ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76. С. 7-20
Visnyk of the Lviv University. Series Mech.-Mat. Issue 76. P. 7-20

УДК 517.956

ДЕЯКІ ЗАУВАЖЕННЯ ДО ЗАДАЧІ НІКОЛЕТТІ З НЕВІДОМИМИ ВНУТРІШНІМИ МЕЖАМИ

Володимир КИРИЛИЧ[1], Андрій ФІЛІМОНОВ[2]

[1] *Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна*
[2] *Московський державний університет шляхів сполучення, вул. Образцова, 15 127994 Москва, Росія*

Доведено існування та єдиність ліпшицевого розв'язку деякого варіанту задачі Ніколетті.

Ключові слова: задача Ніколетті, невідомі межі, гіперболічна система квазілінійних рівнянь.

Вступ. Задача Ніколетті [1-3] полягає у відшуканні розв'язку системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dy_j}{dx} = g_j(x, y_1, \dots, y_n), \quad j \in \{1, \dots, n\}, \tag{1}$$

яка задовольняє умови

$$y_j(x_j) = b_j, \quad j \in \{1, \dots, n\}, \tag{2}$$

де $d_0 \le x_j \le d_1$, а $d_0, d_1, b_j (j \in \{1, \dots, n\})$ – задані сталі величини. При такому формулюванні задача є розв'язною для достатньо малого значення $d_1 - d_0$ (див., наприклад, [2], де також розглянуто інші можливі варіанти задачі Ніколетті). Ми отримали теорему про розв'язність задачі Ніколетті без додаткового припущення про малість значення $d_1 - d_0$. Проте значення x_j у цьому разі вже не будуть заданими сталими величинами.

Розглянемо деякий видозмінений варіант цієї задачі, в якому точки x_j в умовах (2) "рухаються" з часом вздовж невідомих ліній $x_j = s_j(t)$, які задовольняють певну систему рівнянь. Ці лінії також підлягають визначенню разом з розв'язком системи (1). Такий варіант задачі природно виникає під час аналізу сингулярних гіперболічних систем рівнянь з частинними похідними такого типу.

Повне формулювання задачі виглядає так. У прямокутнику $\Pi(T_0) = \{(x, t) \mid 0 \le x \le \ell, 0 \le t \le T_0\}$, де $\ell > 0$, $T_0 > 0$ – деякі сталі, розглядаємо систему

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \mathbb{k}_i(x,t,u,v)\frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(x,t,u,v),\ i \in \{1,\dots,m\}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial x} = q_j(x,t,u,v),\ j \in \{1,\dots,n\}, \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}s_k(t) = r_k(s(t),t,u(s_k(t),t),v(s_k(t),t)),\ k \in \{1,\dots,n\}, \tag{5}$$

де $u = (u_1,\dots,u_m)^T$, $v = (v_1,\dots,v_n)^T$, $s = (s_1,\dots,s_n)^T$, а $\mathbb{k}$ – матриця $m \times m$.

Для функцій u_i $(i \in \{1,\dots,m\})$ ставимо природні початкові та крайові умови [4]. Функції s_j, v_j задовольняють умови

$$s_j(0) = c_j,\ j \in \{1,\dots,n\},\ 0 \le c_j \le \ell\ , \tag{6}$$

$$v_j(s_j(t),t) = \beta_j(t),\ j \in \{1,\dots,n\}, \tag{7}$$

де функції $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_n)$ і сталі c_j $(j \in \{1,\dots,n\})$ задані.

У працях [4–6] доведено локальну та глобальну узагальнену й класичну коректні розв'язності згаданої задачі для системи (3)–(5) у випадку, коли система (3) записана в інваріантах (тобто, коли матриця $\mathbb{k}(x,t,u,v)$ є діагональною). Проте запропоноване нами доведення розв'язності розглянутого випадку задачі Ніколетті є не тільки, на наш погляд, самостійним результатом, а й може бути використане для вивчення гіперболічних систем у випадку, коли несингулярна частина системи (3)–(5) має загальний вигляд (3).

Розв'язність задачі. У прямокутнику $\Pi(T)$, $T \le T_0$ будемо розглядати неперервні за змінними (x,t) і ліпшицеві за x функції $u : \Pi(T) \to R^m$, $v : \Pi(T) \to R^n$ зі сталими Ліпшиця L_1^u, L_1^v, відповідно. Простори цих функцій з рівномірною нормою позначимо, відповідно, через $\mathbb{E}_0^u$, $\mathbb{E}_0^v$.

