ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76. С. 146-155
Visnyk of the Lviv University. Series Mech.-Mat. Issue 76. P. 146-155

УДК 539.3

# ОСЕСИМЕТРИЧНИЙ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН У ТІЛІ ЗА РОЗТЯГУ ОБМЕЖЕНИМИ ПЕРЕМІЩЕННЯМИ НА НЕСКІНЧЕННОСТІ

**Віталій ГАЛАЗЮК, Ірина БУБНЯК**

*Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна*

Розв'язано осесиметричну задачу теорії пружності за одновісного розтягу обмеженими переміщеннями на нескінченності. З'ясовано, що такий стан рівноваги можливий за існування у площині симетрії внутрішнього межового шару зі стрибком дотичних напружень на поверхнях, які його обмежують.

*Ключові слова:* інтегральні рівняння першого роду, межовий шар, стрибок дотичних напружень, обмежені переміщення на нескінченності.

Для дослідження напружено-деформованого стану в необмежених тілах з локалізованими неоднорідностями зазвичай застосовують метод суперпозицій основного стану, зумовленого у тілі навантаженням на нескінченності і додаткового, який спричинений наявною неоднорідністю, має локалізований характер і заникає на нескінченності. У цьому разі за основний напружений стан в тілі без неоднорідності [1, 2, 3] вибирають стан, який виникає внаслідок задання на нескінченності напружень сталої інтенсивності. За таких обставин переміщення у тілі зростають на нескінченності за лінійним законом, що суперечить лінійній моделі деформованого твердого тіла.

Далі подаємо математичну модель осесиметричного деформування простору одностороннім розтягом сталими переміщеннями на нескінченності. З'ясовано, що такий стан рівноваги можна реалізувати певним законом розподілу пелени об'ємних сил [4] у площині симетрії. Також доведено, що завжди існує закон розподілу об'ємних сил, за якого нормальні напруження у певній області площини симетрії є сталими. Оскільки розподіл об'ємних сил у площині симетрії зумовлює існування стрибка дотичних напружень у разі переходу цієї площини вздовж нормалі до неї, то за означенням [5] ця площина є поверхнею розриву параметрів поля першого порядку - внутрішнім межовим шаром.

**1. Розв'язок рівнянь статики з пеленою об'ємних сил і безмоментних диполів.** Однорідний пружний простір віднесемо до циліндричної системи координат $(R\alpha, \beta, \gamma)$ і вважатимемо, що під дією зовнішнього навантаження у просторі реалізується осесиметричний стосовно осі γ напружено-деформований стан. Ненульові компоненти вектора пружного переміщення $Ru_\alpha(\alpha,\gamma)$ і $Ru_\gamma(\alpha,\gamma)$, а також їхні частинні похідні $\varphi_\alpha(\alpha,\gamma) \equiv \partial_\alpha u_\gamma$ і

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

$\varphi_\gamma(\alpha,\gamma) \equiv \partial_\gamma u_\alpha$ (пружні кути повороту лінійних елементів, паралельних до осей α та γ, відповідно) означимо у просторі $|\gamma| \geq 0$ і підпорядкуємо умовам симетрії й антисиметрії

$$\begin{aligned} &u_\alpha(\alpha,-\gamma) = u_\alpha(\alpha,\gamma), u_\gamma(\alpha,-\gamma) = -u_\gamma(\alpha,\gamma); \\ &\varphi_\alpha(\alpha,-\gamma) = -\varphi_\alpha(\alpha,\gamma), \varphi_\alpha(\alpha,-\gamma) = -\varphi_\alpha(\alpha,\gamma). \end{aligned} \tag{1}$$

Тут $\partial_\alpha$ і $\partial_\gamma$ - оператори диференціювання за α і γ, відповідно.

