ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76. С. 196-208
Visnyk of the Lviv University. Series Mech.-Mat. Issue 76. P. 196-208

УДК 539.3

ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН КУСКОВО-НЕОДНОРІДНИХ ТЕРМОЧУТЛИВИХ СФЕРИЧНИХ ТІЛ ЗА ОДНАКОВИХ СТАЛИХ КОЕФІЦІЄНТІВ ПУАССОНА

Борис ПРОЦЮК

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3б 79060 Львів, Україна

Визначено термопружний стан, зумовлений центрально-симетричними температурними полями та поверхневими навантаженнями у шаруватих ізотропних тілах із сферичними поверхнями поділу з урахуванням залежності від температури та координати модулів пружності і коефіцієнтів лінійного розширення. Розв'язання задач термопружності зведено до систем інтегро-алгебричних рівнянь стосовно зведених радіальних напружень. Використано функцію Гріна задачі пружності для однорідної кулі. Числові дослідження наведено для тришарової кулі з функціонально-градієнтним шаром.

Ключові слова: ізотропні термочутливі сферичні тіла, функціонально-градієнтні матеріали, термопружний стан, функція Гріна, інтегро-алгебричні рівняння.

Одновимірні задачі термопружності для одно- та багатошарових сферичних тіл із залежними від температури або координати фізико-механічними характеристиками (ФМХ) розглядали в [1-4, 7, 9-12]. Далі з використанням узагальнених функцій та функції Гріна задачі пружності для однорідної кулі пропонуємо спосіб визначення статичного та квазістатичного термопружного стану в шаруватих тілах сферичними поверхнями поділу з урахуванням залежності від температури і координати модулів пружності, коефіцієнтів лінійного розширення за однакових сталих коефіцієнтів Пуассона.

Нехай граничні поверхні пружного тіла, яке складається з ідеально контактуючих концентрично розташованих порожнистих ізотропних куль, перебувають під дією рівномірно прикладених навантажень σ_{01}, σ_{0n}, відповідно, а саме тіло перебуває в температурному полі, яке описується функцією

$$t(r) = t_1(r) + \sum_{i=1}^{n-1} \left[t_{i+1}(r) - t_i(r) \right] S(r - r_i), \tag{1}$$

де $t_p(r)$, $(p = \overline{1,n})$ – відомі розподіли температур при $r_{p-1} < r < r_p$; r, r_0 і r_p – віднесені до характерного лінійного розміру l радіальна координата, внутрішній радіус першого і зовнішній радіус p- го шару; n – кількість шарів; $S(\zeta)$ – функція Хевісайда.

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

Визначимо термопружний стан тіла за припущення, що коефіцієнти Пуассона є однаковими та сталими, а модулі пружності і коефіцієнти лінійного розширення шарів залежать від температури та координати.

Для визначення термопружного стану такого циліндра використаємо рівняння рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + 2\frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}}{r} = 0 \tag{2}$$

та співвідношення

$$\frac{\sigma_{rr}}{c(r)} = \frac{du}{dr} + 2\nu^* \frac{u}{r} - K_\nu \Phi(r) = \bar{\sigma}_r, \quad \frac{\sigma_{\phi\phi}}{c(r)} = \nu^* \frac{du}{dr} + \frac{1}{1-\nu}\frac{u}{r} - K_\nu \Phi(r) = \bar{\sigma}_\phi, \tag{3}$$

де віднесене до l радіальне переміщення $u(r)$ задовольняє рівняння

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 u)\right] = \frac{K_\nu}{E(t,r)}\frac{d}{dr}[E(t,r)\Phi(r)] - X(r) \tag{4}$$

і граничні умови

$$\sigma_{rr}\Big|_{r=r_0} = -\sigma_{01}, \ \sigma_{rr}\Big|_{r=r_n} = -\sigma_{0n}. \tag{5}$$

Тут

$$X(r) = x(r)\left(\frac{du}{dr} + 2\nu^* \frac{u}{r}\right) + \sum_{i=1}^{n-1} K_E^{(i)} \left(\frac{du}{dr} + 2\nu^* \frac{u}{r}\right)\Bigg|_{r=r_i-0} \delta(r - r_i), \ \nu^* = \frac{\nu}{1-\nu},$$

$$K_\nu = \frac{1+\nu}{1-\nu}, \ c(r) = \frac{E(t,r)}{k_0(1+\nu)}, \ k_0 = \frac{1-2\nu}{1-\nu}, \ K_E^{(i)} = \left[1 - \frac{E_i(t_i,r)}{E_{i+1}(t_{i+1},r)}\right]\Bigg|_{r=r_i};$$

функції $x(r)$, $E(t,r)$ і $\Phi(r)$ набули вигляду (1), а в межах p - го шару збігаються з $x_p(r) = \dfrac{1}{E_p(t_p,r)}\left[\dfrac{dE_p(t_p,r)}{dt_p}\dfrac{dt_p}{dr} + \dfrac{dE_p(t_p,r)}{dr}\right]$, $E_p(t_p,r)$ і $\Phi_p(r) = \displaystyle\int_0^{t_p(r)} \alpha_{tp}(\zeta,r)d\zeta$; $E_p(t_p,r)$; $\alpha_{tp}(t_p,r)$ і ν – модулі пружності, температурні коефіцієнти лінійного розширення та коефіцієнти Пуассона p-го шару.

Зауважимо, що рівняння (4) отримано внаслідок підстановки (3) в (2), диференціювання добутку двох кусково-неперервних функцій за правилом

$$\left[\phi(x)\psi(x)\right]' = \phi'(x)\psi(x) + \phi(x)\psi'(x) \tag{6}$$

та використання операцій некомутативного, але асоціативного множення

$$f(x)\delta(x-a) = f(a+0)\delta(x-a)\,,\ \delta(x-a)f(x) = f(a-0)\delta(x-a)\,, \tag{7}$$

де $\delta(\zeta)$ – дельта-функція Дірака.