Нехай функції $\beta_j, q_j, r_k, j \in \{1,\dots,n\}$, $k \in \{1,\dots,n\}$ – неперервні в своїх областях визначення і задовольняють локальну умову Ліпшиця за всіма аргументами, крім, можливо, аргументу t. Сталі Ліпшиця для зазначених функцій будемо позначати відповідними великими буквами з індексами, що відповідають аргументам, наприклад, Q_1, Q_3, Q_4 означатимуть сталі Ліпшиця функції $(x,t,u,v) \to q_j(x,t,u,v)$ за аргументами x, u, v, відповідно, а R_1, R_3, R_4 – сталі Ліпшиця функції $(s,t,u,v) \to r_k(x,t,u,v)$ за аргументами s, u, v, відповідно.

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

Рівняння (4) і (5) з урахуванням умов (6) і (7) перепишемо у вигляді

$$v_j(x,t) = \beta_j(t) + \int\limits_{s_j(t)}^{x} q_j(x,t,u(x,t),v(x,t))dx,\ j \in \{1,...,n\}, \tag{8}$$

$$s_k(t) = c_k + \int\limits_0^t r_k(s(t),t,u(s_k(t),t),v(s_k(t),t))dt,\ k \in \{1,...,n\}. \tag{9}$$

Припустимо, що виконуються умови.

N1. Нехай функції $(x,t,u,v) \to q_j(x,t,u,v)$, $(s,t,u,v) \to r_k(x,t,u,v)$ $j \in \{1,...,n\}$ не залежать від тих v_p, для яких $c_p \neq c_j$.

N2. Нехай існує стала Q_0 така, що для всіх $j \in \{1,...,n\}$ виконується нерівність: $|\ q_j(x,t,u,v)\ | \leq Q_0(1+\ |\ v\ |)$.

Відповідно до наведених вище припущень, функції r, q обмежені в своїх областях визначення. Нехай $w = (u,v)$ і

$$D^1 = [0,T_0] \times \{w \mid w \in R^{m+n}, \| w \| \leq P_0\},$$
$$D^2 = [0,T_0] \times [0,\ell]^n \times \{w \mid w \in R^{m+n}, \| w \| \leq P_0\},$$

де P_0 - деяка стала, $[0,\ell]^n \subset R^n$.

Введемо позначення

$$\max_{D^2} |\ r\ | \leq R,\ \max_{D^1} |\ q\ | \leq Q,\ \max_{[0,T]} |\ \beta\ | \leq B.$$

Зауваження 1. Випадок, коли одна або декілька c_j дорівнюють 0 або ℓ, не розглядаємо. В цьому разі при $c_j = 0$ додатково вимагаємо, щоб $r_j \geq 0$, а при $c_j = \ell$ - відповідно, $r_j \leq 0$. Інші міркування в цих випадках будуть аналогічні до наведених нижче. Для того, щоб не перевантажувати викладення, далі розгляд цих випадків опускаємо і вважаємо, що $c_j \neq 0, c_j \neq \ell$ для всіх $j \in \{1,...,n\}$.

Зробимо припущення.

N3. Нехай значення T>0 вибране так, що

$$0 \leq c_j - RT < c_j < c_j + RT \leq \ell, \quad j \in \{1,...,n\}.$$

Лема 1. При сформульованих вище припущеннях для всіх $u \in \mathbb{E}_0^u$, $v \in \mathbb{E}_0^v$ існує T>0 таке, що на [0,T] маємо єдиний розв'язок системи (9).

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

Доведення леми випливає з відомої теореми існування та єдиності розв'язку для системи звичайних диференціальних рівнянь [7].

Розв'язок системи (9) $s_j(t)$, зрозуміло, залежить від вибору функцій u, v. Для акцентування на цьому будемо деколи використовувати позначення $s_j(t;u,v)$.

Зафіксуємо деяке $j_0 \in \{1,\dots,n\}$ і позначимо через J_{j_0} ту множину індексів k, для яких $c_k = c_{j_0}$. Розглянемо систему (8) для $j \in J_{j_0}$. Для кожної фіксованої $u \in \mathbb{E}_0^u$ і для кожного $t \in [0,T]$ для системи (8) виникає аналог задачі Ніколетті з невідомими точками $x_j = s_j(t;u,v),\ j \in J_{j_0}$, які залежать від розв'язку (8) і від заданої функції $u \in \mathbb{E}_0^u$. Ця залежність визначена системою (9) при $k \in J_{j_0}$.

Означення 1. Для кожної $u \in \mathbb{E}_0^u$ розв'язком системи (8), (9) будемо називати пару $\{v,s\}$, де $v \in \mathbb{E}_0^v$ – розв'язок (8), а s – неперервний розв'язок (9).

Виконується така теорема.

Теорема 1. Для кожної $u \in \mathbb{E}_0^u$ існує T>0 таке, що в $\Pi(T)$ існує єдиний розв'язок системи (8), (9).

