

УДК 539.3

ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН ПЛАСТИНИ З РОЗМІЩЕНИМИ УЗДОВЖ КОЛА ТЕПЛОПРОНИКНИМИ ТРІЩИНАМИ, БЕРЕГИ ЯКИХ ГЛАДКО КОНТАКТУЮТЬ УЗДОВЖ УСІЄЇ ДОВЖИНИ

Віктор ОПАНАСОВИЧ¹, Наталія БАССА²

¹*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна*

²*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 36 79060 Львів, Україна*

Досліджено термопружний стан ізотропної пластини з теплопроникними тріщинами вздовж дуг кола, береги яких гладко контактують уздовж усієї своєї довжини під дією рівномірно розподілених напружень і сталого теплового потоку на нескінченності. Із використанням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів розв'язування задач теплопровідності та термопружності зведено до задач лінійного спряження, причому стрибок температури між берегами тріщин визначено з системи інтегро-диференціальних рівнянь з використанням методу ортогональних поліномів, а комплексний потенціал плоскої задачі термопружності знайдено в аналітичному вигляді.

Ключові слова: ізотропна пластинка, термонапружений стан, теплопроникні тріщини, гладкий контакт, комплексні потенціали, коефіцієнти інтенсивності напружень.

Вивчення термонапруженого стану тіл з криволінійними тріщинами, береги яких контактують під дією теплового та силового навантаження є однією з основних проблем механіки руйнування. Наявність в тілі концентраторів типу тріщин, на яких задано неідеальний тепловий контакт між їхніми берегами (теплопроникні тріщини) призводить до збурення заданого температурного поля та виникнення напружень. Вплив температурних факторів вносить додаткові ускладнення у математичні моделі тіл з тріщинами, але дає змогу набагато точніше досліджувати напружено-деформований стан таких тіл. Це потребує розробки нових методик дослідження термопружного стану тіл з криволінійними тріщинами та вивчення термо-механічних процесів, пов'язаних із урахуванням взаємодії берегів тріщин [3, 5, 8, 9].

Із використанням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів в [5] досліджено термопружний стан ізотропної пластини з розміщеними уздовж дуг кола теплоізолюваними тріщинами, береги яких гладко контактують по всій довжині під дією рівномірно розподілених напружень і сталого теплового потоку на нескінченності. Розв'язування задач теплопровідності та термопружності зведено до задач лінійного спряження, з розв'язку яких знайдено похідну від стрибка температури між берегами тріщин та комплексні потенціали в аналітичному вигляді.

Наша мета – дослідити термопружний стан ізотропної пластини з теплопроникними тріщинами, що розміщені уздовж дуг кола, за умови, що береги тріщин гладко контактують уздовж усієї своєї довжини під дією рівномірно розподілених напружень і сталого теплового потоку на нескінченності. Розв'язування задачі теплопровідності зведено до системи інтегродиференціальних рівнянь стосовно стрибка температури між берегами тріщин, розв'язок якої знайдено чисельно за допомогою методу ортогональних поліномів, а розв'язок задачі термопружності знайдено аналітично.

Формулювання задачі. Розглянемо безмежну ізотропну пластину з теплоізолюваними поверхнями, що містить n теплопроникних тріщин уздовж дуг кола радіуса R (рис. 1). Вважаємо, що береги тріщин зазнають повного гладкого контакту під дією на нескінченності рівномірно розподілених напружень N_1 і N_2 (для стиску $N_1 > 0$), причому напруження N_1 утворює кут γ з віссю Ox , і сталого теплового потоку інтенсивності q_∞ , який утворює кут α з віссю Ox . Виберемо декартову систему координат Oxy з початком у центрі кола, вздовж якого розміщені тріщини. Поряд з декартовою системою координат Oxy розглянемо полярну систему координат з полюсом у точці O та полярною віссю Ox . Сукупність дуг

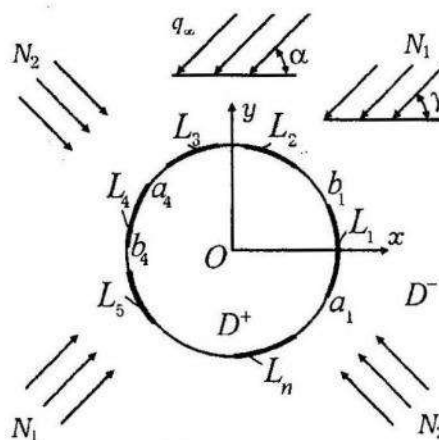


Рис. 1

$L_j = (a_j, b_j)$, уздовж яких розміщені тріщини, позначимо через $L = \bigcup_{j=1}^n L_j$,

$a_j = R e^{i\phi_{1j}}$, $b_j = R e^{i\phi_{2j}}$, область у середині кола – через D^+ , зовні – через D^- .

Згідно з формулюванням задачі отримаємо такі крайові умови:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^+ - \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^- = 0, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^+ + \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^- = 0 \text{ на } L, \quad (1)$$

$$\lambda \left[\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^- + \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^+ \right] - 2\lambda_j (T^- - T^+) = 0 \text{ на } L_j, \quad (2)$$

$$\sigma_{rr}^+ = \sigma_{rr}^- = \sigma_{rr}, \quad \sigma_{r\theta}^+ = \sigma_{r\theta}^- = 0, \quad u_r^+ - u_r^- = 0 \text{ на } L, \quad (3)$$

де T – температура пластини; λ_j – коефіцієнт теплопроникності j -ї тріщини; λ – коефіцієнт теплопровідності; σ_{rr} , $\sigma_{r\theta}$ і u_r , u_θ – компоненти тензора напружень та проекції вектора переміщення в полярній системі

координат; значками «+», «-» позначено граничні значення відповідних величин за прямування точки до лінії L_j із області D^+ і D^- , відповідно.

Побудова розв'язку задачі теплопровідності. Температуру тіла $T(x, y)$ у безмежній області з тріщинами, коли задано сталий тепловий потік на нескінченності, можемо описати так:

$$T(x, y) = 2\operatorname{Re}(F(z)), \quad F(z) = \bar{a}_0 z + C + \Psi_0(z), \quad z = x + iy = re^{i\vartheta}, \quad (4)$$

де $F(z)$ – комплексний потенціал температурного поля; $a_0 = (2\lambda)^{-1} q_\infty e^{i\varphi}$; C – невідома комплексна стала; r і ϑ – полярні координати точки z .

