ISSN 2078-3744

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 74

2011

ISSN 2078-3744

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 74

Львівський національний університет імені Івана Франка
2011

V I S N Y K OF THE LVIV UNIVERSITY

В І С Н И К ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Series Mechanics and Mathematics

Серія механіко-математична

Issue 74

Випуск 74

Scientific journal

Збірник наукових праць

Published 1-2 issues per year

Виходить 1-2 рази на рік

Published since 1965

Видається з 1965 року

Ivan Franko National University of Lviv

Львівський національний університет імені Івана Франка

2011

ЗАСНОВНИК: ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Друкується за ухвалою Вченої Ради Львівського національного університету імені Івана Франка

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації. Серія КВ № 14606-3577Р від 29.10.2008 р.

У Віснику публікуються праці з теорії крайових задач для диференціальних рівнянь, алгебри, топології, теорії функцій комплексного змінного, функціонального аналізу, теорії ймовірності та статистики, проблем математичного моделювання фізико-механічних процесів і механіки.

Visnyk contains articles on theory of boundary value problems for differential equations, algebra, topology, complex analysis, functional analysis, probability theory and statistics, problems of mathematical modelling of physical and mechanical processes and mechanics.

Адреса редколегії:
Львівський національний університет
імені Івана Франка,
механіко-математичний факультет,
вул. Університетська, 1,
79000 Львів, Україна
тел. (0322) 74-11-07
ел. пошта: lnu.visn.mm@gmail.com
http://blues.franko.lviv.ua
/publish/visnyk.asp

Editorial office address:
Ivan Franko National University
of Lviv,
Mechanical and Mathematical department,
Universytets'ka Str. 1,
UA-79000 Lviv, Ukraine
tel. +(38) (0322) 74-11-07
e-mail: lnu.visn.mm@gmail.com
http://blues.franko.lviv.ua
/publish/visnyk_en.asp

Редактор Н. ПЛИСА
Технічний редактор С. СЕНИК

Адреса редакції, видавця і виготовлювача:
Львівський національний університет
імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000, Львів, Україна
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції. Серія ДК N 3059 від 13.12.2007 р.

Формат 70x100/16.
Умовн. друк. арк. 16,8
Наклад 200 прим. Зам.

ЗМІСТ

CONTENT

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 74. С. 5–10
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 74. P. 5–10

УДК 517.946

ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ НЕЙМАНА ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З АБСОРБЦІЄЮ В НЕОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ З НУЛЬОВИМ ЗАГОСТРЕННЯМ

Ольга БОЛДОВСЬКА

Донецький національний університет,
вул. Університетська, 24, Донецьк, 83001
e-mail: omboldovskaya@mail.ru

В циліндричній області, необмеженій за просторовими змінними, розглянуто задачу Неймана для квазілінійного параболічного рівняння з абсорбцією. Отримано умови існування та неіснування розв'язку цієї задачі.

Ключові слова: нелінійне параболічне рівняння, задача Неймана, необмежена область.

1. Вступ. Розглянуто початково-крайову задачу Неймана

$$u_t = \operatorname{div}(|Du|^{\lambda-1}Du) - u^p \quad \text{в} \quad Q_T = \Omega \times (0,T), \tag{1}$$

$$|Du|^{\lambda-1}\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}} = 0, \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0,T), \tag{2}$$

$$u(x,0) = \mu, \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

де μ – невід'ємна скінченна міра Радона, $\lambda > 0$, $p > 1$. Область $\Omega \in \mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$, є необмеженою і набуває вигляду

$$\Omega = \{x \in R^N : \ |x'| < x_N^\beta, \ \beta > 1\}, \quad x' = (x_1, \ldots, x_{N-1}),$$

$\partial\Omega$ – межа Ω; $\overrightarrow{n}$ – зовнішня одинична нормаль до $\partial\Omega \times (0,T)$, $T > 0$.

Мета нашої праці – дослідити проблеми існування та неіснування слабкого розв'язку задачі (1)-(3) в Q_T.

Параболічні рівняння з абсорбцією є цікавими завдяки впливу абсорбуючого доданка на розв'язність задач, які розглядають. Задача Коші для багатьох відомих модельних нелінійних параболічних рівнянь з абсорбцією та початковою функцією-мірою досить детально досліджена. Задачу Коші з початковою δ-функцією для рівняння теплопровідності з абсорбцією розглядали Х. Брезіс та А. Фрідман [1], для рівняння пористого середовища з абсорбцією – Ш. Камін та Л.А. Пєлєт'є [2], для рівняння неньютонівської фільтрації з абсорбцією – А. Гміра [3], Х. Чен, Я. Кі, М. Ванг [4], для параболічного рівняння з подвійною нелінійністю та абсорбцією –

Х.Ж. Фан [5], для параболічного рівняння з абсорбцією більш загального вигляду (з вимірними коефіцієнтами) – І.І. Скрипнік [6]. У працях зазначених авторів визначали деякий показник абсорбції (назвемо його критичним), залежно від якого існує чи не існує слабкий розв'язок задачі Коші. У [7-9] результати, які отримали для задачі Коші, були розповсюджені на випадок задачі Неймана (1)-(3) в широкому класі необмежених областей, що "не звужуються на нескінченності" та задовольняють умову конуса. В праці ці результати узагальнюються на випадок області з нульовим кутом, тобто області, яка не задовольняє умову конуса.

Означення 1. *Вважатимемо, що* $u(x,t)$ *– слабкий розв'язок задачі* (1)-(3)*, якщо* $u(x,t) \geqslant 0$ *та для будь-якого* $\tau > 0$

$$u(x,t) \in C(0,T; L_{2,loc}(\overline{\Omega})) \cap L_{\infty,loc}(\overline{\Omega} \times (\tau,T)) \cap L_{\lambda+1,loc}(\tau,T; W_{1,\lambda+1,loc}(\Omega));$$

правильна інтегральна тотожність

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega (-u\ \xi_t + |Du|^{\lambda-1} Du\ D\xi + u^p\ \xi)\, dx\, dt = 0, \quad \forall\, \xi \in C_0^1(R^N \times (\tau,T));$$

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_\Omega u(x,t)\ X(x)\, dx = \int\limits_\Omega X(x)\, d\mu \quad \forall\, X(x) \in C_0^\infty(R^N).$$

Основними результатами праці є такі теореми.

Теорема 1. *Нехай* μ *– невід'ємна скінченна міра Радона. Якщо* $\lambda + \frac{\lambda+1}{\beta(N-1)+1} > 1$ *та* $p < \lambda + \frac{\lambda+1}{\beta(N-1)+1}$*, тоді існує слабкий розв'язок задачі* (1)-(3).

Теорема 2. *Нехай* $\mu = \delta(x)$*. Якщо* $\lambda + \frac{\lambda+1}{\beta(N-1)+1} < 1$ *або* $1 < \lambda + \frac{\lambda+1}{\beta(N-1)+1} \leqslant p$*, тоді задача* (1)-(3) *не має розв'язку.*

2. Доведення.

Доведення теореми 1. Нехай $\Omega_\rho = \Omega \cap \{|x| < \rho\}, \rho > 0$. Доведемо спочатку існування розв'язку такої задачі Діріхле-Неймана:

$$(u_k)_t = \operatorname{div}(|Du_k|^{\lambda-1} Du_k) - u_k^p, \quad \text{в } \Omega_k \times (0,T), \tag{4}$$

$$|Du_k|^{\lambda-1} \frac{\partial u_k}{\partial \overrightarrow{n}} = 0, \quad \text{на } \partial\Omega \cap \partial\Omega_k, \tag{5}$$

$$u_k(x,0) = u_{0k}(x), \quad \text{в } \Omega_k, \tag{6}$$

$$u_k = 0, \quad \text{в } \Omega \cap \partial\Omega_k, \tag{7}$$

де $u_{0k} \in C_0^\infty(\overline{\Omega}_k)$, $u_{0k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u_0$ у $L_2(\Omega)$. Для зручності індекс "k" надалі не писатимемо, якщо не виникатиме такої потреби. Користуючись [10], існування розв'язку задачі (4)-(7) доводитемемо методом Фаедо-Гальоркіна. Нехай $\omega_1, \ldots, \omega_m$ – "база" в $V = V_1 \cap V_2$, де

$$V_1 = W_{1,\lambda+1}(\Omega) \cap \left\{ \frac{\partial u_m}{\partial \overrightarrow{n}} = 0 \text{ на } \partial\Omega \cap \partial\Omega_k; \quad u_m = 0 \text{ у } \Omega \cap \partial\Omega_k \right\}, \quad V_2 = L_{p+1}(\Omega),$$

і $u_m(t)$ – "наближений розв'язок" задачі (4)-(7). Простір V – сепарабельний (див. [10]). Для будь-яких m, i, $\omega_i \in V$, $\omega_1, ..., \omega_m$ – лінійно незалежні, лінійні комбінації ω_i щільні в V. Така база існує (див. [10]). Визначимо $u_m(t) \in [\omega_1, ..., \omega_m]$ – простір, який натягується на лінійну оболонку $\omega_1, ..., \omega_m$. Нехай $A(\varphi) = -\operatorname{div}(|D\varphi|^{\lambda-1}D\varphi)$. Шукатимемо $u_m = u_m(t)$ у вигляді

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\omega_i,$$

де g_{im} визначають з умов

$$(u'_m(t), \omega_j) + (A(u_m(t)), \omega_j) + (u_m^p, \omega_j) = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant m. \tag{8}$$

Разом з системою нелінійних диференціальних рівнянь (8) розглянемо також початкові умови

$$u_m(0) = u_{0m}, \quad \text{де} \quad u_{0m} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{im}\omega_i \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u_0 \quad \text{у} \quad L_2(\Omega). \tag{9}$$

З відомих результатів про нелінійні системи отримаємо існування розв'язку задачі (8)-(9) на проміжку $[0, t_m]$, $t_m > 0$. Якщо домножити (8) на $g_{im}(t)$, провести додавання за j, то одержимо

$$(u'_m(t), u_m(t)) + (A(u_m(t)), u_m(t)) + (u_m^p, u_m) = 0,$$

звідки, інтегруванням від 0 до t, отримуємо

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega} u_m^2(t)\,dx + \int_0^t\int_{\Omega} |Du_m(t)|^{\lambda+1}\,dx\,dt + \int_0^t\int_{\Omega} u_m^{p+1}\,dx\,dt = \frac{1}{2}\int_{\Omega} u_{0m}^2\,dx. \tag{10}$$

У зв'язку з тим, що права частина (10) (внаслідок (9)) обмежена сталою, яка не залежить від m, то

$$u_m \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega)) \cap L_{\lambda+1}(0,T;V_1) \cap L_{p+1}(0,T;V_2), \quad t_m = T,$$

(вкладення $u_m(x,t) \in L_{\lambda+1}(0,T;V_1)$ випливає з результатів про еквівалентні норми у просторі $W_{1,\lambda+1}(\Omega)$, [11]). Отож, можна виділити підпослідовність (для спрощення позначимо її також через $\{u_m\}$) таку, що

$$\begin{gathered} u_m \to u \quad * \text{- слабко в} \quad L_\infty(0,T;L_2(\Omega)), \\ u_m \to u \quad \text{слабко в} \quad L_{\lambda+1}(0,T;V_1) \cap L_{\lambda+1}(0,T;V_2), \\ u_m(T) \to \xi \quad \text{слабко в} \quad L_2(\Omega), \\ u_m^p \to \sigma \quad \text{слабко в} \quad L_{(p+1)'}(0,T;V'_2), \\ A(u_m) \to \chi \text{ слабко в } L_{(\lambda+1)'}(0,T;V'_1). \end{gathered} \tag{11}$$

Остання збіжність виконується завдяки нерівності

$$\|A(u)\|_{L_{(\lambda+1)'}(0,T;V'_1)} \leqslant \gamma \|u\|^{\lambda}_{L_{\lambda+1}(0,T;V_1)},$$

тобто $A : L_{\lambda+1}(0,T;V_1) \to L_{(\lambda+1)'}(0,T;V'_1)$. Через V'_1 ми позначаємо простір, спряжений до V_1; $\frac{1}{\lambda+1} + \frac{1}{(\lambda+1)'} = 1$. $V'_2, (p+1)'$ визначають аналогічно.

Фіксуємо j та перейдемо до границі в (8) при $m \to \infty$

$$u_t + \chi + \sigma = 0.$$

З останньої рівності випливає, що $u_t \in L_{(\lambda+1)'}(0,T;V_1') \cap L_{(p+1)'}(0,T;V_2')$. З того, що $u \in L_{\lambda+1}(0,T;V_1) \cap L_{p+1}(0,T;V_2)$, $u_t \in L_{(\lambda+1)'}(0,T;V_1') \cap L_{(p+1)'}(0,T;V_2')$ та компактності вкладання $V \subset L_q$ (див. [12]), де $q = \frac{(\beta(N-1)+1)(\lambda+1)}{\beta(N-1)-\lambda} > 2$,

$$V \subset L_q \subset L_2 \equiv L_{2'} \subset V'$$

випливає, що $u : [0,T] \to L_2(\Omega)-$ неперервна функція, та відображення $u \to u(0)$ є сюр'єктивним відображенням на $L_2(\Omega)$. Отож, $u(0)$ і $u(T)$ мають сенс та $u(0) = u_0$, $u(T) = \xi$. Також можна вважати, що $u_m \to u$ сильно в $L_2(Q_T)$ та майже всюди (м.в.).

Для доведення того, що $\sigma = u^p$ використаємо таку лему.

Лема 1 ([10]). *Нехай Q – обмежена область у $R^N \times R^1_+$, f_m та f такі функції з $L_s(Q), 1 < s < \infty$, що $||f_m||_{L_s(Q)} \leqslant C$, $f_m \to f$ м.в. в Q. Тоді $f_m \to f$ слабко в $L_s(Q)$.*

Застосуємо лему 1 до функції $f_m = u_m^p$ та $s = (p+1)'$. На підставі збіжності $u_m \to u$ майже всюди випливає, що $u_m^p \to u^p$ майже всюди. Отже, з леми 1 отримаємо слабку збіжність $u_m^p \to u^p$ у просторі $L_{(p+1)'}(Q_T)$. З іншого боку, згідно з (11) є слабка збіжність $u_m^p \to \sigma$ в $L_{(p+1)'}(Q_T)$, звідки й отримуємо рівність $\sigma = u^p$.

Внаслідок монотонності оператора A, неважко показати, що $\chi = A(u)$[10].

Отож, існування розв'язку задачі (4)-(7) доведено.

Нехай $u_k = 0$ поза Ω_k, тобто u_k визначені всюди на $\Omega \times (0,T)$. Користуючись компактністю сім'ї розв'язків u_k, можна перейти до границі по $k \to \infty$ аналогічно як у [13-15]. Гранична функція буде розв'язком такої задачі Неймана:

$$u_t = \operatorname{div}(|Du|^{\lambda-1}Du) - u^p \quad \text{в} \quad Q_T,$$

$$|Du|^{\lambda-1}\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0,T),$$

$$u(x,0) = u_0, \quad x \in \Omega,$$

де $u_0 \in L_2(\Omega)$. Далі розглянемо послідовність розв'язків $\{u^{(n)}\}$ попередньої задачі

$$(u^{(n)})_t = \operatorname{div}(|Du^{(n)}|^{\lambda-1}Du^{(n)}) - (u^{(n)})^p \quad \text{у} \quad Q_T, \tag{12}$$

$$|Du^{(n)}|^{\lambda-1}\frac{\partial u^{(n)}}{\partial \overrightarrow{n}} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0,T), \tag{13}$$

$$u^{(n)}(x,0) = u_0^{(n)}, \quad x \in \Omega. \tag{14}$$

Тут $u_0^{(n)} \in L_2(\Omega)$,

$$\lim_{n\to\infty, t\to 0} \int\limits_\Omega u^{(n)}(x,t)\ X(x)\,dx = \int\limits_\Omega X(x)\,d\mu \quad \forall\, X(x) \in C_0^\infty(R^N).$$

З результатів [16] випливає існування слабкого розв'язку задачі (12)-(14). Для доведення існування розв'язку задачі (1)-(3) треба довести кілька оцінок апроксимуючого розв'язку задачі (12)-(14) аналогічно до [7-8]. $\square$

Доведення теореми 2 можна провести, використовуючи методику, яка була розроблена в [7-9]. У припущенні, що за умов теореми 2 існує слабкий розв'язок задачі

(1)-(3), можна довести, що

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_{\Omega} u(x,t)\ X(x)\,dx = 0, \quad \forall\ X(x)\in C_0^\infty(R^N). \tag{15}$$

Цей факт суперечить означенню 1, що призводить до твердження теореми 2. Доведення рівності (15) ґрунтується на виборі спеціальних пробних функцій у інтегральній тотожності. Наприклад, у випадку $\lambda+\frac{\lambda+1}{\beta(N-1)+1}=p$ використовуються пробні функції, пов'язані з логарифмом [9]. Також варто зазначити, що на відміну від [7-9], при доведенні (15) відбувається заміна просторової змінної N на β з визначення області Ω.

Список використаної літератури

1. *Bresis H.* Nonlinear parabolic equations involving measures as initial conditions / *Bresis H., Friedman A.* // J. Math. Pures Appl. – 1983. – № 62. – P. 73-97.
2. *Kamin S.* Source-type solutions of degenerate diffusion equations with absorption / *Kamin S., Peletier L.A.* // Israel Jour. Math. – 1985. – № 50. – P. 219-230.
3. *Gmira A.* On quasilinear parabolic equations involving measure data / *Gmira A.* // Asymptotic Anal. – 1990. – № 3. – P. 43-56.
4. *Chen X.* Singular solutions of parabolic p-Laplacian with absorption / *Chen X., Qi Y., Wang M.* // Trans. Amer. Math. Soc. – 2007. – № 359. – P. 5653-5668.
5. *Fan H.J.* Cauchy problem of some doubly degenerate parabolic equations with initial datum a measure / *Fan H.J.* // Acta Math. Sinica, English Series. – 2004. – Vol. 20, № 4. – P. 663-682.
6. *Skrypnik I.I.* Removability of isolated singularities of solutions of quasilinear parabolic equations with absorption / *Skrypnik I.I.* // Sb. Math. – 2005. – № 196. – P. 1693-1713.
7. *Болдовская О.М.* Существование и несуществование слабого решения задачи Неймана для вырождающихся квазилинейных параболических уравнений в областях с некомпактной границей. Случай медленной диффузии / *Болдовская О.М.* // Тр. ИПММ НАНУ. – 2008. – Т. 16. – С. 33-54.
8. *Болдовская О.М.* Существование и несуществование слабого решения задачи Неймана для вырождающихся квазилинейных параболических уравнений в областях с некомпактной границей. Случай быстрой диффузии / *Болдовская О.М.* // Вісник ДонНУ, Серія А: Природничі науки. – 2009. - Вип. 1. – С. 52-59.
9. *Болдовская О.М.* Устранение особенностей решений задачи Неймана для вырождающихся параболических уравнений с абсорбцией / *Болдовская О.М.* // Нелин. гр. задачи. – 2008. – Т. 18. – С. 1-19.
10. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / *Лионс Ж.-Л.* – М., 1972.
11. *Михлин С.Г.* Линейные уравнения в частных производных. Учеб. пособие для вузов / *Михлин С.Г.* – М., 1977.
12. *Мазья В.Г.* Пространства С.Л. Соболева / *Мазья В.Г.* – Л., 1985.
13. *Tsutsumi M.* On solutions of some doubly nonlinear parabolic equations with absorbtion / *Tsutsumi M.* // J. Math. Anal. Appl. – 1988. – Vol. 132. – P. 187-212.
14. *Ivanov A.V.* Holder estimates near the boundary for generalized solutions of quasilinear parabolic equations that admit double degeneration / *Ivanov A.V.* // Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. – 1991. – Vol. 188. – P. 45-69.
15. *Porzio M.* Holder estimates for local solutions of some doubly nonlinear degenerate parabolic equations / *Porzio M., Vespri V.* // J. Diff. Eqns. – 1993. – Vol. 103. – P. 146-178.

16. *Alt H.W.* Quasilinear elliptic-parabolic differential equations / *Alt H.W., Luckhaus S.* // Math. Z. – 1983. – Vol. 183. – P. 311-341.

Стаття: надійшла до редакції 08.03.2011
прийнята до друку 21.09.2011

EXISTENCE OF THE SOLUTION TO NEUMANN PROBLEM TO FOR QUASILINEAR PARABOLIC ABSORBTION EQUATION IN UNBOUNDED DOMAIN WITH ZERO SHARPENING

Ol'ha BOLDOVS'KA

National University of Donetsk,
Universytets'ka Str., 24, Donetsk, 83001
e-mail: omboldovskaya@mail.ru

Neumann problem for quasilinear parabolic absorbtion equation in cylinder domain unbounded with respect to spatial variable is considered. Some existence and nonexistence condition for solution to this problem are obtained.

Key words: nonlinear parabolic equation, Neumann problem, unbounded domain.

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С АБСОРБЦИЕЙ В НЕОГРАНИЧЕНОЙ ОБЛАСТИ С НУЛЕВЫМ ОБОСТРЕНИЕМ

Ольга БОЛДОВСКАЯ

Донецкий национальный университет,
ул. Университетская, 24, Донецк, 83001
e-mail: omboldovskaya@mail.ru

В неограниченой за пространственными переменными цилиндрической области рассмотрено задачу Неймана для квазилинейного параболического уравнения с абсорбцией. Получено условия существования и несуществования решения этой задачи.

Ключевые слова: нелинейные параболические уравнения, задача Неймана, неограниченая область.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 74. С. 11–25
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 74. P. 11–25

УДК 519.21

СТАЦІОНАРНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ $M^\theta/G/1/m$ ТА $M^\theta/G/1$ З ПОРОГОВИМ БЛОКУВАННЯМ ВХІДНОГО ПОТОКУ

Микола БРАТІЙЧУК[1], Юрій ЖЕРНОВИЙ[2]

[1]*Шльонський політехнічний університет,*
вул. Кашубська, 23, Глівіце, 44-100
[2]*Львівський національний університет імені Івана Франка,*
вул. Університетська 1, Львів, 79000
e-mail: yu_zhernovyi@yahoo.com

Розглянуто систему обслуговування типу $M^\theta/G/1/m$ з груповим надходженням замовлень і пороговим блокуванням вхідного потоку. Блокування потоку замовлень відбувається, якщо в момент початку обслуговування чергового замовлення кількість замовлень у системі перевищує заданий пороговий рівень h. Визначено середню тривалість частин періоду зайнятості з відсутністю та наявністю блокування вхідного потоку, ймовірність обслуговування замовлень і стаціонарні характеристики черги. Доведено монотонність залежностей середньої тривалості періоду зайнятості та ймовірності обслуговування від параметрів m і h.

Ключові слова: системи $M^\theta/G/1/m$ і $M^\theta/G/1$, блокування вхідного потоку, період зайнятості, стаціонарні характеристики.

1. Вступ. У статті [1] досліджено систему обслуговування $M_h^\theta/G/1/m$, яка є системою з груповим надходженням замовлень і пороговим блокуванням вхідного потоку. Коротко опишемо цю систему.

Якщо в момент t початку обслуговування чергового замовлення виконується умова $\xi(t) > h$, де $\xi(t)$ – кількість замовлень у системі, то відбувається блокування вхідного потоку замовлень, яке триває до моменту t початку обслуговування того замовлення, для якого $\xi(t) \le h$. Тут h $(1 \le h \le m-1)$ – заданий пороговий рівень блокування, m – максимальна кількість замовлень, які можуть одночасно перебувати у черзі. Для такої системи в [1] визначено, зокрема, середню тривалість періоду зайнятості й отримано формули для ергодичного розподілу кількості замовлень у системі.

Мета нашої праці – продовжити дослідження, розпочаті у статті [1]. Ми ставимо завдання визначити середню тривалість тих частин періоду зайнятості, коли немає блокування вхідного потоку, коли вхідний потік заблокований, та стаціонарних імовірностей відповідних станів системи. Це дасть змогу обчислити ймовірність обслуговування замовлень у системі. Визначимо також стаціонарні характеристики черги (середню довжину черги, середній час очікування) і вивчимо поведінку деяких стаціонарних характеристик як функцій параметрів m і h. Як виявили дослідження (див., зокрема, [2-4]), з'ясування характеру монотонної залежності характеристик систем обслуговування від вхідних параметрів відкриває шлях до розв'язання задач оптимального синтезу систем з заданими характеристиками.

2. Період зайнятості: частини з відсутністю та наявністю блокування. Будемо дотримуватись всіх позначень, введених у статті [1], і додатково використовуватимемо символ "хвилька" над величинами, які описують ту частину періоду зайнятості системи, коли вхідний потік заблокований. Це дасть змогу визначити частини періоду зайнятості з відсутністю та наявністю блокування вхідного потоку замовлень.

Повторюючи міркування, викладені у п. 3 статті [1], для умовної ймовірності

$$\varphi_n(t,\,k) = \mathbf{P}_n\{\,\xi(t)=k,\ \tau(m)>t\,\} \quad (\,1\le n,\,k\le m+1\,)$$

наявності у системі k замовлень під час періоду зайнятості $\tau(m) = \inf\{\,t\ge 0 : \xi(t)=0\,\}$ для випадку $h+1\le n\le m$ отримаємо співвідношення

$$\varphi_n(t,\,k) = \int\limits_0^t \mathbf{P}\Big\{\sum_{i=1}^{n-h}\widetilde{\beta}_i \in dx\Big\}\varphi_h(t-x,\,k) +$$
$$+ I\{h+1\le k\le n\}\int\limits_0^t \mathbf{P}\Big\{\sum_{i=1}^{n-k}\widetilde{\beta}_i \in dx\Big\}\,\overline{\widetilde{F}}(t-x).$$

Тут $\widetilde{\beta}_i = \beta_i$ – час обслуговування i–го замовлення, $\widetilde{F}(x) = F(x) = \mathbf{P}\{\beta_i < x\}$ $(\,x\geqslant 0\,)$, $F(0)=0$, $\overline{F}(x) = 1-F(x)$.

Відповідні рівняння для функцій

$$\Phi_n(s,\,k) = \int\limits_0^\infty e^{-st}\varphi_n(t,\,k)\,dt, \quad \operatorname{Re} s>0,$$

для $h+1\le n\le m$ набудуть вигляду

$$\Phi_n(s,\,k) = \widetilde{f}^{\,n-h}(s)\Phi_h(s,\,k) + I\{h+1\le k\le n\}\widetilde{f}^{\,n-k}(s)\frac{1-\widetilde{f}(s)}{s}, \qquad (1)$$

де

$$\widetilde{f}(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx}d\widetilde{F}(x) = f(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx}dF(x).$$

Рівняння (5) і (7) для $\varphi_n(t,\,k)$ і $\Phi_n(s,\,k)$ $(1\le n\le h)$ статті [1] залишаються незмінними.

Виразивши з (1) всі $\Phi_n(s, k)$ для $h+1 \le n \le m$ і підставивши їх у співвідношення для $\Phi_n(s, k)$ $(1 \le n \le h)$, отримаємо рівняння

$$\begin{aligned} \Phi_n(s, k) - f(s) \sum_{j=-1}^{h-n-1} p_j(s) \Phi_{n+j}(s, k) = \\ = f(s) L_n(s) \Phi_h(s, k) + M_n(s, k), \quad 1 \le n \le h. \end{aligned} \tag{2}$$

Тут

$$L_n(s) = \widetilde{f}^{m-h}(s) \overline{p}_{m-n}(s) + \sum_{j=h}^{m-1} p_{j-n}(s) \widetilde{f}^{j-h}(s);$$

$$M_n(s, k) = q_{k-n}(s) + I\{k = m+1\} \overline{q}_{m+2-n}(s) + \Bigg(I\{h+1 \le k \le m\} \overline{p}_{m-n}(s) \widetilde{f}^{m-k}(s) + \\ + \sum_{j=h+1}^{m-1} p_{j-n}(s) \widetilde{f}^{j-k}(s) I\{h+1 \le k \le j\} \Bigg) f(s) \frac{1 - \widetilde{f}(s)}{s}.$$

Шукаючи розв'язки системи рівнянь (2) з граничною умовою $\Phi_0(s, k) = 0$ так, як у статті [1], одержимо

$$\Phi_n(s, k) = D_n(s) \Phi_h(s, k) - \sum_{i=1}^{h-n} R_i(s) M_{n+i}(s, k), \quad 1 \le n \le h. \tag{3}$$

Тут

$$\begin{aligned} D_n(s) &= R_{h-n}(s) - f(s) \sum_{i=1}^{h-n} R_i(s) L_{n+i}(s), \quad n \ge 0; \\ \Phi_h(s, k) &= \frac{1}{D_0(s)} \sum_{i=1}^{h} R_i(s) M_i(s, k). \end{aligned} \tag{4}$$

Враховуючи, що

$$M_n(s) = \sum_{k=1}^{m+1} M_n(s, k) = \frac{1 - f(s)}{s} + f(s) \Bigg(\frac{1 - \widetilde{f}^{m-h}(s)}{s} \overline{p}_{m-n}(s) + \\ + \sum_{j=h+1}^{m-1} p_{j-n}(s) \frac{1 - \widetilde{f}^{j-h}(s)}{s} \Bigg); \qquad \lim_{s \to +0} \frac{1 - \widetilde{f}^n(s)}{s} = n \widetilde{m}_1,$$

де

$$\widetilde{m}_1 = \int_0^\infty x \, d\widetilde{F}(x) = m_1 = \int_0^\infty x \, dF(x),$$

використовуючи співвідношення (3), (4) і повторюючи міркування, викладені у п. 4 статті [1], отримаємо формули для середньої тривалості періоду зайнятості

$$\mathbf{M}\,\tau(m) = \sum_{i=1}^{h} R_i \Bigg(m_1 + \widetilde{m}_1 \Bigg((m-h) \overline{p}_{m-i} + \sum_{j=h+1}^{m-1} (j-h) p_{j-i} \Bigg) \Bigg) -$$

$$-\sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i\Big(m_1+\widetilde{m}_1\Big((m-h)\overline{p}_{m-n-i}+\sum_{j=h+1}^{m-1}(j-h)p_{j-n-i}\Big)\Big)+$$
$$+\widetilde{m}_1\Big(\sum_{n=h+1}^{m}(n-h)a_n+(m+1-h)\overline{a}_{m+1}\Big) \qquad (5)$$

і для ергодичного розподілу кількості замовлень у системі

$$\rho_0(m)=\frac{1}{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(m)};$$
$$\rho_k(m)=\frac{\lambda}{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(m)}\left(\sum_{i=1}^{k}R_iq_{k-i}-\sum_{n=1}^{h-1}a_n\sum_{i=1}^{k-n}R_iq_{k-n-i}\right)\qquad (k=\overline{1,h});$$
$$\rho_k(m)=\frac{\lambda}{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(m)}\left(\sum_{i=1}^{h}R_i\big(q_{k-i}+\widetilde{m}_1\overline{p}_{k-i}\big)-\right.$$
$$\left.-\sum_{n=1}^{h-1}a_n\sum_{i=1}^{h-n}R_i\big(q_{k-n-i}+\widetilde{m}_1\overline{p}_{k-n-i}\big)+\widetilde{m}_1\overline{a}_k\right)\qquad (k=\overline{h+1,m}); \qquad (6)$$
$$\rho_{m+1}(m)=\frac{\lambda}{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(m)}\left(\sum_{i=1}^{h}R_i\overline{q}_{m+1-i}-\sum_{n=1}^{h-1}a_n\sum_{i=1}^{h-n}R_i\overline{q}_{m+1-n-i}+\widetilde{m}_1\overline{a}_{m+1}\right).$$

Зрозуміло, що ті доданки у правих частинах співвідношень (5) і (6), які містять співмножник $\widetilde{m}_1$, відповідають періоду блокування вхідного потоку, але лише тій його частині, яка починалась від моменту t початку обслуговування чергового замовлення, для якого виконувалась умова $\xi(t)>h$. Щоб отримати з (5) формулу для середньої тривалості тої частини періоду зайнятості, коли відбувається блокування вхідного потоку (позначимо її через $\tau_{\mathrm{b}}(m)$), треба до зазначеної суми додати вираз

$$\mathbf{M}\,\widetilde{\tau}_{m+1}(m)=\sum_{i=1}^{h}R_i\overline{q}_{m+1-i}-\sum_{n=1}^{h-1}a_n\sum_{i=1}^{h-n}R_i\overline{q}_{m+1-n-i}, \qquad (7)$$

який входить у чисельник формули для ймовірності $\rho_{m+1}(m)$ і відтворює середню тривалість тієї частини періоду зайнятості, коли вхідний потік заблоковано через перевищення кількості замовлень у системі числа m, і відбувається дообслуговування замовлення, в момент t початку обслуговування якого виконувалась умова $\xi(t)\le h$. Водночас вираз (7) треба відняти від суми тих доданків правої частини формули (5), які не містять співмножника $\widetilde{m}_1$, щоб отримати середню тривалість тої частини періоду зайнятості, коли немає блокування вхідного потоку (позначимо її через $\tau_{\mathrm{nb}}(m)$).

Позначимо через $\rho_{k(\mathrm{b})}(m)$ і $\rho_{k(\mathrm{nb})}(m)$ ті частини ергодичного розподілу кількості замовлень у системі, які відповідають станам системи, коли вхідний потік заблокований і, відповідно, незаблокований. З наведеного та очевидної рівності

$$\sum_{i=1}^{h}R_i-\sum_{n=1}^{h-1}a_n\sum_{i=1}^{h-n}R_i=\sum_{i=1}^{h}R_i\overline{a}_{h+1-i}$$

одержимо таке твердження.

Теорема 1. *Середні значення випадкових величин $\tau_{nb}(m)$, $\tau_b(m)$, відповідні частини ергодичного розподілу кількості замовлень у системі $M_h^\theta/G/1/m$ та ймовірність обслуговування замовлень $\mathbf{P}_{sv}(m)$ визначають за формулами:*

$$\mathbf{M}\,\tau_{nb}(m) = m_1 \sum_{i=1}^{h} R_i \overline{a}_{h+1-i} - \mathbf{M}\,\widetilde{\tau}_{m+1}(m); \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\,\tau_b(m) = m_1 \Bigg(& \sum_{i=1}^{h} R_i \Big((m-h)\overline{p}_{m-i} + \sum_{j=h+1}^{m-1} (j-h) p_{j-i} \Big) - \\ & - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i \Big((m-h)\overline{p}_{m-n-i} + \sum_{j=h+1}^{m-1} (j-h) p_{j-n-i} \Big) + \\ & + \sum_{n=h+1}^{m} (n-h) a_n + (m+1-h)\overline{a}_{m+1} \Bigg) + \mathbf{M}\,\widetilde{\tau}_{m+1}(m); \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} & \rho_{0(nb)}(m) = \rho_0(m); \qquad \rho_{k(nb)}(m) = \rho_k(m) \quad (\,k = \overline{1,\, h}\,); \qquad \rho_{m+1(nb)}(m) = 0; \\ & \rho_{k(nb)}(m) = \frac{\lambda}{1+\lambda \mathbf{M}\,\tau(m)} \left(\sum_{i=1}^{h} R_i q_{k-i} - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i q_{k-n-i} \right) \ (\,k = \overline{h+1,\, m}\,); \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} & \rho_{k(b)}(m) = 0 \quad (\,k = \overline{0,\, h}\,); \qquad \rho_{m+1(b)}(m) = \rho_{m+1}(m); \\ & \rho_{k(b)}(m) = \frac{\lambda m_1}{1+\lambda \mathbf{M}\,\tau(m)} \Bigg(\sum_{i=1}^{h} R_i \overline{p}_{k-i} - \\ & \qquad - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i \overline{p}_{k-n-i} + \overline{a}_k \Bigg) \quad (\,k = \overline{h+1,\, m}\,); \end{aligned} \tag{11}$$

$$\mathbf{P}_{sv}(m) = \frac{1+\lambda \mathbf{M}\,\tau_{nb}(m)}{1+\lambda \mathbf{M}\,\tau(m)} \quad (a_1 = 1; \quad a_n = 0, \quad n \geq 2). \tag{12}$$

Розглянемо систему $\mathrm{M}_h^\theta/\mathrm{G}/1$, для якої немає умови обмеженості довжини черги ($m = \infty$). Прийнявши $m \to \infty$ у співвідношеннях (8)–(12), одержимо таке твердження.

Теорема 2. *Середні значення випадкових величин $\tau_{nb}(\infty)$, $\tau_b(\infty)$, відповідні частини ергодичного розподілу кількості замовлень у системі $M_h^\theta/G/1$ та ймовірність обслуговування замовлень $\mathbf{P}_{sv}(\infty)$ визначають за формулами*

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}\,\tau_{nb}(\infty) = m_1 \sum_{i=1}^{h} R_i \overline{a}_{h+1-i}; \qquad \mathbf{M}\,\tau_b(\infty) = m_1 \Bigg(\sum_{i=1}^{h} R_i \sum_{j=h+1}^{\infty} (j-h) p_{j-i} - \\ & \qquad - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i \sum_{j=h+1}^{\infty} (j-h) p_{j-n-i} + \sum_{n=h+1}^{\infty} (n-h) a_n \Bigg); \end{aligned}$$

$$\mathbf{M}\,\tau(\infty) = \mathbf{M}\,\tau_{nb}(\infty) + \mathbf{M}\,\tau_b(\infty); \qquad \rho_{0(nb)}(\infty) = \frac{1}{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(\infty)};$$

$$\rho_{k(nb)}(\infty) = \frac{\lambda}{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(\infty)}\left(\sum_{i=1}^{k} R_i q_{k-i} - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{k-n} R_i q_{k-n-i}\right) \quad (\,k=\overline{1,\,h}\,);$$

$$\rho_{k(nb)}(\infty) = \frac{\lambda}{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(\infty)}\left(\sum_{i=1}^{h} R_i q_{k-i} - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i q_{k-n-i}\right) \quad (\,k\ge h+1\,);$$

$$\rho_{k(b)}(\infty) = 0 \qquad (\,k=\overline{0,\,h}\,);$$

$$\rho_{k(b)}(\infty) = \frac{\lambda m_1}{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(\infty)}\left(\sum_{i=1}^{h} R_i \overline{p}_{k-i} - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i \overline{p}_{k-n-i} + \overline{a}_k\right) \quad (\,k\ge h+1\,);$$

$$\mathbf{P}_{sv}(\infty) = \frac{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau_{nb}(\infty)}{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(\infty)}. \tag{13}$$

3. Дослідження залежностей $\mathbf{M}\,\tau(\mathbf{m})$ від параметрів m і h. Нагадаємо деякі позначення з [1]

$$\rho = \lambda m_1 b_1, \qquad b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n.$$

Тут λ – параметр вхідного потоку; $a_i = \mathbf{P}\{\theta_n = i\}$; θ_n – кількість замовлень в n-й групі.

Лема 1. *Для послідовностей $\{p_i\}$, $\{R_i\}$, введених в [1], справджуються такі рівності:*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \overline{p}_j = \rho; \qquad \sum_{i=1}^{k} R_i \sum_{j=0}^{k-i} \overline{p}_j = \sum_{i=1}^{k} R_i - k. \tag{14}$$

Доведення. Враховуючи, що згідно з означенням послідовності ймовірностей $\{p_i\}$ $(i \ge -1)$

$$\sum_{i=-1}^{\infty} (i+1) p_i = \rho,$$

одержимо

$$\sum_{i=-1}^{\infty} (i+1) p_i = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) p_j = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{p}_j = \rho.$$

Використовуючи співвідношення (див. [1])

$$\sum_{i=1}^{k} R_i \overline{p}_{k-i} = R_k - 1, \tag{15}$$

отримуємо

$$\sum_{i=1}^{k} R_i \sum_{j=0}^{k-i} \overline{p}_j = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=1}^{k-j} R_i \overline{p}_{h-j-i} = \sum_{j=0}^{k-1} (R_{h-j} - 1) = \sum_{i=1}^{k} R_i - k.$$

Лему доведено. □

Лема 2. *Середні тривалості періодів зайнятості систем $M_h^\theta/G/1/m$ та $M_h^\theta/G/1$ визначають за формулами*

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\,\tau(m) = m_1\Bigg(b_1 + \rho\sum_{i=1}^{h} R_i\overline{a}_{h+1-i} - \sum_{i=1}^{h} R_i \sum_{j=m+1-i}^{\infty}\overline{p}_j +\\ + \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i \sum_{j=m+1-n-i}^{\infty}\overline{p}_j - \sum_{n=m+2}^{\infty}(n-m-1)a_n\Bigg);\end{aligned} \tag{16}$$

$$\mathbf{M}\,\tau(\infty) = m_1\Bigg(b_1 + \rho\sum_{i=1}^{h} R_i\overline{a}_{h+1-i}\Bigg). \tag{17}$$

Доведення. Для відшукання $\mathbf{M}\,\tau(m)$ використаємо співвідношення (5), в якому $\widetilde{m}_1 = m_1$. Враховуючи рівності (14), після нескладних перетворень отримаємо

$$\begin{aligned}(m-h)\overline{p}_{m-i} + \sum_{j=h+1}^{m-1}(j-h)p_{j-i} = \sum_{j=h+1-i}^{\infty}\overline{p}_j - \sum_{j=m+1-i}^{\infty}\overline{p}_j =\\ = \rho - \sum_{j=0}^{h-i}\overline{p}_j - \sum_{j=m+1-i}^{\infty}\overline{p}_j;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{h} R_i\Bigg((m-h)\overline{p}_{m-i} + \sum_{j=h+1}^{m-1}(j-h)p_{j-i}\Bigg) = \sum_{i=1}^{h} R_i\Bigg(\rho - \sum_{j=0}^{h-i}\overline{p}_j - \sum_{j=m+1-i}^{\infty}\overline{p}_j\Bigg) =\\ = h + \sum_{i=1}^{h} R_i\Bigg(\rho - 1 - \sum_{j=m+1-i}^{\infty}\overline{p}_j\Bigg);\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=h+1}^{m}(n-h)a_n + (m+1-h)\overline{a}_{m+1} =\\ = b_1 - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n + \sum_{n=h+1}^{m} n a_n - h\overline{a}_{h+1} + (m+1)\overline{a}_{m+1} =\\ = b_1 - \sum_{n=m+2}^{\infty}(n-m-1)a_n - \sum_{n=1}^{h} n a_n - h\overline{a}_{h+1}.\end{aligned}$$

Після аналогічних до виконаних у (18) перетворень виразу

$$\sum_{i=1}^{h-n} R_i\Bigg((m-h)\overline{p}_{m-n-i} + \sum_{j=h+1}^{m-1}(j-h)p_{j-n-i}\Bigg)$$

знайдемо

$$\mathbf{M}\,\tau(m) = m_1\Bigg((1+\rho)\sum_{i=1}^{h} R_i\overline{a}_{h+1-i} - \Bigg(\sum_{i=1}^{h} R_i\overline{a}_{h+1-i} - h + \sum_{n=1}^{h-1} a_n(h-n)\Bigg) -$$

$$-\sum_{i=1}^{h} R_i \sum_{j=m+1-i}^{\infty} \overline{p}_j + \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i \sum_{j=m+1-n-i}^{\infty} \overline{p}_j + b_1 -$$
$$- \sum_{n=m+2}^{\infty} (n-m-1)a_n - \sum_{n=1}^{h} n a_n - h\overline{a}_{h+1}\Big).$$

Звідси, враховуючи, що

$$h - \sum_{n=1}^{h-1}(h-n)a_n = h - \sum_{n=1}^{h}(h-n)a_n = h\overline{a}_{h+1} + \sum_{n=1}^{h} n a_n,$$

отримаємо формулу (16), а після переходу в ній до границі при $m \to \infty$ – співвідношення (17). Лему доведено. □

Теорема 3. *А)* $\mathbf{M}\,\tau(m)$ *зростає як функція параметра* m. *Б)* $\mathbf{M}\,\tau(m)$ *і* $\mathbf{M}\,\tau(\infty)$ *зростають як функції параметра* h.

Доведення. *А*) З формули (16) для $\mathbf{M}\,\tau(m)$ випливає, що

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{M}\,\tau(m) = m_1\Big(b_1 + \rho \sum_{i=1}^{h} R_i \overline{a}_{h+1-i}\Big).$$

Тому для доведення першої частини теореми достатньо довести, що

$$\sum_{i=1}^{h} R_i \sum_{j=m+1-i}^{\infty} \overline{p}_j - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i \sum_{j=m+1-n-i}^{\infty} \overline{p}_j + \sum_{n=m+2}^{\infty} (n-m-1)a_n > 0.$$

Отримали

$$\sum_{i=1}^{h} R_i \sum_{j=m+1-i}^{\infty} \overline{p}_j - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i \sum_{j=m+1-n-i}^{\infty} \overline{p}_j =$$
$$= \overline{a}_h \sum_{i=1}^{h} R_i \sum_{j=m+1-i}^{\infty} \overline{p}_j + \sum_{n=1}^{h-1} a_n \Big(\sum_{i=1}^{h} R_i \sum_{j=m+1-i}^{\infty} \overline{p}_j - \sum_{i=1}^{h-n} R_i \sum_{j=m+1-n-i}^{\infty} \overline{p}_j\Big) =$$
$$= \overline{a}_h \sum_{i=1}^{h} R_i \sum_{j=m+1-i}^{\infty} \overline{p}_j + \sum_{n=1}^{h-1} a_n \Big(\sum_{i=1}^{n} R_i \sum_{j=m+1-i}^{\infty} \overline{p}_j +$$
$$+ \sum_{i=1}^{h-n} (R_{n+i} - R_i) \sum_{j=m+1-n-i}^{\infty} \overline{p}_j\Big) > 0,$$

оскільки $R_{n+1} - R_n > 0$ для всіх натуральних значень n.

Б) Позначимо через $\mathbf{M}\,\tau_{h+1}(m)$ значення правої частини (16) після заміни h на $h+1$. Тоді з (16) одержимо

$$\mathbf{M}\,\tau_{h+1}(m) - \mathbf{M}\,\tau(m) = m_1\Big(\rho - \sum_{j=m-h}^{\infty} \overline{p}_j\Big)\Big(R_{h+1} - \sum_{i=1}^{h} R_i a_{h+1-i}\Big) > 0, \qquad (19)$$

оскільки $\rho = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \overline{p}_j > \sum\limits_{j=m-h}^{\infty} \overline{p}_j$, і послідовність R_n зростає. З (19) отримаємо

$$\mathbf{M}\,\tau_{h+1}(\infty) - \mathbf{M}\,\tau(\infty) = m_1\rho\Big(R_{h+1} - \sum_{i=1}^{h} R_i a_{h+1-i}\Big) > 0.$$

Теорему доведено. $\square$

4. Дослідження залежностей імовірності обслуговування від параметрів *m* і *h*.

Теорема 4. *А)* $\mathbf{P}_{sv}(\infty)$ *зростає як функція параметра* h. *Б) Якщо* $a_1 = 1$, *то* $\mathbf{P}_{sv}(m)$ *зростає як функція параметра* m.

Доведення. *А*) Співвідношення (13) можна записати так:

$$\mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(\infty) = \frac{1 + \lambda m_1 \sum\limits_{i=1}^{h} R_i \overline{a}_{h+1-i}}{1 + \lambda \mathbf{M}\,\tau(\infty)}. \tag{20}$$

Позначимо через $\mathbf{P}_{\mathrm{sv}(h+1)}(\infty)$ значення правої частини (20) після заміни h на $h+1$. Тоді за допомогою (20) одержимо

$$\begin{gathered}
\big(\mathbf{P}_{\mathrm{sv}(h+1)}(\infty) - \mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(\infty)\big)\big(1 + \lambda\mathbf{M}\,\tau(\infty)\big)\big(1 + \lambda\mathbf{M}\,\tau_{h+1}(\infty)\big) = \\
= \Big(1 + \lambda m_1 \sum_{i=1}^{h+1} R_i \overline{a}_{h+2-i}\Big)\big(1 + \lambda\mathbf{M}\,\tau(\infty)\big) - \Big(1 + \lambda m_1 \sum_{i=1}^{h} R_i \overline{a}_{h+1-i}\Big)\times \\
\times\big(1 + \lambda\mathbf{M}\,\tau_{h+1}(\infty)\big) = (1-\rho)\lambda m_1\Big(R_{h+1} - \sum_{i=1}^{h} R_i a_{h+1-i}\Big) + \\
+ (\lambda m_1)^2 \sum_{i=1}^{h+1} R_i \overline{a}_{h+2-i}\Big(b_1 + \rho\sum_{i=1}^{h} R_i \overline{a}_{h+1-i}\Big) - \\
- (\lambda m_1)^2 \sum_{i=1}^{h} R_i \overline{a}_{h+1-i}\Big(b_1 + \rho\sum_{i=1}^{h+1} R_i \overline{a}_{h+2-i}\Big) = \lambda m_1\Big(R_{h+1} - \sum_{i=1}^{h} R_i a_{h+1-i}\Big) > 0,
\end{gathered}$$

що й доводить першу частину теореми.

Б) У випадку, коли замовлення надходять по одному ($a_1 = 1$), зі співвідношень (12) і (16) отримаємо

$$\mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(m) = \frac{1 + \lambda\Big(m_1 R_h - R_h \overline{q}_{m+1-h} + \sum\limits_{i=1}^{h-1} R_i q_{m-i}\Big)}{1 + \lambda\mathbf{M}\,\tau(m)}; \tag{21}$$

$$\mathbf{M}\,\tau(m) = m_1\Big(1 + \lambda m_1 R_h - R_h \sum_{j=m+1-h}^{\infty} \overline{p}_j + \sum_{i=1}^{h-1} R_i \overline{p}_{m-i}\Big). \tag{22}$$

Позначимо чисельник правої частини формули (21) через $\mathbf{P}_{\mathrm{num}}(m)$. З означень послідовностей q_i, p_i [1] у випадку, коли $a_1 = 1$, можна вивести такі співвідношення:

$$\lambda q_i = \overline{p}_i \qquad (\, i \geq 0\,). \tag{23}$$

Тоді за допомогою (21)-(23) одержимо

$$\mathbf{P}_{\mathrm{num}}(m+1) - \mathbf{P}_{\mathrm{num}}(m) = R_h \overline{p}_{m+1-h} - \sum_{i=1}^{h-1} R_i p_{m-i};$$

$$\mathbf{M}\,\tau(m+1) - \mathbf{M}\,\tau(m) = m_1 \Bigg(R_h \overline{p}_{m+1-h} - \sum_{i=1}^{h-1} R_i p_{m-i} \Bigg);$$

$$\big(\mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(m+1) - \mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(m)\big)\big(1 + \lambda \mathbf{M}\,\tau(m)\big)\big(1 + \lambda \mathbf{M}\,\tau(m+1)\big) =$$
$$= \big(\mathbf{P}_{\mathrm{num}}(m+1) - \mathbf{P}_{\mathrm{num}}(m)\big)\big(1 + \lambda \mathbf{M}\,\tau(m)\big) - \lambda \mathbf{P}_{\mathrm{num}}(m)\big(\mathbf{M}\,\tau(m+1) -$$
$$- \mathbf{M}\,\tau(m)\big) = \Bigg(R_h \overline{p}_{m+1-h} - \sum_{i=1}^{h-1} R_i p_{m-i} \Bigg)\big(1 + \lambda \mathbf{M}\,\tau(m) - \lambda m_1 \mathbf{P}_{\mathrm{num}}(m)\big) =$$
$$= R_h \overline{p}_{m+1-h} - \sum_{i=1}^{h-1} R_i p_{m-i} > 0.$$

Теорему доведено. □

5. Визначення стаціонарних характеристик черги. Розглянемо стаціонарні характеристики черги: середню довжину черги $\mathbf{M}\,Q(m)$ та середній час очікування $\mathbf{M}\,w(m)$. Для системи з обмеженою чергою їх знаходимо за формулами

$$\mathbf{M}\,Q(m) = \sum_{k=1}^{m} k \rho_{k+1}(m); \qquad \mathbf{M}\,w(m) = \frac{\mathbf{M}\,Q(m)}{\lambda b_1 \mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(m)}. \tag{24}$$

Співвідношення для $\mathbf{M}\,w(m)$ випливає з формули Літтла для систем обслуговування з втратами замовлень. Перед тим, як скористатися формулами (24), треба знайти ймовірності $\rho_i(m)$ та $\mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(m)$, визначені співвідношеннями (6) і (12) (при $a_1 = 1$), відповідно.

Формулу (12) не можна використати у випадку групового надходження замовлень ($a_1 < 1$), тому що для системи з обмеженою чергою деякі замовлення, які прибувають на вхід системи в момент, коли вхідний потік не блокується, можуть бути втрачені. Відповідну формулу для $\mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(m)$ можна отримати як границю при $T \to \infty$ відношення кількості обслужених замовлень до кількості всіх, що надійшли за час T. Середня кількість замовлень, які прибули на вхід системи за час T, дорівнює $\lambda b_1 T$, а середня кількість обслужених за той самий час становить $\big(1 - \rho_0(m)\big)T/m_1$. У підсумку одержимо таку формулу для ймовірності обслуговування:

$$\mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(m) = \frac{\mathbf{M}\,\tau(m)}{m_1 b_1 \big(1 + \lambda \mathbf{M}\,\tau(m)\big)}.$$

У випадку системи з необмеженою чергою з (24) отримаємо рівності

$$\mathbf{M}\,Q(\infty)=\sum_{k=1}^{\infty}k\rho_{k+1}(\infty);\qquad \mathbf{M}\,w(\infty)=\frac{\mathbf{M}\,Q(\infty)}{\lambda b_1\mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(\infty)}. \tag{25}$$

Отже, для відшукання $\mathbf{M}\,Q(\infty)$ треба знайти суму нескінченного ряду.

Визначимо $\mathbf{M}\,Q(\infty)$ для випадку, коли замовлення надходять по одному ($a_1=1$), і формули для ергодичного розподілу $\rho_i(\infty)$, отримані з (6) при $m\to\infty$, спрощуються

$$\rho_0(\infty)=\frac{1}{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(\infty)};\qquad \rho_1(\infty)=\frac{R_1}{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(\infty)};$$

$$\begin{gathered}\rho_k(\infty)=\frac{R_k-R_{k-1}}{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(\infty)}\quad(k=\overline{1,h});\qquad \rho_k(\infty)=\frac{\lambda}{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(\infty)}\Big(R_h(q_{k-h}+\\ +m_1\overline{p}_{k-h})+\sum_{i=1}^{h-1}R_i(q_{k-i}-q_{k-1-i}-m_1p_{k-1-i})\Big)\quad(k>h).\end{gathered} \tag{26}$$

Теорема 5. *Якщо $a_1=1$ (замовлення надходять по одному, $\rho=\lambda m_1$), то середню довжину черги для системи $M_h^{\theta}/G/1$ визначають за формулою*

$$\begin{gathered}\mathbf{M}\,Q(\infty)=\frac{1}{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(\infty)}\Bigg(\sum_{i=1}^{h-1}(R_h-R_i)+(1+\rho)\Bigg((h-1)\big(1-\\ -R_h(1-\rho)\big)+\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg(R_h\sum_{i=k}^{\infty}\overline{p}_i-\sum_{i=1}^{h-1}R_i\overline{p}_{h+k-1-i}\Bigg)\Bigg)\Bigg).\end{gathered} \tag{27}$$

Доведення. Ввівши позначення $\overline{\rho}_k(\infty)=\sum\limits_{i=k}^{\infty}\rho_i(\infty)$, першу з формул (25) запишемо у вигляді

$$\mathbf{M}\,Q(\infty)=\sum_{k=2}^{\infty}\overline{\rho}_k(\infty). \tag{28}$$

Використовуючи першу з рівностей (14) та співвідношення (15) і (23), за допомогою (26) послідовно знаходимо

$$\overline{\rho}_{h+k}(\infty)=\frac{1+\rho}{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(\infty)}\Bigg(R_h\sum_{i=k}^{\infty}\overline{p}_i-\sum_{i=1}^{h-1}R_i\overline{p}_{h+k-1-i}\Bigg)\qquad(k\ge 1);$$

$$\overline{\rho}_{h+1}(\infty)=\frac{1+\rho}{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(\infty)}\big(1-R_h(1-\rho)\big);$$

$$\overline{\rho}_k(\infty)=\frac{1}{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(\infty)}\big(R_h-R_{k-1}+(1+\rho)\big(1-R_h(1-\rho)\big)\big)\quad(k=\overline{2,h}).$$

Підставляючи одержані вирази для $\overline{\rho}_k(\infty)$ у формулу (28), отримаємо співвідношення (27). Теорему доведено. □

Для деяких розподілів часу обслуговування суми нескінченних рядів у (27) вдається знайти. Розглянемо два такі випадки.

Теорема 6. *Нехай $a_1 = 1$ (замовлення надходять по одному). А) У випадку показникового розподілу часу обслуговування ($F(x) = 1 - e^{-\mu x}$, $x \geq 0$; $\rho = \lambda m_1 = \lambda/\mu$)*

$$\mathbf{M}\, Q(\infty) = \frac{1}{1+\lambda \mathbf{M}\,\tau(\infty)} \Biggl(\sum_{i=1}^{h-1} (R_h - R_i) + (1+\rho)\biggl((h-1)\bigl(1- - R_h(1-\rho)\bigr) + R_h\rho^2 - \rho \sum_{i=1}^{h-1} R_i \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^{h-i} \biggr)\Biggr). \tag{29}$$

Б) Якщо час обслуговування розподілений за законом Ерланга другого порядку ($F(x) = 1 - (1+\mu x)e^{-\mu x}$, $x \geq 0$; $\rho = \lambda m_1 = 2\lambda/\mu$), то

$$\mathbf{M}\, Q(\infty) = \frac{1}{1+\lambda \mathbf{M}\,\tau(\infty)} \Biggl(\sum_{i=1}^{h-1} (R_h - R_i) + (1+\rho)\biggl((h-1)\bigl(1- - R_h(1-\rho)\bigr) + \frac{3}{4} R_h\rho^2 - \sum_{i=1}^{h-1} R_i (\rho + h + 2 - i) \left(\frac{\rho}{2+\rho}\right)^{h+1-i} \biggr)\Biggr). \tag{30}$$

Доведення. *А*) Для часу обслуговування, розподіленого за показниковим законом, з означення послідовності $\{p_i\}$ (див. [1]) отримуємо

$$p_i = \frac{\mu \Lambda^{i+1}}{\lambda+\mu}, \quad \overline{p}_i = \Lambda^{i+1} \quad (\, i \geq -1\,); \quad \Lambda = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\,; \quad \sum_{i=k}^{\infty} \overline{p}_i = \rho\Lambda^k; \quad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=k}^{\infty} \overline{p}_i = \rho^2,$$

і формула (27) набуває вигляду (29).

Б) Якщо $F(x) = 1 - (1+\mu x)e^{-\mu x}$, $x \geq 0$, то

$$p_i = \frac{(i+2)\mu^2\Lambda^{i+1}}{(\lambda+\mu)^2}, \quad \overline{p}_i = \frac{\bigl(\lambda + (i+2)\mu\bigr)\Lambda^{i+1}}{\lambda+\mu} \quad (\, i \geq -1\,); \quad \sum_{i=k}^{\infty} \overline{p}_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \times$$

$$\times \Lambda^{k-1}\bigl(k + 2 - 2(k+1)\Lambda + k\Lambda^2\bigr); \quad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=k}^{\infty} \overline{p}_i = \Lambda \sum_{k=1}^{\infty} k\Lambda^k + \rho \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda^k = \frac{3}{4}\rho^2,$$

і з (27) одержуємо співвідношення (30). Теорему доведено. □

6. Приклади обчислення стаціонарних характеристик. Припустимо, що час обслуговування розподілений за законом Ерланга другого порядку з параметром μ ($m_1 = 2/\mu$). Для системи $\mathrm{M}_h^{\theta}/\mathrm{G}/1$ розглянемо випадки: $a_1 = 0,75$, $a_2 = 0,25$ (замовлення надходять по одному та по двоє, приклад 1); $a_1 = 1$ (замовлення надходять по одному, приклад 2).

Позначимо через $\mathbf{P}_{\mathrm{LS}}(\infty)$ імовірність втрати замовлення для системи $\mathrm{M}_h^{\theta}/\mathrm{G}/1$, тоді

$$\mathbf{P}_{\mathrm{LS}}(\infty) = 1 - \mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(\infty). \tag{31}$$

Нехай $\lambda = 2$, $\mu = 3$. Результати обчислень стаціонарних характеристик системи, отримані для прикладів 1 і 2 з використанням формул (17), (20), (25), (30) і (31), наведено в таблицях 1 і 2, відповідно. Для порівняння у цих таблицях записані також значення деяких характеристик, одержані за допомогою системи імітаційного моделювання GPSS World [5, 6] для значень часу роботи системи обслуговування

$t = 10^5$ (табл. 1) і $t = 3 \cdot 10^5$ (табл. 2). Програми GPSS World, які використовували для обчислень, можна знайти в [1]. В них внесено невеликі зміни, пов'язані з особливостями надходження замовлень (розподіл $\{a_i\}$) для прикладів 1 і 2.

Таблиця 1. Стаціонарні характеристики системи $\mathrm{M}_h^\theta/\mathrm{G}/1$ (прикл. 1)

h	$\mathbf{M}\,\tau(\infty)$	$\mathbf{P}_{\mathrm{LS}}(\infty)$	$\mathbf{P}_{\mathrm{LS}}(\infty)$ (GPSS)
1	3,920	0,468	0,465
2	8,326	0,434	0,435
3	15,701	0,419	0,418
4	28,801	0,410	0,410
5	52,045	0,406	0,409
6	93,273	0,403	0,404
7	166,399	0,402	0,402

Таблиця 2. Стаціонарні характеристики системи $\mathrm{M}_h^\theta/\mathrm{G}/1$ (прикл. 2)

h	$\mathbf{M}\,\tau(\infty)$	$\mathbf{P}_{\mathrm{LS}}(\infty)$	$\mathbf{P}_{\mathrm{LS}}(\infty)$ (GPSS)	$\mathbf{M}\,w(\infty)$	$\mathbf{M}\,w(\infty)$ (GPSS)
1	3,136	0,353	0,352	0,919	0,917
2	5,550	0,312	0,312	1,316	1,313
3	9,140	0,289	0,289	1,781	1,783
4	14,448	0,275	0,276	2,290	2,292
5	22,291	0,266	0,266	2,833	2,833
6	33,873	0,261	0,261	3,403	3,403
7	50,978	0,257	0,257	3,995	3,995

Отримані результати підтверджують висновки теорем 3 і 4 про характер монотонної залежності характеристик $\mathbf{M}\,\tau(\infty)$ і $\mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(\infty)$ від параметра h. Порівняння даних таблиць 1 і 2 засвідчує, що середня тривалість періоду зайнятості $\mathbf{M}\,\tau(\infty)$ і ймовірність втрати замовлення $\mathbf{P}_{\mathrm{LS}}(\infty)$ зменшуються зі зменшенням навантаження на систему (навантаження більше для прикладу 1, коли замовлення можуть надходити й по двоє).

7. Про можливість розв'язання задач оптимального синтезу. Інформацію про характер монотонної залежності характеристики системи обслуговування від одного з параметрів системи можна використати для розв'язання задачі оптимального синтезу системи з заданою характеристикою. Покажемо це на прикладі ймовірності втрати замовлення $\mathbf{P}_{\mathrm{LS}}(\infty)$.

Сформулюємо задачу оптимального синтезу так: *для фіксованих значень параметрів* λ, m_1 *та* a_i $(i \geq 1)$ *знайти таке найменше значення порога блокування* h, *при якому* $\mathbf{P}_{\mathrm{LS}}(\infty)$ *не перевищує заданого значення* P_0. З теореми 4 та формули (31) випливає, що $\mathbf{P}_{\mathrm{LS}}(\infty)$ спадає як функція параметра h. Очевидно, що розв'язок сформульованої задачі визначається за алгоритмом

$$h_{\mathrm{opt}} = \min\{\, h \in \mathbb{N} : \ \mathbf{P}_{\mathrm{LS}(h)}(\infty) \leq P_0 \,\}, \tag{32}$$

де $\mathbf{P}_{\mathrm{LS}(h)}(\infty) = \mathbf{P}_{\mathrm{LS}}(\infty)$ для конкретного значення h. Для реалізації алгоритму (32) достатньо мати результати обчислень значень $\mathbf{P}_{\mathrm{LS}}(\infty)$ для різних h, такі як, наприклад, наведені у таблицях 1 і 2.

Таблиця 3. Розв'язки задачі оптимального синтезу для даних прикладу 1

P_0	0,41	0,42	0,43	0,44	0,45	0,46	0,47
h_{opt}	5	3	3	2	2	2	1

Таблиця 4. Розв'язки задачі оптимального синтезу для даних прикладу 2

P_0	0,26	0,27	0,28	0,29	0,30	0,31	0,32	0,33	0,34	0,35	0,36
h_{opt}	7	5	4	3	3	3	2	2	2	2	1

Розв'язки задач оптимального синтезу для даних прикладів 1 і 2, отримані за допомогою таблиць 1 і 2, подано у таблицях 3 і 4, відповідно.

Список використаної літератури

1. *Братійчук М.* Дослідження систем M/G/1/m та M/G/1 з груповим надходженням замовлень і пороговим блокуванням вхідного потоку / *Братійчук М., Жерновий Ю.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 2010. – Вип. 72. – С. 21-35.
2. *Жерновий К.* Оптимізація режимів обслуговування для систем M/M/1/m та M/M/1 з блокуванням вхідного потоку / *Жерновий К.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 2009. – Вип. 71. – С. 92-101.
3. *Жерновый Ю.В.* Решение задач оптимального синтеза для некоторых марковских моделей обслуживания / *Жерновый Ю.В.* // Информационные процессы. – 2010. – Т. 10, № 3. – С. 257-274.
4. *Братійчук А.М.* Дослідження систем обслуговування з обмеженою чергою / *Братійчук А.М.* Дис. канд. фіз.-мат. наук. – К., 2008.
5. *Боев В.Д.* Моделирование систем. Инструментальные средства GPSS World / *Боев В.Д.* – С.-П., 2004.
6. *Жерновий Ю.В.* Імітаційне моделювання систем масового обслуговування / *Жерновий Ю.В.* – Л., 2007.

Стаття: надійшла до редакції 10.02.2011
прийнята до друку 21.09.2011.

STATIONARY CHARACTERISTICS OF M^{θ}/G/1/m AND M^{θ}/G/1 QUEUES WITH THRESHOLD BLOCKING OF AN INPUT FLOW

Mykola BRATIICHUK[1], Yuriy ZHERNOVYI[2]

[1] *Silesian University of Technology, Kashubska Str., 23, Gliwice, 44-100*
[2] *Ivan Franko National University of L'viv, Universytets'ka Str., 1, L'viv, 79000*
e-mail: yu_zhernovyi@yahoo.com

The $M^\theta/G/1/m$ queue with group arrivals and threshold blocking strategy of an input flow is considered. If at the moment of beginning the service of the next customer the number of customers in the system exceeds some level h, the input flow is blocked while service process goes its own way. The arrivals of the new customers resume when the number of customers in the system decreases to the level h. Average duration of parts of the busy time with absence and presence of blocking of input flow, probability of service of customers and stationary characteristics of queue are found. Monotonicity of dependences of average duration of the busy time and probability of service on the parameters m and h is proved.

Key words: the $M^\theta/G/1/m$ and $M^\theta/G/1$ queueing systems, blocking of an input flow, busy time, stationary characteristics.

СТАЦИОНАРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ $M^\theta/G/1/m$ И $M^\theta/G/1$ С ПОРОГОВОЙ БЛОКИРОВКОЙ ВХОДНОГО ПОТОКА

Николай БРАТИЙЧУК[1], Юрий ЖЕРНОВЫЙ[2]

[1] *Шлёнский политехнический университет, ул. Кашубская, 23, Гливице, 44-100*
[2] *Львовский национальный университет имени Ивана Франко, ул. Университетская, 1, Львов, 79000*
e-mail: yu_zhernovyi@yahoo.com

Рассмотрено систему обслуживания типа $M^\theta/G/1/m$ с групповым поступлением заявок и пороговой блокировкой входного потока. Блокировка потока заявок осуществляется, если в момент начала обслуживания очередной заявки число заявок в системе превышает заданный пороговый уровень h. Определено среднюю продолжительность частей периода занятости с отсутствием и наличием блокировки входного потока, вероятность обслуживания заявок и стационарные характеристики очереди. Доказана монотонность зависимостей средней продолжительности периода занятости и вероятности обслуживания от параметров m и h.

Ключевые слова: системы $M^\theta/G/1/m$ и $M^\theta/G/1/m$, блокировка входного потока, период занятости, стационарные характеристики.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 74. С. 26–33
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 74. P. 26–33

УДК 519.8, 336.761.6

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ ОПТИМІЗАЦІЇ ФОНДОВОГО ПОРТФЕЛЯ АКЦІЙ ТА ОПЦІОНІВ ЄВРОПЕЙСЬКОГО СТИЛЮ

Микола БУГРІЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: ol_buhrii@i.ua

У рамках нечітко-множинної теорії запропоновано метод розв'язування задачі оптимізації розширеного фондового портфеля акцій, покритих опціонами європейського стилю.

Ключові слова: розширений фондовий портфель, опціони.

1. Вступ. Відомо, що вкладання коштів у цінні папери, особливо в акції, є достатньо ризиковою фінансовою операцією. Однак, формуючи портфель акцій, можна практично звести до нуля його несистематичний ризик: якщо деякі компоненти портфеля матимуть низьку дохідність, то інші можуть певною мірою компенсувати втрати інвестора. Чим більше диверсифікований фондовий портфель акцій, тим менший його рівень несистематичного ризику. Оптимальну диверсифікацію портфеля можна провести, зокрема класичними методами Марковіца [1] або Шарпа [2].

Значно складнішою є задача зменшення систематичного ризику фондового портфеля акцій, породженого невизначеністю фінансового ринку. Цього ризику практично неможливо уникнути, однак зменшити його рівень можна шляхом одночасного хеджування і форсування компонент портфеля опціонами. Такі фондові портфелі часто називають розширеними. Інвестори використовують таку стратегію у випадку, коли є прогнози фінансових аналітиків про значні коливання ринкових цін на акції, однак напрям цих коливань достеменно невідомий.

Якщо дохідності компонент розширеного фондового портфеля вважати випадковими величинами з відомими ймовірнісними розподілами, то щільність розподілу дохідності портфеля можна знайти, наприклад, відомим чисельним методом Монте-Карло. Проте цей метод передбачає громіздку обчислювальну процедуру – десятки тисяч операцій на одну точку межі ефективності портфеля. Для об'ємних фондових портфелів чисельне розв'язування задачі оптимізації займає невиправдано багато оперативного часу.

Одним з можливих варіантів виходу з цієї ситуації є модельна зміна способу врахування невизначеності при формулюванні задачі оптимізації: перехід від випадкових величин до нечітких величин у рамках нечітко-множинної теорії [3]. Зокрема, в [4] у рамках цієї теорії запропоновано чисельний метод розв'язування задачі про оптимізацію фондового портфеля, який містить акції та опціони купівлі та продажу на ці акції. В основу цього методу покладено ітераційний вибір часткового співвідношення компонент фондового портфеля з наступним уточненням глибини покриття кожної акції опціонами.

Наша мета – в рамках нечітко-множинної теорії запропонувати один з можливих варіантів зведення задачі про оптимізацію фондового портфеля акцій, кожна з яких покрита call та put опціонами європейського стилю, до деякої еквівалентної задачі математичного програмування. Це дає змогу (в загальному випадку на підставі методу дефазифікації [5]) не тільки ефективно використовувати стандартні прикладні пакети для розв'язування таких задач оптимізації, а й дає змогу зменшити затрати оперативного часу на цю процедуру.

2. Формулювання нечіткої задачі оптимізації та схема її розв'язування. Нехай інвестор хоче сформувати фондовий портфель з n типів акцій і не планує змінювати цей портфель протягом деякого періоду T. Позначимо через x_i $(i=\overline{1,n})$ – відносну частку акції i-го типу в портфелі, а через r_i^a $(i=\overline{1,n})$ – фінальну дохідність акції i-го типу в момент часу T.

В момент формування фондового портфеля відомі експертні дані про те, що ринкова ціна саме цих n типів акцій протягом періоду T може зазнати значних коливань, однак експерти не можуть впевнено визначити напрям цих коливань. У цьому випадку інвестор може застрахувати свій портфель акцій від коливання ринкових цін на них, сформувавши розширений фондовий портфель, тобто покрити кожну акцію i-го типу call та put опціоном європейського стилю з різними цінами виконання і терміном дії T. Така опціонна стратегія називається "стренгл" (long strangle) [6].

Отже, в зазначених умовах інвестор формує розширений фондовий портфель, який містить n типів акцій, n наборів call-опціонів і n наборів put-опціонів європейського стилю на ці акції. Позначимо через x_i $(i=\overline{n+1,2n})$ – відносну частку збірки "акція $(i-n)$-го типу – call-опціон з i-го набору, який повністю форсує цю акцію", через x_i $(i=\overline{2n+1,3n})$ – відносну частку збірки "акція $(i-2n)$-го типу – put-опціон з i-го набору, який повністю хеджує цю акцію", через x_i $(i=\overline{3n+1,4n})$ – відносну частку збірки "акція $(i-3n)$-го типу – call-опціон з i-го набору, який повністю форсує цю акцію – put-опціон з i-го набору, який повністю хеджує цю акцію", через r_i^{oc} $(i=\overline{n+1,2n})$ – фінальну дохідність (в момент часу T) збірки "акція $(i-n)$-го типу – call-опціон з i-го набору, який повністю форсує цю акцію", через r_i^{op} $(i=\overline{2n+1,3n})$ – фінальну дохідність (в момент часу T) збірки "акція $(i-2n)$-го типу – put-опціон з i-го набору, який повністю хеджує цю акцію", а через r_i^{ocp} $(i=\overline{3n+1,4n})$ – фінальну дохідність (в момент часу T) збірки "акція $(i-3n)$-го типу – call-опціон з i-го набору, який повністю форсує цю акцію – put-опціон з i-го набору, який повністю хеджує цю акцію". Всього розширений портфель містить $4n$

компонент з відносними частками x_i $(i = \overline{1, 4n})$, причому

$$\sum_{i=1}^{4n} x_i = 1, \tag{1}$$

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1, \quad (i = \overline{1, 4n}). \tag{2}$$

Нехай у момент формування розширеного фондового портфеля стосовно основних фінансових параметрів, які його характеризують, наявна така інформація.

1. Ринкова ціна акції i-го типу становить $S_{i,0}$ $(i = \overline{1, n})$.
2. На підставі експертних даних показано, що на момент часу T ринкова ціна акції i-го типу перебуватиме в інтервалі $[S_{i,min}, S_{i,max}]$ $(i = \overline{1, n})$, тобто буде нечітким числом прямокутного вигляду [3].
3. Ринкова ціна call-опціону з i-го набору, який форсує акцію i-го типу на 100%, становить $C_{i,c}$ $(i = \overline{n+1, 2n})$.
4. Ціна виконання call-опціону з i-го набору, який форсує акцію i-го типу на 100%, становить $X_{i,c}$ $(i = \overline{n+1, 2n})$, причому $S_{i-n,min} < X_{i,c} < S_{i-n,max}$ $(i = \overline{n+1, 2n})$.
5. Ринкова ціна put-опціону з i-го набору, який хеджує акцію i-го типу на 100%, становить $C_{i,p}$ $(i = \overline{2n+1, 3n})$.
6. Ціна виконання put-опціону з i-го набору, який хеджує акцію i-го типу на 100%, становить $X_{i,p}$ $(i = \overline{2n+1, 3n})$, причому $S_{i-2n,min} < X_{i,p} < X_{i-n,c} <$ $< S_{i-2n,max}$ $(i = \overline{2n+1, 3n})$.

На підставі цих експертних даних можна обчислити нечітку дохідність (інтервал дохідності) розширеного фондового портфеля, який розглядають у момент часу T (момент експірації опціонів).

Справді, якщо акція i-го типу не покривається опціонами, то дохідність цієї акції в момент часу T характеризується нечітким числом r_i^a прямокутного вигляду

$$r_i^a = [r_{i,min}^a, r_{i,max}^a] = \left[\frac{S_{i,min} - S_{i,0}}{T \cdot S_{i,0}}, \frac{S_{i,max} - S_{i,0}}{T \cdot S_{i,0}}\right] \quad (i = \overline{1, n}). \tag{3}$$

Оскільки абсолютний прибуток $I_{i,c}$ $(i = \overline{n+1, 2n})$ call-опціону європейського стилю з i-го набору в момент часу T за умови 100% форсування відповідної акції обчислюють за формулою [6]

$$I_{i,c} = \max\{0, S_{i-n} - X_{i,c}\} - C_{i,c} = \begin{cases} S_{i-n} - X_{i,c} - C_{i,c}, & S_{i-n} > X_{i,c}, \\ -C_{i,c}, & S_{i-n} \leqslant X_{i,c}, \end{cases}$$

де S_{i-n} $(i = \overline{n+1, 2n})$ – ринкова ціна відповідної акції в момент часу T, то дохідність збірки "акція i-го типу – call-опціон з i-го набору" в момент часу T характеризується нечітким числом r_i^{oc} прямокутного вигляду

$$r_i^{oc} = [r_{i,min}^{oc}, r_{i,max}^{oc}] = \left[\frac{S_{i-n,min} - S_{i-n,0} - C_{i,c}}{T \cdot (C_{i,c} + S_{i-n,0})},\right.$$
$$\left.\frac{2S_{i-n,max} - X_{i,c} - S_{i-n,0} - C_{i,c}}{T \cdot (C_{i,c} + S_{i-n,0})}\right] \quad (i = \overline{n+1, 2n}). \tag{4}$$

Аналогічно, абсолютний прибуток $I_{i,p}$ $(i=\overline{2n+1,3n})$ put-опціону європейського стилю з i-го набору в момент часу T за умови 100% хеджування відповідної акції обчислюють за формулою [6]

$$I_{i,p}=\max\{0,X_{i,p}-S_{i-n}\}-C_{i,p}=\begin{cases} X_{i,p}-S_{i-n}-C_{i,p}, & X_{i,p}>S_{i-n},\\ -C_{i,p}, & X_{i,p}\leqslant S_{i-n},\end{cases}$$

де S_{i-n} $(i=\overline{n+1,2n})$ – ринкова ціна відповідної акції в момент часу T, тому дохідність збірки “акція i-го типу – put-опціон з i-го набору” в момент часу T характеризується нечітким числом r_i^{op} прямокутного вигляду

$$r_i^{op}=[r_{i,min}^{op},r_{i,max}^{op}]=$$
$$=\left[\frac{X_{i,p}-S_{i-2n,0}-C_{i,p}}{T\cdot(C_{i,p}+S_{i-2n,0})},\frac{S_{i-2n,max}-S_{i-2n,0}-C_{i,p}}{T\cdot(C_{i,p}+S_{i-2n,0})}\right],\quad (i=\overline{2n+1,3n}). \tag{5}$$

Використовуючи формули (4), (5), легко показати, що дохідність збірки “акція i-го типу – call-опціон з i-го набору, який повністю форсує цю акцію – put-опціон з i-го набору, який повністю хеджує цю акцію” в момент часу T характеризується нечітким числом r_i^{ocp} прямокутного вигляду

$$r_i^{ocp}=[r_{i,min}^{ocp},r_{i,max}^{ocp}]=\left[\frac{X_{i-n,p}-S_{i-3n,0}-C_{i-n,p}-C_{i-2n,c}}{T\cdot(C_{i-n,p}+C_{i-2n,c}+S_{i-3n,0})},\right.$$
$$\left.\frac{2S_{i-3n,max}-X_{i-2n,c}-S_{i-3n,0}-C_{i-n,p}-C_{i-2n,c}}{T\cdot(C_{i-n,p}+C_{i-2n,c}+S_{i-3n,0})}\right],\quad (i=\overline{3n+1,4n}). \tag{6}$$

Тепер на підставі (3) – (6) знайдемо, що дохідність розширеного фондового портфеля акцій, одночасно покритих call та put опціонами європейського стилю виконання, в момент часу T характеризується нечітким числом r прямокутного вигляду

$$r(x)=[r_{min}(x),r_{max}(x)]=\left[\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\frac{S_{i,min}-S_{i,0}}{T\cdot S_{i,0}}+\sum_{i=n+1}^{2n}x_i\frac{S_{i-n,min}-S_{i-n,0}-C_{i,c}}{T\cdot(C_{i,c}+S_{i-n,0})}+\right.$$
$$+\sum_{i=2n+1}^{3n}x_i\frac{X_{i,p}-S_{i-2n,0}-C_{i,p}}{T\cdot(C_{i,p}+S_{i-2n,0})}+\sum_{i=3n+1}^{4n}x_i\frac{X_{i-n,p}-S_{i-3n,0}-C_{i-n,p}-C_{i-2n,c}}{T\cdot(C_{i-n,p}+C_{i-2n,c}+S_{i-3n,0})},$$
$$\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\frac{S_{i,max}-S_{i,0}}{T\cdot S_{i,0}}+\sum_{i=n+1}^{2n}x_i\frac{2S_{i-n,max}-X_{i,c}-S_{i-n,0}-C_{i,c}}{T\cdot(C_{i,c}+S_{i-n,0})}+$$
$$+\sum_{i=2n+1}^{3n}x_i\frac{S_{i-2n,max}-S_{i-2n,0}-C_{i,p}}{T\cdot(C_{i,p}+S_{i-2n,0})}+$$
$$\left.+\sum_{i=3n+1}^{4n}x_i\frac{2S_{i-3n,max}-X_{i-2n,c}-S_{i-3n,0}-C_{i-n,p}-C_{i-2n,c}}{T\cdot(C_{i-n,p}+C_{i-2n,c}+S_{i-3n,0})}\right]. \tag{7}$$

Формуючи розширений фондовий портфель, інвестор передусім обов'язково фіксує нормативний параметр – нижню межу дохідності портфеля. У випадку, який розглядається, нижню межу дохідності портфеля задамо у вигляді нечіткого прямокутного числа

$$r^P=[r_{min}^P,r_{max}^P]. \tag{8}$$

Оскільки ступінь ризику інвестицій у портфель залежатиме від того, наскільки дохідність портфеля буде нижчою від нормативної, то очевидно, що рівень ризику інвестицій у розширений фондовий портфель з дохідністю (7) буде визначатися взаємним розміщенням інтервалів (7), (8). У цьому зв'язку ризик того, що дохідність розширеного фондового портфеля, який розглядається, буде нижчою (вищою) від нормативної, можна обчислити за такою формулою [7]:

$$R = \begin{cases} 0, & r^P_{max} \leqslant r_{min}, \\ \dfrac{(r^P_{max} - r_{min})^2}{2(r^P_{max} - r^P_{min})(r_{max} - r_{min})}, & r^P_{min} < r_{min} < r^P_{max} \leqslant r_{max}, \\ \dfrac{r^P_{min} + r^P_{max} - 2r_{min}}{2(r_{max} - r_{min})}, & r_{min} \leqslant r^P_{min} < r^P_{max} \leqslant r_{max}, \\ \dfrac{2r^P_{max} - r_{min} - r_{max}}{2(r^P_{max} - r^P_{min})}, & r^P_{min} \leqslant r_{min} < r_{max} \leqslant r^P_{max}, \\ 1 - \dfrac{(r_{max} - r^P_{min})^2}{2(r^P_{max} - r^P_{min})(r_{max} - r_{min})}, & r_{min} \leqslant r^P_{min} \leqslant r_{max} \leqslant r^P_{max}, \\ 1, & r_{max} \leqslant r^P_{min}. \end{cases} \tag{9}$$

За цільову функцію в задачі оптимізації розширеного фондового портфеля акцій, одночасно покритих call та put опціонами європейського стилю виконання, природно вибрати його середньо-очікувану дохідність, тобто половину алгебричної суми кінців інтервалу дохідності (7). Оптимізувати портфель в такому формулюванні означає максимізувати його середньо-очікувану дохідність у момент часу T при заданому (фіксованому) значенні ризику $R = R_0$. З огляду на це формалізований запис задачі оптимізації розширеного фондового портфеля акцій, одночасно покритих call та put опціонами європейського стилю виконання, набуде такого вигляду

$$\begin{aligned} r(x_1, ..., x_{4n}) = \frac{r_{min}(x_1, ..., x_{4n}) + r_{max}(x_1, ..., x_{4n})}{2} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{S_{i,min} + S_{i,max} - 2S_{i,0}}{2 \cdot T \cdot S_{i,0}} + \\ + \sum_{i=n+1}^{2n} x_i \frac{S_{i-n,min} + 2S_{i-n,max} - X_{i,c} - 2S_{i-n,0} - 2C_{i,c}}{2 \cdot T \cdot (C_{i,c} + S_{i-n,0})} + \\ + \sum_{i=2n+1}^{3n} x_i \frac{S_{i-2n,max} + X_{i,p} - 2S_{i-2n,0} - 2C_{i,p}}{2 \cdot T \cdot (C_{i,p} + S_{i-2n,0})} + \\ + \sum_{i=3n+1}^{4n} x_i \frac{2S_{i-3n,max} - X_{i-2n,c} + X_{i-n,p} - 2S_{i-3n,0} - 2C_{i-n,p} - 2C_{i-2n,c}}{2 \cdot T \cdot (C_{i-n,p} + C_{i-2n,c} + S_{i-3n,0})} \to \max, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{4n} x_i = 1, \tag{11}$$

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1, \quad (i = \overline{1, 4n}), \tag{12}$$

$$R(x_1, ..., x_{4n}, r^P_{min}, r^P_{max}) = R_0. \tag{13}$$

Для побудови розв'язку задачі (10)-(13) в загальному випадку потрібно врахувати те, що умова (13) має нестандартний ("гіллястий") вигляд: за відомої структури розширеного фондового портфеля притаманний йому рівень ризику обчислюється на підставі однієї з гілок формули (9) залежно від взаємного розміщення інтервалів дохідності (7), (8). Якщо ж структуру розширеного фондового портфеля визначають шляхом розв'язування задачі оптимізації, то відповідну гілку формули (9) потрібно включити в обмеження на шуканий розв'язок. Тоді задача (10)-(13) зводиться до однієї з таких шести задач математичного програмування, для кожної з яких умову (13) треба конкретизувати на підставі співвідношення (9).