Доведення. Зафіксуємо деяку $u \in \mathbb{E}_0^u$ і приймемо $\breve{v},\hat{v} \in E_0^v$. Із леми 1 випливає: існує T>0 таке, що при $t \in [0,T],\ j \in \{1,\dots,n\}$ існують єдині розв'язки $s_j(t;u,\breve{v})$, $s_j(t;u,\hat{v})$, які деколи до скорочення будемо позначати через $\breve{s}_j(t)$ і $\hat{s}_j(t)$.

Зафіксуємо довільне $j_0 \in \{1,\dots,n\}$. На підставі умови **N1** далі достатньо аналізувати тільки $j \in J_{j_0}$. Розглянемо

$$| s_j(t;u,\breve{v}) - s_j(t;u,\hat{v}) | \le \int_0^t | r_j(\breve{s}(t),t,u(\breve{s}(t),t),\breve{v}(\breve{s}(t),t)) -$$

$$-r_j(\hat{s}(t),t,u(\hat{s}(t),t),\hat{v}(\hat{s}_j(t),t)) \mid dt \le$$

$$\le \int_0^t [(R_1 + R_3 L_1^u) \max_{p \in J_{j0}} | \breve{s}_p(t) - \hat{s}_p(t) | +$$

$$+R_4 \max_{p \in J_{j0}} | \breve{v}_p(\breve{s}_j(t),t) - \hat{v}_p(\hat{s}_j(t),t) \pm \breve{v}_p(\hat{s}_j(t),t) |]dt \le$$

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

$$\leq \int_0^t [(R_1 + R_3 L_1^u) \max_{p \in J_{j0}} | \breve{s}_p(t) - \hat{s}_p(t) | + R_4 \| \breve{v} - \hat{v} \|] dt \leq$$

$$\leq R_4 T \| \breve{v} - \hat{v} \| + \int_0^t (R_1 + R_3 L_1^u + R_4 L_1^v) \max_{p \in J_{j0}} | \breve{s}_p(t) - \hat{s}_p(t) | . \tag{10}$$

Застосуємо до (10) лему Гронуолла-Белмана й одержимо оцінку

$$| s_j(t; u, \breve{v}) - s_j(t; u, \hat{v}) | \leq R_4 E T \| \breve{v} - \hat{v} \|, \tag{11}$$

де $E = \exp(R_1 + R_3 L_1^u + R_4 L_1^v) T$.

Зафіксуємо тепер $t \in (0, T]$ і розглянемо відрізок (рис. 1)

$$l_{(t)} = \left\{ x \;\middle|\; c_{j_0} - Rt \leq x \leq c_{j_0} + Rt \right\}. \tag{12}$$

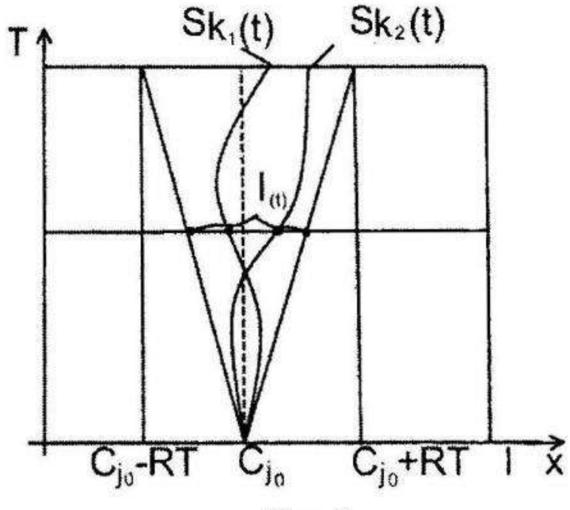

Рис. 1

Очевидно, що $| \ell_{(t)} | = 2Rt$. Розглянемо кулю

$$\mathbb{E}_{(t)}^v = \left\{ v \in \mathbb{E}_0^v \;\middle|\; \max_{x \in l_{(t)}} | v(x,t) - \beta(t) | \leq V_1 \right\},$$

де $V_1 > 0$ – деяка стала така, що $V_1 + B < V$.

Для всіх $j \in J_{j_0}$ розглянемо оператор, що діє на v, як функцію x за фіксованого параметра t

$$\mathfrak{B}_t \{v\}_j(x) = \beta_j(t) + \int_{s_j(t;u,v)}^{x} q_j(x, t, u(x,t), v(x,t)) dx. \tag{13}$$

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

Тоді для $x \in \ell_{(t)}$ одержимо

$$|\,\mathfrak{B}_t\{v\}_j(x) - \beta_j(t)\,| \le Q\,|\,x - s_j(t;u,v)\,| \le 2Rt, \tag{14}$$

тобто при $2RT \le V_1$ оператор $\mathfrak{B}_t : \mathbb{E}^v_{(t)} \to \mathbb{E}^v_{(t)}$ (ліпшицевість $\mathfrak{B}_t\{v\}$ за x зі сталою Q очевидна, тому достатньо вважати, що $L_1^v \ge Q$). Далі нехай $\breve{s}_j(t) \le \hat{s}_j(t)$. Усі можливі випадки взаємного розміщення $\breve{s}_j(t)$ і $\hat{s}_j(t)$ зображені на рис. 2.