Згідно з [7] для функції $\Psi_0(z)$ існують розвинення

$$\Psi_0(z) = \begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots, & z \rightarrow 0, \\ b_*/z + \dots, & |z| \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (5)$$

де b_* , α_k ($k = \overline{0, \infty}$) – невідомі комплексні сталі.

Введемо функцію

$$V(z) = z\Psi'_0(z)/R. \quad (6)$$

Тоді з (4) і (6) отримаємо

$$r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{i} \frac{\partial T}{\partial \vartheta} = 2(\bar{a}_0 z + RV(z)). \quad (7)$$

На підставі залежності (7) крайові умови (1)–(2) подамо так:

$$V^+(t) - V^-(t) = \frac{t}{R} \gamma'(t), \quad t \in L, \quad (8)$$

$$\operatorname{Re} \left(2\bar{a}_0 \frac{t}{R} + V^+(t) + V^-(t) \right) + \frac{2\lambda_j}{\lambda} \gamma(t) = 0, \quad t \in L_j, \quad j = \overline{1, n}. \quad (9)$$

Тут $\gamma(t) = (T^+ - T^-)/2$ – невідома шукана функція.

Розв'язавши задачу лінійного спряження (8), отримаємо

$$V(z) = -\frac{iz}{2\pi R} \int_L \frac{\gamma'(t_0) dt_0}{t_0 - z}, \quad t_0 = Re^{iu}. \quad (10)$$

Підставимо (10) у (9), після відповідних перетворень приходимо до інтегро-диференціального рівняння для визначення невідомого стрибка температури на берегах j -ї тріщини

$$\frac{2R\lambda_j}{\lambda} \gamma_j(t_j) - \frac{it_j}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{L_k} \frac{\gamma'(t_{0k}) dt_{0k}}{t_{0k} - t_j} = f(t_j), \quad t_{0j} = Re^{i\vartheta_j}, \quad t_j \in L_j, \quad (11)$$

де $f(t_j) = -2\operatorname{Re}(\bar{a}_0 t_j)$.

У рівнянні (11) врахуємо заміну змінних

$$t_j = -Re^{i\tilde{\vartheta}_j} \frac{s_j - i\beta_j}{s_j + i\beta_j}, \quad \beta_j = ctg \frac{\tilde{a}_j}{2}, \quad s_j = \beta_j tg \frac{\tilde{\vartheta}_j - \tilde{b}_j}{2}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (12)$$

тоді воно набуде вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\beta_j \delta_j \tilde{\gamma}_j(s_j)}{s_j^2 + \beta_j^2} - \int_{-1}^1 \frac{\tilde{\gamma}'_j(s_{0j}) ds_{0j}}{s_{0j} - s_j} - \frac{\beta_j}{s_j^2 + \beta_j^2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \int_{-1}^1 \tilde{\gamma}'_k(s_{0k}) H_{jk}(s_{0k}, s_j) ds_{0k} = \\ = -\pi f(s_j), \quad |s_j| < 1, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\text{де } \tilde{a}_j = \frac{\phi_{2j} - \phi_{1j}}{2}, \quad \tilde{b}_j = \frac{\phi_{2j} + \phi_{1j}}{2}, \quad \delta_j = \frac{4\pi R\lambda_j}{\lambda}, \quad \tilde{\gamma}_j(s_j) = \gamma_j \left(-Re^{i\tilde{\vartheta}_j} \frac{s_j - i\beta_j}{s_j + i\beta_j} \right),$$

$$H_{jk}(s_{0k}, s_j) = \operatorname{Re} \left(e^{i \frac{\tilde{b}_k - \tilde{b}_j}{2}} (s_j + i\beta_j)(s_{0k} - i\beta_k) \right) / \operatorname{Im} \left(e^{i \frac{\tilde{b}_k - \tilde{b}_j}{2}} (s_j + i\beta_j)(s_{0k} - i\beta_k) \right),$$

$$f(s_j) = -\frac{2\beta_j R q_\infty}{\lambda(s_j^2 + \beta_j^2)^2} \left((s_j^2 - \beta_j^2) \cos(\tilde{b}_j - \alpha) + 2\beta_j s_j \sin(\tilde{b}_j - \alpha) \right).$$

Розв'язок рівняння (13) будемо шукати у вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}'_j(s_j) = \frac{1}{\sqrt{1-s_j^2}} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{X}_{jm} T_m(s_j), \quad \text{тоді} \\ \tilde{\gamma}_j(s_j) = -\sqrt{1-s_j^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \tilde{X}_{jm} U_{m-1}(s_j), \end{aligned} \quad (14)$$

де $T_k(s)$, $U_{k-1}(s)$ – поліноми Чебишова відповідно першого і другого роду [1], $\tilde{X}_{jm}$ – невідомі коефіцієнти.

Підставимо (14) у (13) та врахувавши відомі інтеграли [1], отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\beta_j \delta_j}{s_j^2 + \beta_j^2} \sqrt{1-s_j^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \tilde{X}_{jm} U_{m-1}(s_j) + \pi \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{X}_{jm} U_{m-1}(s_j) + \\ + \frac{\beta_j}{s_j^2 + \beta_j^2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{X}_{km} \int_{-1}^1 \frac{T_m(s_{0k})}{\sqrt{1-s_{0k}^2}} H_{jk}(s_{0k}, s_j) ds_{0k} = \pi f(s_j). \end{aligned} \quad (15)$$

Помножимо обидві частини (15) на $U_{p-1}(s_j)\sqrt{1-s_j^2}$ та проінтегруємо на проміжку $[-1,1]$, прийдемо до системи лінійних алгебричних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів $\tilde{X}_{km}$

$$\tilde{X}_{jp} + \delta_j \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{X}_{jm} W_{jmp} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{X}_{km} Q_{kmp} = F_p, \quad j = \overline{1, n}, \quad p = 1, 2, \dots, \quad (16)$$