Тоді можна стверджувати, що безрозмірні компоненти $u_\alpha(\alpha,\gamma)$ і $u_\gamma(\alpha,\gamma)$ вектора пружного переміщення за умов (1) є розв'язками рівнянь статики пружного тіла в циліндричних координатах

$$\begin{aligned} &k^2\partial_\alpha\theta + 2\partial_\gamma\omega_\beta = \delta(\gamma)X_\alpha(\alpha), \\ &k^2\partial_\gamma\theta - 2\alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha\omega_\beta) = \delta'(\gamma)X_\gamma(\alpha), \end{aligned} \tag{2}$$

де пелена об'ємних сил $X_\alpha(\alpha)$ і безмоментних диполів $X_\gamma(\alpha)$ задана інтегралами Ханкеля

$$\begin{aligned} X_\alpha(\alpha) &= 2k^2\int_0^\infty [2A(\xi) - \xi B(\xi)]\xi J_1(\alpha\xi)d\xi, \\ X_\gamma(\alpha) &= 2k^2\int_0^\infty \xi B(\xi) J_0(\alpha\xi)d\xi, \end{aligned} \tag{3}$$

стосовно функцій

$$\begin{aligned} \Theta \equiv div\vec{u} &= \alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha u_\alpha) + \partial_\gamma u_\gamma, \\ 2\omega_\beta \equiv (rot\vec{u})_\beta &= \partial_\gamma u_\alpha - \partial_\alpha u_\gamma = \varphi_\gamma(\alpha,\gamma) - \varphi_\alpha(\alpha,\gamma), \end{aligned} \tag{4}$$

і визначають напружено-деформований стан у просторі зі стрибками у площині γ=0 переміщень $u_\gamma(\alpha,\pm 0)$ , пружних кутів повороту $\varphi_\alpha(\alpha,\pm 0)$, $\varphi_\gamma(\alpha,\pm 0)$, а також дотичних напружень $\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,\pm 0)$.

У виразах (2)-(4) позначено $k^2 = (\lambda + 2\mu)/\mu = 2(1-\nu)/(1-2\nu)$, де λ, μ і υ сталі Ляме й коефіцієнт Пуассона; δ(γ) і $\delta'(\gamma)$ - дельта-функція Дірака та її похідна; R-параметр із розмірністю довжини (згодом радіус плоскої неоднорідності); $J_s(x)$ - функції Бесселя першого роду порядку s; A(ξ) та B(ξ) - твірні функції об'ємних сил і безмоментних диполів, які

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

визначаються зовнішнім навантаженням у площині $\gamma=0$ і є фізичними умовами задачі.

Якщо скористатися правилами диференціювання узагальнених функцій [6] $\text{sign}'(\gamma) = 2\delta(\gamma), f(\gamma)\delta'(\gamma) = f(0)\delta'(\gamma) - f'(0)\delta(\gamma)$, то безпосередньою підстановкою можна переконатися у тому, що функції

$$\begin{gathered}\theta(\alpha,\gamma) = 2\delta(\gamma)\int_0^\infty \xi B(\xi) J_0(\alpha\xi) d\xi - 2\int_0^\infty \xi A(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_0(\alpha\xi) d\xi,\\ \omega_\beta(\alpha,\gamma) = k^2 \text{sign}\gamma \int_0^\infty \xi A(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_1(\alpha\xi) d\xi,\end{gathered} \tag{5}$$

є розв'язками системи рівнянь (2) із правою частиною (3). За відомими функціями $\theta(\alpha,\gamma)$ і $\omega_\beta(\alpha,\gamma)$ з системи диференціальних рівнянь першого порядку (4) знайдемо компоненти вектора пружного переміщення

$$\begin{gathered}u_\alpha(\alpha,\gamma) = -\int_0^\infty \left[(k^2+1)A(\xi) - \xi B(\xi)\right] e^{-\xi|\gamma|} J_1(\alpha\xi) d\xi +\\ +(k^2-1)|\gamma| \int_0^\infty \xi A(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_1(\alpha\xi) d\xi,\end{gathered} \tag{6}$$

$$u_\gamma(\alpha,\gamma) = \text{sign}\gamma \int_0^\infty \xi B(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_0(\alpha\xi) d\xi + (k^2-1)\gamma \int_0^\infty \xi A(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_0(\alpha\xi) d\xi,$$

