quad (6)$$

2. Схема розв'язування задачі. Нехай нестационарна взаємодія відбувається в інтервалі часу $t \in [0, t_*]$. Тоді для кожного моменту часу t з цього інтервалу:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^e &= \frac{\sigma_{xx} - \sigma}{2G} + K\sigma, \quad \varepsilon_{yy}^e = \frac{\sigma_{yy} - \sigma}{2G} + K\sigma, \quad \varepsilon_{xy}^e = \frac{\sigma_{xy}}{2G}, \quad \varepsilon_{zz}^e = -\frac{\nu}{1 - \nu} (\varepsilon_{xx}^e + \varepsilon_{yy}^e), \\ \frac{d\varepsilon_{xx}^p}{dt} &= (\sigma_{xx} - \sigma) \frac{d\lambda}{dt}, \quad \frac{d\varepsilon_{yy}^p}{dt} = (\sigma_{yy} - \sigma) \frac{d\lambda}{dt}, \quad \frac{d\varepsilon_{xy}^p}{dt} = \sigma_{xy} \frac{d\lambda}{dt}, \quad \varepsilon_{zz}^p = -\varepsilon_{xx}^p - \varepsilon_{yy}^p. \end{aligned} \quad (7)$$

Для числового інтегрування за часом використовували квадратурну формулу Грегорі [11] порядку $m_1 = 3$ з коефіцієнтами D_n . Після

рівномірної дискретизації за часом з вузлами $\mathbf{t}_k = \mathbf{k}\Delta\mathbf{t} \in [0, \mathbf{t}_*]$ ($\mathbf{k} = \overline{0, K}$) для кожного значення $\mathbf{k}$ запишемо відповідні вузлові значення приростів деформацій

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_{xx,k} &= \mathbf{B}_1\sigma_{xx,k} + \mathbf{B}_2\sigma_{yy,k} - \mathbf{b}_{xx}, \quad \mathbf{B}_1 = \frac{1}{3}\left(\mathbf{K} + \frac{1}{\mathbf{G}} + 2\mathbf{D}_0\Delta\lambda_k\right), \\ \Delta\varepsilon_{yy,k} &= \mathbf{B}_2\sigma_{xx,k} + \mathbf{B}_1\sigma_{yy,k} - \mathbf{b}_{yy}, \quad \mathbf{B}_2 = \frac{1}{3}\left(\mathbf{K} - \frac{1}{2\mathbf{G}} - \mathbf{D}_0\Delta\lambda_k\right), \\ \Delta\varepsilon_{xy,k} &= \mathbf{B}_3\sigma_{xy,k} - \mathbf{b}_{xy}, \quad \Delta\varepsilon_{zz,k} = \mathbf{B}_4(\sigma_{xx,k} + \sigma_{yy,k}) - \Delta\varepsilon_{xx,k} - \Delta\varepsilon_{yy,k} - \mathbf{b}_{zz}, \\ \mathbf{B}_3 &= \frac{1}{2\mathbf{G}} + \mathbf{D}_0\Delta\lambda_k, \quad \mathbf{B}_4 = \frac{1-2\nu}{3(1-\nu)}\left(2\mathbf{K} + \frac{1}{2\mathbf{G}}\right), \quad \mathbf{b}_{zz} = \mathbf{B}_4(\sigma_{xx,k-1} + \sigma_{yy,k-1}), \\ \mathbf{b}_{ij} &= \frac{1}{2\mathbf{G}}\sigma_{ij,k-1} + \delta_{ij}\left(\mathbf{K} - \frac{1}{2\mathbf{G}}\right)\sigma_{k-1} - \sum_{n=1}^{m_1-1}\mathbf{D}_n(\sigma_{ij,k-n} - \delta_{ij}\sigma_{k-n})\Delta\lambda_{k-n} \quad (\mathbf{i}, \mathbf{j} : \mathbf{x}, \mathbf{y}).\end{aligned}\quad (8)$$

Функція $\psi = 1/(2\mathbf{G}) + \Delta\lambda$, що характеризує умову текучості, з урахуванням (6), (7) дорівнює

$$\begin{aligned}\psi &= \left\{ \frac{1}{2\mathbf{G}} \quad (\mathbf{f} < 0), \quad \frac{1}{2\mathbf{G}} + \frac{3\Delta\varepsilon_i^p}{2\sigma_i} \quad (\mathbf{f} = 0, \quad d\mathbf{f} = 0) \right\} \quad (\mathbf{f} > 0 \text{ — неприпустиме}), \\ \Delta\varepsilon_i^p &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\Delta\varepsilon_{xx}^p - \Delta\varepsilon_{yy}^p)^2 + (\Delta\varepsilon_{xx}^p - \Delta\varepsilon_{zz}^p)^2 + (\Delta\varepsilon_{yy}^p - \Delta\varepsilon_{zz}^p)^2 + 6(\Delta\varepsilon_{xy}^p)^2}, \\ \Delta\varepsilon_{xx}^p &= \Delta\varepsilon_{xx} - \Delta\varepsilon_{xx}^e, \quad \Delta\varepsilon_{yy}^p = \Delta\varepsilon_{yy} - \Delta\varepsilon_{yy}^e, \quad \Delta\varepsilon_{xy}^p = \Delta\varepsilon_{xy} - \Delta\varepsilon_{xy}^e, \quad \Delta\varepsilon_{zz}^p = -\Delta\varepsilon_{xx}^p - \Delta\varepsilon_{yy}^p, \\ \varepsilon_{xx}^e &= \frac{1}{2\mathbf{G}}\sigma_{xx} + \left(\mathbf{K} - \frac{1}{2\mathbf{G}}\right)\sigma, \quad \varepsilon_{yy}^e = \frac{1}{2\mathbf{G}}\sigma_{yy} + \left(\mathbf{K} - \frac{1}{2\mathbf{G}}\right)\sigma, \quad \varepsilon_{xy}^e = \frac{1}{2\mathbf{G}}\sigma_{xy}, \quad \sigma = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/3.\end{aligned}\quad (9)$$

Для урахування фізичної нелінійності, що міститься в залежностях (9), застосовують метод послідовних наближень, який дає підстави нелінійну задачу звести до послідовності лінійних задач [2]

$$\begin{aligned}\psi^{(n+1)} &= \left\{ \psi^{(n)}\mathbf{p} + \frac{1-\mathbf{p}}{2\mathbf{G}} (\sigma_i^{(n)} - \sigma_s(\mathbf{T}) < -\mathbf{Q}); \quad \psi^{(n)} \quad (-\mathbf{Q} < \sigma_i^{(n)} - \sigma_s(\mathbf{T}) < \mathbf{Q}); \right. \\ &\quad \left. \psi^{(n)} \frac{\sigma_i^{(n)}}{\sigma_s(\mathbf{T})} \quad (\sigma_i^{(n)} - \sigma_s(\mathbf{T}) > \mathbf{Q}) \right\},\end{aligned}\quad (10)$$

де $\mathbf{Q}$ — найбільше відхилення інтенсивності напружень від зміщеної межі текучості; емпірична стала $0 \leq \mathbf{p} \leq 1$ визначається для різних типів матеріалів (для м'яких сталей вона дорівнює 0,25; для твердих — 0,75; для дуже твердих інструментальних сталей — 0,87 - 0,90).

Розв'язок системи (8) дає вирази для компонент тензора напружень на кожному кроці

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx,k} &= \mathbf{A}_1 \Delta \varepsilon_{xx,k} + \mathbf{A}_2 \Delta \varepsilon_{yy,k} + \mathbf{Y}_{xx}, \quad \mathbf{Y}_{xx} = \mathbf{A}_1 \mathbf{b}_{xx} + \mathbf{A}_2 \mathbf{b}_{yy}, \quad \mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_1 / (\mathbf{B}_1^2 - \mathbf{B}_2^2), \\
\sigma_{yy,k} &= \mathbf{A}_2 \Delta \varepsilon_{xx,k} + \mathbf{A}_1 \Delta \varepsilon_{yy,k} + \mathbf{Y}_{yy}, \quad \mathbf{Y}_{yy} = \mathbf{A}_2 \mathbf{b}_{xx} + \mathbf{A}_1 \mathbf{b}_{yy}, \quad \mathbf{A}_2 = -\mathbf{B}_2 / (\mathbf{B}_1^2 - \mathbf{B}_2^2), \\
\sigma_{xy,k} &= \mathbf{A}_3 \Delta \varepsilon_{xy,k} + \mathbf{Y}_{xy}, \quad \mathbf{Y}_{xy} = \mathbf{A}_3 \mathbf{b}_{xy}, \quad \mathbf{A}_3 = 1/\mathbf{B}_3.
\end{aligned} \quad (11)$$

Прирости $\Delta \mathbf{u}$ вектора переміщень пов'язані з приростами деформацій такими співвідношеннями:

$$\Delta \varepsilon_{xx} = \frac{\partial \Delta \mathbf{u}_x}{\partial \mathbf{x}}, \quad \Delta \varepsilon_{yy} = \frac{\partial \Delta \mathbf{u}_y}{\partial \mathbf{y}}, \quad \Delta \varepsilon_{zz} = \frac{\partial \Delta \mathbf{u}_z}{\partial \mathbf{z}}, \quad \Delta \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{u}_x}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial \Delta \mathbf{u}_y}{\partial \mathbf{x}} \right). \quad (12)$$

Інтенсивність напружень і деформацій, які використовували вище, визначали для кожної елементарної комірки з числового розв'язку.

Незалежним параметром, який характеризує процес навантаження, є час $t_k = k \Delta t$, а відтак і відповідна цьому моменту часу сила $\mathbf{F} = 2\mathbf{A}\mathbf{P}$ контактної взаємодії ударника зі зразком. Оскільки в механіці руйнування в'язкість руйнування (тріщиновитримність) переважно отримують у квазістатичних експериментах та зіставляють її з граничним значенням коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН) $\mathbf{K}_1$, отриманим із пружного розв'язку, то для опису зміни окремих характеристик у багатьох залежностях як незалежний параметр (змінної) виберемо наближене значення КІН $\mathbf{K}_1^e$ (далі називатимемо його пружним КІН) для пружної задачі триточкового згину балки з тріщиною [12]

$$\mathbf{K}_1^e = 12\mathbf{F} \frac{\sqrt{l}}{\mathbf{B}\mathbf{H}} \left(1,93 - 3,07 \frac{l}{\mathbf{B}} + 14,53 \left(\frac{l}{\mathbf{B}} \right)^2 - 25,11 \left(\frac{l}{\mathbf{B}} \right)^3 + 25,8 \left(\frac{l}{\mathbf{B}} \right)^4 \right). \quad (13)$$

Для визначення актуальної довжини l тріщини у кожний розглядуваний момент часу використовували такий критерій, втілений у відповідний алгоритм. Якщо в комірці 1 (що прилягає до осі тріщини біля її продовження), найбільше головне напруження σ_1 досягнуло чи перевищило рівень критичних напружень крихкого руйнування $\mathbf{S}_c(\kappa) = [\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 \exp(-\mathbf{A}_d \kappa)]^{-1/2}$ за умови, що ефективне напруження $\sigma_{eff} = \sigma_i - \sigma_{02}$ при залежному від температури значенні $\sigma_{02}(\mathbf{T}) = \mathbf{a}_1 - \mathbf{c}(\mathbf{T} + 273) + \mathbf{b} \exp(-\mathbf{h}(\mathbf{T} + 273))$ не є від'ємним, то вважається, що ця комірка руйнується [4], довжина тріщини збільшується на висоту цієї комірки і відбувається перебудова сітки та її перенумерування так, щоби біля вістря тріщини знову була комірка 1. Параметри $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{h}$, $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, і $\mathbf{A}_d$ цих залежностей характеризують властивості досліджуваного полікристалічного матеріалу.

Обчислені поля деформацій використовували для визначення пластичної і пружної складових енергій деформації [13]

$$U_{ij}^e = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} \varepsilon_{ij}^e \sigma_{ij} dx dy, \quad U_{ij}^p = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} \varepsilon_{ij}^p \sigma_{ij} dx dy \quad (i, j = x, y). \quad (14)$$

3. Числова реалізація. Для розрахунків математичної моделі компактного зразка зі сталі 15X2НМФА застосовано метод скінченних різниць зі змінюваним кроком розбиття уздовж осей Ox (N елементів) і Oy (M елементів). Крок між точками розбиття був найменшим в околі вершини тріщини і на межах зразка. Характерний розмір комірок в радіусі 1-2 мм від вершини тріщини дорівнює середньому розміру зерна випробуваного металу (0,05 мм). Використання методу скінчених різниць обґрунтовується в [14], причому забезпечується точність розрахунків з похибкою не більше, ніж $O((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta t)^2)$.

Результати розрахунків середніх напружень у комірках поблизу вістря тріщини за невеликих навантажень, коли у дискретизованій задачі пластичної деформації немає і розв'язок задачі суто лінійно пружний, зіставляли з розрахованими для центра комірки на основі класичних одночленних асимптотичних залежностей п. 1.2 [12] з використанням виразу (13) для КІН пружного розв'язку. Для комірок 1, 6 (див. рис. 1,б) при $x = 0,01$ мм, $y = 3 \pm 0,04$ мм різниця не перевищувала 0,3%.

На рис. 2-9 зображено результати обчислення деяких важливих для механіки руйнування величин за таких значень параметрів: коефіцієнт зміцнення матеріалу $\eta_* = 0,05$; $L = 60$ мм; $B = 10$ мм; $I_0 = 3$ мм; $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$ с; $A = 2,5$ мм; $p_{01} = 8$ МПа; $p_{02} = 10$ МПа; $M = 60$; $N = 77$. Найменший крок розбиття дорівнював 0,02 мм, а найбільший - 2,6 мм ($\Delta x_{\min} = 0,02$ мм; $\Delta y_{\min} = 0,04$ мм (лише перший шар); $\Delta x_{\max} = 2,6$ мм; $\Delta y_{\max} = 0,6$ мм), $a_1 = 867$ МПа, $b = 975$ МПа, $c = 0,0305$ МПа K^{-1} , $h = 1,04 \cdot 10^{-2}$ K^{-1} , $C_1 = 1,92$, $C_2 = 3,04$, $A_d = 2,92$, $T = 50^\circ$.

Графіки розрахованої залежності від КІН K_1^e середніх напружень на продовженні осі включення біля його вістря (комірка 1 на схемі рис. 1,б) двовимірної моделі компактного зразка (рис. 2) свідчать, що з розвитком процесу деформування зразка в разі перевищення пружним КІН K_1^e рівня $K_1^e = K_{1*}^e = 90,5$ МПа $\sqrt{m}$, напруження у цій точці монотонний характер збільшення змінюють на коливний, а в разі перевищення пружним КІН K_1^e рівня $K_1^e = K_{1**}^e = 166,3$ МПа $\sqrt{m}$, коливання напружень набувають більшої амплітуди. Суцільна, суцільна з трикутником, пунктирна, суцільна з хрестиком і суцільна з кружечком лінії стосуються відповідно напружень σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} , напруження текучості σ_s та інтенсивність напружень σ_i .

Обчислення виявили, що при температурі зразка $T = 50^\circ C$ тріщина починала збільшуватися в разі перевищення пружним КІН рівня $K_1^e = K_{1c}^e \equiv 72,3$ МПа $\sqrt{m}$. Дослідження залежності довжини тріщини від K_1^e (рис. 3) дають змогу стверджувати таке: коли інтенсивність напружень

набуває значення $K_1^e = K_{1*}^e$, процес збільшення довжини тріщини стає інтенсивнішим (із набагато більшими приростами довжини з таким самим збільшенням K_1^e).

