

УДК 539.3

ДИНАМІЧНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПРЯМОКУТНОЇ ПЛАСТИНКИ

Володимир ГУЦАЙЛЮК¹, Георгій СУЛИМ², Ігор ТУРЧИН²

¹*Військова технічна академія імені Ярослава Домбровського,
вул. Генерала С. Каліського, 2 00908 Варшава, Польща*

²*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна*

З використанням інтегрального перетворення Лапласа одержано розв'язок задачі теорії пружності про двовимірні коливання пластинки прямокутної форми. Розв'язок одержано у припущенні, що поверхня, де діє навантаження, частково защемлена.

Ключові слова: динамічна задача теорії пружності, поздовжні коливання, інтегральне перетворення Лапласа.

Вивчення процесу швидкісного деформування матеріалів є важливим з огляду на широкі можливості його використання в інженерній практиці. Його треба враховувати при оцінюванні динамічної міцності конструкцій під дією імпульсних та ударних навантажень у технологічних умовах експлуатації та під час аварійних чи критичних ситуацій. Детальний аналіз процесу високошвидкісного деформування потрібний також для розробки параметрів технологічних процесів формоутворення та зміцнення елементів конструкцій з використанням високоінтенсивних джерел енергії. Визначальна особливість цих процесів – виявлення динамічних властивостей матеріалів [1], що стосується насамперед теоретичних основ матеріалознавства і, зокрема, дослідження явища утворення дисипативних структур при імпульсному підведенні енергії деформування [2].

Хоча означена проблема стосується складних, геометрично та фізично нелінійних моделей механіки [3], багато важливих закономірностей та ефектів, які передують процесу незворотного деформування, можна виявити та дослідити з використанням лінійної моделі теорії пружності [4].

Розглянемо прямокутну пластинку розміром $2h \times 2l$ по x_1 та y_1 , відповідно, де x_1 та y_1 – декартові координати. З моменту часу $t = 0$ пластинку навантажено нормальними зусиллями $p(t)$, прикладеними до її торців $x_1 = \pm l$, які нерухомо закріплені в напрямі осі y_1 . Граничні поверхні $y_1 = \pm h$ залишаються вільними від навантаження. Введемо у розгляд безрозмірні змінні та величини $x = x_1 / l$, $y = y_1 / l$, $\tau = c_1 t / l$, $x_0 = h / l$, $\kappa^2 = c_1 / c_2 = (\lambda + 2\mu) / \mu$, де c_1 , c_2 – швидкості поширення поздовжніх і

поперечних хвиль у матеріалі пластинки, λ , μ – пружні сталі.

У термінах цих змінних, вважаючи, що до моменту часу $t = 0$ пластинка перебувала в стані спокою, задачу сформулюємо так:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} = \kappa^2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial \tau^2} - (\kappa^2 - 1) \frac{\partial \theta}{\partial y}; \quad (2)$$

$$\theta = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = 0, \quad u_y = \frac{\partial u_y}{\partial \tau} = 0, \quad \tau = 0; \quad (3)$$

$$u_y(\pm 1, y, \tau) = 0; \quad \sigma_{xx}(\pm 1, y, \tau) = \pm p(\tau); \quad (4)$$

$$\sigma_{xx}(x, \pm y_0, \tau) = 0; \quad \sigma_{xy}(x, \pm y_0, \tau) = 0, \quad (5)$$

де $\theta(x, y, \tau) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}$ – об'ємне розширення; $u_x(x, y, \tau)$, $u_y(x, y, \tau)$ – компоненти вектора пружного переміщення; $\sigma_{ij}(x, y, \tau)$, $\varepsilon_{ij}(x, y, \tau)$ – відмінні від нуля компоненти тензора напруження та тензора деформацій.