Задачу (4), (5) розв'язуватимемо методом функцій Гріна. Для цього використовуємо отриману як частковий випадок з [5] функцію Гріна

$$\overline{G}(r,\rho) = \frac{1}{3}\left\{\frac{r}{\rho^2}S(\rho-r) + \frac{\rho}{r^2}S(r-\rho) + \frac{\rho r}{r_n^3 - r_0^3}\left[\psi_0^{(1)}(\rho) + \frac{kr_0^3}{r^3}\psi_n^{(1)}(\rho)\right]\right\}, \tag{8}$$

тобто функцію, що є розв'язком задачі

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\overline{G})\right] = -\frac{1}{\rho^2}\delta(r-\rho), \tag{9}$$

$$\left(d\overline{G}\big/dr + 2\nu^*\,\overline{G}\big/r\right)\Big|_{r=r_0} = \left(d\overline{G}\big/dr + 2\nu^*\,\overline{G}\big/r\right)\Big|_{r=r_n} = 0. \tag{10}$$

Тут і далі $\psi_m^{(i)}(\rho) = 1\big/k + (-2)^{i-1}\,r_m^3\big/\rho^3$, $m = 0,n$; $k = 0.5(1+\nu)\big/(1-2\nu)$.

Домножимо (4), (9) відповідно на $r^2\overline{G}(r,\rho)$, $r^2u(r)$ і віднімемо отримані рівняння. Інтегруючи різницю в межах від r_0 до r_n, одержуємо

$$u(\rho) = \left\{r^2\left(\overline{G}\frac{du}{dr} - u\frac{d\overline{G}}{dr}\right)\right\}\Bigg|_{r_0}^{r_n} - K_\nu\int_{r_0}^{r_n}\frac{r^2\overline{G}(r,\rho)}{E(t,r)}\frac{d}{dr}[E(t,r)\Phi(r)]dr +$$

$$+\int_{r_0}^{r_n} r^2\overline{G}(r,\rho)X(r)dr\,,\ r_0 < \rho < r_n. \tag{11}$$

Після інтегрування частинами у другому доданку (11) і урахування граничних умов (5) і (10) прийдемо до такого співвідношення:

$$u(\rho) = K_\nu\int_{r_0}^{r_n}\frac{d}{dr}\left[r^2\overline{G}(r,\rho)\frac{1}{E(t,r)}\right]E(t,r)\Phi(r)dr + \int_{r_0}^{r_n} r^2\overline{G}(r,\rho)X(r)dr + u^y(\rho)\,, \tag{12}$$

де

$$u^y(\rho) = r_0^2\overline{G}(r_0,\rho)\,\sigma_{01}\big/c_1 - r_n^2\overline{G}(r_n,\rho)\,\sigma_{0n}\big/c_n\,.$$

Підставивши в (12) вирази для $\overline{G}(r,\rho)$, $X(r)$ та зробивши відповідні перетворення з використанням (7), отримаємо

$$u(\rho) = K_\nu\frac{1}{\rho^2}\int_{r_0}^{\rho} r^2\Phi(r)dr + K_\nu\frac{\rho\psi_0^{(1)}(\rho)}{r_n^3 - r_0^3}\int_{r_0}^{r_n} r^2\Phi(r)dr +$$

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

$$+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{\rho^2}\int_{r_0}^{\rho} r^3 x(r)\bar{\sigma}_r(r)dr + \rho\int_{\rho}^{r_n} x(r)\bar{\sigma}_r(r)dr\right] +$$

$$+\frac{1}{3(r_n^3 - r_0^3)}\left[\rho\psi_0^{(1)}(\rho)\int_{r_0}^{r_n} r^3 x(r)\bar{\sigma}_r(r)dr + kr_0^3\rho\psi_n^{(1)}(\rho)\int_{r_0}^{r_n} x(r)\bar{\sigma}_r(r)dr\right] +$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1} K_E^{(i)}\bar{\sigma}_r(r_i - 0)r_i\bar{G}(r_i,\rho) + u^y(\rho). \tag{13}$$

Для переміщення у p-му шарі ($r_{p-1} < \rho < r_p$) з (13) отримаємо

$$u_p(\rho) = K_\nu\rho\{[\psi_n^{(1)}(\rho)d_{pt} + \psi_0^{(1)}(\rho)d_{pt}^*]/(r_n^3 - r_0^3) + V_p(\rho)/\rho^3\} +$$

$$+\frac{\rho}{3}\left[\frac{\psi_n^{(1)}(\rho)d_p + \psi_0^{(1)}(\rho)d_p^*}{r_n^3 - r_0^3} + \frac{\chi_{p2}(\rho)}{\rho^3} - \chi_{p1}(\rho)\right] + \sum_{i=1}^{n-1} K_E^{(i)}\bar{\sigma}_{ri}(r_i)r_i^2\bar{G}_p^{(i)}(\rho) + u^y(\rho), \tag{14}$$