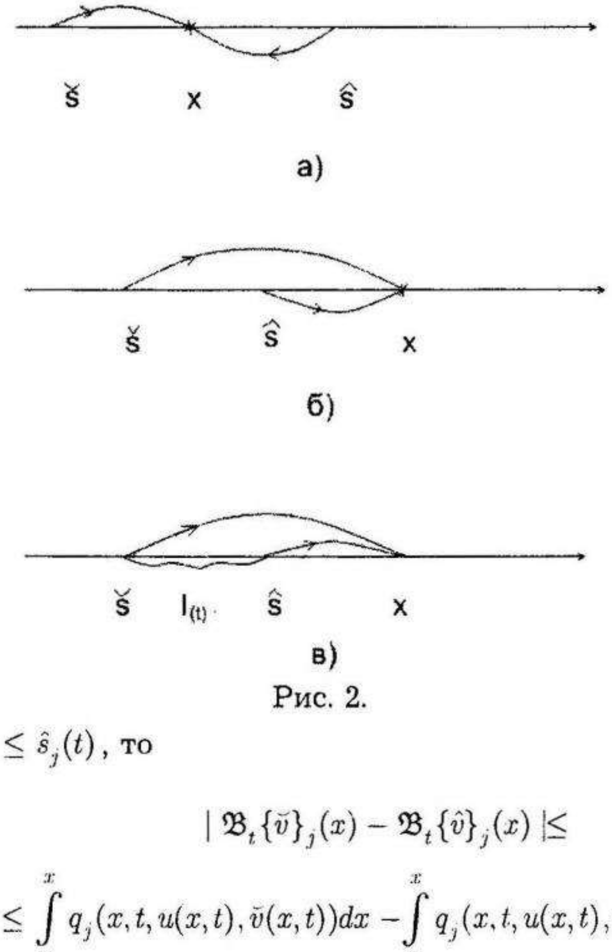

Рис. 2.

Якщо $\breve{s}_j(t) \le x \le \hat{s}_j(t)$, то

$$|\,\mathfrak{B}_t\{\breve{v}\}_j(x) - \mathfrak{B}_t\{\hat{v}\}_j(x)\,| \le$$

$$\le \int\limits_{\breve{s}_j}^{x} q_j(x,t,u(x,t),\breve{v}(x,t))dx - \int\limits_{\hat{s}_j}^{x} q_j(x,t,u(x,t),\hat{v}(x,t))dx \,| \le$$

$$\le \int\limits_{\breve{s}_j(t)}^{\hat{s}_j(t)} 2Q dx \le 2Q\,|\,\hat{s}_j(t) - \breve{s}_j(t)\,| \le 2QR_4ET\,||\,\breve{v} - \hat{v}\,|| \tag{15}$$

на підставі оцінки (11).

Якщо ж $\breve{s}_j(t) \le \hat{s}_j(t) \le x$, то

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

$$| \mathrm{B}_t\{\breve{v}\}_j(x) - \mathrm{B}_t\{\hat{v}\}_j(x) | \le | \int\limits_{\breve{s}_j(t)}^{\hat{s}_j(t)} q_j(x,t,u(x,t),\breve{v}(x,t))dx | +$$

$$+ | \int\limits_{\breve{s}_j}^{x} (q_j(x,t,u(x,t),\breve{v}(x,t)) - q_j(x,t,u(x,t),\hat{v}(x,t)))dx | \le$$

$$\le Q \, | \, \hat{s}_j(t) - \breve{s}_j(t) \, | + \int\limits_{\hat{s}_j(t)}^{x} Q_4 \, || \, \breve{v} - \hat{v} \, || \, dx \le$$

$$\le QR_4ET \, || \, \breve{v} - \hat{v} \, || + Q_4 \, || \, \breve{v} - \hat{v} \, || | \, x - \hat{s}_j(t) \, | \, . \tag{16}$$

Оскільки ж $x \in \ell_{(t)}$, то $| \, x - \hat{s}_j(t) \, | \le 2Rt$. Тому з (16) одержимо

$$| \mathrm{B}_t\{\breve{v}\}_j(x) - \mathrm{B}_t\{\hat{v}\}_j(x) | \le (QR_4E + 2Q_4R)T \, || \, \breve{v} - \hat{v} \, || \, . \tag{17}$$

Із (15) та (17) випливає, що при

$$T < \min\left\{\frac{1}{2QR_4E}, \frac{1}{QR_4E + 2Q_4R}\right\} \tag{18}$$

оператор $\mathfrak{B}_t$ відображає кулю $\mathbb{E}^v_{(t)}$ в себе і буде стискувальним. Це доводить існування і єдиність розв'язку системи (8)–(9) при $x \in \ell_{(t)}$.