З умов (4), враховуючи, що $\theta(\pm 1, y, \tau) = \frac{\partial u_x}{\partial x} \Big|_{x=\pm 1}$, одержимо

$$\mu^{-1} \sigma_{xx}(\pm 1, y, \tau) = \kappa^2 \theta(\pm 1, y, \tau). \quad (6)$$

Застосуємо до рівняння (1) інтегральне перетворення Лапласа за часовою змінною τ та скінчене перетворення Фур'є за змінною x . Враховуючи симетрію задачі, нульові початкові умови (3), співвідношення (6) та умови (4), замість рівняння (1), одержимо

$$\frac{d^2 \bar{\theta}_n}{dy^2} - (\xi_n^2 + s^2) \bar{\theta}_n = (-1)^{n+1} \frac{2\xi_n}{\kappa\mu} \bar{p}(s), \quad (7)$$

де $\bar{\theta}_n(y, s) = \int_{-1}^1 \cos(\xi_n x) \int_0^\infty \theta(x, y, \tau) \exp(-s\tau) d\tau dx$ – зображення за Лапласом і Фур'є, $\xi_n = \pi(2n+1)/2$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Трансформоване рівняння (2), відповідно, набуде вигляду

$$\frac{d^2 \bar{v}_n}{dy^2} - (\xi_n^2 + \kappa^2 s^2) \bar{v}_n = (1 - \kappa^2) \frac{d\bar{\theta}_n}{dy}, \quad (8)$$

$$\text{де } \bar{v}_n(y, s) = \int_{-1}^1 \cos(\xi_n x) \int_0^\infty u_y(x, y, \tau) \exp(-s\tau) d\tau dx.$$

Розв'язок рівняння (7), враховуючи, що $\bar{\theta}_n(y, s)$ є парною функцією змінної y , подамо у вигляді

$$\bar{\theta}_n(y, s) = A_n(s) \operatorname{ch}(\gamma_1 y) + \frac{(-1)^n 2\xi_n \bar{p}(s)}{\mu \kappa^2 \gamma_1^2} \quad (9)$$

$$\text{при } \gamma_1 = \sqrt{\xi_n^2 + s^2}.$$

З урахуванням (9) розв'язок рівняння (8) одержимо у вигляді

$$\bar{v}_n(y, s) = B_n(s) \operatorname{sh}(\gamma_2 y) + \frac{\gamma_1}{s^2} A_n(s) \operatorname{sh}(\gamma_1 y) \quad (10)$$

$$\text{при } \gamma_2 = \sqrt{\xi_n^2 + \kappa^2 s^2}.$$

Іншу компоненту вектора пружного переміщення

$$\bar{u}_n(y, s) = \int_{-1}^1 \sin(\xi_n x) \int_0^\infty u_x(x, y, \tau) \exp(-s\tau) d\tau dx \quad (11)$$

знайдемо, враховуючи співвідношення $\bar{u}_n = \frac{1}{\xi_n} \left(\bar{\theta}_n - \frac{d\bar{v}_n}{dy} \right)$ у вигляді

$$\bar{u}_n(y, s) = -B_n(s) \xi_n^{-1} \gamma_2 \operatorname{ch}(\gamma_2 y) - \frac{\xi_n}{s^2} A_n(s) \operatorname{ch}(\gamma_1 y) + \frac{(-1)^n 2\bar{p}(s)}{\mu \kappa^2 \gamma_1^2}. \quad (12)$$

Величини $A_n(s)$ і $B_n(s)$ знайдемо з крайових умов (5), які в трансформантах за Лапласом і Фур'є та в термінах знайдених вище виразів набудуть вигляду

$$(\kappa^2 - 2)\bar{\theta}_n + 2\frac{d\bar{u}_n}{dy} = 0, \quad \frac{d\bar{u}_n}{dy} - \xi_n \bar{v}_n = 0, \quad y = \pm y_0. \quad (13)$$

Враховуючи вирази (10)-(12), з умов (13) знайдемо

$$A_n(s) = \frac{s^2(\xi_n^2 + \gamma_2^2) \operatorname{sh}(\gamma_2 y_0) \bar{p}_n(s)}{\gamma_1^2 \Delta(\xi, s)}, \quad B_n(s) = \frac{-2\xi_n^2 \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \bar{p}_n(s)}{\gamma_1 \Delta(\xi, s)}. \quad (14)$$

$$\text{Тут } \bar{p}_n(s) = \frac{(-1)^n 2\xi_n (\kappa^2 - 2) \bar{p}(s)}{\mu \kappa^2},$$

$$\Delta(\xi, s) = 4\xi_n^2 \gamma_1 \gamma_2 \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \operatorname{ch}(\gamma_2 y_0) - (\xi_n^2 + \gamma_2^2)^2 \operatorname{ch}(\gamma_1 y_0) \operatorname{sh}(\gamma_2 y_0).$$