Для теоретично безризикового розширеного портфеля акцій і опціонів ($R_0 = 0$) умова, еквівалентна (13), запишемо у вигляді

$$r_{min}(x) \geqslant r^P_{max}. \tag{14}$$

Аналогічно, для портфеля з ризиком $R_0 = 1$ замість умови (13) потрібно розглянути умову

$$r_{max}(x) \leqslant r^P_{min}. \tag{15}$$

Для визначення складових оптимального за дохідністю розширеного фондового портфеля акцій і опціонів у випадку, коли ризик портфеля $R_0 \in (0,1)$, умову (13) в задачі оптимізації потрібно конкретизувати так.

Якщо

$$r^P_{min} < r_{min}(x) < r^P_{max} \leqslant r_{max}(x),$$

то (13) треба замінити такими умовами:

$$(r^P_{max} - r_{min}(x))^2 = 2R_0(r^P_{max} - r^P_{min})(r_{max}(x) - r_{min}(x)),$$

$$r_{min}(x) > r^P_{min}, \quad r_{min}(x) < r^P_{max}, \quad r_{max}(x) \geqslant r^P_{max}. \tag{16}$$

Коли

$$r_{min}(x) \leqslant r^P_{min} < r^P_{max} \leqslant r_{max}(x),$$

то замість умови (13) потрібно розглянути такі умови:

$$r^P_{min} + r^P_{max} - 2r_{min}(x) = 2R_0(r_{max}(x) - r_{min}(x)),$$

$$r_{min}(x) \leqslant r^P_{min}, \quad r^P_{min} < r^P_{max}, \quad r_{max}(x) \geqslant r^P_{max}. \tag{17}$$

У випадку

$$r^P_{min} \leqslant r_{min}(x) < r_{max}(x) \leqslant r^P_{max}$$

умова (13) еквівалентна умовам

$$2r^P_{max} - r_{min}(x) - r_{max}(x) = 2R_0(r^P_{max} - r^P_{min}),$$

$$r_{min}(x) \geqslant r^P_{min}, \quad r_{min}(x) < r_{max}(x), \quad r_{max}(x) \leqslant r^P_{max}. \tag{18}$$

Якщо

$$r_{min}(x) \leqslant r^P_{min} \leqslant r_{max}(x) \leqslant r^P_{max},$$

то умову (13) треба замінити системою умов

$$(r_{max}(x) - r^P_{min})^2 = 2(1 - R_0)(r^P_{max} - r^P_{min})(r_{max}(x) - r_{min}(x)),$$

$$r_{min}(x) \leqslant r^P_{min}, \quad r_{max}(x) \leqslant r^P_{max}, \quad r_{max}(x) \geqslant r^P_{min}. \tag{19}$$

Зауважимо, що співвідношення (14)-(19) явно записують через невідомі частки x_i $(i = \overline{1,4n})$ відповідних компонент фондового портфеля опціонів, оскільки через ці параметри явно виражаються функції $r_{min}(x)$, $r_{max}(x)$ з (7).

Отже, за заданих значень параметрів $S_{i,min}$, $S_{i,max}$ $(i = \overline{1,n})$, $C_{i,c}$, $X_{i,c}$ $(i = \overline{n+1,2n})$, $C_{i,p}$, $X_{i,p}$ $(i = \overline{2n+1,3n})$, r^P_{min}, r^P_{max}, T, R_0, складові x_i $(i = \overline{1,4n})$ фондового портфеля акцій і опціонів європейського стилю повинні бути розв'язком однієї з задач ((8), (9), (10), (14)) - ((8), (9), (10), (19)) залежно від взаємного розміщення інтервалів (7), (8). Для побудови межі ефективності цього портфеля в системі координат "ризик недопустимо низької дохідності портфеля – максимум середньо-очікуваної дохідності портфеля" потрібно розв'язати відповідну задачу оптимізації, змінюючи параметр R_0 в межах $R_{0,min} \leqslant R_0 \leqslant R_{0,max}$, де $R_{0,min}$, $R_{0,max}$ – ризик компоненти портфеля з найменшою та найбільшою дохідністю відповідно.

3. Висновки. Заміна стандартного способу моделювання дохідності активів (як випадкових величин) нечіткими значеннями (інтервалами) дохідностей цих активів допомогла сформулювати й описати схему розв'язування задачі оптимізації розширеного фондового портфеля акцій, одночасно покритих опціонами європейського стилю виконання. Побудова розв'язку задачі оптимізації зводиться до розв'язування деякої задачі математичного програмування. Це дає змогу не тільки побудувати межу ефективності портфеля в системі координат "ризик недопустимо низької дохідності портфеля – максимум середньо-очікуваної дохідності портфеля", але і значно зменшити затрати оперативного часу на розв'язування задачі оптимізації.

Список використаної літератури

1. *Markovitz H.M.* Portfolio Selection / *Markovitz H.M.* // Journal of Finance. – 1952. – Vol. 7. – P. 77-91.
2. *Sharpe W.F.* Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk / *Sharpe W.F.* // Journal of Finance. – 1964. – Vol. 19. – P. 425-442.
3. *Заде Л.А.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / *Заде Л.А.* – М., 1976.
4. *Недосекин А.О.* Оптимизация фондового портфеля, содержащего как подлежащие активы, так и опционы / *Недосекин А.О.* // Банки и Риски. – 2005. – № 2. (http://www.ifel.ru/br2/12.pdf)
5. *Сявавко М.* Математичне моделювання за умов невизначеності. / *Сявавко М., Рибицька О.* – Л., 2000.
6. *Іващук Н.Л.* Ринок деривативів: економіко-математичне моделювання процесів ціноутворення. / *Іващук Н.Л.* – Л., 2008.
7. *Недосекин А.О.* Оценка риска инвестиций для произвольно-размытых факторов инвестиционного проекта. / *Недосекин А.О., Кокош А.М.* http://sedok.narod.ru/sc_group_2003.html

Стаття: надійшла до редакції 01.05.2011
прийнята до друку 21.09.2011

ON SOME OPTIMIZATION PROBLEM OF THE STOCK PORTFOLIO COVERED BY OPTIONS OF EUROPEAN STYLE

Mykola BUGRIY

Ivan Franko National University of L'viv,
Universytets'ka Str., 1, L'viv, 79000
e-mail: ol_buhrii@i.ua

Using fuzzy-plural theory we find the method of solving of optimization's problems for the extended portfolio of the stocks. This stocks are covered by the call and put-options of European style.

Key words: extended portfolio, option.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ФОНДОВОГО ПОРТФЕЛЯ АКЦИЙ И ОПЦИОНОВ ЄВРОПЕЙСКОГО СТИЛЯ

Николай БУГРИЙ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: ol_buhrii@i.ua

Используя нечётно-множественную теорию предложено метод решения задачи оптимизации расшыренного фондового портфеля акций, покрытых опционами европейского стиля.

Ключевые слова: расширенный фондовой портфель, опционы.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 74. С. 34–40
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 74. P. 34–40

УДК 517.574

ІНТЕГРАЛЬНІ СЕРЕДНІ ФУНКЦІЙ, СПРЯЖЕНИХ ДО СУБГАРМОНІЙНИХ ФУНКЦІЙ. II

Ярослав ВАСИЛЬКІВ, Любомир ПОЛІТИЛО

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: YaVVasylkiv@gmail.com, Ljupol7@gmail.com

Для пари функцій $\mathcal{F}(z) := u(z)+i\breve{u}(z)$, де $u(z)$ – субгармонійна в $\mathbb{C}$ функція, гармонійна в деякому околі точки $z = 0$, $u(0) = 0$, а $\breve{u}(z)$ – спряжена до $u(z)$, суттєво уточнено відомі оцінки q-х інтегральних середніх $m_q(r, \mathcal{F})$ при $1 \leqslant q \leqslant 2$. Для цього використано зображення Васильківа-Кондратюка функції $\breve{u}$ в термінах перетвореня Гільберта для кола та класичну теорему М. Ріса про оцінку q-х середніх ($1 < q < +\infty$) для таких періодичних перетворень Гільберта.

Ключові слова: субгармонійна функція, спряжена функція до субгармонійної функції, лебегові інтегральні середні, характеристика Неванлінни.

1. Вступ. Нехай $u(z)$ субгармонійна в $\mathbb{C}$ функція, гармонійна в деякому околі нуля, $u(0) = 0$, $\mathcal{F}(z) = u(z)+i\breve{u}(z)$, де $\breve{u}(z)$ – функція спряжена до $u(z)$ (див. [1]), $\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, $\overline{\mathbb{D}}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant R\}$, $0 < R < +\infty$. Приймемо

$$T(r,u) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u^+\left(re^{i\theta}\right)\,d\theta, \qquad m_q(r,\mathcal{F}) = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\mathcal{F}(re^{i\theta})|^q\,d\theta\right)^{1/q},$$

$$u^+(re^{i\theta}) = \max\left\{u\left(re^{i\theta}\right),0\right\}, \qquad 1 \leqslant q < +\infty, \quad 0 < r < +\infty.$$

В [2] доведено такі твердження.

Теорема A ([2]). *Нехай* $0 < r < +\infty$, $0 < \varepsilon(r) \leqslant 1$, $\varepsilon(r)$ *– незростаюча на* $(0, +\infty)$ *функція,* $\varepsilon(0) = 1$, $\gamma(r) = 1 + \varepsilon(r)$, u *– субгармонійна в* $\overline{\mathbb{D}}_{4r}$ *функція, гармонійна в деякому околі точки* $z = 0$, $u(0) = 0$. *Тоді*

$$m_q(r,\mathcal{F}) \leqslant A(q)\,\frac{T(\gamma^2(r)r,u)}{\sqrt[q]{\varepsilon(r)}}, \qquad 1 \leqslant q \leqslant 2, \tag{1}$$

$$m_q(r,\mathcal{F}) \leqslant A(q)\,\frac{\sqrt[q]{\varepsilon(r)}\,T(\gamma^2(r)r,u)}{\varepsilon(r)}, \qquad 2 \leqslant q < +\infty, \tag{2}$$

де $A(q) = 17 \cdot 2^{1-1/q}$ *при* $1 \leqslant q \leqslant 2$ *і* $A(q) = 17\, q^{1-1/q}$ *при* $2 \leqslant q < +\infty$.

Надалі через E позначатимемо множину скінченної логарифмічної міри, тобто таку множину $E \subset [1, +\infty)$, що інтеграл $\int_E d(\log t)$ збігається.

Теорема B ([2]). *Нехай* $\varphi(r)$ *– неперервна, додатна, неспадна на* $(0, +\infty)$ *функція,* $\varphi(r) \to +\infty$ *при* $r \to +\infty$, $\int\limits_{t_0}^{+\infty} dr/\varphi(r) < +\infty$ *і виконуються умови теореми A. Тоді*

$$m_q(r, \mathcal{F}) = o\left(T(r,u)\varphi^{1-\alpha}(\log T(r,u))\right), \quad 0 \leqslant \alpha < 1 - 1/q, \quad 1 \leqslant q \leqslant 2, \tag{3}$$

$$m_q(r, \mathcal{F}) = o\left(T(r,u)\varphi^{1-\alpha}(\log T(r,u))\right), \quad 0 \leqslant \alpha < 1/q, \quad 2 \leqslant q + \infty, \tag{4}$$

для кожного такого α *і* $r \to +\infty$ *зовні виняткової множини* E.

Мета нашої праці – уточнити співвідношення (1) та (3). Для цього нам будуть потрібні такі факти. Нехай $\mu[u]$ – міра Ріса функції u ([3, с. 132]), $\widetilde{\bullet}$ – оператор Гільберта для кола (див. [4, с. 108]).

Теорема C ([1]). *Нехай* $u(z)$ *– субгармонійна в* $\mathbb{D}_R$ *функція,* $u(0) = 0$, $0 \notin \operatorname{supp} \mu[u]$. *Тоді для довільного* $r \in (0, R)$

$$\breve{u}(re^{i\theta}) = \widetilde{u}(re^{i\theta}) - \widetilde{p}(re^{i\theta})$$

для майже всіх $\theta \in [0, 2\pi]$, *де*

$$\widetilde{p}(re^{i\theta}) = \int\limits_0^r \left(\int\limits_{|a| \leqslant t} \operatorname{Im} \frac{r + te^{i(\theta - \alpha)}}{r - te^{i(\theta - \alpha)}}\, d\mu_a[u] \right) \frac{dt}{t}, \quad \alpha = \arg a.$$

Теорема D ([4, с. 117]). *Якщо* $1 < q < +\infty$, $g(e^{i\theta}) \in L^q[0, 2\pi]$, *то*

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| \widetilde{g}\left(e^{i\theta}\right) \right|^q d\theta \right)^{1/q} \leqslant M(q) \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| g\left(e^{i\theta}\right) \right|^q d\theta \right)^{1/q},$$

де

$$M(q) = \begin{cases} \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{2q}, & 1 < q \leqslant 2; \\ \operatorname{ctg} \dfrac{\pi}{2q}, & 2 \leqslant q < +\infty. \end{cases}$$

Теорема E ([5]). *Нехай* u *–* δ*-субгармонійна в* $\mathbb{C}$ *функція,* $u(0) = 0$, $\sigma > 1$, $1 \leqslant q < +\infty$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. *Тоді*

$$m_q(r, u) \leqslant \frac{A_q(\sigma)}{(\sigma - 1)^{1/q'}} T(\sigma r, u), \quad r > 0,$$

де

$$A_q(\sigma) = \begin{cases} (\sigma - 1)^{1/q'} + \left(2^{q'+1}(\sqrt{\sigma} + 1)\right)^{1/q'} + (2q\sigma)^{1/q'}, & 2 \leqslant q < +\infty, \\ 2\left(A_2(\sigma)\right)^{1/q'}, & 1 \leqslant q \leqslant 2. \end{cases}$$

2. Формулювання та доведення основного результату.

Теорема 1. *Нехай* $0 < r < +\infty$, $0 < \delta < \frac{1}{2}$, $0 < \varepsilon(r) < 1$, $\varepsilon(r)$ *– незростаюча на* $(0, +\infty)$ *функція,* $\varepsilon(0) = 1$, $\gamma(r) = 1 + \varepsilon(r)$, u *– субгармонійна в* $\mathbb{C}$ *функція,* $0 \notin \operatorname{supp} \mu[u]$, $u(0) = 0$. *Тоді*

$$m_q(r, \mathcal{F}) \leqslant T\left(\gamma^2(r) r, u\right) \frac{C(q, \delta)}{(\varepsilon(r))^{\delta\left(\frac{2}{q}-1\right)^+ + 1 - \frac{1}{q}}}, \quad 1 \leqslant q < +\infty,$$

де $C(q, \delta)$ *– додатна стала така, що* $\lim\limits_{\delta \to +0} C(\bullet, \delta) = +\infty$ *і* $\lim\limits_{q \to +\infty} C(q, \bullet) = +\infty$.

Доведення. У випадку $q \geqslant 2$ правильне співвідношення (2). Тому залишилося розглянути випадок $1 \leqslant q \leqslant 2$. У цьому випадку доведення проведемо за такою схемою:

1) враховуючи теореми C і D та монотонність по q інтегральних середніх, спочатку оцінимо $m_1(r, \mathcal{F})$;

2) враховуючи співвідношення (2) при $q = 2$ та опуклість стосовно $\log q$ лебегових інтегральних середніх $m_q(\bullet, \bullet)$ (див., наприклад, теорему 10.12 з [6])

$$m_q(r, \mathcal{F}) \leqslant \Big(m_1(r, \mathcal{F})\Big)^{(2-q)/q} \Big(m_2(r, \mathcal{F})\Big)^{2(1-1/q)}, \tag{5}$$

оцінимо $m_q(r, \mathcal{F})$ при $1 \leqslant q \leqslant 2$;

3) з оцінки правого боку (5) та (2) отримаємо остаточний результат.

1) Нехай $q = 1$. Застосовуючи теорему C та враховуючи нерівність трикутника і монотонність по q інтегральних середніх, одержимо

$$m_1(r, \mathcal{F}) \leqslant m_1(r, u) + m_1(r, \tilde{u}) + m_1(r, \widetilde{p}) \leqslant m_{1+\delta}(r, u) + m_{1+\delta}(r, \tilde{u}) + m_1(r, \widetilde{p}).$$

З огляду на теорему E для всіх $1 \leqslant q < +\infty$ знаходимо

$$m_{1+\delta}(r, u) \leqslant \frac{C_0(\delta)}{\varepsilon^{\frac{\delta}{1+\delta}}(r)} T\left(\gamma^2(r) r, u\right) \leqslant \frac{C_0(\delta)}{\varepsilon^{\delta}(r)} T\left(\gamma^2(r) r, u\right), \tag{6}$$

де $C_0(\delta) = 2(A_2(\gamma(r)))^{\delta/(1+\delta)}$.

Для $m_{1+\delta}(r, \breve{u})$, враховуючи теореми D і E, одержуємо

$$m_{1+\delta}(r, \tilde{u}) \leqslant M(1+\delta) m_{1+\delta}(r, u) \leqslant \frac{C_1(\delta)}{\varepsilon^{\frac{\delta}{1+\delta}}(r)} T\left(\gamma^2(r) r, u\right) \leqslant \frac{C_1(\delta)}{\varepsilon^{\delta}(r)} T\left(\gamma^2(r) r, u\right), \tag{7}$$

де $C_1(\delta) = 2M(1+\delta) \cdot (A_2(\gamma(r)))^{\delta/(1+\delta)}$.

Далі для $m_1(r, \widetilde{p})$ отримуємо такі оцінки:

$$m_1(r, \widetilde{p}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\widetilde{p}(re^{i\theta})|\, d\theta \leqslant \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{|a| \leqslant t} \frac{d\mu_a[u]}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{2rt \sin(\theta - \alpha)}{r^2 + t^2 - 2rt\cos(\theta - \alpha)} \right| d\theta =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{|a| \leqslant t} \log \frac{r+t}{r-t}\, d\mu_a[u] \leqslant \frac{2}{\pi} \int_0^r \log \frac{r+t}{r-t} \cdot \frac{n(t, u)}{t}\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{n(t, u)}{t} \int_{r-t}^{r+t} \frac{dx}{x}\, dt, \tag{8}$$

де $n(t, u) = \int\limits_{|a| \leqslant t} d\,\mu_a[u]$.

В останньому інтегралі змінимо порядок інтегрування. Тоді

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^r \frac{n(t,u)}{t}\int\limits_{r-t}^{r+t}\frac{dx}{x}\,dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^r\frac{dx}{x}\int\limits_{r-x}^{r}\frac{n(t,u)}{t}\,dt + \frac{2}{\pi}\int\limits_r^{2r}\frac{dx}{x}\int\limits_{x-r}^{r}\frac{n(t,u)}{t}\,dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{r\varepsilon(r)}\frac{dx}{x}\int\limits_{r-x}^{r}\frac{n(t,u)}{t}\,dt + \frac{2}{\pi}\int\limits_{r\varepsilon(r)}^{r}\frac{dx}{x}\int\limits_{r-x}^{r}\frac{n(t,u)}{t}\,dt + \frac{2}{\pi}\int\limits_r^{2r}\frac{dx}{x}\int\limits_{x-r}^{r}\frac{n(t,u)}{t}\,dt. \quad (9)$$

Оскільки $N(r,u) = \int\limits_0^r \frac{n(t,u)}{t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u\left(re^{i\theta}\right)\,d\theta \leqslant T(r,u)$, то два останні інтеграли з (9) оцінимо так:

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_{r\varepsilon(r)}^{r}\frac{dx}{x}\int\limits_{r-x}^{r}\frac{n(t,u)}{t}\,dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_{r\varepsilon(r)}^{r}\frac{N(r,u)-N(r-x,u)}{x}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2N(r,u)}{\pi}\log\frac{1}{\varepsilon(r)} \leqslant \frac{2}{\pi}T(\gamma^2(r)r,u)\log\frac{1}{\varepsilon(r)}, \quad (10)$$

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_r^{2r}\frac{dx}{x}\int\limits_{x-r}^{r}\frac{n(t,u)}{t}\,dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_r^{2r}\frac{N(r,u)-N(x-r,u)}{x}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\log 2\; N(r,u)}{\pi} \leqslant \frac{2}{\pi}T(\gamma^2(r)r,u). \quad (11)$$

Залишилось оцінити

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{r\varepsilon(r)}\frac{dx}{x}\int\limits_{r-x}^{r}\frac{n(t,u)}{t}\,dt \leqslant \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{r\varepsilon(r)}\frac{n(r,u)\,dx}{x}\int\limits_{r-x}^{r}\frac{dt}{t} \leqslant \frac{2n(r,u)}{\pi}\int\limits_0^{r\varepsilon(r)}\frac{dx}{r-x} =$$

$$= \frac{2n(r,u)\varepsilon(r)}{\pi(1-\varepsilon(r))} \leqslant \frac{4}{\pi}N\left((1+\varepsilon(r))\,r,u\right) \leqslant \frac{2}{\pi}T(\gamma^2(r)r,u). \quad (12)$$

Враховуючи (6)-(12), одержимо

$$m_1(r,\mathcal{F}) \leqslant T\left(\gamma^2(r)r,u\right)\left[\frac{C_0(\delta)}{\varepsilon^\delta(r)} + \frac{C_1(\delta)}{\varepsilon^\delta(r)} + \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi}\log\frac{1}{\varepsilon(r)}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_2(\delta)}{\varepsilon^\delta(r)}T\left(\gamma^2(r)r,u\right), \quad (13)$$

де $C_2(\delta) > 0$ і $\lim\limits_{\delta\to+0} C_2(\delta) = +\infty$.

2) Нехай $1 \leqslant q \leqslant 2$. Підставивши (2) при $q=2$ та (13) в (5), знаходимо

$$m_q(r,\mathcal{F}) \leqslant \left(\frac{C_2(\delta)}{\varepsilon^\delta(r)}T\left(\gamma^2(r)r,u\right)\right)^{(2-q)/q}\left(17\left(\frac{2}{\varepsilon(r)}\right)^{1/2}T(\gamma^2(r)r,u)\right)^{2(1-1/q)} \leqslant$$

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 74

$$\leqslant 17 \cdot (2)^{(1-1/q)} \left(C_2(\delta)\right)^{\frac{2}{q}-1} \frac{T(\gamma^2(r)r,u)}{(\varepsilon(r))^{\delta\left(\frac{2}{q}-1\right)+1-\frac{1}{q}}}. \tag{14}$$

3) З урахуванням (14) і (2) остаточно отримуємо

$$m_q(r,\mathcal{F}) \leqslant 17 \left(C_2(\delta)\right)^{\left(\frac{2}{q}-1\right)^+} (\max\{q,2\})^{(1-1/q)} \frac{T(\gamma^2(r)r,u)}{(\varepsilon(r))^{\delta\left(\frac{2}{q}-1\right)^+ +1-\frac{1}{q}}} =$$

$$= T\left(\gamma^2(r)r,u\right) \frac{C(q,\delta)}{(\varepsilon(r))^{\delta\left(\frac{2}{q}-1\right)^+ +1-\frac{1}{q}}}, \quad 1 \leqslant q < +\infty,$$

що і потрібно було довести. □

Із леми 5 з [2] та теореми 1 випливають такі наслідки.

Наслідок 1. *Нехай $\varphi(r)$ – неперервна, додатна, неспадна на $(0,+\infty)$ функція, $\varphi(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$, $\int\limits_{t_0}^{+\infty} dr/\varphi(r) < +\infty$ і виконуються умови теореми 1. Тоді*

$$m_q(r,\mathcal{F}) = o\left(T(r,u)\varphi^{\alpha}(\log T(r,u))\right), r \to +\infty, r \notin E,$$

де $\delta\left(\dfrac{2}{q}-1\right)^+ + 1 - \dfrac{1}{q} < \alpha \leqslant 1,\ 1 \leqslant q < +\infty,\ 0 < \delta < \frac{1}{2},$

Доведення. За теоремою 1 одержали

$$m_q(r,\mathcal{F}) \leqslant T\left(\gamma^2(r)r,u\right) \frac{C(q,\delta)}{(\varepsilon(r))^{1-\frac{1}{q}+\delta\left(\frac{2}{q}-1\right)^+}}, \qquad q \in [1,+\infty).$$

Отож, для завершення доведення цього наслідку достатньо застосувати лему 5 з [2] з $\gamma^2(r) = (1 + 1/\varphi(\log(T(r,u))))$; звідси $\varepsilon(r) \sim \dfrac{1}{2\varphi(\log(T(r,u)))}$ при $r \to +\infty$. □

Наслідок 2. *Нехай виконуються умови наслідку 1. Тоді для всіх $q \in [1,+\infty)$*

$$m_q(r,u^+) = o\left(T(r,u)\varphi(\log T(r,u))\right), \qquad r \to +\infty, \qquad r \notin E.$$

Доведення. Зауважимо, що для всіх $q \in [1,+\infty),\ 0 < r < +\infty$ маємо

$$m_q(r,u^+) \leqslant m_q(r,u) \leqslant m_q(r,\mathcal{F}).$$

Звідси та з наслідку 1 при $\alpha = 1$ отримуємо потрібне твердження. □

Зауваження 1. З результатів праць [7], [8] випливає, що у випадку $u = \log|f|$, f – ціла функція нескінченного порядку, $f(0) = 1$, правильна така асимптотична рівність

$$\log M(r,f) = o\left(T(r,f)\varphi\left(\log\left(T\left(r,f\right)\right)\right)\right), \qquad r \to +\infty, \qquad r \notin E,$$

де $\log M(r,f) = \max\limits_{|z|=r} \log|f(z)|$.

Список використаної літератури

1. *Kondratyuk A.A.* Conjugate of subhfrmonic function / *Kondratyuk A.A., Vasyl'kiv Ya.V.* // Mat. studii. – 2000. – Vol. 13, №2. – P. 173-180.
2. *Васильків Я.В.* Інтегральні середні функцій, спряжених до субгармонійних функцій / *Васильків Я.В., Політило Л.Р.* // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2010. – Вип. 72. – С. 47-62.
3. *Хейман У.* Субгармонические функции /*Хейман У., Кеннеди П.* – М., 1980.
4. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции: в 2 т. /*Гарнетт Дж.* – М., 1984.
5. *Кондратюк А.А.* Порівняння лебегових середніх і неванліннівської характеристики субгармонійних функцій /*Кондратюк А.А., Тарасюк С.І.* // Мат. студії. – 1992. – Вип. 1. – С. 74-80.
6. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: в 2 т. /*Зигмунд А.* – М., 1965.
7. *Марченко И.И.* Возрастание целых функций / *Марченко И.И., Щерба А.И.* // Сиб. мат. журн. – 1984. – Т. 25. – С. 598-605.
8. *Dai C.J.* On the growth of entire and meromorphic functions of infinite order /*Dai C.J., Drasin D., Li B.Q.* // J. Analyse Math. – 1990. – Vol. 55. – P. 217-228.

Стаття: надійшла до редакції 14.04.2011
прийнята до друку 21.09.2011

INTEGRAL MEANS OF FUNCTIONS CONJUGATE TO SUBHARMONIC FUNCTIONS. II

Yaroslav VASYLKIV, Lyubomyr POLITYLO

Ivan Franko National University of L'viv,
Universytets'ka Str., 1, L'viv, 79000
e-mail: YaVVasylkiv@gmail.com, Ljupol7@gmail.com

For the pair of functions $\mathcal{F}(z) := u(z) + i\check{u}(z)$, where $u(z)$ is subharmonic in $\mathbb{C}$ function, harmonic in some neighborhood of $z = 0$, $u(0) = 0$, and $\check{u}(z)$ is conjugate to $u(z)$, the known estimates of q-th Lebesgue integral means of $m_q(r, \mathcal{F})$ when $1 \leqslant q \leqslant 2$, was substantially improved. For this Vasylkiv-Kondratyuk's representation of function $\check{u}$ in terms of Hilbert transformation for circle and classical M. Riesz theorem on estimates of q-th means $(1 < q < +\infty)$ for this periodic Hilbert transformation where used.

Key words: subharmonic function, function conjugate to subharmonic function, Lebesgue integral means, Nevanlinna's characteristic.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 74

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СРЕДНИЕ ФУНКЦИЙ, СОПРЯЖЕННЫХ К СУБГАРМОНИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ. II

Ярослав ВАСИЛЬКИВ, Любомир ПОЛИТЫЛО

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: YaVVasylkiv@gmail.com, Ljupol7@gmail.com

Для пары функций $\mathcal{F}(z) := u(z) + i\breve{u}(z)$, где $u(z)$ – субгармоническая в $\mathbb{C}$ функция, гармоническая в некоторой окрестности точки $z = 0$, $u(0) = 0$, и $\breve{u}(z)$ – сопряженная функция к $u(z)$, существенно уточнены известные оценки q-х интегральных средних $m_q(r, \mathcal{F})$ при $1 \leqslant q \leqslant 2$. Для этого использовано изображение Василькива-Кондратюка функции $\breve{u}$ в терминах преобразования Гильберта для окружности, и классическую теорему М. Рисса о оценке q-х средних $(1 < q < +\infty)$ для таких периодических преобразований Гильберта.

Ключевые слова: субгармоническая функция, функция сопряженная к субгармонической функции, лебеговские интегральные средние, характеристика Неванлинны.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 74. С. 41–46
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 74. P. 41–46

УДК 517.95

ON BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF HIGHER ORDER DEGENERATE PARABOLIC EQUATIONS

Tahir GADJIEV, Kenyul MAMEDOVA

Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan,
Afgajev Str., 9, Baku, AZ 1141
e-mail: soltanaliev@yahoo.com

In this paper the behavior of the solutions of the initial-boundary problem for degenerate quasilinear parabolic equations in unbounded domains with noncompact boundary is study.

Key words: parabolic nonlinear equation, degeneration, unbounded domain.

1. Introduction. The goal of the paper is to study behavior of solutions of the initial-boundary problem for degenerate quasi-linear parabolic equations in unbounded domains with noncompact boundary.

For linear elliptic and parabolic equations on behavior of solution were studied in the paper of O.A. Oleinik [1], [2]. For quasilinear equations, similar results were obtained in the papers of A.F. Tedeev, A.E. Shishkov [3], T.S. Gadjiev [4]. S. Bonafade [5] is studied quality properties of solutions for degenerate equations. Also we mention papers [6], [7], [10]-[12].

We obtained some estimations that analogies of Saint-Venant's principle known in theory of elasticity. By means of these estimations we obtained estimation on behavior of solution of type Fragmen-Lindelyof.

In unbounded domain Q which contains in layer $H_T = \{(x,t) : 0 < t < T < \infty\}$ of Euclid space $\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$ consider initial-boundary problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} A_{\alpha}\left(x, t, u, Du, ..., D^m u\right) = 0, \tag{1}$$

$$u\,|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

$$D^{\alpha} u\,|_{\Gamma} = 0, \ \ |\alpha| \le m-1, \tag{3}$$

where $D^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_m^{\alpha_m}}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_m$, $m \ge 1$, $D^m = (D^{\alpha} u)_{|\alpha| = m}$.

The domain Q has noncompact boundary $\partial Q = \Gamma_0 \bigcup \Gamma_T \bigcup \Gamma$, where $\Gamma_0 = \partial Q \bigcap \{(x,t) : t = 0\}$, $\Gamma_T = \partial Q \bigcap \{(x,t) : t = T\}$.

Assume that the coefficients $A_\alpha(x,t,\xi)$ are measurable with respect to $(x,t)\in Q$, continuous with respect to $\xi\in\mathbb{R}^M$ (M is the number of different multi-indices of length no more than m) and satisfy the conditions

$$\sum_{|\alpha|\le m} A_\alpha(x,t,\xi)\,\xi_\alpha^m \ge \omega(x)\,|\xi^m|^p - c_1\omega(x)\sum_{i=1}^{m-1}\left|\xi^i\right|^p - f_1(x,t), \tag{4}$$

$$|A_\alpha(x,t,\xi)| \le C_2\omega(x)\sum_{i=0}^{m}\left|\xi^i\right|^{p-1} + f_2(x,t), \tag{5}$$

where $\xi=\left(\xi^0,...,\xi^m\right)$, $\xi^i=\left(\xi_\alpha^i\right)$, $|\alpha|=i$, $p>1$, $f_1\in L_{p'}(0,T\;L_{p,loc}(\Omega_t))$,

$$f_2\in L_{1,loc}(Q),\quad \Omega_\tau = Q\bigcap\{(x,t):\,t=\tau\}.$$

The space $L_p(0,T,\,W_{q,\omega}^m(\Omega_t'))$ defined as $\left\{u(x,t):\,\int_0^T\left(\|u\|_{W_{q,\omega}^m(\Omega_t)}\right)^p dt<\infty\right\}$, where Q'-bounded subdomain Q. $\Omega_t' = Q'\bigcap\{(x,t):\,t=\tau\}$. $W_{q,\omega}^m(\Omega_t')$ is a closure of t the functions from $C^m\left(\bar\Omega_t\right)$ with respect to the norm

$$\|u\|_{W_{q,\omega}^m(\Omega_t')} = \left(\int_{\Omega_t'}\omega(x)\sum_{|\alpha|\le m}|D^\alpha u|^q\,dxdt\right)^{1/q}.$$

Assume that $\omega(x)$, $\varepsilon(x)$, $x\in\Omega$, are measurable non negative function satisfying the conditions:

$$\omega\in L_{1,loc}(Q), \tag{6}$$

where $\Omega_s=\Omega_t\bigcap B_s$, $B_s=\{x:\,|x|<s\}$, C_i are positive constants dependent only on problems data. In particular, it follows from condition (6) that $\omega\in A_\tau$ (see [8]), i.e. for any $\rho>0$

$$\int_{\Omega_\rho}\omega(x)\,dx\left[\int_{\Omega_\rho}\omega(x)^{-\frac{1}{\sigma-1}}dx\right]^{\sigma-1}\le C_4\rho^{n\sigma}. \tag{7}$$

Well describe geometry ∂Q with weight nonlinear basis frequency $\lambda_p(r,\tau)$ of section $\sigma(r,\tau)=S(r)\bigcap\Omega_\tau$, where $S(r)=Q\bigcap\partial Q(r)$, $Q(r)=Q\bigcap\{B_S\times(0,T)\}$,

$$\lambda_p^p(r,\tau)=\inf\left(\int_{\sigma(r,\tau)}\omega(x)\,|\nabla v\,|^p d\tau\right)\left(\int_{\tau(r,\tau)}\omega(x)\,|\nabla v|^p\,d\tau\right)^{-1},$$

where the lower bound is taken by all continuously differentiable functions in the vicinity of $\sigma(r,\tau)$ that vanish on ∂Q; $\nabla_s v(x)$ is a projection of the vector $\nabla_x v(x)$ on a tangential plane to $\sigma(r,\tau)$ at the point x.

The function $u\in L_p(0,T,\,\overset{\circ}{W}{}_{p,\omega,loc}^{m}(\Omega_t))\bigcap W_2^1(0,T;\,L_{2,loc}(\Omega_t))$ is said to be a generalized solution of problem (1)-(3) if

$$\int_Q\frac{\partial u}{\partial t}\varphi dxdt+\int_Q\sum_{|\alpha|\le m}A_\alpha(x,t,u,Du,D^m u)\,D^\alpha\varphi dxdt=0 \tag{8}$$

is fulfilled for the arbitrary function $\varphi \in L_p(0,T;\, \overset{\circ}{W}{}^{m}_{p,\omega}(\Omega_t') \bigcap L_2(Q'))$. We will consider classes of domains, for which hold estimate

$$\int\limits_{S_r} \omega(x)\, |u|^p\, dxdt \le \lambda_p^{-p}(r) \int\limits_{S_r} \omega(x)\, |\nabla u|^p\, dxdt. \tag{9}$$

The necessary and sufficiently conditions on domains for holds estimate (9) is given for example [9].

2. Behavior of solutions. Let $k(x) \in C^m_{loc}(\Omega)$ positive function, $k(0) = 0$ and that at $x \in \Omega$ hold estimates

$$\begin{aligned} &|D_x k(x)| \ge h_1 > 0, \\ &\left|D_x^j k(x)\right| \le h_2\,(k(x))^{-j+1}, \quad h_2 > 0, \quad j = 1,2,...,m. \end{aligned}$$

Is defined $\lambda^2_{\mu(s)}(r,\tau) = \lambda_2^2(r,\tau) + \mu^{\frac{2}{m}}(s)$, $\forall\, s,\, \tau > 0$.

$$J_{\mu(s),p}(r,\tau) \equiv \int\limits_{\Omega_\tau(s)} \left(|D^m u|^p + \mu^2(s) u^2\right) dx,$$

$J_{\mu(s),2}(r,\tau)$, $\Omega_\tau(s_1) \setminus \Omega_\tau(s_2) = M_\tau(s_1, s_2)$, where $\mu(v)$ function which define later.

Lemma 1. *Let $u \in L_p(0,T;\, W^m_{p,\omega}(\Omega_t') \bigcap L_2(Q'))$ and $\mu(k(x))$ be a measurable non-negative function locally bounded in Ω. Then the inequality*

$$\begin{aligned} &\int\limits_{M_r(s_1,s_2)} \left|D_x^j u\right|^2 \lambda_{\mu(s)}(k(x),\tau)\, f(k(x)) dx \le \\ &\le \frac{h_2}{h_1} \int\limits_{M_r(s_1,s_2)} \left(|D_x^m u|^2 + \mu^2(s) \left|D^j u\right|^2\right) f(k(x))\, dx, \end{aligned} \tag{10}$$

is valid, where $j \le m$.

We introduce shear function $\xi(t)$ be m times continuously differentiable function, $0 < \xi(t) < 1$, $2^{-1} < t < 1$; $\xi(t) = 1$ for $t < \frac{1}{2}$, $\xi(t) = 0$ for $t \ge 1$. Denote $\xi_h^{(t)} = \xi(\frac{t-h}{1-h})$. The following estimations are true for this shear function

$$\left|D_x^j \xi_h\left(\frac{k(x)}{r}\right)\right| \le \frac{C_j}{[r(1-h)]^j}, \quad rh + \frac{r}{2}(1-h) < j(x) < r, \quad j = 0,1,...,m.$$

$D_x^j \xi_h\left(\frac{k(x)}{r}\right) = 0$ for $g(x) \le rh + \frac{r}{2}(1-h)$, and $g(x) > r$, $j > 1$.

Lemma 2. *Assume that the continuous non-decreasing on (t,∞) function $I(t)$ satisfies inequality*

$$\begin{aligned} &I(t) \le \theta I(t\psi(t)), \quad 0 < \theta < 1, \\ &\psi(t) = 1 + \varphi(t), \quad \varphi(t) > 0 \end{aligned} \tag{11}$$

and measurable function $\varphi(t)$ satisfy

$$(\varphi(t))^{-1} \inf \varphi(\tau) > \delta > 0, \quad t < \tau < t\psi(t), \tag{12}$$

Then the estimation

$$I(t) \geq \theta \exp\left(\delta \ln \theta^{-1} \int\limits_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{\tau\varphi(\tau)}\right) I(t_0)$$

is valid for $I(t)$.

Our main goal is to obtain estimations of behavior of the function $J_{\mu(\tau),p}(\tau)$ at $\tau \to \infty$. We defined function $\psi(\tau)$ and $\mu(\tau)$:

$$\inf_{\substack{\tau<k(x)<\tau\psi(\tau)\\ 0<t<T}} \lambda_{\mu(\tau)}(k(x),t)\,\tau(\psi(\tau)-1) \geq h_0 > 0 \quad \forall\, \tau > \tau_0, \tag{13}$$

$$0 < h \leq \mu(\tau\psi(\tau))(\mu(\tau))^{-1} \leq H < \infty \quad \forall\, i > \tau. \tag{14}$$

We substitute to integral identity (8) of test function

$$\varphi(x,t) = u(x,t)\left[1 - \xi\left(\frac{\varphi(\tau) - k(x)\tau^{-1}}{\psi(\tau)-1}\right)\right] \exp\left(-2\mu^2(\tau)\ t\right).$$

Then by virtue of condition (4), (5) having

$$J_{\mu(\tau,p)}(\tau) \cong \int\limits_{\Omega_\tau} \left(\omega(x)\,|D^m u|^p + \mu^2(\tau)\,u^2\right) \exp\left(-2\mu^2(\tau)t\right) dxdt \leq$$

$$\leq \int\limits_{\Omega_{\tau\psi(\tau)}} \left[c_2\omega(x) \sum_{|\alpha|<m} |D^\alpha u|^{\,p} - c_3\omega(x)\left(\sum_{|\alpha|\leq m} |D^\alpha u|^{p-1}\right)\left(\sum_{|\alpha|<m} |D^\alpha u| + \right.\right.$$

$$\left. + \sum_{|\alpha|<m} \left| f_2(x)\,|D^\alpha u| + \sum_{|\alpha|\leq m} |F_\alpha(x) D^\alpha u| \right|\right) \left[1 - \xi\left(\frac{\varphi(\tau) - k(x)\tau^{-1}}{\varphi(\tau)-1}\right)\right] \times$$

$$\times \exp\left(-2\mu^2(\tau)\,t\right) dxdt + \int\limits_{\Omega_\tau \bigcap \Omega_{\tau\psi(\tau)}} \left[c_3 k_2 \omega(x)\left(\sum_{|\alpha|\leq m} |D^\alpha u|^{p-1}\right)\times\right.$$

$$\times \sum_{|\alpha|\leq m} \sum_{|\beta|\leq|\alpha|} \left|D^{\alpha-\beta} u\right| \left|D^\beta \xi\right| + \sum_{|\alpha|\leq m} \sum_{|\beta|\leq|\alpha|} |f_2(x)|\,|D^{\alpha-\beta} u|\,\left|D^\beta \xi\right| +$$

$$\left. + \sum_{|\alpha|\leq m} \sum_{|\beta|\leq|\alpha|} |F_\alpha(x)|\, D^{\alpha-\beta} \left|D^\beta \xi\right| \right] \exp\left(-2\mu^2(t)t\right)\, dxdt.$$

Later if we use lemma 1 and 2, also conditions to (13), (14) following basic theorem is obtained.

Theorem 1. *Let* $u(x)$ *be a generalized solution of problem* (1)-(3) *and measurable, locally bounded function* $\mu(\tau)$, $\psi(\tau) > 1$ *satisfy conditions* (13), (14). *Moreover function* $\varphi(\varphi) \equiv \psi(\tau) - 1$ *satisfy condition* (12) *of lemma 2 with some* $\delta > 0$. *Then for integral of energy* $J_{\mu(\tau)}(\tau)$ *alternative*

1) or $\lim\limits_{\tau\to\infty} J_{\mu(\tau)}(\tau)\left(G_{\mu(\tau)}(\tau)\right)^{-1} < C < \infty$;

2) or $J_{\mu(\tau)}(\tau) > (\beta+\varepsilon)\exp\left(\delta \ln(\beta+\varepsilon)^{-1} \int\limits_{\tau_0}^{-1} \frac{d\tau}{(\tau\psi(\tau)-1)}\right) J_{\mu(\tau)}(\tau)$;

is valid, where $G_\mu(\tau) = \int_0^\tau g_{\mu(\tau)}(\tau,t)\, \exp\left(-2\mu^2(\tau)\ t\right) dt$.

References

1. *Oleinik O.A.* Boundary value problems for second order elliptic equations in unbounded domains and Saint-Venant's principle / *Oleinik O.A., Josifian G.A.* // Ann. Scuola Norm. Super Pisa. – 1977. – Ser. IV, Vol. 2. – P. 269-290.
2. *Oleinik O.A.* On exceptional properties on a boundary and uniqueness of solutions of boundary value problems for second order elliptic and parabolic equations / *Oleinik O.A., Josifian G.A.* // Funk. Anal. – 1977. – Vol. II, Iss. 3. – P. 54-67.
3. *Tedeev A.F.* On quality properties of solutions and subsolutions of quasilinear elliptic equations / *Tedeev A.F., Shishkov A.E.* // Izv. Vuzov. Matematika. – 1984. – №1. – P. 62-68.
4. *Gadjiev T.S.* On behavior of solutions of mixed problems for quasilinear elliptic equations / *Gadjiev T.S.* // Diff. Uravneniya. – 1991. – P. 1031-1036.
5. *Bonafade S.* Quazilinear degenerate elliptic variational inequalities with discontinuous coefficients / *Bonafade S.* // Comment. Math. Univ. Carolinae. – 1993. – Vol. 34, №1. – P. 55-61.
6. *Lancaster K.* On the Asymptotic Behavior of Solutions of Quasilinear Elliptic Equations / *Lancaster K., Stanley J.* // Ann. Univ. Ferrara-Sez. VII-Sc. Mat. – 2003. – Vol. IL. – P. 85-125.
7. *Jorge G.-M.* Boundary behavior for large solutions to elliptic equations with singular weights / *Jorge G.-M.* // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. – 2007. – Vol. 67, Iss. 3. – P. 818-826.
8. *Chanillo S.* Weighted Poincare and Sobolev inequalities and estimates for weighted Peano maximal functions / *Chanillo S., Wheeden R.* // Mer. J. Math. – 1985. – №107. – P. 1191-1226.
9. *Miklyukov V.M.* On asymptotic properties of subsolutions of elliptic type quasilinear equations / *Miklyukov V. M.* // Mat. Sbor. – 1980. – Vol. 111 (145), №1. – P. 42-66.
10. *Galaktionov V.A.* Saint-Venant's principle in blow-up for higher-order quasilinear parabolic equations / *Galaktionov V.A., Shishkov A.E.* // Proc. R. Soc. Edinb. Sect. A, Math. – 2003. – Vol. 133, №5. – P. 1075-1119.
11. *Galaktionov V.A.* Structure of boundary blow-up for higher-order quasilinear parabolic equations / *Galaktionov V.A., Shishkov A.E.* // Proc. R. Soc. Lond. A. – 2004. – Vol. 460. – P. 1-27.
12. *Bokalo M.M.* The unique solvability of a problem without initial conditions for linear and nonlinear elliptic-parabolic equations / *Bokalo M.M.* // Ukrainian Math. Bull. – 2011. – Vol. 8, №1. – P. 54-85.

Стаття: надійшла до редакції 29.04.2011
прийнята до друку 21.09.2011

ПРО ПОВЕДІНКУ РОЗВ'ЯЗКІВ ВИРОДЖЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Таір ГАДЖИЕВ, Кенюль МАМЕДОВА

Інститут математики і механіки НАН Азербайджану,
вул. Ф. Афгаева, 9, Баку, AZ 1141
e-mail: soltanaliev@yahoo.com

Вивчено поведінку розв'язків початково-крайової задачі для вироджених квазілінійних параболічних рівнянь у необмежених областях з некомпактною межею.

Ключові слова: параболічне нелінійне рівняння, виродження, необмежена область.

О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ

Таир ГАДЖИЕВ, Кёнюль МАМЕДОВА

Институт математики и механика НАН Азербайджана,
ул. Ф. Агаева, 9, Баку, AZ 1141
e-mail: soltanaliev@yahoo.com

Изучено поведение решений начально-краевой задачи для вырождающихся квазилинейных параболических уравнений в неограниченных областях с некомпактной границей.

Ключевые слова: параболические нелинейные уравнения, вырождение, неограниченная область.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 74. С. 47–51
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 74. P. 47–51

УДК 512.552.12

ДОПОВНЕННЯ РЯДКА НАД КОМУТАТИВНИМ КІЛЬЦЕМ БЕЗУ ДО МАТРИЦІ З ВИЗНАЧНИКОМ, ЯКИЙ ДОРІВНЮЄ НАЙБІЛЬШОМУ СПІЛЬНОМУ ДІЛЬНИКУ ЕЛЕМЕНТІВ РЯДКА

Андрій ГАТАЛЕВИЧ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: gatalevych@ukr.net

Доведено, що над комутативним кільцем Безу стабільного рангу n, довільний рядок довжини $n+1$ доповнюється до матриці, визначник якої дорівнює найбільшому спільному дільнику елементів цього рядка.

Ключові слова: кільце Безу, кільце Ерміта, кільце елементарних дільників, стабільний ранг.

Задача доповнення унімодулярного рядка над кільцем до оборотної матриці стала вже класичною [1, 2]. Зазначимо тісний зв'язок цієї задачі з задачами про умови, коли проективний модуль над кільцем вільний [3]. В останні роки з'явилось багато праць [4-6], в яких знайдено зв'язок важливого інваріанта як стабільний ранг кільця, з цією задачею та з задачею діагоналізації матриць над кільцями, особливо над кільцями Безу.

Мета нашої праці – довести, що над комутативним кільцем Безу стабільного рангу n, довільний рядок довжини $n+1$ доповнюється до матриці, визначник якої дорівнює найбільшому спільному дільника всіх елементів цього рядка.

Під кільцем R будемо розуміти комутативне кільце з $1 \neq 0$. Рядок $(a_1, \ldots, a_n)$ елементів з кільця R називається унімодулярним, якщо $a_1R + \cdots + a_nR = R$. Скажемо, що натуральне число n є стабільним рангом кільця R, якщо для довільного унімодулярного рядка $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})$ існують такі елементи $x_1, \ldots, x_n \in R$, що рядок $(a_1 + a_{n+1}x_1, \ldots, a_n + a_{n+1}x_n)$ є унімодулярним [6]. Кільце Безу це кільце, в якому довільний скінченнопороджений ідеал є головним. Кільце Ерміта це кільце, в якому для довільних елементів $a, b \in R$ існує оборотна матриця P і такий елемент $d \in R$, що $(a, b)P = (d, 0)$.

Теорема 1. *Нехай R – комутативне кільце Безу стабільного рангу n. Тоді для довільних таких елементів $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1} \in R$, що $a_1R + \cdots + a_nR + a_{n+1}R =$*

$= dR$ існує квадратна матриця порядку $n+1$ з першим рядком $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$, визначник якої дорівнює d.

Доведення. Спочатку покажемо, що довільний унімодулярний рядок $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$ довжини $n+1$ над кільцем R може бути доповнений до оборотної матриці A порядку $n+1$, причому $\det A = 1$.

Оскільки стабільний ранг кільця R дорівнює n, то існує такий рядок $(x_1, \dots, x_n)$ над R, що

$$(a_1 + a_{n+1}x_1)R + \dots + (a_n + a_{n+1}x_n)R = R,$$

або

$$(a_1 + a_{n+1}x_1)u_1 + \dots + (a_n + a_{n+1}x_n)u_n = 1,$$

для деяких елементів $u_1, \dots, u_n$ кільця R.

Приймемо

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & u_1(1-a_{n+1}) \\ 0 & 1 & \dots & 0 & u_2(1-a_{n+1}) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & u_n(1-a_{n+1}) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що $\det P_1 = \det P_2 = 1$. Звідси одержимо

$$(a_1, \dots, a_n, a_{n+1})P_1P_2 = (1, a'_2, \dots, a'_{n+1}).$$

Очевидно, що існує така оборотна матриця P_3 з $\det P_3 = 1$ порядку $n+1$, що $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1})P_1P_2P_3 = (1, 0, \dots, 0)$. Позначимо через $P = P_1P_2P_3$. Очевидно, що $\det P = 1$ і нехай $P^{-1} = (p_{ij})$. Тоді з рівності $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) = (1, 0, \dots, 0)P^{-1}$ випливає, що

$$a_1 = p_{11}, \dots, a_{n+1} = p_{1,n+1},$$

тобто рядок $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$ є першим рядком матриці P^{-1}, причому $\det P^{-1} = 1$.

Оскільки кільце R є кільцем Безу, то для довільних елементів $a_1, \dots, a_{n+1} \in R$ існує такий елемент $d \in R$, що $a_1R + \dots + a_{n+1}R = dR$. Тут d – найбільший спільний дільник елементів $a_1, \dots, a_{n+1}$. Звідси $a_1u_1 + \dots + a_{n+1}u_{n+1} = d$ та $a_1 = da_1^0, \dots, a_{n+1} = da_{n+1}^0$ для деяких елементів $u_1, \dots, u_{n+1}, a_1^0, \dots, a_{n+1}^0 \in R$.

Звідси одержуємо

$$d(a_1^0u_1 + \dots + a_{n+1}^0u_{n+1} - 1) = 0$$

і $a_1^0R + \dots + a_{n+1}^0R + cR = R$ для деякого такого елемента $c \in R$, що $dc = 0$.

Оскільки стабільний ранг кільця R дорівнює n, то

$$(a_1^0 + cv_1)R + \dots + (a_{n+1}^0 + cv_{n+1})R = R$$

для деяких елементів $v_1, \dots, v_{n+1} \in R$.

За доведеним вище унімодулярний рядок $(a_1^0 + cv_1, \ldots, a_{n+1}^0 + cv_{n+1})$ можна доповнити до такої оборотної матриці P, що $\det P = 1$. Домноживши перший рядок матриці P на елемент d, отримаємо матрицю C порядку $n+1$ вигляду

$$C = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_{n+1} \\ * & * & * \end{pmatrix},$$

причому $\det C = d$, що і треба було довести. □

Оскільки згідно з означенням кільце стабільного рангу n є кільцем стабільного рангу m, де $m \geqslant n$, то як очевидний наслідок теореми 1 одержимо такий результат.

Наслідок 1. *Нехай R – комутативне кільце Безу стабільного рангу n. Тоді для довільного рядка $(a_1, \ldots, a_m)$, де $m \geqslant n+1$, існує квадратна матриця порядку m з першим рядком $(a_1, \ldots, a_m)$, визначник якої дорівнює d, де $dR = a_1R + \cdots + a_mR$.*

Оскільки комутативне кільце Безу є кільцем Ерміта тоді і тільки тоді, коли його стабільний ранг дорівнює 2, то як наслідок отримуємо відомий результат Капланського [2].

Наслідок 2 ([2], т. 3.7)**.** *Нехай R – комутативне кільце Ерміта. Тоді для довільних елементів $a_1, \ldots, a_n$ кільця R існує квадратна матриця порядку n, визначник якої дорівнює d, де d – найбільший спільний дільник елементів $a_1, \ldots, a_n$.*

Зауважимо, що задача доповнювальності унімодулярного рядка до оборотної матриці тісно пов'язана з задачею діагоналізації матриць. Подамо необхідні означення.

Будемо позначати через $diag(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_r)$ матрицю з елементами $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_r$ по головній діагоналі і нулями на інших місцях. Матриці A і B називаються еквівалентними, якщо існують оборотні матриці P і Q відповідних розмірів, що $B = PAQ$. Якщо матриця A еквівалентна до деякої діагональної матриці

$$diag(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_r, 0, \ldots, 0),$$

де $\epsilon_i | \epsilon_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots r-1$, то кажуть, що матриця A має властивість діагональної редукції. Елементи $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_r$ називаються елементарними дільниками матриці A. Кільце R називається кільцем елементарних дільників, якщо довільна матриця над R має діагональну редукцію [2].

В [2] наведено такі умови діагоналізації матриць.

Теорема 2 ([2], т. 5.2)**.** *Комутативне кільце Ерміта R є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли для довільного унімодулярного рядка (a, b, c) над R існують такі елементи $p, q \in R$, що рядок $(ap + bq, cp)$ є унімодулярним.*

Ці умови в термінах доповняльності унімодулярних рядків до оборотних матриць можна сформулювати так.

Теорема 3. *Комутативне кільце Ерміта R є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли довільний унімодулярний рядок (a, b, c) над R можна доповнити до оборотної матриці вигляду*

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ -q & p & 0 \\ -v & 0 & u \end{pmatrix},$$

де u, v *такі елементи кільця* R, *що* $(ap + bq)u + cpv = 1$.

Список використаної літератури

1. *Newman M.* Integral matrices / *Newman M.* – New-York, 1972.
2. *Kaplansky I.* Elementary divisor rings and modules / *Kaplansky I.* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – Vol. 66. – P. 464-491.
3. *Roitman M.* Completing unimodular rows to invertible matrices / *Roitman M.* // J. Algebra – 1977. – Vol. 49. – P. 206-211.
4. *Zabavsky B.V.* Diagonalizability theorem for matrices over rings with finite stable range / *Zabavsky B.V.* // Alg. and Discr. Math. – 2005. – Vol. 1. – P. 151-165.
5. *Zabavsky B.V.* Diagonalization of matrices over ring with finite stable rank / *Zabavsky B.V.* // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2003. – Вип. 61. – С. 206-211.
6. *Забавський Б.В.* Редукція матриць над кільцями Безу стабільного рангу не більше 2 / *Забавський Б.В.* // Укр. мат. журн. – 2003. – № 55. – С. 550-554.

Стаття: надійшла до редакції 30.03.2011
доопрацьована 29.06.2011
прийнята до друку 21.06.2011

COMPLETING ROW OVER COMMUTATIVE BEZOUT RING TO MATRIX DETERMINANT OF WHICH ONE OF THE MOST COMMON DIVISOR OF ALL ELEMENTS OF THIS ROW

Andriy GATALEVYCH

Ivan Franko National University of L'viv,
Universytets'ka Str., 1, L'viv, 79000
e-mail: gatalevych@ukr.net

Proved that over a commutative Bezout ring of stable range n, any row of length $n + 1$ is completable to the matrix, determinant of which one of the most common divisor of all elements of this row.

Key words: Bezout ring, Hermite ring, elementary divisor ring, stable range.

ДОПОЛНЕНИЕ СТРОКИ НАД КОММУТАТИВНЫМ КОЛЬЦОМ БЕЗУ К МАТРИЦЕ С ОПРЕДЕЛИТЕЛЕМ, КОТОРЫЙ РАВЕН НАИБОЛЬШЕМУ ОБЩЕМУ ДЕЛИТЕЛЮ ЭЛЕМЕНТОВ СТРОКИ

Андрей ГАТАЛЕВИЧ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: gatalevych@ukr.net

Доказано, что над коммутативным кольцом Безу стабильного ранга n, произвольная строка длинны $n+1$ дополняется к матрице, определитель которой равен наибольшему общему делителю элементов строки.

Ключевые слова: кольцо Безу, кольцо Эрмита, кольцо элементарных делителей, стабильный ранг.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 74. С. 52–60
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 74. P. 52–60

УДК 517.574

КЛАСИФІКАЦІЯ ІЗОЛЬОВАНИХ ОСОБЛИВИХ ТОЧОК СУБГАРМОНІЙНИХ ФУНКЦІЙ

Оксана ГНАТЮК[1], Андрій КОНДРАТЮК[1], Юлія КУД'ЯВІНА[2]

[1]*Львівський національний університет імені Івана Франка,*
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: oksanka.gnatyuk@gmail.com
e-mail: kond@franko.lviv.ua
[2]*Інститут математики національної академії наук України,*
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01601
e-mail: kudjavina@mail.ru

Запропоновано класифікацію ізольованих особливих точок субгармонійних функцій. Доведено взаємозв'язки між інтегральними середніми та мірами Ріса субгармонійних функцій у проколотих околах ізольованих особливостей.

Ключові слова: субгармонійна функція, ізольована особлива точка, міра Ріса, усувна особлива точка.

1. Вступ. Нехай функція $u(x)$ субгармонійна в деякому проколотому околі точки $x_0 \in \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 2$, тобто, в $G\backslash\{x_0\}$, де G – відкрита множина в $\mathbb{R}^m$ і u тотожно відмінна від $-\infty$. Тоді ця точка x_0 називається ізольованою особливою точкою функції u.

Якщо F – підмножина множини G, функція u субгармонійна в $G\backslash F$ і існує субгармонійна в G функція $\widetilde{u}$ така, що $\widetilde{u} = u(x)$ при $x \in G\backslash F$, то множина F називається усувною, а функція $\widetilde{u}$ називається субгармонійним продовженням функції u на F [1].

Означення 1 ([2], с. 233). *Компактна множина $F \subset \mathbb{R}^m$ називається полярною, якщо існує субгармонійна в $\mathbb{R}^m$ функція u, скінченна в кожній точці $x \in \mathbb{R}^m\backslash F$ і $u(x) = -\infty$ на F.*

Ємність такої компактної множини дорівнює 0.

Нехай F – полярна множина в $\mathbb{R}^m$, G – відкрита множина в $\mathbb{R}^m$ і існує u – субгармонійна функція в $G\backslash F$. Функція u продовжується субгармонійно на F тоді і лише тоді, коли вона обмежена зверху на $G\backslash F$ [2, с. 255]. У цьому разі її субгармонійне продовження $\widetilde{u}$ на G задається таким співвідношенням [1, с. 59]:

$$\widetilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in G\backslash F, \\ \lim\limits_{y\to x, y\in G\backslash F} \sup u(y), & x \in F. \end{cases}$$

Таке продовження $\widetilde{u}$ на G єдине. У випадку $F = \{x_0\}$ точка x_0 називається усувною точкою фукнції u. В [3] ми подали зображення субгармонійної функції u в околі її ізольованої усувної точки. Наша мета – вивчити взаємозв'язки між поведінкою функції u в термінах інтегральних середніх і розподілом її мас Ріса в околі довільної ізольованої особливої точки. Залежно від цього ми подаємо класифікацію ізольованих особливих точок субгармонійних функцій.

2. Класифікація ізольованих особливих точок субгармонійних функцій. Як було зазначено у Вступі, точка x_0 – усувна точка субгармонійної функції u тоді і лише тоді, коли u обмежена зверху в деякому її проколотому околі. Відтак інші ізольовані особливі точки можемо класифікувати так.

Означення 2. *Нехай x_0 – ізольована особлива точка субгармонійної функції u і $u(x)$ необмежена зверху в кожному її проколотому околі.*

1. *Точка x_0 називається позитивним полюсом, якщо існують проколотий окіл $G\backslash\{x_0\}$ і стала $C > 0$ такі, що*

$$u(x) \leqslant C \log \frac{1}{|x - x_0|}, \qquad m = 2,$$
$$u(x) \leqslant C|x - x_0|^{2-m}, \qquad m \geqslant 3. \tag{1}$$

2. *Точка x_0 називається істотно особливою в іншому (протилежному) випадку.*

У випадку $m = 2$, $u = \log|f|$, $f(z)$ – голоморфна в $G\backslash\{z_0\}$, точка z_0 буде відповідно усувною, полюсом чи істотно особливою точкою функції f.

Справді, у цьому випадку z_0 – усувна точка функції f тоді і лише тоді, коли f обмежена в кожному її проколотому околі, що еквівалентно обмеженості $\log|f|$ зверху. Точка z_0 полюс функції f тоді і лише тоді, коли $|f(z)| \to +\infty$, при $z \to \infty$. У цьому разі існує $n \in \mathbb{N}$ таке, що

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^n},$$

де ϕ голоморфна в точці z_0, $\phi(z_0) \neq 0$. Це еквівалентно тому, що $\log|f(z)| \to +\infty$, при $z \to z_0$ і $\log|f(z)| \leqslant C \log \frac{1}{|z-z_0|}$ в кожному проколотому околі точки z_0, де C – деяка стала. В інших випадках точка z_0 істотно особлива.

3. Інтегральні середні та міра Ріса субгармонійної функції в околі усувної точки. Оскільки властивість субгармонійності зберігається при зсувах і розтягах чи стисках області її визначення, то можемо вважати, що $x_0 = 0$ і що G круг чи куля радіуса більшого за 1. За цих домовленостей через $I(r, u)$ або коротко $I(r)$ будемо позначати інтегральні середні субгармонійної функції u по сфері S_r

радіуса r з центром $x_0 = 0$,

$$I(r) = I(r,u) = \frac{1}{|S_r|} \int\limits_{|x|=r} u(x) d\sigma, \qquad 0 < r \leqslant 1,$$

де $|S_r|$ площа сфери S_r, а $d\sigma$ – елемент її площі.

Лема 1. *Якщо x_0 – усувна точка субгармонійної функції u, то*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I(\varepsilon, u) = \widetilde{u}(0), \tag{2}$$

де $\widetilde{u}$ – субгармонійне продовження u на G.

Доведення. Приймемо $I(\varepsilon, u) = I(\varepsilon, \widetilde{u})$. З нерівності $\widetilde{u}(0) \leqslant I(\varepsilon, \widetilde{u}(0))$ та напівнеперервності зверху функції $\widetilde{u}$ випливає, що $I(\varepsilon, \widetilde{u}(0)) \to \widetilde{u}(0)$ при $\varepsilon \to 0$. Звідси одержуємо (2). □

У випадку усувної точки будемо вважати, що функція u довизначена в точці $x_0 = 0$ формулою 2 і замість $\widetilde{u}$ писатимемо u.

Для ізольованої особливої точки $x_0 = 0$ довільного характеру функція розподілу $\nu(t)$ міри Ріса μ функції u визначається так [4]:

$$\nu(t) - \nu(t_0) = \mu(\{x : t_0 < x \leqslant t\}), \qquad t_0 < t < 1,$$
$$\nu(t_0) - \nu(t) = \mu(\{x : t < x \leqslant t_0\}), \qquad 0 < t < t_0,$$

де значення $t_0 \in (0,1)$ та $\nu(t_0) \in \mathbb{R}$ вибирають довільними. Функція $\nu(t)$ неспадна, неперервна справа на $(0,1)$ і визначена з точністю до сталої.

Для усувної точки $x_0 = 0$ субгармонійної функції u в [3] з'ясували, що границя

$$\lim_{t \to 0} \nu(t) := \nu(+0)$$

скінченна, а також, що

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\log \varepsilon} I(\varepsilon) := \gamma \in [0, +\infty), \qquad m = 2,$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0} (-\varepsilon^{m-2} I(\varepsilon)) := \gamma \in [0, +\infty), \qquad m \geqslant 3. \tag{3}$$

Ми подаємо таку класифікацію усувних особливих точок.

Означення 3. *Усувна точка $x_0 = 0$ субгармонійної функції u називається:*

i) *звичайною, якщо $-\infty < \widetilde{u}(0)$;*

ii) *усувною точкою I роду, якщо $u(0) = -\infty$ і інтеграл*

$$\int\limits_0^1 \frac{\nu(t) - \nu(+0)}{t^{m-1}} dt \tag{4}$$

збігається;

iii) *усувною точкою II роду, якщо $\widetilde{u}(0) = -\infty$ і інтеграл (4) розбігається.*

В термінах інтегральних середніх і функції розподілу $\nu(t)$ міри Ріса функції u ці точки характеризуються так.

Теорема 1. *Виконуються такі твердження:*

а) *якщо* $x_0 = 0$ *– звичайна усувна точка субгармонійної функції* u, *то*

$$I(r) - u(0) = \int_0^r \frac{\nu(t) - \nu(+0)}{t^{m-1}} dt, \qquad 0 < r < 1;$$

б) *якщо* $x_0 = 0$ *– усувна точка I роду, то*

$$I(r) - \gamma \log r = \int_0^r \frac{\nu(t) - \nu(+0)}{t} + \gamma_1, \qquad m = 2,$$

де

$$\gamma_1 = \lim_{\varepsilon \to 0} (I(\varepsilon) - \gamma \log \varepsilon),$$

і

$$I(r) + \gamma r^{2-m} = (m-2) \int_0^r \frac{\nu(t) - \nu(+0)}{t^{m-1}} dt + \gamma_1, \qquad m \geqslant 3,$$

де

$$\gamma_1 = \lim_{\varepsilon \to 0} (I(\varepsilon) + \gamma \varepsilon^{2-m});$$

в) *якщо* $x_0 = 0$ *– усувна точка II роду, то*

$$I(r) - \gamma \log r = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_\varepsilon^r \frac{\nu(t) - \nu(+0)}{t} dt + I(\varepsilon) - \gamma \log \varepsilon \right), \qquad m = 2$$

і

$$I(r) + \gamma r^{2-m} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left((m-2) \int_\varepsilon^r \frac{\nu(t) - \nu(+0)}{t^{m-1}} dt + I(\varepsilon) + \gamma \varepsilon^{2-m} \right), \qquad m \geqslant 3.$$

Для доведення Теореми 1 нам потрібна лема.

Лема 2. *Якщо* $x_0 = 0$ *– усувна точка субгармонійної функції* u, *то при* $0 < r_0 <$ $< r < 1$ *виконується*

$$\frac{1}{\log r_0 - \log r} \int_{r_0}^r \frac{\nu(t) - \nu(+0)}{t} dt = \frac{I(r) - I(r_0)}{\log r_0 - \log r} + \gamma, \quad m = 2,$$

$$\frac{m-2}{r_0^{2-m} - r^{2-m}} \int_{r_0}^r \frac{\nu(t) - \nu(+0)}{t^{m-1}} dt = \frac{I(r) - I(r_0)}{r_0^{2-m} - r^{2-m}} - \gamma, \quad m \geqslant 3. \tag{5}$$

Доведення. В [5], [4] доведено такий аналог формули Єнсена при $0 < s < r_0 < r < 1$

$$\frac{1}{\log r_0 - \log r} \int_{r_0}^r \frac{\nu(t)}{t} - \frac{1}{\log s - \log r_0} \int_s^{r_0} \frac{\nu(t)}{t} =$$

$$= \frac{I(r) - I(r_0)}{\log r_0 - \log r} - \frac{I(r_0) - I(s)}{\log s - \log r_0}, \qquad m = 2$$

і

$$\frac{m-2}{r_0^{2-m}-r^{2-m}}\int_{r_0}^{r}\frac{\nu(t)}{t^{m-1}}-\frac{m-2}{s^{2-m}-r_0^{2-m}}\int_{s}^{r_0}\frac{\nu(t)}{t^{m-1}}=$$
$$=\frac{I(r)-I(r_0)}{r_0^{2-m}-r^{2-m}}-\frac{I(r_0)-I(s)}{s^{2-m}-r_0^{2-m}},\qquad m\geqslant 3. \tag{6}$$

Спрямувавши s до нуля і врахувавши (3), бачимо, що останнє відношення правого боку (6) прямує до γ. Отож, ми отримуємо вираз з правого боку (5). Щодо лівого боку (6), то покажемо, що

$$\lim_{s\to+0}\frac{1}{\log s-\log r_0}\int_{s}^{r_0}\frac{\nu(t)}{t}dt=\nu(+0),\quad m=2, \tag{7}$$

та

$$\lim_{s\to+0}\frac{m-2}{s^{2-m}-r_0^{2-m}}\int_{s}^{r_0}\frac{\nu(t)}{t^{m-1}}dt=\nu(+0),\quad m\geqslant 3 \tag{8}$$

і отримаємо вираз з лівого боку (5). Покажемо, що виконується (8).

Оскільки $\nu(t)$ неспадна, то

$$\nu(+0)=\frac{(m-2)\nu(+0)}{s^{2-m}-r_0^{2-m}}\int_{s}^{r_0}\frac{dt}{t^{m-1}}\leqslant\frac{m-2}{s^{2-m}-r_0^{2-m}}\int_{s}^{r_0}\frac{\nu(t)}{t^{m-1}}dt. \tag{9}$$

З іншого боку, оскільки значення $\nu(+0)$ скінченне, то для довільного $\varepsilon>0$ знайдеться $s_0>0$ таке, що $\nu(s)<\nu(+0)+\varepsilon$ при $0<s<s_0$. Тому вираз з правого боку (9) не перевищує

$$(\nu(+0)+\varepsilon)\frac{s^{2-m}-s_0^{2-m}}{s^{2-m}-r_0^{2-m}}+\frac{m-2}{s^{2-m}-r_0^{2-m}}\int_{s_0}^{r_0}\frac{\nu(t)}{t^{m-1}}dt.$$

Спрямувавши s до нуля, одержимо, що правий бік (9) не перевищує $\nu(+0)+\varepsilon$. Враховуючи довільність ε та (9), отримаємо (8). Співвідношення (7) доводиться аналогічно. Лему 2 доведено. □

Доведення Теореми 1.

Доведення. Якщо $x_0=0$ – звичайна усувна точка, то згідно з Лемою 1 $u(0)=I(+0)\neq-\infty$ і з (3) випливає, що $\gamma=0$. Скоротивши (5) на множник перед інтегралом і спрямувавши r_0 до нуля, одержимо a.

Якщо $x_0=0$ – усувна точка I роду, то співвідношення (5) дає

$$I(r)-\gamma\log r=\int_0^r\frac{\nu(t)-\nu(+0)}{t}dt+\lim_{r_0\to 0}(I(r_0)-\gamma\log r_0),\quad m=2$$

і

$$I(r)+\gamma r^{2-m}=(m-2)\int_0^r\frac{\nu(t)-\nu(+0)}{t^{m-1}}dt+\lim_{r_0\to 0}(I(r_0)+\gamma r_0^{2-m}),\quad m\geqslant 3,$$

тобто *б*. Твердження *в* випливає безпосередньо з (5). Теорема 1 доведена. □

Зауваження 1. Порівнюючи рівність пункту *а* Теореми 1 з класичним аналогом формули Єнсена для субгармонійних функцій (див., наприклад, [2]), бачимо, що

$$\nu(t) - \nu(t_0) = n(t),$$

де $n(t) = \mu(\{x : |x| \leqslant t\})$.

Покажемо тепер, що всі випадки Означення 3 можливі. Приклади випадку *а* добре відомі. Функції $u(x) = \log|x|$ при $m = 2$ і $u(x) = -|x|^{2-m}$ при $m \geqslant 3$, визначені в $\mathbb{R}^m \backslash \{0\}$, мають усувну точку $x_0 = 0$ I роду, бо вони гармонійні і за $\nu(t)$ можна взяти тотожний нуль.

Подамо приклад субгармонійної функції з усувною точкою II роду. Нехай $z = x + iy$,

$$u(\zeta) = \int\limits_{|z|\leqslant 1} \frac{\log|z-\zeta| dxdy}{(1-\log|z|)^2|z|^2}.$$

Вона субгармонійна в $\mathbb{R}^2$ як логарифмічний потенціал. Отримали $u(0) = -\infty$ і

$$\nu(t) - \nu(+0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|z|\leqslant t} \frac{dxdy}{(1-\log|z|)^2|z|^2} =$$

$$= \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(1-\log\tau)^2\tau} = \frac{1}{1-\log t}, \qquad 0 < t \leqslant 1.$$

Інтеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{\nu(t) - \nu(+0)}{t} dt = \int\limits_0^1 \frac{dt}{(1-\log t)t}$$

розбігається. Тому $x_0 = 0$ – усувна точка функції u II роду.

При $m \geqslant 3$ і $2 \leqslant \alpha < m$ аналогічно перевіряється, що $x_0 = 0$ є усувною точкою II роду субгаромнійної функції

$$u(x) = -\int\limits_{|\xi|\leqslant 1} \frac{d\xi}{|x-\xi|^{m-2}|\xi|^\alpha}.$$

4. Інтегральні середні та функція розподілу міри Ріса субгармонійної функції в околі позитивного полюса та істотно особливої точки.

Теорема 2. *Якщо $x_0 = 0$ – позитивний полюс субгармонійної функції u, то при $m = 2$*

$$I(r) = \alpha \log r + \lim_{\varepsilon\to+0} \left(\int\limits_\varepsilon^r \frac{\nu(t) - \nu(\varepsilon)}{t} dt + I(\varepsilon) - I_+^\wedge(\varepsilon)\log\varepsilon \right), \qquad 0 < r < 1, \qquad (10)$$

де $I_+^\wedge(\varepsilon)$ – похідна справа за змінною $\log r$ функції $I(r)$ в точці ε, і

$$\alpha = \lim_{\varepsilon\to+0} I_+^\wedge(\varepsilon),$$

а при $m \geqslant 3$

$$I(r)=\alpha r^{2-m}+\lim_{\varepsilon\to+0}\left((m-2)\int\limits_{\varepsilon}^{r}\frac{\nu(t)-\nu(\varepsilon)}{t^{m-1}}dt+I(\varepsilon)-I_{+}^{\wedge}(\varepsilon)\varepsilon^{2-m}\right),\ 0<r<1,\quad(11)$$

де $I_{+}^{\wedge}(\varepsilon)$ *похідна справа функції* $I(r)$ *за змінною* r^{2-m} *в точці* ε, *і*

$$\alpha=-\lim_{\varepsilon\to+0}I_{+}^{\wedge}(\varepsilon).$$

Якщо ж $x_0=0$ – *істотно особлива точка субгармонійної функції* u, *то при* $m=2$

$$I(r)=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_{\varepsilon}^{r}\frac{\nu(t)-\nu(\varepsilon)}{t}dt+I(\varepsilon)+I_{+}^{\wedge}(\varepsilon)(\log r-\log\varepsilon)\right),\qquad 0<r<1,\qquad(12)$$

а при $m \geqslant 3$

$$I(r)=\lim_{\varepsilon\to+0}\left((m-2)\int\limits_{\varepsilon}^{r}\frac{\nu(t)-\nu(\varepsilon)}{t^{m-1}}dt+I(\varepsilon)+I_{+}^{\wedge}(\varepsilon)(\varepsilon^{2-m}-r^{2-m})\right),\ 0<r<1.\quad(13)$$

Доведення. При $m\geqslant 3$ співвідношення (6) запишемо у вигляді

$$(m-2)\int\limits_{r_0}^{r}\frac{\nu(t)}{t^{m-1}}dt=I(r)-I(r_0)-\frac{r_0^{2-m}-r^{2-m}}{r_0^{2-m}-s^{2-m}}\left((m-2)\int\limits_{s}^{r_0}\frac{\nu(t)}{t^{m-1}}dt-I(r_0)+I(s)\right).$$

Спрямувавши r_0 до $s+0$ і прийнявши $s=\varepsilon$, знаходимо

$$(m-2)\int\limits_{\varepsilon}^{r}\frac{\nu(t)}{t^{m-1}}dt=I(r)-I(\varepsilon)+I_{+}^{\wedge}(\varepsilon)(\varepsilon^{2-m}-r^{2-m})-\nu(\varepsilon)(\varepsilon^{2-m}-r^{2-m}),$$

що можна записати у вигляді

$$I(r)=(m-2)\int\limits_{\varepsilon}^{r}\frac{\nu(t)-\nu(\varepsilon)}{t^{m-1}}dt+I(\varepsilon)+I_{+}^{\wedge}(\varepsilon)(\varepsilon^{2-m}-r^{2-m}),\qquad 0<r<1.\qquad(14)$$

Звідси випливає (13) не залежно від характеру особливості точки $x_0=0$. Доведемо таке: коли $x_0=0$ – позитивний полюс, то (13) набуває вигляду (11).

Приймемо $t=r^{2-m}$, $I(r)=\psi(t)$, $0<r<1$. Функція $\psi(t)$ опукла на $(1,+\infty)$, тому $\psi_{+}^{'}(t)$ не спадає, а відтак має границю при $t\to+\infty$ скіченну, або $+\infty$. У випадку, коли $x_0=0$ – позитивний полюс, ця границя скінченна. Справді, згідно з (1) існують сталі $C>0$ та r_0, $0<r_0<1$, такі, що $I(r)\leqslant r^{2-m}$ при $0<r\leqslant r_0$, тобто $\psi(t)\leqslant Ct$, $t_0\leqslant t$. Окрім того, існує скіченна чи $+\infty$ границя відношення $\frac{\psi(t)}{t}$ при $t\to+\infty$ (див., наприклад, [2]) і

$$\psi(2t)-\psi(t)=\int\limits_{t}^{2t}\psi_{+}^{'}(t)dt\geqslant\psi_{+}^{'}(t)t.$$

Тому границя

$$\lim_{t\to\infty}\psi_{+}^{'}(t)=\lim_{\varepsilon\to0}I_{+}^{\wedge}(\varepsilon)$$

існує і скінченна. Позначивши її через α, з (14) одержуємо (11). Співвідношення (12) та (10) доводяться аналогічно. Теорему 2 доведено. □

Список використаної літератури

1. *Klimek M.* Pluripotential theory / *Klimek M.* – Clarendon, 1991.
2. *Hayman W.K.* Subharmonic functions / *Hayman W.K., Kennedy P.B.* – M., 1980.
3. *Gnatiuk O.P.* Subharmonic functions in ball layers. II / *Gnatiuk O.P., Kondratyuk A.A.* // Mat. Stud. – 2011. – Vol. 35., №1. – P. 50-59.
4. *Gnatiuk O.P.* Subharmonic functions in ball layers. I / *Gnatiuk O.P., Kondratyuk A.A.* // Mat. Stud. – 2010. – Vol. 34., №2. – P. 180-192.
5. *Kondratyuk A.A., Stashyshyn O.V.* Subharmonic functions on annuli. A two-parameter approach. / *Kondratyuk A.A., Stashyshyn O.V.* // Математичний вісник НТШ. – 2010. – №7. – С. 352-365.

Стаття: надійшла до редакції 19.11.2010
доопрацьована 08.06.2011
прийнята до друку 21.09.2011

CLASSIFICATION OF ISOLATED SINGULARITIES OF SUBHARMONIC FUNCTIONS

Oksana GNATIUK[1], Andriy KONDRATYUK[1], Julia KUDJAVINA[2]

[1]*Ivan Franko National University of Lviv,*
Universitetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: oksanka.gnatyuk@gmail.com
e-mail: kond@franko.lviv.ua
[2]*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine,*
Tereshchenkivska Str., 3, Kyiv, 01601
e-mail: kudjavina@mail.ru

Classification of isolated singularities of subharmonic functions is proposed. Also, relationships between integral means and Riesz measures of subharmonic functions in punctured neighbourhoods of isolated singularities are established.

Key words: subharmonic function, isolated singularity, the Riesz measure, removable singularity.

КЛАССИФИКАЦИЯ ИЗОЛИРОВАННЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Оксана ГНАТЮК[1], Андрей КОНДРАТЮК[1], Юлия КУДЬЯВИНА[2]

[1]*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,*
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: oksanka.gnatyuk@gmail.com
e-mail: kond@fanko.lviv.ua
[2]*Институт метематики национальной академии наук Украины,*
ул. Терещенковская, 3, Киев, 01601
e-mail: kudjavina@mail.ru

Предложена классификация изолированных особых точек субгармонических функций. Установленны взаимосвязи между интегральными средними и мерами Рисса субгармонических функций в проколотых окрестностях изолированных особенностей.

Ключевые слова: субгармоническая функция, изолированная особая точка, мера Рисса, устранимая особая точка.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 74. С. 61–73
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 74. P. 61–73

УДК 512.536.75+512.546

СИМЕТРИЧНІ ТОПОЛОГІЧНІ ГРУПИ ТА ПІВГРУПИ

Ігор ГУРАН[1], Олег ГУТІК[1], Олександр РАВСЬКИЙ[2], Іван ЧУЧМАН[1]

[1]*Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська 1, Львів, 79000*
[2]*Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України, вул. Наукова 3б, Львів, 79061*
e-mails: igor_guran@yahoo.com, o_gutik@franko.lviv.ua, oravsky@mail.ru, chuchman_i@mail.ru

Описано компактифікації Бора топологічної групи $\mathscr{S}(\lambda)$ бієктивних перетворень зі скінченним носієм нескінченного кардинала λ, топологічної півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ майже тотожних часткових бієктивних перетворень нескінченного кардинала λ та топологічних півгруп монотонних і майже монотонних коскінченних ін'єктивних перетворень натуральних чисел $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ і $\mathscr{I}_\infty^{\not\nearrow}(\mathbb{N})$.

Ключові слова: топологічна півгрупа, топологічна група, компактифікація Бора.

1. Вступ. Всі простори ми вважаємо гаусдорфовими. Надалі всі кардинали ми будемо ототожнювати з відповідними їм початковими ординалами. Через ω позначатимемо перший нескінченний ординал, $\mathbb{N}$ – множину натуральних чисел, $\mathbb{Z}_2$ – двоелементну групу, а через $\mathbb{Z}_2^0$ – групу $\mathbb{Z}_2$ з приєднаним нулем. Надалі використовуватимемо термінологію та позначення з [7, 8, 11, 12, 14, 15, 17, 25, 26].

Півгрупою називається непорожна підмножина з заданою на ній бінарною асоціативною операцією. Півгрупа S називається *інверсною*, якщо для довільного її елемента x існує єдиний елемент y з S такий, що $x = xyx$ і $y = yxy$. У цьому випадку будемо говорити, що елемент y є *інверсним* до x і позначатимемо його через x^{-1}. Відображення, яке ставить кожному елементові інверсної півгрупи інверсний до нього елемент, називається *інверсією*.