де

$$d_{pt} = \sum_{i=1}^{p-1} V_i(r_i),\ d_{pt}^* = \sum_{i=p}^{n} V_i(r_i),\ V_p(\rho) = \int_{r_{p-1}}^{\rho} r^2\Phi_p(r)dr;$$

$$d_p = \sum_{i=1}^{p-1}\chi_{i2}(r_i) + kr_0^3\sum_{i=1}^{p-1}\chi_{i1}(r_i),\quad d_p^* = \sum_{i=p}^{n}\chi_{i2}(r_i) + kr_n^3\sum_{i=p}^{n}\chi_{i1}(r_i),$$

$$\chi_{p1}(\rho) = \int_{r_{p-1}}^{\rho} x_p(r)\bar{\sigma}_{rp}(r)dr,\quad \chi_{p2}(\rho) = \int_{r_{p-1}}^{\rho} r^3 x_p(r)\bar{\sigma}_{rp}(r)dr;$$

$$\bar{G}_p^{(i)}(\rho) = \frac{r_i\rho}{3(r_n^3 - r_0^3)}\left[\psi_0^{(1)}(\rho) + \frac{kr_0^3}{r_i^3}\psi_n^{(1)}(\rho)\right] + \frac{1}{3}\begin{cases}\rho/r_i^2, p \le i\\ r_i/\rho^2, p > i\end{cases}.$$

Одержимо співвідношення для інших компонент напружено-деформованого стану.

Продиференціювавши (14) за ρ, отримаємо вираз для радіальної деформації

$$\varepsilon_{rp}(\rho) = K_\nu\left[\frac{\psi_n^{(2)}(\rho)d_{pt} + \psi_0^{(2)}(\rho)d_{pt}^*}{r_n^3 - r_0^3} - \frac{2}{\rho^3}V_p(\rho)\right] + K_\nu\Phi_p(\rho) +$$

$$+\frac{1}{3}\left[\frac{\psi_n^{(2)}(\rho)d_p + \psi_0^{(2)}(\rho)d_p^*}{r_n^3 - r_0^3} - \frac{2\chi_{p2}(\rho)}{\rho^3} - \chi_{p1}(\rho)\right] + \sum_{i=1}^{n-1} K_E^{(i)}\bar{\sigma}_{ri}(r_i)r_i^2\bar{e}_p^{(i)}(\rho) + \varepsilon_r^y(\rho), \tag{15}$$

де

$$\overline{e}_p^{(i)}(\rho) = \frac{r_i}{3(r_n^3 - r_0^3)}\left[\psi_0^{(2)}(\rho) + \frac{kr_0^3}{r_i^3}\psi_n^{(2)}(\rho)\right] + \frac{1}{3}\begin{cases} 1\big/r_i^2, p \le i \\ -2r_i\big/\rho^3, p > i \end{cases},$$

$$\varepsilon_r^y(\rho) = r_0^2\overline{e}_1^{(0)}(\rho)\sigma_{01}\big/c_1 - r_n^2\overline{e}_n^{(n)}(\rho)\sigma_{0n}\big/c_n .$$

Підставляючи (14), (15) в отримані на підставі (3) залежності для p-го шару, одержимо

$$\overline{\sigma}_{rp}(\rho) = f_p^t(\rho) + \frac{2k_0}{3\rho^3}\left[\frac{\rho^3 - r_n^3}{r_n^3 - r_0^3}d_p + \frac{\rho^3 - r_0^3}{r_n^3 - r_0^3}d_p^* - \chi_{p2}(\rho) - k\rho^3\chi_{p1}(\rho)\right] +$$
$$+\sum_{i=1}^{n-1} K_E^{(i)}\overline{\sigma}_{ri}(r_i)r_i^2\overline{\tau}_{rp}^{(i)}(\rho) + \sigma_r^y(\rho), \tag{16}$$

$$\overline{\sigma}_{\phi p}(\rho) = \frac{K_\nu k_0}{\rho^3}\left[\frac{2\rho^3 + r_n^3}{r_n^3 - r_0^3}d_{pt} + \frac{2\rho^3 + r_0^3}{r_n^3 - r_0^3}d_{pt}^* + V_p(\rho) - \rho^3\Phi_p(\rho)\right] +$$
$$+\frac{k_0}{3\rho^3}\left[\frac{2\rho^3 + r_n^3}{r_n^3 - r_0^3}d_p + \frac{2\rho^3 + r_0^3}{r_n^3 - r_0^3}d_p^* + \chi_{p2}(\rho) - 2k\rho^3\chi_{p1}(\rho)\right] +$$
$$+\sum_{i=1}^{n-1} K_E^{(i)}\overline{\sigma}_{ri}(r_i)r_i^2\overline{\tau}_{\phi p}^{(i)}(\rho) + \sigma_\phi^y(\rho). \tag{17}$$

Тут

$$f_p^t(\rho) = 2K_\nu k_0\frac{1}{\rho^3}\left[\frac{\rho^3 - r_n^3}{r_n^3 - r_0^3}d_{pt} + \frac{\rho^3 - r_0^3}{r_n^3 - r_0^3}d_{pt}^* - V_p(\rho)\right],$$

$$\overline{\tau}_{rp}^{(i)}(\rho) = \frac{2k_0 r_i}{3\rho^3}\left[\frac{\rho^3 - r_0^3}{r_n^3 - r_0^3} + k\frac{r_0^3}{r_i^3}\frac{\rho^3 - r_n^3}{r_n^3 - r_0^3}\right] + \frac{K_\nu}{3}\begin{cases} 1\big/r_i^2, p \le i \\ -r_i\big/(k\rho^3), p > i \end{cases},$$

$$\overline{\tau}_{\phi p}^{(i)}(\rho) = \frac{k_0 r_i}{3\rho^3}\left[\frac{2\rho^3 + r_0^3}{r_n^2 - r_0^2} + k\frac{r_0^3}{r_i^3}\frac{2\rho^3 + r_n^3}{r_n^2 - r_0^2}\right] + \frac{K_\nu}{3}\begin{cases} 1\big/r_i^2, p \le i \\ r_i\big/(2k\rho^3), p > i \end{cases},$$

$$\sigma_r^y(\rho) = r_0^2\overline{\tau}_{r1}^{(0)}(\rho)\sigma_{01}\big/c_1 - r_n^2\overline{\tau}_{rn}^{(n)}(\rho)\sigma_{0n}\big/c_n ,$$

$$\sigma_\phi^y(\rho) = r_0^2\overline{\tau}_{\phi 1}^{(0)}(\rho)\sigma_{01}\big/c_1 - r_n^2\overline{\tau}_{\phi n}^{(n)}(\rho)\sigma_{0n}\big/c_n .$$