та вирази пружних кутів повороту

$$\varphi_\alpha(\alpha,\gamma) = -\text{sign}\gamma \int_0^\infty \xi^2 B(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_1(\alpha\xi) d\xi - (k^2-1)|\gamma| \int_0^\infty \xi^2 A(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_1(\alpha\xi) d\xi,$$

$$\begin{gathered}\varphi_\gamma(\alpha,\gamma) = \text{sign}\gamma \int_0^\infty \left[2k^2 A(\xi) - \xi B(\xi)\right] \xi J_1(\alpha\xi) d\xi -\\ -(k^2-1)|\gamma| \int_0^\infty \xi^2 A(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_1(\alpha\xi) d\xi.\end{gathered} \tag{7}$$

Використавши закон Гука та перший вираз (4), отримаємо компоненти тензора напружень

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,\gamma) = 2\mu\{\int_0^\infty \xi\left[A(\xi) - \zeta B(\xi)\right] e^{-\xi|\gamma|} J_0(\alpha\xi) d\xi +$$

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

$$+2\mu\left(k^2-2\right)\delta(\gamma)\int_0^\infty \xi B(\xi)J_0(\alpha\xi)d\xi-\left(k^2-1\right)|\gamma|\int_0^\infty \xi^2 A(\xi)e^{-\xi|\gamma|}J_0(\alpha\xi)d\xi\}, \quad (8)$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha,\gamma)=\mu\{\left(k^2-2\right)\left[2\delta(\gamma)\int_0^\infty \xi B(\xi)J_0(\alpha\xi)d\xi-2\int_0^\infty \xi A(\xi)e^{-\xi|\gamma|}J_0(\alpha\xi)d\xi\right]-$$

$$-\alpha\int_0^\infty\left[\left(k^2+1\right)A(\xi)-\xi B(\xi)\right]e^{-\xi|\gamma|}\left[J_0(\alpha\xi)-J_2(\alpha\xi)\right]d\xi+$$

$$+\alpha\left(k^2-1\right)|\gamma|\int_0^\infty \xi A(\xi)e^{-\xi|\gamma|}\left[J_0(\alpha\xi)-J_2(\alpha\xi)\right]d\xi\};$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha,\gamma)+\sigma_{\beta\beta}(\alpha,\gamma)+\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,\gamma)=(3\lambda+2\mu)\Theta,$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,\gamma)\equiv\mu\left[\varphi_\gamma(\alpha,\gamma)+\varphi_\alpha(\alpha,\gamma)\right]=2\mu\left\{\operatorname{sign}\gamma\int_0^\infty \xi\left[k^2A(\xi)-\xi B(\xi)\right]e^{-\xi|\gamma|}J_1(\alpha\xi)d\xi\right.$$

$$\left.-\left(k^2-1\right)\gamma\int_0^\infty \xi^2 A(\xi)e^{-\xi|\gamma|}J_1(\alpha\xi)d\xi\right\}. \quad (9)$$

Отже, згідно з поданням (5)–(7) і (9) функції $\omega_\beta(\alpha,\gamma)$, $u_\gamma(\alpha,\gamma)$, $\varphi_\alpha(\alpha,\gamma)$, $\varphi_\gamma(\alpha,\gamma)$, $\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,\gamma)$ містять функцію стрибка sign$\gamma$, що й доводить слушність сформульованого твердження, причому стрибок дотичних напружень (9) є механічним виявленням внутрішнього межового шару.