Елемент e півгрупи S називається *ідемпотентом*, якщо $ee = e$. *Підмножину ідемпотентів* (*в'язку*) півгрупи S позначатимемо через $E(S)$.

Відношення еквівалентності $\mathfrak{R}$ на півгрупі S називається *конгруенцією*, якщо з того, що $a\mathfrak{R}b$, для $a, b \in S$, випливає $ac\mathfrak{R}bc$ і $da\mathfrak{R}db$, для довільних $c, d \in S$. На кожній півгрупі S існують такі конгруенції: *одинична* (*діагональ*) $\Delta(S) = \{(s, s) \mid s \in S\}$

та *універсальна* $\Omega(S) = S \times S$. Одиничну та універсальну конгруенції називають *тривіальними* конгруенціями.

Гаусдорфовий топологічний простір із заданою на ньому (роздільно) неперервною півгруповою операцією називається (*напів*)*топологічною півгрупою.* Інверсна топологічна півгрупа з неперервною інверсією називається *топологічною інверсною півгрупою.* Топологія τ на інверсній півгрупі S така, що (S,τ) – топологічна (інверсна) півгрупа, називається *півгруповою* (*інверсною*) топологією на S.

Топологічна група – це топологічний простір (G,τ) із заданою на ньому неперервною груповою операцією та інверсією, і в цьому випадку топологія τ на G називається *груповою.*

Нехай λ – кардинал $\geqslant 1$ і $\alpha\colon \lambda \rightharpoonup \lambda$ – часткове відображення (часткове перетворення) кардинала λ. Через $\operatorname{dom}\alpha$ і $\operatorname{ran}\alpha$ позначатимемо область визначення та область значень, відповідно, часткового перетворення α. Якщо α – часткове бієктивне перетворення, то потужність множини $\operatorname{dom}\alpha$ будемо називати *рангом* часткового відображення α, і позначатимемо $\operatorname{rank}\alpha$.

Через $\mathscr{I}_\lambda$ позначимо множину усіх часткових взаємно однозначних перетворень кардинала λ з півгруповою операцією

$$x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta \quad \text{якщо} \quad x \in \operatorname{dom}(\alpha\beta) = \{y \in \operatorname{dom}\alpha \mid y\alpha \in \operatorname{dom}\beta\}, \quad \text{для} \quad \alpha,\beta \in \mathscr{I}_\lambda.$$

Півгрупа $\mathscr{I}_\lambda$ називається *симетричною інверсною півгрупою* над λ (див. [14]). Симетричну інверсну півгрупу вперше ввів Вагнер у [1, 2], вона відігає важливу роль у теорії півгруп.

Підпівгрупа $\mathscr{I}_\lambda^n = \{\alpha \in \mathscr{I}_\lambda \mid \operatorname{rank}\alpha \leqslant n\}$ в $\mathscr{I}_\lambda$ є інверсною підпівгрупою, і крім того, ідеалом в $\mathscr{I}_\lambda$, для всіх $n = 1,2,3,\ldots$. Півгрупа $\mathscr{I}_\lambda^n$ називається *симетричною інверсною півгрупою скінченних перетворень рангу n кардинала* λ. Зауважимо, що симетрична інверсна півгрупа $\mathscr{I}_\lambda^1$ скінченних перетворень рангу 1 множини потужності λ ізоморфна півгрупі $\lambda\times\lambda$-матричних одиниць B_λ.

Симетричну інверсну півгрупу обмеженого скінченного рангу $\mathscr{I}_\lambda^n$ як топологічну та напівтопологічну вперше вивчали у [19], де доведено, що вона є півгрупою зі щільними ідеальними рядами, і у підсумку півгрупа $\mathscr{I}_\lambda^n$ алгебрично замкнена в класі напівтопологічних інверсних півгруп з неперервною інверсією. У [22] доведено, що півгрупа $\mathscr{I}_\lambda^n$ алгебрично h-замкнена в класі топологічних інверсних півгруп, а також описана борівська компактифікація нескінченної півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n$ в класі топологічних півгруп. У [21] зазначено достатні умови для того, щоб півгрупа $\mathscr{I}_\lambda^n$ була H-замкненою чи абсолютно H-замкненою в класі топологічних півгруп. Також в [19] доведено, що на симетричній інверсній півгрупі скінченного рангу $\mathscr{I}_\lambda^\infty = \bigcup_{n=1}^\infty \mathscr{I}_\lambda^n$ не існує компактної топології, стосовно якої вона була б напівтопологічною півгрупою. Водночас в [20] описано усі компактні та зліченно компактні топології на півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^1$, за яких $\mathscr{I}_\lambda^1$ є напівтопологічною півгрупою.

У праці [6] описано усі нетривіальні конгруенції на півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^n$, доведено, що довільний гомоморфний образ півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n$ є півгрупою зі щільними ідеальними рядами, а отже, півгрупа $\mathscr{I}_\lambda^n$ алгебрично h-замкнена півгрупа в класі напівтопологічних інверсних півгруп з неперервною інверсією. У [6] також описано усі компактні та зліченно компактні топології τ на півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^n$ такі, що $(\mathscr{I}_\lambda^n,\tau)$ є напівтопологічною півгрупою.

Часткове перетворення $\alpha \in \mathscr{I}_\lambda$ називається *майже тотожним*, якщо множина $\lambda \setminus \operatorname{dom}\alpha$ скінченна і $(x)\alpha \neq x$ тільки для скінченої кількості $x \in \lambda$. Позначимо

$$\mathscr{I}_\lambda^\infty = \{\alpha \in \mathscr{I}_\lambda \quad | \quad \alpha \quad \text{є майже тотожнім}\}.$$

Очевидно, що $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ є інверсною підпівгрупою півгрупи $\mathscr{I}_\omega$. Півгрупа $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ називається *півгрупою майже тотожних часткових ін'єктивних перетворень* кардинала λ [13].

В [13] описані відношення Гріна на півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^\infty$, усі (двосторонні) ідеали і всі конгруенції на $\mathscr{I}_\lambda^\infty$. У [13] доведено, що кожна гаусдорфова спадково берівська топологія τ на $\mathscr{I}_\omega^\infty$ така, що $(\mathscr{I}_\omega^\infty, \tau)$ є напівтопологічною півгрупою, є дискретною і описано замикання дискретної півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ у топологічній півгрупі. Також доведено, що для нескінченного кардинала λ дискретна напівгрупа $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ не вкладається в компактну топологічну півгрупу та побудовано дві недискретні гаусдорфові інверсні півгрупові топології на півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^\infty$.

Нехай $\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел. Через $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ позначимо півгрупу монотонних неспадних ін'єктивних часткових перетворень множини $\mathbb{N}$ таких, що множини $\mathbb{N} \setminus \operatorname{dom}\varphi$ і $\mathbb{N} \setminus \operatorname{rank}\varphi$ є скінченними для всіх $\varphi \in \mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$. Очевидно, що $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ є інверсною підпівгрупою півгрупи $\mathscr{I}_\omega$. Півгрупа $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ називається *півгрупою коскінченних монотонних часткових бієкцій* множини $\mathbb{N}$ [23].

У [23] Гутік і Реповш довели, що півгрупа $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ має алгебричні властивості, подібні до біциклічної півгрупи: вона біпроста і всі її нетривіальні півгрупові гомоморфізми є або ж ізоморфізмами, або ж груповими гомоморфізмами. Вони довели, що кожна гаусдорфова локально компактна півгрупова інверсна топологія на $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ є дискретною. Описали замикання дискретної півгрупи $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ у топологічній півгрупі.

Часткове відображення $\alpha \colon \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$ називається *майже монотонним*, якщо існує скінченна підмножина A в $\mathbb{N}$ така, що звуження $\alpha|_{\mathbb{N}\setminus A} \colon \mathbb{N} \setminus A \rightharpoonup \mathbb{N}$ є монотонним частковим відображенням. Через $\mathscr{I}_\infty^{\not\nearrow}(\mathbb{N})$ позначимо півгрупу майже монотонних ін'єктивних часткових перетворень множини $\mathbb{N}$ таку, що множини $\mathbb{N} \setminus \operatorname{dom}\varphi$ і $\mathbb{N} \setminus \operatorname{rank}\varphi$ є скінченними для всіх $\varphi \in \mathscr{I}_\infty^{\not\nearrow}(\mathbb{N})$. Очевидно, що півгрупа $\mathscr{I}_\infty^{\not\nearrow}(\mathbb{N})$ є інверсною підпівгрупою півгрупи $\mathscr{I}_\omega$ і півгрупа $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ є інверсною підпівгрупою півгрупи $\mathscr{I}_\infty^{\not\nearrow}(\mathbb{N})$ також. Півгрупа $\mathscr{I}_\infty^{\not\nearrow}(\mathbb{N})$ називається *півгрупою коскінченних майже монотонних часткових бієкцій* множини $\mathbb{N}$ [10].

В [10] доведено, що всі нетривіальні гомоморфізми півгрупи $\mathscr{I}_\infty^{\not\nearrow}(\mathbb{N})$ є груповими, або ізоморфізмами. Також доведено, що кожна гаусдорфова берівська топологія τ на $\mathscr{I}_\infty^{\not\nearrow}(\mathbb{N})$ така, що $(\mathscr{I}_\infty^{\not\nearrow}(\mathbb{N}), \tau)$ – напівтопологічна півгрупа є дискретною. Описано замикання дискретної півгрупи $(\mathscr{I}_\infty^{\not\nearrow}(\mathbb{N}), \tau)$ в топологічній півгрупі та побудовано недискретні гаусдорфові інверсні півгрупові топології на $\mathscr{I}_\infty^{\not\nearrow}(\mathbb{N})$.

Нехай $\mathsf{S}(\lambda)$ – група бієктивних перетворень кардинала λ. Для довільного $\alpha \in \mathsf{S}(\lambda)$ позначимо $\operatorname{supp}(\alpha) = \{x \in \lambda \mid (x)\alpha \neq x\}$. Нехай $\mathscr{S}(\lambda) = \{\alpha \in \mathsf{S}(\lambda) \mid |\operatorname{supp}(\alpha)| < \omega\}$. Через $\mathscr{A}(\lambda)$ позначимо підгрупу парних підстановок групи $\mathscr{S}(\lambda)$. Зауважимо, що $\mathscr{A}(\lambda)$ – єдина нетривіальна нормальна підгрупа в $\mathscr{S}(\lambda)$ і $\mathscr{A}(\lambda)$ – проста група.

В [4] доведено, що група $\mathscr{A}(\lambda)$, а отже, і група $\mathscr{S}(\lambda)$, при $\lambda > \omega$ в топології поточкової збіжності не вкладається в добуток топологічних груп зліченного псевдохарактеру. З іншого боку, група $\mathscr{S}(\lambda)$ у довільній відокремлюваній груповій топології не вкладається в τ-обмежену топологічну групу, якщо $\lambda > \tau \geqslant \omega$ [5].

З наслідку 2 випливає, що на групі $\mathscr{S}(\lambda)$, при $\lambda > \omega$, не існує цілком обмеженої групової топології. Виникає питання, відповідь на яке автори не знають: *Чи існує на групі $\mathscr{A}(\lambda)$, $\lambda > \omega$, локально компактна відокремлювана недискретна групова топологія?*

Ми описали компактифікації Бора топологічної групи $\mathscr{S}(\lambda)$ та топологічної півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ майже тотожних часткових бієктивних перетворень нескінченного кардинала λ та топологічних півгруп монотонних і майже монотонних коскінченних ін'єктивних перетворень натуральних чисел $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ і $\mathscr{I}_\infty^{\not\nearrow}(\mathbb{N})$.

2. Про вкладення групи $\mathscr{S}(\lambda)$. Топологічна група G називається *цілком обмеженою*, якщо для довільного околу одиниці U існує скінченна підмножина A в G така, що $A \cdot U = G$.

Ми будемо називати групу *прекомпактно топологізовною*, якщо на ній існує цілком обмежена гаусдорфова групова топологія. Для натурального n через $\mathbf{U}_n(\mathbb{C})$ ми позначимо групу унітарних матриць порядку n над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$. Будемо говорити, що група G *має повну систему унітарних зображень*, якщо для довільного елемента $x \in G$ існують натуральне n та гомоморфізм $f \colon G \to \mathbf{U}_n(\mathbb{C})$ такі, що $(x)f \neq e$.

Лема 1 ([8, с. 237, теорема 33])**.** *Кожна компактна гаусдорфова топологічна група має повну систему унітарних зображень.*

Зауважимо, що кожна підгрупа компактної групи – прекомпактна.

Теорема 1. *Група G є прекомпактно топологізовною тоді і тільки тоді, коли вона має повну систему унітарних зображень.*

Доведення. Необхідність випливає з леми 1. Доведемо достатність. Для кожного неодиничного елемента x групи G зафіксуємо натуральне число $n(x)$ та гомоморфізм $f_x \colon G \to \mathbf{U}_{n(x)}(\mathbb{C})$ такі, що $(x)f_x \neq e$. Тоді діагональний добуток $\prod_{x\in G\setminus\{e\}} f_x$ є ізоморфним вкладенням групи G у компактну групу $\prod_{x\in G\setminus\{e\}} \mathbf{U}_{n(x)}(\mathbb{C})$, тому група G є прекомпактно топологізовною. □

Теорема 2. *Проста група G – прекомпактно топологізовна тоді і тільки тоді, коли існують натуральне n та ін'єктивний гомоморфізм $f \colon G \to \boldsymbol{U}_n(\mathbb{C})$.*

Доведення. Достатність очевидна. Доведемо необхідність. Без обмеження загальності можна вважати, що $G \neq \{e\}$. Зафіксуємо довільний елемент $x \in G \setminus \{e\}$. За теоремою 1 існують натуральне число n та гомоморфізм $f \colon G \to \mathbf{U}_n(\mathbb{C})$ такі, що $(x)f \neq e$. Оскільки група G – проста, то $\ker f = \{e\}$, тому гомоморфізм f ін'єктивний. □

Лема 2 ([3, теорема VII.1.C])**.** *Для довільного натурального n кожна підгрупа $G \subset \boldsymbol{U}_n(\mathbb{C})$ скінченної експоненти є скінченною.*

Наслідок 1. *Якщо проста група G є прекомпактно топологізовною, то кожна її підгрупа скінченної експоненти скінченна.*

Лема 3 ([7, с. 60])**.** *Група $\mathscr{A}(\lambda)$ є простою для $\lambda \geqslant 5$.*

Наслідок 2. *Якщо λ – нескінченний кардинал, то група $\mathscr{A}(\lambda)$ не є прекомпактно топологізовною.*

Доведення. Зафіксуємо довільну послідовність $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ попарно різних елементів кардинала λ. Тоді підгрупа T в $\mathscr{A}(\lambda)$, породжена множиною $\{(x_{3i}x_{3i+1}x_{3i+2}) \mid i \in \mathbb{N}\}$, є нескінченною підгрупою групи $\mathscr{A}(\lambda)$ експоненти 3. Тоді з леми 3, теореми 2 та наслідку 1 випливає, що група $\mathscr{A}(\lambda)$ не прекомпактно топологізовна. $\square$

З наслідку 2 випливає наслідок 3.

Наслідок 3. *Якщо λ – нескінченний кардинал, то довільний гомоморфізм з групи $\mathscr{A}(\lambda)$ в компактну топологічну групу є анулюючим.*

З наслідку 3 випливає наслідок 4.

Наслідок 4. *Якщо λ – нескінченний кардинал, то довільний неперервний гомоморфізм h з топологічної групи $\mathscr{S}(\lambda)$ в компактну топологічну групу K є анулюючим тоді і лише тоді, коли $\mathscr{A}(\lambda)$ – незамкнена підгрупа в $\mathscr{S}(\lambda)$. У протилежному випадку підгрупа $(\mathscr{S}(\lambda))h$ в K ізоморфна дискретній групі $\mathbb{Z}_2$.*

Оскільки за теоремою Елліса (див. [16]) кожна локально компактна напівтопологічна група є топологічною групою, то з наслідку 4 випливає наслідок 5.

Наслідок 5. *Якщо λ – нескінченний кардинал, то довільний неперервний гомоморфізм h з напівтопологічної групи $\mathscr{S}(\lambda)$ в компактну топологічну групу K є анулюючим тоді і лише тоді, коли $\mathscr{A}(\lambda)$ – незамкнена підгрупа в $\mathscr{S}(\lambda)$. У протилежному випадку підгрупа $(\mathscr{S}(\lambda))h$ в K ізоморфна дискретній групі $\mathbb{Z}_2$.*

3. Компатифікації Бора топологічної групи $\mathscr{S}(\lambda)$ та півгруп $\mathscr{I}_\lambda^\infty$, $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ і $\mathscr{I}_\infty^{\Rsh\!\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$. Нехай $\mathfrak{A}$ – клас топологічних алгебр (клас топологічних груп, топологічних півгруп, напівтопологічних груп, напівтопологічних півгруп тощо) і $S \in \mathfrak{A}$. Компатифікацією Бора алгебри S в класі $\mathfrak{A}$ називається пара $(\beta, B(S))$ така, що $B(S) \in \mathfrak{A}$ – компактна топологічна алгебра, $\beta\colon S \to B(S)$ – неперервний гомоморфізм, якщо $g\colon S \to T$ – неперервний гомоморфізм з топологічної алгебри S в компактну топологічну алгебру $T \in \mathfrak{A}$, то існує єдиний неперервний гомоморфізм $\bar{g}\colon B(S) \to T$ такий, що діаграма

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"'] & B(S) \arrow[dl, "\bar{g}"] \\ T & \end{tikzcd}$$

є комутативною. У випадку, коли зрозуміло про який гомоморфізм β йдеться, ми позначатимемо Борівську компактифікацію $(\beta, B(S))$, зазначаючи лише топологічну алгебру $B(S)$.

З наслідків 3 і 4 випливає теорема.

Теорема 3. *Нехай λ – нескінченний кардинал. Тоді:*

(i) *компактифікація Бора (напів)топологічної групи $\mathscr{A}(\lambda)$ в класі (напів)топологічних груп є тривіальною групою;*

(ii) *компактифікація Бора (напів)топологічної групи $\mathscr{S}(\lambda)$ в класі (напів)топологічних груп є тривіальною групою тоді і лише тоді, коли $\mathscr{A}(\lambda)$ – незамкнена підгрупа в $\mathscr{S}(\lambda)$;*

(iii) *компактифікація Бора (напів)топологічної групи $\mathscr{S}(\lambda)$ в класі (напів)топологічних груп ізоморфна дискретній групі $\mathbb{Z}_2$ тоді і лише тоді, коли $\mathscr{A}(\lambda)$ – замкнена підгрупа в $\mathscr{S}(\lambda)$.*

На півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ для довільного невід'ємного цілого числа n означимо відношення $\mathfrak{K}_n(I)$, $\mathfrak{K}_n(\mathsf{S}_\infty)$ і $\mathfrak{K}_n(\mathsf{A}_\infty)$ так:

1. Через $\mathfrak{K}_n(I)$ позначимо конгруенцію на півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ породжену ідеалом $I_n = \{\alpha \in \mathscr{I}_\lambda^\infty \mid |\lambda \backslash \operatorname{dom}\alpha| \geqslant n\}$, тобто $\mathfrak{K}_n(I) = (I_n \times I_n) \cup \Delta(\mathscr{I}_\lambda^\infty)$. Зауважимо, що $\mathfrak{K}_0(I) = \Omega(\mathscr{I}_\lambda^\infty)$.
2. Елементи α і β півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ є n_{S_∞}-*еквівалентними*, якщо:
   (i) $\alpha\mathscr{H}\beta$; і
   (ii) $|\lambda \setminus \operatorname{dom}\alpha| = |\lambda \setminus \operatorname{dom}\beta| = n$.
   Означимо відношення $\mathfrak{K}_n(\mathsf{S}_\infty)$ на півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ так:
$$\mathfrak{K}_n(\mathsf{S}_\infty) = \{(\alpha,\beta) \mid (\alpha,\beta) \in n_{\mathsf{S}_\infty}\} \cup (I_{n+1} \times I_{n+1}) \cup \Delta(\mathscr{I}_\lambda^\infty).$$
3. Елементи α і β півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ є n_{A_∞}-*еквівалентними*, якщо:
   (i) $\alpha\mathscr{H}\beta$;
   (ii) $\alpha \cdot \beta^{-1}$ є парною підстановкою множини $\operatorname{dom}\alpha$; і
   (iii) $|\lambda \setminus \operatorname{dom}\alpha| = |\lambda \setminus \operatorname{dom}\beta| = n$.
   Означимо відношення $\mathfrak{K}_n(\mathsf{A}_\infty)$ на півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ так:
$$\mathfrak{K}_n(\mathsf{A}_\infty) = \{(\alpha,\beta) \quad | \quad (\alpha,\beta) \in n_{\mathsf{A}_\infty}\} \cup (I_{n+1} \times I_{n+1}) \cup \Delta(\mathscr{I}_\lambda^\infty).$$

Виконується така теорема.

Теорема 4 ([13]). *Для довільного невід'ємного цілого числа n відношення $\mathfrak{K}_n(\mathsf{S}_\infty)$ і $\mathfrak{K}_n(\mathsf{A}_\infty)$ є конгруенціями на півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^\infty$.*

У праці [13] також доведено таку теорему.

Теорема 5 ([13]). *Сім'я*
$$\begin{aligned}\mathsf{Cong}(\mathscr{I}_\lambda^\infty) &= \{\Delta(\mathscr{I}_\lambda^\infty),\ \Omega(\mathscr{I}_\lambda^\infty)\} \cup \{\mathfrak{K}_n(\mathsf{S}_\infty) \quad | \quad n = 0,1,2,\ldots\} \cup \\ &\cup \{\mathfrak{K}_n(\mathsf{A}_\infty) \quad | \quad n = 0,1,2,\ldots\} \cup \{\mathfrak{K}_n(I) \quad | \quad n = 1,2,\ldots\}\end{aligned}$$
визначає усі конгруенції на півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^\infty$.

Через $H(\mathbb{I})$ позначимо групу одиниць півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$. Кожна максимальна підгрупа півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$, а отже, і група одиниць $H(\mathbb{I})$, ізоморфна групі $\mathscr{S}(\lambda)$ [13].

Лема 4. *Нехай $\lambda \geqslant \omega$ і $h\colon \mathscr{I}_\lambda^\infty \to K$ – алгебричний гомоморфізм у компактну топологічну півгрупу K. Тоді півгрупа $(\mathscr{I}_\lambda^\infty)h$ ізоморфна деякій підпівгрупі півгрупи $\mathbb{Z}_2^0$.*

Доведення. Оскільки за теоремою 1.11 [5] замикання підгрупи в компактній топологічній півгрупі є підгрупою, то звуження $h_{H(\mathbb{I})} = h|_{H(\mathbb{I})}\colon H(\mathbb{I}) \to K$ гомоморфізму

h не є ізоморфізмом. Тоді за теоремою 5 отримаємо, що $(\mathscr{I}_\lambda^\infty \setminus H(\mathbb{I}))h$ – одноточкова підмножина в K. Оскільки підгрупа $H(\mathbb{I})$ півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ ізоморфна групі $\mathscr{S}(\lambda)$ і група $\mathscr{S}(\lambda)$ містить лише одну власну нетривіальну нормальну підгрупу $\mathscr{A}(\lambda)$, то $(H(\mathbb{I}))h$ є підгрупою групи $\mathbb{Z}_2$. Також з того, що множина $\mathscr{I}_\lambda^\infty \setminus H(\mathbb{I})$ є ідеалом півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$, врахувавши попередні міркування, отримуємо, що $(\mathscr{I}_\lambda^\infty)h$ – підпівгрупа півгрупи $\mathbb{Z}_2^0$. □

Теорема 6. *Нехай λ – нескінченний кардинал. Тоді:*

(i) *компактифікація Бора топологічної півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ в класі топологічних півгруп є нетривіальною півгрупою тоді і лише тоді, коли група одиниць $H(\mathbb{I})$ є відкрито-замкненою підгрупою в $\mathscr{I}_\lambda^\infty$;*

(ii) *компактифікація Бора топологічної півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ в класі топологічних півгруп топологічно ізоморфна дискретній напівґратці $(\{0,1\},\min)$ тоді і лише тоді, коли група одиниць $H(\mathbb{I})$ відкрито-замкнена підгрупа в $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ і $\mathscr{A}(\lambda)$ – незамкнена підгрупа в $H(\mathbb{I})$;*

(iii) *компактифікація Бора топологічної півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ в класі топологічних півгруп ізоморфна дискретній півгрупі $\mathbb{Z}_2^0$ тоді і лише тоді, коли група одиниць $H(\mathbb{I})$ відкрито-замкнена підгрупа в $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ і $\mathscr{A}(\lambda)$ – відкрита підгрупа в групі одиниць півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$.*

Доведення. (i) Спочатку доведемо достатність. Справді, якщо $H(\mathbb{I})$ – відкрито-замкнена підгрупа в $\mathscr{I}_\lambda^\infty$, то відображення $h\colon \mathscr{I}_\lambda^\infty \to (\{0,1\},\min)$, означене за формулою

$$(\alpha)h = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \alpha \in H(\mathbb{I}); \\ 0, & \text{якщо } \alpha \notin H(\mathbb{I}), \end{cases}$$

є неперервним гомоморфізмом. Отож, компактифікація Бора топологічної півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ в класі топологічних півгруп є нетривіальною півгрупою.

Тепер доведемо необхідність. Припустимо, що компактифікація Бора топологічної півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ в класі топологічних півгруп є нетривіальною півгрупою. Оскільки множина $\mathscr{I}_\lambda^\infty \setminus H(\mathbb{I})$ є ідеалом півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$, то за лемою 4 і теоремою 5 існує неперервний гомоморфізм $h\colon \mathscr{I}_\lambda^\infty \to \mathbb{Z}_2^0$ такий, що $(H(\mathbb{I}))h \cap (\mathscr{I}_\lambda^\infty \setminus H(\mathbb{I}))h = \varnothing$. Отже, маємо, що $(H(\mathbb{I}))h \in \mathbb{Z}_2$ і $(\mathscr{I}_\lambda^\infty \setminus H(\mathbb{I}))h = 0$, і з неперервності гомоморфізму h випливає, що $H(\mathbb{I})$ – відкрито-замкнена підгрупа в $\mathscr{I}_\lambda^\infty$.

(ii) Припустимо, що група одиниць $H(\mathbb{I})$ відкрито-замкнена підгрупа в $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ і $\mathscr{A}(\lambda)$ – незамкнена підгрупа в $H(\mathbb{I})$. Оскільки $\mathscr{A}(\lambda)$ єдина власна нетривіальна нормальна підгрупа в $H(\mathbb{I})$, то з наслідку 4 випливає, що образ групи $H(\mathbb{I})$ при неперервному гомоморфізмі $g\colon H(\mathbb{I}) \to K$ у компактну топологічну півгрупу K є тривіальною півгрупою. Тоді відображення $h\colon \mathscr{I}_\lambda^\infty \to (\{0,1\},\min)$, означене за формулою

$$(\alpha)h = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \alpha \in H(\mathbb{I}); \\ 0, & \text{якщо } \alpha \notin H(\mathbb{I}), \end{cases}$$

є неперервним гомоморфізмом. Отож, компактифікація Бора топологічної півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ в класі топологічних півгруп ізоморфна дискретній напівґратці $(\{0,1\},\min)$.

Припустимо, що компактифікація Бора топологічної півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ в класі топологічних півгруп ізоморфна дискретній напівґратці $(\{0,1\},\min)$. Тоді за твердженням (i) група одиниць $H(\mathbb{I})$ є відкрито-замкненою підгрупою в $\mathscr{I}_\lambda^\infty$. Припустимо, що $\mathscr{A}(\lambda)$ – замкнена підгрупа в $H(\mathbb{I})$. Нехай 0 – нуль півгрупи $\mathbb{Z}_2^0$, $\bar{0}$ і $\bar{1}$ – елементи підгрупи $\mathbb{Z}_2$. Тоді відображення $l\colon \mathscr{I}_\lambda^\infty \to \mathbb{Z}_2^0$, означене за формулою

$$(\alpha)l = \begin{cases} \bar{0}, & \text{якщо } \alpha \in \mathscr{A}(\lambda); \\ \bar{1}, & \text{якщо } \alpha \in H(\mathbb{I}) \setminus \mathscr{A}(\lambda); \\ 0, & \text{якщо } \alpha \notin H(\mathbb{I}), \end{cases}$$

є неперервним сюр'єктивним гомоморфізмом. Оскільки $3 = \left|\mathbb{Z}_2^0\right| > |\{0,1\}| = 2$, то не існує гомоморфізму $\bar{l}\colon (\{0,1\},\min) \to \mathbb{Z}_2^0$ такого, що $l = \beta \circ \bar{l}$, де $\beta\colon \mathscr{I}_\lambda^\infty \to (\{0,1\},\min)$ – довільний гомоморфізм. З отриманого протиріччя випливає, що $\mathscr{A}(\lambda)$ – незамкнена підгрупа групи одиниць $H(\mathbb{I})$.

Твердження (iii) випливає з леми 4 та тверджень (i) і (ii) теореми. $\square$

З наступних трьох прикладів видно, що компактифікацією Бора топологічної півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ в класі топологічних півгруп залежно від топології визначеної на $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ можуть бути усі три півгрупи, зазначені в теоремі 6: $\mathbb{Z}_2^0$, $(\{0,1\},\min)$ і тривіальна півгрупа.

Приклад 1. Нехай $\lambda \geqslant \omega$ і $\tau_{\mathfrak{d}}$ – дискретна топологія на $\mathscr{I}_\lambda^\infty$. Тоді $(\mathscr{I}_\lambda^\infty, \tau_{\mathfrak{d}})$ – топологічна інверсна півгрупа, і відображення $l\colon \mathscr{I}_\lambda^\infty \to \mathbb{Z}_2^0$, означене за формулою

$$(\alpha)l = \begin{cases} \bar{0}, & \text{якщо } \alpha \in \mathscr{A}(\lambda); \\ \bar{1}, & \text{якщо } \alpha \in H(\mathbb{I}) \setminus \mathscr{A}(\lambda); \\ 0, & \text{якщо } \alpha \notin H(\mathbb{I}), \end{cases}$$

є неперервним сюр'єктивним гомоморфізмом. З леми 4 випливає, що півгрупа $\mathbb{Z}_2^0$ є компактифікацією Бора півгрупи $(\mathscr{I}_\lambda^\infty, \tau_{\mathfrak{d}})$ в класі топологічних півгруп.

Приклад 2. Означимо топологію τ_F на півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ так. Для кожного елемента α півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ означимо сім'ю

$$\mathscr{B}_F(\alpha) = \{U_\alpha(F) \mid F \text{ – скінченна підмножина в } \operatorname{dom}\alpha\},$$

де

$$U_\alpha(F) = \{\beta \in \mathscr{I}_\lambda^\infty \mid \operatorname{dom}\alpha = \operatorname{dom}\beta, \ \operatorname{ran}\alpha = \operatorname{ran}\beta \text{ і } (x)\beta = (x)\alpha \text{ для всіх } x \in F\}.$$

Оскільки умови (BP1)-(BP3) [17] виконуються для сім'ї $\{\mathscr{B}_F(\alpha)\}_{\alpha\in\mathscr{I}_\lambda^\infty}$, то сім'я $\{\mathscr{B}_F(\alpha)\}_{\alpha\in\mathscr{I}_\lambda^\infty}$ є базою топології τ_F на півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^\infty$. За твердженням 5.11 [13], $(\mathscr{I}_\lambda^\infty, \tau_F)$ є топологічною інверсною півгрупою, топологічний простір якої цілком регулярний. Оскільки група одиниць $H(\mathbb{I})$ півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ є відкритою підгрупою в $(\mathscr{I}_\lambda^\infty, \tau_F)$ і підгрупа $\mathscr{A}(\lambda)$ щільна в $H(\mathbb{I})$ (див. [4]), то півгрупа $(\{0,1\},\min)$ є компактифікацією Бора півгрупи $(\mathscr{I}_\lambda^\infty, \tau_F$ в класі топологічних півгруп.

Приклад 3. Означимо топологію τ_{WF} на півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ так: для кожного елемента α півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ означимо сім'ю

$$\mathscr{B}_{WF}(\alpha) = \{U_\alpha(F) \mid F \text{ – скінченна підмножина в } \operatorname{dom}\alpha\},$$

де

$$U_\alpha(F) = \{\beta \in \mathscr{I}_\lambda^\infty \mid \operatorname{dom}\beta \subseteq \operatorname{dom}\alpha \ \text{ і } \ (x)\beta = (x)\alpha \ \text{ для всіх } \ x \in F\}.$$

Оскільки умови (BP1)-(BP3) [17] виконуються для сім'ї $\{\mathscr{B}_{WF}(\alpha)\}_{\alpha\in\mathscr{I}_\lambda^\infty}$, то сім'я $\{\mathscr{B}_{WF}(\alpha)\}_{\alpha\in\mathscr{I}_\lambda^\infty}$ є базою топології τ_{WF} на півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^\infty$. За твердженням 5.14 [13],

$(\mathscr{I}_\lambda^\infty, \tau_{WF})$ є гаусдорфовою топологічною інверсною півгрупою. Оскільки група одиниць $H(\mathbb{I})$ півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ не є відкритою підгрупою в $(\mathscr{I}_\lambda^\infty, \tau_F)$, то компактифікація Бора півгрупи $(\mathscr{I}_\lambda^\infty, \tau_{WF})$ в класі топологічних півгруп є тривіальною півгрупою.

Оскільки за теоремою 5.1 [13] кожна спадково гаусдорфова берівська топологія τ на півгрупі $\mathscr{I}_\omega^\infty$ така, що $(\mathscr{I}_\omega^\infty, \tau)$ – напівтопологічна півгрупа, є дискретною, то з теореми 6 випливає твердження 1.

Твердження 1. *Компактифікація Бора гаусдорфової берівської топологічної півгрупи $(\mathscr{I}_\omega^\infty, \tau)$ в класі топологічних півгруп ізоморфна дискретній напівгрупі $\mathbb{Z}_2^0$.*

Надалі через $\mathscr{P}_{<\omega}(\lambda)$ позначатимемо вільну напівґратку з одиницею над кардиналом λ.

Твердження 2. *Нехай τ – гаусдорфова топологія на півгрупі $\mathscr{I}_\omega^\infty$ така, що $(\mathscr{I}_\omega^\infty, \tau)$ – топологічна інверсна півгрупа і в'язка $E(\mathscr{I}_\omega^\infty)$ – є берівським підпростором в $(\mathscr{I}_\omega^\infty, \tau)$. Тоді одиниця $\mathbb{I}$ напівґратки $E(\mathscr{I}_\omega^\infty)$ є ізольованою точкою в $E(\mathscr{I}_\omega^\infty)$, а отже, група одиниць $H(\mathbb{I})$ півгрупи $\mathscr{I}_\omega^\infty$ відкрито-замкнена підгрупа в $(\mathscr{I}_\omega^\infty, \tau)$.*

Доведення. За твердженням 2.2 (iii) [13] напівґратка $E(\mathscr{I}_\omega^\infty)$ ізоморфна напівґратці $\mathscr{P}_{<\omega}(\omega)$. Оскільки $\uparrow\chi$ – скінченна підмножина в $\mathscr{P}_{<\omega}(\omega)$ для довільного $\chi \in \mathscr{P}_{<\omega}(\omega)$, то $\uparrow\chi$ – замкнена підмножина в $\mathscr{P}_{<\omega}(\omega)$. Занумеруємо всі елементи кардинала λ натуральними числами: $\omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Для довільного натурального числа n позначимо $y_n = x_1 x_2 \ldots x_n$. Тоді $y_n \in \mathscr{P}_{<\omega}(\omega)$ та $\uparrow y_n$ – скінченна, а отже, і замкнена підмножина в $\mathscr{P}_{<\omega}(\omega)$ для довільного натурального числа n, причому $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \uparrow y_n = \mathscr{P}_{<\omega}(\omega)$. Оскільки за припущенням твердження топологічний простір напівґратки $E(\mathscr{I}_\omega^\infty) = \mathscr{P}_{<\omega}(\omega)$ є берівським, то існує елемент y_i напівґратки $\mathscr{P}_{<\omega}(\omega)$ такий, що $\operatorname{Int}_{\mathscr{P}_{<\omega}(\omega)}(\uparrow y_i) \neq \varnothing$. Отож, існує скінченна відкрита підмножина $A \subseteq \uparrow y_i$ в $\mathscr{P}_{<\omega}(\omega)$. Тоді за твердженням IV-1.13 [18], $\uparrow A$ – відкрита підмножина в $\mathscr{P}_{<\omega}(\omega)$, а отже, одиниця $\mathbb{I}$ напівґратки $\mathscr{P}_{<\omega}(\omega)$ є ізольовано точкою в $\mathscr{P}_{<\omega}(\omega)$.

Оскільки $(\mathscr{I}_\omega^\infty, \tau)$ – топологічна інверсна півгрупа, то відображення $h_-\colon \mathscr{I}_\omega^\infty \to E(\mathscr{I}_\omega^\infty)$ та $h_+\colon \mathscr{I}_\omega^\infty \to E(\mathscr{I}_\omega^\infty)$, означені за формулами $(\chi)h_- = \chi\cdot\chi^{-1}$ та $(\chi)h_+ = \chi^{-1}\cdot\chi$, є неперервними, а отже, $H(\mathbb{I}) = (\mathbb{I})h_+ \cap (\mathbb{I})h_-$ – відкрито-замкнена підмножина в $(\mathscr{I}_\omega^\infty, \tau)$. □

З твердження 2 та теореми 6 випливає така теорема.

Теорема 7. *Нехай τ – гаусдорфова топологія на півгрупі $\mathscr{I}_\omega^\infty$ така, що $(\mathscr{I}_\omega^\infty, \tau)$ – топологічна інверсна півгрупа і в'язка $E(\mathscr{I}_\omega^\infty)$ – є берівським підпростором в $(\mathscr{I}_\omega^\infty, \tau)$. Тоді компактифікація Бора топологічної півгрупи $(\mathscr{I}_\omega^\infty, \tau)$ в класі топологічних півгруп ізоморфна нетривіальній підпівгрупі дискретної півгрупи $\mathbb{Z}_2^0$.*

Елемент e топологічної напівґратки E називається *точкою локального мінімуму* в E, якщо існує відкритий окіл $U(e)$ точки e в E такий, що $U(e) \cap {\downarrow} e = \{e\}$ [18]. Зауважимо, що ідемпотент e топологічної напівґратки E є точкою локального мінімуму в E тоді і лише тоді, коли $\uparrow e$ – відкрита множина в E.

Лема 5. *Кожна гаусдорфова локально компактна топологія τ на напівґратці $\mathscr{P}_{<\omega}(\lambda)$ така, що $(\mathscr{P}_{<\omega}(\lambda), \tau)$ – напівтопологічна півгрупа, є дискретною.*

Доведення. Якщо $\lambda < \omega$, то твердження леми очевидне. Тому надалі будемо вважати $\lambda \geqslant \omega$.

Ми покажемо, що для довільного ідемпотенту $\chi \in \mathscr{P}_{<\omega}(\lambda)$ існує ідемпотент $\varepsilon \leqslant \chi$ напівґратки $\mathscr{P}_{<\omega}(\lambda)$ такий, що $\uparrow\varepsilon$ – відкрита підмножина в $(\mathscr{P}_{<\omega}(\lambda), \tau)$. Оскільки $\uparrow\varepsilon$ – скінченна підмножина в $\mathscr{P}_{<\omega}(\lambda)$ для кожного ідемпотенту $\varepsilon \in \mathscr{P}_{<\omega}(\lambda)$, то отримуємо, що ε – ізольована точка в $\mathscr{P}_{<\omega}(\lambda)$.

Зафіксуємо відкритий окіл $U(\chi)$ ідемпотенту χ в $(\mathscr{P}_{<\omega}(\lambda), \tau)$ такий, що $\mathrm{cl}_{\mathscr{P}_{<\omega}(\lambda)}(U(\chi))$ – компактна підмножина в $(\mathscr{P}_{<\omega}(\lambda), \tau)$. Тоді підпростір $A(\chi) = \mathrm{cl}_{\mathscr{P}_{<\omega}(\lambda)}(U(\chi))$ в $(\mathscr{P}_{<\omega}(\lambda), \tau)$ з індукованим з напівґратки $\mathscr{P}_{<\omega}(\lambda)$ частковим порядком є компактним частково впорядкованим простором, а отже, існує мінімальний елемент χ_0 множини $A(\chi)$ такий, що $\chi_0 \leqslant \chi$. Позаяк $\uparrow\chi_0$ – скінченна підмножина в $\mathscr{P}_{<\omega}(\lambda)$, то χ – точка локального мінімуму в $(\mathscr{P}_{<\omega}(\lambda), \tau)$. Отож, $\uparrow\chi$ – відкрита скінченна підмножина в $\mathscr{P}_{<\omega}(\lambda)$, а отже, χ – ізольована точка в $(\mathscr{P}_{<\omega}(\lambda), \tau)$. □

З леми 5 та теореми 6 випливає теорема 8.

Теорема 8. *Нехай λ – нескінченний кардинал і $(\mathscr{I}_\lambda^\infty, \tau)$ – топологічна інверсна півгрупа з локально компактною в'язкою $E(\mathscr{I}_\omega^\infty)$. Тоді кожен $\mathscr{H}$-клас півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ відкрито-замкнена підмножина в $(\mathscr{I}_\lambda^\infty, \tau)$, а отже, компактифікація Бора топологічної півгрупи $(\mathscr{I}_\lambda^\infty, \tau)$ в класі топологічних півгруп ізоморфна нетривіальній підпівгрупі дискретної півгрупи $\mathbb{Z}_2^0$.*

Жодна з компактних топологічних півгруп не містить півгрупу $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ [23], оскільки усі нетривіальні гомоморфізми півгрупи $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ є або ізоморфізмами, або ж груповими гомоморфізмами, причому образ півгрупи $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ є циклічна група [23, теорема 2.9], то з твердження 2 [9] випливає така теорема.

Теорема 9. *Компактифікація Бора дискретної півгрупи $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ в класі топологічних півгруп топологічно ізоморфна компактифікації Бора дискретної адитивної групи цілих чисел.*

Аналогічно, оскільки жодна з компактних топологічних півгруп не містить півгрупу $\mathscr{I}_\infty^{\,\Rsh\!\nearrow}(\mathbb{N})$ [10], і всі нетривіальні гомоморфізми півгрупи $\mathscr{I}_\infty^{\,\Rsh\!\nearrow}(\mathbb{N})$ є або ізоморфізмами, або ж груповими гомоморфізмами, причому образ півгрупи $\mathscr{I}_\infty^{\,\Rsh\!\nearrow}(\mathbb{N})$ – циклічна група [10, теорема 2], то з твердження 2 [9] випливає така теорема.

Теорема 10. *Компактифікація Бора дискретної півгрупи $\mathscr{I}_\infty^{\,\Rsh\!\nearrow}(\mathbb{N})$ в класі топологічних півгруп топологічно ізоморфна компактифікації Бора дискретної адитивної групи цілих чисел.*

Список використаної літератури

1. *Вагнер В.В.* К теории частичных преобразований / *Вагнер В.В.* // ДАН СССР. – 1952. – Т. 84, №5. – С. 653-656.
2. *Вагнер В.В.* Обобщённые группы / *Вагнер В.В.* // ДАН СССР. – 1952. – Т. 84, №5. – С. 1119-1122.
3. *Вейль Г.* Классические группы их инварианты и представления. / *Вейль Г.* – М., 1947.

4. *Гуран И.И.* Топология бесконечной симметрической группы и уплотнения / *Гуран И.И.* // Comment. Math. Univ. Carol. – 1981. – Vol. 22, №2. – P. 311-316.
5. *Гуран І.* Скінченні симетричні групи та їх вкладення / *Гуран І.* // International Conference on Functional Analysis. Dedicated to 90th Anniversary of V. E. Lyantse. (L'viv, Ukraine, November 17-21, 2010). – L'viv, 2010. – Book of Abstracts. – P. 104.
6. *Гутік О.* Про напівтопологічні симетричні інверсні півгрупи обмеженого скінченного рангу / *Гутік О., Рейтер А.* // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2010. – Вип. 72. – С. 94-106.
7. *Курош А.Г.* Теория групп. / *Курош А.Г.* – М., 1967.
8. *Понтрягин Л.С.* Непрерывные группы. / *Понтрягин Л.С.* – М., 1973.
9. *Anderson L.W.* On the compactification of certain semigroups / *Anderson L.W., Hunter R.P.* // Contrib. Extens. Theory Topol. Struct. Proc. Sympos. Berlin 1967. – 1969. – P. 21-27.
10. *Chuchman I.Ya.* Topological monoids of almost monotone, injective cofinite partial selfmaps of positive integers / *Chuchman I.Ya., Gutik O.V.* // Карпатські математичні публікації. – 2010. – Т. 44, №1. – С. 119-132.
11. *Carruth J.H.* The Theory of Topological Semigroups, Vol. I / *Carruth J.H., Hildebrant J.A., Koch R.J.* – Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1983.
12. *Carruth J.H.* The Theory of Topological Semigroups, Vol. II. / *Carruth J.H., Hildebrant J.A., Koch R.J.* – Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1986.
13. *Chuchman I.* On monoids of injective partial selfmaps almost everywhere the identity / *Chuchman I., Gutik O.* // Demonstr. Math. – 2011. – Vol. 44, №4. – P. 699-722.
14. *Clifford A.H.* The Algebraic Theory of Semigroups, Vol. I. / *Clifford A.H., Preston G.B.* – Amer. Math. Soc. Surveys 7, Providence, R.I., 1961.
15. *Clifford A.H.* The Algebraic Theory of Semigroups, Vol. II. / *Clifford A.H., Preston G.B.* – Amer. Math. Soc. Surveys 7, Providence, R.I., 1967.
16. *Ellis R.* Locally compact transformation groups / *Ellis R.* // Duke Math. J. – 1957. – Vol. 24, №2. – P. 119-125.
17. *Engelking R.* General Topology, 2nd ed. / *Engelking R.* – Heldermann, Berlin, 1989.
18. *Gierz G.* Continuous Lattices and Domains. / *Gierz G., Hofmann K.H., Keimel K., Lawson J.D., Mislove M.W., and Scott D.S.* – Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
19. *Gutik O.* Semigroup closures of finite rank symmetric inverse semigroups / *Gutik O., Lawson J., Repovš D.* // Semigroup Forum. – 2009. – Vol. 78, №2. – P. 326-336.
20. *Gutik O.* Topological semigroups of matrix units / *Gutik O., Pavlyk K.*, // Algebra Discrete Math. – 2005. – №. 3. – P. 1-17.
21. *Gutik O.V.* Topological semigroups of matrix units and countably compact Brandt λ^0-extensions / *Gutik O.V., Pavlyk K.P., Reiter A.R.* // Мат. Студії. – 2009. – Т. 32, №2. – С. 115-131.
22. *Gutik O.V.* Symmetric inverse topological semigroups of finite rank $\leqslant n$ / *Gutik O.V., Reiter A.R.* // Мат. методи фіз.-мех. поля. – 2009. – Т. 52, №3. – С. 7-14.
23. *Gutik O.* Topological monoids of monotone, injective partial selfmaps of $\mathbb{N}$ having cofinite domain and image / *Gutik O., Repovš D.* // Stud. Sci. Math. Hungar. – 2011. – Vol. 48, №3. – P. 342-353.
24. *Haworth R.C.* Baire spaces / *Haworth R.C., McCoy R.A.* – Dissertationes Math., Warszawa, PWN, 1977, Vol. 141. 73p.
25. *Petrich M.* Inverse Semigroups. / *Petrich M.* – John Wiley & Sons, New York, 1984.
26. *Ruppert W.* Compact Semitopological Semigroups: An Intrinsic Theory. / *Ruppert W.* – Lecture Notes in Mathematics. – Vol. 1079. – Springer, Berlin, 1984.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 74

Стаття: надійшла до редакції 05.01.2011
доопрацьована 07.07.2011
прийнята до друку 21.09.2011

SYMMETRIC TOPOLOGICAL GROUPS AND SEMIGROUPS

Igor GURAN[1], Oleg GUTIK[1], Oleksandr RAVSKY[2], Ivan CHUCHMAN[1]

[1]*Ivan Franko National University of L'viv,*
Universytets'ka Str., 1, L'viv, 79000
[2]*Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NASU,*
Naukova Str., 3b, L'viv, 79061
e-mails: igor_guran@yahoo.com, o_gutik@franko.lviv.ua, oravsky@mail.ru,
chuchman_i@mail.ru

In this paper we describe Bohr compactifications of a topological group $\mathscr{S}(\lambda)$ of bijective transformations with finite supports of an infinite cardinal λ, a topological semigroup $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ of almost identity partial bijective transformations of an infinite cardinal λ and topological semigroups of monotone and almost monotone cofinite injective transformations of the set of positive integers $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ and $\mathscr{I}_\infty^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$.

Key words: topological semigroup, topological group, Bohr compactification.

СИММЕТРИЧЕСКИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ГРУППЫ И ПОЛУГРУППЫ

Игорь ГУРАН[1], Олег ГУТИК[1], Александр РАВСКИЙ[2], Иван ЧУЧМАН[1]

[1]*Львовский национальный университет имени Івана Франко,*
ул. Университетская 1, Львов, 79000
[2]*Институт прикладных проблем механики и математики НАН Украины,*
ул. Наукова 3б, Львов, 79061
e-mails: igor_guran@yahoo.com, o_gutik@franko.lviv.ua, oravsky@mail.ru,
chuchman_i@mail.ru

Описано компактификации Бора топологической группы $\mathscr{S}(\lambda)$ биективных преобразований с конечным носителем бесконечного кардинала λ, топологической полугруппы $\mathscr{I}_{\lambda}^{\infty}$ почти тождественных частичных биективных преобразований бесконечного кардинала λ и топологических полугрупп монотонных и почти монотонных коконечных инъективных преобразований натуральных чисел $\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})$ и $\mathscr{I}_{\infty}^{\,\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$.

Ключевые слова: топологическая полугруппа, топологическая группа, компактификация Бора.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 74. С. 74–82
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 74. P. 74–82

УДК 519.21

ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА ДЛЯ ГІЛЛЯСТОГО ПРОЦЕСУ З ДОВІЛЬНОЮ КІЛЬКІСТЮ ТИПІВ ЧАСТИНОК ТА ІММІГРАЦІЄЮ

Ярослав ЄЛЕЙКО, Ірина БАЗИЛЕВИЧ, Галина ТИМКІВ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: tumkiv_gala@mail.ru

Результатом дослідження є гранична задача для докритичного гіллястого випадкового процесу з довільною кількістю типів частинок та імміграцією. Розглянута задача є узагальненням задачі, яку розв'язав С. Алієв [4], але для скінченної кількості типів частинок.

Ключові слова: гіллястий процес, ядро, докритичний процес, функціонал Лапласа, умовний твірний функціонал, факторіальні моменти.

1. Вступ. Гіллясті процеси є математичною моделлю багатьох явищ. Зокрема, важливим напрямом є процес з імміграцією. Важливі праці цього напряму: Севастьянов В.А. [1], а також Хічот С.Р. [5]. У кінці 60-х на початку 70-х років XX ст. почали розглядати процеси з довільною кількістю типів частинок. Цікавий підхід запропонував Шуренков В.М. [2] та Єлейко Я.І. [3]. Розглянуто граничну теорему для гіллястого процесу з довільною кількістю типів та імміграцією.

2. Опис моделі. Розглянемо спочатку найпростіший випадок гіллястих процесів з імміграцією, тобто випадок двох типів частинок.

У цьому випадку поряд з розмноженням і загибеллю ще відбувається постійний приріст частинок зовні, що керується випадковим механізмом, який не залежить від кількості наявних частинок. Нехай маємо частинки одного типу. Кожна існуюча в цей момент частинка незалежно від свого походження та віку, незалежно від інших частинок з ймовірністю [1]

$$\delta_{k1} + p_k\Delta t + o(\Delta t)$$

перетворюється за час $\Delta t \to 0$ в k частинок. Крім того, незалежно від наявності довільної кількості частинок з ймовірністю [1]

$$\delta_{k0} + q_k\Delta t + o(\Delta t)$$

за проміжок часу $\Delta t \to 0$ виникає k частинок. Ці частинки, які виникали, надалі поводять себе так само як і наші вихідні частинки. Ми припускаємо, що щільності

p_k, q_k задовольняють такі умови [1]:

$$p_1 < 0, \quad p_k \geqslant 0 \quad (k \neq 0), \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 0, \tag{1}$$

$$q_0 < 0, \quad q_k \geqslant 0 \quad (k > 0), \quad \sum_{k=0}^{\infty} q_k = 0. \tag{2}$$

Введемо твірні функції [2]

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \quad g(s) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k s^k, \tag{3}$$

$$F(t; s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) s^k, \tag{4}$$

де $P_k(t)$ – ймовірність того, що кількість частинок $\mu(t)$ в момент часу t дорівнює k, якщо при $t = 0$ частинок не було. З умови (10) випливає, що $g(1) = f(1) = 0$. Наша мета – за даними $f(s)$, $g(s)$ необхідно знайти розподіл випадкової величини $\mu(t)$ і граничну поведінку при $t \to \infty$.

Покажемо насамперед, що описаний так процес є частковим випадком гіллястого процесу з двома типами частинок. Для цього, крім відомих уже частинок, які ми назвемо частинками типу T_1, введемо ще одну фіктивну частинку типу T_0. Задамо ймовірності перетворення частинок за час $\Delta t \to 0$ так:

$$\begin{gathered} P\{T_0 \to T_0\} = 1 + q_0 \Delta t + o(\Delta t), \\ P\{T_0 \to T_0 + kT_1\} = q_k \Delta t + o(\Delta t), \quad k \neq 0, \\ P\{T_1 \to T_1\} = 1 + p_1 \Delta t + o(\Delta t), \\ P\{T_1 \to kT_1\} = p_k \Delta t + o(\Delta t), \quad k \neq 1. \end{gathered}$$

Позначимо $P^i_{\alpha_0,\alpha_1}(t)$ ймовірність того, що одна частинка типу T_i за час t перетвориться в сукупність α_0 частинок типу T_0 і α_1 частинок типу T_1. Нехай при $\Delta t \to 0$

$$P^i_{\alpha_0,\alpha_1}(\Delta t) = \delta^i_{\alpha_0,\alpha_1} + P^i_{\alpha_0,\alpha_1} \Delta t + o(\Delta t),$$

де $\delta^0_{1;0} = 1$, $\delta^1_{0;1} = 1$, а інші $\delta^i_{\alpha_0,\alpha_1}$ дорівнюють нулю. Введемо твірні функції

$$F^i(t; s^0, s^1) = \sum_{\alpha_0,\alpha_1} P^i_{\alpha_0,\alpha_1} (s^0)^{\alpha_0} (s^1)^{\alpha_1},$$

$$f^i(s^0, s^1) = \sum_{\alpha_0,\alpha_1} p^i_{\alpha_0,\alpha_1} (s^0)^{\alpha_0} (s^1)^{\alpha_1}. \tag{5}$$

Неважко бачити, що твірні функції (3) і (4) зв'язані між собою так:

$$f^0(s^0, s^1) = s^0 g(s^1), \qquad f^1(s^0, s^1) = f(s^1), \tag{6}$$

$$F^0(t; s^0, s^1) = s^0 F(t, s^1). \tag{7}$$

Отож, імміграцію можна подати завдяки розмноженню фіктивної частинки типу T_0, яка, породивши нові частинки типу T_1, сама не розмножується і не зникає. У побудованому гіллястому процесі типи T_0 і T_1 становлять клас типів, які між собою контактують. Причому $\{T_1\}$ – замкнутий клас, а $\{T_0\}$ – фіктивний клас.

Для цього процесу з двома типами частинок T_0 і T_1 справджується система диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial F^i}{\partial t} = f^i(F^0, F^1), \quad i = 0, 1 \tag{8}$$

з початковими умовами

$$F^i(0; s^0, s^1) = s^i, \quad i = 0, 1, \tag{9}$$

або рівняння в частинних похідних

$$\frac{\partial F^i}{\partial t} = f^0(s^0, s^1)\frac{\partial F^i}{\partial s^0} + f^1(s^0, s^1)\frac{\partial F^i}{\partial s^1} \tag{10}$$

з тими самими початковими умовами. У нашому випадку система (8) набуде вигляду

$$\frac{dF^0}{dt} = F^0 g(F^1), \tag{11}$$

$$\frac{dF^1}{dt} = f(F^1), \tag{12}$$

а рівняння в частинних похідних таке:

$$\frac{\partial F^i}{\partial t} = s^0 g(s^1)\frac{\partial F^i}{\partial s^0} + f(s^1)\frac{\partial F^i}{\partial s^1}. \tag{13}$$

З (7) та (13) отримуємо рівняння для

$$\frac{\partial F}{\partial t} = g(s)F + f(s)\frac{\partial F}{\partial s}, \tag{14}$$

яке потрібно розв'язати за початкової умови

$$F(0; s) = 1. \tag{15}$$

З іншого боку, можна отримати зручний вираз для $F(t; s)$ за допомогою системи рівнянь (11), (12). Рівняння (12) з початковою умовою (9) розв'язується окремо. Позначимо його розв'язок через $\Phi(t; s)$ (вважаючи $s^1 = s$). Тоді з (11), (9) та (7) можна отримати

$$F(t; s) = \exp\Big(\int_0^t g(\Phi(u; s))du\Big). \tag{16}$$

Ця формула виражає твірну функцію $F(t; s)$ гіллястого процесу з імміграцією через твірну функцію $\Phi(t; s)$ гіллястого процесу без імміграції.

3. Гранична теорема для гіллястого випадкового процесу з імміграцією. Розглянемо послідовність гіллястих процесів Гальтона-Ватсона, що залежить від деякого малого параметра ε [4] з довільною кількістю типів частинок D та дискретним часом. На множині D задана σ-алгебра $\mathcal{F}$, яка містить всі одноточкові множини. Нехай випадкова міра $\xi(t, \varepsilon, A)$ позначає кількість частинок процесу з параметром ε, що належить множині $A \in \mathcal{F}$.

Умовні ймовірності та умовні математичні сподівання за умови, що в початковий момент часу була одна частинка типу $d \in D$, будемо позначати, відповідно, P_d та M_d.

Введемо функціонал Лапласа

$$F(\varepsilon, d, t, \varphi(\cdot)) = M_d \exp\left\{-\int\limits_D \varphi(u)\xi(t,\varepsilon,du)\right\}$$

і твірний функціонал

$$h(\varepsilon, d, t, \varphi(\cdot)) = M_d \exp\left\{\int\limits_D \ln\varphi(u)\xi(t,\varepsilon,du)\right\},$$

де $\varphi(u)$ є $\mathcal{F}$-вимірна.

Математичне сподівання процесу з параметром ε кількості частинок, що належать множині $A \in \mathcal{F}$ за одиницю часу за умови, що в початковий момент часу була одна частинка типу $d \in D$, ми позначимо через $M_d(\varepsilon, A)$.

Введемо такі позначення:

$$Q(u,t,\lambda(\cdot)) = \exp\left\{\int\limits_D g(u, K(u,s,\lambda(\cdot)))ds\right\},$$

$$g(t,\lambda(\cdot)) = \int\limits_0^\infty \left(e^{\int\limits_0^\infty \lambda(t)\varphi(dt)} - 1\right) N(\varphi(dt)),$$

де $\operatorname{Re}\lambda(\cdot) \leqslant 0$, N – міра. Функція $K(s,t,\lambda(\cdot))$ є логарифмом перетворення Лапласа, деякого нескінченно-подільного процесу

$$M\left[e^{\int\limits_D \lambda(s)\mu(t,ds)} \quad | \quad \mu(0,A) = y(A)\right] = e^{\int\limits_D y(ds)K(s,t,\lambda(u))}.$$

Тут $u \in D$, $t \geqslant 0$, $\operatorname{Re}\lambda(u) \leqslant 0$, $y(u) \geqslant 0$, $y(D) < \infty$, $\mu(t,A)$ – випадкова міра, яка позначає масу частинок у момент часу t, які належать множині A, де $A \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ – σ-алгебра на множині D.

Вважаємо, що процес стохастично неперервний, тому можна ввести кумулянту

$$H(u,\lambda(\cdot)) = \lim_{\tau\to 0} \frac{K(u,\tau,\lambda(u)) - \lambda(u)}{\tau}, \quad (u \in D, \quad \operatorname{Re}\lambda(u) \leqslant 0).$$

Норму оператора надалі позначатимемо $\|\cdot\|$.

Припускаємо, що для процесу з параметром ε правильне зображення

$$M_d(\varepsilon, A) = E + \varepsilon C + o(\varepsilon), \tag{17}$$

де E–одиничний оператор; C–обмежений оператор, який залежить від множини A та d. Припускаємо, що існує таке число C_0, що $\forall\ d \in D\ \forall\ A \in \mathcal{F}$ справджується нерівність

$$\|C(d,A)\| \leqslant C_0.$$

Розглянемо послідовність функцій $b_1(\varepsilon,u)$ $(u \in D)$ таких, що $b_1(\varepsilon,u) \to \infty$ для всіх $u \in D$ при $\varepsilon \to 0$. Вважаємо, що існує деяка міра $q(A)$, $b_1(\varepsilon,u)$ інтегрована стосовно цієї міри і $\int_A b_1(\varepsilon,u)\,q(du) = b(\varepsilon,A)$ $(A \in \mathcal{F})$ і $b(\varepsilon,A) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$.

Далі розглянемо випадкові міри

$$\mu(t,\varepsilon,A)=\frac{\xi([t/\varepsilon],\varepsilon,A)}{b(\varepsilon,A)},$$

$$\xi(0,\varepsilon,A)=\left[\int\limits_A x(u)b(\varepsilon,du)\right],$$

де $[a]$ – ціла частина числа a; $x(u)$ – $\mathcal{F}$-вимірна функція.

Правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай правильне розвинення (17). Якщо*
1) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\,b_1(\varepsilon,s)\,[F(\varepsilon,s,\exp(\lambda(\cdot)/b_1(\varepsilon,\cdot)))-\exp(\lambda(s)/b_1(\varepsilon,s))]=H(s,\lambda(\cdot))$*;*
2) $\dfrac{\partial H(s,\lambda(u))}{\partial\lambda}=C(s,\lambda(u))$ *обмежена по всіх аргументах*

$$\frac{1}{\varepsilon}[G(\varepsilon,s,\exp(\lambda(\cdot)/b_1(\varepsilon,\cdot)))-1]\longrightarrow g(s,\lambda(\cdot)),$$

де $G(\varepsilon,d,t,\varphi(\cdot))$ *– твірний функціонал для іммігруючих частинок, то скінченновимірні розподіли гіллястого процесу Гальтона-Ватсона з імміграцією та довільною кількістю типів частинок, що відповідають випадковій мірі* $\mu(t,\varepsilon)$*, слабо збігається при* $\varepsilon\to 0$ *до скінченновимірних розподілів багатовимірного гіллястого процесу з неперервним фазовим простором та імміграцією.*

Доведення. Розглянемо праву частину співвідношення

$$\sum_{j=0}^{\infty}\int\limits_D P_d(j,du)\varphi^j(u)=[F(\varepsilon,d,t,\varphi(\cdot))]^i G(\varepsilon,d,t,\varphi(\cdot))$$

$i,j=0,1,2,\ldots$. В схемі серій вона набула вигляду

$$[F(\varepsilon,d,t,\varphi(\cdot))]^i\prod_{k=0}^{1/\varepsilon-1}G(\varepsilon,d,t,F(\varepsilon,k,t,\varphi(\cdot))). \tag{2}$$

Замінимо ε на $[t/\varepsilon]$ і $\varphi(s)=e^{-\lambda(s)/b_1(\varepsilon,s)}$. Тоді (2) перепишемо так:

$$[F([t/\varepsilon],d,s,e^{-\lambda(s)/b_1(\varepsilon,s)})]^i\prod_{k=0}^{[t/\varepsilon]-1}G(\varepsilon,t,d,F(\varepsilon,k,t,e^{-\lambda(s)/b_1(\varepsilon,s)})).$$

У розглянутому випадку

$$i=\xi(0,\varepsilon,A),$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{F([t/\varepsilon],t,d,e^{-\lambda(s)/b_1(\varepsilon,s)})\right\}^{\left[\int_A x(u)b(\varepsilon,du)\right]}=e^{-\int_D x(ds)K(s,t,\lambda(u))}.$$

Розглянемо другий множник

$$\prod_{k=0}^{[t/\varepsilon]-1}G(\varepsilon,t,d,F(\varepsilon,k,t,e^{-\lambda(s)/b_1(\varepsilon,s)}))=$$

$$= \exp\left\{\sum_{k=0}^{[t/\varepsilon]-1} \log G(\varepsilon, t, d, F(\varepsilon, k, t, e^{-\lambda(s)/b_1(\varepsilon,s)}))\right\} =$$

$$= \exp\left\{\sum_{k=0}^{[t/\varepsilon]-1} G\left(\varepsilon, t, d, e^{[b(\varepsilon,s)\log F(\varepsilon,k,t,e^{-\lambda(s)/b_1(\varepsilon,s)})]/b_1(\varepsilon,s)}\right)\right\}.$$

Якщо прийняти

$$g(\varepsilon, \lambda(\cdot)) = \varepsilon \ln G\left(\varepsilon, t, d, e^{-\lambda(\cdot)/b_1(\varepsilon,\cdot)}\right),$$

то

$$\prod_{k=0}^{[t/\varepsilon]-1} G(\varepsilon, t, d, F(\varepsilon, k, t, e^{-\lambda(s)/b_1(\varepsilon,s)})) =$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=0}^{[t/\varepsilon]-1} g\left(\varepsilon, b(\varepsilon, s)\ln F(\varepsilon, k, t, e^{-\lambda(s)/b_1(\varepsilon,s)})\right)\right\}.$$

Нехай

$$K(\varepsilon, t, \lambda(s)) = b(\varepsilon, s)\ln F\left([t/\varepsilon], t, d, e^{-\lambda(s)/b(\varepsilon,s)}\right).$$

Підставляючи послідовно $t = 0$, ε, 2ε, $\ldots$, $(k-1)\varepsilon$, отримаємо

$$\prod_{k=0}^{[t/\varepsilon]-1} G\left(\varepsilon, t, d, F(\varepsilon, k, t, e^{-\lambda(s)/b_1(\varepsilon,s)})\right) = \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=0}^{[t/\varepsilon]-1} g\left(\varepsilon, K(\varepsilon, i\varepsilon, \lambda(\cdot))\right)\right\}.$$

Очевидно,

$$\int_0^t g(\cdot, K(s, \lambda(s), ds)) = \int_{[t/\varepsilon]/\varepsilon}^t g(\cdot, K(s, \lambda(s), ds)) +$$

$$+ \int_0^{[t/\varepsilon]/\varepsilon} g(\cdot, K(s, \lambda(s), ds)) - \frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=0}^{[t/\varepsilon]-1} g(\cdot, K(i\varepsilon, s, \lambda(s))) + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=0}^{[t/\varepsilon]-1} g(\cdot, K(i\varepsilon, s, \lambda(s))).$$

Якщо абсолютну величину суми перших трьох доданків позначимо через $\zeta(\varepsilon, t, \lambda(\cdot))$, то $\zeta(\varepsilon, t, \lambda(\cdot)) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ рівномірно по $t, \lambda(\cdot)$ в кожному скінченному інтервалі $[0 \leqslant t \leqslant T, \Lambda \leqslant \operatorname{Re}\lambda(\cdot) \leqslant 0]$.

Далі

$$\left|\frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=0}^{[t/\varepsilon]-1} g(\varepsilon, K(i\varepsilon, s, \lambda(s))) - \int_0^t g(\cdot, K(s, \lambda(s), ds))\right| \leqslant$$

$$\leqslant \zeta(\varepsilon, t, \lambda(s)) + \frac{1}{\varepsilon}\left|\sum_{i=0}^{[t/\varepsilon]-1} g(\varepsilon, K(i\varepsilon, s, \lambda(s))) - \sum_{i=0}^{[t/\varepsilon]-1} g(\cdot, K(i\varepsilon, s, \lambda(s)))\right| \leqslant$$

$$\leqslant \zeta(\varepsilon, t, \lambda(s)) + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=0}^{[t/\varepsilon]-1}\left|g(\varepsilon, K(i\varepsilon, s, \lambda(s))) - g(\varepsilon, K(i\varepsilon, s, \lambda(s)))\right| +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=0}^{[t/\varepsilon]-1}\Big|g(\epsilon, K(i\varepsilon, s, \lambda(s))) - g(\cdot, K(i\varepsilon, s, \lambda(s)))\Big|.$$

$K(\varepsilon, t, \lambda(\cdot)) \longrightarrow K(\cdot, t, \lambda(\cdot))$ рівномірно по t

$$\sup_t \Big|K(\varepsilon, t, \lambda(\cdot)) - K(\cdot, t, \lambda(\cdot))\Big| \longrightarrow 0.$$

Тоді

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant [t/\varepsilon]-1} \Big|K(\varepsilon, i\varepsilon, \lambda(\cdot)) - K(\cdot, i\varepsilon, \lambda(\cdot))\Big| \longrightarrow 0.$$

Друга умова теореми еквівалентна умові

$$g(\varepsilon, \lambda(\cdot)) \longrightarrow g(\cdot, \lambda(\cdot)),$$
$$\sup_\varepsilon |g(\varepsilon, \lambda(\cdot)) - g(\varepsilon, \mu(\cdot))| \longrightarrow 0,$$
$$\operatorname{Re}\mu(\cdot) \leqslant 0.$$

Якщо прийняти

$$\delta(h) = \sup_{Re(\lambda(\cdot)-\mu(\cdot))\leqslant 0} \sup_\varepsilon |g(\varepsilon, \lambda(\cdot)) - g(\varepsilon, \mu(\cdot))|,$$

то $\delta(h) \downarrow 0$ при $h \downarrow 0$.

Далі розглянемо

$$\Big|g(\varepsilon, K(\varepsilon, i\varepsilon, \lambda(s))) - g(\varepsilon, K(\cdot, i\varepsilon, \lambda(s)))\Big| \leqslant \delta\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\Big|K(\varepsilon, s, \lambda(s)) - K(\cdot, s, \lambda(s))\Big|\right).$$

Отже, другий доданок у (11) не перевищує

$$\frac{[t/\varepsilon]}{\varepsilon}\delta\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\Big|K(\varepsilon, s, \lambda(s)) - K(\cdot, s, \lambda(s))\Big|\right) \leqslant$$
$$\leqslant t\delta\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\Big|K(\varepsilon, s, \lambda(s)) - K(\cdot, s, \lambda(s))\Big|\right).$$

З того, що $g(\varepsilon, \lambda(\cdot)) \to g(\cdot, \lambda(\cdot))$ рівномірно по кожному скінченому інтервалі випливає, що третій доданок у правій частині (11) не перевищує

$$\frac{[t/\varepsilon]}{\varepsilon}\delta(\varepsilon) \leqslant t\delta(\varepsilon), \quad \delta(\varepsilon) \to 0.$$

Так знаходимо, що

$$\left|\frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=0}^{[t/\varepsilon]-1} g(\varepsilon, K(\varepsilon, i\varepsilon, \lambda(s))) - \int_0^t g(ds, K(\cdot, s, \lambda(s)))\right| \leqslant$$
$$\leqslant \zeta(\varepsilon, t, \lambda(s)) + \delta\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant t} |\ K(\varepsilon, s, \lambda(s)) - K(\cdot, s, \lambda(s))\ |\right) + t\delta(\varepsilon).$$

Оскільки $0 \leqslant t \leqslant T$, $\Lambda \leqslant \lambda \leqslant 0$, то

$$\frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=0}^{[t/\varepsilon]-1} g(\varepsilon, (K(\varepsilon, i\varepsilon, \lambda(s))) \longrightarrow \int_0^t g(ds, K(\cdot, s, \lambda(s))),$$

або

$$\prod_{k=0}^{[t/\varepsilon]-1} G(\varepsilon, t, d, F(\varepsilon, k, d, e^{-\lambda(s)/b(\varepsilon,s)})) \longrightarrow \exp\left\{\int\limits_0^t g(ds, K(\cdot, s, \lambda(s)))\right\} = Q(t, d, \lambda(\cdot)).$$

Отже, ми отримаємо

$$[F(\varepsilon, t, d, e^{-\lambda(s)/b(\varepsilon,s)})]^{\left[\int\limits_A x(u)b(\varepsilon,du)\right]} \times$$

$$\times \prod_{k=0}^{[t/\varepsilon]-1} G(\varepsilon, t, d, F(\varepsilon, k, d, e^{-\lambda(s)/b(\varepsilon,s)})) \longrightarrow Q(d, t, \lambda(s)) e^{-\int\limits_D x(ds)K(s,t,\lambda(u))}.$$

□

4. Висновки. Показано, що при $\varepsilon \to 0$ розподіли процесів $\mu(\cdot, t, A)$ слабо збігаються до розподілу гіллястого процесу з неперервним фазовим простором та імміграцією. Отож, при розширенні класу кількості типів частинок до довільної кількості певні властивості все ж таки зберігаються.

Список використаної літератури

1. *Севастьянов В.О.* Ветвящиеся процессы / *Севастьянов В.О.* – М., 1971.
2. *Шуренков В.М.* Две предельные теоремы для критических ветвящихся процессов / *Шуренков В.М.* // Теория вероятности и её применение. – 1976. – Т. XXI, Вып. 3. – С. 548-558.
3. *Єлейко Я.И.* Переходные явления для ветвящихся процессов с произвольним числом типов и дискретным временем / *Єлейко Я.И.* // Укр. мат. журн. – 1982. – Т. 34, № 2. – С. 198-204.
4. *Алиев С.А.* Предельная теорема для ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона с иммиграцией / *Алиев С.А.* // Укр. мат. журн. – 1985. – Т. 37, № 5. – С. 656-659.
5. *Heathcote C.R.* A branching process allowing immigratio / *Heathcote C.R.* // J. Roj. stats. Joc. – 1965. – Vol. 27, № 1. – P. 138-143.

Стаття: надійшла до редакції 02.11.2010
прийнята до друку 21.09.2011

LIMIT THEOREM FOR BRANCHING PROCESS WITH AN ARBITRARY NUMBER OF TYPES OF PARTICLES AND IMMIGRATION

Yaroslav YELEYKO, Iryna BAZYLEVYCH, Galyna TYMKIV

Ivan Franko National University of L'viv,
Universytets'ka Str., 1, L'viv, 79000
e-mail: tumkiv_ gala@mail.ru

Result is the limit problem for subcritical branching process with an arbitrary number of types of particles and immigration. The problem is a generalization of the problem which was solved by S. Alijev [4], but with finite number of types of particles.

Key words: branching process, the kernel, undercritical process, Laplace functional, conventional generators functional, factorial moments.

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ВЕТВИСТОГО ПРОЦЕССА С ПРОИЗВОЛЬНЫМ КОЛИЧЕСТВОМ ТИПОВ ЧАСТИЦ И ИММИГРАЦИЕЙ

Ярослав ЕЛЕЙКО, Ирина БАЗИЛЕВИЧ, Галина ТЫМКИВ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: tumkiv_ gala@mail.ru

Результатом исследования является предельная задача для докритического ветвящегося процесса, а рассмотренная задача является обобщением задачи, которая была решена С. Алиевым [4], но для конечного числа типов частиц.

Ключевые слова: ветвящийся процесс, ядро, докритический процесс, функционал Лапласа, условный образующий функционал, факториальные моменты.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 74. С. 83–88
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 74. P. 83–88

УДК 519.21

БАГАТОФРАКТАЛЬНІ ДОБУТКИ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ: РАНДОМІЗОВАНИЙ ВИПАДОК

Ярослав ЄЛЕЙКО, Тарас ЛАЗАРІВ, Степан МАЗУР

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: lazariv@rambler.ru

Розглянуто властивості багатофрактальних добутків експоненціальних дифузійних процесів визначених стохастичним диференціальним рівнянням з лінійним зсувом і окремою формою дифузійного коефіцієнта залежно від граничного розподілу.

Ключові слова: багатофрактальні добутки, функція Реньї, стаціонарна дифузія, рандомізований процес.

1. Вступ. Багатофрактальні процеси використовують у багатьох галузях, зокрема в фінансах, генетиці, в комп'ютерних мережах та ін. Ми будемо розглядати багатофрактальні добутки незалежних випадкових процесів, породжених так званим батьківським процесом, який є дифузійним процесом в експоненціальній формі з заданим граничним розподілом. Також розглянемо рандомізований процес з ваговими коефіцієнтами α_1, α_2 і побудуємо для цього процесу функцію Реньї.

2. Багатофрактальні добутки випадкових процесів. Введемо такі умови:

A1: $\Lambda^{(i)}(t)$, $\quad t \in [0,1]$, $i = 0,1,2,...$ послідовність стаціонарних процесів у широкому розумінні, таких що $\forall\, t, t_1, t_2 \in [0,1]$ та для всіх $i = 0,1,2,...$ виконуються такі припущення:

$$E\Lambda^{(i)}(t) = 1, \tag{1}$$

$$Var\Lambda^{(i)}(t) = \sigma_\Lambda^2 < \infty, \tag{2}$$

$$Cov(\Lambda^{(i)}(t_1), \Lambda^{(i)}(t_2)) = R_\Lambda(t_1 - t_2) = \sigma_\Lambda^2 \rho_i(t_1 - t_2), \quad \rho_i(0) = 1. \tag{3}$$

A2: $\Lambda_b^{(i)} \overset{def}{=} \Lambda(tb^i)$, $t \in [0,1]$, $i = 0,1,2,...$, де $b > 1$ – масштабний параметр, $E\Lambda(t) = 1$.

A3: Для $t \in [0,1]$, нехай $\Lambda(t) = \exp\{X(t)\}$, де $X(t)$ – стаціонарний процес з $EX^2(t) < \infty$,

$$Cov(X(t_1), X(t_2)) = R_X(t_1 - t_2) = \sigma_X^2 r_X(t_1 - t_2), \quad r_X(0) = 1.$$

Ми припустимо, що існує щільність $p_\theta(x)$ і двовимірна щільність $p_\theta(x_1, x_2; t_1 - t_2)$ такі, що $M_\theta(\zeta) = E\exp\{\zeta X(t)\}$, існує для $\zeta \in \Sigma_1 \subset$ R і для двовимірного випадку $M_\theta(\zeta_1, \zeta_2; t_1 - t_2) = E\exp\{\zeta_1 X(t_1) + \zeta_2 X(t_2)\}$ існує для $(\zeta_1, \zeta_2) \in \Sigma_2 \subset R^2$, $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \notin \emptyset$.

Зауважимо, що $\theta \in \Theta \subseteq R^p$, $p \geq 1$. За умов A1- A3 припущення (1)-(3) набудуть вигляду

$$E\Lambda_b^{(i)}(t) = M_\theta(1) = 1,$$

$$Var\Lambda_b^{(i)}(t) = M_\theta(2) - 1 = \sigma_\Lambda^2 < \infty,$$

$$Cov(\Lambda_b^{(i)}(t_1), \Lambda_b^{(i)}(t_2)) = M_\theta(1; 1; (t_1 - t_2)b^i) - 1, \quad b > 1.$$

Введемо скінченний добуток процесів

$$\Lambda_n(t) = \prod_{i=0}^{n} \Lambda_b^{(i)}(t) = \exp\{\sum_{i=0}^{n} X(tb^i)\}$$

і кумулятивний процес

$$A_n(t) = \int_0^t \Lambda_n(s)ds, \quad n = 0,\, 1,\, 2,\, ...$$

Також розглянемо відповідні додатні випадкові міри, визначені на борелевих множинах $B \subset [0, 1]$

$$\mu_n(B) = \int_B \Lambda_n(s)ds, \quad n = 0,\, 1,\, 2,\, ...$$

Було доведено [2], що $\mu_n \to \mu$ (м.н.). Якщо задано скінченну або зліченну сім'ю множин $B_j \subset [0, 1]$, то виконується таке: для всіх j $\lim_{n\to\infty} \mu_n(B_j) = \mu(B_j)$ з ймовірністю 1. Якщо $A_n \to A$ (м.н.), A і A_n – неперервні, тоді для всіх $t \in [0, 1]$ $\lim_{n\to\infty} A_n(t) = A(t)$ з ймовірністю 1. Зауважимо, що одне з двох тверджень виконується: 1. $A_n(t) \to A(t)$ в L_q для всіх t; 2. $A_n(1) \to 0$ (м.н.). Також будемо використовувати функцію Реньї

$$T(q) = \lim_{n\to\infty} \inf \frac{\log E \sum\limits_{k=0}^{2^n-1} \mu^q(I_k^{(n)})}{\log |I_k^{(n)}|} = \lim_{n\to\infty} \inf \left(-\frac{1}{n} \right) \log_2 E \sum_{k=0}^{2^n-1} \mu^q(I_k^{(n)}),$$

де $I_k^{(n)} = [k2^{-n}, (k + 1)2^{-n}]$, $\quad k = 0,\, 1,\, \ldots,\, 2^n - 1$.

3. Умови L_2-збіжності та стохастичне диференціальне рівняння. Надалі будемо користуватися такою теоремою [4].

Теорема 1. *Нехай умови* ***A1-A3*** *виконуються.*

1. Якщо для деяких додатних чисел δ і γ,

$$\exp\{-\delta|\tau|\} \leq \rho(\tau) = \frac{M_\theta(1, 1; \tau) - 1}{M_\theta(2) - 1} \leq |c\tau|^{-\gamma}, \tag{4}$$

тоді $A_n(t)$ збігається в L_2 $\Longleftrightarrow b > 1 + \sigma_\Lambda^2 = M_\theta(2)$.

2. Якщо $A_n(t)$ збігається в L_1, тоді граничний процес $A(t)$ задовольняє рекурсію

$$A(t) = \frac{1}{b}\int\limits_0^1 \Lambda(s)d\tilde{A}(bs), \tag{5}$$

де процеси Λ та $\tilde{A}$ незалежні, а процеси A та $\tilde{A}$ мають однакові скінченновимірні розподіли.

3. Якщо A невироджений, виконується рекурсія (5), $A(1) \in L_q$ для деякого $q > 0$ і

$$\sum_{n=0}^{\infty} c(q; b^{-n}) < \infty, \quad c(q,t) = E\sup_{s\in[0,1]}|\Lambda^q(0) - \Lambda^q(s)|,$$

тоді існують константи $\overline{C}$ та $\underline{C}$ такі, що для всіх $t \in [0,1]$

$$\underline{C}t^{q-\log_b E\Lambda^q(t)} \leq EA^q(t) \leq \overline{C}t^{q-\log_b E\Lambda^q(t)},$$

яке можна подати як $EA^q(t) \sim t^{q-\log_b E\Lambda^q(t)}$.

4. Якщо A невироджений, $A(1) \in L_q$, $q > 1$ та Λ, як у твердженні 3, тоді функція Реньї набуде вигляду

$$T(q) = q - 1 - \log_b E\Lambda^q(t) = q - 1 - \log_b M_\theta(q).$$

5. Якщо A невироджений, $A(1) \in L_2$, тоді

$$Var\ A(t) \geq Var\int\limits_0^t \Lambda(s)ds.$$

Розглянемо одновимірне стохастичне дифузійне рівняння

$$dX(t) = -(X(t) - \mu)dt + \sqrt{v(X(t))}dB(t), \quad t \geq 0,$$

де $\theta > 0$, $\mu \in (l,r)$, $-\infty \leq l < r \leq \infty$, v – невід'ємна функція на інтервалі (l,r), і $\{B(t), t \geq 0\}$ – стандартний броунівський рух.