Після досягнення пружним КІН значення $K_1^e = K_{Id}^e \equiv 324,3 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$ напруження σ_{xx} , σ_{xy} різко зменшуються (див. рис. 2), причому напруження σ_{xx} стають стискувальними. В цей момент параметр Одквіста (рис. 4) в комірці 1 зменшується майже до нуля, а довжина тріщини сягає $l = 8,35 \text{ мм}$. З цього моменту напруження σ_{xx} і σ_{yy} починають коливатися в околі нуля і це, скоріш за все, відповідає подальшому доломлюванню зразка.

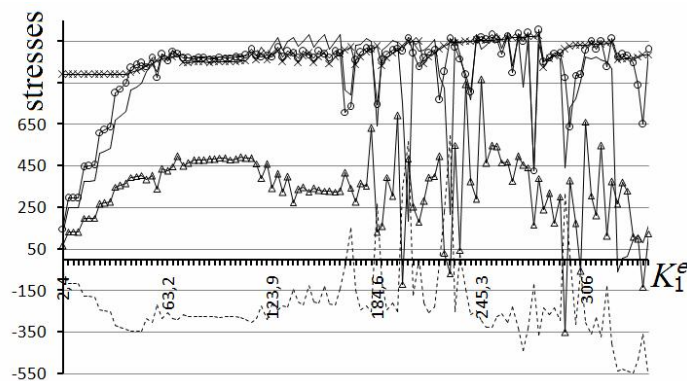


Рис. 2. Залежність напруження у комірці 1 на продовженні осі тріщини від K_1^e

Обчислення залежності параметра Одквіста κ , який характеризує накопичену у комірці 1 (увесь час безпосередньо перед вістрям тріщини) пластичну деформацію від K_1^e відображає рис. 4. Доки деформування пружне, доти $\kappa = 0$. Потім у комірці 1 починають монотонно накопичуватися пластичні деформації і у момент, коли тріщина робить перший стрибок, відбувається зміна розташування комірки 1 у зону з меншими значеннями параметра κ (значення κ стрибком зменшується) і знову відбувається процес накопичення κ . Через це при перевищенні пружним КІН значення K_{Ic}^e зміна κ , а водночас і величина накопиченої в комірці 1 пластичної деформації, має осциляційний (немонотонний) характер. Коли $K_1^e = K_{1*}^e$,

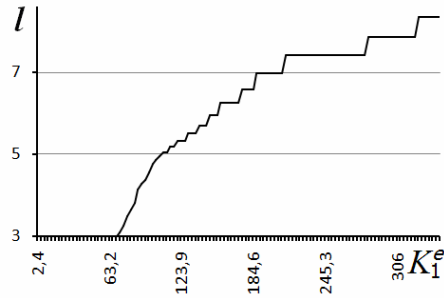


Рис. 3. Залежність довжини тріщини l від K_1^e

амплітуда осциляцій параметра κ значно збільшується, і, як зазначалося вище, при $K_1^e = K_{1d}^e$ він зменшується майже до нуля і починає повільно зростати.

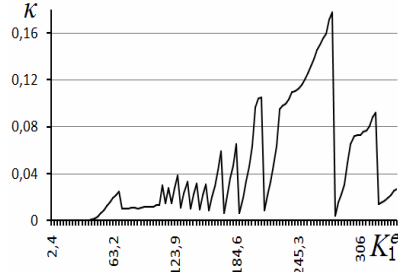


Рис. 4. Залежність параметра Одквіста κ від КІН K_1^e у комірці 1

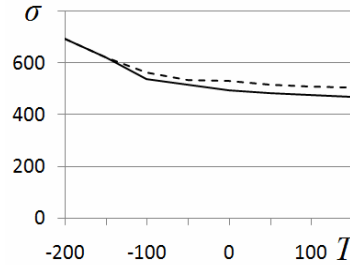


Рис. 5. Залежність середніх напружень σ від температури T у комірці 1

На рис. 5 і 6 зображено залежності від температури T відповідно середнього напруження σ та параметра Одквіста κ у комірці 1, отримані за фіксованого значення $K_1^e = K_{10}^e = 78,3 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}} > K_{1c}^e$ у разі врахування розвитку тріщини (суцільні лінії) при досягненні навантаженням такого рівня, а також у припущенні, що тріщина свого первісного розміру не змінює (штрихові лінії). У тих випадках, коли рівень температури

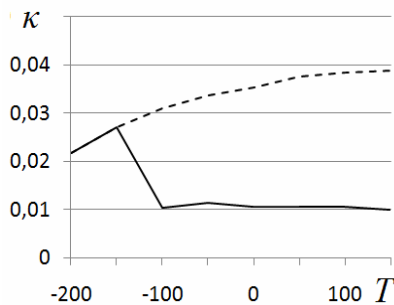


Рис. 6. Залежність параметра Одквіста κ від температури T у комірці 1

забезпечує можливість збільшення розміру тріщини при заданому разі плоского напруженого стану зразка з нерухомою тріщиною в зоні перед кінчиком тріщини властивий вищий рівень середніх напружень і накопичених пластичних деформацій. Якщо ж при певній температурі (у даному випадку це $T < -100^\circ$) рівень напружень для руху тріщини недостатній, то обидва підходи дають однакові результати.

На рис. 7 зображено діаграми розподілу максимальних досягнутих пластичних деформацій ε_{xx}^p , ε_{yy}^p , і ε_{xy}^p в зоні, що оточує вістря тріщини і прилягає до її фрагмента, що утворився внаслідок підростання.

Верхня частина відповідає значенню пружного КІН, коли $K_1^e = 60,1 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$ (коли тріщина ще нерухома), а нижня, коли $K_1^e = K_{1*}^e$, тріщина підросла на 3,24 мм і починає фазу інтенсивного підростання, яке передуює доломлюванню зразка. У цьому разі темніші зони на діаграмах відповідають ще вищим значенням деформацій.

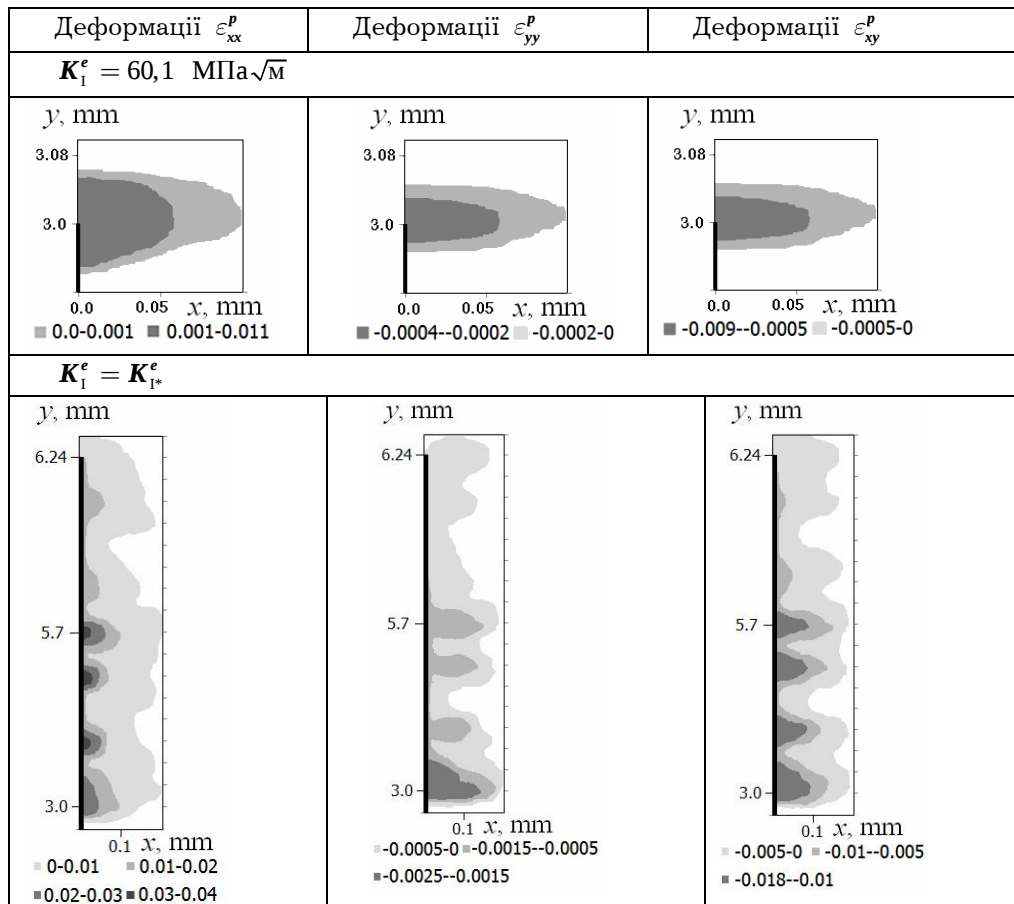


Рис. 7. Діаграми розподілу максимальних досягнутих пластичних деформацій ε_{xx}^p , ε_{yy}^p і ε_{xy}^p в зоні тріщини

Помітно, що зони максимальних пластичних деформацій (вони, як ще видно з верхньої частини рисунка, формуються безпосередньо навколо вістря тріщини і при її просуванні потрапляють у зону розвантаження) прилягають до вільної поверхні тріщини, причому її вістря за достатнього розвитку тріщини розташовується у менш пластично деформованому матеріалі. Якщо приріст довжини тріщини достатньо великий, то до берегів тріщини прилягає низка таких зон підвищеної пластичної деформації, тобто товщина приповерхневого пластично деформованого металу не є ані сталою, ані монотонно змінюваною.

Зрозуміло, що зменшення розмірів сітки розбиття дещо згладить зображені у нижній частині діаграми розподілу, однак така нерівномірність пластичних деформацій може бути властива динамічному характеру просування тріщини.

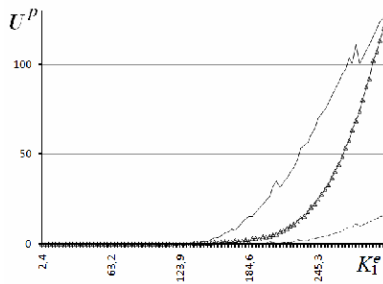


Рис. 8. Зміна складових енергії
пластичних деформацій U_{ij}^p

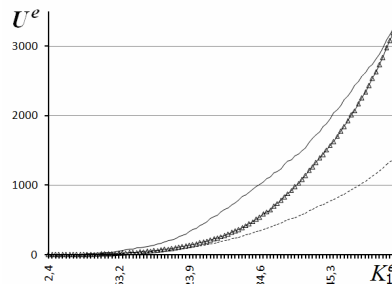


Рис. 9. Зміна складових енергії
пружних деформацій U_{ij}^e

На рис. 8, 9 суцільна, суцільна з трикутником і пунктирна лінії стосуються відповідно зміни адитивних складових (14) енергій пластичних U_{xx}^p , U_{yy}^p і U_{xy}^p (рис. 8) та пружних U_{xx}^e , U_{yy}^e і U_{xy}^e (рис. 9) деформацій у комірці 1 перед вістрям тріщини. Дослідження розподілу складових пластичних енергій U_{ij}^p ($i, j : x, y$) (див. рис. 8) з моменту перевищення пружним коефіцієнтом інтенсивності напружень рівня K_{I*} свідчить про їхній у цілому коливний характер. Пружні складові енергії U_{ij}^e ($i, j : x, y$) (див. рис. 9) збільшуються монотонно, у цьому разі незначні стрибки можна пояснити дискретністю обчислювальної схеми.

Висновок. Розв'язування задачі плоского напруженого стану для компактного зразка для визначення в'язкості руйнування на триточковий згин у динамічному пружно-пластичному формулюванні з урахуванням підростання тріщини дає змогу набагато точніше визначити поля пластичних деформацій і напружень, аніж при розв'язуванні квазістатичної пружно-пластичної задачі плоского напруженого стану, а також дає підстави адекватно моделювати процес розповсюдження тріщини. Процес підростання тріщини починається пізніше і потребує більше часу.

1. Махненко В.И. Совершенствование методов оценки остаточного ресурса сварных соединений конструкций длительного срока эксплуатации // Автоматическая сварка. – 2003. – № 10–11. – С. 112–121.
2. Махненко В.И. Расчетные методы исследования кинетики сварочных напряжений и деформаций. – К., 1976.
3. Богданов В.Р., Сулим Г.Т. Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі чисельного моделювання плоского деформованого стану // Физ.-хім. мех. матеріалів. – 2010. – № 3. – С. 51–56.
4. Богданов В.Р. Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі чисельного моделювання плоского напруженого стану // Вісник

- Київського національного університету. Серія фіз.-мат. науки. – 2008. – № 3. – С. 51–56.
5. Богданов В.Р. Тривимірна динамічна задача концентрації пластичних деформацій і напружень біля вершини тріщини // Вісник Київського національного університету. Серія фіз.-мат. науки. – 2009. – № 2. – С. 51–56.
 6. Богданов В.Р., Сулим Г.Т. Динамічний розвиток тріщини у компактному зразку за пружно-пластичною моделлю плоского напруженого стану // Вісник Київського національного університету. Серія фіз.-мат. науки. – 2010. – № 4. – С. 51–54.
 7. Немировский Ю.В., Романова Т.П. Динамика жесткопластической криволинейной пластины переменной толщины с произвольным отверстием // Прикл. механика – 2010. – 46, №3. – С. 70 – 76.
 8. Kubenko V.D., Bogdanov V.R. Planar problem of the impact of a shell on an elastic half-space. // International Applied Mechanics. – Vol. 31. – № 6. – 1995. – P. 483–490.
 9. Сборник: Теория пластичности. – М., 1948.
 10. Аркулис Г.Э., Дорогобид В.Г. Теория пластичности. – М., 1987.
 11. Хемминг Р.В. Численные методы. – М., 1972.
 12. Саврук М.П. Механика разрушения и прочность материалов. – Т. 2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – К., 1988.
 13. Божидарник В.В., Сулим Г.Т. Елементи теорії пластичності та міцності. – Львів, 1999.
 14. Зюкина Е.Л. Консервативные разностные схемы на неравномерных сетках для двумерного волнового уравнения // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского, – Казань, – Т.26. – 2004 – С. 151–160.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТРЕЩИНЫ НА ОСНОВЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Владислав БОГДАНОВ¹, Георгий СУЛЫМ²

¹Національний Транспортний Університет,
ул. Суворова, 1 01010 Киев, Украина

²Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1 79000 Львов, Украина

С использованием разностных методов исследуется плоское напряженное состояние тонкого компактного образца для определения вязкости

разрушения (трещиностойкости) в нестационарной упруго-пластической постановке с учетом подрастания трещины при нагрузке, которая приложена к локализованной области и изменяется со временем по линейному закону. Условием подрастания трещины считается локальный критерий хрупкого разрушения. В роли основного независимого параметра для описи развития полей напряжений, деформаций, параметра Одквиста, упругих и пластических составляющих плотности энергии деформации, а также других величин выбрано расчетное значение коэффициента интенсивности напряжений возле трещины в статической задаче для упруго деформированного компактного образца. Выявлены особенности изменения напряжений при достижении упомянутыми коэффициентами интенсивности напряжений критических значений.

Ключевые слова: компактный образец, упруго-пластическая деформация, динамическая задача, рост трещины, энергии деформации.