**2. Формулювання задачі про деформування тіла при розтязі обмеженими переміщеннями на нескінченності вздовж осі $\gamma$.** Оскільки за симетричного навантаження на нескінченності площин симетрії $\gamma=0$ не зміщується у напрямі осі $\gamma$, то відповідно до подання (7) твірна функції $B(\xi)=0$, а твірну функцію $A(\xi)$ задамо так:

$$\xi A(\xi)=u_\gamma^0 e^{-p\xi^2}\Big/\left(k^2-1\right), \quad (10)$$

де $u_\gamma^0$ - постійна величина; $p>0$ – параметр, який є зведеною механічною характеристикою внутрішнього межового шару у площині $\gamma=\pm0$.

За поданням (3) функція $A(\xi)$ (10) буде визначати такий закон розподілу пелени об'ємних сил $X_\alpha(\alpha)$ у площині $\gamma=0$

$$X_\alpha(\alpha)=\frac{4k^2u_\gamma^0}{k^2-1}\int_0^\infty e^{-p\xi^2}J_1(\alpha\xi)d\xi=\frac{4k^2u_\gamma^0}{k^2-1}\frac{1}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha^2/4p}\right), \quad (11)$$

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

причому при $\alpha \to \infty$ $X_\alpha(\alpha) = \frac{4k^2 u_\gamma^0}{k^2-1}\frac{1}{\alpha}$ і заникає на нескінченності.

Отже, подання (11) можна трактувати як математичну модель внутрішнього межового шару – матеріальної поверхні розриву параметрів поля першого порядку.

Тепер за відомою функцією A(ξ) знайдемо усі характеристики напружено-деформованого стану, які їй відповідають

$$u_\alpha(\alpha,\gamma) = -\frac{k^2+1}{k^2-1}u_\gamma^0\int_0^\infty e^{-p\xi^2-\xi|\gamma|}J_1(\alpha\xi)\xi^{-1}d\xi + u_\gamma^0|\gamma|\int_0^\infty e^{-p\xi^2-\xi|\gamma|}J_1(\alpha\xi)d\xi,$$

$$u_\gamma(\alpha,\gamma) = u_\gamma^0\gamma\int_0^\infty e^{-p\xi^2-\xi|\gamma|}J_0(\alpha\xi)d\xi. \tag{12}$$

Оскільки поле переміщень у просторі визначене, то обчислимо за поданнями (6), (8) і (9) усі характеристики напружено-деформованого стану за густини розподілу (10) об'ємних сил у площині γ=0

$$\Theta(\alpha,\gamma) = -\frac{2u_\gamma^0}{k^2-1}\int_0^\infty e^{-p\xi^2-\xi|\gamma|}J_0(\alpha\xi)d\xi\ ,$$

$$\omega_\beta(\alpha,\gamma) = \frac{k^2u_\gamma^0}{k^2-1}\operatorname{sign}\gamma\int_0^\infty e^{-p\xi^2-\xi|\gamma|}J_1(\alpha\xi)d\xi, \tag{13}$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha,\gamma) = -\frac{\mu u_\gamma^0}{k^2-1}\{3(k^2-1)\int_0^\infty e^{-p\xi^2-\xi|\gamma|}J_0(\alpha\xi)d\xi - (k^2-1)\int_0^\infty e^{-p\xi^2-\xi|\gamma|}J_2(\alpha\xi)d\xi -$$

$$-(k^2-1)|\gamma|\int_0^\infty \xi e^{-p\xi^2-\xi|\gamma|}[J_0(\alpha\xi)-J_2(\alpha\xi)]d\xi\},$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,\gamma) = \frac{2\mu u_\gamma^0}{k^2-1}\{\int_0^\infty e^{-p\xi^2-\xi|\gamma|}J_0(\alpha\xi)d\xi - (k^2-1)|\gamma|\int_0^\infty \xi e^{-p\xi^2-\xi|\gamma|}J_0(\alpha\xi)d\xi\},$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,\gamma) = -\frac{2\mu u_\gamma^0}{k^2-1}\{k^2\operatorname{sign}\gamma\int_0^\infty e^{-p\xi^2-\xi|\gamma|}J_1(\alpha\xi)d\xi -$$

$$-(k^2-1)\gamma\int_0^\infty \xi e^{-p\xi^2-\xi|\gamma|}J_1(\alpha\xi)d\xi\}. \tag{14}$$

Інтеграли у поданнях (12)–(14) характеристик напружено-деформованого стану у просторі можуть бути обчислені числовими методами, проте за певних значень аргументів вони визначають явні закони розподілу.