4. Рандомізований випадок. Нагадаємо, що

$$M_{\theta X}(\zeta) = E\exp\{\zeta\, X(t)\},$$

$$E\Lambda(t) = 1, \quad E\Lambda(t) = M_{\theta X}(1).$$

Будемо розглядати батьківський процес у формі

$$\Lambda(t) = \exp\{\alpha_1 X(t) + \alpha_2 Y(t) + C\}, \tag{6}$$

де $X(t) \sim N(0, \sigma_X^2)$, $t \geq 0$ процес, що задовольняє стохастичне диференціальне рівняння

$$dX(t) = -\theta X(t)dt + \sigma_X\sqrt{2\theta}dB(t), \quad \theta > 0, \quad \sigma_X > 0, \tag{7}$$

а $Y(t) \sim \Gamma(\beta, \lambda)$ задовольняє диференціальне рівняння

$$dY(t) = -\theta(Y(t) - \frac{\beta}{\lambda})dt + \sqrt{\frac{2\theta}{\lambda}Y(t)}dB(t), \quad t \geq 0, \quad \lambda > 1, \quad \beta \geq 1. \tag{8}$$

З наведеного вище отримаємо

$$M_{\theta Z}(\zeta) = E\exp\{\zeta\,\alpha_1(X(t) + C_X) + \zeta\,\alpha_2(Y(t) + C_Y) + \zeta\, C'\} =$$

$$= \exp\{\zeta\, C'\} E \exp\{\zeta\, \alpha_1 (X(t) + C_X) + \zeta\, \alpha_2 (Y(t) + C_Y)\} =$$
$$= \exp\{\zeta\, C'\} M_{\theta X}(\zeta\, \alpha_1) M_{\theta Y}(\zeta\, \alpha_2),$$
$$M_{\theta Z}(1) = 1. \tag{9}$$

З пунктів 2 і 3 одержимо

$$M_{\theta X}(\alpha_1) = \exp\{\tfrac{1}{2}\sigma_X^2(\alpha_1^2 - \alpha_1)\},$$
$$M_{\theta Y}(\alpha_2) = \frac{1}{(1 - \frac{\alpha_2}{\lambda})^\beta} \exp\{-c_1 \alpha_2\}; c_1 = \log{(1 - \tfrac{1}{\lambda})}^{-\beta}, \quad \lambda > 1, \quad \beta \geq 1.$$

Для знаходження C використаємо умову (9)

$$\exp\{C'\} \cdot \exp\{\tfrac{1}{2}\sigma_X^2(\alpha_1^2 - \alpha_1)\} \cdot \exp\{-\alpha_2 \log{(1 - \tfrac{1}{\lambda})}^{-\beta}\} = (1 - \tfrac{\alpha_2}{\lambda})^\beta,$$
$$C' + \tfrac{1}{2}\sigma_X^2(\alpha_1^2 - \alpha_1) - \alpha_2 \log{(1 - \tfrac{1}{\lambda})}^{-\beta} = \log{(1 - \tfrac{\alpha_2}{\lambda})}^\beta,$$
$$C' + \tfrac{1}{2}\sigma_X^2(\alpha_1^2 - \alpha_1) + \alpha_2 \beta \log(1 - \tfrac{1}{\lambda}) = \beta \log(1 - \tfrac{\alpha_2}{\lambda}),$$
$$C' = \beta \log\left(\frac{(\lambda - \alpha_2)\lambda^{\alpha_2 - 1}}{(\lambda - 1)^{\alpha_2}}\right) - \frac{1}{2}\sigma_X^2(\alpha_1^2 - \alpha_1).$$

Оскільки $C = C' + \alpha_1 C_X + \alpha_2 C_Y$, то отримаємо

$$C = \beta \log\left(\frac{(\lambda - \alpha_2)\lambda^{\alpha_2 - 1}}{(\lambda - 1)^{\alpha_2}}\right) - \frac{1}{2}\sigma_X^2(\alpha_1^2 - \alpha_1) + \alpha_1(-\frac{1}{2}\sigma_X^2) + \alpha_2(-\log{(1 - \tfrac{1}{\lambda})}^{-\beta}) =$$
$$= \beta \log\left(\frac{(\lambda - \alpha_2)\lambda^{\alpha_2 - 1}}{(\lambda - 1)^{\alpha_2}}\right) - \frac{1}{2}\sigma_X^2 \alpha_1^2 + \alpha_2 \beta \log(1 - \tfrac{1}{\lambda}) =$$
$$= \beta \log\left(\frac{\lambda - \alpha_2}{\lambda}\right) - \frac{1}{2}\sigma_X^2 \alpha_1^2.$$

Отже, $C = \log\left(1 - \frac{\alpha_2}{\lambda}\right)^\beta - \frac{1}{2}\sigma_X^2 \alpha_1^2$.

Враховуючи наведене вище, батьківський процес $\Lambda(t)$ набуде вигляду

$$\Lambda(t) = \exp\left\{\alpha_1 X(t) + \alpha_2 Y(t) + \log\left(1 - \frac{\alpha_2}{\lambda}\right)^\beta - \frac{1}{2}\sigma_X^2 \alpha_1^2\right\}.$$

Запишемо коваріаційну функцію для рандомізованого процесу $Z(t) = \alpha_1 X(t) + \alpha_2 Y(t)$

$$Var\ Z(t) = \alpha_1^2 \sigma_X^2 + \alpha_2^2 \tfrac{\beta}{\lambda^2},$$
$$R_Z(\tau) = (\alpha_1^2 \sigma_X^2 + \alpha_2^2 \tfrac{\beta}{\lambda^2}) \cdot r_Z(\tau); \qquad r_Z(\tau) = \exp\{-\theta\, \tau\}.$$

Знайдемо функції моментів

$$M_{\theta Z}(\zeta) = \exp\{\zeta\, C'\} M_{\theta X}(\zeta\, p_1) M_{\theta Y}(\zeta\, p_2) =$$
$$= \exp\{\zeta C'\} \cdot \exp\{\tfrac{1}{2}\sigma_X^2(\alpha_1^2 \zeta^2 - \alpha_1 \zeta)\} \cdot \exp\{-\alpha_2 \zeta \log{(1 - \tfrac{1}{\lambda})}^{-\beta}\} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{\alpha_2 \zeta}{\lambda})^\beta} =$$
$$= \frac{1}{(1 - \frac{\alpha_2 \zeta}{\lambda})^\beta} \exp\{\zeta \beta \log \frac{\lambda - \alpha_2}{\lambda} + \frac{1}{2}\alpha_1^2 \sigma_X^2 (\zeta^2 - \zeta)\},$$

$$M_{\theta Z}(\zeta_1, \zeta_2; t_1 - t_2) = E \exp\{\zeta_1(\alpha_1 X(t_1) + \alpha_2 Y(t_1) + C) + \zeta_2(\alpha_1 X(t_2) + \alpha_2 Y(t_2) + C)\} =$$
$$= M_{\theta X}(\alpha_1 \zeta_1, \alpha_2 \zeta_2; t_1 - t_2)\, M_{\theta Y}(\alpha_1 \zeta_1, \alpha_2 \zeta_2; t_1 - t_2) \times$$
$$\times \exp\{(C - \alpha_1 C_X - \alpha_2 C_Y)(\zeta_1 + \zeta_2)\}, \quad (\zeta_1, \zeta_2) \in R^2.$$

У цьому випадку

$$M_{\theta Z}(1) = 1,$$
$$Cov(\Lambda(t_1), \Lambda(t_2)) = M_{\theta Z}(1, 1; t_1 - t_2) - 1.$$

Використавши теорему 1, знайдемо функцію Реньї

$$T(q) = q - 1 - \log_b E\Lambda^q(t) = q - 1 - \log_b M_{\theta Z}(q) =$$
$$= q - 1 + \beta \log_b(1 - \tfrac{\alpha_2 q}{\lambda}) - \left(q\beta \log \frac{\lambda - \alpha_2}{\lambda} + \frac{1}{2}\alpha_1^2 \sigma_X^2 (q^2 - q)\right) \log_b e.$$

5. Висновки. Ми розглянули рандомізований випадок стаціонарних дифузійних процесів, знайшли для нього коваріаційну функцію, лінійний зсув, функції моментів і функцію Реньї. Отже, посилаючись на теорему 1, можемо побудувати багатофрактальні добутки для рандомізованого процесу.

Список використаної літератури

1. *Anh V.V.* Multifractal products of stationary diffusion processes / *Anh V.V., Leonenko N.N., Shieh N.R.* // Stochastic Anal. Appl. – 2009. – Vol. 27, №3. – P. 475-499.
2. *Kahane J.-P.* Positive martingales and random measures / *Kahane J.-P.* // Chin. Ann. Math., Ser. B. – 1987. – Vol. 8. – P. 1-12.
3. *Bibby M.* Difussion-type models with given marginal distribution and autocorrelation function / *Bibby M., Skovgaard I., Sorensen M.* // Bernoulli – 2005. – Vol. 11, №2. – P. 191-220.
4. *Mannersalo P.* Multifractal products of stochastic processes: construction and some basic properties / *Mannersalo P., Norros I., Riedi R.* // Adv. Appl. Probab. – 2002. – Vol. 34, №4. – P. 888-903.

Стаття: надійшла до редакції 06.04.2011
прийнята до друку 21.09.2011

MULTIFRACTAL PRODUCTS OF DIFFUSION PROCESSES AND RANDOMIZED SCENARIO

Yaroslav YELEYKO, Taras LAZARIV, Stepan MAZUR

Ivan Franko National University of L'viv,
Universytets'ka Str., 1, L'viv, 79000
e-mail: lazariv@rambler.ru

We investigate the properties of multifractal products of the exponential of stationary diffusion processes defined by stochastic differential equations with linear drift and certain form of the diffusion coefficient corresponding to a variety of marginal distribution.

Key words: multifractal products, Renyi function, stationary diffusion, randomized scenario.

МНОГОФРАКТАЛЬНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ: РАНДОМИЗИРОВАННЫЙ СЛУЧАЙ

Ярослав ЕЛЕЙКО, Тарас ЛАЗАРИВ, Степан МАЗУР

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: lazariv@rambler.ru

Рассмотрено свойства многофрактальных произведений экспоненциальных диффузионных процессов определенных стохастическим дифференциальным уравнением с линейным сдвигом и формой диффузионного коэффициента в соответствие от граничного распределения.

Ключевые слова: многофрактальные произведения, функция Реньи, стационарная диффузия, рандомизированный случай.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 74. С. 89–97
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 74. P. 89–97

УДК 517.53

ВЛАСТИВІСТЬ МОНОТОННОСТІ СТОСОВНО НУЛІВ І ПОЛЮСІВ НЕВАНЛІННОВОЇ ХАРАКТЕРИСТИКИ МЕРОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ

Микола ЗАБОЛОЦЬКИЙ, Ігор ДЕЙНЕКА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: ihordeyneka@gmail.com

Побудовано мероморфні в $\mathbb{C}$ функції f_1, f_2 довільного порядку $\rho \in (2-\operatorname{arctg} 2/\pi; 2)$ з додатними нулями та від'ємними полюсами, усереднені лічильні функції і неванліннові характеристики яких задовольняють умови $N(r,0,f_1) \le N(r,0,f_2)$, $N(r,\infty,f_1) \le N(r,\infty,f_2)$ для $r \ge 0$ і $T(r,f_1) > T(r,f_2)$ для всіх достатньо великих r. Метод побудови не дає змоги отримати відповідь про існування таких функцій порядку зростання $\rho \in [1; 2-\operatorname{arctg} 2/\pi]$.

Ключові слова: мероморфна функція, порядок функції, тип функції, неванліннова характеристика.

1. Вступ. Нехай f – трансцендентна мероморфна в $\mathbb{C}$ (надалі мероморфна) функція, тобто$f(z) = g_1(z)/g_2(z)$, де g_1, g_2 – цілі функції, з яких хоча б одна була відмінна від многочлена. Будемо користуватися стандартними позначеннями неванліннової теорії розподілу значень (див., наприклад, [1]). В [2] (див. також [3]) знайдено точні оцінки зверху величин типу $\overline{\Delta}_f = \varlimsup\limits_{r\to\infty} T(r,f)/V(r)$ та нижнього типу $\underline{\Delta}_f = \varliminf\limits_{r\to\infty} T(r,f)/V(r)$ для мероморфних функцій нульового роду через величини типу $\overline{\Delta}_{N_0} = \varlimsup\limits_{r\to\infty} N_0(r,f)/V(r)$ і нижнього типу $\underline{\Delta}_{N_0} = \varliminf\limits_{r\to\infty} N_0(r,f)/V(r)$ функції $N_0(r,f) = \max\{N(r,0,f),\ N(r,\infty,f)\}$. Тут $V(r) = r^{\rho(r)}$, $\rho(r)$- уточнений порядок функції f [1, с. 69].

Зауважимо, що для мероморфних функцій нульового роду виконується співвідношення $T(r,f) = o(r)$, $r \to \infty$, тобто функція має щонайбільше порядок одиницю і мінімальний тип.

Головними передумовами для визначення цих оцінок були дві такі властивості неванліннової характеристики.

Теорема А. *Нехай f – мероморфна функція роду нуль, $\hat{f}$ – мероморфна функція з додатними нулями і від'ємними полюсами такими, що для всіх $r > 0$*

$$N(r, 0, f) = N(r, 0, \hat{f}), \quad N(r, \infty, f) = N(r, \infty, \hat{f}).$$

Тоді $T(r, f) \le T(r, \hat{f})$.

Теорема Б. *Нехай $f_1,\ f_2$ – мероморфні функції роду нуль з додатними нулями і від'ємними полюсами. Якщо для всіх $r > 0$*

$$N\left(r, 0, f_1\right) \le N\left(r, 0, f_2\right), \quad N\left(r, \infty, f_1\right) \le N\left(r, \infty, f_2\right),$$

то $T\left(r, f_1\right) \le T\left(r, f_2\right)$.

В [5, с. 119, проблема 7] М.В. Заболоцький сформулював задачу: Чи зберігається властивість монотонності стосовно нулів і полюсів неванліннових характеристик (див. теорему Б) для мероморфних функцій з додатними нулями та від'ємними полюсами, порядок зростання яких більший, ніж нульовий рід? Зокрема, яке найменше значення порядку можуть мати такі мероморфні функції $f_1,\ f_2$, щоб

$$N\left(r, 0, f_1\right) \le N\left(r, 0, f_2\right), \quad N\left(r, \infty, f_1\right) \le N\left(r, \infty, f_2\right), \quad r > 0, \tag{1}$$

а

$$T(r, f_1) \ge T(r, f_2), \quad r \ge r_0, \tag{2}$$

де $r_0 > 0$ – деяке фіксоване число?

Ми подаємо часткове розв'язання цієї проблеми.

2. Формулювання результатів. Позначимо через $M(+,-)$ клас мероморфних функцій з додатними нулями та від'ємними полюсами.

Теорема 1. *Нехай $1 < \rho < 2$, $\Delta > 0$, $\Delta_1 = \dfrac{\cos \pi\rho - \Delta}{\sin \pi\rho}$, $f \in M(+,-)$, $n(r, 0, f) \sim r^\rho$, $n(r, \infty, f) \sim \Delta r^\rho$, $r \to \infty$. Тоді:*

а) $T(r, f) \sim \dfrac{2r^\rho}{\rho\left|\sin \pi\rho\right|}\left(\sin \dfrac{\pi\rho}{2} - \sin \pi\rho\right)$, якщо $\Delta = 1$;

б) $T(r, f) \sim \dfrac{r^\rho}{\rho\left|\sin \pi\rho\right|}\left(\dfrac{\Delta\Delta_1 + \Delta_1\left|\cos \pi\rho\right| + \left|\sin \pi\rho\right|}{\sqrt{1 + \Delta_1^2}} + (\Delta + 1)\left|\sin \pi\rho\right|\right)$, якщо $1 < \rho \le$ $\le 3/2$;

в) $T(r, f) \sim \dfrac{2r^\rho}{\rho\left|\sin \pi\rho\right|}\left(\dfrac{\Delta\Delta_1 - \Delta_1\left|\cos \pi\rho\right| + \left|\sin \pi\rho\right|}{\sqrt{1 + \Delta_1^2}} + \dfrac{\Delta}{2}\left|\sin \pi\rho\right|\right)$, якщо $3/2 < \rho < 2$, $0 < \Delta < \cos \pi\rho$;

г) $T(r, f) \sim \dfrac{r^\rho}{\rho\left|\sin \pi\rho\right|}\left(\left|\sin \pi\rho\right|\left(2 + \cos \pi\rho\right)\right)$, якщо $3/2 < \rho < 2$, $\Delta = \cos \pi\rho$.

Теорема 2. *Для довільного $\rho \in \left(2 - \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg} 2;\ 2\right)$ існують функції $f_1,\ f_2$ класу $M(+,-)$ порядку ρ, які задовольняють співвідношення (1) і (2).*

Розглянемо два рівняння

$$\sin \frac{\beta}{2} - \sin \beta = 1 \tag{3}$$

і

$$-\sin\beta\,(2+\cos\beta)=1. \tag{4}$$

Легко бачити (див. лему 3), що на проміжку $\left(\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right)$ кожне з цих рівнянь має один корінь, який позначимо β_0.

Теорема 3. *Для довільного $\rho\in\left(\dfrac{\beta_0}{\pi};\,2\right)$ існують функції $f_1,\ f_2$ класу $M(+,-)$ порядку ρ, які задовольняють співвідношення (1) і (2).*

Зауваження 1. Неважко показати, що $\dfrac{\beta_0}{\pi}\approx 1,7753$, якщо β_0 – корінь рівняння (3); $\dfrac{\beta_0}{\pi}\approx 1,7291$, якщо β_0 – корінь рівняння (4); $2-\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}2\approx 1,6476$.

3. Допоміжні твердження та доведення результатів. Для доведення теорем 1-3 будемо використовувати леми.

Лема 1 ([1], с. 59-60)**.** *Нехай E – деяка вимірна підмножина відрізку $[0;2\pi]$, $\Phi(\varphi)$ – інтегровна невід'ємна функція на E, f – мероморфна функція, $T(r,f)=O(r^{\rho(r)})$, $r\to\infty$ і для довільного $\delta>0$ існує така множина $E_\delta\subset E$, $\operatorname{mes}E_\delta=\delta$, що*

$$\ln^+\left|f(re^{i\varphi})\right|=\Phi(\varphi)r^{\rho(r)}+o(r^{\rho(r)}),\quad r\to\infty,$$

рівномірно стосовно φ при $\varphi\in E\backslash E_\delta$. Тоді

$$\int\limits_E\ln^+\left|f(re^{i\varphi})\right|d\varphi=(1+o(1))r^{\rho(r)}\int\limits_E\Phi(\varphi)d\varphi,\quad r\to\infty.$$

Лема 2. *Нехай $1<\rho<2$, $x\ge 0$, $y=y(x)=\dfrac{\cos\pi\rho-x}{\sin\pi\rho}$,*

$$g_1(x)=g_1(x;\rho)=\frac{xy-y\cos\pi\rho+|\sin\pi\rho|}{\sqrt{1+y^2}}+(1+x)\left|\sin\pi\rho\right|,$$

$$g_2(x)=g_2(x;\rho)=\frac{xy-y\cos\pi\rho+|\sin\pi\rho|}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{x}{2}\left|\sin\pi\rho\right|.$$

Тоді:
а)

$$(\forall\,\rho\in(1;3/2])\quad(\forall\,x>0):\quad g_1(x)>g_1(0)=1-\sin\pi\rho; \tag{5}$$

б)

$$\left(\forall\,\rho\in\left(2-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}2;2\right)\right)\quad(\exists\,\delta>0)\quad(\forall\,x\in(0;\delta)):\quad g_2(x)<g_2(0)=1. \tag{6}$$

Доведення. Оскільки $y\,(0)=\operatorname{ctg}\pi\rho$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2(0)}}=|\sin\pi\rho|$, то

$$g_1(0)=-\operatorname{ctg}\pi\rho\cos\pi\rho\left|\sin\pi\rho\right|+\sin^2\pi\rho+\left|\sin\pi\rho\right|=1-\sin\pi\rho,$$

$$g_2(0)=-\operatorname{ctg}\pi\rho\cos\pi\rho\left|\sin\pi\rho\right|+\sin^2\pi\rho=1.$$

Враховуючи, що $y' = -\dfrac{1}{\sin \pi\rho} = \dfrac{1}{|\sin \pi\rho|}$, отримаємо

$$g_1'(x) = \frac{y^3 |\sin \pi\rho| - \cos \pi\rho + x}{(1+y^2)^{3/2} |\sin \pi\rho|} + |\sin \pi\rho| ,$$

$$g_2'(x) = \frac{y^3 |\sin \pi\rho| - \cos \pi\rho + x}{(1+y^2)^{3/2} |\sin \pi\rho|} + \frac{1}{2} |\sin \pi\rho| .$$

Для $\rho \in \left(1; \frac{3}{2}\right]$ виконується $\cos \pi\rho \le 0$, $y = \dfrac{\cos \pi\rho - x}{\sin \pi\rho} \ge 0$, а отже, $g_1'(x) > 0$ для $x > 0$ і ми отримуємо (5), що доводить твердження *а* леми 2.

Оскільки $g_2'(0) = \operatorname{ctg}^3 \pi\rho \left|\sin^3 \pi\rho\right| - \cos \pi\rho \sin^2 \pi\rho + \frac{1}{2} |\sin \pi\rho| = -\cos \pi\rho - \frac{1}{2} \sin \pi\rho$, то для $\rho \in \left(2 - \dfrac{1}{\pi} \operatorname{arctg} 2; 2\right)$ одержимо $g_2'(0) < 0$. Отже, для достатньо малих значень x виконується (6), що доводить твердження *б* леми 2. □

Лема 3. *Рівняння (3) та (4) мають єдиний розв'язок* β_0 *на проміжку* $\left(\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ *і виконуються твердження:*
а) $\forall\, \beta \in (\beta_0; 2\pi) : 1 + \sin \beta > \sin \frac{\beta}{2}$*;*
б) $\forall\, \beta \in (\beta_0; 2\pi) : 2 > -\sin \beta\, (2 + \cos \beta)$.

Доведення. Функція $\varphi_1(\beta) = 1 + \sin \beta$ зростає на $\left(\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ від 0 до 1, а функція $\varphi_2(\beta) = \sin \dfrac{\beta}{2}$ спадає на $\left(\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ від 1 до 0. Отож, існує єдина точка $\beta_0 \in \left(\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$, в якій $\varphi_1(\beta_0) = \varphi_2(\beta_0)$ і для $\beta \in (\beta_0; 2\pi)$ виконується $1 + \sin \beta > \sin \dfrac{\beta}{2}$.

Приймемо $\varphi(\beta) = 2 + \sin \beta (2 + \cos \beta)$. Оскільки $\varphi'(\beta) = 2\cos^2 \beta + \cos \beta - 1$, то розв'язком рівняння $\varphi'(\beta) = 0$ на проміжку $\left(\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ є точка β_1 така, що $\cos \beta_1 = = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}$. Отже, функція φ спадає на проміжку $\left(\dfrac{3\pi}{2}; \beta_1\right)$ і зростає на $(\beta_1; 2\pi)$. Але $\varphi\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 0$, $\varphi(2\pi) = 2$, тому існує єдина точка $\beta_0 \in (\beta_1; 2\pi)$ така, що $\varphi(\beta_0) = 0$. Отож, на проміжку $(\beta_0; 2\pi)$ виконується $\varphi(\beta) > 0$, тобто $2 > -\sin \beta (2 + \cos \beta)$. □

Доведення теореми 1. Нехай $f = f_1/f_2 \in M(+, -)$, $n(r, 0, f_1) \sim r^\rho$, $n(r, 0, f_2) \sim \Delta r^\rho$, $r \to \infty$. Тоді для довільного $\delta > 0$ при $r \to \infty$ рівномірно стосовно φ виконується (див., наприклад, [1, с.94])

$$\ln \left|f_1(re^{i\varphi})\right| = (1 + o(1)) \frac{\pi \cos \rho(\varphi - \pi)}{\sin \pi\rho} r^\rho, \quad \delta \le \varphi \le 2\pi - \delta;$$

$$\ln \left|f_2(re^{i\varphi})\right| = \begin{cases} (1 + o(1)) \dfrac{\pi \Delta \cos \rho\varphi}{\sin \pi\rho} r^\rho, & 0 \le \varphi \le \pi - \delta, \\ (1 + o(1)) \dfrac{\pi \cos \rho(\varphi - 2\pi)}{\sin \pi\rho} r^\rho, & \pi + \delta \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$$

Використовуючи формулу (4.8) з [1, с.28] та лему 1, отримуємо ($r \to \infty$)

$$T(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \max\{\ln\left|f_1(re^{i\varphi})\right|, \ln\left|f_2(re^{i\varphi})\right|\} d\varphi =$$

$$= \frac{(1+o(1))r^\rho}{2\left|\sin\pi\rho\right|}\left\{\int_0^{\pi} \max\{-\cos\rho(\varphi-\pi), -\Delta\cos\rho\varphi\} d\varphi + \right.$$

$$\left. + \int_\pi^{2\pi} \max\{-\cos\rho(\varphi-\pi), -\Delta\cos\rho(\varphi-2\pi)\} d\varphi \right\} = \frac{(1+o(1))r^\rho}{2\left|\sin\pi\rho\right|}(I_1+I_2). \qquad (7)$$

Розв'яжемо рівняння

$$\cos\rho(\varphi-\pi) = \Delta\cos\rho\varphi. \qquad (8)$$

Одержали $\cos\rho\varphi(\cos\pi\rho-\Delta)+\sin\rho\varphi\sin\pi\rho = 0$. Звідси $\operatorname{tg}\rho\varphi = \dfrac{\Delta-\cos\pi\rho}{\sin\pi\rho} = -\Delta_1$,

$$\varphi = \frac{1}{\rho}\operatorname{arctg}(-\Delta_1) + \frac{\pi k}{\rho}, \quad k \in \mathbb{Z}. \qquad (9)$$

а) У випадку $\Delta = 1$ маємо $\Delta_1 = \dfrac{\cos\pi\rho - 1}{\sin\pi\rho} = -\operatorname{tg}\frac{\pi\rho}{2} > 0$ і з (9) отримуємо на відрізку $[0;\pi]$ один розв'язок рівняння (8), а саме, $\varphi = \varphi_1 = \dfrac{\pi}{2}$. Тому

$$I_1 = -\int_0^{\pi/2} \cos\rho(\varphi-\pi)d\varphi - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos\rho\varphi d\varphi = \frac{2}{\rho}\left(\sin\frac{\pi\rho}{2} - \sin\pi\rho\right). \qquad (10)$$

Аналогічно отримуємо, що розв'язки рівняння

$$\cos\rho(\varphi-\pi) = \Delta\cos\rho(\varphi-2\pi) \qquad (11)$$

набули вигляду

$$\varphi = 2\pi + \frac{1}{\rho}\operatorname{arctg}(\Delta_1) + \frac{\pi k}{\rho}, \quad k \in \mathbb{Z}. \qquad (12)$$

На відрізку $[\pi;2\pi]$ є один розв'язок $\varphi = \varphi_2 = \dfrac{3\pi}{2}$ рівняння (11). Далі

$$I_2 = -\int_\pi^{3\pi/2} \cos\rho(\varphi-2\pi)d\varphi - \int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos\rho(\varphi-\pi)d\varphi =$$

$$= -\int_0^{\pi/2} \cos\rho(\varphi-\pi)d\varphi - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos\rho\varphi d\varphi = I_1,$$

тому з (7) завдяки (10) одержуємо

$$T(r,f) = \frac{(2+o(1))r^\rho}{\rho\left|\sin\pi\rho\right|}(\sin\frac{\pi\rho}{2} - \sin\pi\rho), \quad r \to \infty,$$

що доводить твердження *a* теореми 1.

б) У випадку $\rho \in (1;3/2]$ маємо $\Delta_1 > 0$ і з (9) знову отримуємо на відрізку $[0;\pi]$ один розв'язок рівняння (8), а саме, $\varphi = \varphi_1 = \dfrac{1}{\rho}(\pi - \operatorname{arctg}\Delta_1)$. Тоді

$$I_1 = \frac{1}{\rho}\left(-\sin\rho(\varphi_1 - \pi) - \sin\pi\rho - \Delta\sin\pi\rho + \Delta\sin\rho\varphi_1\right). \tag{13}$$

Оскільки

$$\sin\rho\varphi_1 = \sin(\pi - \operatorname{arctg}(\Delta_1)) = \sin(\operatorname{arctg}(\Delta_1)) = \frac{\Delta_1}{\sqrt{1+\Delta_1^2}},$$

$$\sin\rho(\varphi_1 - \pi) = \sin\rho\varphi_1\cos\pi\rho - \cos\rho\varphi_1\sin\pi\rho = \frac{\Delta_1}{\sqrt{1+\Delta_1^2}}\cos\pi\rho + \frac{1}{\sqrt{1+\Delta_1^2}}\sin\pi\rho,$$

то з (13) отримуємо

$$I_1 = \frac{1}{\rho}\left(-\frac{\Delta_1\cos\pi\rho + \sin\pi\rho}{\sqrt{1+\Delta_1^2}} - \sin\pi\rho - \Delta\sin\pi\rho + \frac{\Delta\Delta_1}{\sqrt{1+\Delta_1^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\rho}\left(\frac{\Delta\Delta_1 + \Delta_1\left|\cos\pi\rho\right| + \left|\sin\pi\rho\right|}{\sqrt{1+\Delta_1^2}} + (\Delta+1)\left|\sin\pi\rho\right|\right), \tag{14}$$

бо $\cos\pi\rho \le 0$, $\sin\pi\rho < 0$ для $\rho \in (1;3/2]$.

Як і у випадку *а*, неважко показати, що рівняння (11) має один розв'язок $\varphi = \varphi_2 = 2\pi - \dfrac{\pi}{\rho} + \dfrac{1}{\rho}\operatorname{arctg}\Delta_1$ на відрізку $[\pi, 2\pi]$, а також, що $I_2 = I_1$. Тому з (7) і (14) ми відразу одержуємо твердження *б* теореми 1.

в) Нехай тепер $\rho \in (3/2;2)$, а $\Delta \in (0;\cos\pi\rho]$. Тоді $\Delta_1 < 0$ і з (9) отримуємо, що рівняння (8) має два розв'язки на $[0;\pi]$

$$\varphi = \varphi_1 = \frac{1}{\rho}\operatorname{arctg}(-\Delta_1), \quad \varphi = \varphi_2 = \frac{\pi}{\rho} + \frac{1}{\rho}\operatorname{arctg}(-\Delta_1).$$

Отже,

$$\begin{aligned} I_1 &= -\left(\int\limits_0^{\varphi_1}\Delta\cos\rho\varphi d\varphi + \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\cos\rho(\varphi-\pi)d\varphi + \int\limits_{\varphi_2}^{\pi}\Delta\cos\rho\varphi d\varphi\right) = \\ &= -\frac{1}{\rho}\left(\Delta\sin\rho\varphi_1 + \sin\rho(\varphi_2-\pi) - \sin\rho(\varphi_1-\pi) + \Delta\sin\pi\rho - \Delta\sin\rho\varphi_1\right). \end{aligned}$$

Оскільки

$$\sin\rho\varphi_1 = \sin(\operatorname{arctg}(-\Delta_1)) = \frac{-\Delta_1}{\sqrt{1+\Delta_1^2}},$$

$$\sin\rho(\varphi_2-\pi) = \sin(\operatorname{arctg}(-\Delta_1) + \pi - \pi\rho) = \sin\pi\rho\frac{1}{\sqrt{1+\Delta_1^2}} + \cos\pi\rho\frac{\Delta_1}{\sqrt{1+\Delta_1^2}},$$

$$\sin\rho(\varphi_1-\pi) = \sin(\operatorname{arctg}(-\Delta_1) - \pi\rho) = -\cos\pi\rho\frac{\Delta_1}{\sqrt{1+\Delta_1^2}} - \sin\pi\rho\frac{1}{\sqrt{1+\Delta_1^2}},$$

$$\sin\rho\varphi_2 = \sin(\operatorname{arctg}(-\Delta_1) + \pi) = -\sin(\operatorname{arctg}(-\Delta_1)) = \frac{\Delta_1}{\sqrt{1+\Delta_1^2}},$$

то одержимо

$$I_1 = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{-\Delta\Delta_1}{\sqrt{1+\Delta_1^2}} + \sin\pi\rho\frac{1}{\sqrt{1+\Delta_1^2}} + \cos\pi\rho\frac{\Delta_1}{\sqrt{1+\Delta_1^2}} + \right.$$

$$\left. + \cos\pi\rho\frac{\Delta_1}{\sqrt{1+\Delta_1^2}} + \sin\pi\rho\frac{1}{\sqrt{1+\Delta_1^2}} + \Delta\sin\pi\rho - \frac{\Delta\Delta_1}{\sqrt{1+\Delta_1^2}}\right) =$$

$$= \frac{2}{\rho}\left(\frac{\Delta\Delta_1 - \Delta_1|\cos\pi\rho| + |\sin\pi\rho|}{\sqrt{1+\Delta_1^2}} + \frac{\Delta}{2}|\sin\pi\rho|\right), \tag{15}$$

бо $\cos\pi\rho > 0$, $\sin\pi\rho < 0$. Аналогічно, як вище, бачимо, що рівняння (11) має два розв'язки на $[\pi; 2\pi]$ (див. (12))

$$\varphi = \varphi_3 = 2\pi - \frac{\pi}{\rho} + \frac{1}{\rho}\operatorname{arctg}(-\Delta_1), \quad \varphi = \varphi_4 = 2\pi + \frac{1}{\rho}\operatorname{arctg}(-\Delta_1).$$

Неважко показати, що $I_2 = I_1$, і з (7) та (15) отримуємо твердження *в* теореми 1.
г) Якщо $\rho \in (3/2;\, 2)$, $\Delta = \cos\pi\rho$, то $\Delta_1 = 0$ і ми бачимо, що рівняння (8) та (11) мають по одному розв'язку на відрізках $[0;\pi]$ та $[\pi; 2\pi]$, а саме $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{\rho} \in [0;\pi]$ та $\varphi_2 = 2\pi - \dfrac{\pi}{\rho} \in [\pi; 2\pi]$. Тоді

$$I_1 = I_2 = -\int\limits_0^{\pi/\rho} \cos\rho(\varphi-\pi)d\varphi - \int\limits_{\pi/\rho}^{\pi} \cos\rho\varphi d\varphi = \frac{1}{\rho}\left(|\sin\pi\rho|\,(2+\cos\pi\rho)\right),$$

і ми відразу отримуємо твердження *г* теореми 1. □

Зауваження 2. Твердження *г* теореми 1 можна також отримати з твердження *в*, спрямувавши Δ до $\cos\pi\rho$ зліва.

Доведення теореми 2. Нехай f_1 – ціла функція порядку $\rho \in (1;2)$ з додатними нулями такими, що $n(r,0,f_1) \sim r^\rho$, $r \to \infty$. Тоді при $r \to \infty$ (див., наприклад, [1, с. 95])

$$T(r,f_1) \sim \begin{cases} \dfrac{1-\sin\pi\rho}{\rho|\sin\pi\rho|}r^\rho, & \rho \in (1;3/2]\,; \\ \dfrac{2}{\rho|\sin\pi\rho|}r^\rho, & \rho \in (3/2;2)\,. \end{cases} \tag{16}$$

Приймемо $f_2 = f_1/f_3$, де f_3 – ціла функція з від'ємними нулями, $n(r,0,f_3) \sim \Delta r^\rho$, $r \to \infty$, $0 < \Delta < \cos\pi\rho$, $3/2 < \rho < 2$. Завдяки твердженню *в* теореми 1

$$T(r,f_2) \sim \frac{2r^\rho}{\rho|\sin\pi\rho|}\left(\frac{\Delta\Delta_1 - \Delta_1|\cos\pi\rho| + |\sin\pi\rho|}{\sqrt{1+\Delta_1^2}} + \frac{\Delta}{2}|\sin\pi\rho|\right), \quad r \to \infty,$$

де $\Delta_1 = \dfrac{\cos\pi\rho - \Delta}{\sin\pi\rho}$. Тоді з твердження *б* леми 2 отримуємо, що для довільного $\rho \in \left(2 - \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg} 2;\ 2\right)$ існує $\Delta \in (0; \cos\pi\rho)$ таке, що $T(r,f_2) < \dfrac{2r^\rho}{\rho|\sin\pi\rho|}$, $r \ge r_0$. Звідси і з (16) отримуємо $T(r,f_1) > T(r,f_2)$, $r \ge r_0$, що доводить теорему 2. □

Зауваження 3. Наш метод побудови функцій f_1 та f_2 не дає змоги отримати аналог теореми 2 у випадку $1 < \rho \le 3/2$. Справді, завдяки твердженню *б* теореми 1 і формулі (16)

$$T(r,f_2) = (1+o(1))\frac{r^\rho}{\rho\,|\sin\pi\rho|}g_1(\Delta), \quad T(r,f_1) = (1+o(1))\frac{r^\rho}{\rho\,|\sin\pi\rho|}g_1(0), \quad r\to\infty.$$

Звідси, враховуючи твердження *а* леми 2, отримуємо, що $T(r,f_2) > T(r,f_1)$, $r \ge r_0$, де $r_0 > 0$ - деяке фіксоване число.

Доведення теореми 3. Нехай функції f_1, f_2 такі, як при доведенні теореми 2. У випадку $\Delta = 1$, тобто $f_3(z) = f_1(-z)$, за твердженням *а* теореми 1 одержимо

$$T(r,f_2) \sim \frac{2r^\rho}{\rho\,|\sin\pi\rho|}\left(\sin\frac{\pi\rho}{2} - \sin\pi\rho\right), \quad r\to\infty.$$

Враховуючи (16) та твердження *а* леми 3 для $\rho \in \left(\frac{\beta_0}{\pi};2\right)$, отримуємо, що $T(r,f_1) >$ $> T(r,f_2)$ для всіх достатньо великих r.

У випадку $\Delta = \cos\pi\rho$ завдяки твердженню *г* теореми 1

$$T(r,f_2) \sim \frac{r^\rho}{\rho\,|\sin\pi\rho|}\left(|\sin\pi\rho|\,(2+\cos\pi\rho)\right), \quad r\to\infty.$$

Тому завдяки (16) і твердженню *б* леми 3 для $\rho \in \left(\frac{\beta_0}{\pi};2\right)$ отримуємо, що $T(r,f_1) >$ $> T(r,f_2)$ при $r \ge r_0$. Теорема 3 доведена. $\square$

4. Висновок. Показано, що для функцій f_1, f_2 класу $M(+,-)$ довільного порядку $\rho \in \left(2 - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} 2; 2\right)$ не зберігається властивість монотонності стосовно нулів і полюсів їхніх неванліннових характеристик. Якщо порядок ρ таких функцій задовольняє умову $1 \le \rho \le 2 - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} 2$, то чи зберігається ця властивість з'ясувати не вдалось.

Список використаної літератури

1. *Гольдберг А.А.* Распределение значений мероморфных функций / *Гольдберг А.А., Островский И.В.* – М., 1970.
2. *Заболоцкий Н.В.* Некоторые соотношения для неванлинновских характеристик мероморфных функций нулевого рода / *Заболоцкий Н.В.* // Укр. мат. журн. – 1980. – Т. 33, № 6. – С. 805-810.
3. *Заболоцкий Н.В.* Некоторые соотношения для неванлинновских характеристик дельта-субгармонических функций порядка меньше 1 / *Заболоцкий Н.В.* // Теория функций, функц. анализ прилож. – 1983. – Вып. 39. – С. 49-56.
4. *Гольдберг А.А.* Про одну нерівність, зв'язану з функціями, опуклими відносно логарифма / *Гольдберг А.А.* // ДАН УРСР. – 1957. – № 3. – С. 227-230.
5. *Sheremeta M.* Some open problems in theory of functions of a complex variable / *Sheremeta M., Zabolotskyi M.* // Мат. студії. – 1994. – Вип. 3. – С. 117-119.

Стаття: надійшла до редакції 28.04.2011
прийнята до друку 21.09.2011

PROPERTY OF MONOTONICITY WITH RESPECT TO ZEROS AND POLES OF NEVANLINNA CHARACTERISTIC OF MEROMORPHIC FUNCTIONS

Mykola ZABOLOTSKYY, Ihor DEYNEKA

Ivan Franko National University of L'viv,
Universytetska Str., 1, L'viv, 79000
e-mail: ihordeyneka@gmail.com

Meromorphic in $\mathbb{C}$ functions f_1, f_2 with positive zeros and negative poles of an arbitrary order $\rho \in (2-\operatorname{arctg} 2/\pi;\ 2)$ were built, for which integrated counting functions and Nevanlinna characteristics satisfy the conditions $N(r,0,f_1) \le N(r,0,f_2)$, $N(r,\infty,f_1) \le N(r,\infty,f_2)$ for $r \ge 0$ and $T(r,f_1) > T(r,f_2)$ for all sufficiently large r. The method of construction does not allow to get the answer regarding the existence of such functions with order of growth $\rho \in [1; 2-\operatorname{arctg} 2/\pi]$.

Key words: meromorphic function, order of function, type of function, Nevanlinna characteristic.

СВОЙСТВО МОНОТОННОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО НУЛЕЙ И ПОЛЮСОВ НЕВАНЛИННОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Николай ЗАБОЛОЦКИЙ, Игорь ДЕЙНЕКА

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: ihordeyneka@gmail.com

Построено мероморфные в $\mathbb{C}$ функции f_1, f_2 произвольного порядка $\rho \in (2-\operatorname{arctg} 2/\pi;\ 2)$ с положительными нулями и отрицательными полюсами, усредненные считающие функции и неванлинновые характеристики которых удовлетворяют условия $N(r,0,f_1) \le N(r,0,f_2)$, $N(r,\infty,f_1) \le N(r,\infty,f_2)$ для $r \ge 0$ и $T(r,f_1) > T(r,f_2)$ для всех достаточно больших r. Метод построения не позволяет получить ответ о существовании таких функций порядка возростания $\rho \in [1; 2-\operatorname{arctg} 2/\pi]$.

Ключевые слова: мероморфная функция, порядок функции, тип функции, неванлинновая характеристика.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 74. С. 98–108
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 74. P. 98–108

УДК 517.956.4

ПАРАБОЛІЧНІ ПОЧАТКОВІ ЗАДАЧІ СОЛОННИКОВА-ЕЙДЕЛЬМАНА

Степан ІВАСИШЕН, Галина ІВАСЮК

Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут",
проспект Перемоги, 37, Київ, 03056
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
вул. Коцюбинського, 2, Чернівці, 58012
e-mail: ivasyshen_sd@mail.ru, gala_ivasiyk@mail.ru

Подано основні результати, одержані при дослідженні означених авторами параболічних початкових задач Солонникова-Ейдельмана. Вони стосуються коректної розв'язності цих задач у просторах Гельдера швидкозростаючих функцій, а також у відповідних просторах Соболєва-Слободецького для дещо вужчого класу таких задач.

Ключові слова: параболічна за Солонниковим система рівнянь, $\overrightarrow{2b}$-параболічна система, параболічна система в сенсі Солонникова-Ейдельмана, початкова задача, простір Гельдера швидкозростаючих функцій, простір Соболєва-Слободецького, коректна розв'язність.

Параболічні системи диференціальних рівнянь із частинними похідними, які ввів І.Г. Петровський [1], є досить широким класом систем, порівняно добре вивченим сьогодні. Дослідження таких систем відбувались у різних напрямах. Зокрема, в різноманітних функціональних просторах визначали коректну розв'язність крайових задач та задачі Коші для таких систем, узагальнювали означення параболічності системи за І.Г. Петровським.

У цій статті наведено результати, які вдалося отримати під час дослідження початкових задач для одного узагальненого класу параболічних систем, названого авторами системами Солонникова-Ейдельмана. Ці системи природно узагальнюють параболічні за Солонниковим системи [2, 3] (випадок узагальнення систем, параболічних за Петровським, коли порядок оператора, який діє на невідому функцію u_j у рівнянні з номером k, може залежати від j та від k) і системи, параболічні в розумінні Ейдельмана [4] (випадок узагальнення систем, параболічних за Петровським, коли диференціювання за різними просторовими змінними мають загалом різну вагу стосовно диференціювання за часовою змінною, тобто мають векторну параболічну вагу $\overrightarrow{2b} := (2b_1, \dots, 2b_n)$).

Початкові задачі для таких систем вивчають (див. [5 – 8]) у просторах Гельдера швидкозростаючих функцій, у цьому разі одержують нові результати про коректну розв'язність у цих просторах задачі Коші для загальних систем, параболічних у розумінні І.Г. Петровського, С.Д. Ейдельмана та В.О. Солонникова. За певних припущень щодо параметрів, які визначають порядки диференціальних виразів із рівнянь системи та початкових умов [9], доводиться теорема про коректну розв'язність початкових задач для параболічних систем Солонникова-Ейдельмана в просторах Соболєва-Слободецького.

1. Формулювання параболічної початкової задачі Солонникова-Ейдельмана (задачі ПСЕ). Нехай n, N, b_1, …, b_n – задані натуральні числа, b – найменше спільне кратне чисел b_1, …, b_n; $m := (m_1, \dots, m_n)$, $m_0 := 2b$, $m_j := b/b_j$, $j \in \{1, \dots, n\}$; $\|\overline{\alpha}\| := \sum\limits_{j=0}^{n} m_j\alpha_j$, якщо $\overline{\alpha} := (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^{n+1}$; $\|\alpha\| := \sum\limits_{j=1}^{n} m_j\alpha_j$, якщо $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$; i – уявна одиниця;

$$A(t, x, \partial_t, \partial_x) := (A_{kj}(t, x, \partial_t, \partial_x))_{k,j=1}^N;$$

$u := \mathrm{col}(u_1, \dots, u_N)$, $f := \mathrm{col}(f_1, \dots, f_N)$ – невідома та задана вектор-функції; $\Pi_H := \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|t \in H, x \in \mathbb{R}^n\}$, якщо $H \subset \mathbb{R}$; T – задане додатне число.

Припустимо, що існують такі числа s_k і t_j із $\mathbb{Z}$, що $\max\limits_{k\in\{1,\dots,N\}} s_k = 0$, степінь стосовно λ многочлена $A_{kj}(t, x, p\lambda^{m_0}, i\sigma\lambda^m)$, $\sigma\lambda^m := (\sigma_1\lambda^{m_1}, \dots, \sigma_n\lambda^{m_n})$, не перевищує s_k+t_j (якщо $s_k+t_j < 0$, то $A_{kj} := 0$) і $\sum\limits_{k=1}^{N}(s_k+t_k) = 2br$, де r – степінь $\det A(t, x, p, i\sigma)$ як многочлена від p.

Нехай $A^0 := (A^0_{kj})_{k,j=1}^N$ – головна частина A, тобто $A^0_{kj}(t, x, p\lambda^{m_0}, i\sigma\lambda^m) = \lambda^{s_k+t_j}A^0_{kj}(t, x, p, i\sigma)$.

Розглянемо систему рівнянь

$$A(t, x, \partial_t, \partial_x)u(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_{[0,T]}, \tag{1}$$

для якої виконується умова

A) Система (1) – рівномірно параболічна система Солонникова-Ейдельмана в $\Pi_{[0,T]}$, тобто існує така стала $\delta > 0$, що для будь-яких $(t, x) \in \Pi_{[0,T]}$ і $\sigma \in \mathbb{R}^n$ p-корені рівняння $\det A^0(t, x, p, i\sigma) = 0$ задовольняють нерівність

$$\mathrm{Re}\, p(t, x, \sigma) \leqslant -\delta \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^{2b_j}.$$

Частинними випадками таких систем є системи, рівномірно параболічні за Петровським ($m_k = 1$, $k \in \{1, \dots, n\}$, $s_j = 0$ і $t_j = 2bn_j$, $n_j \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, \dots, N\}$), рівномірно $\overrightarrow{2b}$-параболічні за Ейдельманом ($m_k > 1$ для принаймні одного $k \in \{1, \dots, n\}$, $s_j = 0$ і $t_j = 2bn_j$, $j \in \{1, \dots, N\}$) і рівномірно параболічні за Солонниковим однорідної структури ($m_k = 1$, $k \in \{1, \dots, n\}$).

Для системи (1), для якої виконується умова **A**, задавати початкові умови так, як для систем Петровського не можна. Задаватимемо їх так само, як для систем Солонникова з однорідною структурою [3] у вигляді

$$B(x, \partial_t, \partial_x)u(t, x)|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Тут $B(x,\partial_t,\partial_x) := (B_{kj}(x,\partial_t,\partial_x))_{k=1,j=1}^{r,\quad N}$ – матричний диференціальний вираз, $\varphi := \mathrm{col}(\varphi_1,\dots,\varphi_r)$ – задана вектор-функція. Припускається, що існують такі цілі числа p_k, що степінь стосовно λ многочлена $B_{kj}(x,p\lambda^{m_0},i\sigma\lambda^m)$ не перевищує p_k+t_j, якщо $p_k+t_j<0$, то $B_{kl}:=0$. Головною частиною виразу B називається вираз $B^0 := (B^0_{kj})_{k=1,j=1}^{r,\quad N}$, де $B^0_{kj}(x,p\lambda^{m_0},i\sigma\lambda^m) = \lambda^{p_k+t_j}B^0_{kj}(x,p,i\sigma)$. Для забезпечення коректності задачі з умовою (2) матричний вираз B повинен задовольняти умову доповняльності, рівномірним варіантом якої є така умова.

B) Існує така стала $\delta_1>0$, що для всіх матриць $H^{(\rho)}$ (їхнє означення дивись у [3, 6]) і точок $x\in\mathbb{R}^n$ справджується нерівність

$$|\det H^{(\rho)}(x)| \geqslant \delta_1.$$

Задачу (1), (2), для якої виконуються умови **A** і **B**, називаємо *параболічною початковою задачею Солонникова-Ейдельмана* або коротко *задачею ПСЕ*.

2. Коректна розв'язність задачі ПСЕ в просторах Гельдера зростаючих функцій. Наведемо означення потрібних просторів Гельдера обмежених і зростаючих функцій. Функції з цих просторів можуть зростати при $|x|\to\infty$ не швидше, ніж функція

$$\Psi(t,x) := \exp\Big\{\sum_{j=1}^n k_j(t,a_j)|x_j|^{q_j}\Big\}, \quad (t,x)\in\Pi_{[0,T]},$$

в якій $q_j := 2b_j/(2b_j-1)$, $k_j(t,a_j) := c_0a_j(c_0^{2b_j-1}-a_j^{2b_j-1}t)^{1-q_j}$, $j\in\{1,\dots,n\}$, де c_0, a_1, $\dots$, a_n – задані числа такі, що $0<c_0<c$ (c – стала з оцінок (12) із [10] для фундаментального розв'язку рівняння $\det A^0(\beta,y,\partial_t,\partial_x)u=0$), $a_j\geqslant 0$, $j\in\{1,\dots,n\}$, $T<\min\limits_j(c_0/a_j)^{2b_j-1}$.

Крім введених вище позначень, будемо використовувати ще такі:
$\overrightarrow{a} := (a_1,\dots,a_n)$, $\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a}) := (k_1(t,a_1),\dots,k_n(t,a_n))$;
$\Delta_t^\tau f(t,\cdot) := f(t,\cdot)-f(\tau,\cdot)$, $\Delta_{x_j}^{y_j} f(\cdot,x) := f(\cdot,x)-f(\cdot,x(y_j))$,
$x(y_j) := (x_1,\dots,x_{j-1},y_j,x_{j+1},\dots,x_n)$, $j\in\{1,\dots,n\}$;
$\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} := \partial_t^{\alpha_0}\partial_x^\alpha$, $\partial_x^\alpha := \partial_{x_1}^{\alpha_1}\dots\partial_{x_n}^{\alpha_n}$, $\overline{\alpha} := (\alpha_0,\alpha)\in\mathbb{Z}_+^{n+1}$, $\alpha := (\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}_+^n$.

Нехай l і λ – задані числа відповідно з множин $\mathbb{Z}_+$ і $(0,1)$. Будемо користуватися такими просторами:

$H_{l+\lambda,[0,T]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}$ – простір функцій u: $\Pi_{[0,T]}\to\mathbb{C}$, які мають неперервні похідні $\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}}u$, $\|\overline{\alpha}\|\leqslant l$, і скінченну норму

$$\|u\|_{l+\lambda,[0,T]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})} := \ll u\gg_{l+\lambda,[0,T]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})} + \sum_{j=0}^l <u>_{j,[0,T]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})},$$

де

$$\ll u\gg_{l+\lambda,[0,T]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})} := \sum_{j=1}^n <u>_{(l+\lambda)/m_j,x_j,[0,T]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})} + <u>_{(l+\lambda)/(2b),t,[0,T]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})},$$

$$<u>_{(l+\lambda)/m_j,x_j,[0,T]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})} := \sum_{0\leqslant l-\|\overline{\alpha}\|<m_j} <\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}}u>_{(l-\|\overline{\alpha}\|+\lambda)/m_j,\,x_j,[0,T]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})},$$

$$<u>^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{(l+\lambda)/(2b),t,[0,T]} := \sum_{0\leqslant l-\|\overline{\alpha}\|<2b} <\partial^{\overline{\alpha}}_{t,x} u>^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{(l-\|\overline{\alpha}\|+\lambda)/(2b),t,[0,T]},$$

$$<u>^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{\lambda,x_j,[0,T]} := \sup_{\substack{(t,x)\in\Pi_{[0,T]}\\ y_j\in\mathbb{R},\, x_j\neq y_j}} (|\Delta^{y_j}_{x_j} u(t,x)||x_j-y_j|^{-\lambda}(\Psi(t,x)+\Psi(t,x(y_j)))^{-1}),$$

$$<u>^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{\lambda,t,[0,T]} := \sup_{\substack{\{t,\beta\}\subset[0,T],\, t\neq\beta\\ x\in\mathbb{R}^n}} (|\Delta^{\beta}_{t} u(t,x)|\,|t-\beta|^{-\lambda}(\Psi(t,x)+\Psi(\beta,x))^{-1}),$$

$$<u>^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{j,[0,T]} := \sum_{\|\overline{\alpha}\|=j} \sup_{(t,x)\in\Pi_{[0,T]}} (|\partial^{\overline{\alpha}}_{t,x} u(t,x)|(\Psi(t,x))^{-1});$$

$C^{\overrightarrow{a}}_{l+\lambda}$ – простір функцій v: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, для яких існують неперервні похідні $\partial^{\alpha}_x v$, $\|\alpha\| \leqslant l$, і є скінченною норма

$$|v|^{\overrightarrow{a}}_{l+\lambda} := [v]^{\overrightarrow{a}}_{l+\lambda} + \sum_{j=0}^{l} <v>^{\overrightarrow{a}}_{j},$$

де

$$[v]^{\overrightarrow{a}}_{l+\lambda} := \sum_{j=1}^{n} \sum_{0\leqslant l-\|\alpha\|<m_j} <\partial^{\alpha}_x v>^{\overrightarrow{a}}_{(l-\|\alpha\|+\lambda)/m_j,\, x_j},$$

$$<v>^{\overrightarrow{a}}_{\lambda,x_j} := \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ y_j\in\mathbb{R},\, x_j\neq y_j}} (|\Delta^{y_j}_{x_j} v(x)||x_j-y_j|^{-\lambda}(\Psi(0,x)+\Psi(0,x(y_j)))^{-1}),$$

$$<v>^{\overrightarrow{a}}_{j} := \sum_{\|\alpha\|=j} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (|\partial^{\alpha}_x v(x)|(\Psi(0,x))^{-1});$$

$H_{l+\lambda,[0,T]} := H^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{0})}_{l+\lambda,[0,T]}$, $C_{l+\lambda} := C^{\overrightarrow{0}}_{l+\lambda}$, де $\overrightarrow{0} := (0,\ldots,0)$;

$\overset{\circ}{H}{}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda,[0,T]}$ – підпростір простору $H^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda,[0,T]}$, елементи якого разом з усіма своїми похідними дорівнюють нулеві при $t=0$;

$\prod\limits_{j=1}^{N} H^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{r_j+\lambda,[0,T]}$, $\prod\limits_{j=1}^{N} \overset{\circ}{H}{}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{r_j+\lambda,[0,T]}$ і $\prod\limits_{j=1}^{r} C^{\overrightarrow{a}}_{r_j+\lambda}$ – декартові добутки відповідних просторів з індексами $r_j \in \mathbb{Z}_+$.

Крім умов **A** і **B**, припускатимемо виконаною також таку умову.

C) Коефіцієнти диференціальних виразів A_{kj} і B_{sj} належать відповідно до просторів $H_{l-s_k+\lambda,[0,T]}$ і $C_{l-p_s+\lambda}$, $\{k,j\} \subset \{1,\ldots,N\}$, $s \in \{1,\ldots,r\}$.

Теорема 1. *Нехай l і λ – задані числа з множин $\mathbb{Z}_+$ і $(0,1)$. Якщо виконуються умови **A**, **B** та **C**, то для будь-яких $f \in \prod\limits_{j=1}^{N} H^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l-s_j+\lambda,[0,T]}$ і $\varphi \in \prod\limits_{s=1}^{r} C^{\overrightarrow{a}}_{l-p_s+\lambda}$ існує єдиний розв'язок $u \in \prod\limits_{j=1}^{N} H^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+t_j+\lambda,[0,T]}$ задачі (1), (2), для якого справджується оцінка*

$$\sum_{j=1}^{N} \|u_j\|^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+t_j+\lambda,[0,T]} \leqslant C \left(\sum_{j=1}^{N} \|f_j\|^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l-s_j+\lambda,[0,T]} + \sum_{s=1}^{r} |\varphi_s|^{\overrightarrow{a}}_{l-p_s+\lambda} \right), \qquad (3)$$

в якій стала C залежить тільки від відповідних норм коефіцієнтів задачі, сталих δ і δ_1 з умов ***A*** *і* ***B*** *та чисел n, N, b_j, t_k, s_k, p_s, l, λ і T.*

З теореми 1 випливає, що умова параболічності системи (1) достатня, щоб справджувалась оцінка (3) для будь-якого розв'язку $u \in \prod_{j=1}^{N} H^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+t_j+\lambda,[0,T]}$ задачі (1), (2). Виявляється, що ця умова є необхідною, тому правильна така теорема.

Теорема 2. *Нехай система (1) має структуру параболічної системи Солонникова-Ейдельмана з параметрами b_j, t_k, s_k, p_s і r, число початкових умов (2) дорівнює r і диференціальний вираз $B(x,\partial_t,\partial_x)$ задовольняє умову* ***B****, коефіцієнти диференціальних виразів A і B задовольняють умову* ***C*** *з деякими числами $l \in \mathbb{Z}_+$ і $\lambda \in (0,1)$. Для того, щоб система (1) задовольняла умову* ***A****, необхідно й достатньо, щоб існувала така стала $C > 0$, що для всіх вектор-функцій $u \in \prod_{j=1}^{N} H^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+t_j+\lambda,[0,T]}$ справджується нерівність*

$$\sum_{j=1}^{N} \|u_j\|^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+t_j+\lambda,[0,T]} \leqslant C\Big(\sum_{k,j=1}^{N} \|A_{kj}u_j\|^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l-s_k+\lambda,[0,T]} + \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{N} |B_{kj}u_j|_{t=0}|^{\overrightarrow{a}}_{l-p_k+\lambda}\Big).$$

Доведення теореми 1 у модельному випадку, тобто, коли диференціальні вирази системи (1) та початкових умов (2) містять лише групу старших членів зі сталими коефіцієнтами, детально описано в [6]. У загальному випадку доведення цієї теореми проводять за схемою доведення відповідної теореми для крайових задач для параболічних за Солонниковим систем з [3]. Головні її кроки – зведення загальної параболічної початкової задачі Солонникова-Ейдельмана до задачі з нульовими початковими даними, у цьому разі доводиться рівносильність відповідних оцінок розв'язків цих задач і доведення коректної розв'язності такої параболічної початкової задачі Солонникова-Ейдельмана з нульовими початковими даними в шарі $\Pi_{[t_0,t_0+\tau]}$, $0 \leqslant t_0 < t_0+\tau \leqslant T$, малої товщини τ

$$A(t,x,\partial_t,\partial_x)w(t,x) = g(t,x), \quad (t,x)\in\Pi_{[t_0,t_0+\tau]}, \quad w \in \prod_{j=1}^{N} \overset{\circ}{H}{}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+t_j+\lambda,[t_0,t_0+\tau]},$$

$$g \in \prod_{j=1}^{N} \overset{\circ}{H}{}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l-s_j+\lambda,[t_0,t_0+\tau]}. \tag{4}$$

Доведення однозначної розв'язності задачі (4) та відповідних оцінок для її розв'язків ґрунтується на побудові та детальному дослідженні властивостей регуляризатора цієї задачі. Регуляризатор будують за допомогою операторів, які розв'язують відповідні модельні задачі. Модельні задачі виражаються через потенціали, породжені фундаментальним розв'язком одного параболічного за Ейдельманом рівняння довільного порядку зі сталими коефіцієнтами. Оцінки таких потенціалів проведено в [10].

Теорема 2 доведена у [8] методом від супротивного.

3. Коректна розв'язність задачі ПСЕ в просторах Соболєва-Слободецького. Розглянемо задачу (1), (2), для якої виконується умова:

A′) система (1) задовольняє умову **A** причому числа s_k і t_j є кратними $2b$, тобто $s_k = 2bs'_k$, $t_j = 2bt'_j$, $\{k, j\} \subset \{1, \ldots, N\}$, де s'_k і t'_j – цілі числа;

B′) диференціальний вираз B з початкової умови (2) задовольняє умову **B** і $p_k = 2bp'_k$, $k \in \{1, \ldots, r\}$, де p'_k – цілі числа.

Наведемо означення потрібних функціональних просторів. Нехай l – невід'ємне ціле число кратне $2b$, s – додатне число, число $p > 1$ і $\Pi_T := \Pi_{[0,T]}$.

Через $W^l_p(\Pi_T)$ позначимо замикання множини гладких і фінітних за x функцій $u : \Pi_T \to \mathbb{C}$ за нормою

$$\| u \|^{\Pi_T}_{p,\, l} := \sum_{\|\overline{\alpha}\| < l} \langle \partial^{\overline{\alpha}}_{t,x} u \rangle^{\Pi_T}_{p,\, 0} + | u |^{\Pi_T}_{p,\, l},$$

де

$$| u |^{\Pi_T}_{p,\, l} := \sum_{\|\overline{\alpha}\| = l} \langle \partial^{\overline{\alpha}}_{t,x} u \rangle^{\Pi_T}_{p,\, 0}, \quad \langle u \rangle^{\Pi_T}_{p,\, 0} := \left(\int\limits_{\Pi_T} | u(t,x) |^p dt dx \right)^{1/p}.$$

Диференціальні властивості "слідів" при $t = \tau$ функцій із простору $W^l_p(\Pi_T)$ описуються в термінах простору $B^s_p(\mathbb{R}^n)$, який означується як замикання множини гладких і фінітних функцій $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ за нормою

$$\| v \|^{\mathbb{R}^n}_{p,\, s} := \sum_{\|\alpha\| < s} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} | \partial^{\alpha}_x v(x) |^p dt dx \right)^{1/p} + [\, v \,]^{\mathbb{R}^n}_{p,\, s},$$

де

$$[\, v \,]^{\mathbb{R}^n}_{p,\, s} := \sum_{j=1}^{n} \sum_{0 \leqslant s - \|\alpha\| < m_j} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} dx \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{| \Delta^{y_j}_{x_j} \partial^{\alpha}_x v(x) |^p}{|x_j - y_j|^{1 + p(s - \|\alpha\|)/m_j}} dy_j \right)^{1/p},$$

якщо s – дробове число, і

$$[\, v \,]^{\mathbb{R}^n}_{p,\, s} := \sum_{j=1}^{n} \sum_{\|\alpha\| = s-1} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} dx \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{| (\Delta^2)^{y_j}_{x_j} \partial^{\alpha}_x v(x) |^p}{|x_j - y_j|^{1+p}} dy_j \right)^{1/p},$$

якщо s є цілим числом. Тут $(\Delta^2)^{y_j}_{x_j} f(x) := f(x) - 2f(x(\frac{x_j + y_j}{2})) + f(x(y_j))$, $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Множину елементів $u \in W^l_p(\Pi_T)$, які задовольняють нульові початкові умови

$$\partial^j_t u|_{t=0} = 0, \quad j \in \left\{ 0, 1, \ldots, \frac{l}{2b} - 1 \right\},$$

назвемо простором $\overset{\circ}{W}{}^{l}_{p}(\Pi_T)$.

Через $\prod\limits_{j=1}^{N} W^{\,l_j}_{\,p}(\Pi_T)$, $\prod\limits_{j=1}^{N} \overset{\circ}{W}{}^{l_j}_{p}(\Pi_T)$ і $\prod\limits_{j=1}^{r} B^{\,r_j}_{\,p}(\mathbb{R}^n)$ позначаємо декартові добутки відповідних просторів з цілими невід'ємними індексами l_j, кратними $2b$, і додатними індексами r_j.

Для дробового додатного числа s користуватимемось просторами Гельдера обмежених функцій $C_s(\mathbb{R}^n)$, які означені в пункті 2.

Теорема 3. *Нехай l – невід'ємне ціле число, кратне $2b$; виконуються умови $\mathbf{A}'$ і $\mathbf{B}'$; коефіцієнти диференціальних виразів A_{kj}, $\{k,j\} \subset \{1,\ldots,N\}$, мають неперервні та обмежені похідні узагальненого порядку $l - s_k$, а коефіцієнти диференціальних виразів B_{kj}, $k \in \{1,\ldots,r\}$, $j \in \{1,\ldots,N\}$, належать до просторів $C_{l-p_k-2b/p+\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$, де ε – досить мале додатне число. Тоді для будь-яких $f \in \prod_{j=1}^{N} W_p^{l-s_j}(\Pi_T)$ і $\varphi \in \prod_{j=1}^{r} B_p^{l-p_j-2b/p}(\mathbb{R}^n)$ існує единий розв'язок $u \in \prod_{j=1}^{N} W_p^{l+t_j}(\Pi_T)$ задачі (1), (2), для якого справджується оцінка*

$$\sum_{j=1}^{N} \|u_j\|_{p,\, l+t_j}^{\Pi_T} \leqslant C \left(\sum_{j=1}^{N} \|f_j\|_{p,\, l-s_j}^{\Pi_T} + \sum_{j=1}^{r} \|\varphi_j\|_{p,\, l-p_j-2b/p}^{\mathbb{R}^n} \right),$$

в якій стала C залежить тільки від відповідних норм коефіцієнтів задачі, сталих δ і δ_1 з умов $\mathbf{A}'$ і $\mathbf{B}'$ та чисел n, N, b_j, t_j, s_k, p_k, l і T.

Доведення теореми 3 проводять за схемою доведення в [3] відповідної теореми для крайових задач для параболічних за Солонниковим систем і доведення теореми 1 (див. [8]). Центральним моментом доведення є вивчення такої задачі з нульовими початковими даними в шарі Π_τ малої товщини $\tau > 0$

$$A(t,x,\partial_t,\partial_x)v(t,x) = g(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_\tau,$$

$$v \in \prod_{j=1}^{N} \overset{\circ}{W}{}_p^{l+t_j}(\Pi_\tau), \qquad g \in \prod_{j=1}^{N} \overset{\circ}{W}{}_p^{l-s_j}(\Pi_\tau). \tag{5}$$

Для цієї задачі доводиться така теорема.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови теореми 3. Тоді існує таке число $\tau_0 > 0$, що для будь-якого $\tau \in (0,\tau_0]$ задача (5) однозначно розв'язна і для її розв'язку справджується нерівність*

$$\sum_{j=1}^{N} \|v_j\|_{p,\, l+t_j}^{\Pi_\tau} \leqslant C \sum_{j=1}^{N} \|g_j\|_{p,\, l-s_j}^{\Pi_\tau},$$

в якій стала C залишається обмеженою при $\tau \to 0$.

Як і в пункті 2, для доведення теореми 4 використовується регуляризатор задачі. Його властивості в просторах Соболєва-Слободецького досліджуються за допомогою оцінок відповідних півнорм потенціалів, породжених фундаментальним розв'язком модельного $\overrightarrow{2b}$-параболічного рівняння довільного порядку. Ці оцінки подаємо в наступному пункті.

4. Властивості потенціалів модельного $\overrightarrow{2b}$-параболічного рівняння. Розглянемо $\overrightarrow{2b}$-параболічне рівняння вигляду

$$L(\partial_t,\partial_x)u := \Big(a_0 \partial_t^r + \sum_{\substack{\|\overline{\alpha}\|=2br \\ (\alpha_0<r)}} a_{\overline{\alpha}} \partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} \Big) u = 0, \tag{6}$$

коефіцієнти якого є сталими, причому $a_0 \neq 0$ та існує така стала $\delta > 0$, що для будь-яких $\sigma := (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^n$ λ-корені λ_j, $j \in \{1, \dots, r\}$, рівняння $L(\lambda, i\sigma) = 0$ задовольняють умову

$$\mathrm{Re}\lambda_j \leqslant -\delta \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^{2b_k}.$$

Нехай функція $\Gamma(t,x)$, $(t,x) \neq (0,0)$, є фундаментальним розв'язком рівняння (6). Ця функція породжує об'ємний потенціал

$$U_f(t,x) := \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t-\tau, x-\xi) f(\tau,\xi) d\xi, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{7}$$

та інтеграл Пуассона

$$V_\varphi(t,x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t, x-\xi)\varphi(\xi) d\xi, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{8}$$

Одержимо оцінки півнорм $|\cdot|_{p,\,l}^{\Pi_T}$ інтегралів (7) і (8), припускаючи, що функції f і φ досить гладкі і фінітні. У цьому разі користуватимемося такими властивостями фундаментального розв'язку Γ, які доводять так само, як у [3, 11, 12] для параболічних за Петровським рівнянь довільного порядку і $\overrightarrow{2b}$-параболічних рівнянь першого порядку:

1) справджуються оцінки

$$|\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}}\Gamma(t,x)| \leqslant C'_{\overline{\alpha}} t^{r-(M+\|\overline{\alpha}\|)/(2b)} \exp\{-c\sum_{j=1}^{n} t^{1-q_j}|x_j|^{q_j}\} \leqslant$$

$$\leqslant C_{\overline{\alpha}} \left(t + \sum_{j=1}^{n} |x_j|^{2b_j}\right)^{r-(M+\|\overline{\alpha}\|)/(2b)}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \overline{\alpha} \in \mathbb{Z}_+^{n+1},$$

де $M := \sum\limits_{j=0}^{n} m_j$, $C'_{\overline{\alpha}}$, $C_{\overline{\alpha}}$ і c – додатні сталі;

2) функція $\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}}\Gamma(t,x)$ – парна за змінною x_j, якщо парним є індекс α_j;

3) правильні рівності

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t,x)dx = \frac{t^{r-1}}{a_0(r-1)!}, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t^{r-1}\Gamma(t,x)dx = \frac{1}{a_0}, \quad t > 0.$$

Лема 1. *Для будь-якого $l = 2bk$, $k \in \mathbb{Z}_+$, справджується оцінка*

$$|U_f|_{p,\,l+2br}^{\Pi_T} \leqslant C|f|_{p,\,l}^{\Pi_T}. \tag{9}$$

Доведення. Оскільки $\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} U_f = U_{\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} f}$, то оцінку (9) достатньо довести для $l = 0$. У цьому випадку доведення оцінки (9) проводиться аналогічно до доведення відповідної оцінки для рівняння теплопровідності в [13], яке ґрунтується на теоремі про мультиплікатори в інтегралах Фур'є з [14]. У цьому випадку використовують такі рівності для перетворення Фур'є F за всіма змінними t і x інтеграла (7):

$$F[U_f](\xi_0, \xi) := (2\pi)^{-(n+1)/2} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \exp\{-i\xi_0 t - i(\xi, x)\} U_f(t,x) dt dx =$$

$$= \frac{(2\pi)^{(n+1)/2}}{L(i\xi_0, i\xi)} F[f](\xi_0, \xi),$$

$$F[\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} U_f](\xi_0, \xi) := \frac{(2\pi)^{(n+1)/2}(i\xi_0)^{\alpha_0}(i\xi)^{\alpha}}{L(i\xi_0, i\xi)} F[f](\xi_0, \xi), \quad (\xi_0, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad \|\overline{\alpha}\| = 2br.$$

Для мультиплікаторів $\Lambda^{(\overline{\alpha})}(\xi_0, \xi) := \frac{(2\pi)^{(n+1)/2}(i\xi_0)^{\alpha_0}(i\xi)^{\alpha}}{L(i\xi_0, i\xi)}$, $(\xi_0, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}$, очевидно, виконуються потрібні нерівності

$$|\xi_{j_1} \ldots \xi_{j_k} \partial_{\xi_{j_1}} \ldots \partial_{\xi_{j_k}} \Lambda^{(\overline{\alpha})}(\xi_0, \xi)| \leqslant C, \quad (\xi_0, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1},$$
$$j_k \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad k \in \{0, 1, \ldots, n+1\}, \quad \|\overline{\alpha}\| = 2br.$$

□

Лема 2. *Якщо $l = 2bk$, $k \in \mathbb{Z}_+$ і $l > 2b(r-1) + 2b/p$, то правильною є оцінка*

$$|V_\varphi|_{p,\,l}^{\Pi_T} \leqslant C[\varphi]_{p,\,l-2b(r-1)-2b/p}^{\mathbb{R}^n}.$$

Доведення. Воно досить громіздке і проводиться аналогічно до доведення теореми 3.3 в [3]. Для доведення істотно використовують теорему про оцінки інтегральних операторів у трансляційно-інваріантних нормах з [15], а також наведені вище властивості фундаментального розв'язку Γ рівняння (6). □

Список використаної літератури

1. *Петровский И.Г.* О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций / *Петровский И.Г.* // Бюл. Моск. ун-та. Математика и механика. – 1938. – Т. 1, № 7. – С. 1-72.
2. *Солонников В.А.* О краевых задачах для общих параболических систем / *Солонников В.А.* // Докл. АН СССР. – 1964. – Т. 157, № 1. – С. 56-59.
3. *Солонников В.А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида / *Солонников В.А.* // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1965. – Т. 83. – С. 3-163.
4. *Эйдельман С.Д.* Об одном классе параболических систем / *Эйдельман С.Д.* // Докл. АН СССР. – 1960. – Т. 133, № 1. – С. 40-43.
5. *Івасюк Г.П.* Початкова задача для модельних параболічних за Солонниковим систем неоднорідної структури / *Івасюк Г.П.* // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. – 2005. – Вип. 269. – С. 49-52.
6. *Івасишен С.Д.* Параболічні за Солонниковим системи квазіоднорідної структури / *Івасишен С.Д., Івасюк Г.П.* // Укр. мат. журн. – 2006. – Т. 58, № 11. – С. 1501-1510.
7. *Івасишен С.Д.* Початкові задачі для параболічних систем Солонникова-Ейдельмана / *Івасишен С.Д., Івасюк Г.П.* // Доп. НАН України. – 2007. – № 9. – С. 7-11.
8. *Івасишен С.Д.* Коректна розв'язність параболічних початкових задач Солонникова-Ейдельмана / *Івасишен С.Д., Івасюк Г.П.* // Укр. мат. журн. – 2009. – Т. 61, № 5. – С. 650-671.
9. *Івасишен С.Д.* Про коректну розв'язність параболічних початкових задач Солонникова-Ейдельмана в узагальнених просторах Соболєва / *Івасишен С.Д., Івасюк Г.П.* // Доп. НАН України. – 2010. – № 10. – С. 11-14.
10. *Івасюк Г.П.* Про властивості потенціалів модельного $\overrightarrow{2b}$-параболічного рівняння довільного порядку / *Івасюк Г.П.* // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. – 2006. – Вип. 288. – С. 51-56.

11. *Ивасишен С.Д.* $\overrightarrow{2b}$-параболические системы / *Ивасишен С.Д., Эйдельман С.Д.* // Тр. сем. по функц. анализу. – 1968. – Вып. 1. – С. 3-175, 271-273.
12. *Eidelman S.D.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type / *Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N.* // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2004. – Vol. 152. – P. 390.
13. *Солонников В.А.* Априорные оценки для уравнений второго порядка параболического типа / *Солонников В.А.* // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1964. – Т. 70. – С. 133-212.
14. *Михлин С.Г.* Интегралы Фурье и кратные сингулярные интегралы / *Михлин С.Г.* // Вестн. Ленинградского гос. ун-та. – 1957. – № 7, Вып. 2. – С. 143-155.
15. *Головкин К.К.* Оценки интегральных операторов в трансляционно-инвариантных нормах / *Головкин К.К., Солонников В.А.* // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1964. – Т. 70. – С. 47-58.

Стаття: надійшла до редакції 08.02.2011
прийнята до друку 21.09.2011

PARABOLIC INITIAL PROBLEMS OF SOLONNIKOV-EIDELMAN

Stepan IVASYSHEN, Halyna IVASYUK

National Technical University of Ukraine
"Kyiv Polytechnic Institute",
Prospect Peremohy, 37, Kyiv, 03056
Yuriy Fedkovych National University of Chernivtsi
Kotsubinsky Str., 2, Chernivtsi, 58012
e-mail: ivasyshen_sd@mail.ru, gala_ivasiyk@mail.ru

Solonnikov-Eidelman's parabolic initial problems were defined and studied by the authors in the previous papers. The present paper contain the basic results of an investigation for such problems. These results deals with a correct solvability of Solonnikov-Eidelman's parabolic initial problems in Hölder spaces rapidly growing functions and the analogous results for more narrow class of such problems in the corresponding Sobolev-Slobodeckij spaces also are presented.

Key words: parabolic on Solonnikov system equations, 2b-parabolic system, parabolic system in sense of Solonnikov-Eidelman's, initial problem, Hölder space of increasing functions, Sobolev-Slobodeckij space, correct resolvability.

ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ НАЧАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ СОЛОННИКОВА-ЕЙДЕЛЬМАНА

Степан ИВАСИШЕН, Галина ИВАСЮК

Национальный технический университет Украины
"Киевский политехнический институт",
проспект Победы, 37, Киев, 03056
Черновицкий национальный университет имени Юрия Федьковича,
ул. Коцюбинского, 2, Черновцы, 58012
e-mail: ivasyshen_sd@mail.ru, gala_ivasiyk@mail.ru

Приведены основные результаты, полученные при исследовании определенных авторами параболических начальных задач Солонникова-Ейдельмана. Они касаются корректной разрешимости задач в пространствах Гёльдера быстровозростающих функций, а также в соответствующих пространствах Соболева-Слободецкого для более узкого класса таких задач.

Ключевые слова: параболическая за Солонниковым система уравнений, $\overrightarrow{2b}$-параболическая система, параболическая система в смысле Солонникова-Ейдельмана, начальная задача, пространство Гельдера быстровозростающих функций, пространство Соболева-Слободецкого, корректная разрешимость.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 74. С. 109–121
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 74. P. 109–121

УДК 517.9

БІГАМІЛЬТОНОВІСТЬ І ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ ТИПУ БЮРГЕРСА

Аркадій КІНДИБАЛЮК, Микола ПРИТУЛА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: a.kindybaluk@mail.ru

Вивчено, за яких значень коефіцієнтів нелінійна динамічна система типу Бюргерса має нескінченну ієрархію законів збереження, та має пару імплектичних операторів. На підставі модифікованого методу гіперболічних тангенс функцій одержано точні солітонні розв'язки системи, що розглядається.

Ключові слова: нелінійна динамічна система, закони збереження, імплектичні оператори, метод гіперболічних тангенс функцій.

1. Вступ. Шістдесяті роки XX ст. сприяли вивченню нелінійних динамічних систем. Для того, щоб моделювати складні процеси, були розроблені методи дослідження інтегровності динамічних систем на основі досягнень у нових галузях математичної та теоретичної фізики. Паралельно розробляли прямі методи знаходження точних розв'язків: метод гіперболічних тангенс функцій, білінійний метод Хіроти, перетворення Беклунда та їхні модифікації. У працях [1-3] викладено методи знаходження законів збереження, імплектичних операторів та оператора Лакса. У [4] описаний алгоритм гіперболічних тангенс функцій, а у [5] запропоновано метод знаходження розв'язків нелінійних динамічних систем у вигляді полінома від гіперболічного тангенса та котангенса.

Нехай на l-періодичному гладкому нескінченновимірному многовиді задана нелінійна динамічна система

$$u_t = K[u], \tag{1}$$

де $K : M \to T(M)$ – гладке за Фреше функціонально-поліноміальне векторне поле на M [1,2]. Для того, щоб дати відповідь на питання, чи інтегровна задана динамічна система, треба передусім з'ясувати наявність нескінченної ієрархії нетривіальних законів збереження, імплектичних операторів та оператора Лакса.

Наведемо найважливіші означення з [1,2].

Означення 1. *Функціонал*

$$\gamma[u] = \int\limits_{x_0}^{x_0+l} \sigma[u]\, d\, x \in D(M)$$

називають законом збереження для системи (1), якщо він є незмінним вздовж орбіт векторного поля, тобто

$$\left.\frac{d\gamma[u]}{d\, t}\right|_{K[u]} \equiv 0, \tag{2}$$

де $u \in M$, $\sigma(u)$ – локальний функціонал, $D(M)$ – простір гладких за Фреше функціоналів на M.

Введемо білінійну форму на області $U = \{x \in R: \ x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + l\}$

$$(a, b) = \int\limits_U < a, b > \, d\, x, \tag{3}$$

де $a, b \in C_0^\infty(U, R^n)$, яка визначає структуру простору Гільберта на дотичному просторі $T(M) \cong T^*(M)$.

Означення 2. *Градієнтом закону збереження $\gamma[u] \in D(M)$ називають величину*

$$\operatorname{grad} \gamma[u] = \frac{\delta\gamma[u]}{\delta\, u},$$

причому

$$\operatorname{grad} \gamma[u] = ((\sigma[u])')^* \tag{4}$$

*де зірочка " * " означає спряження стосовно стандартної білінійної форми (3).*

Означення 3. *Динамічна система (1) бігамільтонова, якщо її можна подати у вигляді*

$$u_t = -\vartheta \operatorname{grad} H_\vartheta = -\eta \operatorname{grad} H_\eta = K[u], \tag{5}$$

де $H_\vartheta, H_\eta \in D(M)$ – функціонали Гамільтона, а $\vartheta, \eta : T^*(M) \to T(M)$ – пара імплектичних операторів.

Диференціально-алгебричний алгоритм побудови імплектичних операторів описаний в [1]. Якщо закон збереження $\int_{x_0}^{x_0+l} \tilde{\sigma}[u]\, dx$ можемо подати у вигляді $\int_{x_0}^{x_0+l} < \sigma[u], u_x > dx$, то функціонал $\sigma[u]$ використовуємо для побудови симплектичного оператора $\theta^{-1} = \sigma' - \sigma'^*$. Якщо для оператора θ^{-1} існує обернений оператор, то отримаємо імплектичний оператор θ. Якщо система (1) двокомпонентна, то закон збереження $\int_{x_0}^{x_0+l} \tilde{\sigma}[u, v]\, dx$ потрібно подати у такому вигляді:

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+l} (< \sigma_1[u, v], u_x > + < \sigma_2[u, v], v_x >)\, dx. \tag{6}$$

Оператор σ' набув вигляду

$$\sigma' = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\sigma_1}{\partial u} & \dfrac{\partial\sigma_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\sigma_2}{\partial u} & \dfrac{\partial\sigma_2}{\partial v} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

2. Формулювання задачі. Нехай на нескінченновимірному l-періодичному многовиді M задана динамічна система типу Бюргерса

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = k_1 u_{xx} + k_2 u u_x + k_3 v_x \\ v_t = k_4 \left(uv\right)_x + k_5 v_{xx} \end{array} \right\} = K[u,v], \tag{8}$$

де $K : M \to T(M)$ – гладке за Фреше функціонально поліноміальне векторне поле на многовиді M; а k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 – дійсні числові параметри; t – параметр еволюції системи (8). Треба знайти, за яких значень параметрів k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 система (8) має нескінченну ієрархію нетривіальних законів збереження та володіє парою імплектичних операторів.

Зауважимо, що система

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = u_{xx} + u u_x + v_x, \\ v_t = \left(uv\right)_x - v_{xx}, \end{array} \right.$$

тобто система (8) при значеннях коефіцієнтів $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1$, $k_5 = -1$ досліджена в [3], а система

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = \alpha u_{xx} + u u_x + v_x, \\ v_t = \left(uv\right)_x - \alpha v_{xx}, \end{array} \right.$$

тобто система (8) при значеннях коефіцієнтів $k_1 = \alpha, k_2 = k_3 = k_4 = 1$, $k_5 = -\alpha$, досліджена в [1].