THE CRACK CLEAVAGE SIMULATION BASED ON THE NUMERICAL MODELING OF THE PLANE STRESS STATE

Vladislav. BOGDANOV¹, Georgij SULYM²

¹*National Transport Universit,
Suvorova str., 1 01010 Kyiv, Ukraine*

²*Ivan Franko National University of L'viv,
Universytetska Str., 1 79000 L'viv, Ukraine*

On the base of developed method of solving problems of planar stress state in non-stationary plastic-elastic model the problem of crack cleavage was solved when non-stationary pressure is applied. The non-stationary pressure time dependence is linear and area of that pressure has not changed. The crack is growing by local criteria of destruction. There were determined dependences of stresses, Odquist parameter, plastic and elastic deformation and etc. parameters for different stress intensity values.

Key words: Compact specimen, elastic-plastic deformation, dynamic problem, crack cleavage, deformation energy.

Стаття надійшла до редколегії 17.02.2010

Прийнята до друку 22.12.2010

**ДО ПИТАННЯ ІСНУВАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЛЯ
СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНОЮ
ДІЄЮ У ПРОСТОРІ $\mathbb{R}^n$**

Мирослава ПРОХОРЕНКО

*Національний університет "Львівська політехніка",
вул. С. Бандери, 12 79013 Львів, Україна*

Досліджено питання існування періодичних розв'язків для системи звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією в $\mathbb{R}^n$ -вимірному просторі у нефіксовані моменти часу.

Ключові слова: звичайні диференціальні рівняння, імпульсна дія, періодичний розв'язок.

Під час моделювання механічних, радіотехнічних, фізичних, біологічних та інших процесів виникає потреба у вивченні диференціальних рівнянь з імпульсною дією [1]. Питанню існування періодичних розв'язків системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксовані та нефіксовані моменти часу присвячено багато праць, наприклад, [1-4].

Наша праця є продовженням досліджень [4] та розглядає систему диференціальних рівнянь з імпульсною дією в $\mathbb{R}^n$ -вимірному просторі в моменти часу, що визначаються самим розв'язком системи, досліджуються умови існування простих періодичних (тобто таких, що мають один імпульс на періоді) розв'язків такої системи, побудовано прості періодичні розв'язки.

1. Формулювання задачі. Розглянемо динамічну систему з імпульсною дією, визначену в просторі $\mathbb{R}^n$ системою звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dy}{dt} = Ay(t), t \in [t_0, +\infty), \quad (1)$$

з початковою умовою

$$y(t_0) = y_0 \quad (2)$$

та умовою імпульсної дії

$$y(t+0) - y(t-0) = g, \text{ коли } y(t-0) \in D_0, \quad (3)$$

де A - матриця зі сталими коефіцієнтами розміру $n \times n$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$; $D_0 = \{y \in \mathbb{R}^n : \phi(y) = c_1\}$ - задана гіперплощина; $\phi(y) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_n y_n$ - лінійний функціонал; $c_1, b_1, b_2, \dots, b_n$ - сталі; $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ - заданий вектор.

Процес відбувається так: точка $(t, y(t))$, вийшовши з початкового положення (t_0, y_0) , з перебігом часу t виконує рух по кривій

$\{(t, y(t)) \in \mathbb{I}^{n+1} : y(t) = \eta(t, y_0, t_0), t \geq t_0\}$, де $y(t) = \eta(t, y_0, t_0)$ - розв'язок системи рівнянь (1). Рух по кривій відбувається до моменту часу $t = t_1 > t_0$, коли точка $(t, y(t))$ потрапляє на гіперплощину D_0 . В момент $t = t_1$ відбувається "миттєва" зміна положення точки $(t, y(t))$ за законом (3), тобто відбувається перекидання з точки $(t_1, y(t_1))$ в точку (t_1, y_1) , де $y_1 = y(t_1) + g$. Внаслідок цього точка $(t, y(t))$ продовжує рухатися по кривій $\{(t, y(t)) \in \mathbb{I}^{n+1} : y(t) = \eta(t, y_1, t_1), t \geq t_1\}$, що є розв'язком диференціального рівняння (1) з початковою умовою $y(t_1) = y_1$, до наступного моменту часу t_2 ($t_2 > t_1$), коли $(t, y(t))$ знову потрапить на D_0 . У цей момент точка $(t, y(t))$ виконає моментальне перекидання з положення $(t_2, y(t_2))$ в положення $(t_2, y_2) = (t_2, y(t_2) + g)$, після чого рухатиметься кривою $\{(t, y(t)) \in \mathbb{I}^{n+1} : y(t) = \eta(t, y_2, t_2), t \geq t_2\}$, де $y(t) = \eta(t, y_2, t_2)$ - розв'язок диференціального рівняння (1), що задовольняє умову $y(t_2) = y_2$, до нового потрапляння з D_0 і т.д.

Розв'язком задачі (1)-(3) назовемо функцію $y(t)$, яка неперервно диференційовна на кожному інтервалі (t_k, t_{k+1}) , де $k = 0, 1, \dots$, t_k - моменти імпульсної дії, тобто $y(t_k) \in D_0, k \in \mathbb{N}$. У точках t_k функція $y(t)$ неперервна зліва і має розриви першого роду.

Розв'язок задачі (1)-(3) існує, єдиний і визначений для всіх $t \in [t_0, +\infty)$, оскільки для кожного $t \in [t_k, t_{k+1}), k = 0, 1, \dots$ розв'язуємо задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь з відповідною початковою умовою:

- (2), якщо $k = 0$ і $y(t_0) \notin D_0$;
- $y(t_0 + 0) = y(t_0) + g$, якщо $k = 0$ і $y(t_0) \in D_0$;
- $y(t_k + 0) = y(t_k - 0) + g$, якщо $k = 1, 2, \dots$ і $y(t_k - 0) \in D_0$.

Розв'язки задачі (1)-(3) можна поділити на два типи:

1) такі, що не зазнають імпульсної дії - інтегральна крива системи (1)-(3) не перетинає гіперплощину D_0 ;

2) такі, що зазнають імпульсної дії - інтегральна крива системи (1)-(3) перетинає гіперплощину D_0 . Поведінка розв'язків задачі (1)-(3) у цьому випадку вивчена лише для частинних випадків.

Позначимо

$$D_+ = \{(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{I}^n : b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_n y_n > c_1\},$$

$$D_- = \{(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{I}^n : b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_n y_n < c_1\},$$

$$D_g = \{(y_1 + g_1, y_2 + g_2, \dots, y_n + g_n) \in \mathbb{R}^n : (y_1, y_2, \dots, y_n) \in D_0, \\ b_1(y_1 + g_1) + b_2(y_2 + g_2) + \dots + b_n(y_n + g_n) = c_2\}$$

Нехай $\sigma(A)$ спектр матриці A . Інтегральна крива системи (1)-(3) перетинає гіперплощина D_0 , якщо:

(A_1) : $\max\{\operatorname{Re} \lambda \mid \lambda \in \sigma(A)\} < 0$, або $\{\lambda_k \in \sigma(A) \mid \lambda_k = i\omega, k = \overline{1, n}, \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ та $y_0 \in D_+ \cup D_0$;

(B_1) : $\min\{\operatorname{Re} \lambda \mid \lambda \in \sigma(A)\} > 0$, або $\{\lambda_k \in \sigma(A) \mid \lambda_k = i\omega, k = \overline{1, n}, \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ та $y_0 \in D_- \cup D_0$.

Щоб виконати імпульсні дії більше одного разу для випадку (A_1) , треба щоб гіперплощина D_g перебувала в D_+ , що еквівалентно співвідношенням

$$(A_{1,1}): \quad b_1 g_1 + b_2 g_2 + \dots + b_n g_n + c_1 = c_2, c_2 > c_1 > 0,$$

для випадку (B_1) необхідно, щоб гіперплощина D_g перебувала в D_- , що еквівалентно співвідношенням

$$(B_{1,1}): \quad b_1 g_1 + b_2 g_2 + \dots + b_n g_n + c_2 = c_1, c_1 > c_2 > 0,$$

де $n = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ – вектор зовнішньої нормалі D_- , початок координат належить до D_- .

Розглянемо випадок (A_1) з умовою $(A_{1,1})$, випадок (B_1) з умовою $(B_{1,1})$ розглядають аналогічно.

2. Існування простих періодичних розв'язків.

Означення. Періодичний розв'язок задачі (1)-(3) назвемо простим, якщо відстань між його сусідніми моментами імпульсів постійна і дорівнює періоду цього розв'язку.

Нехай матриця A має дійсні власні значення.

Зафіксуємо гіперплощину D_0 і вектор g , та визначимо умови існування простого періодичного розв'язку задачі (1)-(3) (тобто, існування $y_0 \in D_0$, при якому розв'язок задачі (1)-(3) буде простим періодичним), знайдемо вигляд простого періодичного розв'язку.

Координати y_0 , при такому формулюванні задачі, будуть координатами нерухомих точок оператора

$$F: D_0 \rightarrow D_0, \quad F(y) = e^{TA}(y + g),$$

які визначаються системою

$$y = e^{TA}(y + g), \quad (4)$$

де $y \in D_0$, T – період розв'язку; $T > 0$; e^{TA} – експонента оператора TA .

Тобто, існування простих періодичних розв'язків задачі (1)-(3) зводиться до існування нерухомих точок оператора F .

Зведемо матрицю A до жорданової форми $J = B^{-1}AB$, (B - матриця переходу від базису $x_1, x_2, \dots, x_n$ до базису $y_1, y_2, \dots, y_n$) та розглянемо спочатку задачу

$$\frac{dx}{dt} = Jx(t), \quad t \in [t_0, +\infty), \quad (5)$$

з початковою умовою

$$x(t_0) = x_0 \quad (6)$$

та умовою імпульсної дії

$$x(t+0) - x(t-0) = h, \quad x(t-0) \in S_0, \quad (7)$$

де

$$x_0 = B^{-1}y_0, \quad h = B^{-1}g, \quad x_0 \in S_+ \cup S_0, \quad S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = c_1\},$$

$$S_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n > c_1\}, \quad S_- = \{x \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n < c_1\},$$

$n = B^{-1}n$, $n = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ - вектор зовнішньої нормалі S_- ; $n = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ - вектор зовнішньої нормалі D_- ; умова $(A_{1,1})$ набуває вигляду

$$a_1h_1 + a_2h_2 + \dots + a_nh_n = c_2 - c_1, \quad c_2 > c_1 > 0,$$

де $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$

Дослідимо спочатку питання існування простих періодичних розв'язків задачі (5)-(7), яке зводиться до існування нерухомих точок оператора

$$\Phi : S_0 \rightarrow S_0, \quad \Phi(x) = e^{TJ}(x + h),$$

що визначаються системою

$$x = e^{TJ}(x + h), \quad x \in S_0. \quad (8)$$

Лема 1. Нехай $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ - дійсні власні значення матриці J . Тоді для заданих S_0 та h існує єдиний простий періодичний розв'язок задачі (5)-(7) за виконання однієї з умов:

1) $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda < 0$ з геометричною кратністю n ;

2) $\max_k \lambda_k < 0$, $\lambda_k \neq \lambda_j (k \neq j)$ та $\sum_{j=1}^n \frac{a_j h_j}{\lambda_j} < 0$.

Доведення. 1. Нехай $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda < 0$ з геометричною кратністю n , тобто розмірність власного простору, що відповідає власному значенню λ , дорівнює n . Тоді система (8) набуває вигляду

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = (x_1 + h_1)e^{\lambda T}, \\ x_2 = (x_2 + h_2)e^{\lambda T}, \\ \mathbf{L} \\ x_n = (x_n + h_n)e^{\lambda T}, \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = c_1 \end{array} \right.$$

та має єдиний розв'язок

$$x_1 = \frac{c_1 h_1}{c_2 - c_1}, x_2 = \frac{c_1 h_2}{c_2 - c_1}, \dots, x_n = \frac{c_1 h_n}{c_2 - c_1}, \quad T = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{c_1}{c_2}.$$

Тобто, при заданих S_0 та h однозначно визначаються координати нерухомої точки оператора Φ . Отже, існує єдиний простий періодичний розв'язок $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t))$ задачі (5)-(7), який на своєму періоді T набуває вигляду

$$X_1(t) = \frac{c_2 h_1}{c_2 - c_1} e^{\lambda t}, \quad X_2(t) = \frac{c_2 h_2}{c_2 - c_1} e^{\lambda t}, \dots, X_n(t) = \frac{c_2 h_n}{c_2 - c_1} e^{\lambda t} \quad (0 \leq t < T),$$

де $T = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{c_1}{c_2}$.

2. Всі власні значення матриці $\mathbf{J}$ дійсні, від'ємні і попарно різні. У цьому випадку систему (8) запишемо у вигляді

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = (x_1 + h_1)e^{\lambda_1 T}, \\ x_2 = (x_2 + h_2)e^{\lambda_2 T}, \\ \mathbf{L} \\ x_n = (x_n + h_n)e^{\lambda_n T}, \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = c_1, \end{array} \right.$$

розв'язком якої є координати нерухомої точки оператора Φ

$$x_1 = \frac{h_1 e^{\lambda_1 T}}{1 - e^{\lambda_1 T}}, x_2 = \frac{h_2 e^{\lambda_2 T}}{1 - e^{\lambda_2 T}}, \dots, x_n = \frac{h_n e^{\lambda_n T}}{1 - e^{\lambda_n T}},$$

а період T знаходимо з рівняння

$$\frac{a_1 h_1}{1 - e^{\lambda_1 T}} + \frac{a_2 h_2}{1 - e^{\lambda_2 T}} + \dots + \frac{a_n h_n}{1 - e^{\lambda_n T}} = c_2. \quad (9)$$

Нехай $\lambda_1 = \min_{k=1,n} \{\lambda_k\}$. Помножимо співвідношення (9) на $(1 - e^{\lambda_1 T})$ та розглянемо функцію

$$f(T) = a_1 h_1 + a_2 h_2 \frac{1 - e^{\lambda_1 T}}{1 - e^{\lambda_2 T}} + a_3 h_3 \frac{1 - e^{\lambda_1 T}}{1 - e^{\lambda_3 T}} + \dots + a_n h_n \frac{1 - e^{\lambda_1 T}}{1 - e^{\lambda_n T}} - c_2 (1 - e^{\lambda_1 T}),$$

$T \in (0, +\infty)$. Оскільки існування нулів функції f еквівалентне існуванню розв'язку рівняння (9), то правильна гранична поведінка $\lim_{T \rightarrow +\infty} f(T) = -c_1 < 0$,

$\lim_{T \rightarrow +0} f(T) = a_1 h_1 + a_2 h_2 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + a_3 h_3 \frac{\lambda_1}{\lambda_3} + \dots + a_n h_n \frac{\lambda_1}{\lambda_n} > 0$ за умовою теореми. Крім того,

$$f'(T) = \lambda_1 c_2 e^{\lambda_1 T} + \sum_{j=2}^n \left(\frac{\lambda_j e^{\lambda_j T} (1 - e^{\lambda_1 T})}{(1 - e^{\lambda_j T})^2} - \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 T}}{1 - e^{\lambda_j T}} \right) < \lambda_1 c_2 e^{\lambda_1 T} + \sum_{j=2}^n (\lambda_j - \lambda_1) e^{\lambda_j T} \frac{1 - e^{\lambda_1 T}}{(1 - e^{\lambda_j T})^2} < 0$$

для всіх $0 < T < +\infty$. Тобто, функція f є неперервною та спадною функцією, яка на кінцях інтервалу $(0, +\infty)$ набуває значення різних знаків, а отже, має єдиний нуль, що і треба було довести.

Простий періодичний розв'язок $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t))$ задачі (5)-(7) для цього випадку набуває вигляду

$$X_1(t) = \frac{h_1 e^{\lambda_1 t}}{1 - e^{\lambda_1 T}}, X_2(t) = \frac{h_2 e^{\lambda_2 t}}{1 - e^{\lambda_2 T}}, \dots, X_n(t) = \frac{h_n e^{\lambda_n t}}{1 - e^{\lambda_n T}} \quad (0 \leq t < T),$$

де T визначаємо з рівняння (9).