Невідомі зведені напруження $\overline{\sigma}_{rp}(\rho)$, через які виражаються компоненти термопружного стану, розшукуватимемо у вигляді суми

$$\overline{\sigma}_{rp} = \sigma_{rp}^t(\rho) + \sigma_{rp}^y(\rho). \tag{18}$$

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

Тут перший доданок відповідає напруженням, які зумовленні температурним полем, другий (з урахуванням залежності від температури і координат тільки модулів пружності) – поверхневими навантаженнями.

Відповідно до (18) інтегральні оператори $\chi_{pj}(\rho)\,(j=1,2)$, d_p і d_p^* набудуть вигляду

$$\chi_{pj}(\rho)=\chi_{pj}^t(\rho)+\chi_{pj}^y(\rho),\qquad d_p=d_p^t+d_p^y\ ,\quad d_p^*=d_p^{*t}+d_p^{*y}, \tag{19}$$

де

$$\chi_{p1}^s(\rho)=\int\limits_{r_{p-1}}^{\rho}x_p(r)\sigma_{rp}^s(r)dr\ ,\ \chi_{p2}^s(\rho)=\int\limits_{r_{p-1}}^{\rho}r^3x_p(r)\sigma_{rp}^s(r)dr\,;$$

$$d_p^s=\sum_{i=1}^{p-1}\chi_{i2}^s(r_i)+kr_0^3\sum_{i=1}^{p-1}\chi_{i1}^s(r_i),\ f_p^y(\rho)=\sigma_r^y(\rho)\,,\ d_p^{*s}=\sum_{i=p}^{n}\chi_{i2}^s(r_i)+kr_n^3\sum_{i=p}^{n}\chi_{i1}^s(r_i).$$

Підставивши співвідношення (18), (19) у (16), отримаємо для знаходження функцій $\sigma_{rp}^s(\rho)$ $(s=t,y)$ систем інтегро-алгебричних рівнянь

$$\overline{\sigma}_{rp}^s(\rho)-\frac{2k_0}{3\rho^3}\left[\frac{\rho^3-r_n^3}{r_n^3-r_0^3}d_p^s+\frac{\rho^3-r_0^3}{r_n^3-r_0^3}d_p^{*s}-\chi_{p2}^s(\rho)-k\rho^3\chi_{p1}^s(\rho)\right]-$$
$$-\sum_{i=1}^{n-1}K_E^{(i)}\sigma_{ri}^s(r_i)r_i^2\overline{\tau}_{rp}^{(i)}(\rho)=f_p^s(\rho)\,,\qquad f_p^y(\rho)=\sigma_r^y(\rho)\,. \tag{20}$$

Розглянемо часткові випадки. Для простору зі сферичною порожниною $(r_n\to\infty)$ отримаємо

$$u_p(\rho)=K_\nu[d_{pt}+V_p(\rho)]\big/\rho^2+[d_p+\chi_{p2}(\rho)-\rho^3\chi_{p1}(\rho)]\big/(3\rho^2)+k\rho\,\psi_0^{(1)}(\rho)d_{p1}^*\big/3+$$
$$+\sum_{i=1}^{n-1}K_E^{(i)}\overline{\sigma}_{ri}(r_i)r_i^2\overline{G}_p^{(i)}(\rho)+u^y(\rho)\,,$$

$$\varepsilon_{rp}(\rho)=K_\nu\,[-2d_{pt}-2V_p(\rho)+\rho^3\Phi_p(\rho)]\big/\rho^3-[2d_p+2\chi_{p2}(\rho)+\rho^3\chi_{p1}(\rho)]\big/(3\rho^3)+$$
$$+k\psi_0^{(2)}(\rho)d_{p1}^*\big/3+\sum_{i=1}^{n-1}K_E^{(i)}\overline{\sigma}_{ri}(r_i)r_i^2\overline{e}_p^{(i)}(\rho)+\varepsilon_r^y(\rho)\,,$$

$$\overline{\sigma}_{rp}(\rho)=f_p^t(\rho)-2k_0\,[d_p-k(\rho^3-r_0^3)d_{p1}^*+\chi_{p2}(\rho)+k\rho^3\chi_{p1}(\rho)]\big/(3\rho^3)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n-1}K_E^{(i)}\overline{\sigma}_{ri}(r_i)r_i^2\overline{\tau}_{rp}^{(i)}(\rho)+\sigma_r^y(\rho)\,,$$

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

$$\overline{\sigma}_{\phi p}(\rho) = k_0 K_\nu \left[d_{pt} + V_p(\rho) - \rho^3 \Phi_p(\rho)\right] \big/ \rho^3 + k_0 [d_p + k(2\rho^3 + r_0^3) d_{p1}^* +$$

$$+ \chi_{p2}(\rho) - 2k\rho^3 \chi_{p1}(\rho)] \big/ (3\rho^3) + \sum_{i=1}^{n-1} K_E^{(i)} \overline{\sigma}_{ri}(r_i) r_i^2 \overline{\tau}_{\phi p}^{(i)}(\rho) + \sigma_\phi^y(\rho), \tag{21}$$