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

**3. Закони розподілу характеристик напружено-деформованого стану у площині γ=±0.** Якщо γ=0, то з подань (12)–(14) характеристик напружено-деформованого стану одержимо, що

$$u_\gamma(\alpha,\pm 0)=0;$$

$$u_\alpha(\alpha,\pm 0)=-\frac{k^2+1}{k^2-1}u_\gamma^0\int\limits_0^\infty e^{-p\xi^2}\xi^{-1}J_1(\alpha\xi)d\xi=$$

$$=-\frac{(k^2+1)u_\gamma^0}{4(k^2-1)}\frac{\alpha\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}e^{-\alpha^2/4p}\left[I_1\left(\alpha^2/8p\right)+I_0\left(\alpha^2/8p\right)\right]; \qquad (15)$$

$$\Theta(\alpha,\pm 0)=-\frac{2u_\gamma^0}{k^2-1}\int\limits_0^\infty e^{-p\xi^2}J_0(\alpha\xi)d\xi=-\frac{u_\gamma^0}{k^2-1}\sqrt{\frac{\pi}{p}}e^{-\alpha^2/8p}I_0\left(\alpha^2/8p\right);$$

$$\omega_\beta(\alpha,\pm 0)=\pm\frac{k^2u_\gamma^0}{k^2-1}\int\limits_0^\infty e^{-p\xi^2}J_1(\alpha\xi)d\xi=\pm\frac{k^2u_\gamma^0}{k^2-1}\frac{1}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha^2/4p}\right); \qquad (16)$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha,\pm 0)=\pm\frac{\mu\sqrt{\pi}u_\gamma^0}{2(k^2-1)\sqrt{p}}e^{-\alpha^2/8p}\left[3(k^2-1)I_0\left(\alpha^2/8p\right)-(k^2+1)I_1\left(\alpha^2/8p\right)\right];$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,\pm 0)=\frac{2\mu u_\gamma^0}{(k^2-1)}\int\limits_0^\infty e^{-p\xi^2}J_0(\alpha\xi)d\xi=\frac{\mu u_\gamma^0}{(k^2-1)}\sqrt{\frac{\pi}{p}}e^{-\alpha^2/8p}I_0\left(\alpha^2/8p\right);$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,\pm 0)=\pm\frac{2\mu k^2u_\gamma^0}{(k^2-1)}\int\limits_0^\infty e^{-p\xi^2}J_1(\alpha\xi)d\xi=\frac{2\mu k^2u_\gamma^0}{(k^2-1)}\frac{1}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha^2/4p}\right); \qquad (17)$$

де $I_v(x)$ – модифіковані функції Бесселя першого роду.

Аналіз законів розподілу (15)–(17) характеристик напружено-деформованого стану у площині γ=0 свідчить про те, що компонента $\omega_\beta(\alpha,\pm 0)$ вектора **Ω** і відтак дотичне напруження $\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,\pm 0)$ мають стрибок у площині γ=±0 під час її переходу вздовж нормалі до неї, що є механічним виявленням існування внутрішнього межового шару. Оскільки об'ємна деформація $\Theta(\alpha,\pm 0)$ і радіальне нормальне напруження $\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha,\pm 0)$ від'ємні, то можна стверджувати, що межовий шар є стиснутим в радіальному напрямі і розтягнутим у нормальному напрямі нормальними напруженнями $\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,\pm 0)>0$, $\forall\alpha\in[0,\infty)$.