Лема 2. Нехай матриця J є жордановою кліткою n -го порядку та дійсним власним значенням $\lambda < 0$. Тоді для заданих S_0 і h існує простий періодичний розв'язок задачі (5)-(7) за виконання умови

$$\sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m}{\lambda^m} \sum_{j=1}^{n-m} a_j h_{j+m} > 0.$$

Доведення. Система (8) набуває вигляду

$$\begin{cases} x_1 = e^{\lambda T} \sum_{j=1}^n \frac{T^{j-1}}{(j-1)!} (x_j + h_j), \\ x_2 = e^{\lambda T} \sum_{j=2}^n \frac{T^{j-2}}{(j-2)!} (x_j + h_j), \\ \quad \mathbf{L} \\ x_n = e^{\lambda T} (x_n + h_n), \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = c_1, \end{cases} \quad (10)$$

з якої одержуємо координати нерухомої точки

$$x_j = \sum_{k=0}^{n-j} \frac{T^k P_k(e^{\lambda T})}{k!(1-e^{\lambda T})^{k+1}} h_{k+j} \quad (j = \overline{1, n}).$$

Тут $P_k(e^{\lambda T})$ – поліном степеня k ($k = \overline{1, n}$), $P_0(e^{\lambda T}) = e^{\lambda T}$, причому границя $\lim_{T \rightarrow +0} P_k(e^{\lambda T}) = k!$ (коефіцієнти поліномів $P_k(e^{\lambda T})$ одержуємо безпосередньо з системи (10), зокрема $P_1(e^{\lambda T}) = e^{\lambda T}$, $P_2(e^{\lambda T}) = e^{\lambda T} + e^{2\lambda T}$, $P_3(e^{\lambda T}) = e^{\lambda T} + 4e^{2\lambda T} + e^{3\lambda T}$, $P_4(e^{\lambda T}) = e^{\lambda T} + 11e^{2\lambda T} + 11e^{3\lambda T} + e^{4\lambda T}$, $P_5(e^{\lambda T}) = e^{\lambda T} + 26e^{2\lambda T} + 66e^{3\lambda T} + 26e^{4\lambda T} + e^{5\lambda T}$, $P_6(e^{\lambda T}) = e^{\lambda T} + 57e^{2\lambda T} + 347e^{3\lambda T} + 257e^{4\lambda T} + 57e^{5\lambda T} + e^{6\lambda T}, \dots$, а рівняння для знаходження періоду T нерухомої точки набуває вигляду

$$c_2 e^{\lambda T} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{T^k P_k(e^{\lambda T})}{k!(1-e^{\lambda T})^k} \sum_{j=k+1}^n a_{j-k} h_j = c_1. \quad (11)$$

Розглянемо визначену для $T \in (0, \infty)$ функцію

$$f(T) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{T^k P_k(e^{\lambda T})}{k!(1-e^{\lambda T})^k} \sum_{j=k+1}^n a_{j-k} h_j + c_2 e^{\lambda T} - c_1.$$

Правильні границі $\lim_{T \rightarrow +\infty} f(T) = -c_1 < 0$,

$$\lim_{T \rightarrow +0} f(T) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\lambda^k} \sum_{j=1}^{n-k} a_j h_{j+k} + c_2 - c_1 = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m}{\lambda^m} \sum_{j=1}^{n-m} a_j h_{j+m} > 0,$$

оскільки за умовою теореми $c_2 - c_1 = \sum_{j=1}^n a_j h_j$. Отже, функція f на проміжку $(0, +\infty)$ за теоремою Больцано-Коші [5, с. 168] має, принаймні, один нуль, тобто рівняння (11) має розв'язок.

Простий періодичний розв'язок задачі (5)-(7) у цьому випадку має вигляд

$$X(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)),$$

де

$$X_j(t) = \frac{h_j e^{\lambda t}}{1 - e^{\lambda T}} + e^{\lambda t} \sum_{k=1}^{n-j} \frac{T^k P_k(e^{\lambda T})}{k!(1 - e^{\lambda T})^{k+1}} h_{k+j}, \quad j = \overline{1, n},$$

період T визначаємо з рівняння (11), $P_k(e^{\lambda T})$ – поліном степеня k ($P_0(e^{\lambda T}) = e^{\lambda T}, k = \overline{1, n}$) (коефіцієнти поліномів $P_k(e^{\lambda T})$ одержуємо безпосередньо з системи (10).

На підставі лем 1, 2 сформулюємо умови існування простого періодичного розв'язку задачі (1)-(3) у такій теоремі.

Теорема. Нехай власні значення $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ матриці A – дійсні числа, виконуються (A_1) , $(A_{1,1})$ та одна з умов:

- 1) $\lambda_k \neq \lambda_j (k \neq j; k, j \in \mathbb{N})$ та $\sum_{j=1}^n \frac{a_j h_j}{\lambda_j} < 0$;
- 2) $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda$ з геометричною кратністю n ;
- 3) $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda$ з геометричною кратністю 1 та

$$\sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m}{\lambda^m} \sum_{j=1}^n a_j h_{j+m} > 0,$$

де $h = B^{-1}g$; $\mathbf{h} = B^{-1}n$; B^{-1} – матриця переходу від базису $y_1, y_2, \dots, y_n$ до базису $x_1, x_2, \dots, x_n$; $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$; $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$; $\mathbf{h} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$; $n = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ – вектор зовнішньої нормалі D_- .

Тоді для заданих гіперплощини D_0 та вектора g існує простий періодичний розв'язок задачі (1)-(3).

Доведення. Перетворимо систему (8) до (4) при заміні $x = B^{-1}y$, тобто

$$\begin{aligned} x &= e^{TJ} (x + h), \\ B^{-1}y &= e^{B^{-1}TAB} (B^{-1}y + B^{-1}g), \\ y &= B e^{B^{-1}TAB} B^{-1} (y + g), \\ y &= e^{TA} (y + g). \end{aligned}$$

Тобто, нерухомі точки x^*, y^* відповідно операторів Φ, F зв'язані співвідношенням $x^* = B^{-1}y^*$. Тому умови існування простого періодичного розв'язку задачі (5)-(7) при переході від базису x_1, x_2 до y_1, y_2 є умовами існування простого періодичного розв'язку задачі (1)-(3).

-
1. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К., 1987.
 2. Самойленко В.Г., Елгондыев К.К. Исследование линейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в $\mathbf{R}^2$. – К., 1989. (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 89.59)

3. Елгондыев К.К. О периодических решениях систем с импульсным воздействием // Узб. мат. журн. – 1999. – № 4. – С. 62–67.
4. Вус А.Я., Прохоренко М.В. До питання існування та єдиності періодичних розв'язків системи двох диференціальних рівнянь з імпульсною дією // Математичні студії. Львів. – 2009. – Т. 32, № 1. – С. 64–72.
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. – М., 1970. – Т.1.

**К ВОПРОСУ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ
СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМ
ДЕЙСТВИЕМ В $\mathbb{R}^n$ ПРОСТРАНСТВЕ**

Мирослава ПРОХОРЕНКО

*Національний університет "Львівська політехніка",
ул. С. Бандери, 12 79013 Львів, Україна*

Исследован вопрос существования периодических решений для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в n -мерном пространстве в нефиксированные моменты времени.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, импульсная действие, периодическое решение.

**TO A QUESTION OF PERIODIC SOLUTIONS
FOR SYSTEM OF THE DIFFERENTIAL EQUATIONS
WITH IMPULSE INFLUENCE IN SPACE $\mathbb{R}^n$**

Myroslava PROKHORENKO

*Lviv Polytechnik National University,
Bandery str, 12 79013 Lviv, Ukraine*

The question of existence of periodic solutions for system of the ordinary differential equations with impulse influence in n -dimensional space during the unstable moments of time is investigated.

Key words: the ordinary differential equations, pulse influence, the periodic decision.

Стаття надійшла до редколегії 10.05.2010
Прийнята до друку 22.12.2010

УДК 517.95

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ ЗА ПРОСТОРОВИМИ ЗМІННИМИ В НЕОБМЕЖЕНІЙ ЗА ЧАСОМ ОБЛАСТІ

Галина БАЗИЛЯК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Досліджено поведінку при $t \rightarrow \infty$ узагальнених розв'язків мішаної задачі для нелінійного параболічного рівняння четвертого порядку за просторовими змінними.

Ключові слова: мішана задача, параболічне рівняння.

Нехай Ω – обмежена область з межею $\partial\Omega \in C^1$; $Q = \Omega \times (0, +\infty)$, $Q_T = \Omega \times (0, T)$, де $T > 0$, $\Omega_\tau = \Omega \times \{t = \tau\}$, $\tau \in [0, T]$.

В області Q розглянемо мішану задачу для рівняння

$$u_{tt} + \sum_{i,j,s,l=1}^n (a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j})_{x_s x_l} - \sum_{i=1}^n (a_i(x) |u_{x_i}|^{q-2} u_{x_i})_{x_i} - \sum_{i,j=1}^n (b_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} - \\ - \sum_{i=1}^n (b_i(x) |u_{x_i}|^{q-2} u_{x_i})_{x_i} + a_0(x) u_t + b_0(x) u + c_0(x) |u|^{p-2} u = f(x, t) \quad (1)$$

з початковими і крайовими умовами

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3)$$

де ν – зовнішня одинична нормаль до $\partial\Omega$; $p > 2$, $q > 2$.

У цій праці визначено умови існування розв'язку мішаної задачі (1)–(3) і досліджено його поведінку при $t \rightarrow \infty$. Деякі задачі для таких нелінійних рівнянь розглянуто в [2–4] як моделі фазового переходу у в'язкопружних середовищах з капілярністю. Зокрема, в [5] вивчено поведінку розв'язків мішаної задачі при $t \rightarrow \infty$ для часткового випадку рівняння (1).

Введемо простори

$$L^q(\Omega) = \left\{ u : \left(\int_{\Omega} |u|^q dx \right)^{1/q} < \infty \right\}, \quad q > 1,$$

$$W_0^{1q}(\Omega) = \left\{ u : u_{x_i} \in L^q(\Omega), u|_{\partial\Omega} = 0, i \in \{1, \dots, n\} \right\}$$

з відповідними нормами

$$\|u\|_{L^q(\Omega)}^q = \int_{\Omega} |u|^q dx, \quad \|u\|_{W_0^{1,q}(\Omega)}^q = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^q dx;$$

$$L_{loc}^q((0, +\infty); L^q(\Omega)) = \left\{ u : u \in L^q((0, T_1); L^q(\Omega)), \forall T_1 \in (0, +\infty) \right\}.$$

Зокрема, $H_0^2(\Omega) = W_0^{2,2}(\Omega)$.

Нехай $f \in L^2(\Omega)$ і коефіцієнти рівняння (1) задовольняють умови

$$(A) \quad a_{ij}^{sl}, a_i, a_0 \in L^\infty(\Omega), \quad i, j, s, l \in \{1, \dots, n\},$$

$a_0(x) \geq A_0, \quad a_i(x) \geq A_i > 0$ для майже всіх $x \in \Omega$,

$$\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x) \xi_{ij} \xi_{sl} \geq A_2 \sum_{i,j=1}^n |\xi_{ij}|^2, \quad A_2 > 0 \quad \text{для майже всіх } x \in \Omega \text{ і всіх } \xi_{ij} \in \mathbb{R},$$

$$a_{ij}^{sl}(x) = a_{sl}^{ij}(x) \quad \text{для майже всіх } x \in \Omega \text{ і всіх } i, j, s, l \in \{1, \dots, n\};$$

$$(B) \quad b_{ij}, b_i, b_0 \in L^\infty(\Omega), \quad i, j \in \{1, \dots, n\},$$

$b_i(x) \geq B_i > 0$ для майже всіх $x \in \Omega$,

$$\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq B_2 \sum_{i,j=1}^n |\xi_i|^2, \quad B_2 > 0 \quad \text{для майже всіх } x \in \Omega \text{ і всіх } \xi_i \in \mathbb{R},$$

$$b_{ij}(x) = b_{ji}(x) \quad \text{для майже всіх } x \in \Omega \text{ і всіх } i, j \in \{1, \dots, n\};$$

$$(C) \quad c_0 \in L^\infty(\Omega), \quad c_0(x) \geq C_0 > 0 \quad \text{для майже всіх } x \in \Omega.$$

Означення. Узагальненим розв'язком задачі (1) – (3) назвемо функцію $u \in C([0, +\infty); H_0^2(\Omega)) \cap L_{loc}^\infty((0, +\infty); W_0^{1,q}(\Omega)) \cap L_{loc}^\infty((0, +\infty); L^p(\Omega))$, $u_t \in C([0, +\infty), L^2(\Omega)) \cap L_{loc}^q((0, +\infty), W_0^{1,q}(\Omega))$, яка задовольняє початкові умови (2) та інтегральну рівність

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_t} \left[u_t v + \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} v_{x_s x_l} + \sum_{i=1}^n a_i(x) |u_{x_i}|^{q-2} u_{x_i} v_{x_i} + \right. \\ & + \sum_{i=1}^n b_i(x) |u_{x_i}|^{q-2} u_{x_i} v_{x_i} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} + a_0(x) u_t v + b_0(x) uv + \\ & \left. + c_0(x) |u|^{p-2} uv - f(x, t) v \right] dx = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

для майже всіх $\tau \in (0, +\infty)$ і для всіх $v \in H_0^2(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega) \cap L^p(\Omega)$.

Теорема 1. Нехай коефіцієнти рівняння (1) задовольняють умови (A), (B), (C) і, крім того, $a_{ij}^{sl} \in H^2(\Omega)$, $a_i, b_{ij}, b_i \in H^1(\Omega)$ для всіх $i, j, s, l \in \{1, \dots, n\}$;

$f, f_t \in L^2_{loc}((0, +\infty); L^2(\Omega)); u_0 \in H^2_0(\Omega) \cap H^4(\Omega) \cap W^{1,q}_0(\Omega) \cap L^{2(p-1)}(\Omega), u_1 \in H^2_0(\Omega),$
 $|u_{1x_i}|^{q-2} u_{1x_i} \in H^1(\Omega), |u_{0x_i}|^{q-2} u_{0x_i} \in$
 $H^1(\Omega), i \in \{1, \dots, n\}; q \geq 3 \text{ при } n \leq 2 \text{ і } 3 < q \leq \frac{n}{n-2} \text{ при } n > 2;$
 $p \leq \frac{q(n+4)-2n}{2q} \text{ і } p \leq \frac{2n}{n-4} \text{ при } n > 4.$ Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (1)–(3).

При доведенні теореми 1 використано метод Гальоркіна і методи монотонності та компактності [6].