де

$$f_p^t(\rho) = -2k_0 K_\nu [d_{pt} + V_p(\rho)] \big/ \rho^3 ; \quad d_{p1}^* = \sum_{i=p}^{n-1} \chi_{i1}(r_i) + \chi_{n1}(\infty);$$

$$u^y(\rho) = r_0^2 \overline{G}_1^{(0)}(\rho) \sigma_{01} \big/ c_1 , \ \varepsilon_r^y = r_0^2 \overline{e}_1^{(0)}(\rho) \sigma_{01} \big/ c_1 ,$$

$$\sigma_r^y(\rho) = r_0^2 \overline{\tau}_{r1}^{(0)}(\rho) \sigma_{01} \big/ c_1 , \ \sigma_\phi^y(\rho) = r_0^2 \overline{\tau}_{\phi 1}^{(0)}(\rho) \sigma_{01} \big/ c_1 ;$$

$$\overline{G}_p^{(i)}(\rho) = \frac{kr_0^3}{3r_i^2 \rho^2} + \frac{1}{3} \begin{cases} \rho \big/ r_i^2 , p \le i \\ r_i \big/ \rho^2 , p > i \end{cases}, \ \overline{e}_p^{(i)} = -\frac{2kr_0^3}{3r_i^2 \rho^3} + \frac{1}{3} \begin{cases} 1 \big/ r_i^2 , p \le i \\ -2r_i \big/ \rho^3 , p > i \end{cases},$$

$$\overline{\tau}_{rp}^{(i)}(\rho) = -\frac{K_\nu r_0^3}{3r_i^2 \rho^3} + \frac{K_\nu}{3} \begin{cases} 1 \big/ r_i^2 , p \le i \\ -r_i \big/ (k\rho^3), p > i \end{cases}, \ \overline{\tau}_{\phi p}^{(i)}(\rho) = \frac{K_\nu r_0^3}{6r_i^2 \rho^3} + \frac{K_\nu}{3} \begin{cases} 1 \big/ r_i^2 , p \le i \\ r_i \big/ (2k\rho^3), p > i \end{cases};$$

$\sigma_{rp}^s(\rho)$ ($s = t, y$) розв'язки систем інтегро-алгебричних рівнянь

$$\sigma_{rp}^s(\rho) + 2k_0 \left[d_p^s + \chi_{p2}^s(\rho) + k\rho^3 \chi_{p1}^s(\rho)\right] \big/ (3\rho^3) - \sum_{i=1}^{n-1} K_E^{(i)} \sigma_{ri}^s(r_i) r_i^2 \overline{\tau}_{rp}^{(i)}(\rho) = f_p^s(\rho). \tag{22}$$

Прийнявши фізико-механічні характеристики складових однаковими та такими, як у першої складової, з (14)–(22) отримаємо співвідношення для визначення компонент термопружного стану:

– в неоднорідній порожнистій термочутливій кулі

$$u(\rho) = K_\nu \left[d_{1t}^* \frac{\rho \psi_0^{(1)}(\rho)}{r_n^3 - r_0^3} + \frac{V_1(\rho)}{\rho^2} \right] + \frac{1}{3} \left[d_1^* \frac{\rho \psi_0^{(1)}(\rho)}{r_n^3 - r_0^3} + \frac{\chi_{12}(\rho)}{\rho^2} - \rho \chi_{11}(\rho) \right] + u^y(\rho),$$

$$\varepsilon_r(\rho) = K_\nu \left[d_{1t}^* \frac{\psi_0^{(2)}(\rho)}{r_n^3 - r_0^3} - \frac{2V_1(\rho)}{\rho^3} + \Phi_1(\rho) \right] + \frac{1}{3} \left[d_1^* \frac{\psi_0^{(2)}(\rho)}{r_n^3 - r_0^3} - \frac{2\chi_{12}(\rho)}{\rho^3} - \chi_{11}(\rho) \right] + \varepsilon_r^y(\rho),$$

$$\overline{\sigma}_r(\rho) = f_1^t(\rho) + \frac{2k_0}{3\rho^3} \left[d_1^* \frac{\rho^3 - r_0^3}{r_n^3 - r_0^3} - \chi_{12}(\rho) - k\rho^3 \chi_{11}(\rho) \right] + \sigma_r^y(\rho),$$

$$\overline{\sigma}_\phi(\rho) = \frac{K_\nu k_0}{\rho^3} \left[d_{1t}^* \frac{2\rho^3 + r_0^3}{r_n^3 - r_0^3} + V_1(\rho) - \rho^3 \Phi_1(\rho) \right] +$$

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

$$+\frac{k_0}{3\rho^3}\left[d_1^*\frac{2\rho^3+r_0^3}{r_n^3-r_0^3}+\chi_{12}(\rho)-2k\rho^3\chi_{11}(\rho)\right]+\sigma_\phi^y(\rho), \tag{23}$$

де $f_1^t(\rho)=2K_\nu k_0\left[d_{pt}^*(\rho^3-r_0^3)\big/(r_n^3-r_0^3)-V_p(\rho)\right]\big/\rho^3$; $\sigma_{r1}^s(\rho)$ ($s=t,y$) розв'язки систем інтегро-алгебричних рівнянь

$$\overline{\sigma}_{r1}^s(\rho)-2k_0\left[d_1^{*s}(\rho^3-r_0^3)\big/(r_n^3-r_0^3)-\chi_{12}^s(\rho)-k\rho^3\chi_{11}^s(\rho)\right]\big/(3\rho^3)=f_1^s(\rho); \tag{24}$$