**4. Асимптотика напружено-деформованого стану у площині γ=±0 при α→∞.**

Відповідно до подань (15)–(17) знайдемо поведінку характеристик напружено-деформованого стану у площині γ=±0, де α→∞. Оскільки [7] при

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

великих значеннях аргументу модифіковані функції Бесселя $I_\nu(x) \equiv \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$, то при $\alpha \to \infty$ отримаємо, що

$$u_\alpha(\alpha, \pm 0) = -\frac{(k^2+1)u_\gamma^0}{(k^2-1)} = const, u_\gamma(\alpha, \pm 0) = 0; \tag{18}$$

$$\Theta(\alpha, \pm 0) = -\frac{2u_\gamma^0}{(k^2-1)}\frac{1}{\alpha}; \omega_\beta(\alpha, \pm 0) = \pm -\frac{k^2 u_\gamma^0}{(k^2-1)}\frac{1}{\alpha}; \tag{19}$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha, \pm 0) = -\frac{\mu u_\gamma^0 (k^2-2)}{(k^2-1)}\frac{1}{\alpha}; \ \sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \pm 0) = -\frac{2\mu u_\gamma^0}{(k^2-1)}\frac{1}{\alpha};$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, \pm 0) = -\frac{2\mu k^2 u_\gamma^0}{(k^2-1)}\frac{1}{\alpha}. \tag{20}$$

Отже, відповідно до асимптотик (18)–(20) напружено-деформованого стану можна стверджувати, що радіальне переміщення $u_\alpha(\alpha, \pm 0)$ у площині $\gamma=\pm 0$ є від'ємним і постійним на безмежності, і не залежить від параметра $p>0$. Решта характеристик напружено-деформованого стану у площині $\gamma=\pm 0$ (межовому шарі) заникають як $\alpha^{-1}$, у тім числі і стрибок дотичних напружень.

**5. Напружено-деформований стан у просторі на осі симетрії $\alpha=0$.** Якщо $\alpha=0$, то інтеграли у поданнях (12)–(14) обчислюють точно і можна отримати закон розподілу характеристик напружено-деформованого стану на осі симетрії $\alpha=0$ простору. Зокрема,

$$u_\alpha(0, \gamma) = 0, u_\gamma(0, \gamma) = u_\gamma^0 \gamma \int_0^\infty e^{-p\xi^2 - \xi|\gamma|} d\xi = u_\gamma^0 \gamma \frac{e^{\gamma^2/8p}}{\sqrt{2p}} D_{-1}\left(\frac{|\gamma|}{\sqrt{2p}}\right); \tag{21}$$

$$\omega_\beta(0, \gamma) = 0, \ \sigma_{\alpha\gamma}(0, \gamma) = 0,$$

$$\Theta(0, \gamma) = -\frac{2u_\gamma^0}{k^2-1}\int_0^\infty e^{-p\xi^2 - \xi|\gamma|} d\xi = -\frac{2u_\gamma^0}{k^2-1}\frac{e^{\gamma^2/8p}}{\sqrt{2p}} D_{-1}\left(\frac{|\gamma|}{\sqrt{2p}}\right), \tag{22}$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}(0, \gamma) = \frac{2\mu u_\gamma^0}{k^2-1}\frac{e^{\gamma^2/8p}}{\sqrt{2p}}\left\{2(k^2-1)D_{-3}\left(\frac{|\gamma|}{\sqrt{2p}}\right) - (k^2-2)D_{-1}\left(\frac{|\gamma|}{\sqrt{2p}}\right)\right\},$$

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

$$\sigma_{\alpha\alpha}\left(0,\gamma\right)=-2\mu u_\gamma^0\frac{e^{\gamma^2/8p}}{\sqrt{2p}}\left\{D_{-1}\left(\frac{|\gamma|}{\sqrt{2p}}\right)+D_{-3}\left(\frac{|\gamma|}{\sqrt{2p}}\right)\right\}, \tag{23}$$

де $D_{-n}$ – функції параболічного циліндра з асимптотикою [7] при великих $x$ $D_{-n}\left(x\right)\cong e^{-x^2/4}x^{-n}$.