За відомими $A_n(s)$ і $B_n(s)$ одержимо

$$\begin{aligned} \bar{u}_n(y, s) &= \left(\frac{1}{(\kappa^2 - 2)\xi_n} + \frac{\xi_n}{\Delta} \left[2\gamma_1 \gamma_2 \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \operatorname{ch}(\gamma_2 y) - (\xi_n^2 + \gamma_2^2) \operatorname{sh}(\gamma_2 y_0) \operatorname{ch}(\gamma_1 y) \right] \right) \frac{\bar{p}_n}{\gamma_1^2}; \\ \bar{v}_n(y, s) &= \gamma_1^{-1} \Delta^{-1} \left[(\xi_n^2 + \gamma_2^2) \operatorname{sh}(\gamma_2 y_0) \operatorname{sh}(\gamma_1 y) - 2\xi_n^2 \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \operatorname{sh}(\gamma_2 y) \right] \bar{p}_n \quad (15) \end{aligned}$$

Обернення за Лапласом проведено з використанням теореми розвинення [6]. Остаточно для довільної функції навантаження $p(\tau)$ отримали

$$\begin{aligned} u_x(x, y, \tau) &= \frac{4p^*}{\mu} \left(1 - \frac{2}{\kappa^2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \xi_n^2 \sin(\xi_n x) \times \\ &\times \left\{ \sum_{k=1}^{k_1} \frac{2\gamma_1 \gamma_2 \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \operatorname{ch}(\gamma_2 y) - (2\xi_n^2 - \kappa^2 \eta_{n,k,1}^2) \operatorname{sh}(\gamma_2 y_0) \operatorname{ch}(\gamma_1 y)}{\gamma_1^2 \tilde{\Delta}_1(n, k)} f(\eta_{n,k,1}, \tau) + \right. \\ &+ \sum_{k=1}^{k_2} \frac{2\gamma_1 \tilde{\gamma}_2 \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \cos(\tilde{\gamma}_2 y) - (2\xi_n^2 - \kappa^2 \eta_{n,k,2}^2) \sin(\tilde{\gamma}_2 y_0) \operatorname{ch}(\gamma_1 y)}{\gamma_1^2 \tilde{\Delta}_2(n, k)} f(\eta_{n,k,2}, \tau) + \\ &\left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2 \sin(\tilde{\gamma}_1 y_0) \cos(\tilde{\gamma}_2 y) + (2\xi_n^2 - \kappa^2 \eta_{n,k,3}^2) \sin(\tilde{\gamma}_2 y_0) \cos(\tilde{\gamma}_1 y)}{\tilde{\gamma}_1^2 \tilde{\Delta}_3(n, k)} f(\eta_{n,k,3}, \tau) \right\}; \\ u_y(x, y, \tau) &= \frac{4p^*}{\mu} \left(1 - \frac{2}{\kappa^2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \xi_n \times \\ &\times \left\{ \sum_{k=1}^{k_1} \frac{(2\xi_n^2 - \kappa^2 \eta_{n,k,1}^2) \operatorname{sh}(\gamma_2 y_0) \operatorname{sh}(\gamma_1 y) - 2\xi_n^2 \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \operatorname{sh}(\gamma_2 y)}{\gamma_1 \tilde{\Delta}_1(n, k)} f(\eta_{n,k,1}, \tau) + \right. \\ &+ \sum_{k=1}^{k_2} \frac{(2\xi_n^2 - \kappa^2 \eta_{n,k,2}^2) \sin(\tilde{\gamma}_2 y_0) \operatorname{sh}(\gamma_1 y) - 2\xi_n^2 \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \sin(\tilde{\gamma}_2 y)}{\gamma_1 \tilde{\Delta}_2(n, k)} f(\eta_{n,k,2}, \tau) + \\ &\left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2\xi_n^2 - \kappa^2 \eta_{n,k,3}^2) \sin(\tilde{\gamma}_2 y_0) \sin(\tilde{\gamma}_1 y) - 2\xi_n^2 \sin(\tilde{\gamma}_1 y_0) \sin(\tilde{\gamma}_2 y)}{\tilde{\gamma}_1 \tilde{\Delta}_3(n, k)} f(\eta_{n,k,3}, \tau) \right\} \cos(\xi_n x). \end{aligned} \quad (16)$$