– в неоднорідному термочутливому просторі зі сферичною порожниною

$$u(\rho)=K_\nu[d_{1t}+V_1(\rho)]\big/\rho^2+[d_1+\chi_{12}(\rho)-\rho^3\chi_{11}(\rho)]\big/(3\rho^2)+k\rho\,\psi_0^{(1)}(\rho)\chi_{11}(\infty)\big/3+$$
$$+u^y(\rho),$$
$$\varepsilon_r(\rho)=K_\nu[-2d_{1t}-2V_1(\rho)+\rho^3\Phi_1(\rho)]\big/\rho^3-[2d_1+2\chi_{12}(\rho)+\rho^3\chi_{11}(\rho)]\big/(3\rho^3)+$$
$$+k\psi_0^{(2)}(\rho)\chi_{11}(\infty)\big/3+\varepsilon_r^y(\rho),$$
$$\overline{\sigma}_r(\rho)=f_1^t(\rho)-2k_0[d_1-k(\rho^3-r_0^3)\chi_{n1}(\infty)+\chi_{12}(\rho)+k\rho^3\chi_{11}(\rho)]\big/(3\rho^3)+\sigma_r^y(\rho),$$
$$\overline{\sigma}_\phi(\rho)=k_0K_\nu[d_{1t}+V_1(\rho)-\rho^3\Phi_1(\rho)]\big/\rho^3+k_0[d_1+k(2\rho^3+r_0^3)\chi_{11}(\infty)+$$
$$+\chi_{12}(\rho)-2k\rho^3\chi_{11}(\rho)]\big/(3\rho^3)+\sigma_\phi^y(\rho), \tag{25}$$

де $f_1^t(\rho)=-2k_0K_\nu[d_{1t}+V_1(\rho)]\big/\rho^3$; $\sigma_{r1}^s(\rho)$ ($s=t,y$) розв'язки систем інтегро-алгебричних рівнянь

$$\sigma_{r1}^s(\rho)+2k_0\left[d_1^s+\chi_{12}^s(\rho)+k\rho^3\chi_{11}^s(\rho)\right]\big/(3\rho^3)=f_1^s(\rho). \tag{26}$$

Прийнявши в (14)–(18), (20)–(26) $r_0=0$, отримаємо формули для відповідних суцільних тіл. У цьому разі треба врахувати $V_1(\rho)\big/\rho^2\to 0$, $3V_1(\rho)\big/\rho^3\to\Phi_1(0)$, $\chi_{12}(\rho)\big/\rho^2\to 0$, $\chi_{12}(\rho)\big/\rho^3\to 0$ при $\rho\to 0$.

Зауважимо, що отримані співвідношення можна використати для визначення термопружного стану, зумовленого нестаціонарним температурним полем.

Наприклад, проведемо за змінних і сталих ФМХ числові дослідження статичного термопружного стану у вільній від силових навантажень порожнистій тришаровій кулі, на внутрішній поверхні якої задано тепловий потік $q_0=6\cdot 10^5$ [Вт/м^2], а на зовнішній – температуру $t_c=20\,^\circ$C. Залежності ФМХ першого і третього шарів брали у вигляді

$$\lambda_t^{(1)}(T_1)=1.71+0.21\cdot 10^{-3}T_1+0.116\cdot 10^{-6}T_1^2\ [\text{Вт/мК}],$$

$$\alpha_t^{(1)}(T_1) = 13.3\cdot 10^{-6} - 18.9\cdot 10^{-9}T_1 + 12.7\cdot 10^{-12}T_1^2\,[\text{К}^{-1}],$$
$$E_1(T_1) = 132.2 - 50.3\cdot 10^{-3}T_1 - 8.1\cdot 10^{-6}T_1^2\,[\text{ГПа}],$$
$$\lambda_t^{(3)}(T_3) = 14.3 + 0.014T_3\,[\text{Вт/мК}],$$
$$\alpha_t^{(3)}(T_3) = 14.854\cdot 10^{-6} + 0.0033\cdot 10^{-6}T_3\,[\text{К}^{-1}],$$
$$E_3(T_3) = 206.11 - 0.07T_3\,[\text{ГПа}],$$

а другого шару визначали на підставі співвідношення [8]

$$p_2(T_2,\rho) = \frac{1}{2}[p_1(T_2) - p_3(T_2)]\cos\left(\pi\frac{\rho-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}\right) + \frac{1}{2}[p_1(T_2) + p_3(T_2)]. \qquad (27)$$

Тут $p_1(T), p_3(T)$ відповідні залежності першого та третього шарів; $\lambda_t^{(i)}(T_i)$ – коефіцієнти теплопровідності; $T_i = t_i(\rho) - 273\,^\circ\text{C}$.

Сталим ФМХ відповідали такі середні значення наведених вище залежностей: $\lambda_{s1} = 1.945\,[\text{Вт/(м}^\circ\text{C)}]$, $\lambda_{s2} = 13.18398\,[\text{Вт/(м}^\circ\text{C)}]$, $\lambda_{s3} = 24.42\,[\text{Вт/(м}^\circ\text{C)}]$, $\alpha_{s1} = 0.88457\cdot 10^{-5}\,[^\circ\text{C}^{-1}]$, $\alpha_{s2} = 1.30428\cdot 10^{-5}\,[^\circ\text{C}^{-1}]$, $\alpha_{s3} = 1.72399\cdot 10^{-5}\,[^\circ\text{C}^{-1}]$, $E_{s1} = 89.95874\,[\text{ГПа}]$, $E_{s2} = 122.72937\,[\text{ГПа}]$, $E_{s3} = 155.5\,[\text{ГПа}]$.