де

$$W_{jmp} = \frac{2\beta_j}{\pi^2} \frac{1}{m} \int_{-1}^1 \frac{(1-s_j^2)U_{m-1}(s_j)U_{p-1}(s_j)ds_j}{s_j^2 + \beta_j^2},$$

$$F_p = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 f(s_j)\sqrt{1-s_j^2}U_{p-1}(s_j)ds_j,$$

$$Q_{kmp} = \frac{2\beta_j}{\pi^2} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-s_j^2}}{s_j^2 + \beta_j^2} U_{p-1}(s_j) \left(\int_{-1}^1 \frac{T_m(s_{0k})}{\sqrt{1-s_{0k}^2}} H_{jk}(s_{0k}, s_j) ds_{0k} \right) ds_j.$$

Врахувавши залежність (10), на підставі позначення (6) знайдемо вираз для комплексного потенціалу $\Psi_0(z)$

$$\Psi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\gamma(t_0)dt_0}{t_0 - z}. \quad (17)$$

Якщо врахувати розвинення для функції $1/(t-z)$ при $z \rightarrow \infty$, то з (17) знайдемо сталі розвинення (5)

$$\alpha_0 = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \beta_k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \tilde{X}_{km} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-s_{0k}^2} U_{m-1}(s_{0k})}{s_{0k}^2 + \beta_k^2} ds_{0k},$$

$$b_* = -\frac{R}{\pi} \sum_{k=1}^n e^{i\bar{b}_k} \beta_k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \tilde{X}_{km} \int_{-1}^1 \sqrt{1-s_{0k}^2} U_{m-1}(s_{0k}) \left(\frac{1}{s_{0k}^2 + \beta_k^2} - \frac{2\beta_k^2 + 2i\beta_k s_{0k}}{(s_{0k}^2 + \beta_k^2)^2} \right) ds_{0k}. \quad (18)$$

Комплексний потенціал температурного поля $F(z)$ (4) запишемо у вигляді

$$F(z) = \bar{a}_0 z + C + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\gamma(t_0)dt_0}{t_0 - z}. \quad (19)$$

Побудова розв'язку задачі термопружності. Введемо до розгляду комплексні потенціали Колосова - Мусхелішвілі $\Phi(z)$ та $\Psi(z)$ [4]. Тоді для визначення термопружного стану пластини скористаємось співвідношеннями [7]

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\vartheta\vartheta} = 4 \operatorname{Re} \Phi(z), \quad z = re^{i\vartheta},$$

$$\sigma_{rr} + i\sigma_{r\vartheta} = \Phi(z) - \frac{R^2}{r^2} \Omega\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) + \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \left(\overline{\Phi(z)} - \bar{z} \overline{\Phi'(z)}\right), \quad (20)$$

$$2\mu \left(u_r + iu_{\vartheta} + \frac{\partial^2 (u_r + iu_{\vartheta})}{\partial \vartheta^2} \right) = r \left(\kappa \Phi(z) + \frac{R^2}{r^2} \Omega\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) - \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \left[\overline{\Phi(z)} - \bar{z} \overline{\Phi'(z)}\right] \right) - \\ - rz \left(\kappa \Phi'(z) + \frac{R^4}{r^4} \Omega'\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) - \frac{\bar{z}^2}{z} \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \overline{\Phi''(z)} \right) + r\beta (F(z) - zF'(z)), \quad (21)$$

де $\Omega(z) = -\bar{\Phi}\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z} \bar{\Phi}'\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z^2} \bar{\Psi}\left(\frac{R^2}{z}\right)$; $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ - модуль зсуву;

E - модуль Юнга; ν - коефіцієнт Пуассона; $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$;

$\beta = 2\alpha_t E/(1+\nu)$, α_t - коефіцієнт лінійного температурного розширення.

Для функцій $\Phi(z)$ і $\Omega(z)$ в околі безмежно віддаленої точки та нуля існують розвинення [7]

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Gamma + \frac{\bar{b}_{\infty}}{z} + o\left(\frac{1}{z^2}\right), & |z| \rightarrow \infty, \\ A_1 + \dots, & z \rightarrow 0, \end{cases} \quad \Omega(z) = \begin{cases} -\bar{A}_1 + o\left(\frac{1}{z^2}\right), & |z| \rightarrow \infty, \\ \frac{\bar{\Gamma}' R^2}{z^2} + \frac{\bar{b}_{\infty}}{z} + o(1), & z \rightarrow 0, \end{cases} \quad (22)$$

де $\bar{b}_{\infty} = -2\beta_0 b_*$, $\beta_0 = \frac{\beta}{2(1+\kappa)}$; $\Gamma = -\frac{1}{4}(N_1 + N_2)$; $\Gamma' = \frac{1}{2}(N_1 - N_2)e^{-2i\gamma}$.

Першу та другу контактні крайові умови (2) подамо у вигляді

$$(\sigma_{rr} + i\sigma_{r\vartheta})^+ - (\sigma_{rr} + i\sigma_{r\vartheta})^- = 0 \quad \text{на } L, \quad (23)$$

$$(\sigma_{rr} + i\sigma_{r\vartheta})^+ + (\sigma_{rr} + i\sigma_{r\vartheta})^- = 2\sigma_{rr} \quad \text{на } L. \quad (24)$$

Враховуючи (20) з крайової умови (23), отримаємо

$$(\Phi(t) + \Omega(t))^+ - (\Phi(t) + \Omega(t))^- = 0, \quad t \in L. \quad (25)$$

На підставі розв'язку задачі лінійного спряження (25) знайдемо

$$\Omega(z) = -\Phi(z) + \Gamma - \bar{A}_1 + \frac{\bar{\Gamma}' R^2}{z^2} - \frac{2\beta_0 b_*}{z}. \quad (26)$$

Врахуємо (26), (20) і (21), тоді на підставі (24) і останньої крайової умови (2) отримаємо