Тут $\eta_{n,k,1}$, $\eta_{n,k,2}$, $\eta_{n,k,3}$ – відповідно, додатні корені рівнянь

$$4\xi_n^2 \gamma_1 \gamma_2 \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \operatorname{ch}(\gamma_2 y_0) - (\xi_n^2 + \gamma_2^2)^2 \operatorname{ch}(\gamma_1 y_0) \operatorname{sh}(\gamma_2 y_0) = 0 \quad (17)$$

при $\gamma_1 = \sqrt{\xi_n^2 - \eta^2}$, $\gamma_2 = \sqrt{\xi_n^2 - \kappa^2 \eta^2}$, $0 \leq |\eta| \leq \kappa^{-1} \xi_n$;

$$4\xi_n^2 \gamma_1 \tilde{\gamma}_2 \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \cos(\tilde{\gamma}_2 y_0) - (\xi_n^2 + \tilde{\gamma}_2^2)^2 \operatorname{ch}(\gamma_1 y_0) \sin(\tilde{\gamma}_2 y_0) = 0 \quad (18)$$

при $\tilde{\gamma}_2 = \sqrt{\kappa^2 \eta^2 - \xi_n^2}$, $\kappa^{-1} \xi_n < |\eta| \leq \xi_n$;

$$4\xi_n^2 \tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2 \sin(\tilde{\gamma}_1 y_0) \cos(\tilde{\gamma}_2 y_0) + (\xi_n^2 + \tilde{\gamma}_2^2) \cos(\tilde{\gamma}_1 y_0) \sin(\tilde{\gamma}_2 y_0) = 0, \quad (19)$$

при $\tilde{\gamma}_1 = \sqrt{\eta^2 - \xi_n^2}$, $|\eta| > \xi_n$;

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_1(n, k) \equiv \frac{d\Delta}{ds} \Big|_{s=\pm\eta_{n,k,1}} &= \pm i \eta_{n,k,1} \left\{ 4\xi_n^2 \left[\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \operatorname{ch}(\gamma_2 y_0) + \frac{\kappa^2 \gamma_1}{\gamma_2} \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \operatorname{ch}(\gamma_2 y_0) + \right. \right. \\ &+ x_0 \gamma_2 \operatorname{ch}(\gamma_1 y_0) \operatorname{ch}(\gamma_2 y_0) + \kappa^2 y_0 \gamma_1 \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \operatorname{sh}(\gamma_2 y_0) \Big] - 4\kappa^2 (\xi_n^2 + \gamma_2^2) \operatorname{ch}(\gamma_1 y_0) \operatorname{sh}(\gamma_2 y_0) \\ &\left. - (\xi_n^2 + \gamma_2^2)^2 y_0 \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \operatorname{sh}(\gamma_2 y_0) / \gamma_1 - (\xi_n^2 + \gamma_2^2)^2 \frac{\kappa^2 y_0}{\gamma_2} \operatorname{ch}(\gamma_1 