3. Закони збереження. Вивчимо питання про наявність нескінченної ієрархії законів збереження для динамічної системи (8) на гладкому l-періодичному многовиді M. З цією метою розглянемо асимптотичні розв'язки рівняння Лакса

$$\frac{d\varphi}{dt} + K'^{*}\varphi = 0, \tag{9}$$

де $\varphi \in T^*(M)$, " $'$ " – означає похідну Фреше нелінійного локального функціонала, а зірочка " $*$ " – спряження стосовно стандартної білінійної форми (3). Оскільки оператор $K'^{*} : T^*(M) \to T^*(M)$ має такий вигляд:

$$K'^{*} = \begin{pmatrix} k_1\partial^2 - k_2 u\partial & -k_4 v\partial \\ -k_3\partial & -k_4 u\partial + k_5\partial^2 \end{pmatrix},$$

то лінійне рівняння (9) допускає вектор-розв'язок $\varphi \in T^*(M)$ у вигляді

$$\varphi(x,t;\lambda) = (1, b(x,t;\lambda))^T \exp\left(\omega_1(\lambda)x + \omega_2(\lambda)t + \int\limits_{x_0}^{x} \sigma(x,t;\lambda)\,dx\right), \tag{10}$$

де $\lambda \in C$ – комплексний параметр; $x_0 \in R$ – довільна фіксована точка і

$$b(x,t;\lambda) \cong \sum_{j\in Z_+} b_j[u,v]\lambda^{-j}, \sigma(x,t;\lambda) \cong \sum_{j\in Z_+} \sigma_j[u,v]\lambda^{-j} \tag{11}$$

асимптотичні розвинення при $|\lambda| \to \infty$. Для знаходження дисперсійного відношення $\omega_1 = \omega_1(\lambda)$ і $\omega_2 = \omega_2(\lambda)$ розв'яжемо рівняння Лакса (9) з урахуванням (10) в точці $u = 0, v = 0$ при $t = t_0 \in R$. У підсумку отримаємо шукані елементи $\omega_1(\lambda) = \lambda$, $\omega_2(\lambda) = -k_1\lambda^2$. Отже, розв'язок (10) рівняння (9) набуде вигляду

$$\varphi(x,t;\lambda) = (1, b(x,t;\lambda))^T \exp\left(\lambda x - k_1\lambda^2 t + \int\limits_{x_0}^{x} \sigma(x,t;\lambda)\,dx\right). \tag{12}$$

Підставляючи (12) в (9) з урахуванням асимптотичного розвинення (11), отримаємо нескінченну систему рекурентних рівнянь

$$\left\{\begin{aligned} &\partial^{-1}\sigma_{j,t} = -2k_1\sigma_{j+1} - k_1\sum_{k\in Z_+}\sigma_k\sigma_{j-k} - k_1\sigma_{j,x} + k_2u\delta_{j,-1} + k_2u\sigma_j + \\ &\qquad + k_4\left(vb_{j,x} + vb_{j+1} + v\sum_{k\in Z_+} b_k\sigma_{j-k}\right), \\ &\sum_{k\in Z_+} b_k\partial^{-1}\sigma_{j-k,t} + b_{j,t} - k_1b_{j+2} = k_3\left(\delta_{j,-1} + \sigma_j\right) + \\ &\qquad + k_4\left(ub_{j,x} + ub_{j+1} - +u\sum_{k\in Z_+} b_k\sigma_{j-k}\right) - \\ &\qquad - k_5\left(b_{j,xx} + 2b_{j+1,x} + 2\sum_{k\in Z_+} b_{k,x}\sigma_{j-k} + b_{j+2}\right) - \\ &\qquad - k_5\left(2\sum_{k\in Z_+} b_{k+1}\sigma_{j-k} + \sum_{k,l\in Z_+} b_{j-k-l}\sigma_{j-k}\sigma_k + \sum_{k\in Z_+} b_{j-k}\sigma_{k,x}\right), \end{aligned}\right. \tag{13}$$

де $\partial^{-1}(\cdot) = \frac{1}{2}\left[\int\limits_{x_0}^{x}(\cdot)dx - \int\limits_{x}^{x_0+l}(\cdot)dx\right]$ – оператор оберненого диференціювання; $k, l \in Z_+$. Розв'язуючи послідовно систему рекурентних рівнянь (13), знаходимо перші дев'ять локальних функціоналів

$$\begin{aligned} &b_0 = 0; \\ &b_1 = \beta_{11}, \sigma_0 = \alpha_{01}u; \\ &b_2 = \beta_{21}, \sigma_1 = \alpha_{11}u_x + \alpha_{12}v; \\ &b_3 = -\beta_{31}u^2 - \beta_{32}v - \beta_{33}u_x, \sigma_2 = \alpha_{21}uv + \alpha_{22}u_{xx} + \alpha_{23}uu_x + \alpha_{24}v_x, \\ &b_4 = \beta_{41}u^3 + \beta_{42}uv + \beta_{43}uu_x + \beta_{44}v_x + \beta_{45}u_{xx}, \\ &\sigma_3 = \alpha_{31}u^2v + \alpha_{32}v^2 + \alpha_{33}u^2u_x + \\ &+\alpha_{34}u_xv + \alpha_{35}u_x^2 + \alpha_{36}uv_x + \alpha_{37}uu_{xx} + \alpha_{38}v_{xx} + \alpha_{39}u_{xxx}, \end{aligned} \tag{14}$$

де $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, i, j \in Z_+$ – вирази, які залежать від коефіцієнтів системи k_1, k_2, k_3, k_4, k_5. Випишемо перші з них

$$\alpha_{01} = \frac{k_2}{2k_1};$$

$$\beta_{11} = \frac{k_3}{k_5 - k_1}; \quad \alpha_{11} = -\frac{k_2}{2k_1}; \quad \alpha_{12} = -\left(\frac{1}{2k_1}\left(\frac{k_2k_3}{2k_1} - \frac{k_3k_4}{k_5 - k_1}\right)\right);$$

$$\beta_{12} = \left(\frac{k_1k_3}{2k_1(k_5 - k_1)} + \frac{k_3k_5}{(k_5 - k_1)^2}\right)$$

$$\alpha_{21}=\left(\frac{1}{4k_1}\left(\frac{k_2k_3}{2k_1}-\frac{k_3k_4}{(k_5-k_1)}\right)-\frac{k_4}{2k_1}\left(\frac{k_2k_3}{2k_1(k_5-k_1)}-\frac{k_3k_5}{(k_5-k_1)^2}\right)\right).$$

Наступні числа α_{ij},β_{ij} громіздкі вирази, які залежать від коефіцієнтів системи k_1,k_2,k_3,k_4,k_5. За знайденими функціоналами $\sigma_j[u,v]$ (14) послідовно знаходимо закони збереження для системи (8) при $j=0,1,2,3$.

При $j=0$ маємо такий закон збереження: $\tilde{\gamma_0}[u,v]=\dfrac{k_2}{2k_1}\int\limits_{x_0}^{x_0+l}udx$. З'ясуємо, чи для довільного числа β_0 функціонал $\beta_0\int\limits_{x_0}^{x_0+l}udx$ є законом збереження для системи (8), тобто перевіримо чи виконується рівність (2) для γ_0

$$\left.\frac{d\gamma_0}{dt}\right|_{K[u,v]}=\beta_0\int\limits_{x_0}^{x_0+l}u_tdx=\beta_0\int\limits_{x_0}^{x_0+l}(k_1u_{xx}+k_2uu_x+k_3v_x)\,dx=$$

$$=\beta_0\left.\left(k_1u_x+k_2\frac{u^2}{2}+k_3v\right)\right|_{x_0}^{x_0+l}\equiv 0.$$

Оскільки значення параметра β_0 довільне, то для зручності виберемо $\beta_0=1$, отже, перший закон збереження набув вигляду $\gamma_0=\int\limits_{x_0}^{x_0+l}udx$.

При $j=1$ отримаємо $\tilde{\gamma_1}[u,v]=-\dfrac{1}{2k_1}\left(\dfrac{k_2k_3}{2k_1}-\dfrac{k_3k_4}{k_5-k_1}\right)\int\limits_{x_0}^{x_0+l}vdx$. З'ясуємо, чи для довільного числа β_1 функціонал $\beta_1\int\limits_{x_0}^{x_0+l}vdx$ є законом збереження для динамічної системи (8)

$$\left.\frac{d\gamma_1}{dt}\right|_{K[u,v]}=\beta_1\int\limits_{x_0}^{x_0+l}v_tdx=\beta_1\int\limits_{x_0}^{x_0+l}(k_4(uv)_x+k_5v_{xx})\,dx=$$

$$=\beta_1\left.(k_4(uv)+k_5v_x)\right|_{x_0}^{x_0+l}\equiv 0.$$

Оскільки значення параметра β_1 довільне, то для зручності виберемо $\beta_1=1$, отже, другий закон збереження набув вигляду $\gamma_1=\int\limits_{x_0}^{x_0+l}vdx$.

При $j=2$ одержимо

$$\gamma_2[u,v]=$$

$$=\left(\frac{1}{4k_1}\left(\frac{k_2k_3}{2k_1}-\frac{k_3k_4}{(k_5-k_1)}\right)-\frac{k_4}{2k_1}\left(\frac{k_2k_3}{2k_1(k_5-k_1)}-\frac{k_3k_5}{(k_5-k_1)^2}\right)\right)\int\limits_{x_0}^{x_0+l}uvdx.$$

З'ясуємо чи для довільного числа β_2 функціонал $\beta_2 \int\limits_{x_0}^{x_0+l} uvdx$ є законом збереження для системи (8). Справді,

$$\left.\frac{d\gamma_2}{dt}\right|_{K[u,v]} = \beta_2 \int\limits_{x_0}^{x_0+l} (uv)_t dx = \beta_2 \int\limits_{x_0}^{x_0+l} (u_t v + uv_t)\, dx =$$

$$= \beta_2 \int\limits_{x_0}^{x_0+l} (k_1 u_{xx} v + k_2 uu_x v + k_3 v_x v + k_4 u(uv)_x + k_5 uv_{xx})\, dx =$$

$$= \beta_2 \int\limits_{x_0}^{x_0+l} ((k_1 + k_5) u_{xx} v + (k_2 - k_4) uvu_x)\, dx \equiv 0.$$

Тотожність $\beta_2 \int_{x_0}^{x_0+l} ((k_1 + k_5) u_{xx} v + (k_2 - k_4) uvu_x)\, dx \equiv 0$ виконується тоді і тільки тоді, коли

$$k_4 = k_2, \quad k_5 = -k_1, \tag{15}$$

позаяк коефіцієнт k_3 – довільне ненульове число. При значеннях коефіцієнтів $k_4 \neq k_2$, $k_5 \neq -k_1$ система (8) не має нескінченної ієрархії законів збереження, а отже, вона не буде інтегровною методом оберненої задачі розсіяння. Оскільки значення параметра β_2 довільне, то для зручності виберемо $\beta_2 = 1$, тобто третій закон збереження набув вигляду $\gamma_2 = \int_{x_0}^{x_0+l} uvdx$.

Для отримання наступного закону збереження треба визначити значення невідомих параметрів $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ у функціоналі

$$\gamma_3 = \int\limits_{x_0}^{x_0+l} \left(\alpha_1 u^2 v + \alpha_2 v^2 + 2\alpha_3 u_x v\right) dx$$

із тотожності (2)

$$\left.\frac{d\gamma_3}{dt}\right|_{K[u,v]} = \int\limits_{x_0}^{x_0+l} \left(\alpha_1 u^2 v + \alpha_2 v^2 + 2\alpha_3 u_x v\right)_t dx =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x_0+l} \left(\alpha_1 (2uu_t v + u^2 v_t) + 2\alpha_2 vv_t + 2\alpha_3 (u_{tx} v + u_x v_t)\right) dx =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x_0+l} \left(2\alpha_1 uv(k_1 u_{xx} + k_2 uu_x + k_3 v_x) + \alpha_1 u^2 (k_2 \left(uv\right)_x - k_1 v_{xx})\right) +$$

$$+ 2\alpha_2 \int\limits_{x_0}^{x_0+l} v\left(k_2 (uv)_x - k_1 v_{xx}\right) dx +$$

$$+2\alpha_3 \int\limits_{x_0}^{x_0+l} \left(v\left(k_1 u_{xxx} + k_2(uu_x)_x + k_3 v_{xx}\right) + u_x\left(k_2\,(uv)_x - k_1 v_{xx}\right)\right) dx \equiv 0.$$

У підсумку отримаємо, що $\alpha_1 = k_2$, $\alpha_2 = k_3$, $\alpha_3 = k_1$, та переконуємося, що четвертий закон збереження для динамічної системи (8) набуде вигляду

$$\gamma_3 = \int\limits_{x_0}^{x_0+l} \left(k_2 u^2 v + k_3 v^2 + 2k_1 u_x v\right) dx.$$

Теорема 1. *Динамічна система (8) має нескінченну ієрархію законів збереження, якщо коефіцієнти системи задовольняють співвідношення (15). Закони збереження набули вигляду*

$$\gamma_0 = \int\limits_{x_0}^{x_0+l} u dx, \quad \gamma_1 = \int\limits_{x_0}^{x_0+l} v dx, \quad \gamma_2 = \int\limits_{x_0}^{x_0+l} uv dx,$$

$$\gamma_3 = \int\limits_{x_0}^{x_0+l} \left(k_2 u^2 v + k_3 v^2 + 2k_1 u_x v\right) dx.$$

4. Імплектичні оператори. Для побудови імплектичних операторів скористаємося диференціально алгебричним алгоритмом [1]. Виберемо Гамільтоніан

$$H_\vartheta = H_\vartheta[u,v] = -\gamma_2[u,v] = -\int\limits_{x_0}^{x_0+l} uv dx. \tag{16}$$

Згідно з зображенням (6) перетворимо функціонал (16)

$$H_\vartheta = -\int\limits_{x_0}^{x_0+l} uv dx = -\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x_0+l} (uv + uv)\, dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x_0+l} \left(v\partial^{-1}u_x + u\partial^{-1}v_x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x_0+l} \left(<(\partial^{-1}v), u_x> + <(\partial^{-1}u), v_x>\right) dx.$$

Побудуємо оператори σ', σ'^*, θ_1^{-1}

$$\sigma' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \partial^{-1} \\ \partial^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma'^* = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \partial^{-1} \\ \partial^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\theta_1^{-1} = \sigma' - \sigma'^* = \begin{pmatrix} 0 & \partial^{-1} \\ \partial^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Обернений оператор до θ_1^{-1} існує, а отже, отримаємо імплектичний оператор $\eta=\theta_1$

$$\eta=\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \partial & 0 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

З умови гамільтоновості $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t=-\eta\,\mathrm{grad}\,H_\eta$, знайдемо функціонал $H_\eta\in D(M)$ із співвідношень

$$-\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \partial & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\delta H_\eta}{\delta u} \\ \dfrac{\delta H_\eta}{\delta v} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_1u_{xx}+k_2uu_x+k_3v_x \\ k_2(uv)_x-k_1v_{xx} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\delta H_\eta}{\delta u} \\ \dfrac{\delta H_\eta}{\delta v} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_2(uv)-k_1v_x \\ k_1u_x+\frac{k_2}{2}u^2+k_3v \end{pmatrix}:$$

$$H_\eta=H_\eta[u,v]=-\frac{1}{2}\gamma_3[u,v]=-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x_0+l}\left(k_2u^2v+k_3v^2+2k_1u_xv\right)dx. \tag{18}$$

Знайдемо імплектичний оператор ϑ, застосувавши диференціально-алгебричний алгоритм до функціонала (18). Перетворимо його згідно з (6)

$$H_\eta=-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x_0+l}\left(k_2u^2v+k_3v^2+2k_1u_xv\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x_0+l}\left(<\left(k_2\partial^{-1}(uv)-2k_1v\right),u_x>+<k_3\partial^{-1}v,v_x>\right)dx.$$

З отриманого зображення побудуємо оператори $\sigma',\sigma'^*,\theta_2^{-1}$

$$\sigma'=\begin{pmatrix} \dfrac{k_2}{2}\partial^{-1}v & -k_1+\dfrac{k_2}{2}\partial^{-1}u \\ 0 & \dfrac{k_3}{2}\partial^{-1} \end{pmatrix},\quad \sigma'^*=\begin{pmatrix} -\dfrac{k_2}{2}v\partial^{-1} & 0 \\ -k_1-\dfrac{k_2}{2}u\partial^{-1} & -\dfrac{k_3}{2}\partial^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\theta_2^{-1}=\sigma'-\sigma'^*=\begin{pmatrix} \dfrac{k_2}{2}\left(\partial^{-1}v+v\partial^{-1}\right) & -k_1+\dfrac{k_2}{2}\partial^{-1}u \\ k_1+\dfrac{k_2}{2}u\partial^{-1} & k_3\partial^{-1} \end{pmatrix}.$$

Із співвідношення $\vartheta=\eta\theta_2^{-1}\eta$ [3] отримаємо шуканий імплектичний оператор

$$\vartheta=\eta\theta_2^{-1}\eta=\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \partial & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{k_2}{2}\left(\partial^{-1}v+v\partial^{-1}\right) & -k_1+\frac{k_2}{2}\partial^{-1}u \\ k_1+\frac{k_2}{2}u\partial^{-1} & k_3\partial^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \partial & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} k_3\partial & k_1\partial^2+\dfrac{k_2}{2}\partial u \\ \dfrac{k_2}{2}u\partial-k_1\partial^2 & \dfrac{k_2}{2}\left(v\partial+\partial v\right) \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Теорема 2. *Динамічна система (8) бігамільтонова, тобто її можна подати у вигляді (5), де* $H_\vartheta, H_\eta \in D(M)$ *– функціонали Гамільтона (16), (18), а* η, θ *– пара імплектичних операторів (17), (19), якщо коефіцієнти системи задовольняють умову теореми 1.*

Зауважимо, що отриманий оператор (19) при значеннях коефіцієнтів $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1, k_5 = -1$ системи збігається з імплектичним оператором, який знайшли в [3].

5. Точні розв'язки. Під час розв'язування диференціальних рівнянь у частинних похідних (ДРЧП) виникає потреба знати точні розв'язки рівняння. Це потрібно для того, щоб мати змогу тестувати обчислювальні схеми. У [5] запропоновано модифікований метод гіперболічних тангенс функцій. Метод суттєво не відрізняється від методу описаного у [4], проте розв'язок шукаємо у вигляді суми поліномів від гіперболічного тангенса та котангенса. Наведемо кроки методу.

- **Крок 1.** Зводимо ДРЧП до звичайного диференціального рівняння (ЗДР) заміною $u(x,t) = u(c_1x + c_2t + c_3)$.
- **Крок 2.** Знаходимо степені поліноміального розв'язку
$$u(T) = \sum_{j=0}^{M} a_j T^j.$$
- **Крок 3.** Одержуємо алгебричну систему рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів у поліномі
$$u(T) = a_0 + \sum_{j=1}^{M} a_j T^j + \sum_{j=1}^{M} b_j T^{-j}.$$
- **Крок 4.** Розв'язуємо задану систему за умови, що коефіцієнти біля найвищих степенів кожного з розв'язків і параметри c_j відмінні від нуля.
- **Крок 5.** Виконавши процедуру обернену до запропонованої на кроці 1, отримаємо розв'язок вихідної системи у явному вигляді.

Послідовно виконаємо кожен із кроків описаного методу.

Крок 1. Зведення ДРЧП до ЗДР.

Шукаємо розв'язок у вигляді відокремленої хвилі, вводячи заміну
$$u(x,t) = u(c_1x + c_2t + c_3), \quad v(x,t) = v(c_1x + c_2t + c_3).$$
Підставивши заміну у систему рівнянь (8), отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь
$$\begin{cases} c_2u' = k_1c_1^2u'' + k_2c_1uu' + k_3c_1v', \\ c_2v' = k_4c_1(uv)' + k_5c_1^2v''. \end{cases} \tag{20}$$
Для зручності застосування методу гіперболічних тангенс функцій проінтегруємо систему (20)
$$\begin{cases} c_2u = k_1c_1^2u' + \frac{k_2}{2}c_1u^2 + k_3c_1v + C_1, \\ c_2v = k_4c_1(uv) + k_5c_1^2v' + C_2, \end{cases} \tag{21}$$
де C_1, C_2 довільні сталі.

Крок 2. Визначення степеня в поліноміального розв'язку.

Розв'язок системи (8) шукатимемо як суму поліномів від гіперболічного тангенса та котангенса

$$u(x,t) = a_{10} + \sum_{j=1}^{M_1} a_{1j} \tanh(c_1x + c_2t + c_3) + \sum_{j=1}^{M_1} b_{1j} \coth(c_1x + c_2t + c_3),$$

$$v(x,t) = a_{20} + \sum_{j=1}^{M_2} a_{2j} \tanh(c_1x + c_2t + c_3) + \sum_{j=1}^{M_2} b_{2j} \coth(c_1x + c_2t + c_3).$$

Для визначення степенів поліноміальних розв'язків підставимо

$$u(T) = T^{M_1}, \quad v(T) = T^{M_2}$$

у систему (20) та прирівняємо показники максимальних степенів. Після обчислень з'ясовуємо, що $M_1 = 1, M_2 = 2$. Отже, розв'язок шукатимемо у вигляді [5]

$$\begin{aligned} u(T) &= a_{10} + a_{11}T + a_{12}T^{-1}, \\ v(T) &= a_{20} + a_{21}T + a_{22}T^2 + a_{23}T^{-1} + a_{24}T^{-2}. \end{aligned} \tag{22}$$

Зауважимо, що $T' = 1 - T^2$, $(T^{-1})' = 1 - (T^{-1})^2$.

Крок 3. Отримання алгебричної системи рівнянь для визначення значень невідомих коефіцієнтів.

Підставимо (22) у (20) та отримаємо систему

$$\begin{cases} c_2\left(a_{10} + a_{11}T + a_{12}T^{-1}\right) = k_1c_1^2\left(a_{11}(1-T^2) + a_{12}(1-(T^{-1})^2)\right) + \\ +\dfrac{k_2c_1}{2}\left(a_{10} + a_{11}T + a_{12}T^{-1}\right)^2 + \\ +k_3c_1\left(a_{20} + a_{21}T + a_{22}T^2 + a_{23}T^{-1} + a_{24}T^{-2}\right), \\ \\ c_2\left(a_{20} + a_{21}T + a_{22}T^2 + a_{23}T^{-1} + a_{24}T^{-2}\right) = \\ = k_4c_1\left(a_{10} + a_{11}T + a_{12}T^{-1}\right) \cdot \left(a_{20} + a_{21}T + a_{22}T^2 + a_{23}T^{-1} + a_{24}T^{-2}\right) + \\ +k_5c_1^2\left((a_{21} + 2a_{22}T)(1-T^2) + (a_{23} + 2a_{24}T^{-1})(1-T^{-2})\right). \end{cases}$$

В отриманій системі прирівняємо коефіцієнти до нуля, внаслідок цього отримуємо систему для визначення невідомих коефіцієнтів

$$\begin{cases} T^0 : -c_2a_{10} + \frac{k_2c_1}{2}\left(a_{10}^2 + 2a_{11}a_{12}\right) + k_3c_1a_{20} + k_1c_1^2(a_{11} + a_{12}) = 0, \\ T^1 : -c_2a_{11} + k_2c_1a_{10}a_{11} + k_3c_1a_{21} = 0, \\ T^2 : k_1c_1^2a_{11} + \frac{k_2c_1^2}{2}a_{11}^2 + k_3c_1a_{22} = 0, \\ T^{-1} : -c_2a_{12} + k_2c_1a_{10}a_{12} + k_3c_1a_{23} = 0, \\ T^{-2} : k_1c_1^2a_{12} + \frac{k_2c_1^2}{2}a_{12}^2 + k_3c_1a_{24} = 0, \\ T^0 : -c_2a_{20} + k_4c_1\left(a_{10}a_{20} + a_{12}a_{21} + a_{11}a_{23}\right) + k_5c_1^2(a_{21} + a_{23}) = 0, \\ T^1 : -c_2a_{21} + k_4c_1\left(2a_{11}a_{20} + a_{12}a_{22}\right) + 2k_5c_1^2a_{22} = 0, \\ T^2 : -c_2a_{22} + k_3c_1a_{11}a_{21} - k_5c_1^2a_{21} = 0, \\ T^3 : k_4c_1a_{11}a_{22} - 2k_5c_1^2a_{22} = 0, \\ T^{-1} : -c_2a_{23} + k_4c_1\left(2a_{12}a_{20} + a_{11}a_{24}\right) + 2k_5c_1^2a_{24} = 0, \\ T^{-2} : -c_2a_{24} + k_3c_1a_{12}a_{23} - k_5c_1^2a_{23} = 0, \\ T^{-3} : k_4c_1a_{12}a_{24} - 2k_5c_1^2a_{24} = 0. \end{cases} \tag{23}$$

Крок 4. Розв'язуємо задану систему (23) за умови, що коефіцієнти при найвищих степенях кожного з розв'язків і параметри c_i відмінні від нуля.

Для цього використаємо пакет Mathematica 7.0. Для того, щоб існував розв'язок, ми повинні в системі відкинути рівняння, що є біля T^0, адже під час інтегрування ми отримали сталі C_1, C_2, якими можна знехтувати, прийнявши довільні числові значення. Отримаємо розв'язок

$$\begin{aligned}
a_{10} &= c_2\left(\frac{k_1k_4+k_2k_5+3k_4k_5}{3c_1k_2k_4k_5}\right),\\
a_{11} &= \frac{2c_1k_5}{k_4},\\
a_{12} &= \frac{2c_1k_5}{k_4},\\
a_{20} &= \frac{-c_2^2k_1k_4-c_2^2k_2k_5+12c_1^4k_1k_4k_5^2+12c_1^4k_2k_5^2}{6c_1^2k_3k_4^2k_5},\\
a_{21} &= 2c_2\left(\frac{k_1k_4+k_2k_5}{3k_3k_4^2}\right),\\
a_{22} &= -2c_2k_5\left(\frac{k_1k_4+k_2k_5}{k_3k_4^2}\right),\\
a_{23} &= 2c_2\left(\frac{k_1k_4+k_2k_5}{3k_3k_4^2}\right),\\
a_{24} &= -2c_2k_5\left(\frac{k_1k_4+k_2k_5}{k_3k_4^2}\right).
\end{aligned}\tag{24}$$

Бачимо, що коефіцієнти в поліномі від гіперболічного котангенса збігаються з коефіцієнтами в поліномі від гіперболічного тангенса.

Крок 5. Виконавши процедуру обернену до запропонованої на кроці 1, отримаємо розв'язок вихідної системи у явному вигляді.

Враховуючи (22), (24) та вибравши $c_1 = c_2 = 1$ та $c_3 = 0$, запишемо розв'язок системи (8)

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{k_1k_4+k_2k_5+3k_4k_5}{3k_2k_4k_5}+\frac{2k_5}{k_4}\left(\tanh(x+t)+\coth(x+t)\right),\\
v(x,t) &= \frac{-k_1k_4-k_2k_5+12k_1k_4k_5^2+12k_2k_5^2}{6k_3k_4^2k_5}+\\
&+2\left(\frac{k_1k_4+k_2k_5}{3k_3k_4^2}\right)\left(\tanh(x+t)+\coth(x+t)\right)-\\
&-2k_5\left(\frac{k_1k_4+k_2k_5}{3k_3k_4^2}\right)\left(\tanh^2(x+t)+\coth^2(x+t)\right).
\end{aligned}\tag{25}$$

Теорема 3. *У розв'язку (25), що містить поліном від гіперболічного тангенса та гіперболічного котангенса, коефіцієнти біля однакових степенів гіперболічного тангенса та котангенса рівні.*

6. Висновки. З'ясована наявність нескінченної ієрархії законів збереження та знайдена пара імплектичних операторів для нелінійної динамічної системи типу

Бюргерса, а також визначено значення параметрів системи, при яких таке твердження правильне.

Використавши модифікований метод гіперболічних тангенс функцій, отримано солітонний розв'язок у вигляді суми поліномів, які залежать від гіперболічного тангенса та котангенса.

Список використаної літератури

1. *Прикарпатский А.К.* Алгебраические аспекты интегрируемости динамических систем на многообразиях / *Прикарпатский А.К., Микитюк И.В.* – К., 1991.
2. *Гентош О.Є.* Диференціально-геометричні та Лі-алгебраїчні основи дослідження інтегровних нелінійних динамічних систем на функціональних многовидах / *Гентош О.Є., Притула М.М., Прикарпатський А.К.* – Л., 2006.
3. *Гентош О.Є.* Гамільтонова інваріантна редукція рівняння Бюргерса / *Гентош О.Є., Притула М.М.* // Вісник Львів. ун-ту. Серія прикладна матем. та інф. – 1999. – Вип. 1. – С. 76-81.
4. *Fan E.G.* Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equation / *Fan E.G.* // Phys. Lett. A. – 2000. – Vol. 227. – P. 212-218.
5. *Yusufoğlu E.* On the Extended Tanh Method, Applications of Nonlinear Equations / *Yusufoğlu E., Bekir A.* // International Journal of Nonlinear Science. – 2007. – Vol. 4, №1. – P. 10-16.

Стаття: надійшла до редакції 18.05.2011
прийнята до друку 21.09.2011

BIHAMILTONITY AND EXACT SOLUTIONS OF BURGER'S TYPE GENERALIZED DYNAMICAL SYSTEM

Arkady KINDYBALIUK, Mykola PRYTULA

Ivan Franko National University of L'viv,
Universytets'ka Str., 1, L'viv, 79000
e-mail: a.kindybaluk@mail.ru

Examined coefficients of Burger's type dynamical system, and found values of that coefficients when system possess an infinite hierarchy of invariant laws and has a pair of implectic operators. Using modified tanh-method have been got exact soliton solutions of considered system.

Key words: nonlinear dynamical system, conservation laws, impletic operators, tanh-method.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 74

БИГАМИЛЬТОНОВОСТЬ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ТИПА БЮРГЕРСА

Аркадий КИНДЫБАЛЮК, Николай ПРИТУЛА

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: a.kindybaluk@mail.ru

Изучено, при каких значениях коэффициентов обобщенная нелинейная динамическая система типа Бюргерса обладает бесконечной иерархией законов сохранения и парой имплектических операторов. Используя модифицированный метод гиперболических тангенс функций, получено точные солитонные решения рассматриваемой системы.

Ключевые слова: нелинейная динамическая система, законы сохранения, имплектические операторы, метод гиперболических тангенс функций.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 74. С. 122–128
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 74. P. 122–128

УДК 519.21

ДЕЯКІ АСПЕКТИ АНАЛІЗУ КІЛЬКІСНОЇ КОНКУРЕНЦІЇ З ВИПАДКОВОЮ СТРАТЕГІЄЮ ОДНІЄЇ ФІРМИ

Катерина КОСАРЕВИЧ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: katia_kosarevych@mail.ru

Розглянуто гру конкуруючих фірм, в якій гравці регулюють пропозицію однорідного продукту на олігополістичному ринку. Досліджено питання про існування та вид рівноваги Курно-Неша за умови випадкового випуску однієї фірми без зазначення виду його розподілу. Розглянуто співвідношення такої рівноваги з рівновагою Курно-Неша для гри з детермінованими стратегіями. Проаналізовано вплив використання випадкової стратегії одним гравцем на сподівані прибутки фірм, сподівані рівноважні ринкові випуск і ціну.

Ключові слова: сподіваний прибуток, рівновага Курно-Неша, випадкова стратегія.

1. Вступ. На сучасному етапі розвитку економіки значна частка реальних ринків належить до олігополій, тому дослідження олігополістичної конкуренції фірм має важливе значення. Різновидом відомих сьогодні теоретико-ігрових моделей є модель Курно [1], в якій виробники вибирають обсяги продукту, функції виграшу гравців визначають їхні прибутки залежно від стратегій. В літературі отримано результати щодо існування рівноваги за Нешом [2] в моделі олігополії Курно [3], досліджено її єдиність і властивості [4] у випадку, коли гравці застосовують чисті стратегії. Ми зосередили увагу навколо поняття рівноваги Неша (в термінах описаної в моделі олігополії Курно конкурентної взаємодії фірм) з урахуванням невизначеності поведінки одного з гравців у сенсі вибору недетермінованого (випадкового) випуску. Розглядають відповідну гру "змішаного" типу, досліджують рівновагу за Нешом для такої гри та її співвідношення з відповідною рівновагою в грі з детермінованими стратегіями.

2. Модель кількісної конкуренції з детермінованими випусками. Розглянемо конкуренцію фірм, які регулюють пропозицію деякого однорідного продукту на олігополістичному ринку, як гру в стратегічній формі

$$G = (I, \{Q_i\}_{i\in I}, \{\pi_i\}_{i\in I}), \qquad (1)$$

де I – множина фірм на ринку; Q_i – множина стратегій фірми i; $\pi_i(\cdot)$ – дійснозначна, визначена на $\prod_{i\in I} Q_i$ функція виграшу гравця i. В термінах взаємодії фірм виграшем гравця i в грі (1) є прибуток i-ї фірми

$$\pi_i(\cdot) = Pq_i - c_i q_i.$$

Тут $q_i \geqslant 0$ – обсяг випуску i-ї фірми; c_i – витрати фірми i на виробництво одиниці продукції; $P = a - bQ$ – функція оберненого попиту на товар з $a, b > 0$ та загальною пропозицією продукту на ринок $Q = \sum_{i\in I} q_i$.

Припустимо, що нам відома функція попиту, вона двічі неперервно-диференційовна. Тоді й кожна з функцій $\pi_i(\cdot)$ теж двічі неперервно-диференційовна. У цьому разі ціна P, яка встановлюється на ринку, – спадна, строго ввігнута функція. Крім того, згідно з технологією фірми i максимальний об'єм її виробництва вважатимемо обмеженим деяким додатним випуском. Не обмежуючи загальності, припустимо, що існує $\tilde{Q} > 0$ таке, що $P(Q) = 0$ для всіх $Q \geqslant \tilde{Q}$, тому множини стратегій гравців $Q_i = [0, \tilde{Q}^{(i)}], i \in I$, вважатимемо непорожніми, опуклими та компактними в $\mathbb{R}^n$.

Профіль стратегій $q^C = ({q_1}^C, ..., {q_I}^C)$ називатимемо рівновагою за Нешом у рамках моделі Курно, або рівновагою Курно-Неша в грі G, якщо для всіх $i \in I$

$$\pi_i{}^C = \pi_i({q_i}^C, {q_{-i}}^C) \geqslant \pi_i(q_i, {q_{-i}}^C) \qquad \forall\, q_i \in Q_i,$$

$${q_{-i}}^C = ({q_i}^C, ..., {q_{i-1}}^C, {q_{i+1}}^C, ..., {q_I}^C).$$

Іншими словами, q_i – одна з найліпших відповідей на стратегії ${q_{-i}}^C$.

Легко бачити, що функція виграшу $\pi_i(q_i, q_{-i}) = Pq_i - c_i q_i$ - неперервна і квазіввігнута за змінною q_i на Q_i. Застосувавши теорему Неша [2], отримуємо таке твердження.

Твердження 1. *За введених вище припущень для гри*

$$G = (I,\ \ Q_i = [0, \tilde{Q}^{(i)}],\ \ \pi_i(q_i, q_{-i}),\ \ i \in I)$$

існує рівновага Курно-Неша.

Зауваження 1. В умовах твердження 1 множина наборів стратегій, що є рівновагою Курно-Неша для гри G, задовольняє систему рівнянь

$$\pi_i({q_i}^C, {q_{-i}}^C) = \max_{q_i \in Q_i} \pi_i(q_i, {q_{-i}}^C), \quad i \in I. \tag{2}$$

Оскільки функції виграшу $\pi_i(q_i, q_{-i})$ диференційовні і шуканий рівноважний профіль стратегій є внутрішньою точкою множини $\prod_{i\in I} Q_i$, умови (2) еквівалентні рівнянням

$$\frac{\partial \pi_i(q_i, {q_{-i}}^C)}{\partial q_i} = 0, \quad i \in I.$$

Твердження 2. *Для гри G з $I = \{1, 2\}$, $Q_1 = [0, \frac{a-c_1}{b}]$, $Q_2 = [0, \frac{a-c_2}{b}]$ за умов*

$$a + c_2 \geqslant 2c_1, \tag{3}$$

$$a + c_1 \geqslant 2c_2, \tag{4}$$

рівновага Курно-Неша є набір випусків

$$q_1{}^C = \frac{a - 2c_1 + c_2}{3b}, \tag{5}$$

$$q_2{}^C = \frac{a - 2c_2 + c_1}{3b}. \tag{6}$$

Зауваження 2. Рівноважні значення $(q_1{}^C, q_2{}^C)$ в грі (1) формують рівноважний ринковий випуск $Q^C = q_1{}^C + q_2{}^C = \frac{2a-c_1-c_2}{3b}$.

Рівновагу Курно-Неша для короткострокового періоду знайдено за умови, що фірми використовують детерміновані стратегії. Проте нестабільність економіки, що є наслідком впливу різноманітних чинників зовнішнього середовища, привносить в планування економічних процесів елемент невідомості. Наявність невизначеності стримує застосування відомих математичних методів до дослідження економічних систем і стимулює побудову нових модифікованих моделей. Зокрема, виробник продукції, що тільки з'являється на ринку, характеризується невпевненістю щодо попиту на його товар, а отже, і щодо оптимального обсягу випуску. Звідси невизначеність щодо стратегій поведінки власне виробника та фірм, які взаємодіють з ним на ринку. З огляду на це потребує досліджень питання про існування та форму ринкової рівноваги за випадкових випусків виробників.

3. Модель гри з випадковою стратегією одного гравця. Перенесемо розглянуту вище гру (1) з простору детермінованих стратегій на простір випадкових стратегій. Розглянемо випадок існування на ринку однорідної продукції двох фірм-виробників, які функціонують у сенсі описаної вище взаємодії. Вважатимемо, що значення випуску q_2 фірми 2 є детермінованим, а фірма 1 використовує випадкову стратегію. Щодо характеру випадковості випуску природним є припущення про його рівномірний розподіл на деякому відрізку, як нижню межу якого завжди можна вибрати константу, зокрема, нуль [5]. Проте недослідженою залишається взаємодія виробників та аналіз ситуації ринкової рівноваги без припущення про вид розподілу випадкового випуску.

Нехай випуск фірми 1 – випадкова величина q_1 із значеннями на $[a_0, b_0]$ з деяким неперервним розподілом $F(x)$ таким, що для нього існують перший і другий моменти. В модифікованій грі

$$G' = (I = \{1, 2\}, \quad \{Q_1 = [a_0, b_0], Q_2\}, \quad \{E\pi_i\}_{i \in I}; \quad F(x))$$

функцією виграшу гравців вважатимемо сподіваний прибуток фірм

$$E\pi_i = E(Pq_i - c_i q_i), \quad i \in I. \tag{7}$$

Фірма 1, обираючи сподіваний обсяг випуску $\bar{q_1}$, намагається максимізувати свій сподіваний (невід'ємний) прибуток згідно з (7)

$$E\pi_1(\bar{q_1}, q_2) = E((a - b(q_1 + q_2))q_1 - c_1 q_1) = (a - c_1)E(q_1) - bE(q_1{}^2) - bq_2 E(q_1) =$$

$$= (a - c_1)\bar{q_1} - bK(\bar{q_1}) - bq_2\bar{q_1},$$

де $\bar{q_1} = Eq_1, \quad K(\bar{q_1}) = Eq_1{}^2 = \int x^2 f(x)dx.$
З цією ж метою фірма 2 обирає значення випуску q_2

$$E\pi_2(\bar{q_1}, q_2) = E((a - b(q_1 + q_2))q_2 - c_2 q_2) = (a - c_2)q_2 - bq_2{}^2 - bq_2\bar{q_1}.$$

Рівновагою Курно-Неша в грі G' в термінах взаємодії фірм називатимемо профіль стратегій $q^{C1} = ({q_1}^{C1}, {q_2}^{C1})$, якщо

$$E{\pi_1}^{C1} = E\pi_1(\bar{q_1}^{C1}, {q_2}^{C1}) \geqslant E\pi_1(\bar{q_1}, {q_2}^{C1}) \quad \forall\, \bar{q_1} \geqslant 0; \tag{8}$$

$$E{\pi_2}^{C1} = E\pi_2(\bar{q_1}^{C1}, {q_2}^{C1}) \geqslant E\pi_2(\bar{q_1}^{C1}, q_2) \quad \forall\, q_2 \geqslant 0. \tag{9}$$

Теорема 1. *Нехай $q_1 \sim F(x)$, $Eq_1 < \infty$, й існує функція $K(\bar{q_1}) = E{q_1}^2 < \infty$ така, що при $a \geqslant c_2$*

$$\frac{a - 2c_1 + c_2}{2b} \leqslant \frac{dK(\bar{q_1})}{d\bar{q_1}} \leqslant \frac{a - c_1}{b}. \tag{10}$$

Тоді профіль стратегій

$$\bar{q_1}^* = \frac{2c_1 - c_2 - a}{b} + 2\frac{dK(\bar{q_1})}{d\bar{q_1}}, \tag{11}$$

$${q_2}^* = \frac{a - c_1}{b} - \frac{dK(\bar{q_1})}{d\bar{q_1}} \tag{12}$$

є рівновагою Курно-Неша в модифікованій грі G' (за випадкового випуску фірми 1).

Доведення. $E\pi_2(\bar{q_1}^*, q_2) = E((a - b({q_1}^* + q_2))q_2 - c_2 q_2) = (a - c_2)q_2 - b{q_2}^2 - bq_2\bar{q_1}^*$ досягає максимуму, коли

$$a - b\bar{q_1}^* - 2bq_2 - c_2 = 0,$$

$$q_2 = \frac{a - c_2 - b\bar{q}_1^*}{2b} = {q_2}^*,$$

звідки випливає $E\pi_2(\bar{q_1}^*, q_2) \leqslant E\pi_2(\bar{q_1}^*, {q_2}^*)$, тобто нерівність (9) виконується для $\bar{q_1}^{C1} = \bar{q_1}^*$ і ${q_2}^{C1} = {q_2}^*$.
Аналогічно, $E\pi_1(\bar{q_1}, {q_2}^*) = E((a - b(q_1 + {q_2}^*))q_1 - c_1 q_1) = (a - c_1)\bar{q_1} - bK(\bar{q_1}) - b{q_2}^*\bar{q_1}$ максимізується при

$$(a - c_1) - b\frac{dK(\bar{q_1})}{d\bar{q_1}} - b{q_2}^* = 0,$$

$$a - c_1 - b\frac{dK(\bar{q_1})}{d\bar{q_1}} - b\frac{a - c_2 - b\bar{q_1}^*}{2b} = 0,$$

звідки

$$\bar{q_1} = \frac{2c_1 - c_2 - a}{b} + 2\frac{dK(\bar{q_1})}{d\bar{q_1}} = \bar{q_1}^*,$$

а отже, $E\pi_1(\bar{q_1}, {q_2}^*) \leqslant E\pi_1(\bar{q_1}^*, {q_2}^*)$, нерівність (8) правильна для $\bar{q}_1^{C1} = \bar{q_1}^*$ і ${q_2}^{C1} = {q_2}^*$. Легко бачити, що

$${q_2}^* = \frac{a - c_1}{b} - \frac{dK(\bar{q_1})}{d\bar{q_1}}.$$

Набір стратегій $(\bar{q_1}^*, {q_2}^*)$ є шуканою рівновагою Курно-Неша. Зауважимо, що нерівність (10) забезпечує невід'ємність рівноважних випусків $\bar{q_1}^{C1} \geqslant 0$, ${q_2}^{C1} \geqslant 0$. □

Теорема 2. *При виконанні умов (3)-(4) твердження 2 та нерівності*

$$\frac{3}{2}{q_1}^C \leqslant \frac{dK(\bar{q_1})}{d\bar{q_1}} \leqslant 2{q_1}^C \tag{13}$$

рівновага Курно-Неша в грі G' змінюється порівняно з рівновагою в детермінованій грі G, причому

$$\bar{q_1}^{C1} \leqslant {q_1}^C, \tag{14}$$

$${q_2}^{C1} \geqslant {q_2}^C. \tag{15}$$

Доведення. Справді, при $\frac{dK(\bar{q_1})}{d\bar{q_1}} \leqslant 2{q_1}^C$ з (11) випливає

$$\bar{q_1}^{C1} = 2\frac{dK(\bar{q_1})}{d\bar{q_1}} - 3{q_1}^C \leqslant {q_1}^C.$$

Аналогічно з (12) отримуємо

$${q_2}^{C1} \geqslant \frac{a-c_1}{b} - 2{q_1}^C = {q_2}^C.$$

Враховуючи нерівність (10), яка гарантує невід'ємність сподіваного випуску фірми 1, отримуємо $\frac{dK(\bar{q_1})}{d\bar{q_1}} \leqslant \min\{2{q_1}^C, \frac{a-c_1}{b}\}$, проте на підставі (4) умова (10) звужується до (13). □

Зауваження 3. В умовах теореми 2 сподіваний рівноважний ринковий випуск

$$\bar{Q}^{C1} = \bar{q_1}^{C1} + {q_2}^{C1} = \frac{c_1 - c_2}{b} + \frac{dK(\bar{q_1})}{d\bar{q_1}}.$$

На підставі правої частини нерівності (13)

$$\frac{dK(\bar{q_1})}{d\bar{q_1}} \leqslant \frac{2(a - 2c_1 + c_2)}{3b},$$

звідки

$$\bar{Q}^{C1} \leqslant \frac{2a - c_1 - c_2}{3b} = Q^C.$$

Відповідно,

$$\bar{P}^{C1} \geqslant P^C.$$

Отож, наслідком введеної в грі G' випадковості випуску фірми 1 є зменшення сподіваного рівноважного ринкового випуску та збільшення сподіваної рівноважної ринкової ціни.

Наслідок 1. *На підставі (7) та (14)-(15)*

$$E{\pi_2}^{C1} \geqslant {\pi_2}^C,$$

$$E{\pi_1}^{C1} \leqslant {\pi_1}^C.$$

Отже, рівновага (11)-(12), отримана в грі G', принесе додатковий виграш лише фірмі 2 з детермінованим випуском. Тому така рівновага не є ліпшою для фірми 1 порівняно з (5)-(6), тобто застосування гравцем 1 випадкової стратегії є невигідним для нього. Отриманий результат пояснює підвищену увагу осіб, які приймають рішення, до планування їхньої стратегічної поведінки.

Зауваження 4. Якщо розподіл випадкового випуску фірми 1 з відрізку $[a_0, b_0]$ належить деякому класу неперервних розподілів, для яких $\frac{dK(\bar{q_1})}{d\bar{q_1}} = 2\bar{q_1}$, то рівновага Курно-Неша гри G' збігається з рівновагою (5)-(6).

Справді, для випадкової величини q_1, означеної в зауваженні 4, з одного боку, згідно з (11)-(12) рівноважний випуск фірми 1

$$\bar{q_1}^* = \frac{2c_1 - c_2 - a}{b} + 2(2\bar{q_1}^*),$$

звідки $\bar{q_1}^* = \frac{a-2c_1+c_2}{3b} = {q_1}^C$, для фірми 2 $\quad {q_2}^* = \frac{a-c_1}{b} - 2\bar{q_1}^* = \frac{a-2c_2+c_1}{3b} = {q_2}^C$. З іншого боку, міркування, аналогічні до доведення теореми 1, теж призводять до відшукання рівноваги (5)-(6).

Отож, випадковість, введена в гру (1), не змінює рівновагу, а отже і не погіршує виграш гравця з випадковою стратегією лише тоді, коли поведінку цього гравця протягом певного періоду часу можна описати визначеним в зауваженні 4 розподілом. В усіх інших випадках вибір фірмою 1 випадкового випуску є невиправданим у сенсі максимізації прибутку.

4. Висновки. Ми спробували формалізувати пошук рівноваги за Нешом для конкурентної гри в термінах взаємодії фірм з урахуванням випадковості. Отримані результати можуть стати невід'ємною частиною теорії функціонування економічної системи в умовах невизначеності.

Список використаної літератури

1. *Cournot A.* Researches into the mathematical principles of the theory of wealth / *Cournot A.* – New York, 1971.
2. *Nash J.F.* Noncooperative games / *Nash J.F.* // Ann.Math. – 1951. – Vol. 45. – P. 286-295.
3. *Amir R.* On the Effects of Entry in Cournot Markets / *Amir R., Lambson V.* // Review of Economic Studies. – 2000. – Vol. 67. – P. 235-254.
4. *Amir R.* Cournot Oligopoly and the Theory of Supermodular Games / *Amir R., Lambson V.* // Games and Economic Behavior. – 1996. – Vol. 15. – P. 132-148.
5. *Горбачук В.М.* Рівноваги Курно-Неша за асиметричної невизначеності та узагальнені рівноваги Курно-Штакельберга-Неша / *Горбачук В.М., Гаркуша Н.И.* // Вісник Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2007. – №1. – С. 143-148.

Стаття: надійшла до редакції 13.05.2011
прийнята до друку 21.09.2011

SOME ASPECTS OF COMPETITIVE QUANTITATIVE ANALYSIS WITH RANDOM STRATEGY OF ONE FIRM

Kateryna KOSAREVYCH

Ivan Franko National University of L'viv,
Universytetska Str., 1, L'viv, 79000
e-mail: katia_kosarevych@mail.ru

The article focuses on game of competing firms, where players regulate the supply of a homogeneous product at the oligopolistic market. The problem of the existence and form of the Cournot-Nash equilibrium for the game with one firm' random strategy without its distribution specification was investigated. New equilibrium was compared with the Cournot-Nash equilibrium for the game with deterministic strategies. The effect of using random strategy by one player on the firm's expected returns, expected equilibrium market output and price, was analyzed.

Key words: expected return, Cournot-Nash equilibrium, random strategy.

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ АНАЛИЗА КОЛИЧЕСТВЕННОЙ КОНКУРЕНЦИИ СО СЛУЧАЙНОЙ СТРАТЕГИЕЙ ОДНОЙ ФИРМЫ

Катерина КОСАРЕВИЧ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: katia_kosarevych@mail.ru

Рассмотрена игра конкурирующих фирм, в которой игроки регулируют предложение однородного продукта на олигополистическом рынке. Исследован вопрос о существовании и форме равновесия Курно-Нэша при условии случайного выпуска одной фирмы без указания вида его распределения. Исследовано соотношение такого равновесия с равновесием Курно-Нэша для игры с детерминированными стратегиями. Проанализировано влияние использования случайной стратегии одним игроком на ожидаемые доходы фирм, ожидаемые рыночные выпуск и цену.

Ключевые слова: ожидаемый доход, равновесие Курно-Нэша, случайная стратегия.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 74. С. 129–142
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 74. P. 129–142

УДК 517.95

УЗАГАЛЬНЕНІ ПОЧАТКОВІ ТА КРАЙОВІ ЗНАЧЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

Галина ЛОПУШАНСЬКА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: lhp@ukr.net

Доведено теореми існування та єдиності, одержано зображення розв'язків лінійних нормальних параболічних крайових задач при крайових і початкових даних з вагових просторів узагальнених функцій. Знайдено умови еквівалентності регулярного в області розв'язку задачі у двох формулюваннях.

Ключові слова: нормальна параболічна крайова задача, узагальнена функція, ваговий функційний простір, узагальнені крайові значення, узагальнені початкові значення.

В [1]-[5] вивчали крайові задачі для лінійних параболічних систем в обмежених областях Q у просторах узагальнених функцій із $D'(\overline{Q})$. У [4]-[6] доведено еквівалентність у двох різних формулюваннях крайових задач для лінійних однорідних параболічних рівнянь і систем з узагальненими функціями в правих частинах крайових та початкової умов.

У [7] одержано точні оцінки розв'язків загальних параболічних крайових задач у просторах функцій, які можуть мати слабкі особливості при $t = 0$. В [8], [9] доведено розв'язність параболічних крайових задач з правими частинами, що мають сильні точкові степеневі особливості.

У статті доведено розв'язність нормальних параболічних крайових задач у просторах функцій із сильними степеневими особливостями при $t = 0$ та узагальнено результати з [4]-[6] на випадок правих частин із ширших (вагових) просторів узагальнених функцій.

1. Основні позначення та допоміжні твердження. Нехай Ω_0 – область в $\mathbb{R}^n$, обмежена замкненою поверхнею Ω_1 класу C^∞, $Q_i = \Omega_i \times (0,T]$, $i = 0,1$, $Q_2 = \Omega_0$, $D(Q_i) = C_0^\infty(Q_i)$, $D(\overline{Q}_i) = C^\infty(\overline{Q}_i)$, $i = 0,1,2$,

$$D^0(\overline{Q}_i)\ (D_0(\overline{Q}_i)) = \{\varphi \in D(\overline{Q}_i) : D_t^k \,|_{t=T} = 0\ (D_t^k\varphi \,|_{t=0} = 0),\ k = 0,1,\dots\},\quad i = 0,1,$$

$$L(x,t,D)u \equiv (D_t - A)u \equiv \Big(D_t - \sum_{|\alpha|\le 2b} a_\alpha(x,t)D_x^\alpha\Big)u,$$

$$B_j(x,t,D_x) \equiv \sum_{|\alpha|\le r_j} b_{j\alpha}(x,t)D_x^\alpha, \quad j=\overline{1,m}, \quad m=bp,$$

$a_\alpha(x,t)$ – квадратні $p\times p$ матриці з елементами $a_\alpha^{\nu\mu}\in D(\overline{Q}_0)$, $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n$, $D_t=\frac{\partial}{\partial t}$, $D_x^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$, $b_{j\alpha}(x,t)$ – рядки довжини p з елементами з $D(\overline{Q}_1)$, $j=\overline{1,m}$, L – параболічний за Петровським матричний диференціальний вираз. Вважаємо далі $r_m\le\cdots\le r_1\le 2b-1$, $r_0=r_{m+1}=2b$,

$$(j)=0 \quad \text{для} \quad j=0,m+1, \qquad (j)=1 \quad \text{для} \quad j=\overline{1,m}.$$

Матрицею Діріхле порядку $2b$ називається ([3, с. 178]) матриця з $2b$ рядків, яку переставлянням рядків можна звести до вигляду

$$\mathcal{B}(x,t,D_x)=(\mathcal{B}_0(x,t,D_x),\ldots,\mathcal{B}_{2b-1}(x,t,D_x))',$$

де $\mathcal{B}_j(x,t,D_x)\equiv\sum\limits_{|\alpha|\le j}\tilde b_{j\alpha}(x,t)D_x^\alpha$, $\tilde b_{j\alpha}(x,t)$ – квадратні $p\times p$ матриці, і у цьому разі

$$\det\mathcal{B}_{j0}(x,t,\nu)=\det\sum_{|\alpha|=j}\tilde b_{j\alpha}(x,t)\nu^\alpha\ne 0 \text{ для довільних } (x,t)\in Q_1,$$

$\nu=\nu(x,t)$– орт внутрішньої нормалі до $\overline{Q}_1$ у точці (x,t), штрих означає транспонування.

Система крайових диференціальних виразів $\{B_j\}_{j=1}^m=\{B_j(x,t,D_x)\}_{j=1}^m$ називається ***нормальною*** [2], якщо матрицю $B=(B_1,\ldots,B_m)'$ можна доповнити новими рядками до матриці Діріхле порядку $2b$.

Вважатимемо, що система $\{B_j\}_{j=1}^m$ рівномірно накриває оператор L ([3, с. 15]), а також є нормальною.

В $\overline{Q}_0$ розглядаємо нормальну параболічну крайову задачу [2], [3]

$$L(x,t,D)u=F_0(x,t), \quad (x,t)\in Q_0 \tag{1}$$

$$B_j(x,t,D_x)u(x,t)=F_j(x,t), \quad (x,t)\in Q_1, \quad j=\overline{1,m} \tag{2}$$

$$u\,|_{t=0}=F_{m+1}(x), \quad x\in\Omega_0. \tag{3}$$

Згідно з [2] існують такі крайові диференціальні вирази $\hat B_j$, C_j, $\hat C_j$, $j=\overline{1,m}$ порядків $\hat r_j, m_j, \hat m_j$, причому $r_j+\hat m_j=m_j+\hat r_j=2b-1$, що правильна формула Гріна

$$\int\limits_{Q_0}[v'Lu-(L^*v)'u]dxdt+\sum_{j=1}^m\int\limits_{Q_1}[\hat C_jvB_ju-\hat B_jvC_ju]dxdt+$$
$$+\int\limits_{\Omega_0}[v'(x,0)u(x,0)-v'(x,T)u(x,T)]dx=0, \quad u,v\in\overline{Q}_0,$$

де $L^*=-D_t-A^*$, A^* – формально спряжений до A диференціальний вираз, штрих означає транспонування.

Введемо позначення:

$\varrho_0(x)$ – нескінченно диференційовна функція на $\overline{\Omega}_0$, додатна в Ω_0, яка дорівнює нулю на Ω_1 та має порядок відстані $d(x)$ від точки $x\in\Omega_0$ до Ω_1 при $d(x)\to 0$;

$\varrho_1(t)$ – нескінченно диференційовна функція на $[0,T]$, додатна при $t>0$, яка має порядок t при $t\to 0$;

$\varrho(x,t)$ – нескінченно диференційовна функція на $\overline{Q}_0$, додатна в Q_0, яка дорівнює нулю на $\overline{Q}_1 \cup \Omega_0$, має порядок $d(x)$ при $d(x) \to 0$ та $d(x) \leq t^{\frac{1}{2b}}$, порядок $\varrho_1^{\frac{1}{2b}}(t)$ при $t \to 0$ та $d(x) \geq t^{\frac{1}{2b}}$.

Також вважаємо $\varrho_0(t) \leq 1$, $\varrho_1(x) \leq 1$, $\varrho(x,t) \leq 1$ для всіх $x \in \overline{\Omega}_0$, $t \in [0,T]$.

Використовуємо функційні простори

$C^k(\overline{\Omega}_0)$ – простір функцій φ, для яких неперервні похідні $D^\alpha \varphi$ з $|\alpha| \leq [k]$ та (при нецілому k) скінченні $\sum\limits_{|\alpha|=[k]} \sup\limits_{x,y\in\overline{\Omega},x\neq y} \frac{\Delta_x^y D_x^\alpha \varphi(x)}{|x-y|^{k-[k]}}$, де $\Delta_x^y \psi(x) = \psi(y) - \psi(x)$, $[k]$ – ціла частина числа k,

$\mathcal{H}^k(\overline{Q}_i) = C^k(\overline{Q}_i)$ – простір Гельдера ([2], [10]) функцій φ, для яких неперервні похідні $D^{\overline{\alpha}}\varphi = D_t^{\alpha_0} D_x^\alpha \varphi$ з $|\overline{\alpha}| = |\alpha| + 2b\alpha_0 \leq [k]$ та (при нецілому k) скінченні

$$\sum_{|\overline{\alpha}|=[k]} \sup_{(x,t),(y,\tau)\in\overline{Q}_i,x\neq y} \frac{\Delta_x^y D_{x,t}^{\overline{\alpha}} \varphi(x,t)}{|x-y|^{k-[k]}}, \qquad \sum_{0<k-|\overline{\alpha}|<2b} \sup_{(x,t),(y,\tau)\in\overline{Q}_i,t\neq\tau} \frac{\Delta_t^\tau D_{x,t}^{\overline{\alpha}} \varphi(x,t)}{|t-\tau|^{\frac{k-|\overline{\alpha}|}{2b}}},$$

тут $\Delta_t^\tau \psi(x,t) = \psi(x,\tau) - \psi(x,t)$,

$C^{k,(0)}(\overline{Q}_i)(C_0^k(\overline{Q}_i)) = \{\varphi \in C^k(\overline{Q}_i) : D_t^j \varphi \mid_{t=T} = 0 \ (D_t^j \varphi \mid_{t=0} = 0), \quad 0 \leq j \leq [\frac{k}{2b}]\}$,
$\mathcal{H}^{k,r,(0)}(Q_i) = \{\varphi \in \mathcal{H}^{k,(0)}(Q_i) : D^{\overline{\alpha}}\varphi \mid_{\overline{Q}_1} = 0, |\overline{\alpha}| \leq 2b - r - 2\}$,
$\mathcal{H}^{k,2b-1,(0)}(Q_i) = \mathcal{H}^{k,(0)}(Q_i)$, $i = 0, 1$,

вводимо при $k \geq 0$

$\mathcal{D}_k(\overline{\Omega}_0) = \{\varphi \in C^k(\overline{\Omega}_0)$ ($D(\overline{\Omega}_0)$ при цілому k): $\varrho_0^{|\alpha|-k} D^\alpha \varphi \in C(\overline{\Omega}_0), |\alpha| \leq [k]\}$,
$\mathcal{D}_k^*(\overline{\Omega}_0) = \{\varphi \in C^{k+2b}(\overline{\Omega}_0)$ ($D(\overline{\Omega}_0)$ при цілому k): $A^*\varphi \in \mathcal{D}_k(\overline{\Omega}_0)\}$,
$\mathcal{X}_k(\overline{\Omega}_0) = \{\varphi \in \mathcal{D}_k^*(\overline{\Omega}_0) : \hat{B}_j(x,0,D_x)\varphi(x) = 0, x \in \overline{\Omega}_1,\ j = \overline{1,m}\}$,
$X(\overline{\Omega}_0) = \{\varphi \in D(\overline{\Omega}_0) : \hat{B}_j(x,0,D_x)\varphi(x) = 0, x \in \overline{\Omega}_1,\ j = \overline{1,m}\}$,
$\mathcal{D}_k(\overline{Q}_0) = \{\varphi \in C^{k,(0)}(\overline{Q}_0)$ ($D^0(\overline{Q}_0)$ при цілому k): $\varrho^{|\overline{\alpha}|-k} D^{\overline{\alpha}} \varphi \in C(\overline{Q}_0), |\overline{\alpha}| \leq [k]\}$,
$\mathcal{D}_k^*(\overline{Q}_0) = \{\varphi \in C^{k+2b,(0)}(\overline{Q}_0)$ ($D^0(\overline{Q}_0)$ при цілому k): $L^*\varphi \in \mathcal{D}_k(\overline{Q}_0)\}$,
$\mathcal{X}_k(\overline{Q}_0) = \{\varphi \in \mathcal{D}_k^*(\overline{Q}_0) : \hat{B}_j(x,t,D_x)\varphi(x,t) = 0, (x,t) \in \overline{Q}_1,\ j = \overline{1,m}\}$,
$X(\overline{Q}_0) = \{\varphi \in D^0(\overline{Q}_0) :\ \hat{B}_j(x,t,D_x)\varphi(x,t) = 0, (x,t) \in \overline{Q}_1,\ j = \overline{1,m}\}$,
$\mathcal{D}_k(\overline{Q}_1) = \{\varphi \in C^{\infty,(0)}(Q_1) \cap C^k(\overline{Q}_1) : \varrho_1^{2b\alpha_0 - k} D^{\overline{\alpha}} \varphi \in C(\overline{Q}_1), |\overline{\alpha}| \leq k\}$,

а також

$\mathcal{Z}_k(\Omega_0) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega_0)$: $\varrho_0^{|\alpha|-k} D^\alpha \varphi \in C(\overline{\Omega}_0), \quad \forall\ \alpha\}$, $k \in \mathbb{R}$,
$Z_k(\Omega_0) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega_0) \cap C^{[k]}(\overline{\Omega}_0)$: $\varrho_0^{|\alpha|-k} D^\alpha \varphi \in C(\overline{\Omega}_0), \quad \forall\ |\alpha| \geq k\}$, $k > 0$,
$Z_{-k}(\Omega_0) = \mathcal{Z}_{-k}(\Omega_0)$,
$\mathcal{Z}_k(Q_i, 0) = \{\varphi \in C^{\infty,(0)}(Q_i) : \varrho_1^{\frac{2b\alpha_0 - k}{2b}} D^{\overline{\alpha}} \varphi \in C(\overline{Q}_i)\ \forall\ \overline{\alpha}\}$, $k \in \mathbb{R}$,
$Z_k(Q_i, 0) = \{\varphi \in C^{\infty,(0)}(Q_1) \cap C^{[k]}(\overline{Q}_i) : \varrho_1^{\frac{2b\alpha_0 - k}{2b}} D^{\overline{\alpha}} \varphi \in C(\overline{Q}_i)\ \forall\ |\overline{\alpha}| \geq k\}$, $k > 0$,
$Z_{-k}(Q_i, 0) = \mathcal{Z}_{-k}(Q_i, 0)$, $k \geq 0$, $i = 0, 1$,
$Z_k^*(\overline{Q}_0, 0) = \{\varphi \in Z_{k+2b}(\overline{Q}_0, 0) : L^*\varphi \in \mathcal{Z}_k(\overline{Q}_0, 0)\}$,
$X_k(\overline{Q}_0, 0) = \{\varphi \in Z_k^*(\overline{Q}_0, 0) : \hat{C}_j \varphi \in Z_{k+r_j+1}(Q_1, 0),\ \hat{B}_j \varphi = 0,\ j = \overline{1,m}\}$, $k \geq 0$.

Скажемо, що $\varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$ в $\mathcal{D}_k(\overline{Q}_i)$, якщо для довільного мультиіндексу $\overline{\alpha}$, $|\overline{\alpha}| \leq k$ послідовність $\tilde{\varphi}_\nu = \varrho^{|\overline{\alpha}|-k} D^{\overline{\alpha}} \varphi_\nu$ збігається до нуля при $\nu \to \infty$ рівномірно в $\overline{Q}_i$. Подібно визначають збіжність у інших просторах.

Лема 1. *Для довільних чисел* $r \geq 0$, $\varphi_j \in D(Q_1)$ *(відповідно* $\varphi_j \in \mathcal{D}_{r+2b-j}(\overline{Q}_1)$, $\varphi_j \in Z_{r+2b-j}(Q_1, 0)$*),* $j = \overline{0, 2b-1}$, $\psi_0 \in D(\Omega_0)$ *(*$\psi_0 \in \mathcal{D}_{r+2b}(\Omega_0)$, $\psi_0 \in Z_{r+2b}(\Omega_0)$*), довільної матриці Діріхле* $\tilde{B}(x, t, D_x)$ *з коефіцієнтами з* $D(\overline{Q}_1)$ *існує така вектор-функція* $\psi \in \mathcal{D}^*_r(\overline{Q}_0)$ *(відповідно* $\psi \in \mathcal{D}^*_r(\overline{Q}_0)$, $\psi \in Z^*_r(\overline{Q}_0, 0)$*), що* $\tilde{B}_j\psi = \varphi_j$, $j = \overline{0, 2b-1}$ *і* $\psi\mid_{t=0} = \psi_0$.

Лему доводять за схемою доведення леми 4.3 із [5] (див. також [11]), де розглянуто випадок $\varphi_j \in D^0(\overline{Q}_1)$, $j = \overline{0, 2b-1}$, $\psi_0 \in D(\Omega_0)$.

З леми 1 випливає, що простори $\mathcal{X}_k(\overline{Q}_0)$, $\mathcal{X}_k(\overline{Q}_0, 0)$ непорожні при $k \geq 0$.

С.Д. Івасишен ([3] та бібліогр.) побудував матрицю Гріна

$$G(x, t, y, \tau) = \big(G_0(x, t, y, \tau), \ldots, G_m(x, t, y, \tau)\big)$$

задачі (1)-(3), вивчив її властивості, властивості інтегральних операторів Гріна

$$\mathcal{G}_j\varphi = \int_0^t d\tau \int_{\Omega_j} G_j(\cdot, *, y, \tau)\varphi(y, \tau)dy, \quad j = \overline{0, m}, \quad \mathcal{G}_{m+1}\varphi = \int_{\Omega_0} G_0(\cdot, *, y, 0)\varphi(y)dy,$$

спряжених операторів Гріна [2]

$$\hat{\mathcal{G}}_j\varphi = \int_\tau^T dt \int_{\Omega_0} G'_j(x, t, \cdot, *)\varphi(x, t)dx, \; j = \overline{0, m}, \quad \hat{\mathcal{G}}_{m+1}\varphi = \int_0^T dt \int_{\Omega_0} G'_0(x, t, \cdot, 0)\varphi(x, t)dx$$

на гельдерових просторах функцій (для довільних достатньо гладких f, φ

$$(\mathcal{G}_0 f, \varphi)_0 = (f, \hat{\mathcal{G}}_0\varphi)_0, \quad (\mathcal{G}_j f, \varphi)_1 = (f, \hat{\mathcal{G}}_j\varphi)_1, \quad j = \overline{1, m},$$

де $(f, \varphi)_i = \int_0^T dt \int_{\Omega_{(i)}} \varphi' f dx$, $i = 0, 1$); доведено, що

$$\hat{\mathcal{G}}_0 : \mathcal{H}^{k,(0)}(Q_0) \to \mathcal{H}^{k+2b, r_1,(0)}(Q_0) \subset \mathcal{H}^{k,(0)}(\overline{Q}_0),$$

$$\hat{\mathcal{G}}_j : \mathcal{H}^{k,(0)}(Q_0) \to \mathcal{H}^{k+r_j+1,(0)}(Q_1) \text{ при } j = \overline{1, m} \text{ та обмежені;}$$

доведено теореми існування та єдиності розв'язків у гельдерових просторах узагальнених функцій, здобуто зображення розв'язків за допомогою матриці Гріна. Для гладких $F_j = f_j$, $j = \overline{0, m+1}$, що задовольняють умови узгодження, зокрема для $f_j \in D(Q_j)$, $j = \overline{0, m}$, $f_{m+1} \in D(Q_2)$ розв'язок задачі (1)-(3) набув вигляду [2]

$$u(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{\Omega_0} G_0(x, t, y, \tau) f_0(y, \tau)dy +$$

$$+ \sum_{j=1}^m \int_0^t d\tau \int_{\Omega_1} G_j(x, t, y, \tau) f_j(y, \tau)dy + \int_{\Omega_0} G_0(x, t, y, 0) f_{m+1}(y)dy, \quad (x, t) \in Q_0.$$

У [4] доведено, що при довільній $\psi \in C^{2b,1}_{x,t}(\overline{Q}_0)$, такій що $\hat{B}_j\psi = 0$, $j = \overline{1, m}$, зокрема $\psi \in \mathcal{X}_r(\overline{Q}_0)$, правильні співвідношення

$$\int_\tau^T dt \int_{\Omega_0} G'_0(x, t, y, \tau)(L^*\psi)(x, t)dx = \psi(y, \tau), \quad (y, \tau) \in \overline{Q}_0,$$

$$\int_\tau^T dt \int_{\Omega_0} G'_j(x, t, y, \tau)(L^*\psi)(x, t)dx = (\hat{C}_j\psi)(y, \tau), \quad (y, \tau) \in \overline{Q}_1, \quad j = \overline{1, m}. \tag{4}$$

Лема 2. $\hat{\mathcal{G}}_0 : \mathcal{D}_r(\overline{Q}_0) \to \mathcal{X}_r(\overline{Q}_0)$, $\mathcal{Z}_r(Q_0,0) \to Z_{r+2b}(Q_0,0)$,
$\hat{\mathcal{G}}_j : \mathcal{D}_r(\overline{Q}_0) \to C^{r+r_j-1,(0)}(\overline{Q}_1)$, $\mathcal{Z}_r(Q_0,0) \to Z_{r+r_j+1}(Q_1,0)$, $j=\overline{1,m}$,
$\hat{\mathcal{G}}_{m+1} : \mathcal{D}_r(\overline{Q}_0) \to \mathcal{X}_r(\overline{\Omega}_0)$, $\mathcal{Z}_r(Q_0,0) \to Z_{r+2b}(\Omega_0)$, $r \geq 0$.

Доведення. Спряжена до задачі (1)-(3) крайова задача є також нормальною й обернено параболічною (теорема 6 [3, с. 179]).

З однозначної розв'язності спряженої параболічної крайової задачі в класах гладких функцій випливає, що для довільної $\varphi \in \mathcal{D}_r(\overline{Q}_0)$ існує розв'язок $\psi = (\hat{\mathcal{G}}_0\varphi) \in \mathcal{X}_r(\overline{Q}_0)$ системи $L^*\psi = \varphi$, тому з використанням формул (4), леми 1 та результатів [2] одержуємо $\hat{\mathcal{G}}_0 : \mathcal{D}_r(\overline{Q}_0) \to \mathcal{X}_r(\overline{Q}_0)$, $\hat{\mathcal{G}}_j : \mathcal{D}_r(\overline{Q}_0) \to C^{[r]+r_j-1,(0)}(\overline{Q}_1)$, $j=\overline{1,m}$, $\hat{\mathcal{G}}_{m+1} : \mathcal{D}_r(\overline{Q}_0) \to \mathcal{X}_r(\overline{\Omega}_0)$.

При $\varphi \in \mathcal{Z}_r(Q_0,0)$ використовуємо оцінки [3, с. 120] (та означення [3, с. 16])

$$\left|D^{\overline{\alpha}}_{y,\tau} G_{0ik}(x,t,y,\tau)\right| \leq C d^{-n-|\overline{\alpha}|}(x,t,y,\tau) E_c(t-\tau, d(x,t,y,\tau)), \tag{5}$$

$$\left|D^{\overline{\alpha}}_{y,\tau} G_{jk}(x,t,y,\tau)\right| \leq C d^{-\lambda_j}(x,t,y,\tau) E_c(t-\tau, d(x,t,y,\tau)), \quad i,k=\overline{1,p},$$

де $\lambda_j = n+2b-r_j-(j)+|\overline{\alpha}|$, $j=\overline{1,m}$,

$$E_c(t,z) = \exp\Big(-C\Big(\frac{z^{2b}}{t}\Big)^{\frac{1}{2b-1}}\Big),$$

$d(x,t,y,\tau) = (|x-y|^2 + |t-\tau|^{\frac{1}{b}})^{\frac{1}{2}}$ – параболічна відстань між точками (x,t) та $(y,\tau) \in \overline{Q}_0$, G_{0ik}, G_{jk} ($i,k=\overline{1,p}$ – компоненти, відповідно, матриці G_0 та вектор-функцій G_j, $j=\overline{1,m}$).

Виконуючи в інтегралах $D^{\overline{\alpha}}\mathcal{G}_j\varphi$ заміну $x_i - y_i = (t-\tau)^{\frac{1}{2b}}\xi_i^{\frac{2b-1}{2b}}$, $i=\overline{1,n}$, а при $|\overline{\alpha}| > r + r_i + (j)$ ще й "перекидання" похідних на φ, як у [9], одержуємо
$(D^{\overline{\alpha}}\hat{\mathcal{G}}_j\varphi)(y,\tau) = O(\tau^{\frac{r+r_j+(j)-|\overline{\alpha}|}{2b}})$ при $\tau \to 0$, $y \in \overline{\Omega}_0$, $j=\overline{0,m+1}$,
$(D^{\alpha}\hat{\mathcal{G}}_{m+1}\varphi)(y,0) = O(\varrho_0^{r+2b-|\alpha|}+1)$ при $d(y) \to 0$, $y \in \overline{\Omega}_0$. □

2. Формулювання узагальненої нормальної параболічної крайової задачі. Теорема існування та єдиності. Нехай V' – простір лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій чи вектор-функцій) на V, $(\varphi, F)_i = \sum\limits_{j=1}^{p} (\varphi_j, F_j)_i$ – значення узагальненої вектор-функції $F = (F_1,\ldots,F_p) \in V'(\overline{Q}_i)$ на основній вектор-функції $\varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_p) \in V(\overline{Q}_i)$, $i=\overline{0,2}$, $s(F)$ – порядок сингулярності узагальненої функції F [12], [13], $s(F) = \max\limits_{1\leq j\leq p} s(F_j)$ при $F=(F_1,\ldots,F_p)$,
$|g|_p = |g_1| + \cdots + |g_p|$ для вектор-функції $g=(g_1,\ldots,g_p)$.

Припущення:

(**Fp**) $F_j \in D^{0\prime}(\overline{Q}_1)$, $s(F_j) \leq s_j$, $j=\overline{1,m}$, $r \geq s'-1$, де $s' = \max\limits_{1\leq j\leq m}(s_j - r_j)$, $F_0 \in \mathcal{X}'_r(\overline{Q}_0)$, $F_{m+1} \in \mathcal{X}'_r(\overline{Q}_2)$;

(**Fp0**) $F_0 \in X'(\overline{Q}_0)$, $F_j \in D^{0\prime}(\overline{Q}_1)$, $j=\overline{1,m}$, $F_{m+1} \in D'(\overline{Q}_2)$,

(**Zp0**) $F_0 \in Z'_{k_0}(Q_0,0)$, $F_j \in Z'_{k_j}(Q_1,0)$, $j=\overline{1,m}$, $F_{m+1} \in Z'_{k_{m+1}}(Q_2)$,
$r > s_0 = \max\limits_{0\leq j\leq m+1}(k_j - r_j - (j))$.

Перше формулювання задачі (1)-(3). За припущенням (**Fp**) (відповідно (**Fp0**), (**Zp0**)) знайти таку узагальнену вектор-функцію $u \in \mathcal{D}'_r(\overline{Q}_0)$ (відповідно $u \in D^{0\prime}(\overline{Q}_0)$, $u \in \mathcal{Z}'_r(Q_0, 0)$), що

$$(L^*\psi, u)_0 = (\psi, F)_0 + \sum_{j=1}^{m} (\hat{C}_j\psi, F_j)_1 + (\psi\,|_{t=0}, F_{m+1})_2$$

$$\forall\, \psi \in \mathcal{X}_r(\overline{Q}_0) \quad (\forall\, \psi \in X(\overline{Q}_0), \quad \forall\, \psi \in X_r(\overline{Q}_0, 0)). \tag{6}$$

Теорема 1. *За припущенням (**Fp**) ((**Fp0**), (**Zp0**)) вектор-функція u, задана формулою*

$$(\varphi, u)_0 = (\hat{\mathcal{G}}_0\varphi, F_0)_0 + \sum_{j=1}^{m} (\hat{\mathcal{G}}_j\varphi, F_j)_1 + (\hat{\mathcal{G}}_{m+1}\varphi, F_{m+1})_2$$

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}_r(\overline{Q}_0) \quad (\forall\, \varphi \in D^0(\overline{Q}_0), \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{Z}_r(Q_0, 0)), \tag{7}$$

є єдиним розв'язком задачі (1)-(3).

Теорему доводять за схемою доведення теореми з [4] із врахуванням леми 2.

3. Про узагальнені початкові та крайові значення регулярних розв'язків. При регулярній F_0 можна по-іншому сформулювати задачу, надавши певного сенсу виконанню умов (2) та (3) для її розв'язку.

Нехай $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_{10})$, $\Omega_{1\varepsilon}$ – паралельна до Ω_1 поверхня, $\Omega_{0\varepsilon} = \Omega_\varepsilon$ – підобласть Ω_0 з межею $\Omega_{1\varepsilon}$; $Q_{i\varepsilon\varepsilon_1} = \Omega_{i\varepsilon} \times (\varepsilon_1, T]$, $i = 0, 1$; при $\varphi \in D(Q_1)$ визначаємо $\varphi(x_\varepsilon, t) = \varphi(x, t)$, якщо $(x_\varepsilon, t) \in Q_{1\varepsilon\varepsilon_1}$ (тобто $x_\varepsilon = x + \varepsilon\nu(x)$, $x \in \Omega_1$, $t \in (\varepsilon_1, T]$) при $\varepsilon \in (0, \frac{\varepsilon_0}{2})$, $\varepsilon_1 \in (0, \frac{\varepsilon_{10}}{2})$, $\varphi(x_\varepsilon, t) = 0$, якщо $(x_\varepsilon, t) \in Q_{0\varepsilon_0\varepsilon_{10}}$.

Означення. Регулярна в Q_0 вектор-функція u набуває узагальнених крайових значень $F \in D'(Q_1)$, якщо існує

$$\lim_{\varepsilon,\varepsilon_1 \to 0} \int\limits_{Q_{1\varepsilon\varepsilon_1}} \varphi'(x_\varepsilon, t) u(x_\varepsilon, t) dQ_1 = (\varphi, F)_1 \quad \forall\, \varphi \in D(Q_1), \tag{8}$$

набуває узагальнених початкових значень $F \in D'(\Omega_0)$, якщо існує

$$\lim_{\varepsilon, t \to 0} \int\limits_{\Omega_{0\varepsilon}} \varphi'(x) u(x, t) dx = (\varphi, F)_2 \quad \forall\, \varphi \in D(\Omega_0). \tag{9}$$

Нехай

$$M_r(Q_0) = \Big\{ v \in L_{1,loc}(Q_0) \quad : \quad \int\limits_{Q_0} \varrho^r(x,t)|v_j(x,t)|dx < +\infty, \quad j = \overline{1,p} \Big\},$$

$\{\tilde{B}_j(x,t,D)\}_{j=\overline{0,2b-1}}$ – матриця Діріхле порядку $2b$ з коефіцієнтами з $D(\overline{Q}_1)$,

$\overline{r}$ – найменше ціле число $\geq r$.

Теорема 2. *Якщо $F_0 \in L_1(Q_0) \cap C(Q_0)$, $u \in M_r(Q_0) \cap C^{2b,1}_{x,t}(Q_0)$ – розв'язок системи (1) в Q_0, $r \geq 0$, то*

(i) u набуває узагальнених початкових значень з $\mathcal{D}'_{r+2b}(\overline{\Omega}_0)$ (з $D'(\Omega_0)$ порядку сингулярності $\leq \overline{r} + 2b$) та $\tilde{B}_j u$ набувають на Q_1 узагальнених крайових значень з $\mathcal{D}'_{r+j+1}(\overline{Q}_1)$ (із $D'(Q_1)$ порядків сингулярностей $\leq \overline{r} + j$), $j = \overline{0, 2b-1}$.

Якщо виконується (i) для розв'язку $u \in M_r(Q_0) \cap C^{2b,1}_{x,t}(Q_0)$ системи (1) в Q_0 при $F_0 \in C(Q_0)$, то $u \in M_r(\overline{Q}_0)$ тоді й тільки тоді, коли $\int_{Q_0} \psi F_0\, dxdt$ скінченний для всіх $\psi \in \mathcal{D}^*_r(\overline{Q}_0)$.

Для розв'язку $u \in M_r(Q_0) \cap C^{2b,1}_{x,t}(Q_0)$ системи (1) в Q_0 при $F_0 \in C(Q_0)$ та деякому $r \geq 0$ кожні дві з трьох наступних умов зумовлюють виконання третьої:
виконується (i) при $j = \overline{0, b-1}$;
$u \in M_r(Q_0)$;
$\int_{Q_0} \varrho^b(x,t)|F_0(x,t)|dxdt < +\infty$.

Доведення. Побудуємо покриття $\{U_j\}_{j=1}^{\hat{p}}$ частини Q^* циліндра $\overline{Q}_0$, що прилягає до $\overline{Q}_1 \cup \overline{\Omega}_0$, $n+1$-вимірними околами U_j. Одночасно одержимо покриття $\{V_j\}_{j=1}^{\hat{p}}$ бічної поверхні Q_1 n-вимірними околами. Межа Q^* складається з $\overline{Q}_1 \cup \overline{\Omega}_0$ та поверхні $\tilde{Q}_1 \cup \{t = \varepsilon_1\}$ в Q_0. Частину області Q^* між цією поверхнею та $Q_{1\varepsilon\varepsilon_1}$ позначимо через $Q^*_{\varepsilon\varepsilon_1}$. В кожному околі U_j введемо випрямляючу локальну систему координат $(\xi^{(j)}, t) = (\xi'^{(j)}, \xi^{(j)}_n, t) = (\xi^{(j)}_1, \ldots, \xi^{(j)}_{n-1}, \xi^{(j)}_n, t)$ з початком у деякій точці $V_j = Q_1 \cap U_j$ та віссю ξ_n у напрямі внутрішньої нормалі до Q_1 у цій точці.

Нехай $\{e^{(l)}(x)\}$ – відповідне покриттю $\{V_l\}_{l=1}^{\hat{p}}$ розкладення одиниці. В області $Q^*_{0\varepsilon\varepsilon_1} = Q_{0\varepsilon\varepsilon_1} \setminus \overline{Q}_{0\varepsilon_0\varepsilon_{10}}$ $(\varepsilon \in (0, \varepsilon_0),\ \varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_{10}))$ запишемо формулу Гріна

$$\int\limits_{Q^*_{0\varepsilon\varepsilon_1}} (L^*\Phi_{\varepsilon,\varepsilon_1})' u dxdt - \int\limits_{Q^*_{0\varepsilon\varepsilon_1}} \Phi'_{\varepsilon,\varepsilon_1} F_0 dxdt = \sum_{j=0}^{2b-1} \int\limits_{Q_{1\varepsilon\varepsilon_1} \cup Q_{1\varepsilon_0\varepsilon_{10}}} \tilde{C}_j \Phi_{\varepsilon,\varepsilon_1} \cdot \tilde{B}_j u dxdt \qquad (10)$$

для розв'язку $u \in C^{2b,1}_{x,t}(Q_0) \cap M_r(Q_0)$ системи (1) та вектор-функції $\Phi_{\varepsilon,\varepsilon_1}$, яка в крайовому координатному околі U_l у випрямляючих локальних координатах має вигляд $\Phi^{(l)}_{\varepsilon,\varepsilon_1} = \sum\limits_{i=0}^{2b+\overline{r}-1} (\xi^{(l)}_n - \varepsilon)^i \varphi^{(l)}_i(\xi'_{(l)}, \varepsilon)$, де $\varphi^{(l)}_i = e^{(l)}\varphi_i$, φ_i – довільні вектор-функції з $D(V_l)$, $i = 0, 1, \ldots, 2b-1$, $\varphi_{2b}, \varphi_{2b+1}, \ldots, \varphi_{2b+\overline{r}-1} \in D(V_l)$, $j = \overline{0, 2b+\overline{r}-1}$ і такі, що $L^*\Phi^{(l)}_{\varepsilon,\varepsilon_1} = \xi^r_n \tilde{\varphi}$, $\tilde{\varphi} \in C(U_l)$ (їхнє існування випливає з леми 4.1 [5] для оператора L^*).