Введемо позначення

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} |u_t|^2 + \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} u_{x_s x_l} + b_0(x) |u|^2 dx + \\ + \frac{1}{p} \int_{\Omega_t} c_0(x) |u|^p dx + \frac{1}{q} \int_{\Omega_t} \sum_{i=1}^n b_i(x) |u_{x_i}|^q dx. \quad (5)$$

Теорема 2. Нехай коефіцієнти рівняння (1) задовольняють умови (А), (В), (С) і $f \in L^2_{loc}((0, +\infty); L^2(\Omega)), u_0 \in H^2_0(\Omega) \cap W^{1,q}_0(\Omega) \cap L^p(\Omega), u_1 \in L^2(\Omega), p > 2,$
 $q > 2.$ Крім того,

$$\int_{Q_t} e^{\frac{M_1 \tau \varepsilon}{2}} |f(x, \tau)|^2 dx d\tau \leq t^\beta M_2, \quad (6)$$

де $M_1, M_2, \beta, \varepsilon$ – додатні сталі. Тоді узагальнений розв'язок задачі (1)–(3) задовольняє оцінку

$$E(t) \leq e^{\frac{M_1 \varepsilon t}{2}} M_3, \quad M_3 > 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty.$$

Доведення. Для доведення теореми використаємо метод із [7]. Спочатку продиференціюємо (5) за t і одержимо

$$E'(t) = \int_{\Omega_t} \left[u_{tt} u_t + \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x) u_{tx_i x_j} u_{x_s x_l} + b_0(x) u u_t + \right. \\ \left. + c_0(x) |u|^{p-2} u u_t + \sum_{i=1}^n b_i(x) |u_{x_i}|^{q-2} u_{x_i} u_{tx_i} \right] dx.$$

Прийmemo в (4) замість $v = u_t$. Отримаємо

$$\int_{\Omega_\tau} \left[u_{tt} u_t + \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} u_{tx_s x_l} + \sum_{i=1}^n a_i(x) |u_{tx_i}|^q + \sum_{i=1}^n b_i(x) |u_{x_i}|^{q-2} u_{x_i} u_{tx_i} + \right.$$

$$+ \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} + a_0(x) |u_t|^2 + b_0(x) uu_t + c_0(x) |u|^{p-2} uu_t - f(x, t) u_t \Big] dx = 0.$$

Тоді

$$E'(t) = \int_{\Omega_t} \left[f(x, t) u_t - \sum_{i=1}^n a_i(x) |u_{x_i}|^q - a_0(x) |u_t|^2 - \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} \right] dx.$$

Оцінимо доданки останньої рівності

$$J_1 := \int_{\Omega_t} f(x, t) u_t dx \leq \frac{1}{2\delta_1} \int_{\Omega_t} |f(x, t)|^2 dx + \frac{\delta_1}{2} \int_{\Omega_t} |u_t|^2 dx, \text{ де } \delta_1 > 0;$$

$$J_2 := - \int_{\Omega_t} \sum_{i=1}^n a_i(x) |u_{x_i}|^q dx \leq -A_1 \int_{\Omega_t} |u_{x_i}|^q dx;$$

$$J_3 := - \int_{\Omega_t} a_0(x) |u_t|^2 dx \leq -A_0 \int_{\Omega_t} |u_t|^2 dx;$$

$$J_4 := - \int_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} dx \leq -B_2 \int_{\Omega_t} |u_{x_i}|^2 dx.$$

З оцінок $J_1 - J_4$ одержимо

$$E'(t) \leq \frac{1}{2\delta_1} \int_{\Omega_t} |f(x, t)|^2 dx - \int_{\Omega_t} \left[A_1 \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^q + \left(A_0 - \frac{\delta_1}{2} \right) |u_t|^2 + B_2 \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 \right].$$

Нехай $\delta_1 < 2A_0$.

Введемо позначення

$$E_\varepsilon(t) = E(t) + \varepsilon \psi(t),$$

де

$$\psi(t) = \int_{\Omega_t} uu_t dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \left[a_0(x) |u|^2 + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} \right] dx, \quad \varepsilon > 0.$$

Розглянемо

$$|E_\varepsilon(t) - E(t)| = \varepsilon |\psi(t)| = \varepsilon \left| \int_{\Omega_t} uu_t dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \left[a_0(x) |u|^2 + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} \right] dx \right|.$$

Оскільки

$$\int_{\Omega_t} uu_t dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} |u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} |u_t|^2 dx,$$

то

$$|E_\varepsilon(t) - E(t)| \leq \varepsilon \mu_1 E(t), \quad (7)$$

де μ_1 – деяка додатна стала, яка залежить від коефіцієнтів рівняння (1).

Розглянемо

$$\begin{aligned} E'_\varepsilon(t) &= E'(t) + \varepsilon \int_{\Omega_t} \left[\mathbf{u} \mathbf{u}_t + |\mathbf{u}_t|^2 + \mathbf{a}_0(\mathbf{x}) \mathbf{u} \mathbf{u}_t + \sum_{i,j=1}^n \mathbf{b}_{ij}(\mathbf{x}) \mathbf{u}_{x_i} \mathbf{u}_{x_j} \right] d\mathbf{x} \leq \\ &\leq \frac{1}{2\delta_1} \int_{\Omega_t} |f(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x} - A_1 \int_{\Omega_t} \sum_{i=1}^n |\mathbf{u}_{x_i}|^q d\mathbf{x} - \left(A_0 - \frac{\delta_1}{2} \right) \int_{\Omega_t} |\mathbf{u}_t|^2 d\mathbf{x} - \\ &- B_2 \int_{\Omega_t} \sum_{i=1}^n |\mathbf{u}_{x_i}|^2 d\mathbf{x} + \varepsilon \int_{\Omega_t} \left[|\mathbf{u}_t|^2 - \sum_{i,j,s,l=1}^n \mathbf{a}_{ij}^{sl}(\mathbf{x}) \mathbf{u}_{x_i x_j} \mathbf{u}_{x_s x_l} - \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i(\mathbf{x}) |\mathbf{u}_{x_i}|^{q-2} \mathbf{u}_{x_i} \mathbf{u}_{x_i} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^n \mathbf{b}_i(\mathbf{x}) |\mathbf{u}_{x_i}|^q - \mathbf{b}_0(\mathbf{x}) |\mathbf{u}|^2 - \mathbf{c}_0(\mathbf{x}) |\mathbf{u}|^p + f(\mathbf{x}, t) \mathbf{u} \right] d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Оцінимо доданки останньої нерівності

$$\begin{aligned} J_5 &:= - \int_{\Omega_t} \sum_{i,j,s,l=1}^n \mathbf{a}_{ij}^{sl}(\mathbf{x}) \mathbf{u}_{x_i x_j} \mathbf{u}_{x_s x_l} d\mathbf{x} \leq -A_2 \int_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^n |\mathbf{u}_{x_i x_j}|^2 d\mathbf{x}; \\ J_6 &:= - \int_{\Omega_t} \sum_{i=1}^n \mathbf{b}_i(\mathbf{x}) |\mathbf{u}_{x_i}|^q d\mathbf{x} \leq -B_1 \int_{\Omega_t} \sum_{i=1}^n |\mathbf{u}_{x_i}|^q d\mathbf{x}; \\ J_7 &:= - \int_{\Omega_t} \mathbf{b}_0(\mathbf{x}) |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} \leq -B_0 \int_{\Omega_t} |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x}; \\ J_8 &:= - \int_{\Omega_t} \mathbf{c}_0(\mathbf{x}) |\mathbf{u}|^p d\mathbf{x} \leq -C_0 \int_{\Omega_t} |\mathbf{u}|^p d\mathbf{x}; \\ J_6 &:= - \int_{\Omega_t} \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i(\mathbf{x}) |\mathbf{u}_{x_i}|^{q-2} \mathbf{u}_{x_i} \mathbf{u}_{x_i} d\mathbf{x} \leq \frac{A_1}{q' \delta_2} \int_{\Omega_t} \sum_{i=1}^n |\mathbf{u}_{x_i}|^q d\mathbf{x} + \frac{\delta_2 A_1}{q} \int_{\Omega_t} \sum_{i=1}^n |\mathbf{u}_{x_i}|^q d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

де $\delta_2 > 0$, $q' = \frac{1}{1-q}$.

З оцінок J_1 і $J_5 - J_9$ випливає, що

$$\begin{aligned} E'_\varepsilon(t) &\leq \frac{1+\varepsilon}{2\delta_1} \int_{\Omega_t} |f(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x} - \left(A_1 - \frac{A_1 \varepsilon}{q' \delta_2} \right) \int_{\Omega_t} \sum_{i=1}^n |\mathbf{u}_{x_i}|^q d\mathbf{x} - B_2 \int_{\Omega_t} \sum_{i=1}^n |\mathbf{u}_{x_i}|^2 d\mathbf{x} - \\ &- \left(A_0 - \frac{\delta_1}{2} - \varepsilon \right) \int_{\Omega_t} |\mathbf{u}_t|^2 d\mathbf{x} - A_2 \varepsilon \int_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^n |\mathbf{u}_{x_i x_j}|^2 d\mathbf{x} - \left(B_1 - \frac{\delta_2 A_1}{q} \right) \varepsilon \int_{\Omega_t} \sum_{i=1}^n |\mathbf{u}_{x_i}|^q d\mathbf{x} - \\ &- \left(B_0 - \frac{\delta_1}{2} \right) \varepsilon \int_{\Omega_t} |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} - C_0 \varepsilon \int_{\Omega_t} |\mathbf{u}|^p d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Виберемо $\delta_1 + 2\varepsilon < 2A_0$, $\delta_1 < 2B_0$, $\frac{\varepsilon}{q'} < \delta_2 < \frac{qB_1}{A_1}$, тоді

$$E'_\varepsilon(t) \leq \frac{1+\varepsilon}{2\delta_1} \int_{\Omega_t} |f(x,t)|^2 dx - \mu_2 \varepsilon E(t) = \mu_3 \int_{\Omega_t} |f(x,t)|^2 dx - \mu_2 \varepsilon E(t),$$

де μ_2, μ_3 – додатні сталі.

З врахування нерівності (7) отримаємо

$$(1 - \varepsilon\mu_1)E(t) \leq E_\varepsilon(t) \leq (1 + \varepsilon\mu_1)E(t).$$

Нехай $\varepsilon \leq \frac{1}{2\mu_1}$, тоді

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}E(t) &\leq E_\varepsilon(t) \leq \frac{3}{2}E(t) \leq 2E(t), \\ -\varepsilon\mu_2 E(t) &\leq \frac{\varepsilon\mu_2}{2} E_\varepsilon(t). \end{aligned}$$

Отже,

$$E'_\varepsilon(t) \leq \mu_3 \int_{\Omega_t} |f(x,t)|^2 dx - \frac{\varepsilon\mu_2}{2} E_\varepsilon(t). \quad (7)$$

Приймемо $\mu_2 := M_1$. Домножимо (7) на $e^{\frac{M_1 \varepsilon t}{2}}$ і отриману нерівність проінтегруємо від 0 до t . Отримаємо

$$E_\varepsilon(t) \leq e^{\frac{M_1 \varepsilon t}{2}} \left(E(0) + \mu_2 \int_0^t e^{-\frac{M_1 \varepsilon \tau}{2}} |f(x,\tau)| dx d\tau \right).$$

Врахувавши оцінку (6), з умов теореми, одержимо

$$E_\varepsilon(t) \leq e^{\frac{M_1 \varepsilon t}{2}} (E(0) + t^\beta \mu_2 M_2) \leq e^{\frac{M_1 \varepsilon t}{2}} M_3,$$

де M_3 – деяка додатна стала. Отже, теорема доведена.

-
1. Abeyaratne R. Implications of viscosity and strain gradient effects for the kinetics of propagating phase boundaries in solids /R. Abeyaratne, J.K. Knowles// SIAM. J. Appl. Math. – 1991. – Vol. 51. – P. 1205–1221.
 2. Abeyaratne R. Kinetic relations and propagation of phase boundaries in solids /R. Abeyaratne, J.K. Knowles// Arch. Ration. Mech. Anal. – 1991. – Vol. 114. – P.119–154.
 3. Rybka P. Convergence of solutions to the equation of quasi-static approximation of viscoelasticity with capillarity /P. Rybka, K.-H. Hoffmann// J. Math. Anal. and Appl. – 1998. – Vol. 226, N. 1. – P. 61–81.

4. *Slemrod M.* Admissibility criteria for propagating phase boundaries a van der Waals fluid / *M. Slemrod* // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1983. – P. 37–85.
5. *Торган Г. Р.* Поведінка розв'язків мішаної задачі для параболического рівняння четвертого порядку на нескінченності / Г. Р. Торган // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2008. – Вип. 69. – С. 72–77.
6. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., 1972.
7. *Cavalcanti M.M.* Existence and exponential decay for a Kirchhoff-Carrier model with viscosity / *M.M. Cavalcanti, V.N. Domingos Cavalcanti, J.S. Prates Filho, J.A. Soriano* // Journal of Math. Anal. and Appl. – 1998. – Vol. 226. – P. 40–60.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ПЕРЕМЕННЫМ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПО ВРЕМЕНИ ОБЛАСТИ

Галина БАЗЫЛЯК

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1 79000 Львов, Украина*

Исследовано поведение при $t \rightarrow \infty$ обобщенных решений смешанной задачи для нелинейного параболического уравнения четвертого порядка по пространственным переменным.

Ключевые слова: смешанная задача, параболическое уравнение.

THE INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE NONLINEAR PARABOLIC EQUATION OF THE FOURTH ORDER WITH SPATIAL VARIABLE IN UNBOUNDED DOMAIN FOR THE TIME

Halyna BAZYLYAK

*Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine*

In the paper is estimated the behaviour at $t \rightarrow \infty$ of the generalized solutions of the initial-boundary value problem for the nonlinear parabolic equation of the fourth order with spatial variable.

Key words: initial-boundary value problem, parabolic equation.

Стаття надійшла до редколегії 06.09.2010
Прийнята до друку 22.12.2010

УДК 517.956

СПРЯЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМИ КВАЗІЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ УЗДОВЖ НЕВІДОМОЇ ЛІНІЇ РОЗРИВУ В КРИВОЛІНІЙНОМУ СЕКТОРІ

Наталя БУРДЕЙНА

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна*

Розглянуто коректну розв'язність нелінійної задачі з невідомою лінією розриву вихідних даних гіперболічної системи квазілінійних рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними в криволінійному секторі. За допомогою методу характеристик і теореми Банаха про нерухому точку оператора одержано існування єдиного узагальненого розв'язку задачі.

Ключові слова: гіперболічна задача, квазілінійні рівняння, невідома лінія розриву, метод характеристик.

Математичне формулювання задач про визначення невідомої лінії контактного розриву гідродинамічних параметрів потоку рідини або газу, що є однією з основних проблем газодинаміки і теорії гідро- та аеропружності [1, 2] і зводиться до відшукування розв'язку задачі з невідомими межами для гіперболічних систем квазілінійних рівнянь першого порядку [3]. Під час вивчення руху рідин і газів природним є задання двох типів умов: зовнішніх та внутрішніх. Зокрема, зовнішні крайові умови, або умови на зовнішніх межах, описують вплив зовнішнього середовища на заданий об'єм газу (рідини) [4]. Внутрішні крайові умови – це умови на внутрішніх вільних межах між газами (рідинами), що мають різні властивості чи фізичні стани, або умови спряження на невідомій лінії контактного розриву [5].

Локальний, за часовою змінною, розв'язності задач з контактним розривом вихідних даних гіперболічної системи квазілінійних рівнянь першого порядку присвячено праці [1,6]. Достатні умови існування і єдиності локального розв'язку таких задач у випадку, коли лінія контактного розриву невідома, одержано в [2, 5, 7].

Нехай $V_T = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < T, a_1(t) < x < a_2(t), a_1(0) = a_2(0) = 0\}$ – криволінійний сектор з рухомими межами $x = a_j(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $j \in \{1, 2\}$.