y_0) \operatorname{ch}(\gamma_2 y_0) \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_2(n, k) \equiv \frac{d\Delta}{ds} \Big|_{s=\pm\eta_{n,k,2}} &= \mp \eta_{n,k,2} \left\{ 4\xi_n^2 \left[\frac{\tilde{\gamma}_2}{\gamma_1} \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \cos(\tilde{\gamma}_2 y_0) - \right. \right. \\ &- \frac{\kappa^2 \gamma_1}{\tilde{\gamma}_2} \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \cos(\tilde{\gamma}_2 y_0) + x_0 \tilde{\gamma}_2 \operatorname{ch}(\gamma_1 y_0) \cos(\tilde{\gamma}_2 y_0) + \kappa^2 y_0 \gamma_1 \times \\ &\times \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \sin(\tilde{\gamma}_2 y_0) \Big] - 4\kappa^2 (\xi_n^2 - \tilde{\gamma}_2^2) \operatorname{ch}(\gamma_1 y_0) \sin(\tilde{\gamma}_2 y_0) - \\ &\left. - (\xi_n^2 - \tilde{\gamma}_2^2)^2 y_0 \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \sin(\tilde{\gamma}_2 y_0) / \gamma_1 + (\xi_n^2 - \tilde{\gamma}_2^2)^2 \frac{\kappa^2 y_0}{\tilde{\gamma}_2} \operatorname{ch}(\gamma_1 y_0) \cos(\tilde{\gamma}_2 y_0) \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_3(n, k) \equiv \frac{d\Delta}{ds} \Big|_{s=\pm\eta_{n,k,3}} &= \mp \eta_{n,k,3} \left\{ 4\xi_n^2 \left[\frac{\tilde{\gamma}_2}{\tilde{\gamma}_1} \sin(\tilde{\gamma}_1 y_0) \cos(\tilde{\gamma}_2 y_0) + \right. \right. \\ &+ \frac{\kappa^2 \tilde{\gamma}_1}{\tilde{\gamma}_2} \sin(\tilde{\gamma}_1 y_0) \cos(\tilde{\gamma}_2 y_0) + y_0 \tilde{\gamma}_2 \cos(\tilde{\gamma}_1 y_0) \cos(\tilde{\gamma}_2 y_0) - \kappa^2 y_0 \tilde{\gamma}_1 \sin(\tilde{\gamma}_1 y_0) \times \\ &\times \sin(\tilde{\gamma}_2 y_0) \Big] - 4\kappa^2 (\xi_n^2 - \tilde{\gamma}_2^2) \cos(\tilde{\gamma}_1 y_0) \sin(\tilde{\gamma}_2 y_0) - (\xi_n^2 - \tilde{\gamma}_2^2)^2 \frac{y_0}{\tilde{\gamma}_1} \sin(\tilde{\gamma}_1 y_0) \sin(\tilde{\gamma}_2 y_0) + \\ &\left. + (\xi_n^2 - \tilde{\gamma}_2^2)^2 \frac{\kappa^2 y_0}{\tilde{\gamma}_2} \cos(\tilde{\gamma}_1 y_0) \cos(\tilde{\gamma}_2 y_0) \right\}. \end{aligned}$$