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = \sigma_{rr} + \Gamma - \bar{A}_1 + R^2 \bar{\Gamma}' t^{-2} - 2\beta_0 b_* t^{-1}, \quad t \in L, \quad (27)$$

$$\operatorname{Re} \left\{ \Phi^+(t) - \Phi^-(t) + 2\beta_0 (F^+(t) - F^-(t)) - t(\Phi'^+(t) - \Phi'^-(t)) \right\} = 0, \quad t \in L. \quad (28)$$

Введемо функцію

$$D(z) = \Phi(z) - \bar{\Phi}\left(\frac{R^2}{z}\right) + 2\beta_0 \left(F(z) - \bar{F}\left(\frac{R^2}{z}\right) \right) - z\Phi'(z) + \frac{R^2}{z} \bar{\Phi}'\left(\frac{R^2}{z}\right). \quad (29)$$

Як видно з (28), функція (29) задовольняє задачу лінійного спряження $D^+(t) - D^-(t) = 0$, $t \in L$, розв'язавши яку, знайдемо

$$D(z) = \Gamma - \bar{A}_1 + 2\beta_0 (\bar{a}_0 z + C - a_0 R^2 z^{-1} - \bar{C} - \bar{a}_0). \quad (30)$$

На підставі (29) і (30) можемо записати

$$\begin{aligned} i \operatorname{Im} \left[\Phi^+(t) + \Phi^-(t) + 2\beta_0 (F^+(t) + F^-(t)) - t(\Phi'^+(t) + \Phi'^-(t)) \right] = \\ = \Gamma - \bar{A}_1 + 2\beta_0 (\bar{a}_0 t + C - a_0 R^2 t^{-1} - \bar{C} - \bar{a}_0), \quad t \in L. \end{aligned} \quad (31)$$

Врахувавши (27) та (19), із залежності (31) отримаємо диференціальне рівняння для визначення контактних напружень σ_{rr} між берегами тріщин

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \vartheta} = \frac{3}{2} i \left(\frac{R^2 \bar{\Gamma}'}{t^2} - \frac{\Gamma' t^2}{R^2} \right) - 2\beta_0 i \left(\frac{b_*}{t} - \frac{\bar{b}_* t}{R^2} \right) - 4\beta_0 \operatorname{Im}(\Psi_0(t)), \quad t \in L, \quad (32)$$

$$\operatorname{Re} A_1 = \Gamma - 2\beta_0 \alpha_0. \quad (33)$$

Зінтегрувавши (32) за ϑ , знайдемо

$$\sigma_{rr} = -\frac{3}{4} \left(\frac{R^2 \bar{\Gamma}'}{t^2} + \frac{\Gamma' t^2}{R^2} \right) + 2\beta_0 \left(\frac{b_*}{t} + \frac{\bar{b}_* t}{R^2} \right) - B_2(\vartheta) + C_1, \quad (34)$$

де $B_2(\vartheta) = 4\beta_0 \operatorname{Im} \left(\int \Psi_0(R e^{i\vartheta}) d\vartheta \right)$, C_1 – невідома дійсна стала.

Підставивши (34) у (27) та розв'язавши отриману задачу лінійного спряження, одержимо

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i X_n(z)} \int_L \frac{(\tilde{f}(t_0) - B_2(u)) X_n^+(t_0) dt_0}{t_0 - z} + \frac{\tilde{P}_n(z)}{X_n(z)}, \quad t_0 = R e^{iu}, \quad (35)$$

$$\text{де } \tilde{f}(z) = \frac{1}{4} \left(\frac{R^2 \bar{\Gamma}'}{z^2} - \frac{3\Gamma' z^2}{R^2} \right) + 2\beta_0 \frac{\bar{b}_* t}{R^2} + C_2, \quad C_2 = C_1 + \Gamma - \bar{A}_1; \quad \tilde{P}_n(z) = \sum_{j=0}^n \tilde{d}_j z^j,$$

$$\tilde{d}_j - \text{невідомі коефіцієнти}; \quad X_n(z) = \prod_{j=1}^n (z - a_j)^{1/2} (z - b_j)^{1/2}.$$

Для функцій $X_n(z)$ та $X_n^{-1}(z)$ існують розвинення

$$X_n(z) = \begin{cases} \eta_0 + \eta_1 z + \eta_2 z^2 + \dots, & z \rightarrow 0, \\ z^n + \gamma_1 z^{n-1} + \gamma_2 z^{n-2} + \dots + \gamma_n + \frac{\gamma_{-1}}{z} + \frac{\gamma_{-2}}{z^2} + \dots, & |z| \rightarrow \infty, \end{cases}$$

$$\frac{1}{X_n(z)} = \begin{cases} \eta'_0 + \eta'_1 z + \eta'_2 z^2 + \dots, & z \rightarrow 0, \\ \frac{1}{z^n} + \frac{\gamma'_1}{z^{n+1}} + \frac{\gamma'_2}{z^{n+2}} + \dots, & |z| \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (36)$$

$$\text{де } \eta_0 = -\prod_{j=1}^n (a_j b_j)^{1/2}; \quad \eta'_0 = \frac{1}{\eta_0}; \quad \eta_1 = -\frac{\eta_0}{2} \sum_{j=1}^n \frac{a_j + b_j}{a_j b_j}; \quad \eta'_1 = \frac{\eta'_0}{2} \sum_{j=1}^n \frac{a_j + b_j}{a_j b_j};$$

$$\gamma'_1 = -\gamma_1; \quad \gamma_1 = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (a_j + b_j); \quad \gamma_2 = -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^n (a_j^2 + b_j^2) + \frac{1}{2} \gamma_1'^2;$$

$$\gamma'_2 = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^n (a_j^2 + b_j^2) + \frac{1}{2} \gamma_1'^2.$$