Далі на підставі умови **N2** можна стандартним способом продовжити розв'язок $v(x,t)$ за x на весь відрізок $[0,\ell]$. Оскільки розв'язок $v(x,t)$ уже визначений у точках $x = c_j \pm Rt$, то одержуємо задачу Коші з початковими умовами в цих точках, що й завершує доведення теореми 1.

Зазначимо, що неперервність за x, t і ліпшицевість за x функції v відразу випливає з (9), причому можна взяти $L_1^v = Q$. Щодо функцій s, то відповідно до зроблених припущень, із (9) отримаємо їхню гладкість.

У теоремі 1 функція $\overset{(0)}{u} \in E_0^u$ була фіксована, і для кожної такої функції (на підставі цієї ж теореми 1) існує єдиний розв'язок системи

$$\begin{cases} v = \mathfrak{B}(\overset{(0)}{u}, v, s), \\ s = \mathfrak{C}(\overset{(0)}{u}, v, s). \end{cases} \tag{19}$$

Тут через оператори $\mathfrak{B}$ і $\mathfrak{C}$ позначимо праві частини системи (8) і (9), відповідно.

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

Як ми вже згадували, отримані результати можна застосовувати для дослідження гіперболічних систем з несингулярною частиною (3) загального вигляду. Враховуючи ці застосування, сформулюємо такі дві теореми.

Нехай тепер маємо фундаментальну послідовність $\{\overset{(k)}{u}\}$, для всіх $\overset{(k)}{u} \in \mathbb{E}_0^u$. Розглянемо відповідні послідовності розв'язків системи (19).

Справджується така теорема.

Теорема 2. Для кожних $\breve{u}, \hat{u} \in E_0^u$ існує T>0 і сталі $M_1^0 > 0, M_2^0 > 0$ такі, що для відповідних розв'язків системи (19) $(\breve{v}, \breve{s}), (\hat{v}, \hat{s})$ виконуються нерівності

$$\| \breve{v} - \hat{v} \| \le M_1^0 \| \breve{u} - \hat{u} \|, \| \breve{s} - \hat{s} \| \le M_2^0 \| \breve{u} - \hat{u} \| .$$

Доведення. Нехай $\breve{u}, \hat{u} \in E_0^u$. Тоді на підставі (19) можна знайти відповідні $(\breve{v}, \breve{s})$ і $(\hat{v}, \hat{s})$.

Для кожної множини J_{j_0} розглянемо

$$| \breve{s}_j(t; \breve{u}, \breve{v}) - \hat{s}_j(t; \hat{u}, \hat{v}) | \le | \int_0^t [r_j(\breve{s}(t), t, \breve{u}(\breve{s}(t), t), \breve{v}(\breve{s}(t), t)) -$$

$$-r_j(\hat{s}(t), t, \hat{u}(\hat{s}(t), t), \hat{v}(\hat{s}(t), t))]dt | \le \int_0^t [R_1 \max_{p \in J_{j0}} | \breve{s}_p(t) - \hat{s}_p(t) | +$$

$$+R_3 | \breve{u}(\breve{s}_j(t), t) - \hat{u}(\hat{s}_j(t), t) \pm \breve{u}(\hat{s}_j(t), t) | + R_4 | \breve{v}(\breve{s}_j(t), t) -$$

$$+R_3 \| \breve{u} - \hat{u} \| + R_4 \| \breve{v} - \hat{v} \|)dt \le (R_3 + R_4)T(\| \breve{u} - \hat{u} \| + \| \breve{v} - \hat{v} \|) +$$

$$+\int_0^t (R_1 + R_3 L_1^u + R_4 L_1^u) \max_{p \in J_{j0}} | \breve{s}_p(t) - \hat{s}_p(t) | \, dt. \tag{20}$$

Застосуємо до (20) лему Гронуолла-Белмана, одержимо

$$\max_{p \in J_{j0}} | \breve{s}_p(t; \breve{u}, \breve{v}) - \hat{s}_p(t; \hat{u}, \hat{v}) | \le (R_3 + R_4)ET(\| \breve{u} - \hat{u} \| + \| \breve{u} - \hat{u} \|), \tag{21}$$

де $E = \exp((R_1 + R_3 L_1^u + R_4 L_1^v)T)$.

Нехай тепер для визначеності, $\breve{s}_j(t) \le \hat{s}_j(t)$.