Використавши асимптотику функцій параболічного циліндра при великих значеннях аргументу, знайдемо відповідно до подань (21)–(23) поведінку параметрів напружено-деформованого стану на осі симетрії α=0 простору при $|\gamma|\to\infty$. У цьому разі отримаємо, що при великих значеннях γ

$$u_\alpha\left(0,\gamma\right)=0\,,\;u_\gamma\left(0,\gamma\right)=u_\gamma^0\operatorname{sign}\gamma\,, \tag{24}$$

$$\Theta\left(0,\gamma\right)=-\frac{2u_\gamma^0}{k^2-1}\frac{1}{|\gamma|},\;\omega_\beta\left(0,\gamma\right)=0\,, \tag{25}$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}\left(0,\gamma\right)=0\,,\;\;\sigma_{\gamma\gamma}\left(0,\gamma\right)=-2\mu u_\gamma^0\frac{\left(k^2-2\right)}{|\gamma|}\left[1-\frac{2\left(k^2-1\right)}{k^2-2}\frac{2p}{\gamma^2}\right],$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}\left(0,\gamma\right)=-2\mu u_\gamma^0\frac{1}{|\gamma|}\left[1+\frac{2p}{\gamma^2}\right]. \tag{26}$$

Отже, відповідно до отриманих асимптотик (24)–(26) параметрів напружено-деформованого стану при γ→∞ можна стверджувати, що компонента $u_\gamma\left(0,\gamma\right)$ вектора пружного переміщення при $|\gamma|\to\infty$ є постійною, а всі інші параметри напружено-деформованого стану заникають як $|\gamma|^{-1}$. У цьому разі нормальне напруження $\sigma_{\alpha\alpha}\left(0,\gamma\right)<0$ і є стискувальним $\forall|\gamma|\in\left[0,\infty\right)$, нормальне напруження $\sigma_{\gamma\gamma}\left(0,\gamma\right)$, як розтягувальне (20) у площині γ=±0, при певних значеннях змінної $|\gamma|$ змінює знак і стає стискувальним. Це цілком узгоджується з функцією явища, оскільки об'ємна деформація $\Theta\left(\alpha,\gamma\right)$ відповідно до подання (13) є від'ємною у всіх точках простору.

**6. Числовий аналіз і обговорення результатів.** За отриманими результатами провели числове дослідження напружено-деформованого стану у тілі за розтягуванням обмеженими переміщеннями на нескінченності.

На рис. 1, 2 зображено розподіл напружень при $\gamma=0$ для різних значень р.