Обчисливши інтеграл типу Коші [4] та врахувавши розвинення (22) і (36), функцію $\Phi(z)$ (35) запишемо у вигляді

$$\Phi(z) = \frac{1}{2} \tilde{f}(z) + \frac{\Phi_0(z)}{X_n(z)}, \quad (37)$$

$$\text{де } \Phi_0(z) = \sum_{j=-2}^{n+2} \tilde{G}_j z^j - q_n(z), \quad q_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{B_2(u) X_n^+(t_0) dt_0}{t_0 - z}, \quad \tilde{G}_{n+2} = \frac{3\Gamma'}{8R^2},$$

$$\tilde{G}_{n+1} = \tilde{G}_{n+2} \gamma_1 - \beta_0 \bar{b}_* / R^2, \quad \tilde{G}_n = \tilde{d}_n + \tilde{G}_{n+2} \gamma_2 + (\tilde{G}_{n+1} - \tilde{G}_{n+2} \gamma_1) \gamma_1 - 1/2 C_2,$$

$$\tilde{G}_{n-1} = \tilde{d}_{n-1} + \tilde{G}_{n+2} \gamma_3 + (\tilde{G}_{n+1} - \tilde{G}_{n+2} \gamma_1) \gamma_2 - 1/2 C_2 \gamma_1, \quad \tilde{d}_n = \Gamma,$$

$$\tilde{d}_{n-1} = -2\beta_0 b_* - \Gamma \gamma'_1,$$

$$\tilde{G}_j = \tilde{d}_j + \tilde{G}_{n+2} \gamma_{n+2-j} + (\tilde{G}_{n+1} - \tilde{G}_{n+2} \gamma_1) \gamma_{n+1-j} - 1/2 C_2 \gamma_{n-j} - 1/8 R^2 \bar{\Gamma}' \gamma_{n-2-j},$$

$$j = \overline{2, n-2},$$

$$\tilde{G}_1 = \tilde{d}_1 + \tilde{G}_{n+2}\gamma_{-1} + (\tilde{G}_{n+1} - \tilde{G}_{n+2}\gamma_1)\gamma_n - 1/2 C_2 \gamma_{n-1} - 1/8 R^2 \bar{\Gamma}' \gamma_{n-3},$$

$$\tilde{G}_{-1} = -1/8 R^2 \bar{\Gamma}' \eta_1,$$

$$\tilde{G}_0 = \tilde{d}_0 + \tilde{G}_{n+2}\gamma_{-2} + (\tilde{G}_{n+1} - \tilde{G}_{n+2}\gamma_1)\gamma_{-1} - 1/2 C_2 \gamma_n - 1/8 R^2 \bar{\Gamma}' \gamma_{n-2},$$

$$\tilde{G}_{-2} = -1/8 R^2 \bar{\Gamma}' \eta_0.$$

З умов однозначності переміщень за обходу контурів тріщин отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів $\tilde{d}_0, \tilde{d}_1, \dots, \tilde{d}_{n-2}$

$$\sum_{k=-2}^{n+2} \tilde{G}_k a_{kj} = F_j, \quad j = \overline{1, n-1},$$

$$\text{де } a_{kj} = \int_{L_j} \frac{t^k dt}{X_n^+(t)}, \quad F_j = \int_{L_j} \left(\frac{q_n(t_0)}{X_n^+(t_0)} - \beta_0 \gamma(t_0) \right) dt_0.$$

Врахувавши вираз для функції $\Phi(z)$ (37) з умови $\Phi(0) = A_1$, отримаємо систему двох рівнянь для визначення сталої C_1 та $\text{Im } A_1$

$$\begin{aligned} C_1 &= -2\beta_0 \alpha_0 + \text{Re} \left[\frac{2(\text{Re } A_1 - Q_0) + i \text{Im } A_1 (1 + \gamma_n \eta'_0)}{1 - \gamma_n \eta'_0} \right], \\ \text{Im } A_1 &= \text{Im} \left[\frac{(C_1 + 2\beta_0 \alpha_0)(1 - \gamma_n \eta'_0) - 2(\text{Re } A_1 - Q_0)}{1 + \gamma_n \eta'_0} \right], \end{aligned} \quad (38)$$

де

$$Q_0 = [\tilde{d}_0 - \beta_0 \bar{b}_*/R^2 \gamma_{-1} + 3\Gamma' \gamma_{-2}/(8R^2) - q_n(0)]\eta'_0 - R^2 \bar{\Gamma}' (\eta'_0 \gamma_{n-2} + \eta_1 \eta'_1 + \eta_0 \eta'_2)/8.$$

Підставимо (38) у (34), внаслідок чого отримаємо вираз для визначення контактних напружень σ_{rr} між берегами тріщин, який не наводимо.

Коефіцієнти інтенсивності напружень визначимо за формулою, яка подана в [5].

У часткових випадках задачі отримаємо результати праць [2, 3, 5, 6].

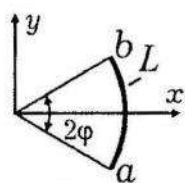


Рис. 2

Числовий аналіз задачі та висновки. Розглянемо частковий випадок задачі, коли пластина ослаблена однією теплопроникною тріщиною, яка характеризується центральним кутом 2ϕ (рис. 2).

Інтегро-диференціальне рівняння для визначення невідомого стрибка температури для однієї теплопроникної тріщини запишемо у вигляді

$$\frac{2R\lambda_1}{\lambda} \gamma(t) - \frac{it}{\pi} \int_L \frac{\gamma'(t_0) dt_0}{t_0 - t} = -2 \operatorname{Re}(\bar{a}_0 t), \quad t \in L. \quad (39)$$

Заміна змінних (11) для однієї тріщини (рис. 2) набуде вигляду

$$t = -R \frac{s - i\beta_1}{s + i\beta_1}, \quad \beta_1 = \operatorname{ctg} \frac{\phi}{2}, \quad s = \beta_1 \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2},$$

причому рівняння (39) набуде вигляду [3]

$$\frac{\beta_1 \delta_1}{s^2 + \beta_1^2} \tilde{\gamma}(s) - \int_{-1}^1 \frac{\tilde{\gamma}'(s_0) ds_0}{s_0 - s} = -\pi f(s), \quad s \in [-1; 1]. \quad (40)$$

Тут $\tilde{\gamma}(s) = \gamma\left(-R \frac{s - i\beta_1}{s + i\beta_1}\right)$, $f(s) = -\frac{2\beta_1 R q_\infty}{\lambda(s^2 + \beta_1^2)^2} \left((s^2 - \beta_1^2) \cos \alpha - 2\beta_1 s \sin \alpha\right)$.