Розподіли температур $t_i(\rho)$ знаходили з системи інтегральних рівнянь [6]

$$t_3(\rho) = t_c + t_s r_0^2\int_\rho^{r_3}\frac{\lambda_{s1}}{\xi^2\lambda_t^{(3)}[t_3(\xi)]}d\xi,\ t_2(\rho) = t_3(r_2) + t_s r_0^2\int_\rho^{r_2}\frac{\lambda_{s1}}{\xi^2\lambda_t^{(2)}[t_2(\xi),\xi]}d\xi,$$
$$t_1(\rho) = t_2(r_1) + t_s r_0^2\int_\rho^{r_1}\frac{\lambda_{s1}}{\xi^2\lambda_t^{(1)}[t_1(\xi)]}d\xi,\ (t_s = q_0 l/\lambda_{s1}), \qquad (28)$$

яку, як і систему (20) ($n = 3, \sigma_r^y(\rho) = 0, \nu = 0.3$), розв'язували методом послідовних наближень при $r_0 = 0.8$, $r_1 = 0.82, r_2 = 0.9$, $r_3 = 1$, $l = 0.05$ м.

У табл. подано за сталих ФМХ значення безрозмірних температурних переміщень $\tilde{u} = u/(\alpha_{s1}t_s)$, напружень $\tilde{\sigma}_j = \sigma_{jj}/(E_{s1}\alpha_{s1}t_s)$ $(j = r,\phi)$ і деформацій $\tilde{\varepsilon}_r = \varepsilon_r/(\alpha_{s1}t_s)$ на обмежувальних і серединних поверхнях шарів. Для кожного ρ підрахунок виконано на підставі точного розв'язку [5] (третій рядок) і наближеного розв'язку системи (20) (перший рядок для двох, другий – шести наближень). Бачимо швидку збіжність методу послідовних наближень і високу точність визначення компонент термопружного стану запропонованим способом.

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

ρ	$\tilde{u}$	$\tilde{\varepsilon}_r$	$10^2\tilde{\sigma}_r$	$\tilde{\sigma}_\phi$
r_0	0.009169649 0.009169628 0.009169621	0.058361636 0.058361658 0.058361657	0.0 0.0 0.0	-0.036076596 -0.036076632 -0.036076639
$\frac{r_0+r_1}{2}$	0.009656166 0.009656146 0.009656138	0.039101219 0.039101239 0.039101242	-0.070621712 -0.070635727 -0.070635652	-0.021614068 -0.021614104 -0.021614113
r_1-0	0.009954767 0.009954747 0.009954739	0.020768899 0.020768919 0.020768924	-0.104265018 -0.104292373 -0.104292215	-0.007680567 -0.007680603 -0.007680613
r_1+0	0.009954767 0.009954747 0.009954739	0.036134971 0.036135045 0.036135047	-0.104465263 -0.104292365 -0.104292215	-0.026224586 -0.026224592 -0.026224604
$\frac{r_1+r_2}{2}$	0.011067321 0.011067303 0.011067294	0.020004641 0.020004706 0.020004711	-0.257404394 -0.257306785 -0.257306575	-0.010061677 -0.010061679 -0.010061693
r_2-0	0.011591608 0.011591593 0.011591584	0.006615375 0.006615433 0.006615440	-0.259647698 -0.259529655 -0.259529503	0.003978577 0.003978579 0.003978562
r_2+0	0.011591608 0.011591593 0.011591584	0.013049257 0.013049274 0.013049280	-0.259688265 -0.259529634 -0.259529503	-0.002820938 -0.002820976 -0.002820996
$\frac{r_2+r_3}{2}$	0.011978517 0.011978503 0.011978493	0.002796434 0.002796448 0.002796456	-0.187639468 -0.187568482 -0.187568352	0.011171732 0.011171697 0.011171675
r_3	0.011903644 0.011903630 0.011903620	-0.005507542 -0.005507531 -0.005507522	0.0 0.0 0.0	0.023151121 0.023151087 0.023151063

На рис. 1, 2 зображено графіки розподілу радіальних і кільцевих напружень за товщиною кулі. Криві *1* відповідають залежним від температури, *2* – сталим характеристикам крайніх шарів. Криві *3* побудовано за всіх сталих характеристик шарів.

З їхнього аналізу випливає, що не врахування змінності ФМХ може призвести, залежно від розглядуваної поверхні, до завищення та до заниження відповідних напружень. Зокрема, абсолютні значення кільцевих напружень на внутрішній поверхні кулі за сталих ФМХ на 60% більші, ніж за температурозалежних.

Отже, запропоновано спосіб розв'язання за сталих однакових коефіцієнтів Пуассона та залежних від температури і координати решти ФМХ статичних і квазістатичних задач термопружності для шаруватих зі сферичними поверхнями поділу тіл, які перебувають під дією центрально-симетричних температурних полів і поверхневих навантажень. Він передбачає розв'язання стосовно зведених радіальних напружень систем інтегро-алгебричних рівнянь, отриманих з використанням узагальнених

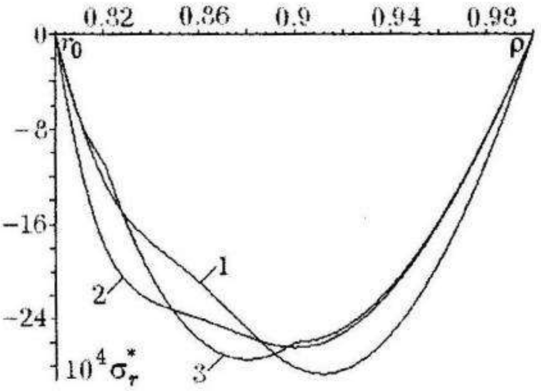

Рис. 1

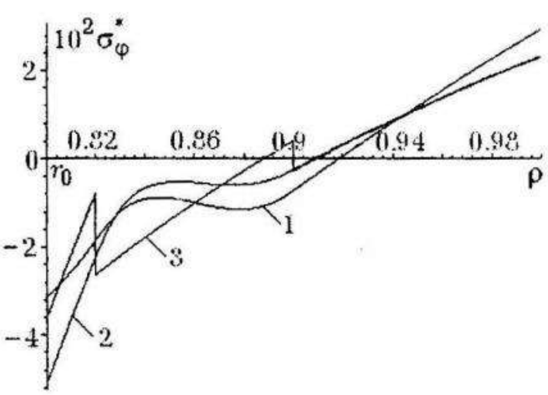

Рис. 2

функцій і функції Гріна задачі пружності для однорідної кулі. На модельній задачі показано його високу точність.