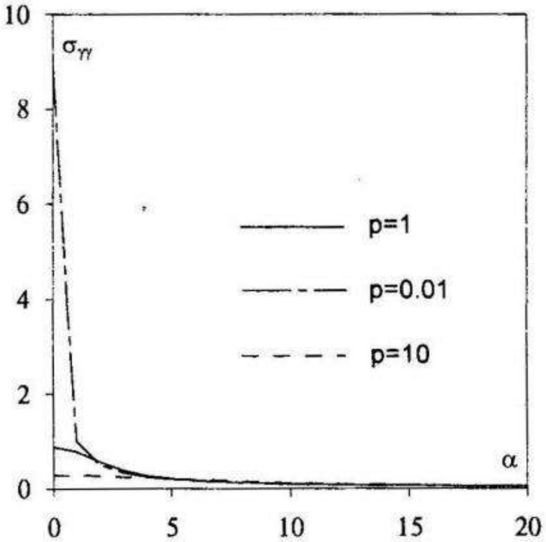


Рис. 1

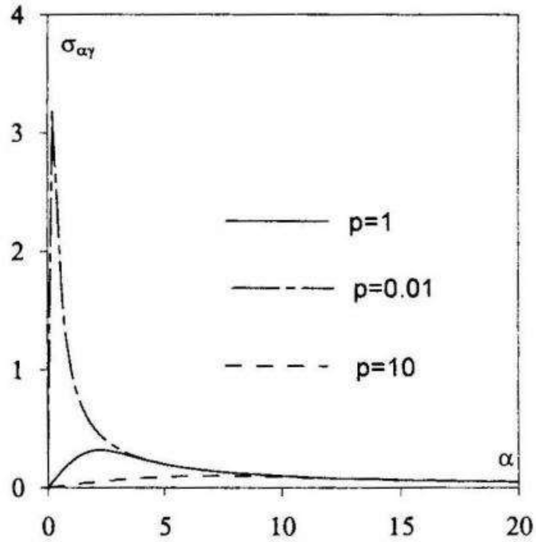


Рис. 2

**7. Висновки**. Запропоновано математичну модель осесиметричного напружено-деформованого стану у просторі за обмежених переміщень на нескінченності. З'ясовано, що такий стан рівноваги можливий за існування у площині симетрії пелени радіально спрямованих об'ємних сил, які є математичною моделлю внутрішнього межового шару. Механічним виявом внутрішнього межового шару є стрибок дотичних напружень при його переході вздовж нормалі. Доведено, що за певних механічних характеристик внутрішнього межового шару, розподіл нормальних розтягувальних напружень у ньому у певній області є близьким до сталого. Це відповідає класичним уявленням про розтяг простору сталими напруженнями на нескінченності. Запропоновану математичну модель можна застосовувати в узагальненій задачі Сака, коли на нескінченності задано сталі переміщення.

Список використаної літератури

1. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966.

2. *Савин Г.И.* Распределение напряжений около отверстий / Г.И. Савин. – Киев: Наук. думка, 1968.

3. *Kassir M.K.* Some three-dimensional inclusion problems in elasticity / M.K. Kassir, G.C. Sih // International Journal of Solids and Structures – Volume 4, Issue 2 – 1968. – P. 225–241.

4. *Галазюк В.А.* Рівновага дискової щілини з поверхневим шаром з реологічними властивостями / В.А. Галазюк, Г.Т. Сулим // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – 40, №4. – С. 17–33.

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

5. *Трусдел К.* Первоначальный курс механики сплошных сред / К. Трусдел // Пер. с англ. – М.: Мир, 1975.

6. *Шварц Л.* Математические методи для физических наук / Л. Шварц. – М.: Мир, 1965.

7. *Градштейн И.С.* Таблицы интегралов сумм, рядов и произвидений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. л-ры, 1965.

## ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТЕЛЕ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ ОГРАНИЧЕННЫМИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯМИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

**Виталий ГАЛАЗЮК, Ирина БУБНЯК**

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко, ул. Университетская, 1 79000 Львов, Украина*

Решена осесимметричная задача теории упругости за одноосного растяжения ограниченными перемещениями на бесконечности. Выяснено, что такое положение равновесия возможно за существования в плоскости симметрии внутреннего пограничного слоя с прыжком касательных напряжений на поверхностях,что его ограничивают.

*Ключевые слова:* интегральные уравнения первого рода, предельный слой, скачок касательных напряжений, ограниченные перемещения на бесконечности.

## AXISYMMETRICAL TENSION-DEFORMED STATE IN BODY STRETCHED BY LIMITED DISPLACEMENTS DEFINED AT INFINITY

**Vitaliy GALAZYK, Iryna BUBNYAK**

*Ivan Franko National University of L'viv, Universytetska Str., 1 79000 L'viv, Ukraine*

Elasticity theory problem for the body which is axial symmetrically stretched by the limited, defined at infinity displacements has been solved. It has been revealed that such equilibrium state is feasible in the case of existence of the internal boundary layer which is located in the plane of symmetry and has shear stresses skip on its limiting surfaces.

*Key words:* integral equations of the first kind, boundary layer, jump tangential stress, displacements defined at infinity.

Стаття надійшла до редколегії 02.12.2011
Прийнята до друку 31.05.2012