Розглянемо $| \breve{v}_j(x, t) - \hat{v}_j(x, t) |$. Якщо $\breve{s}_j(t) \le x \le \hat{s}_j(t)$, то на підставі (21) одержимо

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

$$| \breve{v}_j(x,t) - \hat{v}_j(x,t) | \leq \int\limits_{\breve{s}_j}^{x} q_j(x,t,\breve{u}(x,t),\breve{v}(x,t))dx -$$

$$- \int\limits_{\breve{s}_j}^{x} q_j(x,t,\hat{u}(x,t),\hat{v}(x,t))dx \,| \leq \int\limits_{\breve{s}_j(t)}^{\hat{s}_j(t)} | q_j(x,t,\breve{u}(x,t),\breve{v}(x,t)) | \, dx +$$

$$+ \int\limits_{\breve{s}_j(t)}^{\hat{s}_j(t)} | q_j(x,t,\hat{u}(x,t),\hat{v}(x,t)) | \, dx \leq$$

$$\leq 2Q \mid \hat{s}_j(t) - \bar{s}_j(t) \mid \leq 2Q(R_3 + R_4)ET(\| \breve{u} - \hat{u} \| + \| \breve{v} - \hat{v} \|). \qquad (22)$$

Якщо ж $\bar{s}_j(t) \leq \hat{s}_j(t) \leq x \leq c_{j0} + RT$, то

$$| \breve{v}_j(x,t) - \hat{v}_j(x,t) | \leq \int\limits_{\breve{s}_j(t)}^{\hat{s}_j(t)} q_j(x,t,\breve{u}(x,t),\hat{v}(x,t))dx +$$

$$+ \int\limits_{\breve{s}_j}^{x} | q_j(x,t,\breve{u}(x,t),\breve{v}(x,t)) - q_j(x,t,\hat{u}(x,t),\hat{v}(x,t))dx \,| \leq$$

$$\leq Q \mid \hat{s}_j(t) - \breve{s}_j(t) \mid + (Q_3 \| \breve{u} - \hat{u} \| + Q_4 \| \breve{v} - \hat{v} \|) \mid x - \hat{s}_j(t) \mid . \qquad (23)$$

Оскільки в розглянутому випадку $x \in \ell_{(t)}$, то із (23) з урахуванням (21) одержимо

$$| \breve{v}_j(x,t) - \hat{v}_j(x,t) | \leq Q(R_3 + R_4)ET(\| \breve{u} - \hat{u} \| + \| \breve{v} - \hat{v} \|) +$$

$$+ (Q_3 \| \breve{u} - \hat{u} \| + Q_4 \| \breve{v} - \hat{v} \|)2RT \leq MT(\| \breve{u} - \hat{u} \| + \| \breve{v} - \hat{v} \|), \qquad (24)$$

де $M = 2\max\{Q(R_3 + R_4)E, (Q_3 + Q_4)R\}$.

Зрештою, якщо $\breve{s}_j(t) \leq \hat{s}_j(t) \leq c_{j0} + RT \leq x \leq \ell$, то з урахуванням (24) одержимо

$$| \breve{v}_j(x,t) - \hat{v}_j(x,t) | \leq \int\limits_{\breve{s}_j(t)}^{\hat{s}_j(t)} q_j(x,t,\breve{u}(x,t),\breve{v}(x,t))dx +$$

$$+ \int\limits_{\breve{s}_j}^{c_{j0}+RT} | q_j(x,t,\breve{u}(x,t),\breve{v}(x,t)) - q_j(x,t,\hat{u}(x,t),\hat{v}(x,t))dx \,| +$$

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

$$+\int_{c_{j0}+RT}^{x} | q_j(x,t,\breve{u}(x,t),\breve{v}(x,t)) - q_j(x,t,\hat{u}(x,t),\hat{v}(x,t))dx | \leq$$

$$\leq MT(\| \breve{v} - \hat{v} \| + \| \breve{u} - \hat{u} \|) + \int_{c_{j0}+RT}^{x} [Q_3 \| \breve{u} - \hat{u} \| +$$

$$+\max_{p\in J_{j0}} | \breve{v}_p(x,t) - \hat{v}_p(x,t) |]dx \leq MT \| \breve{v} - \hat{v} \| +$$

$$+M_1T \| \breve{u} - \hat{u} \| + \int_{c_{j0}+RT}^{x} Q_4 \max | \breve{v}_p(x,t) - \hat{v}_p(x,t) |dx, \qquad (25)$$

де $M_1 = \max\{MT, Q_3\ell\}$.