Список використаної літератури

1. *Калиняк Б.М.* Визначення напружень і переміщень у неоднорідній порожнистій кулі зведенням відповідної задачі термопружності до інтегральних рівнянь / Б.М. Калиняк, І.І. Яцків // Прикл. пробл. мех. і мат. – 2009. – Вип. 7. – С. 142–150.

2. *Махоркин И.Н.* Исследование температурных полей и напряжений в неоднородных сферических телах на основе уравнений с особенностями импульсного типа / И.Н. Махоркин: автореф. дис. канд. фіз.-мат. наук: спец. 01.02.04 – мех. деформ. тв. тіла. – Львов, 1981.

3. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Т. 3: Термопружність термочутливих тіл низької електропровідності / Р.М. Кушнір, В.С. Попович. – Львів : СПОЛОМ, 2009.

4. *Постольник Ю.С.* Металургійна термомеханіка / Ю.С. Постольник, А.П. Огурцов. –Дніпропетровськ: Системні технології, 2002.

5. *Процюк Б.В.* Застосування методу функцій Гріна до визначення термопружного стану шаруватих трансверсально-ізотропних сферичних тіл / Б.В. Процюк // Мат. методи та фіз.- мех. поля. – 2004. – **47,** № 3. – С. 95–109.

6. *Процюк Ю.Б.* Статичні задачі термопружності для шаруватих термочутливих плит за кубічної залежності коефіцієнтів теплопровідності від температури / Ю.Б. Процюк // Мат. мет. та фіз.-мех. поля. 2010. – **53**, № 4.– С. 151–161.

7. *Процюк Ю.Б.* Задачі термопружності для тришарових термочутливих тіл простої геометричної форми з функціонально-градієнтним шаром / Ю.Б. Процюк // IV Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я.С. Підстригача. (Львів , 24-27

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

травня 2011 р.): тези доповідей. – Львів : Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2011. – С. 71–72.

8. *Ganczarski A.* A study on coupled thermo-elasto-plastic-damage dissipative phenomena: models and application to some innovative materals / A. Ganczarski, J. Skrzypek // J. Thermal Stresses. – 2009. – **32**. – P. 698–751.

9. *Kushnir R.* A Method of the Green's Functions for Quasistatic Thermoelasticity Problems in Layered Thermosensitive Bodies under Complex Heat Exchange / R. Kushnir, B. Protsiuk // Operator Theory: Advances and Applications. – 2009. – Vol. 191. – P. 143–154.

10. *Noda N.* Thermal Stresses in Materials with Temperature-Dependent Properties, in R.B. Hetnarski (ed.) / N. Noda // Thermal Stresses I. – 1986. – P. 391–483.

11. *Nowinski J.* Thermoelastic Problem for an Isotropic Sphere with Temperature dependent Properties / J. Nowinski // The Journal of Applied Mathematics and Physics. – 1959. – **10**, № 39. – P. 565–575.

12. *Obata Y.* Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient material / Y. Obata, N. Noda // J. Thermal Stresses. – 1994. – **17**. – P. 471–487.

ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ТЕЛ ПРИ ОДИНАКОВЫХ ПОСТОЯННЫХ КОЭФФИЦИЕНТАХ ПУАССОНА

Борис ПРОЦЮК

Институт прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Подстригача НАН Украины, ул. Научная, 3б 79060 Львов, Украина

Определено термоупругое состояние, обусловленное центрально-симметричными температурными полями и поверхностными нагрузками в слоистых изотропных телах со сферическими поверхностями раздела с учетом зависимости от координаты и температуры модулей упругости и коэффициентов линейного расширения. Решение задачи термоупругости сведено к системам интегро-алгебраических уравнений относительно приведенных радиальных напряжений. При этом использованы функции Грина задачи упругости для однородной сферы. Численные исследования приведены для трехслойной сферы с функционально-градиентным слоем.

Ключевые слова: изотропные слоистые термочувствительные сферические тела, функционально-градиентные материалы, термоупругое состояние, функция Грина, интегро-алгебраические уравнения.

THERMOELASTIC STATE OF PIECEWISE-INHOMOGENEOUS THERMOSENSITIVE SPHERICAL BODIES AT SIMILAR CONSTANT POISSON'S RATIOS

Borys PROTSIUK

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
Ukrainian National Academy of Sciences,
Naukova Str., 3b 79060 Lviv, Ukraine

The thermoelastic state caused by centrally-symmetric temperature fields and surface loadings in layer isotropic bodies with spherical interfaces has been determined with regard for dependence on temperature and coordinate of elasticity moduli and coefficients of linear expansion. The solution of thermoelasticty problems has been reduced to a system of integro-algebraic equations with respect to the brought radial stresses. In addition Greens function of elasticity problem for homogeneous sphere has been used. Numerical studies are presented for a three-layer sphere with functionally-gradient layer.

Key words: isotropic layer thermosensitive spherical bodies, functionally-gradient materials, thermoelastic state, Greens function, integro-algebraic equations.

Стаття надійшла до редколегії 09.02.2012
Прийнята до друку 31.05.2012

Дослідження проведені за часткової фінансової підтримки ДФФД України (проект № Ф41.2/001).