Невідома лінія $x = b(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ розділяє область V_T на дві підобласті

$$V_T^{b-} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < T, a_1(t) < x < b(t), a_1(0) = b(0) = 0\} \quad \text{і}$$

$$V_T^{b+} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < T, b(t) < x < a_2(t), a_2(0) = b(0) = 0\}.$$

В області V_T^{b-} розглянемо гіперболічну систему квазілінійних рівнянь

$$\frac{\partial u_i^-}{\partial t} + \lambda_i^-(x, t, u^-) \frac{\partial u_i^-}{\partial x} = f_i^-(x, t, u^-), \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad (1)$$

а в області V_T^{b+} – систему

$$\frac{\partial u_i^+}{\partial t} + \lambda_i^+(x, t, u^+) \frac{\partial u_i^+}{\partial x} = f_i^+(x, t, u^+), \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad (2)$$

де

$$u^-(x, t) = (u_1^-(x, t), \dots, u_n^-(x, t)) : \overline{V_T^{b-}} \rightarrow \mathbf{R}^n, \quad u^+(x, t) = (u_1^+(x, t), \dots, u_n^+(x, t)) : \overline{V_T^{b+}} \rightarrow \mathbf{R}^n$$

– шукані функції, а $\lambda_i^\pm(x, t, u) : \mathbf{R}^{n+2} \rightarrow \mathbf{R}$, $f_i^\pm(x, t, u) : \mathbf{R}^{n+2} \rightarrow \mathbf{R}$ – відомі функції.

Нехай поведінку функції $b(t)$ описує система диференціальних рівнянь

$$\frac{db}{dt} = h(b(t), t, u^\pm(b(t), t)), \quad (3)$$

де

$$u^\pm(b(t), t) = (u^-(b(t), t), u^+(b(t), t)) : \mathbf{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^{2n}, \quad \text{а} \quad h(b(t), t, u^\pm) : \mathbf{R}^{2n+2} \rightarrow \mathbf{R} \quad -$$

відома функція.

Доповнимо системи (1)–(3) початковими умовами вигляду

$$b(0) = 0, \quad (4)$$

$$u^-(0, 0) = u^+(0, 0) = u^0, \quad (5)$$

де $u^0 = (u_1^0, \dots, u_n^0)$ – задане значення.

Припустимо, що на фіксованих межах областей V_T^{b-} , V_T^{b+} виконуються крайові умови

$$\begin{aligned} u_i^-(a_1(t), t) &= \beta_{i1}(b(t), t, \overset{\circ}{u}(a(t), t), \overset{\circ}{u}(b(t), t)), \quad i \in I_1, \\ u_i^+(a_2(t), t) &= \beta_{i2}(b(t), t, \overset{\circ}{u}(a(t), t), \overset{\circ}{u}(b(t), t)), \quad i \in I_2, \end{aligned} \quad (6)$$

а на вільній межі $x = b(t)$ – умови спряження

$$\begin{aligned} u_i^-(b(t), t) &= \gamma_i^-(b(t), t, \overset{\circ}{u}(a(t), t), \overset{\circ}{u}(b(t), t)), \quad i \in I_-, \\ u_i^+(b(t), t) &= \gamma_i^+(b(t), t, \overset{\circ}{u}(a(t), t), \overset{\circ}{u}(b(t), t)), \quad i \in I_+. \end{aligned} \quad (7)$$

Тут

$$I_1 = \{i \in \{1, \dots, n\} : \lambda_i^-(0, 0, u^0) > a'_1(0)\}; \quad I_2 = \{i \in \{1, \dots, n\} : \lambda_i^+(0, 0, u^0) < a'_2(0)\};$$

$$I_- = \{i \in \{1, \dots, n\} : \lambda_i^-(0, 0, u^0) < h(0, 0, u^0)\};$$

$$I_+ = \{i \in \{1, \dots, n\} : \lambda_i^+(0, 0, u^0) > h(0, 0, u^0)\};$$

$$J_- = \{1, \dots, n\} \setminus I_-, \quad J_+ = \{1, \dots, n\} \setminus I_+, \quad J_1 = \{1, \dots, n\} \setminus I_1, \quad J_2 = \{1, \dots, n\} \setminus I_2,$$

$$\begin{aligned}\mathbf{a}(\mathbf{a}(t), t) &= (\{u_j^-(\mathbf{a}_1(t), t)\}_{j \in J_1}, \{u_j^+(\mathbf{a}_2(t), t)\}_{j \in J_2}), \\ \mathbf{b}(\mathbf{b}, t) &= (\mathbf{b}^-(\mathbf{b}, t), \mathbf{b}^+(\mathbf{b}, t)), \mathbf{b}^- = (u_i^-), i \in J_-, \mathbf{b}^+ = (u_i^+), i \in J_+, \end{aligned}$$

причому $\beta_{ij}(\mathbf{b}, t, \mathbf{a}, \mathbf{b}) : \mathbf{R}^{k_1+k_2+k_-+k_++2} \rightarrow \mathbf{R}$, $\gamma_i^\pm(\mathbf{s}, t, \mathbf{a}, \mathbf{b}) : \mathbf{R}^{k_1+k_2+k_-+k_++2} \rightarrow \mathbf{R}$ — відомі функції, де k_- , k_+ , k_1 , k_2 — кількість елементів множин J_- , J_+ , J_1 , J_2 , відповідно.

Узагальнений розв'язок задачі. Нехай $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathbf{b}(t) : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$, $\mathbf{u}^-(\mathbf{x}, t) : \overline{\mathbf{V}_T^{b-}} \rightarrow \mathbf{R}^n$ — визначені функції, а $(\mathbf{x}_0, t_0) \in \overline{\mathbf{V}_T^{b-}}$. В припущенні, що $\lambda_i^-(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}^-)$ задовольняють умову Ліпшиця за змінними $\mathbf{x}$ і $\mathbf{u}^-$, розглянемо задачу Коші для визначення характеристик системи (1), тобто

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \lambda_i^-(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}^-(\mathbf{x}, t)), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0.$$

Розв'язок цієї задачі позначимо через $\varphi_i^-[u^-, \mathbf{b}](t; \mathbf{x}_0, t_0)$. Внаслідок цього отримаємо сім'ю функцій аргументу t з параметрами $\mathbf{x}_0, t_0$, яка, відповідно, залежить від вибору функцій $\mathbf{u}^-, \mathbf{b}$, тобто сім'ю операторів.

Зазначимо, що розв'язок $\varphi_i^-[u^-, \mathbf{b}](t; \mathbf{x}_0, t_0)$ за фіксованих $i, \mathbf{b}, \mathbf{u}^-, \mathbf{x}_0, t_0$ можна продовжити до перетину з межею області $\mathbf{V}_T^{b-}$. Нехай

$$\chi_i^-[u^-, \mathbf{b}](\mathbf{x}_0, t_0) = \min \{t \in [0, t_0] : (\varphi_i^-[u^-, \mathbf{b}](t; \mathbf{x}_0, t_0), t) \in \overline{\mathbf{V}_T^{b-}}\}.$$

Отже, функція $\varphi_i^-[u^-, \mathbf{b}](t; \mathbf{x}_0, t_0)$ буде визначена на відрізку $[\chi_i^-[u^-, \mathbf{b}](\mathbf{x}_0, t_0), t_0]$, причому $\chi_i^-[u^-, \mathbf{b}](\mathbf{x}_0, t_0)$ є сім'єю функціоналів з параметрами $\mathbf{x}_0, t_0$.

Запишемо систему рівнянь (1) на характеристиках і проінтегруємо кожне рівняння системи в межах від $\chi_i^-[u^-, \mathbf{b}](\mathbf{x}_0, t_0)$ до t_0 . У підсумку одержимо систему інтегро-функціональних рівнянь

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_i^-(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{u}_i^-(\varphi_i^-[u^-, \mathbf{b}](\chi_i^-[u^-, \mathbf{b}](\mathbf{x}, t); \mathbf{x}, t), \chi_i^-[u^-, \mathbf{b}](\mathbf{x}, t)) + \\ &+ \int_{\chi_i^-[u^-, \mathbf{b}](\mathbf{x}, t)}^{t_0} \mathbf{f}_i^-(\varphi_i^-[u^-, \mathbf{b}](\tau; \mathbf{x}, t), \tau, \mathbf{u}^-(\varphi_i^-[u^-, \mathbf{b}](\tau; \mathbf{x}, t), \tau)) d\tau, \quad (8) \\ i &\in \{1, \dots, n\}, \quad (\mathbf{x}, t) \in \overline{\mathbf{V}_T^{b-}}.\end{aligned}$$

Зазначимо, що системи (1) та (8) еквівалентні в класі функцій $(\mathbf{u}^-, \mathbf{b}) : \mathbf{u}^- \in [C^1(\overline{\mathbf{V}_T^{b-}})]^n, \mathbf{b} \in C[0, T]$, проте розв'язок останньої системи може бути, взагалі кажучи, не диференційовним.

Аналогічно виводимо систему інтегро-функціональних рівнянь

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i^+(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = & \mathbf{u}_i^+(\varphi_i^+[\mathbf{u}^+, \mathbf{b}](\chi_i^+[\mathbf{u}^+, \mathbf{b}](\mathbf{x}, \mathbf{t}); \mathbf{x}, \mathbf{t}), \chi_i^+[\mathbf{u}^+, \mathbf{b}](\mathbf{x}, \mathbf{t})) + \\ & + \int_{\chi_i^+[\mathbf{u}^+, \mathbf{b}](\mathbf{x}, \mathbf{t})}^{\mathbf{t}} \mathbf{f}_i^+(\varphi_i^+[\mathbf{u}^+, \mathbf{b}](\tau; \mathbf{x}, \mathbf{t}), \tau, \mathbf{u}^+(\varphi_i^+[\mathbf{u}^+, \mathbf{b}](\tau; \mathbf{x}, \mathbf{t}), \tau)) d\tau, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\mathbf{i} \in \{1, \dots, \mathbf{n}\}, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{t}) \in \overline{\mathbf{V}_T^{b+}},$$

що еквівалентна системі (2) в класі достатньо гладких функцій $(\mathbf{u}^+, \mathbf{b})$.

Означення. Локальним узагальненим розв'язком задачі (1)–(7), визначеним на відрізку $[0, T_0]$, називатимемо набір функцій

$$(\mathbf{u}^-, \mathbf{u}^+, \mathbf{b}) : \mathbf{u}^- \in [Lip(\overline{\mathbf{V}_T^{b-}})]^n, \mathbf{u}^+ \in [Lip(\overline{\mathbf{V}_T^{b+}})]^n, \mathbf{b} \in C^1[0, T_0], 0 < T_0 \leq T, \quad \text{який}$$

задовольняє системи (3), (8), (9), а також умови (4) – (7).

Теорема про локальну розв'язність задачі.

$$\text{Нехай } \mathbf{U} = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |\mathbf{u}_i^0| + 1, \quad \mathbf{B} = |\mathbf{h}(0, 0, \mathbf{u}^0)| + 1.$$

Визначимо такі множини:

$$\mathbf{V}_{T,U}^1 = \{(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{u}) \in \mathbf{R}^{n+2} : 0 \leq \mathbf{t} \leq T, \mathbf{a}_1(\mathbf{t}) \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{a}_2(\mathbf{t}), |\mathbf{u}| \leq \mathbf{U}\},$$

$$\mathbf{V}_{T,U,B}^2 = \{(\mathbf{b}, \mathbf{t}, \mathbf{u}^\pm) \in \mathbf{R}^{2n+2} : 0 \leq \mathbf{t} \leq T, -\mathbf{B}\mathbf{t} \leq \mathbf{b} \leq \mathbf{B}\mathbf{t}, |\mathbf{u}^\pm| \leq \mathbf{U}\},$$

$$\mathbf{V}_{T,U,B}^3 = \{(\mathbf{b}, \mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{b}) \in \mathbf{R}^{k_1+k_2+k_3+2} : 0 \leq \mathbf{t} \leq T, -\mathbf{B}\mathbf{t} \leq \mathbf{b} \leq \mathbf{B}\mathbf{t}, |\mathbf{u}| \leq \mathbf{U}, |\mathbf{b}| \leq \mathbf{U}\}.$$

Тут $|\cdot|$ – норма в просторі $\mathbf{R}^N$ в сенсі максимуму модулів.

Введемо також інші позначення

$$\Lambda = \max_{(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{u}) \in \mathbf{V}_{T,U}^1} |\lambda^\pm(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{u})|, \quad \mathbf{F} = \max_{(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{u}) \in \mathbf{V}_{T,U}^1} |\mathbf{f}^\pm(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{u})|,$$

$$\delta = \frac{1}{2} \min_{i \in \{1, \dots, n\}} \{|\lambda_i^-(0, 0, \mathbf{u}^0) - \mathbf{a}'_1(0)|, |\lambda_i^+(0, 0, \mathbf{u}^0) - \mathbf{a}'_2(0)|,$$

$$|\lambda_i^-(0, 0, \mathbf{u}^0) - \mathbf{h}(0, 0, \mathbf{u}^0)|, |\lambda_i^+(0, 0, \mathbf{u}^0) - \mathbf{h}(0, 0, \mathbf{u}^0)|\},$$

і нехай $\lambda_0, \mathbf{f}_0, \mathbf{h}_0, \beta_0, \gamma_0, \mathbf{a}_0$ – сталі Ліпшиця функцій $\lambda_i^\pm, \mathbf{f}_i^\pm, \mathbf{h}, \beta_j, \gamma_i^\pm, \mathbf{a}_j$ за відповідними змінними.

Теорема. Нехай виконуються такі умови:

$$\lambda_i^- \in Lip(\mathbf{V}_{T,U}^1), \quad \lambda_i^+ \in Lip(\mathbf{V}_{T,U}^1), \quad \mathbf{i} \in \{1, \dots, \mathbf{n}\};$$

$$\mathbf{f}_i^- \in C(\mathbf{V}_{T,U}^1) \cap Lip_{x,u}(\mathbf{V}_{T,U}^1), \quad \mathbf{f}_i^+ \in C(\mathbf{V}_{T,U}^1) \cap Lip_{x,u}(\mathbf{V}_{T,U}^1), \quad \mathbf{i} \in \{1, \dots, \mathbf{n}\};$$

$$1) \quad \mathbf{h} \in Lip(\mathbf{V}_{T,U,B}^2);$$

$$2) \quad \beta_j \in Lip(\mathbf{V}_{T,U,B}^3), \quad \mathbf{j} \in \{1, 2\}, \mathbf{i} \in I_j;$$

$$3) \quad \gamma_i^- \in Lip(\mathbf{V}_{T,U,B}^3), \quad \mathbf{i} \in I_-, \quad \gamma_i^+ \in Lip(\mathbf{V}_{T,U,B}^3), \quad \mathbf{i} \in I_+;$$

$$4) \quad \mathbf{a}_j \in C^1[0, T], \quad \mathbf{a}'_j \in Lip[0, T], \quad \mathbf{j} \in \{1, 2\};$$

$$5) \quad \delta > 0;$$

$$6) \quad 8n \max\{\beta_0, \gamma_0, 4\delta e\beta_0(\mathbf{a}_0 + \mathbf{B} + 2\Lambda), 4\delta e\gamma_0(\mathbf{a}_0 + \mathbf{B} + 2\Lambda)\} < 1;$$

$$7) \quad \beta_{i1}(0, 0, \mathbf{u}^0, \mathbf{u}^0) = \mathbf{u}_i^0, \quad \mathbf{i} \in I_1,$$

$$\beta_{i2}(0, 0, \mathbf{u}^0, \mathbf{u}^0) = \mathbf{u}_i^0, \quad \mathbf{i} \in I_2, \gamma_i^-(0, 0, \mathbf{u}^0, \mathbf{u}^0) = \mathbf{u}_i^0, \quad \mathbf{i} \in I_-, \gamma_i^+(0, 0, \mathbf{u}^0, \mathbf{u}^0) = \mathbf{u}_i^0, \quad \mathbf{i} \in I_+,$$

$$\text{де } \mathbf{u}^0 = (\{\mathbf{u}_j^0\}_{j \in J_1}, \{\mathbf{u}_j^0\}_{j \in J_2}), \quad \mathbf{u}^0 = (\{\mathbf{u}_j^0\}_{j \in J_-}, \{\mathbf{u}_j^0\}_{j \in J_+}) \text{ (умови погодження)}.$$

Тоді існує єдиний локальний узагальнений розв'язок задачі (1) – (7), який визначений на відрізку $[0, T_0]$, де значення T_0 задане вихідними даними задачі.