Підінтегральний вираз першого доданку в лівій частині (10) дорівнює $(\xi_n - \varepsilon)^r$ $\hat{\varphi}'(\xi', \xi_n - \varepsilon, t)u$, вектор-функція $\hat{\varphi}$ обмежена при достатньо малих значеннях $\xi_n - \varepsilon$, тому згідно з умовою $u \in M_r(Q_0)$ існує границя при $\varepsilon, \varepsilon_1 \to 0$ цього доданку, яка з використанням леми з [13, с. 70] дорівнює $\int\limits_{Q^*_0} \varrho^r(x)\varphi'(x,t)u(x,t)dxdt$, де $Q^*_0 = Q_0 \setminus \overline{Q}_{0\varepsilon_0\varepsilon_{10}}$, φ обмежена та з компактним носієм у $\Omega_0 \times (0, T]$. Також існує $\Phi^{(l)} = \lim\limits_{\varepsilon,\varepsilon_1 \to 0} \Phi^{(l)}_{\varepsilon,\varepsilon_1} \in D(U_l)$. За припущенням теореми щодо F_0 існує $\lim\limits_{\varepsilon,\varepsilon_1 \to 0} \int\limits_{Q^*_{0\varepsilon\varepsilon_1}} \Phi'_{\varepsilon,\varepsilon_1} F_0 dxdt = \int\limits_{Q^*_0} \Phi' F_0 dxdt$. Тоді існує також границя правої частини (10), яка за лемою з [13, с. 70] дорівнює $\lim\limits_{\varepsilon,\varepsilon_1 \to 0} \sum\limits_{j=0}^{2b-1} \int\limits_{Q_{1\varepsilon\varepsilon_1} \cup Q_{1\varepsilon_0\varepsilon_{10}}} (\tilde{C}_j\Phi)' \cdot \tilde{B}_j u dxdt$.

Вибираючи по черзі відмінною від нуля лише одну з вектор-функцій $\varphi_0, \ldots, \varphi_{2b-1}$, з існування границі всієї правої частини (10) при $\varepsilon, \varepsilon_1 \to 0$ одержуємо існування кожної з границь $\lim\limits_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0} \int\limits_{Q_{1\varepsilon\varepsilon_1}} \varphi'(x,t)(\tilde{B}_j u)(x,t)dxdt$, зокрема границь

$$\lim_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0} \int\limits_{Q_{1\varepsilon\varepsilon_1}} \varphi B_j u dxdt, \quad \lim_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0} \int\limits_{Q_{1\varepsilon\varepsilon_1}} \varphi C_j u dxdt \quad \forall\, \varphi \in D(Q_1).$$

Враховуючи знайдену при доведенні леми 4.1 із [5] (див також лему 1 із [11]) лінійну залежність функції Φ від $\varphi_0, \ldots, \varphi_{2b-1}$ та їхніх похідних (відповідно до порядків $2b+\overline{r}-1, \ldots, \overline{r}$), одержуємо, що $\tilde{B}_j u$ мають узагальнені крайові значення $\tilde{F}_j$ з $D(Q_1)$ порядків сингулярностей $\leq \overline{r}+j$, $j=\overline{0,2b-1}$. Зокрема, $B_j u$, $C_j u$ набувають на Q_1 деяких узагальнених крайових значень відповідно $F_j, F_j^c \in D(Q_1)$ порядків сингулярностей $s(F_j) \leq \overline{r}+r_j$, $s(F_j^c) \leq \overline{r}+m_j$, $j=\overline{1,m}$.

Вибираючи вектор-функції $\varphi_j \in \mathcal{D}_{r+2b-j}(\overline{Q}_1)$, $j=\overline{0,2b-1}$, як вище знаходимо $\varphi_{2b+j} \in \mathcal{D}_{r+2b-j}(\overline{Q}_1)$, $j=\overline{0,\overline{r}-1}$ і таку $\psi=\Phi\in\mathcal{D}_r^*(\overline{Q}_0)$, що $\psi\,|_{t=0}=0$, $\tilde{C}_j\psi=\varphi_{2b-j-1}\in\mathcal{D}_{r+j+1}(\overline{Q}_1)$. Подібно до попереднього одержуємо існування

$$(\varphi, \tilde{F}_j)_1 = \lim_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0} \int\limits_{Q_{1\varepsilon\varepsilon_1}} \varphi'(x,t)(\tilde{B}_j u)(x,t)dxdt \text{ для кожної } \varphi \in \mathcal{D}_{r+j+1}(\overline{Q}_1),$$

тобто існування $\tilde{F}_j \in \mathcal{D}'_{r+j+1}(\overline{Q}_1)$, зокрема, $B_j u \in \mathcal{D}_{r+r_j+1}(\overline{Q}_1)$, $C_j u \in \mathcal{D}_{r+m_j+1}(\overline{Q}_1)$.

Запишемо формулу Гріна в області $\tilde{Q}^*_{0\varepsilon\varepsilon_1} = \Omega_\varepsilon \times (\varepsilon_1, \varepsilon_{01})$ для розв'язку $u \in C^{2b,1}_{x,t}(Q_0) \cap M_r(Q_0)$ системи (1) та вектор-функції $\Psi = \sum\limits_{i=0}^{q} (t-\varepsilon_1)^i \psi_i(x)\eta_1(t)$, де $q=\overline{(\frac{r}{2b})}$, $\eta_1 \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$, $\eta_1(t)=1$ при $t\in[0,\frac{\varepsilon_{01}}{3}]$, $\eta_1(t)=0$ при $t \geq \frac{2\varepsilon_{01}}{3}$, $\eta_1(t)\leq 1$, ψ_0 – довільну вектор-функцію з $D(\Omega_0)$, $\psi_1, \ldots, \psi_q$ вибирають за лемою 4.2 [5] для оператора L^*:

$$\int\limits_{\tilde{Q}^*_{0\varepsilon\varepsilon_1}} t^{\frac{r}{2b}} \tilde{\psi}'(x,t)u(x,t)dxdt - \int\limits_{\tilde{Q}^*_{0\varepsilon\varepsilon_1}} \Psi' F_0 dxdt + \tag{11}$$

$$+\sum_{j=0}^{2b-1} \int\limits_{\tilde{Q}^*_{1\varepsilon\varepsilon_1}} [(\tilde{C}\Psi)'(x,t)\cdot(\tilde{B}_j u)(x,t)dxdt = -\int\limits_{\Omega_{0\varepsilon}} \Psi'(x,\varepsilon_1)u(x,\varepsilon_1)dx.$$

Тут $\tilde{Q}^*_{1\varepsilon\varepsilon_1} = S_\varepsilon \times (\varepsilon_1, \varepsilon_{01})$, $\tilde{\psi}$ – обмежена функція з компактним носієм у $\tilde{Q}^*_0 = S \times [0, \varepsilon_{10}]$. За умовами теореми та визначеним вище існуванням узагальнених крайових значень $\tilde{B}_j u$, $j=\overline{0,2b-1}$ існує границя при $\varepsilon,\varepsilon_1\to 0$ лівої частини (11). Тоді з (11) випливає існування $\lim\limits_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0}\int\limits_{\Omega_{0\varepsilon}} \Psi'(x,\varepsilon_1)u(x,\varepsilon_1)dx$. За лемою з [13, с. 70] цей вираз дорівнює $\lim\limits_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0}\int\limits_{\Omega_{0\varepsilon}} \psi_0'(x)u(x,\varepsilon_1)dx$.

Нехай F_{m+1}– функціонал на $D(\Omega_0)$, визначений формулою

$$(\psi_0, F_{m+1})_2 = \lim_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0} \int\limits_{\Omega_{0\varepsilon}} \psi_0'(x)u(x,\varepsilon_1)dx, \quad \psi_0 \in D(\Omega_0). \tag{12}$$

З (11), враховуючи лему з [13, с. 70], одержуємо

$$|(\psi_0, F_{m+1})_2| \le |\int\limits_{\tilde{Q}_0^*} t^{\frac{r}{2b}} \tilde{\psi}'(x,t)u(x,t)dxdt| + |\int\limits_{\tilde{Q}_0^*} \Psi' F_0 dxdt| + \sum_{j=0}^{2b-1} |(\tilde{C}_j \Psi, \tilde{F}_j)_1|.$$

З доведення леми 4.2 з [5] випливає оцінка $|\tilde{\psi}(x,t)| \le C \sup\limits_{x\in\Omega_0, |\alpha|\le s} |D^\alpha \psi_0(x)|$, де $s = 2b\overline{(\frac{r}{2b})} + 2b \le \overline{r} + 2b$; $\sum\limits_{j=1}^{m} (\tilde{C}_j \Psi, \tilde{F}_j)_1$ також є лінійною функцією ψ_0 та її похідних до порядку $\overline{r}+2b$. Тому F_{m+1} – лінійний неперервний функціонал на $D(\Omega_0)$, $s(F_{m+1}) \le 2b + \overline{r}$.

Вибираючи $\psi_0 \in \mathcal{D}_{r+2b}(\overline{\Omega}_0)$, як вище знаходимо $\psi_i \in \mathcal{D}_{r+2b(1-i)}(\overline{\Omega}_0)$, $i = 1, \ldots, \overline{(\frac{r}{2b})}$ та $\Psi \in \mathcal{D}_r^*(\overline{Q}_0)$. Отже, функціонал (12) належить $\mathcal{D}'_{r+2b}(\overline{\Omega}_0)$.

Друге твердження теореми випливає з рівності (10).

При $\Phi_\varepsilon(\xi) = \sum\limits_{i=b}^{2b+\overline{r}-1} (\xi_n - \varepsilon)^i \varphi_i(\xi', \varepsilon)$ у формулах (10), (11) матимемо відмінними від нуля доданки тільки при $j = \overline{b, 2b + r - 1}$ і

$$|\Phi(\xi', \xi_n)| \le C\xi_n^b \cdot \sum_{|k|\le 2b+\overline{r}-p-1} \sup_{\xi'\subset S} |(\tfrac{\partial}{\partial \xi'})^k \varphi_p(\xi')|, \quad p = \overline{b, 2b-1}.$$

Тому аналогічно одержуємо третє твердження теореми. □

Зауваження 1. Теорема правильна при заміні $\mathcal{D}'_{r+2b}(\overline{\Omega}_0)$ на $Z'_{r+2b}(\overline{\Omega}_0)$, $\mathcal{D}'_{r+j+1}(\overline{Q}_1)$ на $Z'_{r+j+1}(Q_1, 0)$, відповідно, $\mathcal{D}_r^*(Q_0)$ на $Z_r^*(Q_0, 0)$.

Припущення:

F': $F_0 \in \mathcal{H}^\gamma(Q_0) \cap L_1(Q_0)$, $\gamma \in (0,1)$, $F_j \in D'(Q_1)$, $j = \overline{1,m}$, $F_{m+1} \in D'(Q_2)$, $s(F_j) \le s_j$, $j = \overline{1, m+1}$, $r \ge s'_0 = \max\limits_{1\le j\le m+1} (s_j - r_j - (j))$;

F: $F_0 \in \mathcal{H}^\gamma(Q_0) \cap L_1(Q_0)$, $\gamma \in (0,1)$, $F_1, \ldots, F_m \in D^{0\prime}(\overline{Q}_1)$, $F_{m+1} \in D^{0\prime}(\overline{Q}_2)$, $s(F_j) \le s_j$, $j = \overline{1, m+1}$, $r \ge s'_0$;

Fr: $F_0 \in \mathcal{H}^\gamma(Q_0) \cap L_1(Q_0)$, $\gamma \in (0,1)$, $r \ge 0$, $F_j \in \mathcal{D}'_{r+r_j+1}(\overline{Q}_1)$, $j = \overline{1,m}$, $F_{m+1} \in \mathcal{X}'_r(\overline{Q}_2)$ $(F_j \in D^{0\prime}(\overline{Q}_{(j)})$, $s(F_j) \le [r] + r_j + (j)$, $j = \overline{1, m+1})$;

Zr: $F_0 \in \mathcal{H}^\gamma(Q_0) \cap L_1(Q_0)$, $\gamma \in (0,1)$, $r \ge 0$, $F_j \in \mathcal{Z}'_{r+r_j+1}(\overline{Q}_1, 0)$, $j = \overline{1,m}$, $F_{m+1} \in Z'_{r+2b}(\overline{Q}_2)$.

Друге формулювання задачі (1)-(3). Нехай виконано одне з припущень **F'**, **F**, **Fr**, **Zr**. Знайти в області Q_0 розв'язок $u \in C_{x,t}^{2b,1}(Q_0) \cap M_r(\overline{Q}_0)$ системи (1), який набуває узагальнених початкових значень F_{m+1} (задовольняє умову (3) в сенсі (9)), а $B_j u$ набувають узагальнених крайових значень F_j, тобто

$$\lim_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0} \int\limits_{Q_{1\varepsilon\varepsilon_1}} \varphi(x,t) B_j u(x,t) dQ_1 = (\varphi, F_j)_1 \quad \forall\, \varphi \in D(Q_1). \tag{13}$$

Теорема 3. *За кожного з припущень* **F**, **Fr**, **Zr** *розв'язок* $u \in C_{x,t}^{2b,1}(Q_0) \cap M_r(\overline{Q}_0)$ *задачі (1)-(3) у першому формулюванні є її розв'язком у другому формулюванні й навпаки.*

Доведення. Вважаємо виконаним припущення **Fr**. В інших випадках доведення аналогічне.

Нехай $u \in C^{2b,1}_{x,t}(Q_0) \cap M_r(\overline{Q}_0)$ – розв'язок задачі в другому формулюванні, тобто є розв'язком задачі (1),(9),(13). Запишемо формулу Гріна для u та довільної $\psi \in \mathcal{X}_r(\overline{Q}_0)$ в області $Q_{0\varepsilon\varepsilon_1}$

$$\int\limits_{Q_{0\varepsilon\varepsilon_1}} (L^*\psi)' u dxdt - \int\limits_{Q_{0\varepsilon\varepsilon_1}} \psi' F_0 dxdt = \tag{14}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{Q_{1\varepsilon\varepsilon_1}} \left[\hat{C}_j \psi B_j u - \hat{B}_j \psi C_j u\right] dxdt + \int\limits_{\Omega_{0\varepsilon}} \psi(x,\varepsilon_1) u(x,\varepsilon_1) dx.$$

За припущенням теореми та за теоремою 2 існують границі при $\varepsilon, \varepsilon_1 \to 0$ кожного з доданків (14). Переходячи в (14) до границі, коли $\varepsilon, \varepsilon_1 \to 0$, застосовуючи до правої частини лему з [13, с. 70], умови (9), (13), одержимо

$$\int\limits_{Q_0} (L^*\psi)' u dxdt - \int\limits_{Q_0} \psi' F_0 dxdt =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \lim_{\varepsilon,\varepsilon_1 \to 0} \int\limits_{Q_{1\varepsilon\varepsilon_1}} \big(\lim_{\varepsilon \to 0} \big(\hat{C}_j \psi(x_\varepsilon, t)\big) \cdot B_j u(x_\varepsilon, t) dxdt -$$

$$- \sum_{j=1}^{m} \lim_{\varepsilon,\varepsilon_1 \to 0} \int\limits_{Q_{1\varepsilon\varepsilon_1}} \big(\lim_{\varepsilon \to 0} (\hat{B}_j \psi)(x_\varepsilon, t)\big) \cdot C_j u(x_\varepsilon, t) dxdt +$$

$$+ \lim_{\varepsilon,\varepsilon_1 \to 0} \int\limits_{\Omega_{0\varepsilon}} \big(\lim_{\varepsilon_1 \to 0} \psi'(x, \varepsilon_1)\big) u(x, \varepsilon_1) dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \lim_{\varepsilon,\varepsilon_1 \to 0} \int\limits_{Q_{1\varepsilon\varepsilon_1}} (\hat{C}_j \psi)(x,t)\big)(B_j u)(x,t) dxdt + \lim_{\varepsilon,\varepsilon_1 \to 0} \int\limits_{\Omega_{0\varepsilon}} \psi'(x,0) u(x,\varepsilon_1) dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} (\hat{C}_j \psi, F_j)_1 + (\psi(y,0), F_{m+1}(y))_2,$$

що й треба було довести – u задовольняє тотожність (6) для довільної $\psi \in \mathcal{X}_r(\overline{Q}_0)$.

Навпаки, якщо $u \in C^{2b,1}_{x,t}(Q_0) \cap M_r(\overline{Q}_0)$ – розв'язок задачі в першому формулюванні, тобто задовольняє тотожність (6) для довільної $\psi \in \mathcal{X}_r(\overline{Q}_0)$, то, зокрема, для $\psi \in D(Q_0)$ з (6) отримаємо $\int\limits_{\overline{Q}_0} (L^*\psi)' u dxdt - \int\limits_{\overline{Q}_0} \psi' F_0 dxdt = 0$. За гіпоеліптичністю оператора L, u – класичний розв'язок системи (1) в Q_0. З леми 1 випливає, що для довільних $\varphi_j \in \mathcal{D}_{r+2b-r_j-1}(\overline{Q}_1)$ $(D(Q_1))$, $j = \overline{1,m}$, $\varphi_{m+1} \in \mathcal{X}_r(\overline{\Omega}_0)$ $(D(\Omega_0))$ існує така $\psi \in \mathcal{X}_r(\overline{Q}_0)$, що $\hat{C}_j \psi(x_\varepsilon, t) \to \varphi_j(x,t)$ при $\varepsilon \to 0$, $j = \overline{1,m}$, $\psi(x,0) = \varphi_{m+1}(x)$, $x \in \overline{\Omega}_0$. Для такої ψ існує $(L^*\psi, u)_0 = \lim\limits_{\varepsilon,\varepsilon_1 \to 0} \int\limits_{Q_{0\varepsilon\varepsilon_1}} (L^*\psi)' u dxdt$, за теоремою 2 $B_j u$ набуває на $\overline{Q}_1$ деяких узагальнених крайових значень з $\mathcal{D}'_{r+r_j+1}(\overline{Q}_1)$, а $C_j u$ – з $\mathcal{D}'_{r+m_j+1}(\overline{Q}_1)$ (з $D'(Q_1)$ порядків сингулярностей $\leq \overline{r} + r_j$ та $\leq \overline{r} + m_j$ відповідно), u набуває деяких узагальнених початкових значень з $\mathcal{D}'_{r+2b}(\overline{\Omega}_0)$ (з $D'(\Omega_0)$ порядку сингулярності $\leq \overline{r} + 2b$). Тому існує границя при $\varepsilon, \varepsilon_1 \to 0$ кожного з доданків у (14). Переходячи до границі в (14) та віднімаючи одержану тотожність від (6), отримаємо

$$\lim_{\varepsilon,\varepsilon_1 \to 0} \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{Q_{1\varepsilon\varepsilon_1}} \left[(\hat{C}_j \psi) B_j u - (\hat{B}_j u) C_j u\right] dQ_{1\varepsilon} + \lim_{\varepsilon,\varepsilon_1 \to 0} \int\limits_{\Omega_{0\varepsilon}} \psi'(x,\varepsilon_1) u(x,\varepsilon_1) dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} (\hat{C}_j\psi, F_j)_1 + (\psi(x,0), F_{m+1})_2,$$

а використовуючи лему з [13, с. 70]

$$\lim_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0} \sum_{j=1}^{m} \int_{Q_{1\varepsilon\varepsilon_1}} \varphi_j(x,t)B_j u(x,t)dxdt + \lim_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0} \int_{\Omega_{0\varepsilon}} \varphi'_{m+1}(x)u(x,\varepsilon_1)dx =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} (\varphi_j, F_j)_1 + (\varphi_{m+1}(x), F_{m+1})_2.$$

Звідси, враховуючи довільність $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m+1}$, одержуємо (9) та (13). □

Теорема 4. *За кожного з припущень* **F'**, **F**, **Fr**, **Zr** *вектор-функція*

$$u(x,t) = \int_{\overline{Q}_0} G_0(x,t,y,\tau)F_0(y,\tau)dyd\tau + \tag{15}$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} (G_j(x,t,\cdot,\cdot), F_j)_1 + (G_0(x,t,\cdot,0), F_{m+1})_2, \quad (x,t) \in Q_0$$

є розв'язком класу $C^{2b,1}_{x,t}(Q_0) \cap M_r(Q_0)$ *задачі (1), (9), (13).*

Доведення. За наведеними вище властивостями матриць G_j, $j = \overline{0, m+1}$ вектор-функція (15) є класичним розв'язком системи (1) в Q_0, а з використанням аналога теореми Фубіні ([12, с. 132]), переконуємось, що вона задовольняє умови (9) та (13). Покажемо, що $u \in M_r(Q_0)$. Розглянемо спочатку випадки **F'** та **F**.

За означенням порядку сингулярності узагальненої функції

$$u(x,t) = \int_{\overline{Q}_0} G_0(x,t,y,\tau)F_0(y,\tau)dyd\tau + \sum_{|\alpha|\le s_{m+1}} D^{\alpha}_y \int_{\Omega_0} G_0(x,t,y,0)f_{m+1,\alpha}(y)dy +$$
$$+ \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha|\le s_j} D^{\overline{\alpha}}_{y,\tau} \int_{Q_1} G_j(x,t,y,\tau)\cdot f_{j,\overline{\alpha}}(y,\tau)dyd\tau,$$

де $f_{j\overline{\alpha}} \in L_1(Q_1)$.

Вище показано обмеженість $\int_{Q_0} \varrho^r(x,t)G_{0ik}(x,t,y,\tau)dxdt$ в $\overline{Q}_0$, $i,k = \overline{1,p}$. Якщо рівномірно за $y \in \overline{Q}_1$, $\tau \in [0,T]$ обмежені $\int_{Q_0} \varrho^r(x,t)\sum_{k=1}^{p}\left|D^{\alpha}_y G_{0ik}(x,t,y,0)\right|dxdt$ та $\int_{Q_0} \varrho^r(x,t)\sum_{k=1}^{p}\left|D^{\overline{\alpha}}_{y,\tau} G_{jk}(x,t,y,\tau)\right|dxdt$, відповідно для $|\alpha| \le s_{m+1}$, $i,k = \overline{1,p}$, $|\overline{\alpha}| \le s_j$, $j = \overline{1,m}$, то одержимо скінченність

$$\int_{Q_0}\Big(\int_{Q_0} \varrho^r(x,t)\sum_{k=1}^{p}|G_{0ik}(x,t,y,\tau)|dxdt\Big)\left|F_{0k}(y,\tau)\right|dyd\tau +$$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{|\alpha|\le s_j}\int_{Q_1}\Big(\int_{Q_0} \varrho^r(x,t)\sum_{k=1}^{p}\left|D^{\overline{\alpha}}_{y,\tau}G_{jik}(x,t,y,\tau)\right|dxdt\Big)\left|f_{j\overline{\alpha}k}(y,\tau)\right|dyd\tau +$$

$$\sum_{|\alpha|\le s_{m+1}}\int_{\Omega_0}\Big(\int_{Q_0}\varrho^r(x,t)\sum_{k=1}^{p}\big|D_y^{\alpha}G_{0ik}(x,t,y,0)\big|dxdt\Big)|f_{m+1,\alpha,k}(y)|dy.$$

Враховуючи оцінки (5), одержуємо, що при $r-\lambda_j>-1$ для всіх $|\overline{\alpha}|\le s_j$, $j=\overline{1,m}$, тобто при $r>s_0'$, виконується $u\in M_r(\overline{Q}_0)$.

У випадку припущення **Fr** використовуємо лему 2, за якою

$$\int_{Q_0}\varrho^r(x,t)G_j(x,t,\cdot,*)dxdt\in\mathcal{D}_{r+r_j+1}(\overline{Q}_1),\quad j=\overline{1,m},$$
$$\int_{Q_0}\varrho^r(x,t)G_{m+1}(x,t,\cdot,0)dxdt\in\mathcal{D}_{r+2b}(\overline{Q}_2).$$

За аналогом теореми Фубіні [12, с. 132]

$$\int_{Q_0}\varrho^r(x,t)(G_j(x,t,y,\tau),F_j(y,\tau))_1dxdt=\Big(\int_{Q_0}\varrho^r(x,t)G_j(x,t,y,\tau)dxdt,F_j(y,\tau)\Big)_1,$$

$$\int_{Q_0}\varrho^r(x,t)(G_0(x,t,y,0),F_{m+1}(y))_2=\Big(\int_{Q_0}\varrho^r(x,t)G_0(x,t,y,0)dxdt,F_{m+1}(y)\Big)_2,$$

тому ці вирази є скінченними для довільного $r\ge 0$. Аналогічно у випадку припущення **Zr**. □

Наслідок 1. *За кожного з припущень* **F**, **Fr**, **Zr** *вектор-функція (15) є єдиним розв'язком задачі (1)-(3) у двох формулюваннях.*

Висновки. Одержано теореми про існування, єдиність та зображення розв'язку нормальної параболічної крайової задачі з правими частинами з вагових просторів узагальнених функцій. Доведено теорему про умови еквівалентності у двох різних формулюваннях регулярного в області розв'язку при крайових і початкових даних з вагових просторів узагальнених функцій.

Список використаної літератури

1. *Житарашу Н.В.* Теоремы об изоморфизмах в L_p-теории слабых решений параболических граничных задач / *Житарашу Н.В.* // Докл. АН СССР. – 1981. – Т. 260, № 5. – С. 1054-1058.
2. *Ивасишен С.Д.* Сопряженные операторы Грина. Обобщенные решения параболических граничных задач с нормальными граничными условиями / *Ивасишен С.Д.* // Докл. АН СССР. – 1971. – Т. 197, № 2. – С. 261-264.
3. *Ивасишен С.Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач / *Ивасишен С.Д.* – К., 1990.
4. *Лопушанская Г.П.* О решении с помощью матрицы Грина параболической граничной задачи в пространстве обобщенных функций / *Лопушанская Г.П.* // Укр. мат. журн. – 1986. – Т. 38, № 6. – С. 795-798.
5. *Лопушанська Г.П.* Крайові задачі у просторі узагальнених функцій D' / *Лопушанська Г.П.* – Львів, 2002.
6. *Гупало А.С.* Об обобщенных граничных значениях решения однородного параболического уравнения второго порядка / *Гупало А.С., Лопушанская Г.П.* // Методы исследования дифференциальных и интегральных операторов. – К., 1989. – С. 54-59.

7. *Солонников В.А.* Оценки решений параболических начально-краевых задач в весовых гельдеровских нормах / *Солонников В.А., Хачатрян А.Г.* // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1980. – Т. 147. – С. 147-155.
8. *Житарашу Н.В.* О разрешимости параболической граничной задачи при наличии степенных особенностей в правых частях / *Житарашу Н.В.* // Мат. исследования. – 1987. – № 92. – С. 69-97.
9. *Лопушанська Г.П.* Про розв'язок параболічної граничної задачі із сильними степеневими особливостями в правих частинах / *Лопушанська Г.П.* // Мат. студії. – 2001. – Т. 15, № 2. – С. 179-190.
10. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы / *Эйдельман С.Д.* – М., 1964.
11. *Лопушанська Г.* Узагальнені крайові значення розв'язків півлінійних еліптичних та параболічних рівнянь / *Лопушанська Г., Чмир О.* // Нелин. гран. задачи. – 2007. – Т. 17. – С. 50-73.
12. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики / *Владимиров В.С.* – М., 1981.
13. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй спецкурс / *Шилов Г.Е.* – М., 1965.
14. *Лопушанська Г.* Про деякі властивості спряжених операторів Ґріна параболічної крайової задачі / *Лопушанська Г., Чмир О.* // Наук. вісник Чернів. ун-ту: зб. наук. пр. Математика. – 2004. – Вип. 191-192. – С. 82-88.

Стаття: надійшла до редакції 29.03.2010
прийнята до друку 21.09.2011

GENERALIZED INITIAL AND BOUNDARY VALUES OF THE SOLUTIONS OF THE PARABOLIC SYSTEM EQUATIONS

Halyna LOPUSHANSKA

Ivan Franko National University of L'viv,
Universytets'ka Str., 1, L'viv, 79000
e-mail: lhp@ukr.net

The uniquely existence theorems and the representation of the solutions of the linear normal parabolic boundary value problems with right-hand sides from the weight spaces of the generalized functions are obtained. The conditions of the equivalence in two definitions of the regular solution in domain under boundary and initial data from some weight spaces of the generalized functions are founded.

Key words: normal parabolic boundary value problem, weight functional space, generalized function, generalized boundary values, generalized initial values.

ОБОБЩЕННЫЕ НАЧАЛЬНЫЕ И КРАЕВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Галина ЛОПУШАНСКАЯ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: lhp@ukr.net

Доказаны теоремы существования и единственности, получены изображения решений линейных нормальных параболических краевых задач при краевых и начальных данных с весовых пространств обобщенных функций. Найдено условия эквивалентности регулярного в области решения задачи в двух формулировках.

Ключевые слова: нормальная параболическая краевая задача, обобщенная функция, весовое функциональное пространство, обобщенные краевые значения, обобщенные начальные значения.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 74. С. 143–156
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 74. P. 143–156

УДК 517.53+517.54

ПРО ЦІЛІ РОЗВ'ЯЗКИ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПОЛІНОМІАЛЬНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Ярослав МАГОЛА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: mahola@ukr.net

Досліджено властивості цілих розв'язків диференціальних рівнянь вигляду

$$z^n w^{(n)} + \sum_{j=n-m+1}^{n-1} a_{n-j+1}^{(j)} z^j w^{(j)} + \sum_{j=0}^{n-m} (a_{n-j-m+1}^{(j)} z^m + a_{n-j+1}^{(j)}) z^j w^{(j)} = 0,$$

де $n \geqslant 3$, $2 \leqslant m \leqslant n$ і $a_k^{(j)}$ – комплексні числа.

Зазначено умови на параметри $a_k^{(j)}$, за яких існує цілий розв'язок f цього рівняння такий, що всі похідні $f^{(lm-1)}, (l \in \mathbb{N})$ є опуклими або близькими до опуклих функціями в $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$. Вивчено зростання такої функції f.

Ключові слова: ціла функція, опуклість, близькість до опуклості, регулярне зростання.

1. Вступ. Однолиста аналітична в $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функція

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j z^j \tag{1}$$

називається опуклою, якщо $f(\mathbb{D})$ – опукла область. Добре відомо [1, с. 203], що умова $\mathrm{Re}\{1 + zf''(z)/f'(z)\} > 0 (z \in \mathbb{D})$ є необхідною і достатньою для опуклості функції f в $\mathbb{D}$. Функція f називається [1, с. 583] близькою до опуклої в $\mathbb{D}$, якщо існує така опукла в $\mathbb{D}$ функція Φ, що $\mathrm{Re}\{f'(z)/\Phi'(z)\} > 0 (z \in \mathbb{D})$. Кожна близька до опуклої в $\mathbb{D}$ функція є однолистою в $\mathbb{D}$ і $f_1 \neq 0$ [1, с. 583]. Близька до опуклої в $\mathbb{D}$ функція f характеризується тим, що $f(\mathbb{D})$ – лінійно досяжна зовні область [1, с. 584], тобто $\mathbb{C}\backslash\overline{f(\mathbb{D})}$ можна заповнити проведеними з $\partial f(\mathbb{D})$ променями, які належать до $\mathbb{C}\backslash\overline{f(\mathbb{D})}$. Оскільки $f_1 \neq 0$, то звідси випливає, що функція (1) близька до опуклої в $\mathbb{D}$ тоді і лише тоді, коли близькою до опуклої в $\mathbb{D}$ є функція $F(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} (f_j/f_1) z^j$.

С. Шах [2], вивчаючи властивості цілих розв'язків диференціального рівняння

$$z^2w'' + (a_1^{(1)}z^2 + a_2^{(1)}z)w' + (a_1^{(0)}z^2 + a_2^{(0)}z + a_3^{(0)})w = 0, \tag{2}$$

довів таку теорему.

Теорема 1. *Якщо*

$$a_1^{(0)} \neq 0, \quad a_1^{(1)} = a_2^{(0)} = a_3^{(0)} = 0, \quad a_2^{(1)} \geqslant 1, \quad |a_1^{(0)}|^{1/2} \leqslant \log(2+\sqrt{3}) = 1.31...,$$

то існує цілий розв'язок (1) *рівняння* (2) *з* $f_0 = 1, f_{2j+1} = 0 (j \geqslant 0)$ *такий, що всі непарні похідні* $f', f''', \ldots$ *однолисті в* $\mathbb{D}$ *і* $\ln M_f(r) = (1+o(1))\sqrt{|a_1^{(0)}|r}$, *при* $r \to \infty$, *де* $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$.

Безпосереднім узагальненням рівняння С. Шаха є диференціальне рівняння

$$z^n w^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{j+1} a_k^{(n-j)} z^{n-k+1} \right) w^{(n-j)} = 0. \tag{3}$$

В [3] доведено теорему.

Теорема 2. *Аналітична в околі початку координат функція* (1) *є розв'язком диференціального рівняння* (3) *тоді і лише тоді, коли для кожного* $s \in \mathbb{Z}_+$

$$\sum_{p=0}^{\min\{s,n\}} \sum_{k=0}^{\min\{s,n\}-p} a_{n+1-k-p}^{(k)} \frac{(s-p)!}{(s-k-p)!} f_{s-p} = 0, \tag{4}$$

де $a_1^{(n)} = 1$.

Вважатимемо, що $n \geqslant 3$, $2 \leqslant m \leqslant n$:

1) $a_k^{(j)} = 0$ для $k = 1, 2, ..., n-j-m, n-j-m+2, ..., n-j$ та $j = \overline{0, n-m-1}$;
2) $a_k^{(n-m)} = 0$ для $k = \overline{2, m}$;
3) $a_k^{(n-j)} = 0$ для $k = \overline{1, j}$ та $j = \overline{1, m-1}$.

Тоді рівняння (3) у цьому випадку можна записати у вигляді

$$z^n w^{(n)} + \sum_{j=n-m+1}^{n-1} a_{n-j+1}^{(j)} z^j w^{(j)} + \sum_{j=0}^{n-m} (a_{n-j-m+1}^{(j)} z^m + a_{n-j+1}^{(j)}) z^j w^{(j)} = 0, \tag{5}$$

а з теореми 2 неважко отримати такий наслідок.

Твердження 1. *Нехай* $n \geqslant 3$, $2 \leqslant m \leqslant n$. *Аналітична в околі початку координат функція* (1) *є розв'язком диференціального рівняння* (5) *тоді і лише тоді, коли*

$$\sum_{k=0}^{s} a_{n+1-k}^{(k)} \frac{s!}{(s-k)!} f_s = 0, \quad 0 \leqslant s \leqslant m-1, \tag{6}$$

і для $s \geqslant m$

$$\sum_{k=0}^{\min\{s,n\}} a_{n+1-k}^{(k)} \frac{s!}{(s-k)!} f_s + \sum_{k=0}^{\min\{s,n\}-m} a_{n+1-k-m}^{(k)} \frac{(s-m)!}{(s-k-m)!} f_{s-m} = 0, \tag{7}$$

де $a_1^{(n)} = 1$.

Припустимо, що $a_{n+1}^{(0)}=0$. Якщо виберемо $f_0=1$, $f_1=\cdots=f_{m-1}=0$, то умова (6) буде виконуватись, і отже, розв'язок рівняння (5) шукатимемо у вигляді

$$f(z)=1+\sum_{j=1}^{\infty}f_{mj}z^{mj}=1+f_mz^m+f_{2m}z^{2m}+\cdots. \tag{8}$$

2. Основна теорема. Справджується таке твердження.

Теорема 3. *Нехай $n\geqslant 3$, $2\leqslant m\leqslant n$ і $j_0=[n/m]$, а $\varkappa_m=\max\{\varkappa_{1,m},\varkappa_{2,m}\}$, де*

$$\varkappa_{1,m}=\max\left\{\left|\sum_{k=m}^{pm}\frac{a_{n+1-k}^{(k-m)}}{(pm-k)!}\right|\left|\sum_{k=0}^{pm}\frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(pm-k)!}\right|^{-1},\quad p=\overline{1,j_0}\right\} \tag{9}$$

і

$$\varkappa_{2,m}=\max\left\{\left|\sum_{k=m}^{n}\frac{a_{n+1-k}^{(k-m)}}{(pm-k)!}\right|\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(pm-k)!}\right|^{-1},\quad p>j_0+1\right\}. \tag{10}$$

Припустимо, що $a_{n+1}^{(0)}=0$. Тоді існує цілий розв'язок (8) *диференціального рівняння* (5) *з такими властивостями:*
а) якщо $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\varkappa_m^j}{(jm)!}\leqslant 1$, то всі похідні $f^{(lm-1)}(l\in\mathbb{N})$ близькі до опуклих в $\mathbb{D}$;
б) якщо $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(jm+1)\varkappa_m^j}{(jm)!}\leqslant 1$, то всі похідні $f^{(lm-1)}(l\in\mathbb{N})$ опуклі в $\mathbb{D}$;
в) функція f має регулярне зростання, тобто при $r\to\infty$

$$\ln M_f(r)=\frac{m+q-1}{m}(1+o(1))\left(\sqrt[m]{|a_q^{(n-m-q+1)}|}r\right)^{\frac{m}{m+q-1}}, \tag{11}$$

де $q=\min\Big\{j\in\{1,...,n+1-m\}:a_j^{(n-m-j+1)}\neq 0\Big\}$.

Доведення. Почнемо з твердження *а*. Для функції (8) формула (7) набула вигляду

$$\sum_{k=0}^{\min\{jm,n\}}a_{n+1-k}^{(k)}\frac{(jm)!}{(jm-k)!}f_{jm}+$$

$$+\sum_{k=0}^{\min\{jm,n\}-m}a_{n+1-k-m}^{(k)}\frac{((j-1)m)!}{((j-1)m-k)!}f_{(j-1)m}=0,\quad j\geqslant 1.$$

Зрозуміло, що $j_0=\max\{j:jm\leqslant n\}\geqslant 1$, а з формули (7) для $j\leqslant j_0$ отримаємо $\min\{jm,n\}=jm$, і отже,

$$f_{jm}=-\frac{((j-1)m)!}{(jm)!}\frac{\sum\limits_{k=0}^{(j-1)m}\frac{a_{n+1-k-m}^{(k)}}{((j-1)m-k)!}}{\sum\limits_{k=0}^{jm}\frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(jm-k)!}}f_{(j-1)m}=$$

$$= \cdots = \frac{(-1)^j}{(jm)!} \prod_{s=1}^{j} \frac{\sum\limits_{k=0}^{(j-s)m} \frac{a_{n+1-k-m}^{(k)}}{((j-s)m-k)!}}{\sum\limits_{k=0}^{(j-s+1)m} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(j-s+1)m-k)!}}. \tag{12}$$

Ця формула правильна і для j_0, тобто

$$f_{j_0 m} = \frac{(-1)^{j_0}}{(j_0 m)!} \prod_{s=1}^{j_0} \frac{\sum\limits_{k=0}^{(j_0-s)m} \frac{a_{n+1-k-m}^{(k)}}{((j_0-s)m-k)!}}{\sum\limits_{k=0}^{(j_0-s+1)m} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j_0-s+1)m-k)!}}. \tag{13}$$

Якщо $j > j_0$, то $\min\{jm, n\} = n$ і з (7) одержуємо

$$f_{jm} = -\frac{((j-1)m)!}{(jm)!} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-m} \frac{a_{n+1-k-m}^{(k)}}{((j-1)m-k)!}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(jm-k)!}} f_{(j-1)m} =$$

$$= (-1)^{j-j_0} \frac{(j_0 m)!}{(jm)!} \prod_{s=1}^{j-j_0} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-m} \frac{a_{n+1-k-m}^{(k)}}{((j-s)m-k)!}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j-s+1)m-k)!}} f_{j_0 m} =$$

$$= (-1)^{j-j_0} \frac{(j_0 m)!}{(jm)!} (-1)^{j_0} \frac{1}{(j_0 m)!} \prod_{s=1}^{j-j_0} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-m} \frac{a_{n+1-k-m}^{(k)}}{((j-s)m-k)!}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j-s+1)m-k)!}} \times$$

$$\times \prod_{s=1}^{j_0} \frac{\sum\limits_{k=0}^{(j_0-s)m} \frac{a_{n+1-k-m}^{(k)}}{((j_0-s)m-k)!}}{\sum\limits_{k=0}^{(j_0-s+1)m} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j_0-s+1)m-k)!}}.$$

Отже, для $j > j_0$

$$f_{jm} = \frac{(-1)^j}{(jm)!} \prod_{s=1}^{j-j_0} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-m} \frac{a_{n+1-k-m}^{(k)}}{((j-s)m-k)!}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j-s+1)m-k)!}} \prod_{s=1}^{j_0} \frac{\sum\limits_{k=0}^{(j_0-s)m} \frac{a_{n+1-k-m}^{(k)}}{((j_0-s)m-k)!}}{\sum\limits_{k=0}^{(j_0-s+1)m} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j_0-s+1)m-k)!}}. \tag{14}$$

Легко перевірити, що для $(lm-1)$-ї похідної функції (8) правильна рівність

$$f^{(lm-1)}(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{((j+l)m)!}{(jm+1)!}f_{jm+lm}z^{jm+1}=\frac{(lm)!}{1!}f_{lm}z+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{((j+l)m)!}{(jm+1)!}f_{(j+l)m}z^{jm+1}.$$

Функція $f^{(lm-1)}$ є опуклою чи близькою до опуклої тоді і лише тоді, коли такою є функція

$$F_l(z)=z+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{((j+l)m)!}{(jm+1)!(lm)!}\frac{f_{(j+l)m}}{f_{lm}}z^{jm+1}=z+\sum_{j=1}^{\infty}F_{jm+1}^{(l)}z^{jm+1}. \tag{15}$$

Якщо $j+l\leqslant j_0$, то з огляду на (12)

$$F_{jm+1}^{(l)}=\frac{(-1)^j}{(jm+1)!}\prod_{s=1}^{j}\frac{\sum\limits_{k=0}^{(j+l-s)m}\dfrac{a_{n+1-k-m}^{(k)}}{((j+l-s)m-k)!}}{\sum\limits_{k=0}^{(j+l-s+1)m}\dfrac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j+l-s+1)m-k)!}}. \tag{16}$$

Якщо $j+l>j_0$ і $l\leqslant j_0$, то з огляду на (12) і (14)

$$F_{jm+1}^{(l)}=\frac{(-1)^j}{(jm+1)!}\prod_{s=1}^{j-(j_0-l)}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-m}\dfrac{a_{n+1-k-m}^{(k)}}{((j+l-s)m-k)!}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j+l-s+1)m-k)!}}\times$$

$$\times\prod_{s=1+l}^{j_0}\frac{\sum\limits_{k=0}^{(j_0+l-s)m}\dfrac{a_{n+1-k-m}^{(k)}}{((j_0+l-s)m-k)!}}{\sum\limits_{k=0}^{(j_0+l-s+1)m}\dfrac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j_0+l-s+1)m-k)!}}. \tag{17}$$

Нарешті, якщо $l>j_0$, то з огляду на (14)

$$F_{jm+1}^{(l)}=\frac{(-1)^j}{(jm+1)!}\prod_{s=1}^{j}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-m}\dfrac{a_{n+1-k-m}^{(k)}}{((j+l-s)m-k)!}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j+l-s+1)m-k)!}}. \tag{18}$$

Оцінимо $|F_{jm+1}|$. Для $j+l\leqslant j_0$ з формули (16) отримаємо

$$|F_{jm+1}^{(l)}|=\frac{1}{(jm+1)!}\prod_{s=1}^{j}\left|\frac{\sum\limits_{k=m}^{(j+l-s+1)m}\dfrac{a_{n+1-k}^{(k-m)}}{((j+l-s+1)m-k)!}}{\sum\limits_{k=0}^{(j+l-s+1)m}\dfrac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j+l-s+1)m-k)!}}\right|\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(jm+1)!}\prod_{s=1}^{j}\max\left\{\left|\frac{\sum\limits_{k=m}^{(j+l-s+1)m}\frac{a_{n+1-k}^{(k-m)}}{((j+l-s+1)m-k)!}}{\sum\limits_{k=0}^{(j+l-s+1)m}\frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j+l-s+1)m-k)!}}\right| : j+l\leqslant j_0, 1\leqslant s\leqslant j\right\}.$$

Легко побачити таке: якщо $j+l\leqslant j_0$ і $1\leqslant s\leqslant j$, то $j+l-s+1\leqslant j_0$. Тому з попередньої нерівності отримуємо

$$|F_{jm+1}^{(l)}|\leqslant \frac{1}{(jm+1)!}\prod_{s=1}^{j}\varkappa_{1,m}=\frac{\varkappa_{1,m}^{j}}{(jm+1)!}. \tag{19}$$

Якщо ж $l>j_0$, то з (18) одержуємо

$$|F_{jm+1}^{(l)}| = \frac{1}{(jm+1)!}\prod_{s=1}^{j}\left|\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-m}\frac{a_{n+1-k-m}^{(k)}}{((j+l-s)m-k)!}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j+l-s+1)m-k)!}}\right| =$$

$$= \frac{1}{(jm+1)!}\prod_{s=1}^{j}\left|\frac{\sum\limits_{k=m}^{n}\frac{a_{n+1-k}^{(k-m)}}{((j+l-s+1)m-k)!}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j+l-s+1)m-k)!}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(jm+1)!}\prod_{s=1}^{j}\max\left\{\left|\frac{\sum\limits_{k=m}^{n}\frac{a_{n+1-k}^{(k-m)}}{((j+l-s+1)m-k)!}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j+l-s+1)m-k)!}}\right| : l>j_0, 1\leqslant s\leqslant j\right\}.$$

Якщо $l>j_0$ і $1\leqslant s\leqslant j$, то $j+l-s+1\geqslant j_0+2\geqslant j_0+1$. Тому з останньої нерівності отримуємо оцінку

$$|F_{jm+1}^{(l)}|\leqslant \frac{1}{(jm+1)!}\prod_{s=1}^{j}\varkappa_{2,m}=\frac{\varkappa_{2,m}^{j}}{(jm+1)!}. \tag{20}$$

Нарешті, якщо $j+l>j_0$ і $l\leqslant j_0$, то з формули (17) одержуємо

$$|F_{jm+1}^{(l)}|\leqslant \frac{\varkappa_{1,m}^{j_0-l}\varkappa_{2,m}^{j-(j_0-l)}}{(jm+1)!}. \tag{21}$$

Отже, у всіх трьох випадках правильна нерівність

$$|F_{jm+1}^{(l)}|\leqslant \frac{\varkappa_{m}^{j}}{(jm+1)!}. \tag{22}$$

Тепер використаємо таку лему [4, 5, 6].

Лема 1. *Якщо* $f(z) = z + \sum\limits_{s=2}^{\infty} f_s z^s$ *і* $\sum\limits_{s=2}^{\infty} s|f_s| \leqslant 1$, *то* f *є близькою до опуклої в* $\mathbb{D}$.

За цією лемою функція $F_l(z)$ (а звідси і $f^{(lm-1)}(z)(l \geqslant 1)$) є близькою до опуклої в $\mathbb{D}$, якщо $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{\varkappa_m^j}{(jm)!} \leqslant 1$, тобто твердження *а* доведено.

Для доведення твердження *б* використаємо таку лему [6].

Лема 2. *Якщо* $f(z) = z + \sum\limits_{s=2}^{\infty} f_s z^s$ *і* $\sum\limits_{s=2}^{\infty} s^2|f_s| \leqslant 1$, *то* f *є опуклою в* $\mathbb{D}$.

За цією лемою з (22) отримуємо твердження *б*.

Нарешті, доведемо твердження *в*. Для $j \geqslant j_0$ з (7) отримуємо

$$(jm)! \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(jm-k)!} f_{jm} = -((j-1)m)! \sum_{k=0}^{n-m} \frac{a_{n+1-k-m}^{(k)}}{((j-1)m-k)!} f_{(j-1)m}.$$

Оскільки $a_1^{(n)} = 1$, то

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(jm-k)!} = \frac{a_1^{(n)}}{(jm-n)!} + \frac{a_2^{(n-1)}}{(jm+1-n)!} + \cdots + \frac{a_{n+1}^{(0)}}{(jm)!} = \frac{1+o(1)}{(jm-n)!}, \quad j \to \infty.$$

З іншого боку, якщо $a_1^{(n-m)} \neq 0$, то

$$\sum_{k=0}^{n-m} \frac{a_{n+1-k-m}^{(k)}}{((j-1)m-k)!} = \frac{a_1^{(n-m)}}{(jm-n)!} + \frac{a_2^{(n-m-1)}}{(jm+1-n)!} +$$

$$+ \cdots + \frac{a_{n+1-m}^{(0)}}{(jm-m)!} = \frac{a_1^{(n-m)}}{(jm-n)!}(1+o(1)), \quad j \to \infty.$$

Якщо ж $a_1^{(n-m)} = a_2^{(n-m-1)} = \cdots = a_{q-1}^{(n-m-q+2)} = 0$ і $a_q^{(n-m-q+1)} \neq 0$, то при $j \to \infty$

$$\sum_{k=0}^{n-m} \frac{a_{n+1-k-m}^{(k)}}{((j-1)m-k)!} = \frac{a_q^{(n-m-q+1)}}{(jm-n+q-1)!} + \cdots + \frac{a_{n+1-m}^{(0)}}{((j-1)m)!} = \frac{a_q^{(n-m-q+1)}(1+o(1))}{(jm+q-n-1)!}.$$

Тому

$$\frac{(jm)!}{(jm-n)!} f_{jm} = -(1+o(1))((j-1)m)! \frac{a_q^{(n-m-q+1)}}{(jm-n+q-1)!} f_{(j-1)m}, \quad j \to \infty,$$

звідки

$$f_{jm} = -\frac{(1+o(1))}{(jm)^{m+q-1}} a_q^{(n-m-q+1)} f_{(j-1)m}, \quad j \to \infty.$$

Отже, для кожного $\varepsilon \in (0,1)$ і всіх $j \geqslant j_0(\varepsilon)$

$$\frac{(1-\varepsilon)}{(jm)^{m+q-1}} |a_q^{(n-m-q+1)}||f_{(j-1)m}| \leqslant |f_{jm}| \leqslant \frac{(1+\varepsilon)}{(jm)^{m+q-1}} |a_q^{(n-m-q+1)}||f_{(j-1)m}|.$$

Тому для всіх $j \geqslant 1$

$$K_1 \frac{((1-\varepsilon)|a_q^{(n-m-q+1)}|)^j}{\prod\limits_{s=0}^{j} (sm)^{m+q-1}} \leqslant |f_{jm}| \leqslant K_2 \frac{((1+\varepsilon)|a_q^{(n-m-q+1)}|)^j}{\prod\limits_{s=0}^{j} (sm)^{m+q-1}},$$

тобто

$$K_1 \frac{\left(\sqrt[m]{(1-\varepsilon)|a_q^{(n-m-q+1)}|}\right)^{jm}}{\prod\limits_{s=0}^{j} (sm)^{m+q-1}} \leqslant |f_{jm}| \leqslant K_2 \frac{\left(\sqrt[m]{(1+\varepsilon)|a_q^{(n-m-q+1)}|}\right)^{jm}}{\prod\limits_{s=0}^{j} (sm)^{m+q-1}}, \tag{23}$$

де K_1, K_2 – додатні сталі.

Розглянемо функцію

$$f^*(r) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r^{jm}}{\prod\limits_{s=0}^{j} (sm)^p}, \quad p = m+q-1 \geqslant 2. \tag{24}$$

Нехай $\mu_{f^*}(r)$ – максимальний член ряду (24), а $\nu_{f^*}(r)$ – його центральний індекс. Оскільки $r_{jm} = (jm)^{p/m} \uparrow \infty,\ j \to \infty$, то $\nu_{f^*}(r) = jm$ при $r_{(j-1)m+1} \leqslant r < r_{jm+1}$. Звідси випливає, що $(\nu_{f^*}(r) - m)^{p/m} \leqslant r \leqslant (\nu_{f^*}(r))^{p/m}$, тобто $\nu_{f^*}(r) = (1+o(1))r^{m/p}$ при $r \to \infty$,

$$\ln \mu_{f^*}(r) = \ln \mu_{f^*}(r_0) + \int_{r_0}^{r} \frac{\nu_{f^*}(t)}{t} dt = (1+o(1))\frac{p}{m} r^{m/p}, r \to \infty, \tag{25}$$

а за теоремою Бореля про еквівалентність логарифмів максимуму модуля і максимального члена для цілих функцій скінченного порядку одержуємо

$$\ln M_{f^*}(r) = (1+o(1))\frac{p}{m} r^{m/p}, r \to \infty.$$

Завдяки (23) і довільності $\varepsilon > 0$ отримуємо твердження *в*.

Теорему 3 повністю доведено. □

Зауваження 1. Оскільки $m \geqslant 2$ і $a_{n+1}^{(0)} = 0$, то

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(pm-k)!} = \frac{a_{n+1}^{(0)}}{(pm)!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(pm-k)!} = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(pm-k)!} + \sum_{k=m}^{n} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(pm-k)!}, \tag{26}$$

Будемо вважати, що всі $a_{n+1-k}^{(k)} \geqslant 0 (k = \overline{1,n})$. Тоді

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(pm-k)!} \right| = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(pm-k)!} + \sum_{k=m}^{n} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(pm-k)!} \geqslant \sum_{k=m}^{n} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(pm-k)!}.$$

Якщо існує число $\eta_m > 0$ таке, що $|a_{n+1-k}^{(k-m)}| \leqslant \eta_m a_{n+1-k}^{(k)}$, то з (10) отримаємо оцінку $\varkappa_{2,m} \leqslant \eta_m$. Подібно можна показати, що і $\varkappa_{1,m} \leqslant \eta_m$. Тому з теореми 3 випливає таке твердження.

Твердження 2. *Нехай* $n \geqslant 3$, $2 \leqslant m \leqslant n$, $a_{n+1}^{(0)} = 0$ *і всі* $a_{n+1-k}^{(k)} \geqslant 0$ $(k = \overline{1,n})$. *Якщо* $|a_{n+1-k}^{(k-m)}| \leqslant \eta_m a_{n+1-k}^{(k)}$ *для всіх* $k \geqslant m$, *то існує цілий розв'язок* (8) *диференціального рівняння* (5) *з властивостями а, б і в, згаданими у теоремі 3, але з заміною* $\varkappa_m$ *на* η_m.

Зауваження 2. У випадку $m = 2$ умова твердження *а* теореми 3 $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \dfrac{\varkappa_2^j}{(2j)!} \leqslant 1$ рівносильна умові $\operatorname{ch}\sqrt{\varkappa_2} \leqslant 2$, тобто умові $\varkappa_2 \leqslant \ln^2(2+\sqrt{3})$, а умова твердження б) $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \dfrac{(2j+1)\varkappa_2^j}{(2j)!} \leqslant 1$ рівносильна умові $\operatorname{ch}\sqrt{\varkappa_2} + \sqrt{\varkappa_2}\operatorname{sh}\sqrt{\varkappa_2} \leqslant 2$ і виконується, якщо $\varkappa_2 < \ln^2 2$.

3. Наслідки та доповнення до теореми 3. Нехай спочатку $m = n$. Тоді диференціальне рівняння (5) набуде такого вигляду:

$$z^n w^{(n)} + \sum_{j=1}^{n-1} a_{n-j+1}^{(j)} z^j w^{(j)} + (a_1^{(0)} z^n + a_{n+1}^{(0)}) z w = 0. \tag{27}$$

З огляду на твердження 1 знову припустимо, що $a_{n+1}^{(0)} = 0$. Для того, щоб виконувалась умова (6), виберемо $f_0 = 1, f_1 = 0, f_2 = \cdots = f_{n-1} = 0$, тобто розв'язок рівняння (27) будемо шукати в такому вигляді:

$$f(z) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} f_{nj} z^{nj} = 1 + f_n z^n + f_{2n} z^{2n} + \cdots . \tag{28}$$

Дослідимо опуклість і близькість до опуклості непарних похідних цілого розв'язку (28) диференціального рівняння (27). Як і при доведенні теореми 3, використаємо лему 1 та лему 2. Оскільки тепер $j_0 = 1$, то, як вище для коефіцієнтів f_{jn}, легко одержуємо таку формулу:

$$f_{jn} = \frac{(-1)^j}{(jn+1)!} \prod_{s=1}^{j} \frac{\dfrac{a_1^{(0)}}{((j-s)n)!}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j-s+1)n-k)!}}, \quad j \geqslant 1. \tag{29}$$

Для коефіцієнтів функції F_l з (16) випливає формула

$$F_{jn+1}^{(l)} = \frac{(-1)^j}{(jn+1)!} \prod_{s=1}^{j} \frac{\dfrac{a_1^{(0)}}{((j+l-s)n)!}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j+l-s+1)n-k)!}}. \tag{30}$$

З (30) випливає, що

$$|F_{jn+1}^{(l)}| \leqslant \frac{1}{(jn+1)!}\prod_{s=1}^{j}\max\left\{\left|\frac{\dfrac{a_1^{(0)}}{((j+l-s)n)!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j+l-s+1)n-k)!}}\right| : l \geqslant 1, 1 \leqslant s \leqslant j\right\}.$$

Якщо приймемо

$$\varkappa_n = \max\left\{\left|\frac{a_1^{(0)}}{((p-1)n)!}\right|\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(pn-k)!}\right|^{-1}, p > 1\right\}, \tag{31}$$

то отримаємо таку оцінку:

$$|F_{jn+1}^{(l)}| \leqslant \frac{\varkappa_n^j}{(jn+1)!}. \tag{32}$$

З наведених вище міркувань випливає такий наслідок.

Наслідок 1. *Нехай* $n \geqslant 3$, *а* $\varkappa_n$ *визначається формулою* (31). *Припустимо, що* $a_{n+1}^{(0)} = 0$. *Тоді існує цілий розв'язок* (28) *диференціального рівняння* (27) *з такими властивостями:*

а) якщо $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\varkappa_n^j}{(jn)!} \leqslant 1$, *то всі похідні* $f^{(ln-1)}(l \in \mathbb{N})$ *є близькими до опуклих в* $\mathbb{D}$;

б) якщо $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(jn+1)\varkappa_n^j}{(jn)!} \leqslant 1$, *то всі похідні* $f^{(ln-1)}(l \in \mathbb{N})$ *є опуклими в* $\mathbb{D}$;

в) функція f *має регулярне зростання, тобто при* $r \to \infty$

$$\ln M_f(r) = (1 + o(1))\sqrt[n]{|a_1^{(0)}|}\,r.$$

Зауваження 3. Оскільки $a_1^{(n)} = 1$, то з (26) за умови $a_{n+1}^{(0)} = 0$ для $m = n$ отримуємо

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(pn-k)!} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(pn-k)!} + \frac{a_1^{(n)}}{((p-1)n)!} \geqslant \frac{1}{((p-1)n)!},$$

якщо всі $a_{n+1-k}^{(k)} \geqslant 0(k = \overline{1, n-1})$. Тому $\varkappa_n \leqslant |a_1^{(0)}|$ і правильне таке твердження.

Твердження 3. *Нехай* $n \geqslant 3, a_{n+1}^{(0)} = 0$ *і* $a_{n+1-k}^{(k)} \geqslant 0(1 \leqslant k \leqslant n-1)$. *Тоді існує цілий розв'язок* (28) *диференціального рівняння* (27) *з властивостями а, б і в, згаданими у наслідку 1, з заміною* $\varkappa_m$ *на* $|a_1^{(0)}|$.

Нехай тепер $m = 2$. Тоді рівняння (5) набуде такого вигляду:

$$z^n w^{(n)} + a_2^{(n-1)} z^{n-1} w^{(n-1)} + \sum_{j=0}^{n-2}(a_{n-j-1}^{(j)} z^2 + a_{n-j+1}^{(j)}) z^j w^{(j)} = 0. \tag{33}$$

З огляду на твердження 1 припустимо, що $a_{n+1}^{(0)} = 0$, і для того, щоб задовольнити умову (6), виберемо $f_0 = 1, f_1 = 0$.

Отже, розв'язок рівняння (33) будемо шукати в такому вигляді:

$$f(z) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} f_{2j} z^{2j} = 1 + f_2 z^2 + f_4 z^4 + \cdots . \tag{34}$$

У цьому випадку з теореми 3 з огляду на зауваження 2 отримаємо такий наслідок.

Наслідок 2. *Нехай* $n \geqslant 3$ *і* $j_0 = [n/2]$, *а* $\varkappa_2 = \max\{\varkappa_{1,2}, \varkappa_{2,2}\}$, *де*

$$\varkappa_{1,2} = \max\left\{ \left| \sum_{k=2}^{2p} \frac{a_{n+1-k}^{(k-2)}}{(2p-k)!} \right| \left| \sum_{k=0}^{2p} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(2p-k)!} \right|^{-1}, \quad p = \overline{1, j_0} \right\}$$

і

$$\varkappa_{2,2} = \max\left\{ \left| \sum_{k=2}^{n} \frac{a_{n+1-k}^{(k-2)}}{(2p-k)!} \right| \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(2p-k)!} \right|^{-1}, \quad p > j_0 + 1 \right\}.$$

Припустимо, що $a_{n+1}^{(0)} = 0$. *Тоді існує цілий розв'язок* (34) *диференціального рівняння* (33) *з такими властивостями:*
а) якщо $\varkappa_2 \leqslant \ln^2(2+\sqrt{3})$, *то всі похідні* $f^{(2l-1)} (l \in \mathbb{N})$ *є близькими до опуклих в* $\mathbb{D}$;
б) якщо $\varkappa_2 \leqslant \ln^2 2$, *то всі похідні* $f^{(2l-1)} (l \in \mathbb{N})$ *є опуклими в* $\mathbb{D}$;
в) функція f *має регулярне зростання, тобто при* $r \to \infty$

$$\ln M_f(r) = \frac{1+q}{2}(1+o(1)) \left(\sqrt{|a_q^{(n-q-1)}| r} \right)^{\frac{2}{1+q}},$$

де $q = \min\{j \in \{1, ..., n-1\} : a_j^{(n-j-1)} \neq 0\}$.

Припустимо тепер, що всі коефіцієнти рівняння (33) – дійсні числа. Тоді для дослідження близькості до опуклості непарних похідних розв'язку (34) рівняння (33) використаємо такий критерій Александера [7, с. 9].

Лема 3. *Якщо* $f(z) = z + \sum_{j=1}^{\infty} f_{2j+1} z^{2j+1}$ *і*

$$1 \geqslant 3f_3 \geqslant 5f_5 \geqslant \cdots \geqslant (2j-1)f_{2j-1} \geqslant (2j+1)f_{2j+1} \geqslant \ldots \geqslant 0, \tag{35}$$

то f *є близькою до опуклої в* $\mathbb{D}$.

З рекурентної формули (7) з $m = 2$ для $j \geqslant 1$ одержимо

$$f_{2(j+1)} = -\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\min\{2(j+1),n\}-2} a_{n-1-k}^{(k)} \frac{(2j)!}{(2j-k)!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{\min\{2(j+1),n\}} a_{n+1-k}^{(k)} \frac{(2(j+1))!}{(2(j+1)-k)!}} f_{2j} =$$

$$= -\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\min\{2(j+1),n\}-2} a_{n-1-k}^{(k)} \frac{(2j)!}{(2j-k)!}}{a_{n+1}^{(0)} + 2a_n^{(1)}(j+1) + \displaystyle\sum_{k=0}^{\min\{2(j+1),n\}-2} a_{n-1-k}^{(k+2)} \frac{(2(j+1))!}{(2j-k)!}} f_{2j}.$$

Нехай $a_{n+1}^{(0)} = a_n^{(1)} = 0$, $a_{n-1-k}^{(k)} \leqslant 0$, $a_{n-1-k}^{(k+2)} \geqslant 0$ і $|a_{n-1-k}^{(k)}| \leqslant 2a_{n-1-k}^{(k+2)}$, $0 \leqslant k \leqslant n-2$. Тоді для кожного $j \geqslant 1$

$$f_{2(j+1)} = \frac{(2j)!}{(2(j+1))!} \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\min\{2(j+1),n\}-2} \frac{|a_{n-1-k}^{(k)}|}{(2j-k)!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{\min\{2(j+1),n\}-2} \frac{a_{n-1-k}^{(k+2)}}{(2j-k)!}} f_{2j} \leqslant 2\frac{(2j)!}{(2(j+1))!} f_{2j}. \tag{36}$$

Оскільки $F_1^{(0)} = 1$, то при $m = 2$ функція (15) набуде вигляду

$$F_l(z) = z + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2(j+l))!}{(2j+1)!(2l)!} \frac{f_{2(j+l)}}{f_{2l}} z^{2j+1} = z + \sum_{j=1}^{\infty} F_{2j+1}^{(l)} z^{2j+1}. \tag{37}$$

Використовуючи формулу (36), доведемо, що коефіцієнти функції (37) задовольняють умову леми 3. Справді, для $j \geqslant 1$ одержимо

$$(2j+1)F_{2j+1}^{(l)} = (2j+1)\frac{(2(j+l))!}{(2j+1)!(2l)!} \frac{f_{2(j+l)}}{f_{2l}} \leqslant \frac{(2(j+l-1))!}{2j(2j-1)!(2l)!} \frac{f_{2(j+l-1)}}{f_{2l}} \leqslant (2j-1)F_{2j-1}^{(l)}.$$

Наступне твердження випливає з наведених вище міркувань.

Твердження 4. *Нехай* $a_{n+1}^{(0)} = a_n^{(1)} = 0$, $a_{n-1-k}^{(k)} \leqslant 0$, *та* $a_{n-1-k}^{(k+2)} \geqslant 0$ *для всіх* $0 \leqslant k \leqslant n-2$. *Якщо* $|a_{n-1-k}^{(k)}| \leqslant 2a_{n-1-k}^{(k+2)}$ *для всіх* $0 \leqslant k \leqslant n-2$, *то існує цілий розв'язок* (34) *диференціального рівняння* (33) *такий, що всі похідні* $f^{(2j+1)}$, $(j \in \mathbb{Z}_+)$ *є близькими до опуклих в* $\mathbb{D}$ *функціями.*

Зауваження 4. Оскільки $\ln^2(2+\sqrt{3}) < 2$, то у випадку дійсних $a_n^{(k)}$ твердження 4 посилює твердження *a* наслідку 2.

Зауваження 5. Питання послаблення умови $|a_{n-1-k}^{(k)}| \leqslant 2a_{n-1-k}^{(k)}$ твердження 4 залишається відкритим. Ми можемо стверджувати, що цю умову не можна замінити слабшою умовою $|a_{n-1-k}^{(k)}| \leqslant 2.5a_{n-1-k}^{(k)}$.

Справді, у випадку, коли $n = 3$ за умов твердження 4 рівняння (33) набуде вигляду

$$z^3 w''' + a_2^{(2)} z^2 w'' + a_1^{(1)} z^3 w' + a_2^{(0)} z^2 w = 0. \tag{38}$$

Виберемо $a_2^{(2)} = 1$ і $a_1^{(1)} = a_2^{(0)} = -\alpha^2$ і розглянемо функцію $f(z) = \mathrm{ch}(\alpha z)$. Легко перевірити, що ця функція задовольняє рівняння (38) з вибраними параметрами і набула вигляду (34). Функція $f'(z) = \alpha\,\mathrm{sh}(\alpha z)$ є однолистою в смузі $\{z : |\mathrm{Im} z| < \pi/(2\alpha)$ і не є однолистою в будь-якій смузі $\{z : |\mathrm{Im} z| < \eta\}$ з $\eta > \pi/(2\alpha)$. Звідси випливає, що f' не є однолистою в $\mathbb{D}$, якщо $\alpha > \pi/2$, тобто якщо $\alpha^2 = 2.5 > \pi^2/4$. Оскільки $|a_1^{(1)}| = |a_2^{(0)}| = \alpha^2 = \alpha^2 a_1^{(3)} = \alpha^2 a_2^{(2)}$, то звідси випливає потрібне твердження.

Автор висловлює щиру подяку М.М. Шереметі за допомогу та обговорення результатів статті.

Список використаної літератури

1. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного / *Голузин Г.М.* – М., 1966.
2. *Shah S.M.* Univalence of a function f and its successive derivatives when f satisfies a differential equation, II / *Shah S.M.* // J. Math. anal. and appl. – 1989. – Vol. 142. – P. 422-430.
3. *Mahola Ya.S.* Properties of entire solutions of a linear differential equation of n-th order with polynomial coefficients of n-th degree / *Mahola Ya.S., Sheremeta M.M.* // Mat. studii. – 2008. – Vol. 30, №2. – P. 153-162.
4. *Шеремета З.М.* Близость к выпуклости целых решений одного дифференциального уравнения / *Шеремета З.М., Шеремета М.Н.* // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 38, №4. – С. 435-440.
5. *Шеремета З.М.* Про функції близькі до опуклих / *Шеремета З.М.* // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2003. – Вип. 62. – С. 144-146.
6. *Goodman A.W.* Univalent function and nonanalytic curves / *Goodman A.W.* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1957. – Vol. 8. – P. 597-601.
7. *Goodman A.W.* Univalent functions. Vol. II / *Goodman A.W.* – Florida, 1983.

Стаття: надійшла до редакції 15.11.2009
прийнята до друку 21.09.2011

ON ENTIRE SOLUTIONS OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH POLYNOMIAL COEFFICIENTS

Yaroslav MAHOLA

Ivan Franko National University of L'viv,
Universytets'ka Str., 1, L'viv, 79000
e-mail: mahola@ukr.net

It is investigated the properties of entire solutions of the differential equations of a form

$$z^n w^{(n)} + \sum_{j=n-m+1}^{n-1} a_{n-j+1}^{(j)} z^j w^{(j)} + \sum_{j=0}^{n-m} (a_{n-j-m+1}^{(j)} z^m + a_{n-j+1}^{(j)}) z^j w^{(j)} = 0,$$

where $n \geqslant 3, 2 \leqslant m \leqslant n$ and $a_k^{(j)}$ – are complex numbers.

Conditions for coefficients $a_k^{(j)}$ are obtained, under which there exists an entire solution f of this equation such that all derivatives $f^{(lm-1)}$, $(l \in \mathbb{N})$ are convex or close-to-convex functions in $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$. Growth of such function f is studied.

Key words: entire function, convexity, close-to-convexity, regular growth.

О ЦЕЛЫХ РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Ярослав МАГОЛА

Львовский национальный университет им. Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: mahola@ukr.net

Исследовано свойства целых решений дифференциальных уравнений вида

$$z^n w^{(n)} + \sum_{j=n-m+1}^{n-1} a_{n-j+1}^{(j)} z^j w^{(j)} + \sum_{j=0}^{n-m} (a_{n-j-m+1}^{(j)} z^m + a_{n-j+1}^{(j)}) z^j w^{(j)} = 0,$$

где $n \geqslant 3, 2 \leqslant m \leqslant n$ и $a_k^{(j)}$ – комплексные числа.

Указаны условия на параметры $a_k^{(j)}$, при выполнении которых существует целое решение f этого уравнения, такое что все производные $f^{(lm-1)}$, $(l \in \mathbb{N})$ являются выпуклыми или близкими к выпуклым функциям в $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$. Изучен рост такой функции f.

Ключевые слова: целая функция, выпуклость, близость к выпуклости, регулярный рост.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 74. С. 157–167
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 74. P. 157–167

УДК 519.21

ПРО ТВІРНИЙ ФУНКЦІОНАЛ ЧАСТКОВОГО ВИПАДКУ S-ЗУПИНЕНИХ ГІЛЛЯСТИХ ПРОЦЕСІВ

Остап ОХРІН

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: ostap.okhrin@wiwi.hu-berlin.de

Початковий процес з незліченною кількістю типів $\mu(t)$ породжує зупинений гіллястий процес $\xi(t)$, якщо при попаданні $\mu(t)$ в деяку непорожню множину S процес зупиняється. Розглядається твірний функціонал наведеного вище процесу.

Ключові слова: гіллясті процеси, твірний функціонал, перехідні ймовірності.

Розглядаємо S-зупинений гіллястий процес з довільною кількістю типів частинок. Процеси з довільною кількістю типів частинок ще називають загальними гіллястими процесами. Використано результати подані в [3], [4], [6]. Розглянемо фазовий простір типів частинок $(X, \mathcal{A})$ з $\mathcal{A}$ – σ-алгеброю Борелівських множин на X, яка містить всі одноточкові множини. Через Ω позначимо множину всіх не негативних мір α на $\mathcal{X}$, які сконцентровані на скінченних підмножинах з $\mathcal{A}$ і набувають інтегральних значень. Кожний елемент $\alpha \in \Omega$ можна охарактеризувати як подвійний вектор $(x_1, n_1; \ldots; x_k, n_k)$, де $\{x_1, \ldots, x_k\}$ – та скінченна підмножина $\mathcal{A}$, на якій α є сконцентрованим. Це припущення означає, що в окремо вибраний момент часу, тільки скінченна кількість типів частинок наявна. Зрозуміло, що n_i є невід'ємним цілим, і відповідає за кількість частинок конкретного типу. Позначимо через $\mathcal{Y}$ σ-алгебру Колмогорова на Ω, яка є найменшою σ-алгеброю, що містить всі циліндричні множини $\{\alpha \in \Omega : \alpha(\{x\}) = n\}$. На цьому просторі розглядають необривний марковський процес з перехідною ймовірністю $P(t_1, x, t_2, A)$, де $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ – час, $x \in X,\ A \in \mathcal{Y}$. Розглядаючи кожну траєкторію цього процесу як еволюцію блукання частинки, $P(t_1, x, t_2, A)$ інтерпретують, як ймовірність того, що частинка, яка почала блукання з однієї точки типу $x \in X$, за час t потрапляє в множину $A \in \mathcal{Y}$. Кожна з частинок типу x має випадковий час життя τ. В кінці свого життя кожна частинка типу x миттєво породжує деяку випадкову кількість нових частинок, початкові положення, яких розподілені випадково на просторі Ω. Кількість і положення частинок-нащадків залежать тільки від положення частинки-предка в момент перетворення. Далі кожна нова частинка еволюціонує незалежно від інших аналогічно. Подібного типу процеси розглядали у [1], [2] та [5].

Нехай $\mu_{xt_0t}(A)$ така випадкова міра, яка для кожного $A \in \mathcal{Y}$ дорівнює кількості частинок в момент часу t, що потрапляють в множину A, за умови, що в початковий момент часу t_0 була тільки одна частинка в точці $x \in X$. Через $\mu_{t_0t}(A)$ визначимо випадкову міру, яка дорівнює кількості частинок у момент часу t, типи яких є з множини A, незважаючи на те, скільки і яких частинок було в початковий момент часу t_0.

Надалі вважатимемо, що простір X складається з незліченної кількості елементів $X = \mathbb{R}^+$, тобто припускаємо, що множина типів частинок є незліченною або, що кожному типу ставимо у відповідність невід'ємне дійсне число, і навпаки. Це є частковим випадком загальних гіллястих процесів.

Зауважимо, що кількість всіх частинок у початковий момент повинна бути скінченною, звідки випливає, що лише скінченній кількості типів відповідає ненульова кількість частинок. Хоча сумарна кількість може бути як завгодно великою.

На основі міри $\mu_{xt_0t}(A)$ вводиться багатовимірна міра $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}t_0t}(A)$

$$\boldsymbol{\mu}_{\alpha(\mathbf{x})t_0t}(A) = \int\limits_{\phi(\mathbf{x})} \mu_{xt_0t}(A)\,dx,$$

де $\alpha \in \Omega$, $\mathbf{x} \subset X$ є множиною типів частинок, що є аргументом функції α. Іншими словами, якщо в початковий момент t_0 ми мали набір частинок $\alpha(x) = (\alpha_{x_1}, \ldots, \alpha_{x_k})'$, $\alpha_j \in \mathbb{N}$ типи яких перебували в множині $\mathbf{x}$, то за час t отримали набір точок, які належать множині A. Вище введена міра повертає кількість нащадків для кожного типу з множини $\mathbf{x}$.

Маючи перехідні ймовірності $P(t_1, x, t_2, A)$, введемо ймовірність $\widehat{P}(t_1, \alpha_1, t_2, \alpha_2)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega$, де $\widehat{P}$ – ймовірність така: якщо в момент часу t_1 є набір α_1, то до часу t_2 отримується множина α_2. Для простоти позначень зазначимо $\mu_{\cdot}(t_0, t) = \mu_{\cdot t_0 t}(X)$. Очевидно, що

$$\widehat{P}(t_1, \alpha_1, t_2, \alpha_2) = P\{\boldsymbol{\mu}_{\alpha_1}(t_1, t_2) = \alpha_2\}.$$

Зафіксуємо скінченну підмножину $S \in \Omega$, $0 \notin S$, як узагальнення вона може мати міру Лебега нуль. *Зупиненим*, або *S-зупиненим* гіллястим процесом називається процес $\boldsymbol{\xi}_{\alpha t}(X)$, визначений для $t \in \mathbb{R}^+$ та $\alpha \in \Omega$ рівностями

$$\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{x}}(t_0, t) = \boldsymbol{\xi}_{\alpha t_0 t}(X) = \begin{cases} \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}(t_0, t), & \text{якщо } \forall\, v,\ 0 \leqslant v < t,\ \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}(t_0, v) \notin S; \\ \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}(t_0, u), & \text{якщо } \forall\, v,\ 0 \leqslant v < u,\ \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}(t_0, v) \notin S, \\ & \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}(t_0, u) \in S,\ u < t. \end{cases}$$

Отож, для S-зупиненого гіллястого процесу $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{x}}(t)$, точки множини S є додатковими станами поглинання порівняно з початковим процесом $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}(t)$, який мав тільки одну точку поглинання $\{0\}$. Тому на відміну від процесу $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}(t)$, в S-зупиненому гіллястому процесі $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{x}}(t)$ окремі частинки в t-му поколінні незалежно розмножуються за ймовірнісним законом, який визначається через $P(\cdot)$, тільки в тому випадку, коли $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{x}}(t) \notin S$. Як тільки випадковий вектор $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{x}}(t)$ потрапить у множину S, еволюція процесу припиняється.

Визначимо множину всіх обмежених $\mathcal{A}$-вимірних функцій на X як $\mathcal{F}$, множини додатних та від'ємних функцій з $\mathcal{F}$ означимо $\mathcal{F}^+$ та $\mathcal{F}^-$ відповідно. Для всіх $f \in \mathcal{F}$,

$\alpha \in \Omega$ ми писатимемо, що $[f, \alpha] = \int_X f(x)\alpha(dx)$. Оператором зсуву W_α на Ω ми визначимо таке $W_\alpha A = \{\alpha' : \alpha' - \alpha \in A\}$ для $A \subset \mathcal{Y}$.

Позначимо окремо перехідні ймовірності для S-зупиненого процесу через $\widehat{P}_S(t_1, \alpha, t_2, A)$, а для звичайного процесу через $\widehat{P}(t_1, \alpha, t_2, A)$. В обох випадках перехідні ймовірності $\widehat{P}_S(t_1, \alpha, t_2, A)$ та $\widehat{P}(t_1, \alpha, t_2, A)$ визначені для всіх $t_1 \leqslant t_2$, $\alpha \in \Omega$ та $A \subset \mathcal{Y}$ визначають гіллясті процеси з неперервним часом, якщо вони задовольняють певні властивості. Обидві перехідні ймовірністі $\widehat{P}(t_1, \alpha, t_2, A)$ та $\widehat{P}_S(t_1, \alpha, t_2, A)$ є $\mathcal{Y}$-вимірними функціями, як функції по α, а також невід'ємними мірами на $\mathcal{Y}$, як функції по A. Очевидно, з якого б набору не почався процес, ми завжди потрапимо у весь простір подій Ω, тому $\widehat{P}(t_1, \alpha, t_2, \Omega) = \widehat{P}_S(t_1, \alpha, t_2, \Omega) = 1$. Згідно з такими самими міркуваннями за нульовий проміжок часу потрапити в якусь множину процес може тільки тоді, коли він у ній є на початку цього проміжку, тому $\widehat{P}(t_1, \alpha, t_1, A) = \widehat{P}_S(t_1, \alpha, t_1, A) = \mathbf{I}\{\alpha \in A\}$. Зрозуміло, що повинно виконуватися і звичайне рівняння Колмогорова-Чепмена для звичайного процесу

$$\widehat{P}(t_1, \alpha, t_3, A) = \int_\Omega \widehat{P}(t_2, \alpha', t_3, A)\widehat{P}(t_1, \alpha, t_2, d\alpha'),\ \forall\, t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3, \tag{1}$$

та певна модифікація для S-зупиненого

$$\widehat{P}_S(t_1, \alpha, t_3, A) = \int_{\Omega \setminus (S \setminus A)} \widehat{P}(t_2, \alpha', t_3, A)\widehat{P}(t_1, \alpha, t_2, d\alpha'),\ \forall\, t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3. \tag{2}$$

Оскільки всі частинки в процесі еволюціонують незалежно одна від одної, то можна також записати такі співвідношення:

$$\begin{aligned}
\widehat{P}(t_1, \alpha_1 + \alpha_2, t_2, A) &= \int_\Omega \int_\Omega \mathbf{I}\{\alpha_1' + \alpha_2' \in A\}\widehat{P}(t_1, \alpha_1, t_2, d\alpha_1') \times \\
&\times \ \widehat{P}(t_1, \alpha_2, t_2, d\alpha_2'), && (3)\\
\widehat{P}_S(t_1, \alpha_1 + \alpha_2, t_2, A) &= \int_{\Omega \setminus (S \setminus A)} \int_{\Omega \setminus (S \setminus A)} \mathbf{I}\{\alpha_1' + \alpha_2' \in A\}\widehat{P}(t_1, \alpha_1, t_2, d\alpha_1') \times \\
&\times \ \widehat{P}(t_1, \alpha_2, t_2, d\alpha_2'). && (4)
\end{aligned}$$

З огляду на те, що у нас є процес з неперервним часом, логічним є припущення, що при $\triangle \to 0$ обидва процеси рівні $\widehat{P}(t, \alpha, t + \triangle, A) = \widehat{P}_S(t, \alpha, t + \triangle, A)$ і

$$\widehat{P}(t, \alpha, t + \triangle, A) = \begin{cases} 1 + p(t, \alpha, A)t + o(t), & \text{при } p(t, \alpha, A) < 0,\ \alpha \in A; \\ p(t, \alpha, A)t + o(t), & \text{при } p(t, \alpha, A) \geqslant 0,\ \alpha \notin A. \end{cases} \tag{5}$$

Тому наведене вище припущення можна переформулювати так:

$$\widehat{P}(t_1, \alpha, t_2, A) = p(t_1, \alpha, A)(t_2 - t_1) + o(t_2 - t_1), \quad t_2 \to t_1^-,\ \alpha \notin A,$$

$$\frac{\widehat{P}(t_1, \alpha, t_2, A) - \widehat{P}(t_1, \alpha, t_1, A)}{t_2 - t_1} = p(t_1, \alpha, A) + o(1),$$

$$\lim_{t_2 \to t_1^+} \frac{\widehat{P}(t_1, \alpha, t_2, A) - \widehat{P}(t_1, \alpha, t_1, A)}{t_2 - t_1} = p(t_1, \alpha, A).$$

Аналогічно можна довести і для правої границі

$$\lim_{t_2 \to t_1^-} \frac{\widehat{P}(t_2, \alpha, t_1, A) - \widehat{P}(t_1, \alpha, t_1, A)}{t_2 - t_1} = p(t_1, \alpha, A).$$

Це рівносильно тому, що

$$\frac{\partial}{\partial t} \widehat{P}(t, \alpha, t, A) = p(t, \alpha, A),$$

функцію $p(t, \alpha, A)$ ми називатимемо перехідною щільністю гіллястого процесу. Аналогічно доводиться і для випадку, коли $\alpha \in A$. З властивостей перехідних ймовірностей $\widehat{P}(t_1, \alpha, t_2, A)$ та $\widehat{P}_S(t_1, \alpha, t_2, A)$ ми отримуємо такі умови на $p(t, \alpha, A)$. $p(t, \alpha, A)$ існує і є скінченною для будь-яких t, α, A, $\mathcal{Y}$-вимірною як функція по α і є також узагальненою мірою на $\mathcal{Y}$ як функція по A. Очевидно також, що $p(t, \alpha, \{\alpha\}) \leqslant 0$, $p(t, \alpha, A \subset \Omega - \{\alpha\}) \geqslant 0$ і $p(t, \alpha, \Omega) = 0$.