Функції $f(\eta, \tau)$ обчислюють з використанням інтегральної згортки

$$f(\eta, \tau) = \int_0^\tau p(\tau - t) \sin(\eta t) dt. \quad (20)$$

Формули (16) дають точний замкнутий розв'язок динамічної задачі теорії пружності для прямокутної пластини за довільної залежності зовнішнього навантаження від часу. За одержаними компонентами вектора переміщення (16) компоненти тензора деформацій і тензора напружень обчислюють за формулами (6).

Розрахунок проводили для пластинки з алюмінієвого сплаву 2024-T3: $E = 6.9$ ГПа, $\nu = 0.3$, $\rho = 2.85$ г/см³ при $y_0 = 0.3$ та для часової залежності навантаження

$$p(\tau) = p^* (1 - \exp(-\tau_0 \tau))^2, \quad (21)$$

де p^* – розмірна величина (H / m^2); τ_0 – безрозмірний параметр, який визначає час виходу зовнішнього навантаження на усталене значення. Вираз (21) дає змогу узгодити початкові та крайові умови, а також у багатьох випадках досить точно наблизити реальну залежність динамічного навантаження від часу.

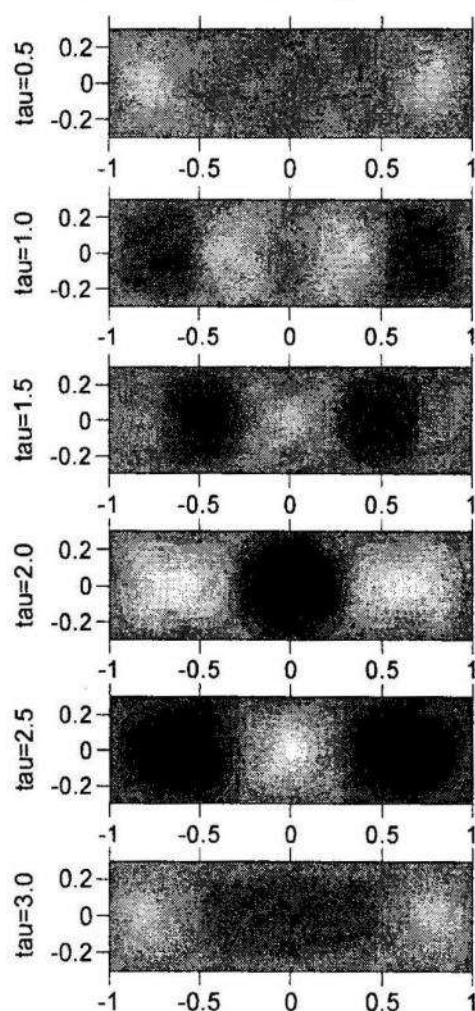


Рис. 1

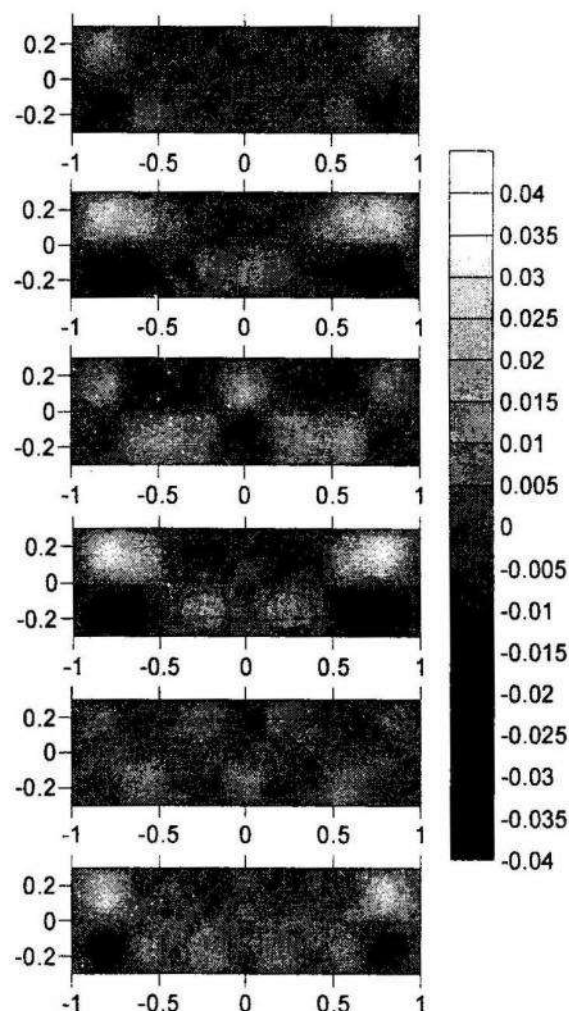


Рис. 2

На рис. 1 показано розподіл у пластинці безрозмірних напружень $\sigma_{yy}(x, y, \tau) / p^*$, а на рис. 2 – розподіл дотичних напружень $\sigma_{xy}(x, y, \tau) / p^*$ у різні моменти часу при $\tau_0 = 5$. Як видно з наведеного, максимальні за

модулем поперечні напруження під час перехідного періоду досягають 40% від усталеного значення p^* для зовнішнього навантаження, а дотичні напруження лише 4%.

На рис. 3 зображено результати розрахунку напружень $\sigma_{xx}(x, y, \tau) / p^*$ у пластинці, одержаних за формулами (16) (ліва частина рисунка) та розрахованих на підставі одновимірної моделі.