Доведення теореми проводять за методикою [8] шляхом введення метричного простору, елементи якого задовольняють певні обмеження та є розв'язками системи інтегро-функціональних рівнянь, еквівалентної до задачі (1)-(7). Відшукування узагальненого розв'язку сформульованої задачі зводиться до знаходження нерухомої точки оператора, визначеного правими частинами інтегро-функціональних рівнянь (8)-(9).

Зауваження. Глобальну розв'язність цієї задачі проводимо шляхом переходу до області, що є криволінійним чотирикутником з початковими умовами при $t = T_0$ [9].

1. Рождественский Б. Л. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко – М., 1978.
2. Казаков К. Ю. Об определении неизвестной линии разрыва решения смешанной задачи для квазилинейной гиперболической системы / К. Ю. Казаков, С. Ф. Морозов // Укр. мат. журн. – 1985. – Т. 37, №4. – С.443–450.
3. Андрусак Р. В. Локальная и глобальная разрешимости квазилинейной гиперболической задачи Стефана на прямой / Р. В. Андрусак, В. М. Кирилич, А. Д. Мышкис // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42, № 4. – С. 489–503.
4. D'Acunto B. On the piston problem in gasdynamics / B. D'Acunto // Mech. Res. Commun. – 1984. – Vol. 11, №6 – P. 401–407.
5. Мельник Т. О. Спряження розв'язків гіперболічного рівняння другого порядку вздовж невідомої границі / Т. О. Мельник // Доп. Ан УРСР. – 1980. – Сер. А, №12. – С. 10–12.
6. Сидоренко А. Д. Задача с контактным разрывом для системы трех квазилинейных уравнений / А. Д. Сидоренко // Дифференциальные уравнения. – 1978. – Т. 14, № 3. – С. 504–511.
7. Bassanini P. Generalized solutions to free boundary problems for hyperbolic systems of functional partial differential equations /

- P. Bassanini, J. Turo // Ann. math. pura appl. – 1990. – Vol. 156, № 4. – P. 211–230.
8. Андрусяк Р. В. Квазілінійна гіперболічна задача Стефана з нелокальними крайовими умовами/ Р.В. Андрусяк, Н.О. Бурдейна, В.М. Кирилич // Укр. мат. журн. – 2010. – Т. 62, №9. – С. 1173-1199.
9. Кирилич В. М. Деякі нелінійні задачі з вільними межами для гіперболічних систем квазілінійних рівнянь / В. М. Кирилич // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.–мат. – 2009. – Вип. 71. – С. 125-134.

СОПРЯЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВДОЛЬ НЕИЗВЕСТНОЙ ЛИНИИ РАЗРЫВА В КРИВОЛИНЕЙНОМ СЕКТОРЕ

Наталия БУРДЕЙНА

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1 79000 Львов, Украина*

Рассмотрено корректную разрешимость нелинейной задачи с неизвестной линией разрыва исходных данных гиперболической системы квазилинейных уравнений первого порядка с двумя независимыми переменными в криволинейном секторе. С помощью метода характеристик и теоремы Банаха о неподвижной точке оператора получено существование единого обобщенного решения задачи.

Ключевые слова: гиперболическая задача, квазилинейное уравнение, неизвестная линия разрыва, метод характеристик.

THE CONJUGATION SOLUTIONS OF HYPERBOLIC PROBLEM FOR SYSTEM OF QUASI-LINEAR EQUATIONS ALONG UNKNOWN DISCONTINUITY LINE IN CURVILINEAR SECTOR

Natalya Burdeina

*Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str. 1, 79000 Lviv, Ukraine*

The nonlinear problem with unknown discontinuity line of initial data of the hyperbolic system of first-order quasi-linear equations with two independent variables in curvilinear sector are considered. Applying the method of characteristic and Banach Theorem the local solvability of problem is established.

Key words: hyperbolic problem, quasi-linear equations, free discontinuity line, method of characteristic.

Стаття надійшла до редколегії 14.09.2010
Прийнята до друку 22.12.2010

УДК: 539.3

МЕТОД ПОЛІНОМІВ ЛАГЕРРА В ДИНАМІЧНІЙ ЗАДАЧІ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ РАДІАЛЬНО-ШАРУВАТОГО ЦИЛІНДРА

Володимир КОЛОДІЙ, Ігор ТУРЧИН

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

З використанням методу поліномів Лагерра одержано розв'язок задачі теорії пружності про радіальні коливання неоднорідного циліндра. Подано порівняльний аналіз результатів для однорідного циліндра з результатами одержаними методом інтегрального перетворення Лапласа.

Ключові слова: динамічна задача теорії пружності, радіально-шаруватий циліндр, поліноми Лагерра.

Розвиток сучасних наукомістких технологій і потреба в економії енергетичних та сировинних ресурсів потребують широкого використання нових нетрадиційних матеріалів із ускладненою внутрішньою будовою та щораз точнішої відповідності вихідних модельних побудов до реального об'єкта досліджень. Одержані внаслідок такого поглиблення модельних припущень задачі математичної фізики зазвичай не вдається розв'язати класичними аналітичними методами і виникає потреба у розробці нових аналітичних підходів та числово-аналітичних і числових схем, які дають змогу з прогнозованою точністю одержати відповідні розв'язки. Сьогодні у літературі практично немає універсальних узагальнювальних методів, які би допомогли вирішити подібну проблему у повному обсязі: від математичного моделювання до одержання кількісного та якісного аналізу. Тому розробка нових неklasичних моделей механіки структурно-неоднорідних тіл та конструкційних елементів і, відповідно, методів їхнього дослідження важлива і актуальна з теоретичного погляду та практичного застосування.

Ми розглядаємо динамічну задачу теорії пружності для композита, що складається з M вкладених циліндричних шарів різної товщини і з різними механічними властивостями. Циліндр з індексом "1" - внутрішній шар композита, а з індексом " M " - зовнішній (рис.1). Джерелом нестаціонарних процесів у композиті є високоінтенсивне ударне навантаження його внутрішньої поверхні.

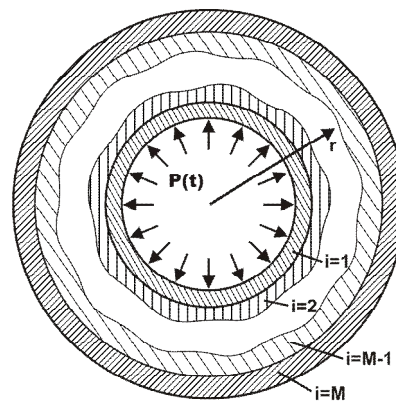


Рис.1

Для визначення поля напружень і деформацій у композиті, в припущенні, що на лінії розподілу шарів виконуються умови ідеального механічного контакту, знайдемо розв'язок такої початково-крайової задачі:

$$\rho^{-1} \partial_{\rho} (\rho \partial_{\rho} \mathbf{u}^{(i)}) - \rho^{-2} \mathbf{u}^{(i)} - \mathfrak{C}_i^2 \partial_{\tau}^2 \mathbf{u}^{(i)} = 0, \quad \mathbf{i} = \overline{1, M} \quad (1)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(1)} = -\mathbf{p}^*(\tau), \quad \rho = \rho_0 \quad \sigma_{\rho\rho}^{(M)} = 0, \quad \rho = 1 \quad (2)$$

$$\mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{u}^{(i+1)}, \quad \sigma_{\rho\rho}^{(i)} = \sigma_{\rho\rho}^{(i+1)} \quad \rho = \rho_i, \quad \mathbf{i} = \overline{1, M-1}, \quad (3)$$

$$\mathbf{u}^{(i)} = \partial_{\tau} \mathbf{u}^{(i)} = 0, \quad \tau = 0, \quad \mathbf{i} = \overline{1, M}, \quad (4)$$

де $\rho = \mathbf{r} / \mathbf{R}_M$ – безрозмірна радіальна змінна циліндричної системи координат; $\rho_i = \mathbf{R}_i / \mathbf{R}_M$, $\mathbf{R}_0$, $\mathbf{R}_M$ – радіуси внутрішньої і зовнішньої поверхонь композита; $\mathbf{R}_i$, $\mathbf{i} = \overline{1, M-1}$ – радіуси поверхонь спряження між шарами; $\mathbf{u}^{(i)}(\rho, \tau)$ – віднесене до $\mathbf{R}_M$ радіальне переміщення в тілі; $\mathfrak{C}_i = \frac{\mathbf{c}_1}{\mathbf{c}_{i,1}}$, $\tau = \frac{\mathbf{c}_1 \mathbf{t}}{\mathbf{R}_M}$ – динамічний час; $\mathbf{c}_{i,1}$ – швидкість поширення поздовжніх хвиль у матеріалі $\mathbf{i}$ -го шару; $\mathbf{c}_1$ – швидкість поздовжніх хвиль у деякому матеріалі; $\sigma_{\rho\rho}^{(i)}(\rho, \tau)$ – радіальні напруження в $\mathbf{i}$ -му шарі, які можна записати за законом Гука

$$\sigma_{\rho\rho}^{(i)} = \mu_i \left[\chi_i^2 \partial_{\rho} \mathbf{u}^{(i)} + (\chi_i^2 - 2) \frac{\mathbf{u}^{(i)}}{\rho} \right], \quad (5)$$

де $\chi_i^2 = \frac{\lambda_i + 2\mu_i}{\mu_i}$, λ_i , μ_i – сталі Ляме.

Розв'язок задачі (1)-(4) шукатимемо в класі функцій, що належать простору $L_2(0, \infty; \lambda \exp(-\lambda \tau))$, тобто таких, для яких правильна умова

$$\|\mathbf{u}^{(i)}(\rho, \tau)\|^2 = \lambda \int_0^{\infty} \exp(-\lambda \tau) |\mathbf{u}^{(i)}(\rho, \tau)|^2 d\tau < \infty,$$

де $\lambda > 0$ деяке число (масштабний множник).

Функції $\mathbf{u}^{(i)}(\rho, \tau)$ можна тоді подати у вигляді ряду за ортогональними поліномами Лагерра [5]

$$\mathbf{u}^{(i)}(\rho, \tau) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{u}_n^{(i)}(\rho) \mathbf{L}_n(\lambda \tau), \quad (6)$$

де

$$\mathbf{u}_n^{(i)}(\rho) = \int_0^{\infty} \exp(-\lambda \tau) \mathbf{u}^{(i)}(\rho, \tau) \mathbf{L}_n(\lambda \tau) d\tau, \quad (7)$$

а $L_n(\lambda\tau)$ - поліноми Лагерра.

Надалі формулу (7) будемо розглядати як інтегральне перетворення функції, а ряд (6) як формулу обернення цього перетворення.

Помножимо рівняння (1) на ядро перетворення $\exp(-\lambda\tau)L_n(\lambda\tau)$ і виконаємо почленне інтегрування отриманого виразу за змінною τ в інтервалі $[0, \infty)$. Враховуючи рівність (7), початкові умови (4) і наслідок формули диференціювання поліномів Лагерра [5]

$$\partial_\tau L_n(\lambda\tau) = -\lambda L_{n-1}^1(\lambda\tau) = -\lambda \sum_{k=0}^{n-1} L_k(\lambda\tau),$$

після інтегрування за частинами, одержимо

$$\rho^{-1} \partial_\rho (\rho \partial_\rho u_n^{(i)}) - \rho^{-2} u_n^{(i)} - \omega_i^2 u_n^{(i)} = \omega_i^2 \sum_{m=0}^{n-1} (n-m+1) u_m^{(i)}, \quad i = \overline{1, M}; \quad (8)$$

$$\sigma_{\rho, n}^{(1)} = -p^*, \quad \rho = \rho_0 \quad \sigma_{\rho, n}^{(M)} = 0, \quad \rho = 1; \quad (9)$$

$$u_n^{(i)} = u_n^{(i+1)}, \quad \sigma_{\rho, n}^{(i)} = \sigma_{\rho, n}^{(i+1)}, \quad \rho = \rho_i, \quad i = \overline{1, M-1}, \quad (10)$$

де $u_n^{(i)}(\rho)$ - зображення за Лагерром (7), $\omega_i = \lambda \xi_i$.

Розв'язок послідовності (8), як відомо [3], можна записати у вигляді алгебричної згортки

$$u_n^{(i)}(\rho) = \sum_{j=0}^n [C_{n-j}^{(i)} G_j(\rho) + D_{n-j}^{(i)} W_j(\rho)]. \quad (11)$$

Тут $G_j(\rho)$, $W_j(\rho)$ - лінійно незалежні фундаментальні розв'язки послідовності (8), які можна подати у вигляді

$$G_j(\rho) = \sum_{p=0}^j a_{j,p} \frac{(\omega_i \rho)^p}{2^p p!} I_p(\omega_i \rho); \quad W_j(\rho) = \sum_{p=0}^j a_{j,p} \frac{(-\omega_i \rho)^p}{2^p p!} K_p(\omega_i \rho), \quad (12)$$

де $I_p(g)$ та $K_p(g)$ - модифіковані функції Бесселя [1], а коефіцієнти $a_{j,p}$ задовольняють рекурентні співвідношення

$$a_{j,p+1} = \sum_{k=p}^{j-1} (j-k+1) a_{k,p}; \quad j = 1, 2, \dots; \quad p = \overline{0, j-1}. \quad (13)$$

Безпосередня підстановка розв'язку (11) в умови (9)-(10) приводить до співвідношень, які після певних перетворень можна подати у вигляді рекурентної послідовності систем лінійних алгебричних рівнянь

$$(b_{k,l}) \{C_n^{(1)}, D_n^{(1)}, \dots, C_n^{(l)}, D_n^{(l)}, \dots, C_n^{(M)}, D_n^{(M)}\}^T = \{H_{n,k}\}^T, \quad (14)$$

де структура і коефіцієнти матриці $(b_{k,l})$ не залежать від номера n і набувають вигляду

$$\left(\begin{array}{cccccccccc}
 \mathbf{b}_{1,1} & \mathbf{b}_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 \mathbf{b}_{2,1} & \mathbf{b}_{2,2} & \mathbf{b}_{2,3} & \mathbf{b}_{2,4} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 \mathbf{b}_{3,1} & \mathbf{b}_{3,2} & \mathbf{b}_{3,3} & \mathbf{b}_{3,4} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & \mathbf{b}_{2i,2i-1} & \mathbf{b}_{2i,2i} & \mathbf{b}_{2i,2i+1} & \mathbf{b}_{2i,2i+2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \mathbf{b}_{2i+1,2i-1} & \mathbf{b}_{2i+1,2i} & \mathbf{b}_{2i+1,2i+1} & \mathbf{b}_{2i+1,2i+2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{b}_{2n,2M-1} & \mathbf{b}_{2n,2M}
 \end{array} \right) \quad (15)$$