Застосуємо до (25) лему Гронуолла-Белмана й одержимо

$$\max_{p\in J_{j0}} | \breve{v}_p(x,t) - \hat{v}_p(x,t) | \leq (MT \| \breve{v} - \hat{v} \| + M_1 \| \breve{u} - \hat{u} \|)\exp(Q_4\ell). \qquad (26)$$

Нерівність (26) справджується для всіх $j_0 \in \{1,...,n\}$.

Отже, зіставляючи (24), (27), (28), одержуємо, що

$$\| \breve{v} - \hat{v} \| \leq MT \| \breve{v} - \hat{v} \| \exp(Q_4\ell) + M_1 \| \breve{u} - \hat{u} \|. \qquad (27)$$

Виберемо $T>0$ так, щоб

$$MT\exp(Q_4\ell) < 1$$

Тоді

$$\| \breve{v} - \hat{v} \| \leq \frac{M_1}{1 - MT\exp(Q_4\ell)} \| \breve{u} - u \|. \qquad (28)$$

Крім того, з (21) і (27) випливає, що

$$\| \breve{s}(t) - \hat{s}(t) \| \leq (R_3 + R_4)ET(\frac{M_1}{1 - MT\exp(Q_4\ell)} + 1) \| \breve{u} - \hat{u} \|. \qquad (29)$$

Звідки й отримаємо твердження теореми 2 при

$$M_1^0 = \frac{M_1}{1 - MT\exp(Q_4\ell)}, \quad M_2^0 = (R_3 + R_4)ET\Big(\frac{M_1}{1 - MT\exp(Q_4\ell)} + 1\Big).$$

Зауваження 2. Для спрощення викладення всі твердження доведені в припущеннях виконання умови Ліпшиця для вихідних даних задачі. Однак

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

цілком аналогічно можна отримати подібні результати в разі заміни умови Ліпшиця відповідними умовами Каратеодорі за змінною t.

Зазначимо важливий частинний випадок теореми 2.

Наслідок 1. Нехай $Q_3 = 0$. Тоді з (25) і (28) одержимо, що

$$\| \breve{v} - \hat{v} \| \leq \frac{MT}{1 - MT\exp(Q_4\ell)} \| \breve{u} - \hat{u} \|,$$

тобто можна записати

$$\| \breve{v} - \hat{v} \| \leq \rho(T) \| \breve{u} - \hat{u} \|, \tag{30}$$

де $\rho(T) \to 0^+$ при $T \to 0^+$.

N4. Додатково вважатимемо, що функції q і β задовольняють умову Ліпшиця за t зі сталими Q_2 і B_2, відповідно.

Нехай $u \in E^u$ (нагадаємо, що це простір ліпшицевих за x, t функцій $u : \Pi(T) \to R^m$ зі сталими L_1^u, L_2^u, відповідно).

Теорема 3. Нехай $u \in E^u$ і додатково виконується умова **N4** щодо функцій β, q, r. Тоді функція $(x,t) \to v(x,t)$, що задовольняє систему (8), (9), є ліпшицевою за t зі сталою

$$L_2^v = \max\Big(2QR + B_2, B_2 + QR + Q_2\ell + Q_3 L_2^u\Big)e^{Q_4\ell}. \tag{31}$$

Доведення. Нехай $u \in E^u$ і пара (v,s) задовольняє систему

$$\begin{cases} v = \mathfrak{B}\{u,v,s\}, \\ s = \mathfrak{C}\{u,v,s\}. \end{cases}$$

Для кожного фіксованого $j_0 \in \{1,\dots,n\}$ і $j \in J_{j_0}$ та $t^1, t^2 \in [0,T]$ розглянемо

$$| v_j(x,t^1) - v_j(x,t^2) | \leq B_2 \mid t^1 - t^2 \mid + \Big| \int\limits_{s_j(t^1)}^{x} q_j(\xi, u(\xi,t^1), v(\xi,t^1))d\xi -$$

$$- \int\limits_{s_j(t^2)}^{x} q_j(\xi, u(\xi,t^2), v(\xi,t^2))d\xi \Big|.$$

Нехай $s_j(t^1) \leq x \leq s_j(t^2)$. Тоді

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

$$\Big| \int_{s_j(t^1)}^{x} q_j(\xi, u(\xi,t^1), v(\xi,t^1))d\xi - \int_{s_j(t^2)}^{x} q_j(\xi, u(\xi,t^2), v(\xi,t^2))d\xi \Big| \le$$

$$\le \int_{s_j(t^1)}^{s_j(t^2)} |q_j(\xi, u(\xi,t^1), v(\xi,t^1)) \mid d\xi + \int_{s_j(t^1)}^{s_j(t^2)} |q_j(\xi, u(\xi,t^2), v(\xi,t^2)) \mid d\xi \le$$