Розв'язок рівняння (40) будемо шукати у вигляді

$$\tilde{\gamma}'(s) = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{X}_k T_k(s), \quad \tilde{\gamma}(s) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \tilde{X}_k \sqrt{1-s^2} U_{k-1}(s), \quad (41)$$

де $\tilde{X}_k$ – невідомі коефіцієнти.

Підставивши (41) у (40), після перетворень отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів $\tilde{X}_j$

$$\tilde{X}_{2j} + \delta_1 \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{X}_{2k} b_{2j2k} = f_{2j}, \quad \tilde{X}_{2j-1} + \delta_1 \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{X}_{2k-1} b_{(2j-1)(2k-1)} = f_{2j-1}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

де $a = -\operatorname{ctg}^2 \frac{\phi}{4}$, $s_1 = \operatorname{tg} \frac{\phi}{4}$,

$$b_{pk} = -\frac{16}{\pi^2} p s_1 \sum_{m=0}^{\infty} a^{-m} \frac{2m+1}{\left((2m+1)^2 - p^2 - k^2\right)^2 - 4p^2 k^2},$$

$$f_p = -\frac{4Rq_\infty}{\lambda} p \cos \frac{\phi}{2} \begin{cases} a^{-j} \sin \alpha, & p = 2j, \\ a^{-j} s_1^{-1} \cos \alpha, & p = 2j-1. \end{cases}$$

Коефіцієнти інтенсивності напружень $K_j^\pm$ та контактні напруження (34) знайдемо за формулами

$$K_2^\pm = \frac{4\beta_0 R^2 q_\infty}{\lambda \sqrt{\sin \phi}} \cos \frac{\phi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(X_{2k} \sin \frac{\phi}{2} \cos^2 \frac{\phi}{2} \mp s_1^{-1} X_{2k-1} \left(\sin^2 \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2} - \frac{1}{2k-1} \right) \right) a^{-k} +$$

$$+ \frac{(N_1 - N_2)}{4} \left[\sin 2\gamma \left(\cos \phi \cos \frac{\phi}{2} + \cos \frac{3\phi}{2} \right) \mp \cos 2\gamma \left(\sin \frac{3\phi}{2} + \cos \phi \sin \frac{\phi}{2} \right) \right], \quad K_1^\pm = 0,$$

$$\sigma_{rr} = \frac{2\beta_0 R q_\infty}{\lambda} \left\{ - \sum_{k=1}^{\infty} X_{2k} a^{-k} \left(\frac{1}{2k} \vartheta + 2 \sin \vartheta \cos \frac{\phi}{2} \right) + 2s_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} X_k P_k \left(\beta_1 \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \right) - \right.$$

$$\left. - s_1^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} X_{2k-1} a^{-k} \left(2 \cos \frac{\phi}{2} \cos \vartheta + \sin^{-2} \frac{\phi}{2} \left[\frac{1}{2k-1} \left(1 + \sin^2 \frac{\phi}{2} \right) - \cos \frac{\phi}{2} \left(1 + \frac{\sin^2 \phi}{4} \right) \right] \right) \right\} -$$

$$- \frac{N_1 + N_2}{2} - \frac{N_1 - N_2}{8} \left(6 \cos 2(\vartheta - \gamma) + (1 - 3 \cos \phi) \cos^2 \frac{\phi}{2} \cos 2\gamma \right),$$

де знак "+" відповідає вершині b , а знак "-" - вершині a ,

$$P_k(s) = \sum_{m=0}^{\infty} a^{-m} \left[\frac{T_{2m+k+1}(s)}{2m+k+1} + \rho_k \frac{T_{2m-k+1}(s)}{2m-k+1} + \sin^{-2} \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2} \left(a^{-(m+k)} + a^{-(m-k+1)} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{a^{-(m+k)}}{m+k} + \frac{\tilde{\rho}_k a^{-(m-k+1)}}{m-k+1} \right) \right], \quad \rho_k = \begin{cases} 1, & k \neq 2m+1, \\ 0, & k = 2m+1, \end{cases} \quad \tilde{\rho}_k = \begin{cases} 1, & k \neq m+1, \\ 0, & k = m+1. \end{cases}$$

Дослідимо вплив теплового потоку, а також сумісну дію теплового та силового навантажень на умови повного гладкого контакту берегів теплопроникної тріщини.

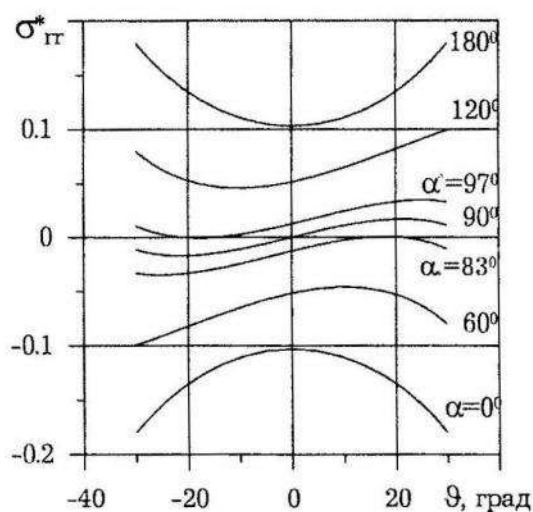


Рис. 3

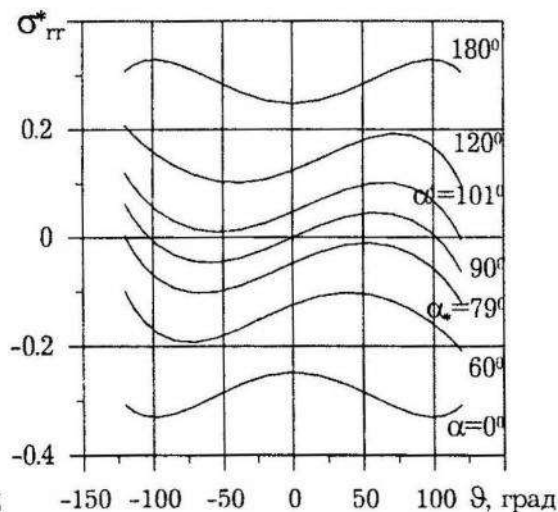


Рис. 4

За відсутності силового навантаження на рис. 3 для кута розхилу тріщини $\phi = 30^\circ$, а на рис. 4 - для $\phi = 120^\circ$ наведено розподіл зведених

контактних напружень $\sigma_{rr}^* = \sigma_{rr} \lambda / (\beta_0 R q_\infty)$ між берегами теплопроникної тріщини ($\lambda_1/\lambda = 2$) за різних значень кута нахилу теплового потоку α .