Введемо звичайний і логарифмічний функціонали Лапласа для обидвох процесів, ґрунтуючись на основних перехідних ймовірностях

$$\begin{aligned}
F(t_1, \alpha, t_2, s) &= \int\limits_{\Omega} \exp\left\{ \int\limits_{X} s(x)\alpha'(dx) \right\} \widehat{P}(t_1, \alpha, t_2, d\alpha') = E_{\widehat{P}} \exp[s, \alpha], \\
\Psi(t_1, \alpha, t_2, s) &= \log F(t_1, \alpha, t_2, s) = \log E_{\widehat{P}} \exp[s, \alpha], \\
F_S(t_1, \alpha, t_2, s) &= \int\limits_{\Omega} \exp\left\{ \int\limits_{X} s(x)\alpha'(dx) \right\} \widehat{P}_S(t_1, \alpha, t_2, d\alpha') = E_{\widehat{P}_S} \exp[s, \alpha] = \\
&= \int\limits_{\Omega \setminus (S \setminus A)} \exp\left\{ \int\limits_{X} s(x)\alpha'(dx) \right\} \widehat{P}_S(t_1, \alpha, t_2, d\alpha'), \\
\Psi_S(t_1, \alpha, t_2, s) &= \log F_S(t_1, \alpha, t_2, s) = \log E_{\widehat{P}_S} \exp[s, \alpha].
\end{aligned}$$

В означенні функціонала для зупиненого процесу можна інтегровувати по всьому простору, бо контроль над потраплянням до поглинаючої множини S виконується перехідною ймовірністю $\widehat{P}_S(t_1, \alpha, t_2, d\alpha')$, проте для зручності та консистентності з іншими позначеннями ми звузимо множину. Введемо також відповідні функціонали, ґрунтуючись на перехідних щільностях $p(t, \alpha, A)$

$$\begin{aligned}
\phi(t_1, \alpha, s) &= \int\limits_{\Omega} \exp\left\{ \int\limits_{X} s(x)\alpha'(dx) \right\} p(t_1, \alpha, d\alpha') = E_p \exp[s, \alpha], \\
\psi(t_1, \alpha, s) &= \exp\{-[s, \alpha]\} \phi(t_1, \alpha, s), \\
\phi_S(t_1, \alpha, s) &= \int\limits_{\Omega \setminus (S \setminus A)} \exp\left\{ \int\limits_{X} s(x)\alpha'(dx) \right\} p(t_1, \alpha, d\alpha'), \\
\psi_S(t_1, \alpha, s) &= \exp\{-[s, \alpha]\} \phi_S(t_1, \alpha, s).
\end{aligned}$$

З незалежності розмноження частинок (3) виконується

$$F_*(t_1, \alpha_1 + \alpha_2, t_2, A) = F_*(t_1, \alpha_2, t_2, A) \cdot F_*(t_1, \alpha_2, t_2, A),$$

де “$*$” означає, що описане вище виконується для будь-якого з обидвох процесів. І з (5) випливає

$$\frac{\partial}{\partial t_1} F_*(t_1, \alpha, t_2, s)|_{t_1=t_2^-} = \phi_*(t_1, \alpha, s).$$

Тому

$$\phi_*(t, \alpha_1 + \alpha_2, s) = \phi_*(t, \alpha_1, s) \exp[s, \alpha_2] + \phi_*(t, \alpha_2, s) \exp[s, \alpha_1].$$

Поділивши обидві сторони останньої рівності на $\exp[s, \alpha_1 + \alpha_2]$, отримаємо

$$\psi_*(t, \alpha_1 + \alpha_2, s) = \psi_*(t, \alpha_1, s) + \psi_*(t, \alpha_2, s).$$

На відміну від попередніх робіт по S-зупинених гіллястих процесах у цьому випадку притримуватимемося класичного припущення, в якому процес починається з однієї частинки. Очевидно, що більшість наведених вище тверджень можна переписати у поточковій формі, тобто, наприклад,

$$\psi_*(t, \alpha, s) = \int\limits_X \psi_*(t, x, s)\alpha(dx) = [\psi_*(t, \cdot, s), \alpha], \quad \alpha \in \mathcal{Y}, \quad x \in X,$$

тому

$$p(t, \alpha, A) = \sum_{i=1}^{k} n_i p(t, x_i, W_{x_i - \alpha}, A),$$

де $\alpha = \{n_1, x_1; \ldots; n_k, x_k\}$. У цьому випадку ми фактично враховуємо ймовірність переходу з однієї точки фіксованого типу і множимо на кількість точок цього типу. Так проходимо по всіх типах, на яких функція α сконцентрована.

Оскільки більшість статей описують ймовірність виродження гіллястих процесів за різних умов, то у нашому випадку ймовірність виродження загального гіллястого процесу без умов на зупиненість є $\widehat{P}(t_1, x, t_2, \{0\})$, якщо ця ймовірність прямує до одиниці при всіх $x \in X$, то процес називатимемо тим, що вироджується. Ймовірність виродження S-зупиненого гіллястого процесу буде визначена як $\widehat{P}_S(t_1, x, t_2, S \cup \{0\})$.

Якщо всі припущення щодо перехідних щільностей виконуються, то можна побудувати фундаментальний Феллерівський розв’язок для звичайного та S-зупиненого процесу. Для початку виведемо всю теорію для звичайного процесу, а потім перекладемо на зупинений. Для цього нам потрібно ще кілька позначень.

Позначимо через $q(t, \alpha)$ ймовірність того, що процес в околі часу t залишився на місці α, але не поточково. Тобто, наприклад, якщо є одна точка a типу x_1 і одна точка b типу x_2, то допускається, що точка a типу x_1 перейшла в точку c типу x_2 і точка b типу x_2 перейшла в точку d типу x_1. В цьому випадку процес змінювався поточково, але загалом залишився в тому самому стані α, що й був на початку, тому як і на початку, так і в кінці ми отримали по одній точці типів x_1 та x_2, відповідно. Тому означену вище ймовірність можна записати як

$$q(t, \alpha) = p(t, \alpha, \alpha).$$

Через $p_1(t, \alpha, A)$ позначимо ймовірність того, що процес в околі t вийшов зі свого стану в множину $A \setminus \{\alpha\}$

$$p_1(t, \alpha, A) = p(t, \alpha, A \setminus \{\alpha\}).$$

Ймовірність того, що процес протягом всього інтервалу часу $[t_1, t_2]$ залишався не поточково на місці, ми означимо через

$$J(t_1, t_2, \alpha) = \int_{t_1}^{t_2} p(t, \alpha, \alpha) dt.$$

Нехай

$$\begin{aligned} \widehat{P}^{(0)}(t_1, \alpha, t_2, A) &= \mathbf{I}\{\alpha \in A\} \exp\left\{ \int_X J(t_1, t_2, x)\alpha(dx) \right\} \approx \\ &\approx \mathbf{I}\{\alpha \in A\} \exp\left\{ \sum_{i=1}^{k} J(t_1, t_2, x_i) n_i \right\} \end{aligned}$$

є ймовірністю того, що процес за весь проміжок часу $[t_1, t_2]$ залишився поточково на місці, тобто не відбулися жодні зміни всередині процесу, кожна частинка в кожен момент часу переходила сама у себе. Надалі ми означимо незалежну в сукупності послідовність подій та їхні ймовірності

$$\widehat{P}^{(k)}(t_1, \alpha, t_2, A) = \int_{t_1}^{t_2} \exp[J(t_1, t, \cdot), \alpha] \int_\Omega \widehat{P}^{(k-1)}(t, \alpha', t_2, A) p_1(t, \alpha, d\alpha') dt,$$

що для кожного k означають k поточкових змін всередині процесу до потрапляння в множину A. Для звичайного процесу ми маємо розв'язок Феллера

$$\widehat{P}(t_1, \alpha, t_2, A) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{P}^{(k)}(t_1, \alpha, t_2, A).$$

Це виконується тільки для звичайних загальних не S-зупинених гіллястих процесів. Для S-зупинених процесів, ми вводимо кілька додаткових позначень ймовірностей пов'язаних з потраплянням, чи не потраплянням у множину S, зокрема, що процес потрапив у множину A, не потрапивши в себе $\{\alpha\}$ та не потрапивши у множину виродження S

$$p_2(t, \alpha, A) = p(t, \alpha, A \setminus \{\alpha\} \setminus S).$$

Ймовірність того, що процес потрапив у $A \cap S$ позначимо як

$$p_S(t, \alpha, A) = p(t, \alpha, A \cap S),$$

а що процес потрапив у $A \setminus S$ через

$$p_{\bar{S}}(t, \alpha, A) = p(t, \alpha, A \setminus S).$$

Спочатку розглянемо випадок, коли $A \cap S \neq \emptyset$ і процес потрапить в $A \setminus S$. В цій ситуації визначимо

$$\begin{aligned} \widehat{P}_{\bar{S}}^{(k)}(t_1, \alpha, t_2, A) &= \widehat{P}^{(k)}(t_1, \alpha, t_2, A \setminus S) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \exp[J(t_1, t, \cdot), \alpha] \int_\Omega \widehat{P}^{(k-1)}(t, \alpha', t_2, A) p_2(t, \alpha, d\alpha') dt. \end{aligned}$$

Далі введемо таку послідовність ймовірностей незалежних у сукупності подій, які відповідають за потрапляння процесу у множину A, яка не обов'язково не перетинна з S, проте при будь-якому проміжному потраплянні процесу в множину S процес зупиняється

$$\begin{aligned}\widehat{P}_S^{(0)}(t_1,\alpha,t_2,A) &= \widehat{P}^{(0)}(t_1,\alpha,t_2,A),\\ \widehat{P}_S^{(k)}(t_1,\alpha,t_2,A) &= \widehat{P}_{\bar{S}}^{(k)}(t_1,\alpha,t_2,A)+\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega} p_S(t,\alpha',A)\widehat{P}_{\bar{S}}^{(k-1)}(t_1,\alpha,t,d\alpha')dt.\end{aligned}$$

На підставі цих ймовірностей фундаментальний Феллерівський розв'язок для S-зупинених гіллястих процесів набуде вигляду

$$\widehat{P}_S(t_1,\alpha,t_2,A)=\sum_{k=0}^{\infty}\widehat{P}_S^{(k)}(t_1,\alpha,t_2,A).$$

Подальша мета цього аналізу – розглянути зв'язок функціонального рівняння для звичайних і для зупинених процесів.

Теорема 1. *Функціональне рівняння для S-зупинених процесів набуває вигляду*

$$\frac{\partial}{\partial s}F(s,w,t,f)=-\int\limits_{\Omega}F(s,w',t,f)p_{\bar{S}}(s,w,dw')+\mathcal{B}$$

де $\mathcal{B}=\partial B/\partial s$, а B з (6) в теоремі.

Доведення.

$$\begin{aligned}F_S(s,w,t,f) &= \int\limits_{\Omega}\exp[f,w']\widehat{P}_S(s,w,t,dw')=\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{\Omega}\exp[f,w']\widehat{P}_S^{(k)}(s,w,t,dw')=\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{\Omega}\exp[f,w']P_{\bar{S}}^{(k)}(s,w,t,dw')+\\ &+\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{\Omega}\exp[f,w']\int\limits_{s}^{t}\int\limits_{\Omega}p_S(t',\alpha',dw')\widehat{P}_{\bar{S}}^{(k)}(s,w,t',d\alpha')dt'=\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{\Omega}\exp[f,w']P^{(k)}(s,w,t,dw'\setminus S)+B=A+B.\end{aligned}$$

Розглянемо обидва доданки A та B окремо, для початку перший

$$\begin{aligned}A &= \sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{\Omega}\exp[f,w']P^{(k)}(s,w,t,dw'\setminus S)=\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{\Omega\setminus S}\exp[f,w']P^{(k)}(s,w,t,dw')=\\ &=\int\limits_{\Omega\setminus S}I\{w'\in w\}\exp\left\{\int\limits_X f(x)w'(dx)+\int\limits_X J(s,t,x)w'(dx)\right\}p_1(s,w,dw')+\\ &+\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{\Omega\setminus S}\int\limits_{s}^{t}\exp[f+J(s,s',\cdot),w']\int\limits_{\Omega}P^{(k-1)}(s',w'',t,dw')p_1(s',w,dw'')ds'=\end{aligned}$$

$$= \int\limits_{\Omega\setminus S} I\{w' \in w\} \exp[f + J(s,t,\cdot), w'] p_1(s, w, dw') +$$

$$+ \int\limits_{\Omega\setminus S} \int\limits_s^t \exp[f + J(s,s',\cdot), w'] \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega} P^{(k-1)}(s', w'', t, dw') p_1(s', w, dw'') ds' =$$

$$= I\{w' \in \Omega \setminus S\} \exp[f + J(s,t,\cdot), w] +$$

$$+ \int\limits_{\Omega\setminus S} \int\limits_s^t \exp[J(s,s',\cdot), w'] \int\limits_{\Omega} \exp[f, w'] \sum_{k=0}^{\infty} P^{(k)}(s', w'', t, dw') p_1(s', w, dw'') ds' =$$

$$= I\{w \in \Omega \setminus S\} \exp[f + J(s,t,\cdot), w] +$$

$$+ \int\limits_{\Omega\setminus S} \int\limits_s^t \exp[J(s,s',\cdot), w] F(s', w', t, f) p_1(s', w, dw') ds'.$$

Ми не зводитимемо другий доданок до такого ж гарного вигляду просто покажемо, що можна уникнути нескінченних сум і рекурсій

$$B = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{\Omega} \exp[f, w'] \int\limits_s^t \int\limits_{\Omega} p_S(t', \alpha', dw') \widehat{P}^{(k)}_{\bar{S}}(s, w, t', d\alpha') dt' =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{\Omega} \exp[f, w'] \int\limits_s^t \int\limits_{\Omega\setminus S} p_S(t', \alpha', dw') \widehat{P}^{(k)}(s, w, t', d\alpha') dt' =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \exp[f, w'] \int\limits_s^t \int\limits_{\Omega\setminus S} p_S(t', \alpha', dw') I\{w \in d\alpha'\} \exp[J(s,t',\cdot), w] dt' +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{\Omega} \exp[f, w'] \int\limits_s^t \int\limits_{\Omega\setminus S} p_S(t', \alpha', dw') \int\limits_s^{t'} \exp[J(s,t'',\cdot), w] \times$$

$$\times \int\limits_{\Omega} \widehat{P}^{(k)}(t'', \alpha'', t', d\alpha') p_1(t'', w, d\alpha'') dt'' dt' =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \exp[f, w'] \int\limits_s^t p_S(t', w, dw') \exp[J(s,t',\cdot), w] dt' + \tag{6}$$

$$+ \int\limits_{\Omega} \exp[f, w'] \int\limits_s^t \int\limits_{\Omega\setminus S} p_S(t', \alpha', dw') \int\limits_s^{t'} \exp\{[J(s,t'',\cdot), w] - [f, \alpha']\} \times$$

$$\times F(t'', \alpha'', t', f) p_1(t'', w, d\alpha'') dt'' dt'.$$

Частина B не містить жодних рекурсій та нескінченних сум, а також є неперервною та диференційовною по s, тому $\exists\ \partial B/\partial s =: \mathcal{B}$. Для подальших обчислень знайдемо

$$\frac{\partial J(s,t,\cdot)}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\int\limits_s^t p(s',w,w)ds' = -p(s,w,w) = -q(s,w).$$

Обчислимо похідну по s від усього функціонала

$$\frac{\partial}{\partial s}F(s,w,t,f) = \frac{\partial A}{\partial s} + \mathcal{B} = \frac{\partial}{\partial s}I\{w\in\Omega\setminus S\}\exp[f+J(s,t,\cdot),w]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial s}\int\limits_{\Omega\setminus S}\int\limits_s^t \exp[J(s,s',\cdot),w]F(s',w',t,f)p_1(s',w,dw')ds' + \mathcal{B} =$$

$$= \frac{J(s,t,\cdot)}{\partial s}I\{w\in\Omega\setminus S\}\exp[f+J(s,t,\cdot),w]-$$

$$-\int\limits_{\Omega\setminus S}\exp[J(s,s,\cdot),w]F(s,w',t,f)p_1(s,w,dw')+$$

$$+\frac{\partial J(s,t,\cdot)}{\partial s}\int\limits_{\Omega\setminus S}\int\limits_s^t \exp[J(s,s',\cdot),w]F(s',w',t,f)p_1(s',w,dw')ds' + \mathcal{B} =$$

$$= -q(s,w)\exp[f+J(s,t,\cdot),w]I(w\in\Omega\setminus S) - \int\limits_{\Omega\setminus S}F(s,w',t,f)p_1(s,w,dw')-$$

$$-q(s,q)\int\limits_s^t\int\limits_{\Omega\setminus S}\exp[J(s,s',\cdot),w]F(s',w',t,f)p_1(s',w,dw')ds' + \mathcal{B} =$$

$$= -\int\limits_{\Omega\setminus S}F(s,w',t,f)p(s,w,dw') + \mathcal{B} = -\int\limits_{\Omega}F(s,w',t,f)p_{\bar{S}}(s,w,dw') + \mathcal{B}.$$

Що й треба було довести. □

У випадку, якщо процес не є S-зупиненим, тобто $S=\emptyset$, наш результат збігається з [6]. У тому випадку $p_S(t,\alpha,A) = p(t,\alpha,A\cap S) = p(t,\alpha,A\cap\emptyset) = p(t,\alpha,\emptyset) = 0$, $p_{\overline{S}}(t,\alpha,A) = p(t,\alpha,A\setminus S) = p(t,\alpha,A)$. З цього випливає, що $B=0$, тому і $\mathcal{B}=0$, а

$$-\int\limits_{\Omega}F(s,w',t,f)p_{\bar{S}}(s,w,dw') = -\int\limits_{\Omega}F(s,w',t,f)p(s,w,dw').$$

Звідси і випливає, що при $S=\emptyset$

$$\frac{\partial}{\partial s}F(s,w,t,f) = -\int\limits_{\Omega}F(s,w',t,f)p(s,w,dw').$$

Що є рівносильним рівнянню (2.23) в [6]. Аналогічно це можна звести і до (2.24) в [6].

Список використаної літератури

1. *Єлейко Я.* Асимптотичний аналіз і перехідні явища в матричнозначних випадкових еволюціях, гіллясті процеси та процеси марківського втручання випадку. / *Єлейко Я.* Дис. докт. фіз.-мат. наук. – Львів, 1994.
2. *Севастьянов Б.* Асимптотическое поведение вероятностей вырождения остановленных ветвящихся процессов / *Севастьянов Б.* // Теория вер. и ее прил. – 1988. – Т. 43. – С. 315-322.
3. *Севастьянов Б.* Ветвящиеся процессы / *Севастьянов Б.* – М., 1971.
4. *Харріс Т.* Теория ветвящихся процессов / *Харріс Т.* – М., 1966.
5. *Єлейко Я.* Асимптотична поведінка S-зупинених гіллястих процесів зі зліченним числом типів / *Єлейко Я., Киричинська І., Охрін О.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2007. – Вип. 67. – С. 119-129.
6. *Jirina M.* General branching processes with continuous time parameter / *Jirina M.* // Proc. Fifth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob. – 1967. – Vol. 2. – P. 389-399.

Стаття: надійшла до редакції 02.09.2010
прийнята до друку 21.09.2011

ON THE GENERATING FUNCTIONAL OF THE SPECIAL CASE OF S-STOPPED BRANCHING PROCESSES

Ostap OKHRIN

Ivan Franko National University of L'viv,
Universytets'ka Str., 1, L'viv, 79000
e-mail: ostap.okhrin@wiwi.hu-berlin.de

In this paper starting process with the infinite number of types of particles $\mu(t)$ generate stopped branching process $\xi(t)$, if by falling of the first one into the non empty set S process stops. Here we consider the generating functional of the upper defined process.

Key words: branching processes, generating functions, transition probabilities.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 74

ОБ ОБРАЗУЮЩЕМ ФУНКЦИОНАЛЕ ЧАСТИЧНОГО СЛУЧАЯ S-ОСТАНОВЛЕННЫХ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ

Остап ОХРИН

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: ostap.okhrin@wiwi.hu-berlin.de

Начальный процесс с несчисленным количеством типов $\mu(t)$ порождает остановленный ветвящийся процесс $\xi(t)$, если при попадании $\mu(t)$ в некоторое непустое множество S процесс останавливается. Рассматривается образующий функционал вышеприведенного процесса.

Ключевые слова: ветвящийся процесс, образующий функционал, переходная вероятность.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 74. С. 168–184
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 74. P. 168–184

УДК 517.95

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ В ОБЛАСТІ ЗІ СЛАБКИМ ВИРОДЖЕННЯМ МЕЖІ

Тетяна САВІЦЬКА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: tetjankas@mail.ru

Знайдено умови існування та єдиності розв'язку оберненої задачі для параболічного рівняння з невідомим коефіцієнтом при старшій похідній, який залежить від часу. Припускається, що межа області невідома і вироджується у початковий момент часу. Згадана задача зводиться до оберненої задачі для параболічного рівняння з виродженням.

Ключові слова: обернена задача, параболічне рівняння, слабке виродження, виродження межі області.

1. Вступ. До теорії обернених задач звертаються у тих випадках, коли визначити ту чи іншу невідому характеристику неможливо, наприклад, через недоступність матеріалу чи середовища, або ж тоді, коли проведення безпосередніх вимірювань неможливе.

Вагоме місце в цій теорії займають коефіцієнтні обернені задачі, де серед невідомих є коефіцієнт рівняння або його вільний член. Інтенсивний розвиток теорії обернених задач для параболічних рівнянь з невідомим коефіцієнтом, який залежить від часу, розпочався після появи у 1962 р. праці Б. Джонса [9]. З тих часів теорія обернених задач досягла суттєвого розвитку.

Поряд з оберненими важливе місце в теорії диференціальних рівнянь займають задачі з вільною межею. Вони виникають уже в таких простих фізичних процесах як плавлення твердих тіл або кристалізація рідин.

Досліджувала обернені задачі для параболічного рівняння зі слабким і сильним виродженням Н. Салдіна [5]. Зокрема, Н. Салдіна розглядала й випадки виродження загального вигляду. Г. Снітко вивчала обернені задачі для параболічного рівняння в області з вільною межею [6]. Обернені задачі для параболічного рівняння з виродженням в області з вільною межею досліджувала Н. Гринців [2]. Особливий випадок задачі в області з виродженням розглянуто у статті М. Іванчова [3]. Дослідження задач, які б поєднували обернені задачі, задачі з вільною межею і задачі для рівнянь з виродженням, є актуальними.

2. Формулювання задачі. В області $Q_T \equiv \{(x,t)\colon 0 < x < \psi(t)\tilde{h}(t), 0 < t < T\}$ розглянемо обернену задачу для параболічного рівняння

$$u_t = \tilde{a}(t)u_{xx} + \tilde{b}(x,t)u_x + \tilde{c}(x,t)u + \tilde{f}(x,t), \tag{1}$$

з умовами

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(\psi(t)\tilde{h}(t),t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$\tilde{a}(t)u_x(0,t) = \mu_3(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

$$\int\limits_0^{\psi(t)\tilde{h}(t)} u(x,t)dx = \mu_4(t), \quad t \in [0,T], \tag{4}$$

де функція $\psi(t)$ – додатна, монотонно зростаюча, $t \in (0,T]$ і в точці $t = 0$ дорівнює нулю, а функції $(\tilde{h}(t), \tilde{a}(t), u(x,t))$, $\tilde{a}(t) > 0$, $\tilde{h}(t) > 0, t \in [0,T]$ – невідомі.

Означення 1. *Виродження називатимемо слабким, якщо функція* $\psi \in C^1(0,T]$, $\psi'(t) \geqslant 0$, $t \in [0,T]$ *і вираз* $\int\limits_0^t \frac{\psi'(s)ds}{\sqrt{s}}$ *прямує до нуля при* $t \to 0$.

Будемо розглядати такі випадки:
(I) ψ' – монотонно спадна функція, $\psi'(t) \to \infty$ при $t \to 0$;
(II) ψ' – монотонно зростаюча функція, $\psi'(t) \to 0$ при $t \to 0$.

3. Існування розв'язку задачі (1)-(4) (випадок (I)). Нехай виконуються такі припущення:

(A1) $\psi \in C^1(0,T]$, $\mu_i \in C^1[0,T]$, $i = 1,2,4$, існує границя $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\mu_i'(t)}{\psi'(t)}$, $i = 1,2$, $\mu_3 \in C[0,T]$, коефіцієнти $\tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{f} \in C([0,\infty) \times [0,T])$ задовольняють умову Гельдера за змінною x з показником $\alpha \in (0,1)$ рівномірно стосовно $t \in [0,T]$;

(A2) $\mu_i(t) > 0, i = 1,2,3, t \in [0,T]$, $\mu_4(t) > 0, t \in (0,T]$, існує скінченна границя $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\mu_4(t)}{\psi(t)} > 0$, $\tilde{f}(x,t) \geqslant 0$, $\tilde{c}(x,t) \leqslant 0, (x,t) \in [0,\infty) \times [0,T]$, $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\mu_2'(t) - \mu_1'(t)}{\psi'(t)} > 0$, $\psi(0) = 0, \psi(t) > 0, t \in (0,T]$, $\psi'(t) \geqslant 0$, $t \in [0,T]$, $\int\limits_0^t \frac{\psi'(s)ds}{\sqrt{s}} \to 0, t \to 0$.

(A3) $\mu_1(0) = \mu_2(0)$.

Теорема 1. *Нехай виконуються припущення **(I)**, **(A1)** – **(A3)**. Тоді існує хоча б один розв'язок* $(\tilde{h}(t), \tilde{a}(t), u(x,t))$ *задачі (1)-(4), який належить до класу* $C^1(0,T_0] \cap C[0,T_0] \times C[0,T_0] \times C^{2,1}(Q_{T_0}) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_{T_0})$, *де* T_0, $0 < T_0 \leqslant T$ *визначається через вихідні дані.*

Доведення. Зробивши заміну $y = \frac{x}{\tilde{h}(t)}$, $\sigma = \psi(t)$ в задачі (1)-(4), ми зведемо її до оберненої задачі для виродженого параболічного рівняння

$$v_\sigma = \frac{\varphi'(\sigma)a(\sigma)}{h^2(\sigma)}v_{yy} + \frac{yh'(\sigma) + \varphi'(\sigma)b(yh(\sigma),\sigma)}{h(\sigma)}v_y + \varphi'(\sigma)\Big(c(yh(\sigma),\sigma)v + f(yh(\sigma),\sigma)\Big),$$
$$(y,\sigma) \in Q_{T_1}, \tag{5}$$

з умовами

$$v(0,\sigma) = \nu_1(\sigma), \quad v(\sigma,\sigma) = \nu_2(\sigma), \quad 0 \leqslant \sigma \leqslant T_1, \tag{6}$$

$$a(\sigma)v_y(0,\sigma)=h(\sigma)\nu_3(\sigma),\quad 0\leqslant\sigma\leqslant T_1, \tag{7}$$

$$h(\sigma)\int\limits_0^\sigma v(y,\sigma)dy=\nu_4(\sigma),\quad 0\leqslant\sigma\leqslant T_1, \tag{8}$$

де $Q_{T_1}=\{(y,\sigma):0<y<\sigma,0<\sigma<T_1\}$, $T_1=\psi(T)$, $v(y,\sigma)=u(y\tilde{h}(\psi^{-1}(\sigma)),\psi^{-1}(\sigma))$, $b(yh(\sigma),\sigma)=\tilde{b}(y\tilde{h}(\psi^{-1}(\sigma)),\psi^{-1}(\sigma))$, $c(yh(\sigma),\sigma)=\tilde{c}(y\tilde{h}(\psi^{-1}(\sigma)),\psi^{-1}(\sigma))$, $h(\sigma)=\tilde{h}(\psi^{-1}(\sigma))$, $f(yh(\sigma),\sigma)=\tilde{f}(y\tilde{h}(\psi^{-1}(\sigma)),\psi^{-1}(\sigma))$, $\nu_i(\sigma)=\mu_i(\psi^{-1}(\sigma))$, $i=\overline{1,4}$, $a(\sigma)=\tilde{a}(\psi^{-1}(\sigma))$, $\varphi(\sigma)=\psi^{-1}(\sigma)$.

Далі зробимо заміну невідомої функції $v(y,\sigma)=\tilde{v}(y,\sigma)+\nu_1(\sigma)+\dfrac{y}{\sigma}(\nu_2(\sigma)-\nu_1(\sigma))$ й отримаємо таку задачу стосовно функції $\tilde{v}(y,\sigma)$

$$\tilde{v}_\sigma=\frac{\varphi'(\sigma)a(\sigma)}{h^2(\sigma)}\tilde{v}_{yy}+\frac{yh'(\sigma)+\varphi'(\sigma)b(yh(\sigma),\sigma)}{h(\sigma)}\tilde{v}_y+\varphi'(\sigma)\Big(c(yh(\sigma),\sigma)\tilde{v}+f(yh(\sigma),\sigma)\Big)-$$

$$-\nu_1'(\sigma)-\frac{y}{\sigma}(\nu_2'(\sigma)-\nu_1'(\sigma))+\frac{y}{\sigma^2}(\nu_2(\sigma)-\nu_1(\sigma))+\frac{\nu_2(\sigma)-\nu_1(\sigma)}{\sigma}\frac{yh'(\sigma)+\varphi'(\sigma)b(yh(\sigma),\sigma)}{h(\sigma)}+$$

$$+\varphi'(\sigma)c(yh(\sigma),\sigma)\Big(\nu_1(\sigma)+\frac{y}{\sigma}(\nu_2(\sigma)-\nu_1(\sigma))\Big),\quad (y,\sigma)\in Q_{T_1}, \tag{9}$$

$$\tilde{v}(0,\sigma)=\tilde{v}(\sigma,\sigma)=0,\quad \sigma\in[0,T_1]. \tag{10}$$

Для того, щоб побудувати розв'язок цієї задачі, розглянемо таку допоміжну задачу:

$$u_t=a(t)u_{xx}+f(x,t),\quad 0<x<t,\quad 0<t<T, \tag{11}$$

$$u(0,t)=\mu_1(t),\quad u(t,t)=\mu_2(t),\quad t\in[0,T]. \tag{12}$$

Нехай функція $a\in C[0,T]$ – відома і виконуються такі умови: $f\in C[0,T]^2$ та задовольняє умову Гельдера по x з показником $\alpha\in(0,1)$, $\mu_i\in C[0,T], i=1,2$. Тоді розв'язок задачі (11), (12) набуде вигляду

$$u(x,t)=\int\limits_0^t G_\xi(x,t,0,\tau)a(\tau)\mu_1(\tau)d\tau-\int\limits_0^t G_\xi(x,t,\tau,\tau)a(\tau)\mu_2(\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau G(x,t,\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

де $G(x,t,\xi,\tau)$ – функція Гріна для рівняння (11), яку можна подати у вигляді [8]

$$G(x,t,\xi,\tau)=G_0(x,t,\xi,\tau)+\int\limits_\tau^t d\sigma\int\limits_0^\sigma G_0(x,t,\eta,\sigma)\Phi(\eta,\sigma,\xi,\tau)d\eta,$$

$$G_0(x,t,\xi,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big(\exp\Big(-\frac{(x-\xi+2nt)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big)-$$

$$-\exp\Big(-\frac{(x+\xi+2nt)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big)\Big),$$

$\theta(t) = \int_0^t a(\tau)d\tau$. Функція $\Phi(x,t,\xi,\tau)$ є розв'язком рівняння

$$\Phi(x,t,\xi,\tau) = -LG_0(x,t,\xi,\tau) - \int\limits_\tau^t d\sigma \int\limits_0^\sigma LG_0(x,t,\eta,\sigma)\Phi(\eta,\sigma,\xi,\tau)d\eta,$$

де $L = \frac{\partial}{\partial t} - a(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

Використовуючи сказане вище, побудуємо розв'язок задачі (9), (10). Позначимо

$$F(y,\sigma) \equiv \frac{yh'(\sigma) + \varphi'(\sigma)b(yh(\sigma),\sigma)}{h(\sigma)}\tilde{v}_y + \varphi'(\sigma)\Big(c(yh(\sigma),\sigma)\tilde{v} + f(yh(\sigma),\sigma)\Big) - \nu_1'(\sigma) -$$

$$-\frac{y}{\sigma}(\nu_2'(\sigma) - \nu_1'(\sigma)) + \frac{y}{\sigma^2}(\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)) + \frac{\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)}{\sigma}\frac{yh'(\sigma) + \varphi'(\sigma)b(yh(\sigma),\sigma)}{h(\sigma)} +$$

$$+\varphi'(\sigma)c(yh(\sigma),\sigma)\Big(\nu_1(\sigma) + \frac{y}{\sigma}(\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma))\Big).$$

Тимчасово припускаємо, що функції $a(\sigma), h(\sigma), F(y,\sigma)$ – відомі. Оскільки $\frac{y}{\sigma} \leqslant 1$ і виконується умова **(A3)**, то $\frac{y}{\sigma}(\nu_2'(\sigma) - \nu_1'(\sigma)) \leqslant \nu_2'(\sigma) - \nu_1'(\sigma)$, а

$$\frac{y}{\sigma^2}(\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)) \leqslant \frac{\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)}{\sigma} = \frac{\nu_2(\sigma) - \nu_2(0)}{\sigma} - \frac{\nu_1(\sigma) - \nu_1(0)}{\sigma} \underset{\sigma \to 0}{\longrightarrow} \nu_2'(0) - \nu_1'(0).$$

З того, що виконується **(I)**, випливає $\varphi'(\sigma) \to 0$ при $\sigma \to 0$. Тому з умови **(A1)** отримуємо, що функція $F(y,\sigma)$ неперервна та задовольняє умову Гельдера по y з показником $\alpha \in (0,1)$. Отже, використовуючи функцію Гріна $G(y,\sigma,\eta,\tau)$, визначену вище, де $\theta(\sigma) = \int\limits_0^\sigma \frac{\varphi'(\tau)a(\tau)}{h^2(\tau)}d\tau$, зведемо задачу (9), (10) до такого інтегро-диференціального рівняння стосовно функції $\tilde{v}(y,\sigma)$

$$\tilde{v}(y,\sigma) = \int\limits_0^\sigma d\tau \int\limits_0^\tau G(y,\sigma,\eta,\tau)\Big(\frac{\eta h'(\tau) + \varphi'(\tau)b(\eta h(\tau),\tau)}{h(\tau)}\tilde{v}_\eta(\eta,\tau) +$$

$$+\varphi'(\tau)\Big(c(\eta h(\tau),\tau)\tilde{v}(\eta,\tau) + f(\eta h(\tau),\tau)\Big) - \nu_1'(\tau) - \frac{\eta}{\tau}(\nu_2'(\tau) - \nu_1'(\tau)) + \frac{\eta}{\tau^2}(\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau)) +$$

$$+\frac{(\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau))}{\tau}\frac{\eta h'(\tau) + \varphi'(\tau)b(\eta h(\tau),\tau)}{h(\tau)} +$$

$$+\varphi'(\tau)c(\eta h(\tau),\tau)\Big(\nu_1(\tau) + \frac{\eta}{\tau}(\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau))\Big)\Big)d\eta, \quad (y,\sigma) \in \overline{Q}_{T_1}.$$

Повертаючись до функції $v(y,\sigma)$, отримаємо

$$v(y,\sigma) = \nu_1(\sigma) + \frac{y}{\sigma}(\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)) + \int\limits_0^\sigma d\tau \int\limits_0^\tau G(y,\sigma,\eta,\tau)\Big(\Big(\frac{\eta h'(\tau)}{h(\tau)} +$$

$$+\frac{\varphi'(\tau)b(\eta h(\tau),\tau)}{h(\tau)}\Big)v_\eta(\eta,\tau) + \varphi'(\tau)\Big(c(\eta h(\tau),\tau)v(\eta,\tau) + f(\eta h(\tau),\tau)\Big) - \nu_1'(\tau) -$$

$$-\frac{\eta}{\tau}(\nu_2'(\tau) - \nu_1'(\tau)) + \frac{\eta}{\tau^2}(\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau))\Big)d\eta, \quad (y,\sigma) \in \overline{Q}_{T_1}. \tag{13}$$

Знайдемо оцінку функції $v(y,\sigma)$ знизу. Позначимо через $v_0(y,\sigma)$ розв'язок задачі

$$v_\sigma=\frac{\varphi'(\sigma)a(\sigma)}{h^2(\sigma)}v_{yy}+\frac{yh'(\sigma)+\varphi'(\sigma)b(yh(\sigma),\sigma)}{h(\sigma)}v_y+\varphi'(\sigma)c(yh(\sigma),\sigma)v,\,(y,\sigma)\in Q_{T_1},\quad(14)$$

$$v(0,\sigma)=\nu_1(\sigma),\quad v(\sigma,\sigma)=\nu_2(\sigma),\quad 0\leqslant\sigma\leqslant T_1,\qquad(15)$$

а через $\widehat{v}(y,\sigma)$ – розв'язок задачі

$$v_\sigma=\frac{\varphi'(\sigma)a(\sigma)}{h^2(\sigma)}v_{yy}+\frac{yh'(\sigma)+\varphi'(\sigma)b(yh(\sigma),\sigma)}{h(\sigma)}v_y+\varphi'(\sigma)\Big(c(yh(\sigma),\sigma)v+f(yh(\sigma),\sigma)\Big),\qquad(16)$$

$(y,\sigma)\in Q_{T_1}$,

$$v(0,\sigma)=v(\sigma,\sigma)=0,\quad 0\leqslant\sigma\leqslant T_1.\qquad(17)$$

Тоді

$$v(y,\sigma)=v_0(y,\sigma)+\widehat{v}(y,\sigma).\qquad(18)$$

З принципу максимуму [7, розд. 2] отримуємо

$$v_0(y,\sigma)\geqslant C_1\min\{\min_{0\leqslant t\leqslant T}\mu_1(t),\min_{0\leqslant t\leqslant T}\mu_2(t)\}=M_1>0,\quad (y,\sigma)\in\overline{Q}_{T_1},$$

$$\widehat{v}(y,\sigma)\geqslant 0,\quad (y,\sigma)\in\overline{Q}_{T_1}.$$

Отож, одержуємо таку оцінку:

$$v(y,\sigma)\geqslant M_1>0,\quad (y,\sigma)\in\overline{Q}_{T_1}.\qquad(19)$$

Тому можемо (8) записати у вигляді

$$h(\sigma)=\frac{\nu_4(\sigma)}{\int\limits_0^\sigma v(y,\sigma)dy},\quad \sigma\in(0,T_1].\qquad(20)$$

Позначимо $w(y,\sigma)\equiv v_y(y,\sigma)$, $p(\sigma)\equiv\sigma h'(\sigma)$ і зведемо рівняння (13) до системи інтегральних рівнянь

$$v(y,\sigma)=\nu_1(\sigma)+\frac{y}{\sigma}(\nu_2(\sigma)-\nu_1(\sigma))+\int\limits_0^\sigma d\tau\int\limits_0^\tau G(y,\sigma,\eta,\tau)\Big(\Big(\frac{\eta p(\tau)}{\tau h(\tau)}+$$
$$+\frac{\varphi'(\tau)b(\eta h(\tau),\tau)}{h(\tau)}\Big)w(\eta,\tau)+\varphi'(\tau)\Big(c(\eta h(\tau),\tau)v(\eta,\tau)+f(\eta h(\tau),\tau)\Big)-\nu_1'(\tau)-$$
$$-\frac{\eta}{\tau}(\nu_2'(\tau)-\nu_1'(\tau))+\frac{\eta}{\tau^2}(\nu_2(\tau)-\nu_1(\tau))\Big)d\eta,\quad (y,\sigma)\in\overline{Q}_{T_1},\qquad(21)$$

$$w(y,\sigma)=\frac{\nu_2(\sigma)-\nu_1(\sigma)}{\sigma}+\int\limits_0^\sigma d\tau\int\limits_0^\tau G_y(y,\sigma,\eta,\tau)\Big(\Big(\frac{\eta p(\tau)}{\tau h(\tau)}+\frac{\varphi'(\tau)b(\eta h(\tau),\tau)}{h(\tau)}\Big)w(\eta,\tau)+$$
$$+\varphi'(\tau)\Big(c(\eta h(\tau),\tau)v(\eta,\tau)+f(\eta h(\tau),\tau)\Big)-\nu_1'(\tau)-\frac{\eta}{\tau}(\nu_2'(\tau)-\nu_1'(\tau))+\frac{\eta}{\tau^2}(\nu_2(\tau)-\nu_1(\tau))\Big)d\eta,$$
$$(y,\sigma)\in\overline{Q}_{T_1}.\qquad(22)$$

З умови (7) одержимо рівняння

$$a(\sigma)w(0,\sigma)=h(\sigma)\nu_3(\sigma),\quad \sigma\in(0,T_1].\qquad(23)$$

Щоб отримати рівняння, розв'язане стосовно $p(\sigma)$, продиференціюємо умову (8)

$$h'(\sigma)\frac{\nu_4(\sigma)}{h(\sigma)} + h(\sigma)\Big(\nu_2(\sigma) + \int\limits_0^\sigma v_\sigma(y,\sigma)dy\Big) = \nu_4'(\sigma).$$

Використовуючи (5), отримаємо рівняння

$$p(\sigma) = \frac{1}{\nu_2(\sigma)}\Big(\nu_4'(\sigma) - h(\sigma)\nu_2(\sigma) - \frac{\varphi'(\sigma)a(\sigma)}{h(\sigma)}(w(\sigma,\sigma) - w(0,\sigma)) -$$

$$-\varphi'(\sigma)\int\limits_0^\sigma \Big(b(yh(\sigma),\sigma)w(y,\sigma) + h(\sigma)(c(yh(\sigma),\sigma)v(y,\sigma) + f(yh(\sigma),\sigma))\Big)dy\Big), \qquad (24)$$

$\sigma \in (0, T_1]$.

Отже, ми звели задачу (5)-(8) до системи інтегральних рівнянь (20)-(24), де невідомі $(h(\sigma), a(\sigma), v(y,\sigma), w(y,\sigma), p(\sigma))$. Легко довести еквівалентність задач знаходження класичного розв'язку задачі (5)-(8) і знаходження неперервного розв'язку системи рівнянь (20)-(24).

Оскільки задача (5)-(8) еквівалентна системі рівнянь (20)-(24), то будемо доводити існування розв'язку системи (20)-(24), застосовуючи теорему Шаудера про нерухому точку. Для початку знайдемо оцінки розв'язків системи (20)-(24).

З (19) та (20) випливає, що $h(\sigma) \leqslant H_1 < \infty$, $\sigma \in [0, T_1]$. Оскільки $0 \leqslant yh(\sigma) \leqslant$ $\leqslant T_1 H_1 = C_2$, то $f(yh(\sigma),\sigma) \leqslant C_3$, тому згідно з принципом максимуму [7, розд. 2] одержуємо

$$v_0(y,\sigma) \leqslant C_4 \max\{\max_{0\leqslant\sigma\leqslant T_1} \nu_1(\sigma), \max_{0\leqslant\sigma\leqslant T_1} \nu_2(\sigma)\} = C_5 < \infty, \quad (y,\sigma) \in \overline{Q}_{T_1},$$

$$\widehat{v}(y,\sigma) \leqslant C_6 \max_{(y,\sigma)\in\overline{Q}_{T_1}} f(yh(\sigma),\sigma) = C_7 < \infty, \quad (y,\sigma) \in \overline{Q}_{T_1},$$

де $v_0(y,\sigma), \widehat{v}(y,\sigma)$ – розв'язки задач (14), (15) та (16), (17) відповідно. Отже, з (18) отримаємо

$$v(y,\sigma) \leqslant M_2 < \infty, \quad (y,\sigma) \in \overline{Q}_{T_1}. \qquad (25)$$

Оскільки $\dfrac{\nu_4(\sigma)}{\sigma} = \dfrac{\mu_4(t)}{\psi(t)}$, то з (20), (25) та умови **(A2)** випливає

$$h(\sigma) \geqslant \frac{\nu_4(\sigma)}{\sigma M_2} \geqslant H_0 > 0, \quad \sigma \in [0, T_1].$$

Отже, одержали таку оцінку:

$$0 < H_0 \leqslant h(\sigma) \leqslant H_1 < \infty, \quad \sigma \in [0, T_1]. \qquad (26)$$

З умов **(A1)** – **(A3)** отримуємо

$$\lim_{\sigma\to 0}\frac{\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)}{\sigma} = \nu_2'(0) - \nu_1'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{\mu_2'(t) - \mu_1'(t)}{\psi'(t)} \geqslant M_3 > 0,$$

тому

$$\frac{\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)}{\sigma} \geqslant M_3 > 0, \quad \sigma \in (0, T_1]. \qquad (27)$$

Дослідимо поведінку інтеграла з рівняння (22). Припустимо, що $w(y,\sigma)$, $a(\sigma)$, $p(\sigma)$ – обмежені відомими константами. Використовуючи відомі оцінки функції Гріна [4], отримаємо

$$\Big|\int_0^\sigma d\tau \int_0^\tau G_y(y,\sigma,\eta,\tau)\Big(\Big(\frac{\eta p(\tau)}{\tau h(\tau)}+\frac{\varphi'(\tau)b(\eta h(\tau),\tau)}{h(\tau)}\Big)w(\eta,\tau)+\varphi'(\tau)\Big(c(\eta h(\tau),\tau)v(\eta,\tau)+$$

$$+f(\eta h(\tau),\tau)\Big)-\nu_1'(\tau)-\frac{\eta}{\tau}(\nu_2'(\tau)-\nu_1'(\tau))+\frac{\eta}{\tau^2}(\nu_2(\tau)-\nu_1(\tau))\Big)d\eta\Big|\leqslant$$

$$\leqslant C_8\int_0^\sigma d\tau\int_0^\tau \Big|G_y(y,\sigma,\eta,\tau)\Big|d\eta\leqslant C_9\int_0^\sigma \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(\sigma)-\theta(\tau)}}\leqslant C_{10}\int_0^\sigma \frac{d\tau}{\sqrt{\varphi(\sigma)-\varphi(\tau)}},$$

$$(y,\sigma)\in\overline{Q}_{T_1}. \tag{28}$$

Використовуючи заміну $s=\varphi(\tau)$ і означення слабкого виродження, отримаємо

$$\int_0^\sigma \frac{d\tau}{\sqrt{\varphi(\sigma)-\varphi(\tau)}}=\int_0^{\varphi(\sigma)}\frac{\psi'(s)ds}{\sqrt{\varphi(\sigma)-s}}=\int_0^t\frac{\psi'(s)ds}{\sqrt{t-s}}=\int_0^{t/2}\frac{\psi'(s)\sqrt{s}ds}{\sqrt{s(t-s)}}+\int_{t/2}^t\frac{\psi'(s)ds}{\sqrt{t-s}}\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^{t/2}\frac{\psi'(s)ds}{\sqrt{s}}+\int_{t/2}^t\frac{\psi'(s)ds}{\sqrt{t-s}}\underset{t\to0}{\longrightarrow}0,\quad (y,\sigma)\in\overline{Q}_{T_1}. \tag{29}$$

З (22), (27), (28) та (29) випливає, що існує число σ_1, $0<\sigma_1\leqslant T_1$ таке, що для $y\in[0,\sigma],\sigma\in[0,\sigma_1]$ виконується така оцінка:

$$w(y,\sigma)\geqslant\frac{1}{2}M_3>0. \tag{30}$$

З (23), (26) та (30) отримуємо

$$a(\sigma)\leqslant A_1<\infty,\quad \sigma\in[0,\sigma_1]. \tag{31}$$

Позначимо

$$W(\sigma)\equiv\max_{0\leqslant y\leqslant\sigma}w(y,\sigma),\quad a_{\min}(\sigma)\equiv\min_{0\leqslant\tau\leqslant\sigma}a(\tau).$$

З (22), (24) знаходимо

$$W(\sigma)\leqslant C_{12}+C_{13}\int_0^\sigma\frac{(1+|p(\tau)|)(W(\tau)+1)}{\sqrt{\theta(\sigma)-\theta(\tau)}}d\tau,\quad \sigma\in[0,\sigma_1], \tag{32}$$

$$|p(\sigma)|\leqslant C_{14}+C_{15}W(\sigma),\quad \sigma\in[0,\sigma_1]. \tag{33}$$

Підставимо (33) в (32)

$$W(\sigma)\leqslant C_{12}+C_{16}\int_0^\sigma\frac{(W(\tau)+1)^2}{\sqrt{\theta(\sigma)-\theta(\tau)}}d\tau. \tag{34}$$

Позначимо $W_1(\sigma) \equiv W(\sigma) + 1$, тоді (34) зведемо до вигляду

$$W_1(\sigma) \leqslant C_{17} + \frac{C_{18}}{\sqrt{a_{\min}(\sigma)}} \int_0^\sigma \frac{W_1^2(\tau)d\tau}{\sqrt{\varphi(\sigma) - \varphi(\tau)}}. \tag{35}$$

Піднесемо цю нерівність до квадрата, використаємо нерівність $(a+b)^2 \leqslant 2a^2 + 2b^2$ і нерівність Коші-Буняковського

$$W_1^2(\sigma) \leqslant C_{19} + \frac{C_{20}}{a_{\min}(\sigma)} \int_0^\sigma \frac{W_1^4(\tau)d\tau}{\sqrt{\varphi(\sigma) - \varphi(\tau)}} \int_0^\sigma \frac{d\tau}{\sqrt{\varphi(\sigma) - \varphi(\tau)}}. \tag{36}$$

З (29) випливає, що інтеграл $I \equiv \int\limits_0^\sigma \frac{d\tau}{\sqrt{\varphi(\sigma)-\varphi(\tau)}}$ прямує до нуля, коли $\sigma \to 0$. Отже, $I \leqslant C_{21}$, $\sigma \in [0, T_1]$ і нерівність (36) запишемо у вигляді

$$W_1^2(\sigma) \leqslant C_{19} + \frac{C_{22}}{a_{\min}(\sigma)} \int_0^\sigma \frac{W_1^4(\tau)d\tau}{\sqrt{\varphi(\sigma) - \varphi(\tau)}}.$$

Замінимо в попередній нерівності σ на s, домножимо на $\sqrt{\varphi(\sigma) - \varphi(s)}$ і проінтегруємо від 0 до σ

$$\int_0^\sigma \frac{W_1^2(s)ds}{\sqrt{\varphi(\sigma) - \varphi(s)}} \leqslant C_{22} + C_{22} \int_0^\sigma \frac{ds}{a_{\min}(s)\sqrt{\varphi(\sigma) - \varphi(s)}} \int_0^s \frac{W_1^4(\tau)d\tau}{\sqrt{\varphi(s) - \varphi(\tau)}} \leqslant$$

$$\leqslant C_{23} + \frac{C_{22}}{a_{\min}(\sigma)} \int_0^\sigma W_1^4(\tau)d\tau \int_\tau^\sigma \frac{ds}{\sqrt{(\varphi(s) - \varphi(\tau))(\varphi(\sigma) - \varphi(s))}}. \tag{37}$$

Оскільки $s \geqslant \tau$ і φ' – монотонно зростаюча функція, бо виконується **(I)**, а

$$\int_\tau^\sigma \frac{\varphi'(s)ds}{\sqrt{(\varphi(s) - \varphi(\tau))(\varphi(\sigma) - \varphi(s))}} = \pi,$$

тому з (37) одержимо

$$\int_0^\sigma \frac{W_1^2(s)ds}{\sqrt{\varphi(\sigma) - \varphi(s)}} \leqslant C_{23} + \frac{C_{24}}{a_{\min}(\sigma)} \int_0^\sigma \frac{W_1^4(\tau)d\tau}{\varphi'(\tau)}.$$

Підставимо останню нерівність у (35)

$$W_1(\sigma) \leqslant C_{17} + \frac{C_{25}}{\sqrt{a_{\min}(\sigma)}} + \frac{C_{26}}{a_{\min}^{3/2}(\sigma)} \int_0^\sigma \frac{W_1^4(\tau)d\tau}{\varphi'(\tau)}.$$

Розв'язавши цю нерівність [1], отримаємо

$$W_1(\sigma) \leqslant C_{17} +$$

$$+\frac{C_{25}}{\sqrt{a_{\min}(\sigma)}} + C_{27} \int_0^\sigma \Big(C_{17} + \frac{C_{25}}{\sqrt{a_{\min}(\tau)}}\Big) \frac{d\tau}{a_{\min}^{9/2}(\tau)\varphi'(\tau)} \exp\Big(C_{28} \int_0^\sigma \frac{ds}{a_{\min}^6(s)\varphi'(s)}\Big). \tag{38}$$

Існує таке число $\sigma_2 \in (0, T_1]$, що

$$C_{27}\int_0^{\sigma}\Big(C_{17}+\frac{C_{25}}{\sqrt{a_{\min}(\tau)}}\Big)\frac{d\tau}{a_{\min}^{9/2}(\tau)\varphi'(\tau)}\exp\Big(C_{28}\int_0^{\sigma}\frac{ds}{a_{\min}^{6}(s)\varphi'(s)}\Big) \leqslant C_{17}, \tag{39}$$

тому з (38), (39) і з того, що $W(\sigma) \leqslant W_1(\sigma)$, випливає

$$W(\sigma) \leqslant 2C_{17} + \frac{C_{25}}{\sqrt{a_{\min}(\sigma)}}. \tag{40}$$

Звідси та з (23) випливає нерівність

$$2C_{17}a_{\min}(\sigma) + C_{25}\sqrt{a_{\min}(\sigma)} - C_{29} \geqslant 0,$$

тобто

$$\sqrt{a_{\min}(\sigma)} \geqslant \frac{\sqrt{C_{25}^2+8C_{17}C_{29}}-C_{25}}{4C_{17}} = \frac{2C_{29}}{C_{25}+\sqrt{C_{25}^2+8C_{17}C_{29}}}.$$

Отже,

$$a_{\min}(\sigma) \geqslant \frac{4C_{29}^2}{\Big(C_{25}+\sqrt{C_{25}^2+8C_{17}C_{29}}\Big)^2} = A_0 > 0. \tag{41}$$

З (41), (40), (24) одержуємо

$$a(\sigma) \geqslant A_0 > 0, \quad |p(\sigma)| \leqslant M_4, \quad \sigma \in [0,\sigma_2], \quad w(y,\sigma) \leqslant M_5, \quad (y,\sigma) \in \overline{Q}_{\sigma_2}, \tag{42}$$

де сталі A_0, M_4, M_5 залежать лише від вихідних даних.

Отже, ми отримали оцінки розв'язків системи (20)-(24).

Перепишемо цю систему у вигляді

$$\omega = P\omega, \tag{43}$$

де $\omega = (h, v, w, a, p)$, а оператор P визначений правими частинами рівнянь (20)-(24), якщо (23) переписати у вигляді

$$a(\sigma) = \frac{h(\sigma)\nu_3(\sigma)}{w(0,\sigma)}, \quad \sigma \in (0, T_1].$$

Визначимо множину $\mathcal{N} \equiv \{(h,v,w,a,p) \in C[0,\sigma_0]\times(C(\overline{Q}_{\sigma_0}))^2\times(C[0,\sigma_0])^2 : H_0 \leqslant h \leqslant H_1,$ $M_1 \leqslant v \leqslant M_2,\ \frac{1}{2}M_3 \leqslant w \leqslant M_5,\ A_0 \leqslant a \leqslant A_1,\ |p| \leqslant M_4\}$, де $\sigma_0 = \min\{\sigma_1, \sigma_2\}$. Оператор P є компактним на множині $\mathcal{N}$ [6]. Звідси і з отриманих оцінок (19), (25), (26), (30), (31), (42) випливає, що існує хоча б одна нерухома точка оператора P в $\mathcal{N}$. Це означає, що задача (1)-(4) має класичний розв'язок. $\square$

4. Існування розв'язку задачі (1)-(4) (випадок (II)). Нехай виконується умова

(A4) існують границі $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\tilde{b}(x,t)}{\psi'(t)},\ \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\tilde{c}(x,t)}{\psi'(t)},\ \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\tilde{f}(x,t)}{\psi'(t)} \in C([0,\infty)\times[0,T]).$

Теорема 2. *Нехай виконуються припущення **(II)**, **(A1)** – **(A4)**, а також існує границя* $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\mu_4'(t)}{\psi'(t)}$. *Тоді існує хоча б один розв'язок* $(\tilde{h}(t), \tilde{a}(t), u(x,t))$ *задачі (1)-(4), який належить до класу* $C^1(0,T_0]\cap C[0,T_0]\times C[0,T_0]\times C^{2,1}(Q_{T_0})\cap C^{1,0}(\overline{Q}_{T_0})$, *де* $T_0,\ 0 < T_0 \leqslant T$ *визначається через вихідні дані.*

Доведення. Зрозуміло, що відмінністю між доведенням теорем 1 і 2 є оцінка виразів $\varphi'(\sigma)(w(\sigma,\sigma)-w(0,\sigma))$, $\varphi'(\sigma)b(yh(\sigma),\sigma)w(y,\sigma)$ і $\varphi'(\sigma)(c(yh(\sigma),\sigma)v(y,\sigma)+f(yh(\sigma),\sigma))$ з формул (24), (22). Оскільки виконується умова **(A4)**, то останні два вирази обмежені й особливостей не мають.

Використовуючи (22), отримаємо

$$w(\sigma,\sigma)-w(0,\sigma)=\int_0^\sigma d\tau\int_0^\tau (G_y(\sigma,\sigma,\eta,\tau)-G_y(0,\sigma,\eta,\tau))\Big(\Big(\frac{\eta p(\tau)}{\tau h(\tau)}+$$

$$+\frac{\varphi'(\tau)b(\eta h(\tau),\tau)}{h(\tau)}\Big)w(\eta,\tau)+\varphi'(\tau)\Big(c(\eta h(\tau),\tau)v(\eta,\tau)+f(\eta h(\tau),\tau)\Big)-\nu_1'(\tau)-$$

$$-\frac{\eta}{\tau}(\nu_2'(\tau)-\nu_1'(\tau))+\frac{\eta}{\tau^2}(\nu_2(\tau)-\nu_1(\tau))\Big)d\eta,\quad (y,\sigma)\in\overline{Q}_{T_1}.$$

Щоб знайти поведінку $\varphi'(\sigma)(w(\sigma,\sigma)-w(0,\sigma))$ при $\sigma\to 0$, достатньо оцінити вираз

$$\int_0^\sigma d\tau\int_0^\tau |G_{0y}^{(1)}(\sigma,\sigma,\eta,\tau)-G_{0y}^{(1)}(0,\sigma,\eta,\tau)|d\eta,$$

де

$$G_0^{(i)}(y,\sigma,\eta,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big(\exp\Big(-\frac{(y-\eta+2n\sigma)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\Big)+$$

$$+(-1)^i\exp\Big(-\frac{(y+\eta+2n\sigma)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\Big)\Big),\quad i=1,2.$$

Оскільки $G_{0y}^{(1)}(\sigma,\sigma,\eta,\tau)\leqslant 0$ і $G_{0y}^{(1)}(0,\sigma,\eta,\tau)\geqslant 0$, а $G_{0y}^{(1)}(y,\sigma,\eta,\tau)=-G_{0\eta}^{(2)}(y,\sigma,\eta,\tau)$, то

$$\int_0^\sigma d\tau\int_0^\tau |G_{0y}^{(1)}(\sigma,\sigma,\eta,\tau)-G_{0y}^{(1)}(0,\sigma,\eta,\tau)|d\eta=\int_0^\sigma d\tau\int_0^\tau (G_{0\eta}^{(2)}(\sigma,\sigma,\eta,\tau)-G_{0\eta}^{(2)}(0,\sigma,\eta,\tau))d\eta=$$

$$=\int_0^\sigma (G_0^{(2)}(\sigma,\sigma,\tau,\tau)-G_0^{(2)}(0,\sigma,\tau,\tau)-G_0^{(2)}(\sigma,\sigma,0,\tau)+G_0^{(2)}(0,\sigma,0,\tau))d\tau=$$

$$=\int_0^\sigma\frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n+1}\Big(\exp\Big(-\frac{(n\sigma-\tau)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\Big)+$$

$$+\exp\Big(-\frac{(n\sigma+\tau)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\Big)-2\exp\Big(-\frac{(n\sigma)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\Big)\Big)d\tau.$$

Зробивши заміну в першому доданку $n=-m$ і перепозначивши m на n, отримаємо

$$\int_0^\sigma d\tau\int_0^\tau |G_{0y}^{(1)}(\sigma,\sigma,\eta,\tau)-G_{0y}^{(1)}(0,\sigma,\eta,\tau)|d\eta=$$

$$=\int_0^\sigma\frac{1}{\sqrt{\pi(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\Big(\exp\Big(-\frac{(n\sigma)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\Big)-\exp\Big(-\frac{(n\sigma+\tau)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\Big)\Big)d\tau.$$

Враховуючи те, що

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\Big(\exp\Big(-\frac{(n\sigma)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\Big)-\exp\Big(-\frac{(n\sigma+\tau)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\Big)\Big)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big(\exp\Big(-\frac{(n\sigma)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\Big)+\exp\Big(-\frac{(n\sigma+\tau)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\Big)\Big)\leqslant$$

$$\leqslant 2+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(2\exp\Big(-\frac{(n\sigma)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\Big)+\exp\Big(-\frac{(n\sigma+\tau)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\Big)+\exp\Big(-\frac{(n\sigma-\tau)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\Big)\Big),$$

з [8] одержимо оцінку

$$\int_0^\sigma d\tau\int_0^\tau|G_{0y}^{(1)}(\sigma,\sigma,\eta,\tau)-G_{0y}^{(1)}(0,\sigma,\eta,\tau)|d\eta\leqslant C_{30}\int_0^\sigma\frac{d\tau}{\sqrt{\pi(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}}+C_{31}\sigma.$$

Оскільки ψ' – монотонно зростаюча функція і $\omega\leqslant t$, то

$$\lim_{\sigma\to0}\varphi'(\sigma)\int_0^\sigma\frac{d\tau}{\sqrt{\theta(\sigma)-\theta(\tau)}}\leqslant C_{32}\lim_{t\to0}\frac{1}{\psi'(t)}\int_0^t\frac{\psi'(\omega)d\omega}{\sqrt{t-\omega}}\leqslant C_{32}\lim_{t\to0}\int_0^t\frac{d\omega}{\sqrt{t-\omega}}=0.$$

Враховуючи те, що

$$\lim_{\sigma\to0}\varphi'(\sigma)\sigma=\lim_{t\to0}\frac{\psi(t)}{\psi'(t)}=\lim_{t\to0}\frac{\psi(t)t}{\psi(t)-\psi(0)}=0,$$

отримаємо

$$|\varphi'(\sigma)(w(\sigma,\sigma)-w(0,\sigma))|\leqslant C_{33}.$$

Враховуючи це в (24) і (33), далі доводимо цю теорему аналогічно до доведення теореми 1. Зауважимо, що оцінки (42) також правильні у випадку, коли φ' – монотонно спадна функція, оскільки оцінку (37) можна продовжити, використовуючи те, що $s\leqslant\sigma$. □

5. Єдиність розв'язку задачі (1)-(4) (випадок (I)).

Теорема 3. *Нехай виконується припущення **(I)**,* $\int_0^t\frac{\psi'(s)ds}{\sqrt{s}}\to0, t\to0$ *й умова:*

(A5) $\tilde b,\tilde c,\tilde f\in C^{1,0}([0,+\infty)\times[0,T])$, $\psi\in C^1(0,T]$, $\mu_i\in C^1[0,T]$, $i=1,2$; $\mu_i(t)\neq0$, $i=2,3$, $\mu_4(t)=\mu_0(t)\psi(t)$, $\mu_0(t)\neq0$, $t\in[0,T]$, $\psi(0)=0$, $\psi(t)>0$, $t\in(0,T]$, $\psi'(t)\geqslant0$, $t\in[0,T]$.

Тоді задача (1)-(4) не може мати більше одного розв'язку $(\tilde h(t),\tilde a(t),u(x,t))$, *який належить до класу* $C^1(0,T]\cap C[0,T]\times C[0,T]\times C^{2,1}(Q_T)\cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$.

Доведення. Оскільки задача (1)-(4) еквівалентна задачі (5)-(8), то достатньо довести єдиність розв'язку задачі (5)-(8). Нехай існують два різних розв'язки $(h_i(\sigma),a_i(\sigma),v_i(y,\sigma))$, $i=1,2$ задачі (5)-(8). Позначимо $h(\sigma)\equiv h_1(\sigma)-h_2(\sigma)$, $a(\sigma)\equiv a_1(\sigma)-a_2(\sigma)$, $v(y,\sigma)\equiv v_1(y,\sigma)-v_2(y,\sigma)$.

Розглянемо

$$b(yh_1(\sigma),\sigma)-b(yh_2(\sigma),\sigma)=\int_0^1\frac{d}{ds}b(yh_2(\sigma)+sy(h_1(\sigma)-h_2(\sigma)),\sigma)ds=$$

$$=y(h_1(\sigma)-h_2(\sigma))\int_0^1\frac{\partial b(z,\sigma)}{\partial z}\Big|_{z=yh_2(\sigma)+sy(h_1(\sigma)-h_2(\sigma))}ds.$$

Аналогічно можна подати різниці $c(yh_1(\sigma),\sigma)-c(yh_2(\sigma),\sigma)$ і $f(yh_1(\sigma),\sigma)-f(yh_2(\sigma),\sigma)$. Тоді з (5)-(8) одержуємо таку задачу стосовно $(h(\sigma),a(\sigma),v(y,\sigma))$

$$v_\sigma=\frac{\varphi'(\sigma)a_1(\sigma)}{h_1^2(\sigma)}v_{yy}+\Big(\frac{yh_1'(\sigma)}{h_1(\sigma)}+\frac{\varphi'(\sigma)b(yh_1(\sigma),\sigma)}{h_1(\sigma)}\Big)v_y+\varphi'(\sigma)c(yh_1(\sigma),\sigma)v+$$

$$+\frac{\varphi'(\sigma)(a(\sigma)h_2^2(\sigma)-a_2(\sigma)h(\sigma)(h_1(\sigma)+h_2(\sigma)))}{h_1^2(\sigma)h_2^2(\sigma)}v_{2yy}+\Big(\frac{y(h'(\sigma)h_2(\sigma)-h_2'(\sigma)h(\sigma))}{h_1(\sigma)h_2(\sigma)}+$$

$$+\frac{\varphi'(\sigma)h(\sigma)}{h_1(\sigma)h_2(\sigma)}\Big(yh_2(\sigma)\int_0^1\frac{\partial b(z,\sigma)}{\partial z}\Big|_{z=yh_2(\sigma)+syh(\sigma)}ds-b(yh_2(\sigma),\sigma)\Big)\Big)v_{2y}+$$

$$+yh(\sigma)\varphi'(\sigma)\Big(v_2\int_0^1\frac{\partial c(z,\sigma)}{\partial z}\Big|_{z=yh_2(\sigma)+syh(\sigma)}ds+\int_0^1\frac{\partial f(z,\sigma)}{\partial z}\Big|_{z=yh_2(\sigma)+syh(\sigma)}ds\Big),$$

$$(y,\sigma)\in Q_{T_1}, \tag{44}$$

$$v(0,\sigma)=v(\sigma,\sigma)=0,\quad 0\leqslant\sigma\leqslant T_1, \tag{45}$$

$$a_1(\sigma)v_y(0,\sigma)=\nu_3(\sigma)h(\sigma)-a(\sigma)v_{2y}(0,\sigma),\quad 0\leqslant\sigma\leqslant T_1, \tag{46}$$

$$h_1(\sigma)\int_0^\sigma v(y,\sigma)dy=-h(\sigma)\int_0^\sigma v_2(y,\sigma)dy,\quad 0\leqslant\sigma\leqslant T_1. \tag{47}$$

Використовуючи функцію Гріна $G^*(y,\sigma,\eta,\tau)$ для рівняння

$$v_\sigma=\frac{\varphi'(\sigma)a_1(\sigma)}{h_1^2(\sigma)}v_{yy}+\Big(\frac{yh_1'(\sigma)}{h_1(\sigma)}+\frac{\varphi'(\sigma)b(yh_1(\sigma),\sigma)}{h_1(\sigma)}\Big)v_y,\quad (y,\sigma)\in Q_{T_1},$$

з умовами (44), зведемо задачу (44)-(47) до такої системи рівнянь:

$$v(y,\sigma)=\int_0^\sigma d\tau\int_0^\tau G^*(y,\sigma,\eta,\tau)\Big(\varphi'(\tau)c(\eta h_1(\tau),\tau)v(\eta,\tau)+$$

$$+\frac{\varphi'(\tau)(a(\tau)h_2^2(\tau)-a_2(\tau)h(\tau)(h_1(\tau)+h_2(\tau)))}{h_1^2(\tau)h_2^2(\tau)}v_{2\eta\eta}(\eta,\tau)+\Big(\frac{\eta(h'(\tau)h_2(\tau)-h_2'(\tau)h(\tau))}{h_1(\tau)h_2(\tau)}+$$

$$+\frac{\varphi'(\tau)}{h_1(\tau)h_2(\tau)}\Big(\eta h(\tau)h_2(\tau)\int_0^1\frac{\partial b(z,\tau)}{\partial z}\Big|_{z=yh_2(\tau)+syh(\tau)}ds-b(\eta h_2(\tau),\tau)h(\tau)\Big)\Big)v_{2\eta}(\eta,\tau)+$$

$$+\varphi'(\tau)\Big(h(\tau)\eta v_2(\eta,\tau)\int\limits_0^1 \frac{\partial c(z,\tau)}{\partial z}\Big|_{z=yh_2(\tau)+syh(\tau)}ds+$$

$$+\eta h(\tau)\int\limits_0^1 \frac{\partial f(z,\tau)}{\partial z}\Big|_{z=yh_2(\tau)+syh(\tau)}ds\Big)\Big)d\eta, \quad (y,\sigma)\in Q_{T_1}, \tag{48}$$

$$h(\sigma)=-\frac{h_1(\sigma)\int\limits_0^\sigma v(y,\sigma)dy}{\int\limits_0^\sigma v_2(y,\sigma)dy}, \quad \sigma\in[0,T_1], \tag{49}$$

$$a(\sigma)=\frac{\nu_3(\sigma)h(\sigma)-a_1(\sigma)v_y(0,\sigma)}{v_{2y}(0,\sigma)}, \quad \sigma\in[0,T_1]. \tag{50}$$

Оскільки задача (5)-(8) еквівалентна задачі (20)-(24), то $p_i(\sigma)\equiv\sigma h_i'(\sigma)$, $i=1,2$ задовольняють (24). Звідси одержимо

$$p(\sigma)=\frac{1}{\nu_2(\sigma)}\Big(-h(\sigma)\nu_2(\sigma)-\varphi'(\sigma)\Big(\frac{a_1(\sigma)}{h_1(\sigma)}(v_y(\sigma,\sigma)-v_y(0,\sigma))+\int\limits_0^\sigma\Big(b(yh_1(\sigma),\sigma)v_y(y,\sigma)+$$

$$+h_1(\sigma)c(yh_1(\sigma),\sigma)v(y,\sigma)\Big)dy+\frac{a(\sigma)h_2(\sigma)-a_2(\sigma)h(\sigma)}{h_1(\sigma)h_2(\sigma)}(v_{2y}(\sigma,\sigma)-v_{2y}(0,\sigma))+$$

$$+\int\limits_0^\sigma\Big(yh(\sigma)v_{2y}(y,\sigma)\int\limits_0^1\frac{\partial b(z,\sigma)}{\partial z}\Big|_{z=yh_2(\sigma)+syh(\sigma)}ds+$$

$$+(h_1(\sigma)yh(\sigma)\int\limits_0^1\frac{\partial c(z,\sigma)}{\partial z}\Big|_{z=yh_2(\sigma)+syh(\sigma)}ds+h(\sigma)c(yh_2(\sigma),\sigma))v_2(y,\sigma)+$$

$$+yh(\sigma)\int\limits_0^1\frac{\partial f(z,\sigma)}{\partial z}\Big|_{z=yh_2(\sigma)+syh(\sigma)}ds\Big)dy\Big)\Big), \quad \sigma\in(0,T_1], \tag{51}$$

де $p(\sigma)=\sigma h'(\sigma)$.

Доведемо інтегровність ядер системи (48)-(51). З умови **(A5)** та з того, що $v_2(y,\sigma)$ задовольняє (7), випливає, що знаменники (50), (51) відмінні від нуля. Оскільки $v_2(y,\sigma)$ також задовольняє (8), то з (49) та умови **(A5)** за теоремою про середнє отримаємо

$$h(\sigma)=-\frac{h_1(\sigma)h_2(\sigma)\int\limits_0^\sigma v(y,\sigma)dy}{\nu_4(\sigma)}=-\frac{h_1(\sigma)h_2(\sigma)\int\limits_0^\sigma v(y,\sigma)dy}{\sigma\nu_0(\sigma)}=-\frac{h_1(\sigma)h_2(\sigma)\sigma v(\tilde y,\sigma)}{\sigma\nu_0(\sigma)}=$$

$$=-\frac{h_1(\sigma)h_2(\sigma)v(\tilde y,\sigma)}{\nu_0(\sigma)}, \quad \tilde y\in[0,\sigma], \quad \sigma\in[0,T_1],$$

де $\nu_0(\sigma)=\mu_0(\varphi(\sigma))$. Підставляючи сюди значення v з (48), бачимо, що ядро в (49) неперервне.

Дослідимо поведінку $v_{2yy}(y,\sigma)$ при $\sigma\to 0$. Зробимо заміну $v_2(y,\sigma)=\tilde v_2(y,\sigma)+$ $+\nu_1(\sigma)+\dfrac{y}{\sigma}(\nu_2(\sigma)-\nu_1(\sigma))$. Тоді з (5)-(8) отримаємо задачу стосовно функції $\tilde v_2(y,\sigma)$

$$\tilde v_{2\sigma}=\frac{\varphi'(\sigma)a_2(\sigma)}{h_2^2(\sigma)}\tilde v_{2yy}+\Big(\frac{yh_2'(\sigma)}{h_2(\sigma)}+\frac{\varphi'(\sigma)b(yh_2(\sigma),\sigma)}{h_2(\sigma)}\Big)\tilde v_{2y}+\varphi'(\sigma)\Big(c(yh_2(\sigma),\sigma)\tilde v_2+$$

$$+f(yh_2(\sigma),\sigma)\Big)-\nu_1'(\sigma)-\frac{y}{\sigma}(\nu_2'(\sigma)-\nu_1'(\sigma))+\frac{y}{\sigma^2}(\nu_2(\sigma)-\nu_1(\sigma))+\Big(\frac{yh_2'(\sigma)}{h_2(\sigma)}+$$

$$+\frac{\varphi'(\sigma)b(yh_2(\sigma),\sigma)}{h_2(\sigma)}\Big)\frac{\nu_2(\sigma)-\nu_1(\sigma)}{\sigma}+\varphi'(\sigma)c(yh_2(\sigma),\sigma)\Big(\nu_1(\sigma)+\frac{y}{\sigma}(\nu_2(\sigma)-\nu_1(\sigma))\Big),$$

$$(y,\sigma)\in Q_{T_1}, \tag{52}$$

$$\tilde v_2(0,\sigma)=\tilde v_2(\sigma,\sigma)=0,\quad \sigma\in[0,T_1]. \tag{53}$$

Використовуючи функцію Гріна $G^{**}(y,\sigma,\eta,\tau)$ для рівняння

$$\tilde v_{2\sigma}=\frac{\varphi'(\sigma)a_2(\sigma)}{h_2^2(\sigma)}\tilde v_{2yy}+\Big(\frac{yh_2'(\sigma)}{h_2(\sigma)}+\frac{\varphi'(\sigma)b(yh_2(\sigma),\sigma)}{h_2(\sigma)}\Big)\tilde v_{2y}+\varphi'(\sigma)c(yh_2(\sigma),\sigma)\tilde v_2,$$

з умовами (53), знаходимо розв'язок задачі (52), (53)

$$v_2(y,\sigma)=\nu_1(\sigma)+\frac{y}{\sigma}(\nu_2(\sigma)-\nu_1(\sigma))+\int_0^\sigma d\tau\int_0^\tau G^{**}(y,\sigma,\eta,\tau)\Big(\varphi'(\tau)f(\eta h_2(\tau),\tau)-\nu_1'(\tau)-$$

$$-\frac{\eta}{\tau}(\nu_2'(\tau)-\nu_1'(\tau))+\frac{\eta}{\tau^2}(\nu_2(\tau)-\nu_1(\tau))+\Big(\frac{\eta h_2'(\tau)}{h_2(\tau)}+\frac{\varphi'(\tau)b(\eta h_2(\tau),\tau)}{h_2(\tau)}\Big)\frac{\nu_2(\tau)-\nu_1(\tau)}{\tau}+$$

$$+\varphi'(\tau)c(\eta h_2(\tau),\tau)\Big(\nu_1(\tau)+\frac{\eta}{\tau}(\nu_2(\tau)-\nu_1(\tau))\Big)\Big)d\eta,\quad (y,\sigma)\in\overline{Q}_{T_1}. \tag{54}$$

Продиференціюємо вираз (54) двічі по y

$$v_{2yy}(y,\sigma)=\int_0^\sigma d\tau\int_0^\tau G^{**}_{yy}(y,\sigma,\eta,\tau)\Big(\varphi'(\tau)f(\eta h_2(\tau),\tau)-\nu_1'(\tau)-\frac{\eta}{\tau}(\nu_2'(\tau)-\nu_1'(\tau))+$$

$$+\frac{\eta}{\tau^2}(\nu_2(\tau)-\nu_1(\tau))+\Big(\frac{\eta h_2'(\tau)}{h_2(\tau)}+\frac{\varphi'(\tau)b(\eta h_2(\tau),\tau)}{h_2(\tau)}\Big)\frac{\nu_2(\tau)-\nu_1(\tau)}{\tau}+$$

$$+\varphi'(\tau)c(\eta h_2(\tau),\tau)\Big(\nu_1(\tau)+\frac{\eta}{\tau}(\nu_2(\tau)-\nu_1(\tau))\Big)\Big)d\eta,\quad (y,\sigma)\in Q_{T_1}. \tag{55}$$

Оскільки $\nu_i'(\sigma)=\mu_i'(\varphi(\sigma))\varphi'(\sigma),\ i=1,2,\ \eta=\eta^\gamma\eta^{1-\gamma}$, де $\gamma\in(0,1)$ і $\eta\leqslant\tau$, то з [7] одержимо

$$\Big|\int_0^\sigma d\tau\int_0^\tau G^{**}_{yy}(y,\sigma,\eta,\tau)\frac{\nu_2'(\tau)-\nu_1'(\tau)}{\tau}\eta d\eta\Big|\leqslant C_{34}\int_0^\sigma\frac{\varphi'(\tau)\tau^{1-\gamma}}{\tau}d\tau\int_0^\tau|G^{**}_{yy}(y,\sigma,\eta,\tau)|d\eta\leqslant$$

$$\leqslant C_{35}\int_0^\sigma\frac{\varphi'(\tau)d\tau}{\tau^\gamma(\theta_2(\sigma)-\theta_2(\tau))^{1-\gamma/2}}, \tag{56}$$

де $\theta_2(\sigma) = \int\limits_0^\sigma \dfrac{a_2(\tau)\varphi'(\tau)}{h_2^2(\tau)}d\tau$. Решту доданків в (55) оцінюємо аналогічно, використовуючи умову **(A5)**. Зрозуміло, що $C_{36}\varphi(\sigma) \leqslant \theta_2(\sigma) \leqslant C_{37}\varphi(\sigma)$, тому $\theta_2(\sigma) - \theta_2(\tau) \geqslant \geqslant C_{38}(\varphi(\sigma) - \varphi(\tau))$. Тоді з (55) і (56) отримаємо

$$|v_{2yy}(y,\sigma)| \leqslant C_{39}\int\limits_0^\sigma \frac{\varphi'(\tau)d\tau}{\tau^\gamma(\varphi(\sigma)-\varphi(\tau))^{1-\gamma/2}}.$$

Оскільки $\varphi(\sigma)-\varphi(\tau) = \int_\tau^\sigma \varphi'(s)ds$ і φ' – монотонно зростаюча функція, $s \geqslant \tau$, $\tau \leqslant \sigma$, то

$$|v_{2yy}(y,\sigma)| \leqslant C_{39}\int\limits_0^\sigma \frac{\varphi'(\tau)d\tau}{\tau^\gamma\Big(\int\limits_\tau^\sigma \varphi'(s)ds\Big)^{1-\gamma/2}} \leqslant C_{39}\int\limits_0^\sigma \frac{\varphi'(\tau)d\tau}{\tau^\gamma\varphi'(\tau)^{1-\gamma/2}(\sigma-\tau)^{1-\gamma/2}} \leqslant$$

$$\leqslant C_{39}\varphi'(\sigma)^{\gamma/2}\int\limits_0^\sigma \frac{d\tau}{\tau^\gamma(\sigma-\tau)^{1-\gamma/2}}. \tag{57}$$

Після заміни $z = \dfrac{\tau}{\sigma}$ в (57) отримаємо

$$|v_{2yy}(y,\sigma)| \leqslant \frac{C_{39}\varphi'(\sigma)^{\gamma/2}}{\sigma^{\gamma/2}}\int\limits_0^1 \frac{dz}{z^\gamma(1-z)^{1-\gamma/2}} = \frac{C_{40}}{\sigma^{\gamma/2}}.$$

Оскільки $\gamma \in (0,1)$, то ця особливість є інтегровною і за властивостями інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду система рівнянь (48)-(51) має тільки тривіальний розв'язок $v(y,\sigma) \equiv 0,\ h(\sigma) \equiv 0,\ a(\sigma) \equiv 0,\ p(\sigma) \equiv 0,\ y \in [0,\sigma],\ \sigma \in [0,T_1]$. Тому розв'язок задачі (5)-(8), а отже, і задачі (1)-(4) – єдиний. □

Теорема 4. *Нехай виконуються умови **(II)**, **(A5)** й існує скінченна границя* $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\mu_2'(t)-\mu_1'(t)}{\psi'(t)}$. *Тоді задача (1)-(4) не може мати більше одного розв'язку* $(\tilde{h}(t), \tilde{a}(t), u(x,t))$, *який належить до класу* $C^1(0,T]\cap C[0,T]\times C[0,T]\times C^{2,1}(Q_T)\cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$.

Доведення. Зрозуміло, що відмінністю між доведенням теорем 3 і 4 є дослідження поведінки $\varphi'(\sigma)v_{2yy}(y,\sigma)$ при $\sigma \to 0$. Як і в теоремі 3, отримаємо

$$\Big|\int\limits_0^\sigma d\tau\int\limits_0^\tau G_{yy}^{**}(y,\sigma,\eta,\tau)\frac{\nu_2'(\tau)-\nu_1'(\tau)}{\tau}\eta d\eta\Big| \leqslant C_{41}\int\limits_0^\sigma \frac{\tau^{-\gamma}d\tau}{(\theta_2(\sigma)-\theta_2(\tau))^{1-\gamma/2}}, \tag{58}$$

бо з того, що існує скінченна границя $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\mu_2'(t)-\mu_1'(t)}{\psi'(t)}$ випливає, що $\nu_2'(\sigma)-\nu_1'(\sigma) = (\mu_2'(\varphi(\sigma))-\mu_1'(\varphi(\sigma)))\varphi'(\sigma) \leqslant C_{42}$.

Тоді з (55) і (58) одержимо

$$|v_{2yy}(y,\sigma)| \leqslant C_{43}\int\limits_0^\sigma \frac{\tau^{-\gamma}d\tau}{(\theta_2(\sigma)-\theta_2(\tau))^{1-\gamma/2}} \leqslant C_{44}\int\limits_0^\sigma \frac{\tau^{-\gamma}d\tau}{(\varphi(\sigma)-\varphi(\tau))^{1-\gamma/2}}.$$

Оскільки φ' – монотонно спадна функція, а $s \leqslant \sigma$, то

$$|v_{2yy}(y,\sigma)| \leqslant C_{44} \int\limits_0^\sigma \frac{d\tau}{\tau^\gamma \Big(\int\limits_\tau^\sigma \varphi'(s)ds\Big)^{1-\gamma/2}} \leqslant \frac{C_{44}}{\varphi'(\sigma)^{1-\gamma/2}} \int\limits_0^\sigma \frac{d\tau}{\tau^\gamma(\sigma-\tau)^{1-\gamma/2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_{45}}{\varphi'(\sigma)^{1-\gamma/2}\sigma^{\gamma/2}}. \qquad (59)$$

Отже,

$$\varphi'(\sigma)|v_{2yy}(y,\sigma)| \leqslant \frac{C_{45}\varphi'(\sigma)^{\gamma/2}}{\sigma^{\gamma/2}}.$$

Враховуючи те, що $\varphi(\sigma) = \int\limits_0^\sigma \varphi'(\tau)d\tau \geqslant \varphi'(\sigma)\int\limits_0^\sigma d\tau = \sigma\varphi'(\sigma)$, отримуємо $\varphi'(\sigma) \leqslant \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma}$. Зважаючи на те, що функція φ – монотонно зростаюча, а $\tau \leqslant \sigma$, то звідси одержимо

$$\int\limits_0^\sigma \frac{\varphi'(\tau)^{\gamma/2}}{\tau^{\gamma/2}}d\tau \leqslant \int\limits_0^\sigma \frac{\varphi(\tau)^{\gamma/2}d\tau}{\tau^\gamma} \leqslant \varphi(\sigma)^{\gamma/2}\int\limits_0^\sigma \frac{d\tau}{\tau^\gamma} = \frac{\sigma^{1-\gamma}\varphi(\sigma)^{\gamma/2}}{1-\gamma}.$$

Оскільки $\gamma \in (0,1)$, то і в цьому випадку за властивостями інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду система рівнянь (48)-(51) має тільки тривіальний розв'язок $v(y,\sigma) \equiv 0,\ h(\sigma) \equiv 0,\ a(\sigma) \equiv 0,\ p(\sigma) \equiv 0,\ y \in [0,\sigma],\ \sigma \in [0,T_1]$. Тому розв'язок задачі (5)-(8), а отже, і задачі (1)-(4) єдиний. □

Список використаної літератури

1. *Баранська І.* Обернена задача для двовимірного рівняння теплопровідності в області з вільними межами / *Баранська І., Іванчов М.* // Укр. мат. вісник. – 2007. – Т. 4, №4. – С. 457-484.
2. *Гринців Н.М.* Обернена задача для параболічного рівняння з виродженням в області з вільною межею / *Гринців Н.М.* // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. -– 2006. — Вип. 66. — С. 45-59.
3. *Іванчов М.І.* Задача теплопровідності з вільною межею, яка вироджується у початковий момент часу / *Іванчов М.І.* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – Т. 50, №3. – С. 82-87.
4. *Ладыженская О.А.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* – М., 1967.
5. *Салдіна Н.В.* Обернена задача для параболічного рівняння зі слабким виродженням / *Салдіна Н.В.* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – Т. 49, №3. – С. 7-17.
6. *Снітко Г.А.* Обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею / *Снітко Г.А.* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – Т. 50, №4. – С. 7-18.
7. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа / *Фридман А.* – М., 1968.
8. *Ivanchov M.* Inverse problem for equation of parabolic type / *Ivanchov M.* – L., 2003.
9. *Jones B.F.* The determination of a coefficient in a parabolic differential equation. I. Existence and uniqueness / *Jones B.F.* // J. Math. Mech. – 1962. – Vol. 11, №5. – P. 907-918.