Її ненульові коефіцієнти обчислюють за формулами

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}_{1,1} &= \chi_1^2 \omega_1 \mathbf{I}_0(\rho_0 \omega_1) - \frac{2}{\rho_0} \mathbf{I}_1(\rho_0 \omega_1); \quad \mathbf{b}_{1,2} = -\chi_1^2 \omega_1 \mathbf{K}_0(\rho_0 \omega_1) - \frac{2}{\rho_0} \mathbf{K}_1(\rho_0 \omega_1); \\
 \mathbf{b}_{2i,2i-1} &= \mathbf{I}_1(\omega_i \rho_i); \quad \mathbf{b}_{2i,2i} = \mathbf{K}_1(\omega_i \rho_i); \quad \mathbf{b}_{2i,2i+1} = -\mathbf{I}_1(\omega_{i+1} \rho_i); \\
 \mathbf{b}_{2i,2i+2} &= -\mathbf{K}_1(\omega_{i+1} \rho_i); \quad \mathbf{b}_{2i+1,2i-1} = \mu_i \chi_i^2 \omega_i \mathbf{I}_0(\omega_i \rho_i) - \frac{2\mu_i}{\rho_i} \mathbf{I}_1(\omega_i \rho_i); \\
 \mathbf{b}_{2i+1,2i+1} &= -\mu_{i+1} \chi_{i+1}^2 \omega_{i+1} \mathbf{I}_0(\omega_{i+1} \rho_i) + \frac{2\mu_{i+1}}{\rho_i} \mathbf{I}_1(\omega_{i+1} \rho_i); \\
 \mathbf{b}_{2i+1,2i+2} &= \mu_{i+1} \chi_{i+1}^2 \omega_{i+1} \mathbf{K}_0(\omega_{i+1} \rho_i) + \frac{2\mu_{i+1}}{\rho_i} \mathbf{K}_1(\omega_{i+1} \rho_i); \\
 \mathbf{b}_{2M,2M-1} &= \chi_M^2 \omega_M \mathbf{I}_0(\omega_M) - 2\mathbf{I}_1(\omega_M); \quad \mathbf{b}_{2M,2M} = -\chi_M^2 \omega_M \mathbf{K}_0(\omega_M) - 2\mathbf{K}_1(\omega_M);
 \end{aligned}$$

Стовпець вільних членів у системах (14) набуває вигляду:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_{1,n} &= -\frac{\mathbf{p}_{0,n}}{\mu_1} - \chi_1^2 \sum_{j=1}^n [\mathbf{C}_{n-j}^{(1)} \mathbf{G}_j'(\omega_0 \rho_0) + \mathbf{D}_{n-j}^{(1)} \mathbf{W}_j'(\omega_0 \rho_0)] - \\
 &\quad - \frac{\chi_1^2 - 2}{\rho_0} \sum_{j=1}^n [\mathbf{C}_{n-j}^{(1)} \mathbf{G}_j(\omega_0 \rho_0) + \mathbf{D}_{n-j}^{(1)} \mathbf{W}_j(\omega_0 \rho_0)]; \\
 \mathbf{H}_{2i,n} &= \sum_{j=1}^n [\mathbf{C}_{n-j}^{(i+1)} \mathbf{G}_j(\omega_{i+1} \rho_i) + \mathbf{D}_{n-j}^{(i+1)} \mathbf{W}_j(\omega_{i+1} \rho_i)] - \\
 &\quad - \sum_{j=1}^n [\mathbf{C}_{n-j}^{(i)} \mathbf{G}_j(\omega_i \rho_i) + \mathbf{D}_{n-j}^{(i)} \mathbf{W}_j(\omega_i \rho_i)];
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{2i+1,n} = & \mu_{i+1} \chi_{i+1}^2 \sum_{j=1}^n \left[C_{n-j}^{(i+1)} G_j'(\omega_{i+1} \rho_i) + D_{n-j}^{(i+1)} W_j'(\omega_{i+1} \rho_i) \right] + \\
& + \frac{\mu_{i+1} (\chi_{i+1}^2 - 2)}{\rho_i} \sum_{j=1}^n \left[C_{n-j}^{(i+1)} G_j(\omega_{i+1} \rho_i) + D_{n-j}^{(i+1)} W_j(\omega_{i+1} \rho_i) \right] - \\
& - \mu_i \chi_i^2 \sum_{j=1}^n \left[C_{n-j}^{(i)} G_j'(\omega_i \rho_i) + D_{n-j}^{(i)} W_j'(\omega_i \rho_i) \right] - \\
& - \frac{\mu_i (\chi_i^2 - 2)}{\rho_i} \sum_{j=1}^n \left[C_{n-j}^{(i)} G_j(\omega_i \rho_i) + D_{n-j}^{(i)} W_j(\omega_i \rho_i) \right]; \\
H_{M,n} = & - \frac{P_{n,M}}{\mu_M} - \chi_M^2 \sum_{j=1}^n \left[C_{n-j}^{(M)} G_j'(1) + D_{n-j}^{(M)} W_j'(1) \right] - \\
& - (\chi_M^2 - 2) \sum_{j=1}^n \left[C_{n-j}^{(M)} G_j(1) + D_{n-j}^{(M)} W_j(1) \right];
\end{aligned}$$

Шляхом застосування алгоритму Гаусса до систем (15), їх зведено до трикутних систем рівнянь та одержано точний рекурентний розв'язок для довільного числа складових циліндричного тіла.

Остаточний розв'язок задачі одержано у вигляді

$$u^{(i)}(\rho, \tau) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} L_n(\lambda \tau) \sum_{j=0}^n \left[C_{n-j}^{(i)} G_j(\omega_i \rho) + D_{n-j}^{(i)} W_j(\omega_i \rho) \right]. \quad (18)$$

За формулами (18) розраховували переміщення в однорідному порожнистому циліндрі з відносними радіусами внутрішньої поверхні $\rho_0 = 0,5$ та зовнішньої $\rho_1 = 1$.

τ	$u(0.75, \tau) \cdot 10^4$ Лаплас	$u^*(0.75, \tau) \cdot 10^4$, Лагерр					
		N=28	N=34	N=48	N=52	N=56	N=60
0.1	0.0550	0.0856	0.0708	0.0618	0.0576	0.0564	0.0554
0.5	0.4378	0.4367	0.4407	0.4421	0.4405	0.4394	0.4383
1.0	0.6714	0.5810	0.6126	0.6348	0.6533	0.6612	0.6692
1.5	0.4444	0.4530	0.4505	0.4492	0.4474	0.4461	0.4449
2.0	0.1423	0.2346	0.2032	0.1801	0.1604	0.1524	0.1435
2.5	0.0013	0.0600	0.0345	0.0175	0.0048	0.0029	0.0013

У табл. подано результати обчислення зазначених переміщень у середині циліндра $\rho = 0,75$ для різних значень τ та різної кількості членів ряду за Лагерром порівняно з результатами розрахованими в порожнистому циліндрі з використанням інтегрального перетворення Лапласа [4]. З наведеного видно, що хороша збіжність двох методів простежується при утриманні 60 членів ряду за поліномами Лагерра. В подальших дослідженнях утримували саме стільки членів ряду.

За результатами, отриманими для неоднорідного циліндра, було проведено числове дослідження напруженого стану в тришаровому компо-

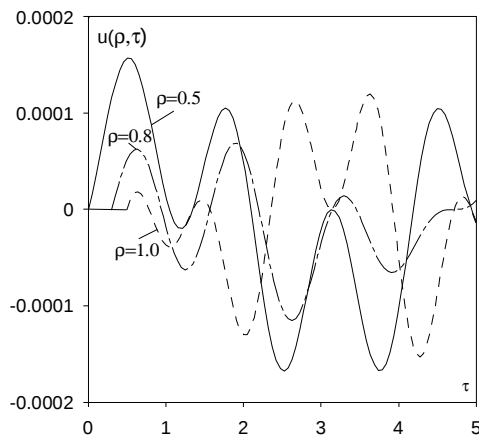


Рис. 2

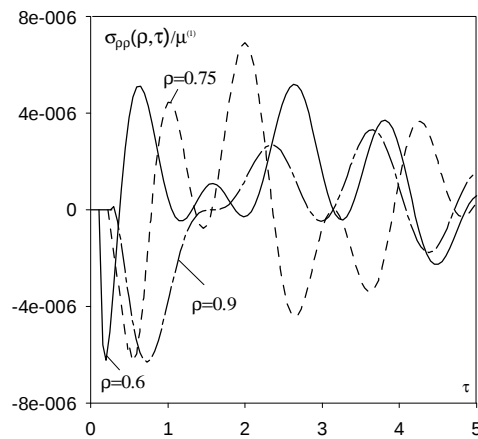


Рис. 3

зиті. Числовий аналіз проводили для тришарового циліндра, виготовленого з кераміки (Al_2O_3) ($E_1 = 70$ ГПа, $\nu_1 = 0,33$) й алюмінієвого сплаву ($E_2 = 343$ ГПа, $\nu_2 = 0,22$), причому циліндричні шари ($\rho_0 = 0,5$; $\rho_1 = 0,6$; $\rho_2 = 0,9$; $\rho_3 = 1$) з кераміки були зовнішнім і внутрішнім шаром, а з алюмінієвого сплаву – середнім.

Навантаження внутрішньої поверхні складеного циліндра було імпульсного типу

$$p_1(\tau) = \begin{cases} [(0,5 - \tau)^2 - 0,25]^2, & \tau \leq 1 \\ 0, & \tau > 1 \end{cases}.$$

На рис. 2 зображено розподіл радіальних переміщень у часі для різних значень радіальної змінної. Наведені результати відповідають фізичній картині деформування циліндричного тіла – час приходу сигналу відповідає геометричному розташуванню точки, перший імпульс фактично повторює імпульс навантаження. На рис. 3 показано результати обчислення безрозмірних радіальних напружень на поверхнях поділу циліндричних шарів і в центрі композитного тіла.

З наведеного видно, що після проходження імпульсу навантаження зазначені напруження зменшують амплітуду коливань і виконують їх біля положення статичної рівноваги. Вплив неоднорідності циліндричного тіла відчутно простежується в перші після проходження імпульсу моменти часу і внаслідок накладання набігаючих і відбитих від поверхонь спряження хвиль нівелюється.

1. Абрамовиц М. Справочник по специальным функциям / Абрамовиц М., Стиган И. – М., 1979.

2. *Божидарник В.В.* Елементи теорії пружності / В.В. Божидарник, Г.Т. Сулим Г.Т. – Львів, 1994.
3. *Галазюк В.А.* Метод поліномів Чебишева–Лагерра в змішаній задачі для лінійного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами / В.А. Галазюк // Доп. АН УРСР. Сер.А. – 1981. – №1. – С. 3–7.
4. *Снеддон И.* Преобразования Фурье / И. Снеддон – М., 1955.
5. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены / П.К. Суетин – М., 1976.

МЕТОД ПОЛИНОМОВ ЛАГЕРРА В ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ УПРУГОСТИ ДЛЯ РАДИАЛЬНО-СЛОИСТОГО ЦИЛИНДРА

Владимир КОЛОДИЙ, Игорь ТУРЧИН

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1 79000 Львов, Украина*

С использованием метода полиномов Лагерра получено решение задачи теории упругости о радиальных колебаниях неоднородного цилиндра. Подано сравнительный анализ результатов для однородного цилиндра с результатами полученными методом интегрального преобразования Лапласа.

Ключевые слова: динамическая задача теории упругости, радиально-слоистый цилиндр, полиномы Лагерра.

THE LAGUERRE POLYNOMIALS METHOD IN DYNAMIC PROBLEM OF ELASTICITY FOR MULTI-LAYERED CYLINDER

Volodymyr KOLODIY, Igor TURCHYN

*Ivan Franko National University of L'viv,
Universytetska Str., 1 79000 L'viv, Ukraine*

Using the Laguerre polynomials method the solution of the problem of elasticity on the radial vibrations of an nonhomogeneous cylinder. A comparative analysis of results for a homogeneous cylinder with the results obtained by the method of Laplace transforms.

Keywords: dynamic problem of elasticity, radial-layered cylinder. Laguerre polynomials.

Стаття надійшла до редколегії 25.01.2010
Прийнята до друку 22.12.2010

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

1. Стаття повинна містити результати нових досліджень автора з повним їхнім доведенням. Не доцільно робити великі огляди вже опублікованих результатів. Робити посилання на неопубліковані праці не можна.

2. Текст статті набирають на комп'ютері українською чи англійською мовами. До редакційної колегії потрібно подавати:

два примірники статті з підписом автора (співавторів) на останній сторінці;
назву статті, резюме (резюме повинно передавати зміст основних результатів статті, а не лише повторювати її назву), ключові слова, ім'я, прізвище автора, місце роботи, адресу українською, англійською та російською мовами, електронну адресу; електронний варіант статті та резюме на CD-RW диску (редколегія повертає авторові диск; тексти можна надіслати за адресою *lnu.visn.mm@gmail.com*);

довідка про автора (співавторів), у якій треба зазначити ім'я, по батькові та прізвище автора, місце роботи, посаду, адресу українською, англійською та російською мовами, телефон та електронну адресу.

Оптимальний обсяг статті до 12 сторінок. Розмір шрифтів 10pt, висота сторінки – 190 mm, ширина – 135 mm.

3. Вимоги до набору.

Текст статті створювати у версії L^AT_EX з кодуванням кириличних шрифтів „Кирилиця (Windows)“ (кодова сторінка 1251).

На першій сторінці статті потрібно зазначити номер УДК.

Номери формул ставити з правого боку і нумерувати лише формули, на які є посилання.

У посиланнях на теорему з монографії зазначити сторінку, на якій вона описана.

Рисунки до статті подавати у графічному форматі BMP чи PCX. Назва рисунка чи його номер не входять у зображення, їх треба створювати засобами L^AT_EX'у. Вибираючи розмір графічного зображення, належить врахувати, що воно буде надруковане на принтері з роздільною здатністю 600 dpi.

Літературу подавати загальним списком у порядку посилань на джерела в тексті статті.

Зразки бібліографічного опису книги, статті, препринту, дисертації, депонованого рукопису, тез доповідей конференцій (з'їздів та ін.):

1. *Грабович А.І.* Назва / *Грабович А.І.* – К., 1985.
2. *Петренко О.Б.* Назва / *Петренко О.Б., Шинк М.М.* – Л., 2001.
3. *Кравчук О.М.* Назва / *Кравчук О.М.* // Укр. мат. журн. – 1985. – Т. 2, №2. – С. 4-20.
4. *Кравчук О.М.* Назва / *Кравчук О.М., Потічний М.М.* // Мат. студії – 1995. – Т. 2, №2. – С. 4-20.
5. *Михайленко Г.Д.* Назва / *Михайленко Г.Д.* – Л.: ІППММ, 1993. – 9 с. – (Препринт / НАН України, Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача: 80.1).

6. *Михайленко Г.Д.* Назва / *Михайленко Г.Д., Степаняк С.І.* – Л.: ІППММ, 1993. – 9 с. – (Препринт / НАН України, Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача: 80.1).
7. *Колмаз Ю. А.* Назва: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук. / *Колмаз Ю.А.* – К., 2008. – 20 с.
8. *Сеник С.М.* Назва / *Сеник С.М.* – К., 1992. – 17 с. – Деп. в ДНТБ України, В2020-1995.
9. *Сеник С.М.* Назва / *Сеник С.М., Мандрик І.Т.* – К., 1992. – 17 с. – Деп. в ДНТБ України, В2020-1995.
10. *Муравський В.К.* Назва / *Муравський В.К.* // Наукова конф. “Нелінійні диференціальні рівняння”: тези доп., 27 серпня - 2 вересня 1994 р., Київ. – К.: КНУ ім. Т. Г. Шевченка, 1994. – С. 540-551.
11. *Муравський В.К.* Назва / *Муравський В.К., Ліско С.В.* // Наукова конф. “Нелінійні диференціальні рівняння”: тези доп., 27 серпня - 2 вересня 1994 р., Київ. – К.: КНУ ім. Т. Г. Шевченка, 1994. – С. 540-551.