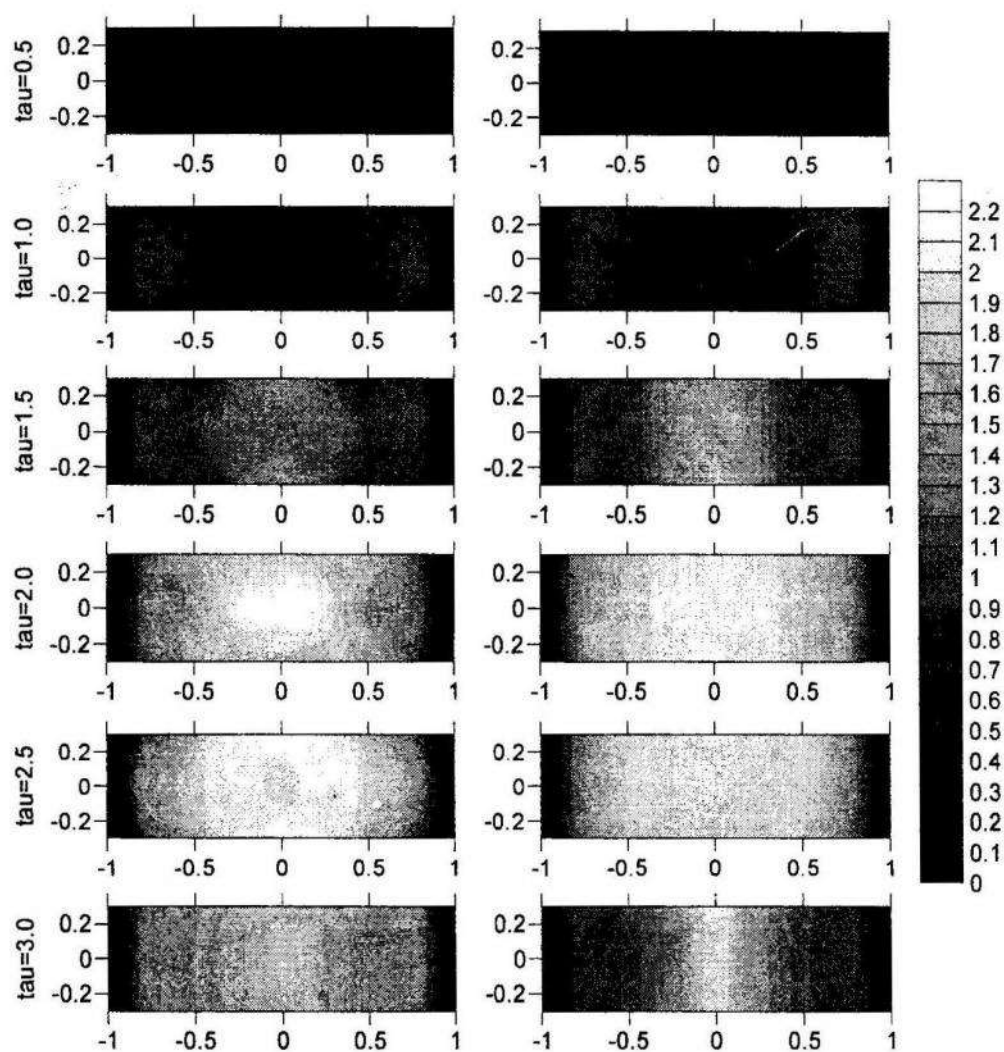


Рис. 3

Як видно з рисунка, похибка розрахунків, одержаних з використанням одновимірної моделі, не перевищує 10% порівняно з двовимірною. Це, враховуючи наведені вище результати для дотичних напружень, дає змогу при інженерних розрахунках використовувати значно простішу одновимірну модель.

Список використаної літератури

1. Божидарник В.В. Елементи теорії пружності / В.В. Божидарник, Г.Т. Сулим – Львів, 1994.
2. Снеддон И. Преобразования Фурье / И. Снеддон – М., 1955.
3. Achenbach J.D. Wave propagation in elastic solids / J.D. Achenbach – New York: Amer. Elsevier Publ. Co., 1973.
4. Chausov M.G. Laws of deformations processes and fracture of plastic steel from the point of view of dynamic overloading / M.G. Chausov, A.P. Pylypenko // *Mechanika*. – 2005. – 54. – P. 24-29.
5. Meleshko V.V. Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem / V.V. Meleshko // *Appl. Mech. Rev.* – 56, No 1. – P. 33-85.

**ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ
ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ****Владимир ГУЦАЙЛЮК¹, Георгий СУЛИМ², Игорь ТУРЧИН²**¹Военная техническая академия имени Ярослава Домбровского,
ул. Генерала С. Калиского, 2 00908 Варшава, Польша²Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1 79000 Львов, Украина

С использованием интегрального преобразования Лапласа получено решение задачи теории упругости о двумерных колебаниях пластинки прямоугольной формы. Решение получено в предположении, что поверхность, на которой действует нагрузка, частично закреплена.

Ключевые слова: динамическая задача теории упругости, продольные колебания, интегральное преобразование Лапласа.

DYNAMIC PROBLEM OF ELASTICITY FOR A RECTANGULAR PLATE

Volodymyr HUTSAYLYUK¹, Heorgiy SULYM², Ihor TURCHYN²

¹*Military University of Technology
Gen. S. Kaliskiego str., 2 00908 Warsaw, Poland*

²*Ivan Franko National University of L'viv,
Universytetska Str., 1 79000 L'viv, Ukraine*

Using the Laplace integral transformation we obtain a solution of the elasticity problem of two-dimensional oscillations of rectangular plates. The solution is obtained under the assumption that the loading surface is partially clamped.

Keywords: dynamic problem of elasticity, longitudinal oscillations, Laplace integral transformation.

Стаття надійшла до редколегії 25.01.2012

Прийнята до друку 31.05.2012

Publikacja wykonana w ramach realizacji projektu № N501 056740. Projekt został sfinansowany ze środków Narodowego Centrum Nauki.