Стаття: надійшла до редакції 28.12.2010
прийнята до друку 21.09.2011

AN INVERSE PROBLEM FOR A PARABOLIC EQUATION IN THE DOMAIN WITH A WEAKLY DEGENERATE BOUNDARY

Tetiana SAVITSKA

Ivan Franro National University of L'viv,
Universytets'ka Str., 1, L'viv, 79000
e-mail: tetjankas@mail.ru

We establishe conditions of existence and uniqueness of the solution of an inverse problem for a parabolic equation with unknown time-dependent coefficient at the highest derivative. It is assumed that the boundary of the domain is unknown and degenerates at the initial moment. The given problem is reduced to an inverse problem for a degenerate parabolic equation.

Key words: inverse problem, parabolic equation, weak degeneration, degenerate boundary.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ОБЛАСТИ СО СЛАБО ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ГРАНИЦЕЙ

Татьяна САВИЦКАЯ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: tetjankas@mail.ru

Установлены условия существования и единственности решения обратной задачи для параболического уравнения с неизвестным коэффициентом при старшей производной, зависящим от времени. Предполагается, что граница области неизвестна и вырождается в начальный момент времени. Указанная задача сводится к обратной задаче для параболического уравнения с вырождением.

Ключевые слова: обратная задача, параболическое уравнение, слабое вырождение, вырождающаяся граница области.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 74. С. 185–190
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 74. P. 185–190

УДК 515.12

ON FUZZY GROMOV-HAUSDORFF HYPERSPACE OF THE UNIT SEGMENT

Aleksandr SAVCHENKO

Kherson State Agricultural University,
Rozy Lyuksemburg Str., 23, Kherson, 73006
e-mail: savchenko1960@rambler.ru

The main result of this note is to prove that the fuzzy Gromov-Hausdorff space of the unit segment is homeomorphic to the Hilbert cube.

Key words: fuzzy space, Gromov-Hausdorff space.

1. Introduction. The notion of Gromov-Hausdorff distance (see, e.g., [1]) finds numerous applications in different areas of mathematics as well as in the field of computer graphics and computational geometry. Using this notion, one can naturally define the so called Gromov-Hausdorff hyperspace of any metric space. Some questions concerning this hyperspace are formulated in [2].

The fuzzy Gromov-Hausdorff space is first considered in [7]. Remark that the notion of fuzzy metric space traces back to the notions of probabilistic metric space. Nowadays, this notion is widely investigated and finds numerous applications in different areas of mathematics.

The following problem is a natural modification of problems concerning the Gromov-Hausdorff spaces: describe the topology of the fuzzy Gromov-Hausdorff space (see the definition below) of the unit segment I. An answer to the corresponding for problem the Gromov-Hausdorff space is announced in [9]. The main result states that the mentioned fuzzy Gromov-Hausdorff space is homeomorphic to the Hilbert cube.

We also formulate some open questions. Note that the most problems that concern the fuzzy Gromov-Hausdorff space are open.

2. Preliminaries.

2.1. Fuzzy metric spaces. We start with the definition of fuzzy metric spaces (see, e.g., [5]). A continuous t-norm is a continuous map $(x, y) \mapsto x * y\colon [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ which satisfies the following properties:

(1) $(x * y) * z = x * (y * z)$;
(2) $x * y = y * x$;
(3) $x * 1 = x$;
(4) if $x \leq x'$ and $y \leq y'$, then $x * y \leq x' * y'$.

In other words, a continuous t-norm is a continuous Abelian monoid with unit 1 and with the monotonic operation. The following are examples of continuous t-norms:

(1) $x * y = \min\{x, y\}$;
(2) $x * y = \max\{0, x + y - 1\}$ (Łukasiewicz t-norm).

In this paper we use the notion of fuzzy metric space defined in [5].

Definition 1. *A* fuzzy metric space *is a triple $(X, M, *)$, where X is a nonempty set, $*$ is a continuous t-norm and M is a fuzzy set of $X \times X \times (0, \infty)$ (i.e. M is a map from $X \times X \times (0, \infty)$ to $[0, 1]$) satisfying the following properties:*

(i) $M(x, y, t) > 0$;
(ii) $M(x, y, t) = 1$ *if and only if* $x = y$;
(iii) $M(x, y, t) = M(y, x, t)$;
(iv) $M(x, y, s) * M(y, z, t) \leq M(x, z, s + t)$;
(v) *the function* $M(x, y, -)\colon (0, \infty) \to [0, 1)$ *is continuous.*

Note that every metric d on a set X generated the fuzzy metric M_d on X by the formula:

$$M_d(x, y, t) = \frac{t}{d(x, y) + t}.$$

In a fuzzy metric space $(X, M, *)$, we say that the set

$$B_M(x, r, t) = \{y \in X \quad | \quad M(x, y, t) > 1 - r\}, \quad x \in X, \quad r \in (0, 1), \quad t \in (0, \infty),$$

is the *open ball* of radius $r > 0$ centered at x for t. It is proved in [5] that the family of all open balls is a base of a topology on X; this topology is denoted by τ_M.

If we speak on a fuzzy (pseudo)metric on a topological space, we always assume that this metric is compatible with the topology of this space.

2.2. Hausdorff and Gromov-Hausdorff metric. Let $\exp X$ denote the hyperspace of X, i.e. the set of all nonempty compact subsets of X. This space is endowed with the Vietoris topology, i.e. the topology whose base consists of the sets of the form

$$\langle U_1, \dots, U_n \rangle = \{A \in \exp X \quad | \quad A \subset \cup_{i=1}^n A_i, \quad A \cap U_i \neq \emptyset, \quad i = 1, \dots, n\}.$$

If (X, d) is a metric space, then the Vietoris topology is generated by the Hausdorff metric d_H:

$$d_H(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} d(a, B), \quad \sup_{b \in B} d(b, A)\}$$

(see, e.g., [4]).

Let (X_i, d_i), $i = 1, 2$, be compact metric spaces. The *Gromov-Hausdorff distance* between these spaces is the number

$$d_{GH}((X_1, d_1), (X_2, d_2)) = \inf\{d_H(f_1(X_1), f_2(X_2)) \\ \quad | \quad f_i\colon X_i \to (Y, d) \quad \text{is an isometric embedding}\}.$$

Given a metric space (X, d), we denote by $\exp_{GH}(X)$ the space of nonempty closed subsets in X endowed with the Gromov-Hausdorff metric.

Note that in the sequel we identify the isometric compact metric spaces and therefore the Gromov-Hausdorff distance is the distance between the classes of equivalence of compact metric spaces up to isometry.

2.3. Fuzzy Hausdorff and fuzzy Gromov-Hausdorff metric. For every $a \in X$ i $t > 0$, let

$$M(a, B, t) = \sup\{M(a, b, t) \mid b \in B\}$$

(see. [10, Definition 2.4]).

Following [10] define the function $M_H\colon \exp X \times \exp X \to (0, \infty)$ by the formula:

$$M_H(A, B, t) = \min\left\{\inf_{a\in A} M(a, B, t),\ \inf_{b\in B} M(A, b, t)\right\}$$

for every $A, B \in \exp X$ i $t > 0$. The pair $(M_H, *)$ is a fuzzy metric on the space $\exp X$ (see [10, theorem 1]). This metric is called *the fuzzy Hausdorff metric* and is also known to generate the Vietoris topology on $\exp X$.

Let $(X_i, M_i, *)$, $i = 1, 2$, be fuzzy metric spaces. The number

$$M_{GH}((X_1, M_1, *), (X_2, M_2, *), t) = \sup\{M_H(F_1(X_1), F_2(X_2), t) \mid$$
$$F_i\colon X_i \to Z \quad \text{is an isometric embedding into a fuzzy metric space} \quad Z\}$$

is called the fuzzy Gromov-Hausdorff distance between $(X_1, M_1, *)$ and $(X_2, M_2, *)$ at t.

Remark that the number $M_{GH}((X_1, M_1, *), (X_2, M_2, *), t)$ is well defined, because for any two fuzzy metric spaces there exists a fuzzy metric space that contains their isometric copies. Namely, the bouquet of these spaces can serve as an example (see [11]).

By $\mathcal{FM}_{GH}(X, M, *)$ we denote the family of compact subspaces of a fuzzy metric space $(X, M, *)$ endowed with the fuzzy Gromov-Hausdorff metric.

Proposition 1. *Let $(X_i, d_i)_{i=1}^{\infty}$ be a sequence of compact metric spaces converging to (X, d) with respect to the Gromov-Hausdorff metric. Then the sequence $(X_i, M_{d_i}, *)_{i=1}^{\infty}$ converges to $(X, M_d, *)$ with respect to the topology generated by the fuzzy Gromov-Hausdorff metric.*

Proof. Let $t \in (0, \infty)$ and $r \in (0, 1)$. There exists $N \in \mathbb{N}$ such that, for every $n > N$, we have $d_{GH}((X_n, d_n), (X, d)) < \frac{t}{1-r} + t$. Without loss of generality, one may assume that there exists a metric space (Z, ϱ) containing both X_n and X such that $d_{GH}((X_n, d_n), (X, d)) = \varrho_H(X_n, X)$. Simple calculations demonstrate that $(M_\varrho)_H(X_n, X) > 1 - r$, and therefore $M_{GH}((X_n, M_{d_n}, *), (X, M_d, *), t) > 1 - r$.

Corollary 1. *For any compact fuzzy metric space $(X, M, *)$, the space $\mathcal{FM}_{GH}(X, M, *)$ is compact.*

We are going to show that the obtained space is Hausdorff. Indeed, otherwise, there exist fuzzy metric spaces $(Y, M_\varrho, *)$, $(Y', M_{\varrho'}, *)$ and $(X_i, M_i, *)$ such that there exists a fuzzy metric space $(Z_i, N_i, *)$, $i \in \mathbb{N}$, containing these spaces and satisfying the property: $N_{iH}(Y, X_i, 1/i) > 1 - (1/i)$, $N_{iH}(Y', X_i, 1/i) > 1 - (1/i)$. Now, let $a, b \in Y$. There exist $a_i, b_i \in X_i$ and $a'_i, b'_i \in X'$ such that

$$N_i(a, a_i, 1/i) > 1 - (1/i), \quad N_i(a_i, a'_i, 1/i) > 1 - (1/i),$$
$$N_i(b, b_i, 1/i) > 1 - (1/i), \quad N_i(b_i, b'_i, 1/i) > 1 - (1/i).$$

Then, for every $t > 0$,

$$(1 - (1/i)) * M_{\varrho'}(a', b', t) * (1 - (1/i)) \le M_\varrho(a, b, t + (2/i)).$$

Since X' is compact, without loss of generality, one may assume that the sequences $(a'_i), (b'_i)$ converge to a' and b' respectively. Then passing to the limit we obtain that $M_{\varrho'}(a', b', t) \leq M_{\varrho}(a, b, t)$ and similarly $M_{\varrho'}(a', b', t) \geq M_{\varrho}(a, b, t)$. One can easily prove that a' and b' do not depend on the chosen sequences (a_i) and (b_i) and thus the map $a \mapsto a'$ is well-defined. Actually, this map isometrically embeds Y into Y'.

One can similarly prove that there exists an isometric embedding of Y' into Y. Since Y and Y' are compact, we conclude that they are isometric, i.e. they represent the same isometry class.

We have therefore proven the following statement.

Proposition 2. *For every compact metrizable space X, the spaces $\exp_{GH}(X, d)$ and $\mathcal{FM}_{GH}(X, M_d, *)$ are homeomorphic.*

2.4. Hilbert cube. By AR we denote the class of absolute retracts in the class of metrizable spaces.

We say that a compact metric space (X, d) satisfies the disjoint approximation property (DAP) if, for every $\varepsilon > 0$, there exist maps $f, g \colon X \to X$ such that $d(f, 1_X) < \varepsilon$, $d(g, 1_X) < \varepsilon$ and $f(X) \cap g(X) = \emptyset$.

The Hilbert cube $Q = [0, 1]^\omega$ can be characterized as follows.

Theorem 1 (Toruńczyk's characterization theorem)**.** *A compact metrizable space X is homeomorphic to the Hilbert cube if X is an AR space and satisfies the DAP.*

3. Main result. The aim of this note is to prove the following theorem. Here d is the standard metric on the unit segment $I = [0, 1]$.

Theorem 2. *The space $\mathcal{FM}_{GH}(I, M_d, *)$ is homeomorphic to the Hilbert cube.*

Proof. Consider the circle $S^1 = \{e^{2\pi i t} \mid t \in [0, 1]\}$. The group Spin(2) naturally acts on this space and also on its hyperspace $\exp S^1$. Recall that the group Spin(2) is the double cover of SO(2) and there exists an exact sequence

$$1 \to \mathbb{Z}/2 \to \mathrm{Spin}(2) \to \mathrm{SO}(2) \to 1.$$

Let I be embedded into S^1 as a segment lying in a half-circle. Without loss of generality, one may assume that the invariant metric on S^1 extends the standard metric d on I. Therefore, $\exp_{GH}(I)$ is naturally embedded into $(\exp S^1)/\mathrm{Spin}(2)$. In turn, $(\exp S^1)/\mathrm{Spin}(2) = ((\exp S^1)/S^1)/(\mathbb{Z}/2)$. We will identify $\exp_{GH}(I)$ with the subspaces in the mentioned orbit spaces.

First, we will show that $\exp_{GH}(I)$ is an absolute retract. Let $J \supset I$ be an open interval containing I in S^1. We assume that J lies in a half-circle. Denote by U the subset in $(\exp S^1)/S^1$ consisting of the orbits with an element in J. Clearly, U is and open contractible subset in $(\exp S^1)/S^1$ and therefore an absolute retract. One can define an equivariant retraction r of U onto $(\exp S^1)/S^1$ by the condition: $r(A)$ is a homothetic copy of A with the coefficient equal to $\frac{\min\{\mathrm{diam}(A), 1\}}{\mathrm{diam}(A)}$. Next, a retraction of $(\exp I)/S^1$ onto $\exp_{GH}(I) \subset (\exp S^1)/\mathrm{Spin}(2)$ is given by the following construction: the image of the orbit containing A is $A \cup A'$, where A' is a symmetric copy of A with respect to the center of the minimal segment containing A. This proves that $\exp_{GH}(I)$ is an absolute retract.

Next, we are going to show that the space $\mathcal{FM}_{GH}(I, M_d, *)$ satisfies the DAP. Given $\varepsilon > 0$, define $f(A)$ as the closed $\varepsilon/2$-neighborhood of A (symmetrically truncated, if necessary, so that its length does not exceed 1). Further, define $g(A)$ as the union of two endpoints of $f(A)$ and the homothetic copy of $f(A)$ with respect to its center of symmetry. If the scale factor of the homothety is close enough to 1, we are done. This proves the DAP and completes the proof of the theorem.

4. Remarks and open problems. Note first that the result of the previous section can be extended over another fuzzy Gromov-Hausdorff spaces. In particular, a counterpart of Theorem 2 holds for the spaces defined as follows.

Let $* = \min$. Given $k, m > 0$ and $n \geq 1$, define the fuzzy metric M_i, $i = 1, 2$, on I as follows:

$$M_1(x, y, t) = \frac{kt^n}{kt^n + |x - y|}, \quad M_2(x, y, t) = e^{-\frac{|x-y|}{t^n}}$$

(see [7]).

The following question remains open. Describe the topology of the fuzzy Gromov-Hausdorff space of the n-dimensional cube I^n, $n \geq 2$.

References

1. *Gromov M.* Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces / *Gromov M.* – Berlin, 2006.
2. *Banakh T.* Problems from the Lviv topological seminar / *Banakh T., Bokalo B., Guran I., Radul T., Zarichnyi M.* // Open Problems in Topology. – 2007. – P. 655-667.
3. *Sapena A.* A contribution to the study of fuzzy metric spaces / *Sapena A.* // Applied General Topology. – 2001. – Vol. 2, №1. – P. 63-75.
4. *Munkres J.* Topology (2nd edition) / *Munkres J.* – Prentice Hall, 2000.
5. *George A.* On some results of analysis for fuzzy metric spaces / *George A., Veeramani P.* // Fuzzy Sets and Systems. – 1997. – Vol. 90. – P. 365-368.
6. *Repovs D.* Fuzzy Prokhorov metric on the set of probability measures / *Repovs D., Savchenko A., Zarichnyi M.* // Fuzzy Sets and Systems. – 2011. – Vol. 175, №1. – P. 96-104.
7. *Savchenko O.* A remark on stationary fuzzy metric spaces / *Savchenko O.* // Carpathian Mathematical Publications. – 2011. – Vol. 3, №1. – P. 124-129.
8. *Shchepin E.V.* Functors and uncountable powers of compacta / *Shchepin E.V.* // Uspekhi Mat. Nauk. – 1981. – Vol. 36, №3. – P. 3-62.
9. *Antonyan S.* The Gromov-Hausdorff hyperspace of the unit interval is a Hilbert cube / *Antonyan S.* // Spring Topology and Dynamical Systems Conference. – Starkville, 2010.
10. *Rodríguez-López J.* The Hausdorff fuzzy metric on compact sets / *Rodríguez-López J., Romaguera S.* // Fuzzy Sets and Systems. – 2007. – Vol. 147, №2. – P. 273-283.
11. *Савченко О.Г.* Розмиті метрики на факторпросторі / *Савченко О.Г.* // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2009. – Вип. 7. – С. 74-77.

Стаття: надійшла до редакції 20.05.2011
прийнята до друку 21.09.2011

ПРО РОЗМИТИЙ ГІПЕРПРОСТІР ГРОМОВА-ГАУСДОРФА ОДИНИЧНОГО ВІДРІЗКА

Олександр САВЧЕНКО

Херсонський державний аграрний університет,
вул. Рози Люксембург, 23, Херсон, 73006
e-mail: savchenko1960@rambler.ru

З основного результату випливає, що розмитий простір Громова-Гаусдорфа одиничного сегмента гомеоморфний гільбертовому кубові.

Ключові слова: розмитий простір, простір Громова-Гаусдорфа.

О НЕЧЕТКОМ ГИПЕРПРОСТРАНСТВЕ ГРОМОВА-ГАУСДОРФА ЕДИНИЧНОГО ОТРЕЗКА

Александр САВЧЕНКО

Херсонский государственный аграрный университет,
ул. Розы Люксембург, 23, Херсон, 73006
e-mail: savchenko1960@rambler.ru

С главного результата следует, что размытое пространство Громова-Гаусдорфа единичного сегмента гомеоморфное гильбертовому кубу.

Ключевые слова: размытое пространство, пространство Громова-Гаусдорфа.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 74. С. 191–206
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 74. P. 191–206

УДК 517.95

ХАРАКТЕР ТОЧКОВИХ СТЕПЕНЕВИХ ОСОБЛИВОСТЕЙ РОЗВ'ЯЗКУ НЕЛІНІЙНОЇ ПЕРШОЇ УЗАГАЛЬНЕНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Оксана ЧМИР

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності,
вул. Клепарівська, 35, Львів, 79000
e-mail: o_chmyr@yahoo.com

Використовуючи принцип Шаудера, досліджено характер точкових степеневих особливостей розв'язку нелінійної першої узагальненої крайової задачі для рівняння теплопровідності.

Ключові слова: нелінійна крайова задача; узагальнена функція; ваговий функційний простір; неперервний оператор; компактна множина; теорема Шаудера про нерухому точку.

1. Вступ. Існує багато праць, автори яких досліджували узагальнені крайові задачі для лінійних і напівлінійних еліптичних та параболічних рівнянь (див., наприклад, [1] та бібліографію, а також [2], [3]). У статтях [4, 5, 6, 7] досліджували крайові задачі для рівняння теплопровідності з нелінійними крайовими умовами, а у [8] – нелінійні еліптичні крайові задачі при заданих на межі функціях із сильними степеневими особливостями. Використовуючи дані цих досліджень, продовжено дослідження [9] нелінійних крайових задач для рівняння теплопровідності в узагальнених функціях.

Ми вивчаємо характер степеневих особливостей розв'язку нелінійної першої узагальненої крайової задачі для рівняння теплопровідності.

2. Основна частина.

2.1. Основні позначення та формулювання задачі. Нехай $n \in \mathbb{N}$, Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею $S = \partial\Omega$ класу C^∞, $Q = \Omega \times (0,T]$, $\Sigma = S \times (0,T]$, $0 < T < +\infty$.

Використовуватимемо позначення:

$||x-y|| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$ – евклідова відстань в $\mathbb{R}^n$, $P=(x,t)$, $M=(y,\tau)$, $\widehat{P} = (\hat{x},\hat{t})$, $d(P,M) = |PM| = d(x,t;y,\tau) = \sqrt{||x-y||^2 + |t-\tau|}$– параболічна відстань в $\mathbb{R}^{n+1}$; η – мультиіндекс з компонентами $(\eta_1,...,\eta_n)$, $\eta_i \in \mathbb{Z}_+$, $i=\overline{1,n}$, $|\eta| = \eta_1 + ... + \eta_n$ – довжина мультиіндексу η, $D^\eta \equiv D^\eta_x = \frac{\partial^{|\eta|}}{\partial x_1^{\eta_1} \cdot \ldots \cdot \partial x_n^{\eta_n}}$.

Нехай $\varepsilon_0 > 0$ – таке задане число, що паралельна до S поверхня S_{ε_0} є класу C^∞ та надалі вважатимемо, що $\varepsilon_0 \leqslant 1$. Через $\widetilde{\varrho}(\sigma)$ позначатимемо нескінченно диференційовну невід'ємну функцію, яка має порядок σ при $\sigma \to 0$. При довільній фіксованій точці $\widehat{P} \in \overline{Q}$ введемо функцію ϱ_0 точки $P \in \overline{Q}$ таку, що $0 < \varrho_0(P, \widehat{P}) \leqslant 1$ та

$$\varrho_0(P, \widehat{P}) = \begin{cases} \widetilde{\varrho}(|P\widehat{P}|), & |P\widehat{P}| < \frac{\varepsilon_0}{2}, \\ 1, & |P\widehat{P}| \geqslant \varepsilon_0. \end{cases}$$

Нехай $D(\overline{Q}) = C^\infty(\overline{Q})$, $D(\overline{\Sigma}) = C^\infty(\overline{\Sigma})$, $D(\overline{\Omega}) = C^\infty(\overline{\Omega})$;
$D^0(\overline{Q}) = \{\varphi \in D(\overline{Q}) : \ \frac{\partial^k}{\partial t^k}\varphi \mid_{t=T} = 0, \ k = 0, 1, \dots\}$,
$D^0(\overline{\Sigma}) = \{\varphi \in D(\overline{\Sigma}) : \ \frac{\partial^k}{\partial t^k}\varphi \mid_{t=T} = 0, \ k = 0, 1, \dots\}$,
$D_0(\overline{\Omega}) = \{\varphi \in D(\overline{\Omega}) : \varphi|_S = 0\}$, ν – орт внутрішньої нормалі до S.

Надалі позначатимемо через $(D^0(\overline{\Sigma}))'$, $(D_0(\overline{\Omega}))'$ – простори лінійних неперервних функціоналів відповідно на просторах функцій $D^0(\overline{\Sigma})$, $D_0(\overline{\Omega})$, через $(\varphi, F)_1$ – значення узагальненої функції $F \in (D^0(\overline{\Sigma}))'$ на основній функції $\varphi \in D^0(\overline{\Sigma})$, через $(\varphi, F)_2$ – значення $F \in (D_0(\overline{\Omega}))'$ на $\varphi \in D_0(\overline{\Omega})$.

Нехай $(\hat{x}, \hat{t}) \in \Sigma$. Припустимо, що:

1) функції $f_0(x, t, \mathrm{v})$, $f_1(x, t, \mathrm{v})$ визначені відповідно в $Q \times \mathbb{R}$, $\Sigma \times \mathbb{R}$;

$$2)\ F_1(x, t) = \sum_{|l| \leqslant p_1} \sum_{m=0}^{p_2} C_{lm} D_x^l \delta(x - \hat{x}) \delta^{(m)}(t - \hat{t}), \tag{1}$$

$$F_2(x) = \sum_{|r| \leqslant p_3} C_r D_x^r \delta(x - \hat{x}),$$

де C_{lm}, C_r – сталі; p_1, p_2, p_3 – невід'ємні цілі числа.

Розглянемо нелінійну першу узагальнену крайову задачу

$$Lu(x, t) \equiv \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \triangle u(x, t) = f_0(x, t, u(x, t)), \quad (x, t) \in Q, \tag{2}$$

$$u(x, t) \mid_\Sigma = F_1(x, t) + f_1(x, t, u(x, t)), \quad (x, t) \in \Sigma, \tag{3}$$

$$u(x, 0) = F_2(x), \quad x \in \Omega. \tag{4}$$

При $k \in \mathbb{R}$ введемо функційні простори:

$$\mathcal{M}_k(\overline{Q}, \ \widehat{P}) = \{\mathrm{v} : \ ||\mathrm{v}; \widehat{P}||_k = \max\{\int_Q \varrho_0^k(x, t, \hat{x}, \hat{t}) |\mathrm{v}(x, t)| \, dxdt; \int_\Sigma \varrho_0^k(x, t, \hat{x}, \hat{t}) |\mathrm{v}(x, t)| \, dSdt\} < +\infty\},$$

$$X_k(\overline{Q}, \widehat{P}) = \{\psi \in D^0(\overline{Q}) \ : \ \psi(\cdot, 0) \in D_0(\overline{\Omega}), \quad \psi \mid_{\overline{\Sigma}} = 0, \quad L^*\psi(x, t) = O(\varrho_0^k(x, t, \hat{x}, \hat{t})), \ \ \varrho_0(x, t, \hat{x}, \hat{t}) \to 0\},$$

де L^* – оператор, формально спряжений до L, $L^*\mathrm{v} = -\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} + \triangle^* \mathrm{v}\right)$.

Означення 1. *Розв'язком задачі (2)-(4) називається функція $u \in \mathcal{M}_k(\overline{Q}, \ \widehat{P})$ така, що*

$$\int_Q L^*\psi \cdot u \, dxdt = \int_Q \psi(x, t) \cdot f_0(x, t, u(x, t)) \, dxdt + \left(\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial \nu}, F_1(x, t)\right)_1 +$$

$$+\int\limits_{\Sigma}\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial\nu}\cdot f_1(x,t,u(x,t))\,dSdt+(\psi(\cdot,0),F_2(\cdot))_2 \quad \textit{для довільної} \quad \psi\in X_k(\overline{Q},\widehat{P}).$$

Позначимо через $G(x,t,y,\tau)$ функцію Гріна першої крайової задачі для рівняння теплопровідності, яка визначена в точках $(x,t;y,\tau)\in\overline{Q}\times\overline{Q}$ при $(x,t)\neq(y,\tau)$. Існування її та багато властивостей одержуємо з [10, 11]. З цих результатів випливає, що:

1) $G(x,t;y,\tau)=0$ при $t<\tau$;

2) для будь-яких мультиіндексів η, η_0

$$\Big|\frac{\partial^{\eta_0}}{\partial t^{\eta_0}}D_x^{\eta}G(x,t;y,\tau)\Big|\leqslant\widehat{C}_{\eta,\,\eta_0}\,[d(x,t;y,\tau)]^{-n-|\eta|-2\eta_0},$$

де $\widehat{C}_{\eta,\,\eta_0}$ – додатні сталі.

Подібно до результатів [2, 12] доведено таку властивість функції G.

Лема 1. *Нехай* $(\hat{x},\hat{t})\in\overline{Q}$, $|\eta|\leqslant1$. *Тоді при* $r>-n-2$

$$\int\limits_{Q}\varrho_0^r(y,\tau,\hat{x},\hat{t})|D_x^{\eta}G(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau\leqslant\widehat{L}_{1,\,\eta}\max\{[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{r+2-|\eta|},\,1\}\quad\forall\,(x,t)\in\overline{Q},$$

а при $r>-n-1$

$$\int\limits_{\Sigma}\varrho_0^r(y,\tau,\hat{x},\hat{t})|D_x^{\eta}G(x,t;y,\tau)|\,dS_yd\tau\leqslant\widehat{L}_{2,\,\eta}\max\{[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{r+1-|\eta|},\,1\}\quad\forall\,(x,t)\in\overline{Q}.$$

Зауваження 1. Подібно до доведення теореми 2 [3] доводимо, що розв'язок задачі (2)-(4) є розв'язком у просторі $\mathcal{M}_k(\overline{Q},\ \widehat{P})$ інтегрального рівняння

$$u(x,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\Omega}G(x,t;y,\tau)\cdot f_0(y,\tau,u(y,\tau))\,dy+(\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y},F_1(y,\tau))_1+$$
$$+\int\limits_{\Sigma}\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y}\cdot f_1(y,\tau,u(y,\tau))\,dS_yd\tau+(G(x,t;y,0),F_2(y))_2, \qquad (5)$$

і навпаки.

Позначимо

$$(H\mathrm{v})(x,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\Omega}G(x,t;y,\tau)\cdot f_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))\,dy+$$
$$+\int\limits_{\Sigma}\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y}\cdot f_1(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))\,dS_yd\tau,$$

$$h(x,t)=g_1(x,t)+g_2(x,t)=(\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y},F_1(y,\tau))_1+(G(x,t;y,0),F_2(y))_2,$$
$$(H_1\mathrm{v})(x,t)=(H\mathrm{v})(x,t)+h(x,t).$$

Рівняння (5) набуде вигляду $u(x,t)=(Hu)(x,t)+h(x,t)$.

У [9] отримано існування розв'язку задачі (2)-(4) у просторі $\mathcal{M}_k(\overline{Q},\,\widehat{P})$. Зокрема, при $k > k_0 = \max\{p_1 + 2p_2, p_3 - 1\}$, $f_0(x,t,\mathrm{v}) = |\mathrm{v}|^{\beta_0}$ та $f_1(x,t,\mathrm{v}) = |\mathrm{v}|^{\beta_1}$, де $\beta_0 \in (0, \frac{n+2}{k+n+2})$, $\beta_1 \in (0, \frac{n+1}{k+n+1})$, існує розв'язок задачі (2)-(4) у просторі $\mathcal{M}_k(\overline{Q},\,\widehat{P})$. Якщо β_0, β_1 відомі, то також отримано простори $\mathcal{M}_k(\overline{Q},\,\widehat{P})$, для яких існує розв'язок $u \in \mathcal{M}_k(\overline{Q},\,\widehat{P})$ задачі (2)-(4).

2.2. Характер точкових степеневих особливостей розв'язку нелінійної першої узагальненої крайової задачі для рівняння теплопровідності.

Для довільної фіксованої точки $\widehat{P} = (\hat{x}, \hat{t}) \in \Sigma$ та $\alpha \in \mathbb{R}_- \cup \{0\}$ введемо функційний простір

$$\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\,\widehat{P}) = \{\mathrm{v} \in C(\overline{Q} \setminus \{\widehat{P}\}) : \varrho_0^{-\alpha}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\mathrm{v}(y,\tau) \in C(\overline{Q}) \quad (||\mathrm{v};\,\widehat{P}||'_\alpha = \sup_{(y,\tau)\in\overline{Q}} \varrho_0^{-\alpha}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})|\mathrm{v}(y,\tau)| < +\infty)\}.$$

Оскільки при $\mathrm{v} \in \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\,\widehat{P})$ та $k + \alpha > -n - 1$ виконується

$$||\mathrm{v};\,\widehat{P}||_k = \max\{\int_Q \varrho_0^k(M,\widehat{P})|\mathrm{v}(y,\tau)|\,dyd\tau;\,\int_\Sigma \varrho_0^k(M,\widehat{P})|\mathrm{v}(y,\tau)|\,dSd\tau\} \leqslant$$

$$\leqslant \max\{\widehat{C}\int_Q \varrho_0^k(M,\widehat{P})[\varrho_0(M,\widehat{P})]^\alpha\,dyd\tau;\widehat{C}\int_\Sigma \varrho_0^k(M,\widehat{P})[\varrho_0(M,\widehat{P})]^\alpha\,dSd\tau\} \leqslant$$

$$\leqslant \max\{\widehat{C}\int_{\{M:\,|M\widehat{P}|<\varepsilon_0\}} [\varrho_0(M,\widehat{P})]^{k+\alpha}\,dyd\tau + \widehat{C}\int_{\{M:\,|M\widehat{P}|\geqslant\varepsilon_0\}} dyd\tau;$$

$$\widehat{C}\int_{\{M:\,|M\widehat{P}|<\varepsilon_0\}} [\varrho_0(M,\widehat{P})]^{k+\alpha}\,dSd\tau + \widehat{C}\int_{\{M:\,|M\widehat{P}|\geqslant\varepsilon_0\}} dSd\tau\} < +\infty,$$

то $\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\,\widehat{P}) \subset \mathcal{M}_k(\overline{Q},\,\widehat{P})$ при $k > -\alpha - n - 1$, де $\widehat{C}$ – додатна стала.

Нехай $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\widetilde{C}}(\overline{Q},\,\widehat{P}) = \{\mathrm{v} \in \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\,\widehat{P}) : ||\mathrm{v};\,\widehat{P}||'_\alpha \leqslant \widetilde{C}\}$ – замкнена куля радіуса $\widetilde{C}$ у просторі $\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\,\widehat{P})$.

Лема 2. *Нехай виконуються припущення (1) та* $\alpha \leqslant \min\{-(1+p_1+2p_2);\,-p_3\}-n$. *Тоді* $h \in \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\,\widehat{P})$, *а саме, існує додатна стала* $\widehat{K}_0$ *така, що* $||h;\,\widehat{P}||'_\alpha \leqslant \widehat{K}_0 < +\infty$.

Доведення. Проводячи подібні міркування, як при доведенні леми 3 із [9], одержуємо

$$|g_1(x,t)| \leqslant K_1[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-(n+1+p_1+2p_2)} = K_1[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-(n+1+p_1+2p_2+\alpha)}\times$$

$$\times[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^\alpha \leqslant \widehat{K}_0[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^\alpha$$

при $\alpha \leqslant -(n+1+p_1+2p_2)$;

$$|g_2(x,t)| \leqslant K_2[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-(n+p_3)} \leqslant \widehat{K}_0[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^\alpha$$

при $\alpha \leqslant -(n+p_3)$, де K_1, K_2 – додатні сталі. □

Розглянемо нелінійну першу узагальнену крайову задачу

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \triangle u(x,t) = |u(x,t)|^{\beta_0}, \quad (x,t) \in Q, \tag{6}$$

$$u\,|_\Sigma = F_1(x,t) + |u(x,t)|^{\beta_1}, \quad (x,t) \in \Sigma, \tag{7}$$

$$u\,|_{t=0} = F_2(x), \quad x \in \Omega \tag{8}$$

при $\beta_0,\ \beta_1 \in (0,1)$.

Лема 3. *Якщо* $\beta_0,\ \beta_1 \in (0,1)$,

$$\max\left\{-\frac{n+2}{\beta_0};\ -\frac{n+1}{\beta_1}\right\} < \alpha \leqslant \min\{-(1+p_1+2p_2);\ -p_3\} - n,$$

то існує стала $\widetilde{K}_0 > 0$ *така, що при всіх* $\widetilde{C} > \widetilde{K}_0$ *оператор* H_1 *відображає* $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\widetilde{C}}(\overline{Q},\ \widehat{P})$ *в себе.*

Доведення. При $\mathrm{v} \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\widetilde{C}}(\overline{Q},\ \widehat{P})$, де $\widetilde{C}$ – довільна додатна стала, розглянемо

$$||H_1\mathrm{v};\ \widehat{P}||'_{\alpha} \leqslant \sup_{(x,t)\in\overline{Q}} \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t})\Big(\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Omega} |G(x,t;y,\tau)| \cdot |\mathrm{v}(y,\tau)|^{\beta_0}\, dy +$$

$$+ \int\limits_{\Sigma} |\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}| \cdot |\mathrm{v}(y,\tau)|^{\beta_1}\, dS_y d\tau\Big) + ||h;\ \widehat{P}||'_{\alpha}.$$

Використовуючи лему 1 при $\alpha\beta_0 > -n-2$, $\alpha\beta_1 > -n-1$ і лему 2 при $\alpha \leqslant \min\{-(1+p_1+2p_2);\ -p_3\} - n$, одержимо

$$||H_1\mathrm{v};\ \widehat{P}||'_{\alpha} \leqslant \widehat{L}_{1,0}\widetilde{C}^{\beta_0} \sup_{(x,t)\in\overline{Q}} \{\max\{[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha(\beta_0-1)+2},\ [\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha}\}\} +$$

$$+ \widehat{L}_{2,1}\widetilde{C}^{\beta_1} \sup_{(x,t)\in\overline{Q}} \{\max\{[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha(\beta_1-1)},\ [\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha}\}\} + \widehat{K}_0.$$

Якщо виконуються умови

$$\begin{cases} \alpha\beta_0 > -n-2, \\ \alpha\beta_1 > -n-1, \\ \alpha(\beta_0-1)+2 \geqslant 0, \\ \alpha(\beta_1-1) \geqslant 0, \\ -\alpha \geqslant 0, \end{cases}$$

то знаходимо $||H_1\mathrm{v}; \widehat{P}||'_{\alpha} \leqslant \widetilde{C}'$ при $\mathrm{v} \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\widetilde{C}}(\overline{Q},\ \widehat{P})$, де $\widetilde{C}' = \widehat{L}_{1,0}\widetilde{C}^{\beta_0} + \widehat{L}_{2,1}\widetilde{C}^{\beta_1} + \widehat{K}_0$.

Зауважимо, що при $\beta_0,\ \beta_1 \in (0,1)$ існує стала $\widetilde{K}_0 > 0$ така, що $\widetilde{C}' \leqslant \widetilde{C}$ при $\widetilde{C} > \widetilde{K}_0$. Отже, за умов леми одержуємо існування додатної сталої $\widetilde{K}_0$ такої, що при всіх $\widetilde{C} > \widetilde{K}_0$ оператор H_1 відображає $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\widetilde{C}}(\overline{Q},\ \widehat{P})$ в себе. □

Лема 4. *Нехай* $\beta_0,\ \beta_1 \in (0,1)$, $\max\{-\frac{2}{\beta_0};\ -\frac{n+1}{\beta_1}\} < \alpha \leqslant 0$. *Тоді для довільного* $\varepsilon > 0$ *існує* $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$ *таке, що для довільної підобласті* $V \subset Q$, *міра якої* $m(V)$ *менша за* σ, *для довільних* $(x,t) \in \overline{Q}$ *виконується*

$$[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha} \int\limits_{V\cap Q} [\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha\beta_0} \cdot |G(x,t;y,\tau)|\, dy d\tau < \varepsilon, \tag{9}$$

$$[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha} \int\limits_{V\cap\Sigma} [\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha\beta_1} \cdot |\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}|\, dS_y d\tau < \varepsilon. \tag{10}$$

Доведення. Доведення (9) проведено у лемі 1 [13] і виконується при $\alpha\beta_0+2>0$. Доведення (10) проводимо подібно як і доведення (9), розділяючи особливості функції $\varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y}$. Нехай V – довільна підобласть в Q, $(\hat{x},\hat{t})$ – фіксована точка Σ, $\sigma\in(0,1)$ – яке-небудь число. Далі позначатимемо через C_j, $j=\overline{1,13}$ – додатні сталі.

1. Нехай точка $(x,t)\in\overline{Q}$ така, що $||x-\hat{x}||<\frac{\sigma}{\sqrt{2}}$, $|t-\hat{t}|<\frac{\sigma^2}{2}$, тобто $|P\widehat{P}|<\sigma$.

а) Якщо $||y-\hat{x}||<\frac{\sigma}{\sqrt{2}}$, $|\tau-\hat{t}|<\frac{\sigma^2}{2}$ ($|M\widehat{P}|<\sigma$), то $||x-y||\leqslant||x-\hat{x}||+||y-\hat{x}||<\frac{2\sigma}{\sqrt{2}}$, $|t-\tau|<\sigma^2$, тобто $|MP|<\sqrt{3}\sigma$, а тоді

$$\mathcal{I}_1(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma)=$$

$$=[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha}\int\limits_{V\cap\{(y,\tau)\in\Sigma:\,|M\widehat{P}|<\sigma\}}[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha\beta_1}\cdot|\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y}|\,dS_yd\tau\leqslant$$

$$\leqslant[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha}\int\limits_{\substack{V\cap\{(y,\tau)\in\Sigma:\,|MP|<\frac{\sigma}{2};\\ \frac{\sigma}{2}\leqslant|M\widehat{P}|<\sigma\}}}[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha\beta_1}\cdot|\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y}|\,dS_yd\tau+$$

$$+[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha}\int\limits_{\substack{V\cap\{(y,\tau)\in\Sigma:\,|MP|\geqslant\frac{\sigma}{2};\\ |M\widehat{P}|<\frac{\sigma}{2}\}}}[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha\beta_1}\cdot|\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y}|\,dS_yd\tau+$$

$$+[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha}\int\limits_{\substack{V\cap\{(y,\tau)\in\Sigma:\,|MP|\geqslant\frac{\sigma}{2};\\ \frac{\sigma}{2}\leqslant|M\widehat{P}|<\sigma\}}}[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha\beta_1}\cdot|\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y}|\,dS_yd\tau=$$

$$=J_1(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma)+J_2(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma)+J_3(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma).\qquad(11)$$

Зробимо заміну змінних в інтегралі J_1

$$\begin{array}{lll} y_i=\hat{x}_i+\xi_i\sigma, & x_i=\hat{x}_i+s_i\sigma, & \\ \tau=\hat{t}+\xi_{n+1}\sigma^2; & t=\hat{t}+s_{n+1}\sigma^2, & i=\overline{1,n}. \end{array}\qquad(12)$$

У нових змінних

$$M=\overline{\xi}=(\xi_1,\dots,\xi_n,\xi_{n+1}),\quad|\overline{\xi}|=\sqrt{\xi_1^2+...+\xi_n^2+|\xi_{n+1}|}=\sqrt{||\xi||^2+|\xi_{n+1}|},$$

$$|M\widehat{P}|=\sqrt{||y-\hat{x}||^2+|\tau-\hat{t}|}=\sqrt{\sigma^2||\xi||^2+\sigma^2|\xi_{n+1}|}=\sigma\cdot|\overline{\xi}|,$$

$$|MP|=\sqrt{||y-x||^2+|\tau-t|}=\sqrt{\sigma^2||s-\xi||^2+\sigma^2|s_{n+1}-\xi_{n+1}|}=\sigma\cdot d(\overline{s};\overline{\xi}),$$

де

$$d(\overline{s};\overline{\xi})=\sqrt{||s-\xi||^2+|s_{n+1}-\xi_{n+1}|},\qquad dS_yd\tau=\sigma^{n+1}dS_\xi d\xi_{n+1}.$$

Використовуючи гладкість поверхні Σ, відомо, що $|\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y}|\leqslant\widehat{C}_{1,0}|MP|^{-n-1+\gamma}$, де $\gamma\in(0,1)$. Тоді

$$J_1(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma)=[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha}\int\limits_{\substack{V\cap\{(y,\tau)\in\Sigma:\,|MP|<\frac{\sigma}{2}\\ \frac{\sigma}{2}\leqslant|M\widehat{P}|<\sigma\}}}[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha\beta_1}\cdot|\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y}|\,dS_yd\tau\leqslant$$

$$\leqslant C_1[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha}\cdot\sigma^{\alpha\beta_1}\cdot\sigma^{\gamma}\int\limits_{V\cap\{\overline{\xi}:\, d(\overline{s};\overline{\xi})<\frac{1}{2}\}} d^{-n-1+\gamma}(\overline{s};\overline{\xi})\, dS_\xi d\xi_{n+1}\leqslant C_2\sigma^{\alpha(\beta_1-1)+\gamma},$$

де збіжність інтеграла випливає з формули 3 [14, с. 588].

Проводячи подібну заміну змінних (12) в інтегралі J_2, одержуємо

$$J_2(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma)=$$

$$=[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha}\int\limits_{\substack{V\cap\{(y,\tau)\in\Sigma:\,|MP|\geqslant\frac{\sigma}{2};\\ |M\widehat{P}|<\frac{\sigma}{2}\}}}[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha\beta_1}\cdot\left|\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y}\right| dS_y d\tau\leqslant$$

$$\leqslant C_3[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha}\cdot\sigma^{\alpha\beta_1}\int\limits_{V\cap\{\overline{\xi}:\,|\overline{\xi}|<\frac{1}{2}\}}|\overline{\xi}|^{\alpha\beta_1}\, dS_\xi d\xi_{n+1}\leqslant C_4\cdot\sigma^{\alpha(\beta_1-1)}.$$

Тут збіжність інтеграла випливає з формули 3 [14, с. 588] при $\alpha\beta_1>-n-1$.

$$J_3(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma)=[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha}\int\limits_{\substack{V\cap\{(y,\tau)\in\Sigma:\,|MP|\geqslant\frac{\sigma}{2};\\ \frac{\sigma}{2}\leqslant|M\widehat{P}|<\sigma\}}}[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha\beta_1}\cdot\left|\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y}\right| dS_y d\tau\leqslant$$

$$\leqslant C_5\sigma^{\alpha(\beta_1-1)-n-1}m(V).$$

Отже, при $m(V)<\sigma^{n+1}$ із (11) та вище описаних міркувань, одержуємо

$$\mathcal{I}_1(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma)\leqslant C_6(\sigma^{\alpha(\beta_1-1)+\gamma}+\sigma^{\alpha(\beta_1-1)}+\sigma^{\alpha(\beta_1-1)-n-1}m(V))\leqslant C_7\sigma^{\alpha(\beta_1-1)}.$$

Оскільки $\alpha(\beta_1-1)>0$ при $\alpha<0$ та $\beta_1<1$, то за заданим $\varepsilon>0$, вибравши $\sigma<\min\{\left(\frac{\varepsilon}{C_7}\right)^{\frac{1}{\alpha(\beta_1-1)}};1\}$, при $(x,t)\in\overline{Q}$ такій, що $|P\widehat{P}|<\sigma$ та $m(V)<\sigma^{n+1}$, отримаємо

$$\mathcal{I}_1(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

б) Якщо $|M\widehat{P}|\geqslant\sigma$, то подібно знаходимо

$$\mathcal{I}_2(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma)=$$

$$=[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha}\int\limits_{V\cap\{(y,\tau)\in\Sigma:\,|M\widehat{P}|\geqslant\sigma\}}[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha\beta_1}\cdot\left|\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y}\right| dS_y d\tau\leqslant$$

$$\leqslant[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha}\int\limits_{\substack{V\cap\{(y,\tau)\in\Sigma:\,|M\widehat{P}|\geqslant\sigma;\\ |MP|<\frac{\sigma}{2}\}}}[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha\beta_1}\cdot\left|\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y}\right| dS_y d\tau+$$

$$+[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha}\int\limits_{\substack{V\cap\{(y,\tau)\in\Sigma:\,|M\widehat{P}|\geqslant\sigma;\\ |MP|\geqslant\frac{\sigma}{2}\}}}[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha\beta_1}\cdot\left|\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y}\right| dS_y d\tau\leqslant$$

$$\leqslant C_8(\sigma^{\alpha(\beta_1-1)+\gamma}+\sigma^{\alpha(\beta_1-1)-n-1}m(V))\leqslant C_9\sigma^{\alpha(\beta_1-1)}\quad\text{при}\quad m(V)<\sigma^{n+1}.$$

За заданим $\varepsilon > 0$, вибравши $\sigma < \min\{\left(\frac{\varepsilon}{C_9}\right)^{\frac{1}{\alpha(\beta_1-1)}}; 1\}$, при $(x,t) \in \overline{Q}$ такій, що $|P\widehat{P}| < \sigma$ та $m(V) < \sigma^{n+1}$, отримаємо

$$\mathcal{I}_2(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отже, для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\sigma < \min\{\left(\frac{\varepsilon}{C_7}\right)^{\frac{1}{\alpha(\beta_1-1)}}; \left(\frac{\varepsilon}{C_9}\right)^{\frac{1}{\alpha(\beta_1-1)}}; 1\}$ таке, що для довільної підобласті $V \subset Q$ такої, що $m(V) < \sigma^{n+1}$

$$\mathcal{I}(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) = \mathcal{I}_1(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) + \mathcal{I}_2(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) < \varepsilon \quad \forall\, (x,t) \in \overline{Q}, \quad |P\widehat{P}| < \sigma.$$

2. При $(x,t) \in \overline{Q}$ такій, що $|P\widehat{P}| \geqslant \sigma$, розглянемо

$$\mathcal{J}(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) =$$
$$= [\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha} \int\limits_{V\cap\{(y,\tau)\in\Sigma:\,|MP|<\frac{\sigma}{2}\}} [\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha\beta_1} \cdot \Big|\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y}\Big|\, dS_y d\tau +$$
$$+ [\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha} \int\limits_{V\cap\{(y,\tau)\in\Sigma:\,|MP|\geqslant\frac{\sigma}{2}\}} [\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha\beta_1} \cdot \Big|\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y}\Big|\, dS_y d\tau =$$
$$= \mathcal{J}_1(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) + \mathcal{J}_2(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma). \tag{13}$$

При $|P\widehat{P}| \geqslant \sigma$ та $||x-y|| < \frac{\sigma}{2\sqrt{2}}$, $|t-\tau| < \frac{\sigma^2}{8}$ ($|MP| < \frac{\sigma}{2}$) виконується $||y-\hat{x}|| \geqslant ||x-\hat{x}|| - ||x-y|| > \frac{\sigma}{\sqrt{2}} - \frac{\sigma}{2\sqrt{2}} = \frac{\sigma}{2\sqrt{2}}$, $|\tau-\hat{t}| \geqslant |t-\hat{t}| - |t-\tau| > \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma^2}{8} = \frac{3\sigma^2}{8}$, тобто $|M\widehat{P}| > \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$. Тоді, використовуючи заміну змінних (12),

$$\mathcal{J}_1(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) \leqslant C_{10} \cdot \sigma^{\alpha\beta_1} \int\limits_{V\cap\{(y,\tau)\in\Sigma:\,|MP|<\frac{\sigma}{2}\}} |MP|^{-n-1+\gamma}\, dS_y d\tau \leqslant$$
$$\leqslant C_{10} \cdot \sigma^{\alpha\beta_1+\gamma} \int\limits_{V\cap\{\overline{\xi}:\,d(\overline{s};\overline{\xi})<\frac{1}{2}\}} d^{-n-1+\gamma}(\overline{s};\overline{\xi})\, dS_\xi d\xi_{n+1};$$

$$\mathcal{J}_2(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) \leqslant C_{11} \cdot \sigma^{-n-1} \Big(\int\limits_{\substack{V\cap\{(y,\tau)\in\Sigma:\,|MP|\geqslant\frac{\sigma}{2};\\ |M\widehat{P}|<\frac{\sigma}{2}\}}} [\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha\beta_1}\, dS_y d\tau +$$
$$+ \int\limits_{\substack{V\cap\{(y,\tau)\in\Sigma:\,|MP|\geqslant\frac{\sigma}{2};\\ |M\widehat{P}|\geqslant\frac{\sigma}{2}\}}} [\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha\beta_1}\, dS_y d\tau \Big) \leqslant$$
$$\leqslant C_{12}\sigma^{-n-1} \Big(\sigma^{\alpha\beta_1+n+1} \int\limits_{V\cap\{\overline{\xi}:\,|\overline{\xi}|<\frac{1}{2}\}} |\overline{\xi}|^{\alpha\beta_1}\, dS_\xi d\xi_{n+1} + \sigma^{\alpha\beta_1} \int\limits_{V\cap\{\overline{\xi}:\,|\overline{\xi}|\geqslant\frac{1}{2}\}} \sigma^{n+1}\, dS_\xi d\xi_{n+1} \Big) \leqslant$$
$$\leqslant C_{12} \Big(\sigma^{\alpha\beta_1} \int\limits_{V\cap\{\overline{\xi}:\,|\overline{\xi}|<\frac{1}{2}\}} |\overline{\xi}|^{\alpha\beta_1}\, dS_\xi d\xi_{n+1} + \sigma^{\alpha\beta_1} m(V) \Big).$$

З теореми 5 (про абсолютну неперервність інтеграла Лебега) [15, с. 301] випливає, що для довільного $\eta > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що

$$\int\limits_{V\cap\{\overline{\xi}:\, d(\overline{s};\overline{\xi})<\frac{1}{2}\}} d^{-n-1+\gamma}(\overline{s};\overline{\xi})\, dS_\xi d\xi_{n+1} < \eta \quad \text{при} \quad m(V) < \delta;$$

$$\int\limits_{V\cap\{\overline{\xi}:\, |\overline{\xi}|<\frac{1}{2}\}} |\overline{\xi}|^{\alpha\beta_1}\, dS_\xi d\xi_{n+1} < \eta \quad \text{при} \quad m(V) < \delta.$$

Вибираючи $\eta < \sigma^{n+1}$, одержуємо

$$\mathcal{J}_1(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) \leqslant C_{10}\sigma^{\alpha\beta_1+n+1+\gamma};$$

$$\mathcal{J}_2(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) \leqslant C_{12}(\sigma^{\alpha\beta_1+n+1} + \sigma^{\alpha\beta_1}m(V)) \leqslant C_{13}\sigma^{\alpha\beta_1+n+1} \quad \text{при } m(V) < \delta < \sigma^{n+1}.$$

Отже, для довільного $\varepsilon > 0$ існує

$$\sigma < \min\{\Big(\frac{\varepsilon}{C_{10}}\Big)^{\frac{1}{\alpha\beta_1+n+1+\gamma}};\ \Big(\frac{\varepsilon}{C_{13}}\Big)^{\frac{1}{\alpha\beta_1+n+1}};\ 1\}$$

таке, що для довільної підобласті $V \subset Q$ такої, що $m(V) < \sigma^{n+1}$

$$\mathcal{J}(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) = \mathcal{J}_1(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) + \mathcal{J}_2(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) < \varepsilon \quad \forall\, (x,t) \in \overline{Q}, \quad |P\widehat{P}| \geqslant \sigma.$$

□

Теорема 1. *Нехай* $\beta_0,\ \beta_1 \in (0,1)$,

$$\max\Big\{-\frac{2}{\beta_0};\ -\frac{n+1}{\beta_1}\Big\} < \alpha \leqslant \min\{-(1+p_1+2p_2);\ -p_3\} - n.$$

Тоді існує розв'язок $u \in \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\ \widehat{P})$ *крайової задачі (6)-(8) і при* $k > -\alpha - n - 1$ *цей розв'язок належить простору* $\mathcal{M}_k(\overline{Q},\ \widehat{P})$.

Доведення. Використаємо теорему Шаудера. З доведення леми 3 випливає, що H_1 відображає $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\,\widetilde{C}}(\overline{Q},\ \widehat{P})$ в себе.

Покажемо, що H_1 – цілком неперервний оператор у просторі $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\,\widetilde{C}}(\overline{Q},\ \widehat{P})$.

При $\mathrm{v},\ \mathrm{w} \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\,\widetilde{C}}(\overline{Q},\ \widehat{P})$

$$||H_1\mathrm{v} - H_1\mathrm{w};\ \widehat{P}||'_\alpha \leqslant \sup_{(x,t)\in\overline{Q}} \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega |G(x,t;y,\tau)| \cdot ||\mathrm{v}(y,\tau)|^{\beta_0} -$$

$$-|\mathrm{w}(y,\tau)|^{\beta_0}|\, dy + \sup_{(x,t)\in\overline{Q}} \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \int\limits_\Sigma |\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}| \cdot ||\mathrm{v}(y,\tau)|^{\beta_1} - |\mathrm{w}(y,\tau)|^{\beta_1}|\, dS_y d\tau.$$

Використовуючи формулу $|a^\mu - b^\mu| \leqslant |a-b|^\mu$ при $a,\ b > 0$, $\mu \in (0,1)$, матимемо

$$\int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega |G(x,t;y,\tau)| \cdot ||\mathrm{v}(y,\tau)|^{\beta_0} - |\mathrm{w}(y,\tau)|^{\beta_0}|\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega \varrho_0^{\alpha\beta_0}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |G(x,t;y,\tau)| \cdot (\sup_{(y,\tau)\in\overline{Q}} \varrho_0^{-\alpha}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |\mathrm{v}(y,\tau)-\mathrm{w}(y,\tau)|)^{\beta_0}\, dy \leqslant$$

$$\leqslant (||\mathrm{v}-\mathrm{w};\, \widehat{P}||_\alpha^{'})^{\beta_0} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega \varrho_0^{\alpha\beta_0}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |G(x,t;y,\tau)|\, dy;$$

$$\int\limits_\Sigma |\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}| \cdot ||\mathrm{v}(y,\tau)|^{\beta_1} - |\mathrm{w}(y,\tau)|^{\beta_1}|\, dS_y d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_\Sigma \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}| \cdot (\sup_{(y,\tau)\in\overline{Q}} \varrho_0^{-\alpha}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |\mathrm{v}(y,\tau)-\mathrm{w}(y,\tau)|)^{\beta_1}\, dS_y d\tau \leqslant$$

$$\leqslant (||\mathrm{v}-\mathrm{w};\, \widehat{P}||_\alpha^{'})^{\beta_1} \int\limits_\Sigma \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}|\, dS_y d\tau.$$

Використовуючи лему 1 при $\alpha\beta_0 > -n-2$, $\alpha\beta_1 > -n-1$, одержуємо

$$||H_1\mathrm{v} - H_1\mathrm{w};\, \widehat{P}||_\alpha^{'} \leqslant$$

$$\leqslant \widehat{L}_{1,0}(||\mathrm{v}-\mathrm{w};\, \widehat{P}||_\alpha^{'})^{\beta_0} \sup_{(x,t)\in\overline{Q}} \{\max\{[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha(\beta_0-1)+2},\, [\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha}\}\}+$$

$$+\widehat{L}_{2,1}(||\mathrm{v}-\mathrm{w};\, \widehat{P}||_\alpha^{'})^{\beta_1} \sup_{(x,t)\in\overline{Q}} \{\max\{[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha(\beta_1-1)},\, [\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha}\}\}.$$

Звідси, враховуючи умови на α, випливає, що H_1 – неперервний оператор в $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\,\widetilde{C}}(\overline{Q},\, \widehat{P})$.

Покажемо компактність оператора H_1 на $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\,\widetilde{C}}(\overline{Q},\, \widehat{P})$. З доведення леми 3 випливає, що множина $\{\varrho_0^{-\alpha} H_1\mathrm{v} : \mathrm{v} \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\,\widetilde{C}}(\overline{Q},\, \widehat{P})\}$ – рівномірно обмежена. Доведемо, що ця множина одностайно неперервна, тобто для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для довільних $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \delta$, $|z_0| < \delta$ та довільних $\mathrm{v} \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\,\widetilde{C}}(\overline{Q},\, \widehat{P})$

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q}} |\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) \cdot (H_1\mathrm{v})(x+z,t+z_0) - \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot (H_1\mathrm{v})(x,t)| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{(x,t)\in\overline{Q}} |\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) \cdot (H\mathrm{v})(x+z,t+z_0) - \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot (H\mathrm{v})(x,t)|+$$

$$+ \sup_{(x,t)\in\overline{Q}} |\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) \cdot h(x+z,t+z_0) - \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot h(x,t)| < \varepsilon.$$

Вважаємо

$$\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) = 0, \quad \varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) G(x+z,t+z_0;y,\tau) = 0,$$

$$\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) \frac{\partial G(x+z,t+z_0;y,\tau)}{\partial \nu_y} = 0,$$

$$\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t})(H\mathrm{v})(x+z,t+z_0) = 0,$$

$$\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) h(x+z,t+z_0) = 0,$$

якщо $(x+z, t+z_0) \notin Q$.

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Оскільки за лемою 2 $h \in \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\ \widehat{P})$, то $\varrho_0^{-\alpha} h \in C(\overline{Q})$. Тому існує $\widehat{\delta}_1 = \widehat{\delta}_1(\varepsilon) > 0$ таке, що для довільних $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \widehat{\delta}_1$, $|z_0| < \widehat{\delta}_1$ виконується

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q}} |\varrho_0^{-\alpha}(x+z, t+z_0, \hat{x}, \hat{t}) \cdot h(x+z, t+z_0) - \varrho_0^{-\alpha}(x, t, \hat{x}, \hat{t}) \cdot h(x,t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Розглянемо для довільних $(x,t) \in \overline{Q}$

$$\mathcal{I}(x,t,\hat{x},\hat{t}; z, z_0) = |\varrho_0^{-\alpha}(x+z, t+z_0, \hat{x}, \hat{t}) \cdot (H\mathrm{v})(x+z, t+z_0) - \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot (H\mathrm{v})(x,t)| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega |\varrho_0^{-\alpha}(x+z, t+z_0, \hat{x}, \hat{t}) \cdot G(x+z, t+z_0; y, \tau) - \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot G(x,t;y,\tau)| \times$$

$$\times |\mathrm{v}(y,\tau)|^{\beta_0}\, dy + \varrho_0^{-\alpha}(x+z, t+z_0, \hat{x}, \hat{t}) \int\limits_t^{t+z_0} d\tau \int\limits_\Omega |G(x+z, t+z_0; y, \tau)| \cdot |\mathrm{v}(y,\tau)|^{\beta_0}\, dy +$$

$$+ \int\limits_\Sigma |\varrho_0^{-\alpha}(x+z, t+z_0, \hat{x}, \hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x+z, t+z_0; y, \tau)}{\partial \nu_y} - \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}| \times$$

$$\times |\mathrm{v}(y,\tau)|^{\beta_1}\, dS_y d\tau = \mathcal{I}_1(x,t,\hat{x},\hat{t}; z, z_0) + \mathcal{I}_2(x,t,\hat{x},\hat{t}; z, z_0) + \mathcal{I}_3(x,t,\hat{x},\hat{t}; z, z_0).$$

З доведення теореми 1 [13] випливає існування $\widetilde{\delta}_1 = \widetilde{\delta}_1(\varepsilon) > 0$ такого, що для довільних $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \widetilde{\delta}_1$, $|z_0| < \widetilde{\delta}_1$ виконується

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q}} (\mathcal{I}_1(x,t,\hat{x},\hat{t}; z, z_0) + \mathcal{I}_2(x,t,\hat{x},\hat{t}; z, z_0)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Нехай $\eta_1 > 0$ – досить мале і довільне число, $\Sigma_{\eta_1} \subset \Sigma$ така, що $\operatorname{dist}(x, \hat{x}) \geqslant \eta_1$, $\operatorname{dist}(t, \hat{t}) \geqslant \eta_1$.

Тоді для довільних $\mathrm{v} \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\, \widetilde{C}}(\overline{Q},\ \widehat{P})$ та $(x,t) \in \overline{Q}$ отримаємо

$$\mathcal{I}_3(x,t,\hat{x},\hat{t}; z, z_0) \leqslant \widetilde{C}^{\beta_1} \int\limits_\Sigma |\varrho_0^{-\alpha}(x+z, t+z_0, \hat{x}, \hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x+z, t+z_0; y, \tau)}{\partial \nu_y} -$$

$$- \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}| \cdot \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\, dS_y d\tau =$$

$$= \widetilde{C}^{\beta_1} \int\limits_{\Sigma\setminus\Sigma_{\eta_1}} |\varrho_0^{-\alpha}(x+z, t+z_0, \hat{x}, \hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x+z, t+z_0; y, \tau)}{\partial \nu_y} - \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}| \times$$

$$\times \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\, dS_y d\tau + \widetilde{C}^{\beta_1} \int\limits_{\Sigma_{\eta_1}} |\varrho_0^{-\alpha}(x+z, t+z_0, \hat{x}, \hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x+z, t+z_0; y, \tau)}{\partial \nu_y} -$$

$$- \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}| \cdot \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\, dS_y d\tau =$$

$$= \mathcal{I}_{31}(x,t,\hat{x},\hat{t}; z, z_0) + \mathcal{I}_{32}(x,t,\hat{x},\hat{t}; z, z_0).$$

Нехай $\delta_0 > 0$ – фіксоване число. За заданим δ_0 вибираємо число $\eta_1 < \frac{\varepsilon_0}{2}$ таке, щоб $m(\Sigma \setminus \Sigma_{\eta_1}) \leqslant \delta_0$ та

$$\eta_1 < \Big(\frac{\varepsilon}{12\widetilde{C}^{\beta_1}\widetilde{C}_0}\Big)^{\frac{1}{\alpha(\beta_1-1)}}.$$

За лемою 4 існує $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$, існує відповідне $\eta_1 > 0$ такі, що для довільних $(x,t) \in \overline{Q}$ та $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ таких, що $(x+z, t+z_0) \in Q$

$$\int\limits_{\Sigma\setminus\Sigma_{\eta_1}} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}|\, dS_y d\tau < \frac{\varepsilon}{24\widetilde{C}^{\beta_1}}, \tag{14}$$

$$\int\limits_{\Sigma\setminus\Sigma_{\eta_1}} \varrho_0^{\alpha\beta_0}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x+z,t+z_0;y,\tau)}{\partial \nu_y}|\, dS_y d\tau < \frac{\varepsilon}{24\widetilde{C}^{\beta_1}}. \tag{15}$$

Тоді з (14), (15) при $(x,t) \in \overline{Q}$

$$\mathcal{I}_{31}(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0) \leqslant \widetilde{C}^{\beta_1} \int\limits_{\Sigma\setminus\Sigma_{\eta_1}} \Big(|\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x+z,t+z_0;y,\tau)}{\partial \nu_y}|+$$

$$+|\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}|\Big) \cdot \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\, dS_y d\tau < \widetilde{C}^{\beta_1}\Big(\frac{\varepsilon}{24\widetilde{C}^{\beta_1}} + \frac{\varepsilon}{24\widetilde{C}^{\beta_1}}\Big) = \frac{\varepsilon}{12},$$

а, отже,

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q}} \mathcal{I}_{31}(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0) < \frac{\varepsilon}{12}.$$

Виберемо $0 < \eta_2 < \frac{\eta_1}{2}$. Для довільної $(x,t) \in Q_{\frac{\eta_1}{2}}$ та числа η_2 визначимо множини

$$U_{\eta_2}(x,t) \stackrel{def}{=} \{(y,\tau) \in \Sigma_{\eta_1} : ||x-y|| \leqslant \eta_2,\ |t-\tau| \leqslant \eta_2^2\}.$$

Обчислимо

$$m(U_{\eta_2}(x,t)) = \int\limits_{U_{\eta_2}(x,t)} dy d\tau = \int\limits_{||x-y||\leqslant\eta_2} dy \cdot \int\limits_{|t-\tau|\leqslant\eta_2^2} d\tau = 2\sigma_n \eta_2^{n+2},$$

де σ_n – площа поверхні сфери одиничного радіуса в $\mathbb{R}^n$. Якщо вибрати

$$\eta_2 < \min\{\frac{\eta_1}{2};\ \Big(\frac{\delta_0}{2\sigma_n}\Big)^{\frac{1}{n+2}}\},$$

то $m(U_{\eta_2}(x,t)) < \delta_0$. Тоді з (14) та (15) для довільних $(x,t) \in \overline{Q}$ та $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ таких, що $(x+z, t+z_0) \in Q$

$$\int\limits_{U_{\eta_2}(x,t)} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}|\, dS_y d\tau < \frac{\varepsilon}{36\widetilde{C}^{\beta_1}}, \tag{16}$$

$$\int\limits_{U_{\eta_2}(x,t)} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x+z,t+z_0;y,\tau)}{\partial \nu_y}|\, dS_y d\tau < \frac{\varepsilon}{36\widetilde{C}^{\beta_1}}. \tag{17}$$

Виберемо $\delta_1 < \min\{\delta_0; \frac{\eta_2}{2}\}$. При $(x,t) \in Q_{\frac{\eta_1}{2}}$, $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ таких, що $||z|| \leqslant \delta_1 (< \frac{1}{4}\eta_1)$, $|z_0| \leqslant \delta_1 (< \frac{1}{4}\eta_1)$, маємо $(x+z, t+z_0) \in Q_{\frac{\eta_1}{4}}$. При $(x,t) \in Q_{\frac{\eta_1}{4}}$, $(y,\tau) \in \Sigma_{\eta_1} \setminus U_{\eta_2}(x,t)$, $||x-y|| \geqslant \eta_2$, $|t-\tau| \geqslant \eta_2^2$, а отже, $(x,t) \neq (y,\tau)$. Тому функція

$$\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t})\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}$$

рівномірно неперервна в області

$$V = \{(x,t;y,\tau):\,(x,t) \in \overline{Q_{\frac{\eta_1}{4}}},\,(y,\tau) \in \overline{\Sigma_{\eta_1} \setminus U_{\eta_2}(x,t)}\}.$$

Тоді існує $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) \in (0;\delta_1]$ таке, що для довільних $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \delta_2$, $|z_0| < \delta_2$, $(x,t) \in \overline{Q_{\frac{\eta_1}{2}}} \subset \overline{Q_{\frac{\eta_1}{4}}}$, $(y,\tau) \in \overline{\Sigma_{\eta_1} \setminus U_{\eta_2}(x,t)}$ при $\alpha\beta_1 > -n-1$ виконується

$$|\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x+z,t+z_0;y,\tau)}{\partial \nu_y} - \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}| < \frac{\varepsilon}{36A\widetilde{C}^{\beta_1}},$$

де $A = \int\limits_{\Sigma_{\eta_1} \setminus U_{\eta_2}(x,t)} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\,dS_y d\tau$, тоді

$$\int\limits_{\Sigma_{\eta_1} \setminus U_{\eta_2}(x,t)} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x+z,t+z_0;y,\tau)}{\partial \nu_y} -$$

$$-\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}|\,dS_y d\tau < \frac{\varepsilon}{36A\widetilde{C}^{\beta_1}} \int\limits_{\Sigma_{\eta_1} \setminus U_{\eta_2}(x,t)} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\,dS_y d\tau < \frac{\varepsilon}{36\widetilde{C}^{\beta_1}}. \tag{18}$$

Отже, при $(x,t) \in Q_{\frac{\eta_1}{2}}$ із (16), (17) та (18) випливає існування $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ такого, що для довільних $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \delta_2$, $|z_0| < \delta_2$

$$\mathcal{I}_{32}(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0) = \widetilde{C}^{\beta_1} \int\limits_{\Sigma_{\eta_1}} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x+z,t+z_0;y,\tau)}{\partial \nu_y} -$$

$$-\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}|\,dS_y d\tau \leqslant \widetilde{C}^{\beta_1} \int\limits_{U_{\eta_2}(x,t)} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) \times$$

$$\times \frac{\partial G(x+z,t+z_0;y,\tau)}{\partial \nu_y}|\,dS_y d\tau + \widetilde{C}^{\beta_1} \int\limits_{U_{\eta_2}(x,t)} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \times$$

$$\times \frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}|\,dS_y d\tau + \widetilde{C}^{\beta_1} \int\limits_{\Sigma_{\eta_1} \setminus U_{\eta_2}(x,t)} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) \times$$

$$\times \frac{\partial G(x+z,t+z_0;y,\tau)}{\partial \nu_y} - \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t})\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}|\,dS_y d\tau < \frac{\varepsilon}{36} + \frac{\varepsilon}{36} + \frac{\varepsilon}{36} = \frac{\varepsilon}{12},$$

а отже,

$$\sup_{(x,t) \in \overline{Q_{\frac{\eta_1}{2}}}} \mathcal{I}_{32}(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0) < \frac{\varepsilon}{12}.$$

При $(x,t) \in \overline{Q \setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}}$, $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \delta_1 (< \frac{\eta_1}{4})$, $|z_0| < \delta_1 (< \frac{\eta_1}{4})$ буде $(x+z, x+z_0) \in \overline{Q \setminus Q_{\frac{3\eta_1}{4}}} \subset Q$ або $(x+z, t+z_0) \notin Q$. За рівномірною неперервністю функції $\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}$ на замкненій множині $V_1 = (\overline{Q \setminus Q_{\frac{3\eta_1}{4}}}) \times Q_{\eta_1}$ враховуючи, що $-\alpha \geqslant 0$, $\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \leqslant 1$, одержуємо: існує $\delta_3 = \delta_3(\varepsilon) \in (0, \delta_1]$ таке, що для довільних $(x,t) \in \overline{Q \setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}} \subset \overline{Q \setminus Q_{\frac{3\eta_1}{4}}}$, $(y,\tau) \in \overline{\Sigma_{\eta_1}}$, $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \delta_3$, $|z_0| < \delta_3$ виконується

$$|\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x+z,t+z_0;y,\tau)}{\partial \nu_y} - \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}| < \frac{\varepsilon}{12B\widetilde{C}^{\beta_1}},$$

де

$$B = \int\limits_{\Sigma_{\eta_1}} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\, dS_y d\tau,$$

звідки

$$\sup_{\substack{(x,t)\in\overline{Q\setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}} \\ (x+z,t+z_0)\in Q}} \mathcal{I}_{32}(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0) \leqslant \widetilde{C}^{\beta_1} \frac{\varepsilon}{12B\widetilde{C}^{\beta_1}} \int\limits_{\Sigma_{\eta_1}} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\, dS_y d\tau = \frac{\varepsilon}{12}.$$

Для тих точок $(x,t) \in \overline{Q \setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}}$, $(y,\tau) \in \Sigma_{\eta_1}$, $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \delta_1$, $|z_0| < \delta_1$, для яких $(x+z,t+z_0) \notin Q$ отримаємо

$$\sup_{\substack{(x,t)\in\overline{Q\setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}} \\ (x+z,t+z_0)\notin Q}} \mathcal{I}_{32}(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0) \leqslant \sup_{\substack{(x,t)\in\overline{Q\setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}} \\ (x+z,t+z_0)\notin Q}} \widetilde{C}^{\beta_1} \int\limits_{\Sigma_{\eta_1}} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \times$$

$$\times \frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}|\, dS_y d\tau \leqslant \sup_{\substack{(x,t)\in\overline{Q\setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}} \\ (x+z,t+z_0)\notin Q}} \widetilde{C}^{\beta_1} \int\limits_{\Sigma_{\eta_1}} \eta_1^{\alpha\beta_1} |\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}|\, dS_y d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{(x,t)\in\overline{Q\setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}} \\ (x+z,t+z_0)\notin Q}} \widetilde{C}^{\beta_1} \eta_1^{\alpha\beta_1} \eta_1^{-\alpha} \int\limits_{\Sigma_{\eta_1}} |\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}|\, dS_y d\tau \leqslant \widetilde{C}^{\beta_1} \widetilde{C}_0 \eta_1^{\alpha(\beta_1-1)} < \frac{\varepsilon}{12},$$

де остання нерівність виконується згідно з вибором η_1. Зауважимо, що при $\beta_1 \in (0,1)$ також $\alpha(\beta_1 - 1) > 0$.

Доведено, що існує $\widetilde{\delta}_2 = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} > 0$ таке, що для довільних $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \widetilde{\delta}_2$, $|z_0| < \widetilde{\delta}_2$

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q}} \mathcal{I}_3(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0) < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Отже, існує $\widehat{\delta}_2 = \min\{\widetilde{\delta}_1, \widetilde{\delta}_2\} > 0$ таке, що для довільних $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \widehat{\delta}_2$, $|z_0| < \widehat{\delta}_2$ виконується

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q}} \mathcal{I}(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отож, множина $\{H_1 \mathrm{v} : \mathrm{v} \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha, \widetilde{C}}(\overline{Q}, \widehat{P})\}$ – одностайно неперервна. За теоремою Шаудера та за умов лем 2, 3, 4 крайова задача (6)-(8) має розв'язок $u \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha}(\overline{Q}, \widehat{P})$. $\square$

3. Висновки. Ми знайшли достатні умови існування та характер точкових степеневих особливостей розв'язку нелінійної першої узагальненої крайової задачі для рівняння теплопровідності.

Список використаної літератури

1. *Лопушанська Г.П.* Крайові задачі у просторі узагальнених функцій D' / *Лопушанська Г.П.* – Львів, 2002.
2. *Лопушанська Г.П.* Про розв'язок параболічної граничної задачі із сильними степеневими особливостями в правих частинах / *Лопушанська Г.П.* // Мат. студії. – 2001. – Т. 15, № 2. – С. 179-190.
3. *Чмир О.Ю.* Про формулювання узагальненої крайової задачі для півлінійного параболічного рівняння / *Чмир О.Ю.* // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2003. – Вип. 62. – С. 134-143.
4. *Galaktionov V.* On critical Fujita exponents for heat equations with a nonlinear condition on the boundary / *Galaktionov V., Livine H.* // Israel J. Math. – 1996. – Vol. 94. – P. 125-146.
5. *Hu B.* On critical exponents for the heat equation with a mixed nonlinear Dirichlet-Newmann nonlinear boundary condition / *Hu B., Yin H.* // J. Math. Anal. Appl. – 1997. – Vol. 209. – P. 683-711.
6. *Gomez J.* Blow-up results and localization of blow-up points for the heat equation with a nonlinear boundary condition / *Gomez J., Marquez V., Wolanski N.* // J. Diff. Equations. – 1991. – Vol. 92. – P. 384-401.
7. *Lin Z.G.* The blow-up properties of solutions to semilinear heat equation with nonlinear boundary conditions / *Lin Z.G., Wang M.X.* // Z. Angew. Math. Phys. – 1999. – Vol. 50. – P. 361-374.
8. *Lopushanska H.* Solutions with strong power singularities to nonlinear elliptic boundary value problems / *Lopushanska H.* // Матем. вісник НТШ. – 2006. – Т. 3. – С. 247-260.
9. *Чмир О.Ю.* Про розв'язок нелінійної першої крайової задачі для рівняння теплопровідності в узагальнених функціях / *Чмир О.Ю., Меньшикова О.В.* // Вісник нац. ун-ту "Львівська Політехніка". Фіз.-мат. науки. – 2009. – Вип. 660. – С. 14-19.
10. *Ивасишен С.Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач / *Ивасишен С.Д.* – К., 1990.
11. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы / *Эйдельман С.Д.* – М., 1964.
12. *Ивасишен С.Д.* О композиции параболических ядер / *Ивасишен С.Д.* // Укр. мат. журн. – 1980. – Т. 32. – № 1. – С. 35-45.
13. *Чмир О.Ю.* Точкові особливості розв'язку нелінійного інтегрального рівняння Вольтерра / *Чмир О.Ю.* // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2009. – Вип. 71. – С. 220-234.
14. *Прудников А.П.* Интегралы и ряды / *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* – М., 1981.
15. *Колмогоров А.Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* – М., 1976.

Стаття: надійшла до редакції 30.03.2011
прийнята до друку 21.09.2011

CHARACTER POINTED POWER SINGULARITIES OF THE SOLUTION OF THE NONLINEAR FIRST GENERALIZED BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR HEAT EQUATION

Oksana CHMYR

Lviv State University of Vital Activity Safety,
Kleparivska Str., 35, Lviv, 79000
e-mail: o_chmyr@yahoo.com

Using the Schauder method the character pointed power singularities of the solution of the nonlinear first generalized boundary value problem for heat equation are investigated.

Key words: nonlinear boundary value problem, generalized function, weight functional space, continuous operator, compact set, Schauder fixed-point theorem.

О ХАРАКТЕРЕ ТОЧЕЧНЫХ СТЕПЕННЫХ ОСОБЕННОСТЯХ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ПЕРВОЙ ОБОБЩЁННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Оксана ЧМЫРЬ

Львовский государственный университет безопасности жизнедеятельности,
ул. Клепаровская, 35, Львов, 79000
e-mail: o_chmyr@yahoo.com

С помощью принципа Шаудера исследовано характер точечных степенных особенностей решения нелинейной первой обобщённой краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Ключевые слова: нелинейная краевая задача, обобщённая функция, весовое функциональное пространство, непрерывный оператор, компактное множество, теорема Шаудера о неподвижной точке.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

1. Стаття повинна містити результати нових досліджень автора з повним їхнім доведенням. Не доцільно робити великі огляди вже опублікованих результатів. Робити посилання на неопубліковані праці не можна.

2. Текст статті набирають на комп'ютері українською чи англійською мовами. До редакційної колегії потрібно подавати:

два примірники статті з підписом автора (співавторів) на останній сторінці;

назву статті, резюме (резюме повинно передавати зміст основних результатів статті, а не лише повторювати її назву), ключові слова, ім'я, прізвище автора, місце роботи, адресу українською, англійською та російською мовами, електронну адресу;

електронний варіант статті та резюме на CD-RW диску (редколегія повертає авторові диск; тексти можна надіслати за адресою *lnu.visn.mm@gmail.com*);

довідка про автора (співавторів), у якій треба зазначити ім'я, по батькові та прізвище автора, місце роботи, посаду, адресу українською, англійською та російською мовами, телефон та електронну адресу.

Оптимальний обсяг статті до 12 сторінок. Розмір шрифтів 10pt, висота сторінки – 190 mm, ширина – 135 mm.

3. Вимоги до набору.

Текст статті створювати у версії LaTeX з кодуванням кириличних шрифтів „Кирилиця (Windows)“ (кодова сторінка 1251).

На першій сторінці статті потрібно зазначити номер УДК.

Номери формул ставити з правого боку і нумерувати лише формули, на які є посилання.

У посиланнях на теорему з монографії зазначити сторінку, на якій вона описана.

Рисунки до статті подавати у графічному форматі BMP чи PCX. Назва рисунка чи його номер не входять у зображення, їх треба створювати засобами LaTeX'у. Вибираючи розмір графічного зображення, належить врахувати, що воно буде надруковане на принтері з роздільною здатністю 600 dpi.

Літературу подавати загальним списком у порядку посилань на джерела в тексті статті.

Зразки бібліографічного опису книги, статті, препринту, дисертації, депонованого рукопису, тез доповідей конференцій (з'їздів та ін.):

1. *Грабович А.І.* Назва / *Грабович А.І.* – К., 1985.
2. *Петренко О.Б.* Назва / *Петренко О.Б., Шинк М.М.* – Л., 2001.
3. *Кравчук О.М.* Назва / *Кравчук О.М.* // Укр. мат. журн. – 1985. – Т. 2, №2. – С. 4-20.
4. *Кравчук О.М.* Назва / *Кравчук О.М., Потічний М.М.* // Мат. студії – 1995. – Т. 2, №2. – С. 4-20.
5. *Михайленко Г.Д.* Назва / *Михайленко Г.Д.* – Л.: ІППММ, 1993. – 9 с. – (Препринт / НАН України, Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача: 80.1).

6. *Михайленко Г.Д.* Назва / *Михайленко Г.Д., Степаняк С.І.* – Л.: ІППММ, 1993. – 9 с. – (Препринт / НАН України, Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача: 80.1).

7. *Колмаз Ю. А.* Назва: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук. / *Колмаз Ю.А.* – К., 2008. – 20 с.

8. *Сеник С.М.* Назва / *Сеник С.М.* – К., 1992. – 17 с. – Деп. в ДНТБ України, В2020-1995.

9. *Сеник С.М.* Назва / *Сеник С.М., Мандрик І.Т.* – К., 1992. – 17 с. – Деп. в ДНТБ України, В2020-1995.

10. *Муравський В.К.* Назва / *Муравський В.К.* // Наукова конф. "Нелінійні диференціальні рівняння": тези доп., 27 серпня - 2 вересня 1994 р., Київ. – К.: КНУ ім. Т. Г. Шевченка, 1994. – С. 540-551.

11. *Муравський В.К.* Назва / *Муравський В.К., Ліско С.В.* // Наукова конф. "Нелінійні диференціальні рівняння": тези доп., 27 серпня - 2 вересня 1994 р., Київ. – К.: КНУ ім. Т. Г. Шевченка, 1994. – С. 540-551.