$$\le 2Q \mid s_j(t^2) - s_j(t^1) \mid \le 2QR \mid t^2 - t^1 \mid . \tag{32}$$

Якщо ж $s_j(t^1) \le s_j(t^2) \le x$, то

$$\Big| \int_{s_j(t^1)}^{x} q_j(\xi, u(\xi,t^1), v(\xi,t^1))d\xi - \int_{s_j(t^2)}^{x} q_j(\xi, u(\xi,t^2), v(\xi,t^2))d\xi \Big| \le$$

$$\le \left| \int_{s_j(t^1)}^{s_j(t^2)} \mid q_j(\xi, u(\xi,t^1), v(\xi,t^1)) \mid d\xi \right| + \int_{s_j(t^2)}^{x} \mid q_j(\xi, u(\xi,t^1), v(\xi,t^1)) -$$

$$-q_j(\xi, u(\xi,t^1), v(\xi,t^1)) \mid d\xi \le QR \mid t^2 - t^1 \mid + \int_{s(t^2)}^{x} (Q_2 \mid t^2 - t^1 \mid + Q_3 L_2^u \mid t^2 - t^1 \mid +$$

$$+Q_4 \mid v(\xi,t^2) - v(\xi,t^1) \mid \Big) d\xi \le (QR + Q_2\ell + Q_3 L_2^u) \mid t^2 - t^1 \mid +$$

$$+\int_0^x Q_4 \max_{\xi, j \in J_{j0}} \mid v_j(\xi,t^2) - v_j(\xi,t^1) \mid d\xi.$$

Отже,

$$\max_{x, j \in J_{j0}} v_j(x,t^1) - v_j(x,t^2) \le (B_2 + QR + Q_2\ell + Q_3 L_2^u) \mid t^2 - t^1 \mid +$$

$$+\int_0^x Q_4 \max_{\xi, j, J_{j0}} \mid v_j(\xi,t^2) - v_j(\xi,t^1) \mid d\xi.$$

З цього на підставі леми Гронуолла–Белмана та (32) одержимо (31). Важливий частинний випадок.

Наслідок 2. Нехай $Q_3 = 0$. Тоді з (31) одержимо, що стала Ліпшиця L_2^v не залежить від L_2^u.

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

Список використаної літератури

1. *Nicoletti O.* Sulle condizioni iniziali che determiniano gli integrali della equazioni differenziali ordinare / O. Nicoletti // Atti della R. Acc. Sc. – Torino. – 1897-1898. – Vol. 33. – P. 746–759.
2. *Кигурадзе И.Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Т. Кигурадзе. – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1975.
3. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными / Б. И. Пташник. – К. : Наук. думка, 1984.
4. *Кирилич В. М.* Обобщенная непрерывная разрешимость задачи с неизвестными границами для сингулярных гиперболических систем квазилинейных уравнений / В. М. Кирилич, А. М. Филимонов // Матем. студії. – 2008. – Т. 30. – № 1. – С. 42–60.
5. *Кирилич В.* Локальна гладка розв'язність задачі з вільними межами для сингулярних гіперболічних систем квазілінійних рівнянь / Володимир Кирилич, Андрій Філімонов // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2008. – Вип. 68. – С. 115–151.
6. *Кирилич В.* Глобальна гладка розв'язність гіперболічної квазілінійної задачі Валле-Пуссена з вільними межами / Володимир Кирилич, Андрій Філімонов // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2008. – Вип. 69. – С. 38–65.
7. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Г. Петровский. – М. : МГУ, 1984.

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ К ЗАДАЧЕ НИКОЛЕТТИ С НЕИЗВЕСТНЫМИ ВНУТРЕННИМИ ГРАНИЦАМИ

Владимир КИРИЛИЧ[1], Андрей ФИЛИМОНОВ[2]

[1]*Львовский национальный университет имени Ивана Франко, ул. Университетская, 1 79000 Львов, Украина*
[2]*Московский государственный университет путей сообщения, ул. Образцова, 15, 127994 Москва, Россия*

Доказано существование и единственность липшицевого решения некоторого варианта задачи Николетти.

Ключевые слова: задача Николетти, неизвестные грани, гиперболическая система квазилинейных уравнений.

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

SOME REMARKS FOR FREE BOUNDARY NICOLETTI'S PROBLEM

Volodymyr KYRYLYCH[1], Andrij FILIMONOV[2]

[1]*Ivan Franko National University of Lviv,*
Universytetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine
[2]*Moskov State University of Railway Engineering,*
Obrazcova Str., 15 127994 Moskov, Russia

The existence and uniqueness of Lipschitz solution of a variant of Nicoletti's problem are proved. We obtained some results which may be applied to hyperbolic system of quasi-linear partial differential equations.
Key words: Nicoletti's problem, unknown boundaries, hyperbolic system of quasi-linear partial differential equations.

Стаття надійшла до редколегії 20.01.12
Прийнята до друку 31.05.12