Як засвідчив числовий аналіз для кожного кута розхилу тріщини ϕ існують граничні кути нахилу теплового потоку $\alpha_* < \pi/2$ ($\alpha^* > \pi/2$), за яких береги тріщини змикаються уздовж усієї довжини при $\alpha < \alpha_*$ ($\alpha > \alpha^*$), частково контактуватимуть при $\alpha_* < \alpha < \alpha^*$ та повністю відставатимуть, якщо $\alpha > \alpha^*$ ($\alpha < \alpha_*$), коли $q_\infty > 0$ ($q_\infty < 0$). Якщо кут α_* (α^*) та $q_\infty > 0$ ($q_\infty < 0$), якщо кут розхилу тріщини $\phi > 113^\circ$, то можна сподіватися відставання берегів тріщини в околі нижнього (верхнього) її кінця (рис. 4), а якщо $\phi < 113^\circ$ – ближче до центра тріщини (рис. 3). Отже, при $\alpha_* < \alpha < \alpha^*$ контактні напруження між берегами тріщини змінюють знак незалежно від напрямку теплового потоку q_∞ , тобто треба розглянути задачу в іншому формулюванні, враховуючи відставання берегів тріщин. Як бачимо, зведені контактні напруження зі збільшенням кута розхилу тріщини зростають за абсолютним значенням. Варто зазначити, що при $\alpha = 0$ і при $\alpha = 180^\circ$ зведені контактні напруження симетричні стосовно осі симетрії тріщини, а для кутів $\alpha < \alpha_*$ та при $\pi - \alpha > \alpha^*$ антисиметричні.

Для $\alpha = 0$ і $q_\infty > 0$ на рис. 5 наведено розподіл зведених контактних напружень між берегами теплопроникної тріщини для кута розхилу тріщини $\phi = 30^\circ$, а на рис. 6 – зведених коефіцієнтів інтенсивності напружень $K_2^{*+} = K_2^+ \lambda / (\beta_0 R^{3/2} q_\infty)$ від кута розхилу тріщини ϕ за різних значень коефіцієнта теплопроникності. Крива 1 побудована для $\lambda_1/\lambda = 0$ – тріщина теплоізована, 2 – $\lambda_1/\lambda = 0,5$, 3 – $\lambda_1/\lambda = 1$, 4 – $\lambda_1/\lambda = 2$, 5 – $\lambda_1/\lambda = 4$, 6 – $\lambda_1/\lambda = 10$ відповідно. Зауважимо, що при $\alpha = 0$ $K_2^{*+} = -K_2^{*-}$.

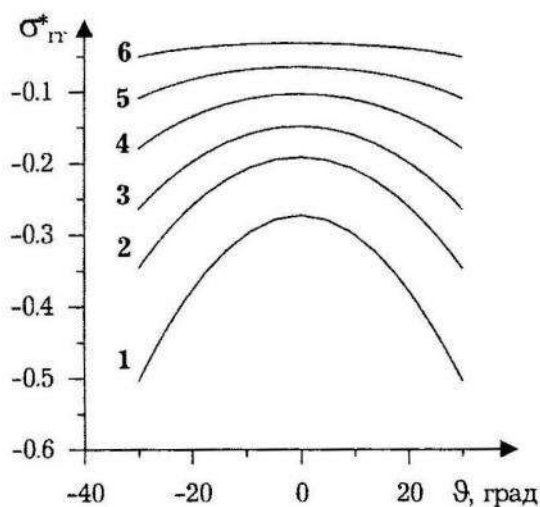


Рис. 5

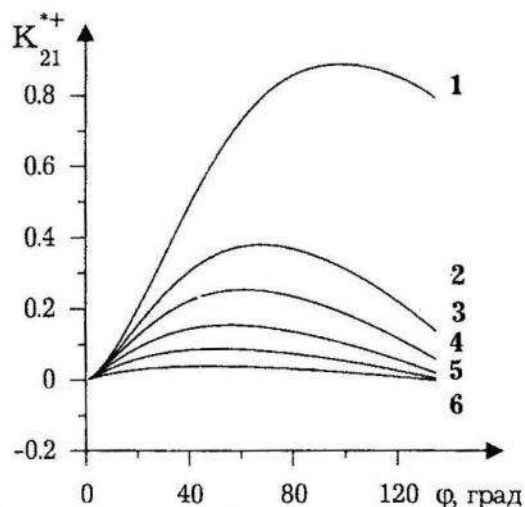


Рис. 6

З рис. 5 і 6 можна зробити висновок, що за збільшення коефіцієнта теплопровидності тріщини λ_1 , зведені контактні напруження та коефіцієнти інтенсивності напружень прямують до нуля, тобто отримаємо абсолютно провідну тріщину, яка не впливає на температурне поле пластини та її напружено-деформований стан.

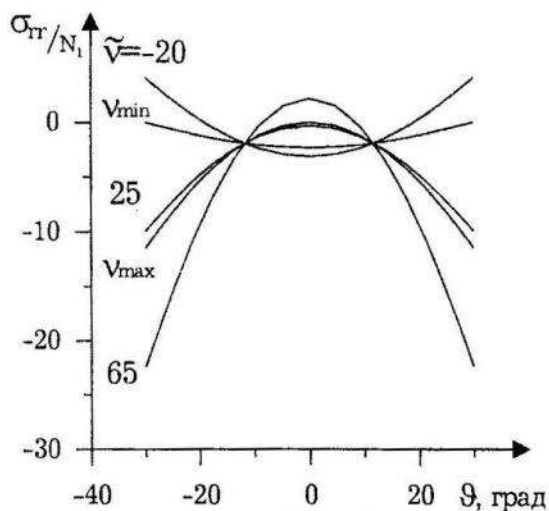


Рис. 7

На рис. 7 зображено розподіл контактних напружень уздовж берегів теплопровидної тріщини ($\lambda_1/\lambda = 2$) за сумісної дії теплового потоку та рівномірно розподілених напружень для сплаву АМг-6 з такими характеристиками:

$$E = 6.867 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2,$$

$$\alpha_t = 25 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^{\circ}\text{C},$$

$$\lambda = 26,38 \text{ кВт/(м}^{\circ}\text{C)}, \quad \text{коли}$$

$$\tilde{N} = \beta_0 R q_{\infty} / (\lambda N_1) = 8,135, \quad \phi = 30^{\circ},$$

$$\gamma = 0, \quad \alpha = 0 \quad \text{за різних значень відношення заданих напружень на}$$

нескінченності $\tilde{\nu} = N_2/N_1$.

Визначено граничні значення $\tilde{\nu}$ відношення напружень на нескінченності – $\nu_{\min} = -6,91$ і $\nu_{\max} = 29,89$, за яких контактні напруження між берегами тріщини перетворюються в нуль на кінцях тріщини при $\tilde{\nu} = \nu_{\min}$ і у центрі, якщо $\tilde{\nu} = \nu_{\max}$ (див. рис. 7).

На підставі рис. 7 можна зробити такий висновок: коли відношення головних напружень на нескінченності $\tilde{\nu} > \nu_{\max}$, то береги тріщини відстають у її центральній частині, коли $\tilde{\nu} < \nu_{\min}$ – в околі кінців тріщини, а якщо для відношення напружень на нескінченності виконується нерівність $\nu_{\min} \leq \tilde{\nu} \leq \nu_{\max}$, то береги тріщини завжди контактуватимуть для заданого кута розхилу тріщини ϕ .

Якщо порівняти відповідні результати для теплоізольованої [5] та теплопроникної тріщини (рис. 3–7), то наявність у тілі теплопроникної тріщини призводить до зменшення величини контактних напружень уздовж берегів тріщини та граничних кутів нахилу теплового потоку α_* , α^* , і до зменшення діапазону значень відношення напружень на нескінченності, за яких береги тріщин зазнаватимуть повного контакту.

Список використаної літератури

1. Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М. : Наука, 1975.
2. Гриліцький Д.В. Напруження в пластинах з коловою лінією розмежування граничних умов / Д.В. Гриліцький, Р.М. Луцишин. – Львів : Вища шк., 1975.
3. Кит Г.С. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами / Г.С. Кит, М.Г. Кривцун. – К. : Наук. думка, 1983.
4. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966.
5. Опанасович В.К. Термопружний стан пластини з теплоізольованими дуговими тріщинами уздовж кола з урахуванням повного гладкого контакту їх берегів / В.К. Опанасович, Н.М. Басса // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2011. – Вип. 9. – С. 164–174.
6. Опанасович В. Контактна задача для пластини з теплопроникливою тріщиною по дузі кола / В. Опанасович, Н. Копоть // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур : V міжнародна наукова конференція, 20–23 вересня 2000 р. : матер. конф. – Луцьк, 2000. – Т. 2. – С. 47–50.
7. Прусов И.А. Некоторые задачи термоупругости / И.А. Прусов. – Минск : Изд-во БГУ, 1972.
8. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М.П. Саврук. – К. : Наук. думка, 1981.
9. Ritz E. Closure of circular arc cracks under general loading: effects on stress intensity factors / E. Ritz, D.D. Pollard // Int. J. Fract. – 2011. – 167. – P. 3–14.

**ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИНЫ С РАЗМЕЩЕННЫМИ
ВДОЛЬ ОКРУЖНОСТИ ТЕПЛОПРОВОДЯЩИМИ ТРЕЩИНАМИ,
БЕРЕГА КОТОРЫХ ГЛАДКО КОНТАКТИРУЮТ ВДОЛЬ ВСЕЙ ДЛИНЫ****Виктор ОПАНАСОВИЧ¹, Наталия БАССА²**

¹Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1 79000 Львов, Украина

²Институт прикладных проблем механики и математики
им. Я.С. Подстригача НАН Украины,
ул. Научная, 3б 79060 Львов, Украина

Исследовано термоупругое состояние изотропной пластины с теплопроводящими трещинами вдоль дуг окружности, берега которых гладко контактируют по всей своей длине под действием равномерно распределенных напряжений и постоянного теплового потока на бесконечности. С использованием методов теории функций комплексного переменного и комплексных потенциалов построение решений задач теплопроводности и термоупругости сведено к задачам линейного сопряжения, причем скачок температуры между берегами трещин определен из системы интегро-дифференциальных уравнений с использованием метода ортогональных полиномов, а комплексный потенциал плоской задачи термоупругости найден в замкнутом виде.

Ключевые слова: изотропная пластина, трещины, гладкий контакт, комплексные потенциалы, коэффициенты интенсивности напряжений.

**THERMOELASTIC STATE OF PLATE WITH HEAT-CONDUCTING
CRACKS ON CIRCLE ARCS WITH TAKING INTO ACCOUNT THE
COMPLETE SMOOTH CONTACT OF THE CRACK FACES****Viktor OPANASOVYCH¹, Nataliya BASSA²**

¹Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine

²Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
Ukrainian National Academy of Sciences,
Naukova Str., 3b 79060 Lviv, Ukraine

The thermoelastic state of isotropic plate with heat-conducting cracks on the arcs of circle is investigated. It is assumed that the crack faces have smooth contact on all length of the crack under the influence of a uniformly distributed stresses and thermal flow at infinity. Using the methods of the theory of functions of complex variable and complex potentials the unknown jumps of temperature have been determined from a system of the integro-differential equations, which is solved by the orthogonal polynomial method. An explicit form of complex potential for the thermoelasticity problem has been obtained.

Key words: isotropic plate, thermoelastic state, heat-conducting cracks, smooth contact, complex potentials, stress intensity factors.

Стаття надійшла до редколегії 26.10.2011

Прийнята до друку 31.05.2012